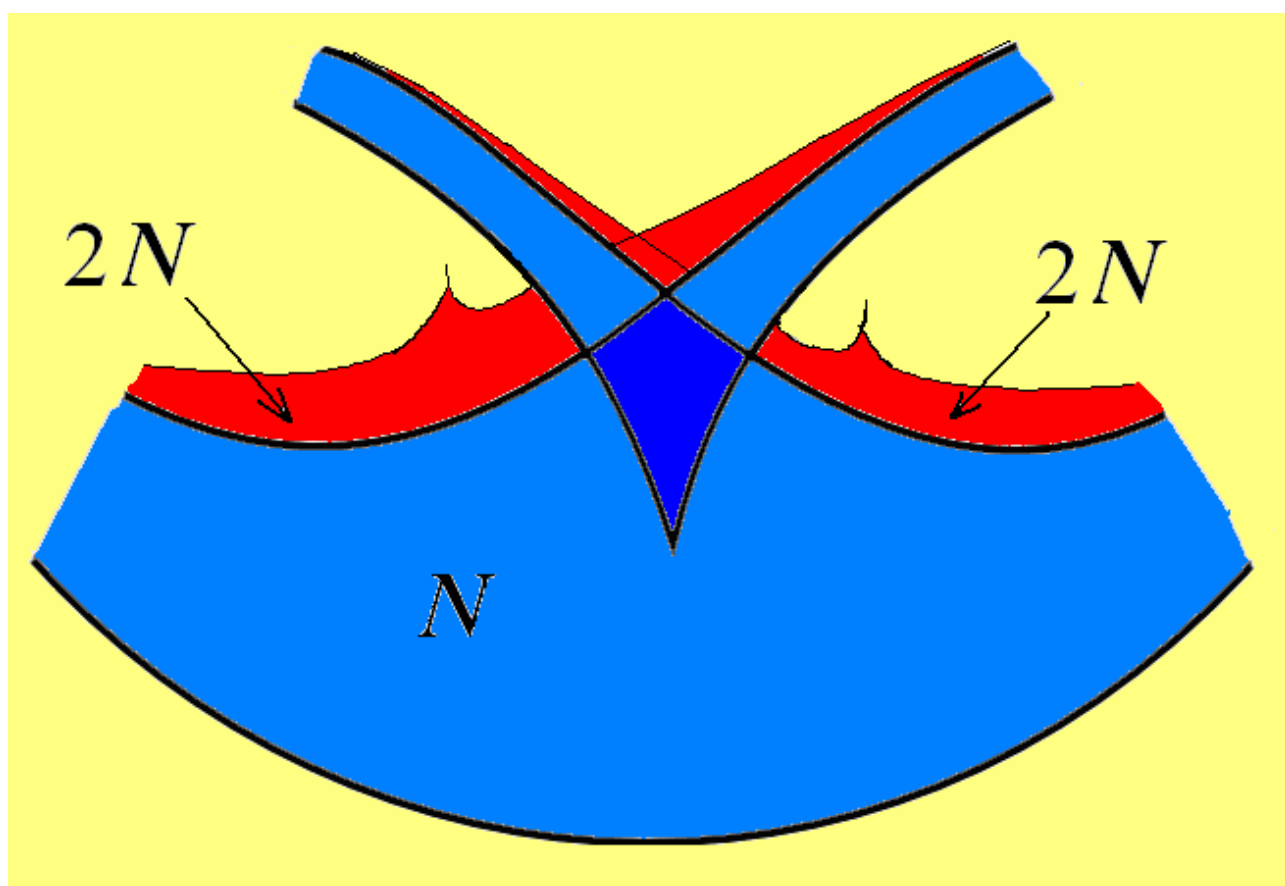


А.П. Кузнецов
А.В. Савин
Л.В. Тюрюкина

ВВЕДЕНИЕ
В ФИЗИКУ
НЕЛИНЕЙНЫХ
ОТОБРАЖЕНИЙ



А.П.Кузнецов
А.В.Савин
Л.В.Тюрюкина

**ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ
НЕЛИНЕЙНЫХ
ОТОБРАЖЕНИЙ**

Научная книга
Саратов
2010

УДК 530.77

К89

Кузнецов А.П., Савин А.В., Тюрюкина Л.В.

ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ НЕЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ – Саратов:
изд-во «Научная книга», 2010, 134 с.

Представлено введение в теорию дискретных отображений, доступное студентам младших курсов и, в определенной мере, учащимся старших классов. С помощью простых моделей даются понятия о сложной динамике нелинейных систем, в том числе хаосе, бифуркациях, явлении синхронизации. Демонстрируется взаимосвязь и «взаимопомощь» физического и математического описания динамических систем. Представлены задачи, в том числе компьютерные, решение которых даст возможность сформировать достаточно емкий «пакет» программ, который может быть использован в исследовательской работе. Книга может использоваться в качестве учебного пособия к курсам по теории динамических систем и бифуркаций.

Пособие создано при поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № 2.1.1/1738).

ISBN 978-5-9758-1228-5

Рекомендуют к печати:

базовая кафедра динамических систем Саратовского государственного университета

д.ф.-м.н., профессор Мельников Л.А.

д.ф.-м.н., профессор Кузнецов С.П.

Оригинал-макет подготовлен авторами

© А.П. Кузнецов, А.В.Савин, Л.В. Тюрюкина, 2010

ISBN 978-5-9758-1228-5

Предисловие

Приобщиться к современной физике очень непросто. Обычно это возможно на старших курсах вуза или даже в аспирантуре, когда освоен определенный объем знаний и навыков. Однако в конце XX века появилась новая наука – нелинейная динамика, основные идеи которой можно изложить на более доступном уровне. Более того, широкое внедрение компьютеров и их постоянное совершенствование позволяют молодым людям гораздо раньше соприкоснуться с научной работой в области нелинейной динамики. Существенную помощь в этом оказывает изучение дискретных отображений – систем, которые демонстрируют многие феномены нелинейной динамики. Отображения гораздо проще традиционных для физики дифференциальных уравнений с точки зрения исследования и компьютерного моделирования, так как на их изучение тратится радикально меньше компьютерного времени и возможны более простые аналитические подходы, чем в теории дифференциальных уравнений. Их исследование позволяет гораздо быстрее продвинуться в понимании новых понятий, подходов и методов, которые дает нелинейная теория. В тоже время, как мы убедимся, отображения очень естественно могут появляться при решении даже простых физических задач. Таким образом, методология нашего рассмотрения будет опираться на

- численные компьютерные эксперименты и исследования;
- физические примеры и обсуждение;
- теорию динамических систем и бифуркаций.

Синтез этих подходов позволяет добиться значительной ясности и понимания обсуждаемого материала.

Поскольку мы не стараемся излагать формальную теорию, то значительное внимание уделено физическим системам. Это нашло свое выражение и в использованных примерах, и в физических интерпретациях. Предлагаемый материал в определенной мере использует опыт курса «Динамические системы и бифуркации», разработанного для студентов факультета нелинейных процессов Саратовского госуниверситета А.П.Кузнецовым, 1997г. Использован также опыт индивидуальных занятий со студентами и школьниками, интересующимися компьютерным моделированием, в рамках базовой кафедры динамических систем Саратовского государственного университета и научной лаборатории теоретической нелинейной динамики Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Авторы выражают глубокую благодарность научному руководителю ФНП СГУ член-корр. РАН Д.И. Трубецкову, декану фа-

культета проф. Ю.И. Левину, а также директорам (в разные годы) СФ ИРЭ РАН Г.Т. Казакову и Ю.А. Филимонову, создавшим необходимые возможности для научной работы студентов и аспирантов в области теоретической нелинейной динамики. Авторы глубоко благодарны С.П. Кузнецову и И.Р. Сатаеву, обсуждения с которыми были очень полезными и стимулирующими.

Авторы

Введение

Успехи механики в XVII-XIX веках были столь впечатляющими, что стало казаться возможным представить себе всю Вселенную как гигантскую *динамическую систему*. Эту позицию четко сформулировал Лаплас: «Состояние системы природы в настоящем есть, очевидно, следствие того, каким оно было в предыдущий момент, и если мы представим себе разум, который в данное мгновение постиг все связи между объектами Вселенной, то он сможет установить соответствующие положения, движения и общие воздействия этих объектов в любое время в прошлом или будущем» (1776 г.). Эта доктрина, получившая название лапласовского детерминизма, выразила в концентрированном виде идеал научного познания, каким он виделся в те времена. Понадобился длительный путь развития науки и научного мировоззрения (термодинамика и статистическая физика, квантовая механика), чтобы убедиться в несостоятельности такого представления о мире. И все же лапласовский детерминизм совсем недавно казался незыблемым для простых моделей типа маятника.

Конец XX века привнес ощущение научной революции, сравнимой с возникновением собственно научного метода в эпоху Галилея. В центре внимания исследователей вновь оказались самые фундаментальные свойства окружающего мира: эволюция систем во времени и геометрия природы. Однако характер интереса к этим понятиям изменился: картина мира стала переосмысляться, наполняясь новыми образами (катастрофы, бифуркации, хаос, фракталы). Весьма характерны в этом смысле слова нобелевского лауреата И. Пригожина: «Если в физике и химии где-то и существует простота, то заведомо не в микроскопических моделях. Она скорее кроется в идеализированных макроскопических представлениях, например, о простых движениях типа гармонического осциллятора». Модели в виде осцилляторов, различных одномерных отображений и других «простых» систем оказались во многом центральными объектами интенсивно развивающихся синтетических научных дисциплин, к которым относятся теория колебаний, теория бифуркаций, теория динамических систем, теория динамического хаоса.

В 1963 г. американский метеоролог Э. Лоренц опубликовал статью «Детерминированное непериодическое течение», в которой обсуждались результаты численного исследования достаточной простой системы дифференциальных уравнений, моделирующих динамику жидкости при конвекции в подогреваемом снизу слое. Лоренц подверг полученные результаты тщательному и глубокому обсуждению, акцентируя внимание на связи между сложным поведением

системы и присущей ей неустойчивостью. Позднее это свойство пропагандировалось им как «эффект бабочки» (*butterfly effect*): в приложении к метеорологии взмах крыльев бабочки может через достаточно длительное время повлечь существенное изменение погоды. Таким образом, бывают случаи, когда невозможно предсказать поведение даже сравнительно простой системы.

К настоящему времени соответствующие представления развиты настолько глубоко, что можно говорить о сложившемся направлении – теории динамического хаоса – науке о «непредсказуемом» поведении простых динамических систем. К ней примыкает теория бифуркаций – наука о качественном изменении поведения нелинейных систем, в частности, приводящем к хаотической динамике. Цель настоящей книжки – дать начинающему исследователю первое представление о динамическом хаосе и бифуркациях, или, иными словами, ввести его в основные понятия *нелинейной динамики*.

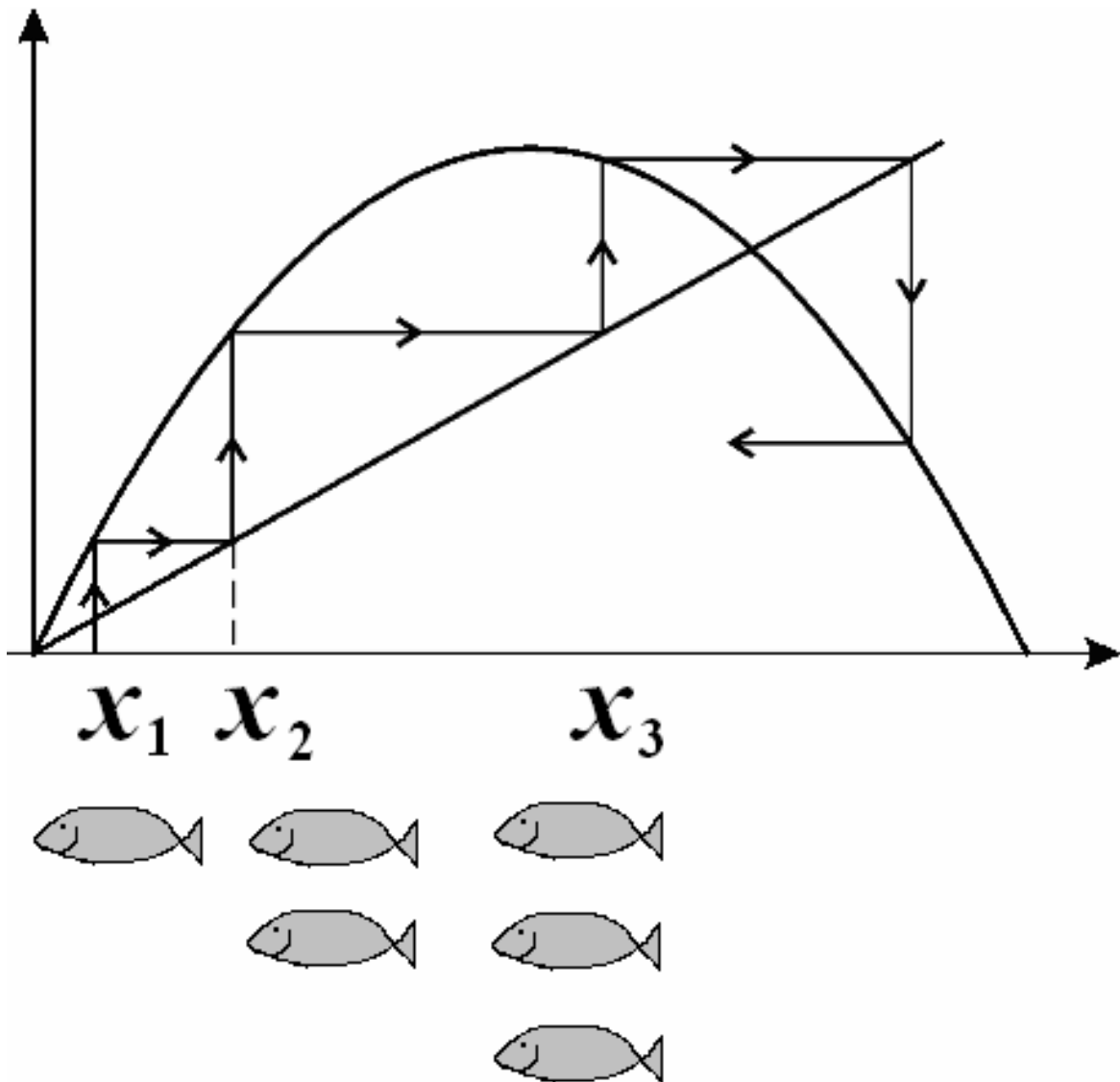
Нелинейная динамика описывает эволюцию во времени нелинейных систем (например, математического маятника, когда угол его отклонения уже нельзя считать малым, как это обычно предполагается в школьном курсе физики). Поэтому на первый взгляд кажется, что в основе нелинейной динамики и учения о динамическом хаосе и бифуркациях должна лежать глубокая теория дифференциальных уравнений. К счастью, оказывается, что это не совсем так. Существуют другие математические объекты – разностные уравнения или *отображения*, которые демонстрируют многие (если не почти все) основные феномены нелинейной динамики. Отображения гораздо проще для исследования, да и компьютерного моделирования, так как на их изучение тратится существенно меньше компьютерного времени.

Замечательно, что отображения глубоко связаны и с дифференциальными системами с помощью метода, известного как метод сечений Пуанкаре, так что при описании многих нелинейных явлений можно наблюдать, по выражению В.И. Арнольда, «тонкую игру дискретного и непрерывного». При этом отображения позволяют сделать более наглядными и глубже понять некоторые закономерности поведения дифференциальных систем, или как еще их называют в нелинейной динамике – потоков.

Хотя отображения лишь недавно стали входить в «инструментарий» исследователей и поэтому они не представлены в общем курсе физики, они вполне естественно могут появляться при решении даже простых физических задач. Однако это в определенной мере новый «язык» научного описания, и он требует некоторых усилий для освоения.

Часть I

ОДНОМЕРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ



1.1. Дискретизация физических величин и отображения

В математике хорошо известны примеры дискретных величин, которые представлены даже в школьной программе: это числовые последовательности. Самые известные из них – арифметическая и геометрическая прогрессии. В «традиционной» физике, которую изучают в школе и в вузе, теория последовательностей используется не так часто по сравнению, скажем, с тригонометрией, и уж, во всяком случае, не является инструментом для иллюстрации фундаментальных законов. В то же время многие физические процессы допускают *дискретизацию*. (Ниже мы дадим целый ряд примеров.) Почему это важно? Оказывается, что изучать дискретные последовательности и описывающие их уравнения намного проще, чем скажем, дифференциальные уравнения. Это относится как к компьютерному моделированию, так и к соответствующей теории. Важным здесь оказывается и то обстоятельство, что такие простые объекты, как дискретные отображения, демонстрируют множество нетривиальных и неожиданных свойств, описывающих поведение многих реальных систем. В настоящее время теория отображений развита очень глубоко и позволяет понимать важные фундаментальные законы природы. Достигнутый в этом направлении «прорыв» можно сравнить с возникновением квантовой механики, поскольку он дал новый взгляд на природу и законы эволюции динамических систем.

Простейшие примеры введения дискретных величин можно легко взять из окружающей жизни. Пусть, например, Вы смотрите на термометр один раз в день, в 8 часов утра. В этом случае вместо непрерывной функции – зависимости температуры от времени $T=T(t)$, Вы имеете дело с дискретной переменной T_n , а именно, значениями температуры, которые видите на термометре каждое утро. Каждому значению этой переменной можно присвоить номер n , отвечающий очередному дню.

Еще один пример – биологический. Пусть нас интересует численность какой-либо популяции и ее изменение год от года. Тогда мы можем фиксировать эту численность x_n в определенный день в n -ом году. Мы вновь приходим к некоторой дискретной последовательности.

Весьма наглядно процедуру дискретизации можно представить с использованием стробоскопа. Пусть тело движется по какой-то траектории, например, скатывается с наклонной плоскости. Тогда периодические вспышки стробоскопа дадут, фактически, дискретный набор координат тела, которые можно обозначить через x_n (рис.1).

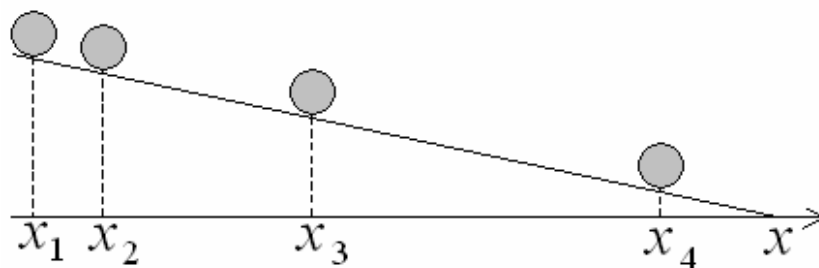


Рис.1

Чуть менее тривиален тот факт, что эту систему можно описать и с помощью дискретной последовательности скоростей тел v_n в момент стробирования.

Если же тело движется по двумерной кривой (например, будучи брошено под углом к горизонту, рис.2), то вспышки стробоскопа зафиксируют уже последовательность пар переменных – координат тела (x_n, y_n) .

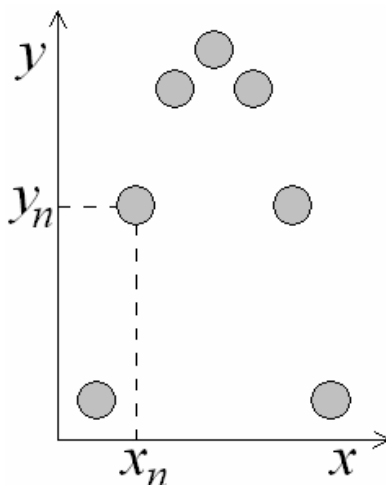


Рис.2

Представленные примеры достаточно наглядны, но являются чисто «описательными». Однако работать с дискретными переменными можно и на уровне установления различных закономерностей, характеризующих соответствующие процессы. Для этого нужно иметь не просто дискретную переменную, а некоторый закон эволюции, которому она подчиняется. Обратимся опять к простейшему примеру тела, скользящего по наклонной плоскости без трения. Скорость тела в этом случае, как известно из механики, зависит от времени по закону $v=v_0+gs\sin\alpha\cdot t$, где $gs\sin\alpha$ – проекция ускорения тела на плоскость, а t – текущее время. Будем описывать эту систему с помощью стробоскопических «сечений», которые будем выполнять в моменты времени t_n через интервалы длительности τ . Тогда нетрудно получить, что

$$v_n=v_0+t_n\cdot gs\sin\alpha. \quad (1)$$

Здесь n – «номер» вспышки стробоскопа. В свою очередь

$$v_{n+1}=v_0+t_{n+1}\cdot gs\sin\alpha. \quad (2)$$

Но поскольку $t_{n+1}=t_n+\tau$, то с очевидностью получаем

$$v_{n+1}=v_n+b, \quad (3)$$

где $b=\tau \cdot g \sin \alpha$. Таким образом, мы уже получили некоторое уравнение относительно дискретной переменной v_n . Его можно изучать математическими (или компьютерными) методами и тем самым получать информацию о самой исходной системе. Заметим, что такие уравнения называют разностными уравнениями или, что более принято в нелинейной динамике, *отображениями*. (Более аккуратно – итерируемыми или дискретными отображениями.)

Представленный пример дает очень простой закон поведения – арифметическую прогрессию. Однако даже очень простые отображения приводят к столь непростым закономерностям, что сформировались целые науки об их поведении – *теория бифуркаций*, *теория динамических систем* и *теория динамического хаоса*.

Заметим, наконец, что представленный нами пример относится к одномерному отображению, поскольку в него входит одна переменная v_n . Возможны и двумерные, и многомерные отображения (вспомните пример с телом, брошенным под углом к горизонту).

Задачи

1. Предложите «экспериментальный» способ построения числовой последовательности, составленной только из цифр 0, 1, 2, 3.

2. Получите выражение для дискретной координаты тела, скатывающегося с наклонной плоскости без начальной скорости, и соответствующее отображение.

3. Корабль приближается к маяку вдоль прямой со скоростью v , причем минимальное расстояние до маяка за время движения составляет h . Луч радара, следящего за кораблем, равномерно вращается с частотой ω . Радар измеряет расстояние до корабля через промежутки времени, равные периоду его развертки $T=2\pi/\omega$. Каковы свойства последовательности значений расстояний, зафиксированной радаром?

1.2. Итерационные диаграммы, линейные отображения, неподвижные точки

В общем виде одномерное отображение задается соотношением

$$x_{n+1}=f(x_n). \quad (4)$$

Дискретное отображение $x_{n+1}=f(x_n)$ является простейшим примером *динамической системы*. Смысл этого термина раскрывается просто: отображение $x_{n+1}=f(x_n)$ по заданному начальному значению x_1 позволяет определить все последующие значения переменной: x_2, x_3 и т.д. Действительно:

$$\begin{aligned} x_2 &= f(x_1), \\ x_3 &= f(x_2), \\ x_4 &= f(x_3), \\ &\dots \end{aligned} \tag{5}$$

Свойства отображений удобно иллюстрировать на *итерационной диаграмме*. Для ее построения, прежде всего, надо на плоскости (x_n, x_{n+1}) изобразить график функции $f(x)$ и биссектрису (рис. 3). Задавшись теперь начальным значением x_1 , можно по графику найти $x_2=f(x_1)$. Затем это значение переносится на биссектрису и процедура повторяется. Возникает своеобразная «лесенка», иллюстрирующая ход итераций.

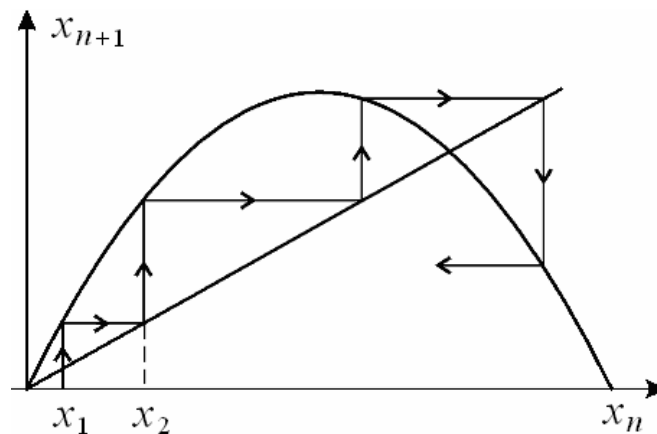


Рис.3. Итерационная диаграмма.

Мы ввели пока единственный пример отображения, отвечающий арифметической прогрессии:

$$x_{n+1}=x_n+b. \tag{6}$$

Его итерационная диаграмма показана на рис.4. Физически такая динамика отвечает тому, что тело равномерно набирает скорость, которая в рамках этой модели нарастает до бесконечности.

Представленное отображение является *линейным*, поскольку ему отвечает линейная функция $f(x)=x+b$. Другой линейной функции $f(x)=ax$ будет соответствовать отображение

$$x_{n+1}=ax_n, \tag{7}$$

которое «генерирует» геометрическую прогрессию. Она может быть как сходящейся, так и расходящейся. Обе эти возможности с помощью итерационной диаграммы иллюстрирует рис.5а и 5б.

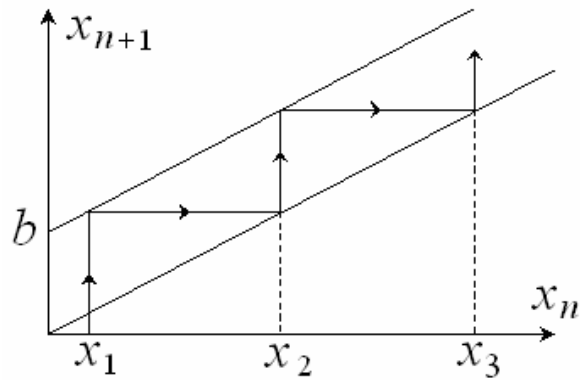


Рис.4. Итерационная диаграмма, соответствующая арифметической прогрессии.

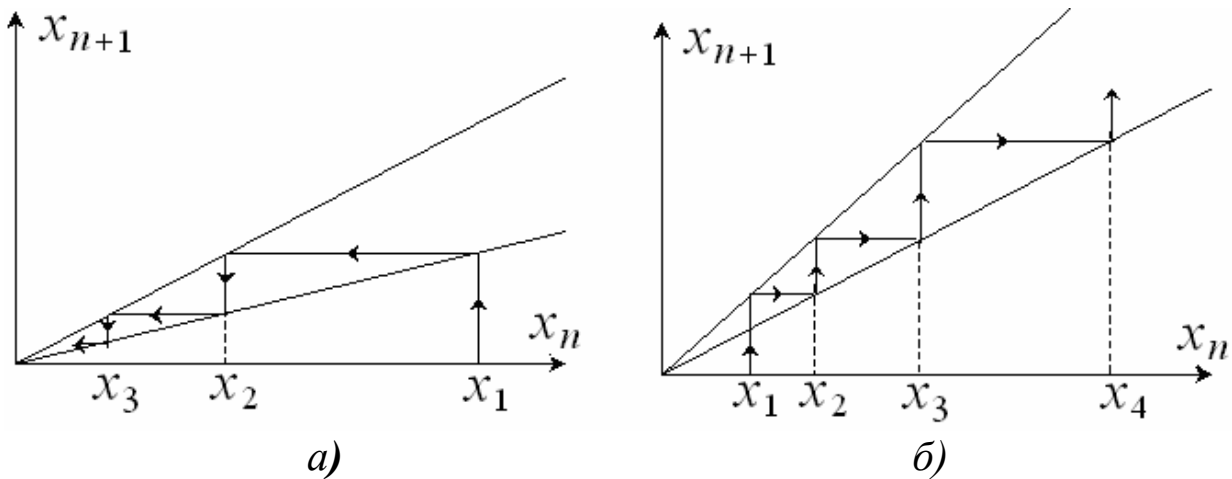


Рис.5. Итерационные диаграммы, соответствующие сходящейся (а) и расходящейся (б) геометрическим прогрессиям.

С помощью метода стробоскопических сечений легко дать соответствующий физический пример. Пусть в воде движется лодка, причем сила сопротивления пропорциональна скорости. Такая система, в соответствии со вторым законом Ньютона, описывается уравнением

$$ma = -kv. \quad (8)$$

(Знак «минус» отвечает торможению тела.) Воспользуемся тем, что ускорение есть производная скорости. Тогда

$$m \frac{dv}{dt} = -kv. \quad (9)$$

Это уравнение имеет решение в виде экспоненты

$$v(t) = v(0) \cdot e^{-kt/m}, \quad (10)$$

где $v(0)$ – начальная скорость. Рассматривая значения скорости (или, как принято говорить в нелинейной динамике, проводя сечения) через время τ получаем, что

$$v_n = v(0) \cdot e^{-kt_n/m}, \quad (11)$$

$$v_{n+1} = v(0) \cdot e^{-kt_n/m - k\tau/m}. \quad (12)$$

Отсюда следует, что

$$v_{n+1} = v_n e^{-k\tau/m}. \quad (13)$$

Мы пришли к дискретному отображению в виде геометрической прогрессии, знаменатель которой $a = e^{-k\tau/m}$.

Очевидно, что в нашем случае прогрессия затухающая. Физически это отвечает тому, что лодка тормозится и ее скорость падает до нуля.

А нельзя ли поддержать движение лодки? Для этого на ней надо установить двигатель. Пусть для простоты это будет «импульсный» мотор, который периодически, через время τ , сообщает лодке резкий удар, так что ее импульс возрастает на величину P (рис.6).

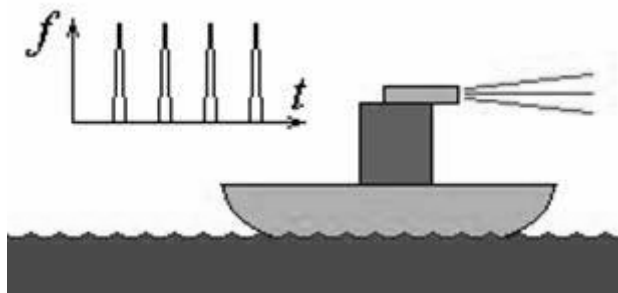


Рис.6. Модель системы с импульсным воздействием.

Опишем эту задачу с помощью отображений. В этом случае стробоскопические сечения удобно проводить через время τ . Итак, пусть сразу после n -го удара скорость лодки составляла v_n . В течение времени τ она движется свободно, в соответствии с представленными выше уравнениями. Тогда непосредственно перед следующим, $(n+1)$ -ым ударом ее скорость составит

$$v = v_n e^{-k\tau/m}. \quad (14)$$

(Величина v_n является начальной скоростью на этом этапе движения.) В момент удара лодка получает импульс P , следовательно, ее скорость возрастет на величину P/m . Таким, образом, сразу после этого удара скорость составит

$$v = v_n e^{-k\tau/m} + P/m. \quad (15)$$

Но по определению это и есть величина v_{n+1} . Таким образом, мы получаем искомое отображение в виде:

$$v_{n+1} = av_n + b, \quad (16)$$

где $a = e^{-k\tau/m}$, $b = P/m$. Очевидно, что мы получили общий вид линейного отображения. Для его анализа построим итерационную диаграмму (рис.7).

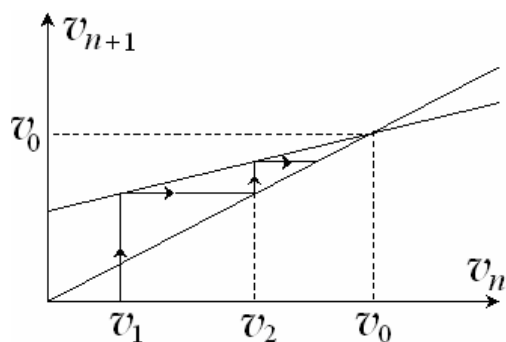


Рис.7 Итерационная диаграмма линейного отображения.

Мы видим, что поведение нашей системы существенно иное. Теперь «лесенка» итераций сходится к некоторой точке. В теории дискретных отображений ее называют *неподвижной точкой*. Очевидно, что неподвижная точка v_0 удовлетворяет соотношению

$$v_0 = f(v_0). \quad (17)$$

Физически это отвечает следующему. Если начальная скорость лодки мала, то мотор, давая последовательные импульсы, разгоняет лодку все сильнее и сильнее. При этом, однако, нарастает диссипация, которая в конечном итоге компенсирует действие мотора и скорость лодки сразу после импульсов стабилизируется. Замечательное свойство отображения состоит в том, что конечная динамика (в нашем случае значение скорости, соответствующее неподвижной точке) не зависит от начальной скорости тела.

Полезно представлять себе качественное поведение «полного» графика зависимости скорости лодки от времени (рис.8).

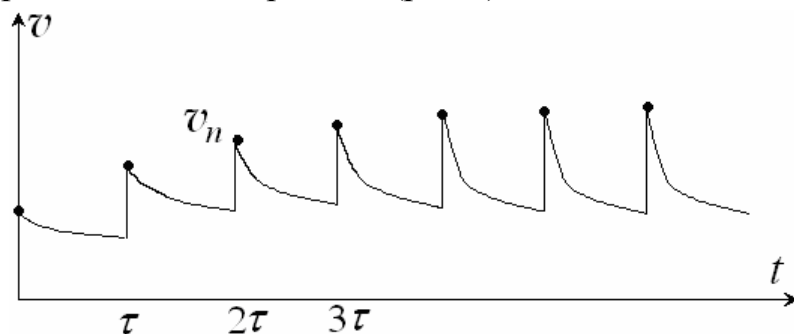


Рис.8 Зависимость скорости движения лодки от времени под действием импульсов, следующих через интервалы времени τ .

Этот график показывает, как в целом идет нарастание и затем стабилизация скорости лодки в стробоскопических сечениях. Он демонстрирует и те детали динамики, которые при переходе к дискретному отображению утрачены, а именно поведение лодки в промежутке между импульсами.

Заметим, что для представленных здесь отображений легко качественно нарисовать итерационные диаграммы. Для более сложных систем следует прибегать к помощи компьютера и рисовать такие диаграммы на экране дисплея.

Задачи

1. Шарик падает с некоторой высоты на горизонтальную поверхность. При каждом ударе о поверхность шарик теряет долю скорости ε . Напишите отображение, задающее зависимость высоты $(n+1)$ -го подскока от n -го. Какую последовательность образуют высоты подскоков?

2. Интенсивность света, проходящего через некоторое вещество, изменяется по закону Бугера: $I(x)=I(0)e^{-\alpha x}$, где x – координата, отсчитываемая от границы воздуха и вещества. Имеется цепочка из пластин толщины d , изготовленных из такого вещества, пронизываемых световым лучом (рис. 9). Установите свойства последовательности I_1, I_2, I_3, \dots . Пройдет ли свет через такую бесконечную цепочку? Решите аналогичную задачу в случае, если толщина пластин убывает по закону геометрической прогрессии.

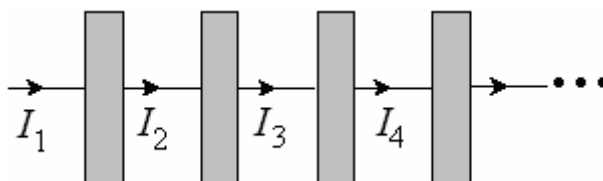


Рис. 9

3. Какой будет динамика отображения для лодки с импульсным мотором в случае очень большой начальной скорости?

4. Как установил Ньютон, температура остывающего тела изменяется по закону $T=T_c+(T_0-T_c)e^{-\alpha t}$, где T_0 – начальная температура тела, T_c – температура окружающей среды, α – некоторый коэффициент. Через равные интервалы времени телу сообщают количество тепла Q . Теплоемкость тела C . Получите отображение, описывающее изменение от раза к разу температуры тела сразу после получения очередной «порции» тепловой энергии. Каков характер соответствующей последовательности значений температуры: убывающий или нарастающий? Найдите предельное значение этой последовательности. Как будет изменяться температура тела в «реальном» времени? Нарисуйте примерный график. В каком интервале будет колебаться температура тела через достаточно большое время?

5. За три часа концентрация некоторого лекарства в крови пациента падает в два раза. Инъекции лекарства производят один раз в шесть часов. Получите отображение, описывающее динамику концентрации лекарства в крови непо-

средственно перед каждой очередной инъекцией. Нарисуйте примерный график изменения концентрации лекарства в крови от времени.

6. Изобразите итерационную диаграмму для отображения $x_{n+1}=ax_n+b$ в случае $-1 < a < 0$ и $b > 0$.

7. Напишите программу, которая строит на экране компьютера итерационные диаграммы одномерного отображения для заданной функции $f(x)$ и заданного начального значения x_1 . Постройте с ее помощью итерационные диаграммы, отвечающие различным вариантам линейных отображений.

1.3. Неустойчивость

В представленных выше примерах по мере итераций динамическая переменная все ближе приближается к неподвижной точке. Отображения могут, однако, описывать и другой тип поведения: когда переменная «убегает» от неподвижной точки.

Рассмотрим соответствующий пример. Пусть имеется математический маятник, находящийся вблизи верхнего положения равновесия (рис.10).

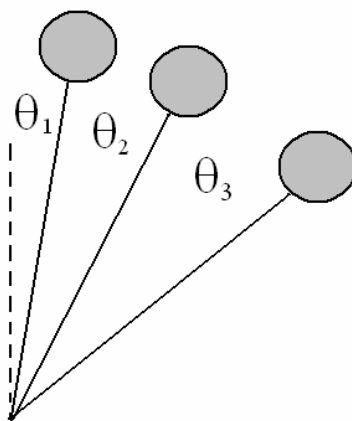


Рис.10. Движение маятника около неустойчивого положения равновесия.

Угловая координата такого маятника, как известно, подчиняется уравнению

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0, \quad (18)$$

где $\omega = \sqrt{g/l}$ – частота малых (линейных) собственных колебаний маятника, l – длина маятника. Введем угол $\theta = \pi - \varphi$, отсчитываемый от верхнего положения равновесия. Тогда

$$\ddot{\theta} - \omega^2 \sin \theta = 0. \quad (19)$$

Вблизи верхнего положения равновесия угол θ мал, и можно положить $\sin \theta \approx \theta$, тогда:

$$\ddot{\theta} - \omega^2 \theta = 0. \quad (20)$$

Решением этого уравнения является функция, известная как гиперболический косинус $\operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, так что

$$\theta(t) = \theta(0)\operatorname{ch}\omega t. \quad (21)$$

При больших t , то есть на достаточно длительных интервалах времени, первая экспонента в выражении для гиперболического косинуса очень быстро начинает существенно превышать вторую, так что

$$\theta(t) = \theta(0)\frac{e^{\omega t}}{2}. \quad (22)$$

Как и ранее, выполним стробоскопические сечения («снимки» маятника) через интервалы времени длительности τ . Тогда с очевидностью приходим к отображению

$$\theta_{n+1} = a\theta_n, \quad (23)$$

где $a = e^{\omega\tau}$. Это геометрическая прогрессия с показателем a , причем поскольку $a = e^{\omega\tau} > 1$, то прогрессия расходящаяся.

На «языке» теории отображений можно сказать, что это отображение имеет *неустойчивую* неподвижную точку $\theta_0=0$: изображающая точка убегает, причем чем больше расстояние до неподвижной точки, тем выше скорость движения. Физическим образом этой неустойчивости является математический маятник около верхнего положения равновесия.

Задача

Изобразите итерационную диаграмму для отображения $x_{n+1}=ax_n+b$ в случае $a>1$ и $b<0$.

1.4. Нелинейные отображения и анализ устойчивости

До сих пор мы ограничивались обсуждением примеров из механики. Теперь мы дадим пример из другой области физики и с его помощью перейдем к *нелинейным* отображениям.

Практически в любом сборнике олимпиадных задач по физике можно найти задачу о бесконечной цепочке резисторов. Она формулируется так: чему равно сопротивление цепочки резисторов, которая состоит из бесконечного числа одинаковых звеньев (рис.11)?

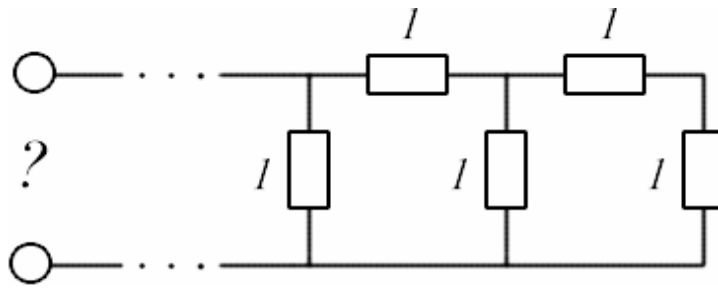


Рис.11. Бесконечная цепочка сопротивлений.

Поставим, однако, вопрос несколько иначе: если мы можем измерять сопротивление с заданной точностью, то сколько звеньев должна содержать цепочка, чтобы считаться бесконечной? На этот вопрос можно ответить, привлекая математический аппарат теории отображений. Итак, обратимся к нашей схеме и отсчитаем конечное число звеньев n и $n+1$ от правого конца (рис.12а).

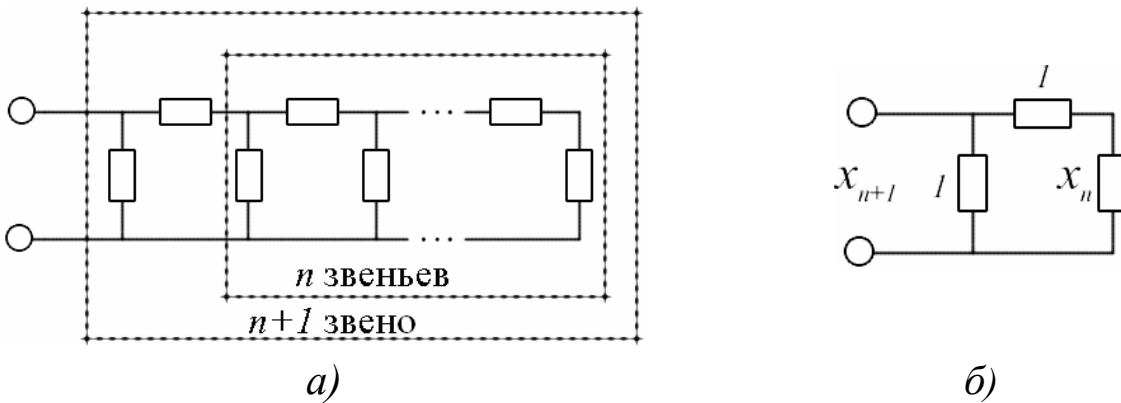


Рис.12. Построение отображения для сопротивления цепочки.

Сопротивления всех резисторов одинаковы, и мы будем полагать их равными единице. Из рисунка хорошо видно, что схема эквивалентна показанной на рис. 12б. Тогда легко получаем

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_n + 2}. \quad (24)$$

Это есть простейший пример нелинейного отображения, поскольку функция $f(x)$, характеризующая отображение, нелинейна. Его итерационная диаграмма показана на рис.13.

Как видно из графика, наше отображение имеет неподвижную точку, т.е. такую точку, для которой $x_0 = f(x_0)$. Нетрудно получить, что ее координата определяется уравнением $x_0^2 + x_0 - 1 = 0$. Отсюда следует ответ к задаче об определении сопротивления бесконечной цепочки:

$$x_0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,618034\dots$$

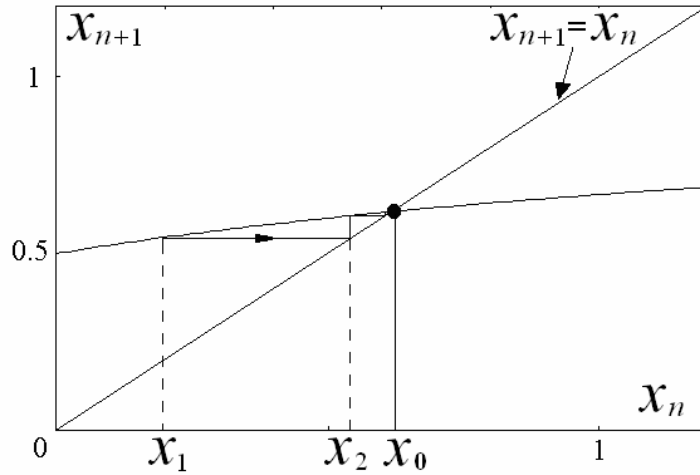


Рис. 13. Итерационная диаграмма отображения (24).

Исследуем теперь поведение системы в случае, когда значения переменной близки к предельному значению x_0 . Положим $x_{n+1} = x_0 + \tilde{x}_{n+1}$ и $x_n = x_0 + \tilde{x}_n$, где знаком «тильда» сверху обозначены малые добавки к x_0 . Тогда из $x_{n+1} = f(x_n)$ имеем

$$x_0 + \tilde{x}_{n+1} = f(x_0 + \tilde{x}_n) \approx f(x_0) + f'(x_0)\tilde{x}_n \Rightarrow \tilde{x}_{n+1} = f'(x_0)\tilde{x}_n \quad (25)$$

Таким образом, если имеется некоторая маленькая добавка к значению x_0 , то после первой итерации она умножается на постоянное число $C = f'(x_0)$, после второй – на C^2 , после третьей – на C^3 и т.д. Это означает, что переменная x приближается к неподвижной точке по закону геометрической прогрессии с показателем C . Отметим, что на итерационной диаграмме наше рассмотрение соответствует тому, что в окрестности x_0 мы аппроксимируем $f(x)$ касательной. Соответствующая итерационная диаграмма приведена на рис.14.

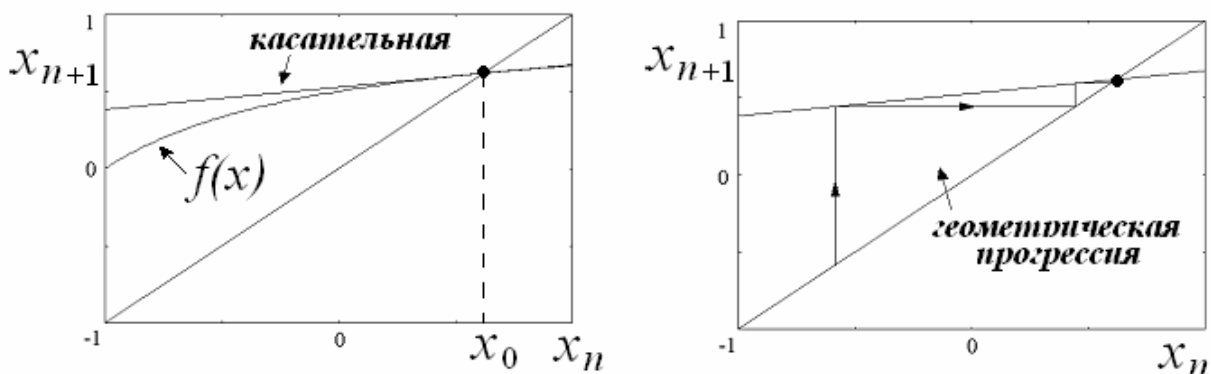


Рис. 14. а) Аппроксимация отображения (24) касательной, б) сходимость к неподвижной точке.

Теперь по свойству геометрической прогрессии автоматически получаем, что если $|f'(x_0)| < 1$, то итерации сходятся, а если $|f'(x_0)| > 1$, то итерации расходятся.

Это позволяет судить об устойчивости неподвижной точки. В первом случае неподвижную точку называют устойчивой, а во втором – неустойчивой. Заметим, что в силу большой важности величины $f'(x_0)$, она носит специальное название – *мультипликатор*, и обозначается обычно $\mu = f'(x_0)$. Таким образом, можно сказать, что неподвижная точка устойчива, если $|\mu| < 1$ и неустойчива, если $|\mu| > 1$.

Вернемся от отображения общего вида к нашему случаю. Для него

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2+x}; \quad f'(x_0) = \frac{1}{(2+x_0)^2} = \frac{4}{(\sqrt{5}+3)^2} \approx 0,145900\dots \quad (26)$$

Итак, как мы видим, $\mu = 0,145900\dots$. Это означает, что итерации сходятся, причем, поскольку $\mu = f'(x_0)$ мало, весьма быстро. В этом несложно убедиться, итерируя соотношение $x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_n + 2}$ (результаты итераций представлены в таблице 1).

Таблица 1

Число звеньев в цепочке, n	x_n	отклонение от неподвижной точки, %
1	$x_1=1$	
2	$x_2=2/3 \approx 0,666667$	7,86
3	$x_3=5/8 \approx 0,625000$	1,12
4	$x_4=13/21 \approx 0,619048$	0,16
5	$x_5=34/55 \approx 0,618182$	0,02
...
∞	$x_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618034$	0

Мы убеждаемся, что увеличение числа звеньев действительно приводит в неподвижную точку. Из таблицы видно, что, оказывается, цепочку всего из трех звеньев можно считать бесконечной с точностью почти до 1%, а из пяти – уже с точностью до 0,02%! Устойчивость неподвижной точки этого отображения снимает и еще один физический вопрос: не «испортят» ли возможные дефекты в цепочке результат нашего решения. (Любопытно, что получаемые на каждом шаге приближенные значения представляют собой отношения чисел Фибоначчи)

чи и служат приближениями к так называемому «золотому сечению», см. вторую колонку таблицы).

Скажем еще несколько слов об устойчивости неподвижных точек в общем случае. Как мы уже говорили, скорость сходимости определяется множителем $\mu = f'(x_0)$. Очевидно, что в случае обращения множителя в нуль (т.е. $\mu=0$) сходимость будет самой быстрой. Такие неподвижные точки называют *сверхустойчивыми*. Они играют важную роль, например, при использовании отображений для численного решения уравнений (см. задачи 4-5).

Задачи

1. Что будет, если в задаче о цепочке сопротивлений начальное (крайнее правое) сопротивление равно 100, а остальные – по-прежнему равны 1?

2. Изготовьте цепочку сопротивлений и проверьте в эксперименте данные таблицы из текста. При использованной Вами точности приборов и изготовления резисторов сколько звеньев в цепочке будет достаточно взять для того, чтобы считать ее бесконечной?

3. Изобразите качественно возможную итерационную диаграмму для сверхустойчивой неподвижной точки.

4. Покажите, что разностное уравнение $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n}$ можно использовать для вычисления квадратного корня из числа a . (Такой способ применяли еще в древнем Вавилоне.) Найдите первые десять членов последовательности x_n , порождаемой этим уравнением, в случае $a=2$. Величину x_0 положите равной единице. Сколько итераций надо сделать, чтобы получить значение $\sqrt{2}$ с точностью 1%? От чего зависит число итераций, которые необходимо совершить, чтобы получить заранее заданную точность? Проиллюстрируйте решение задачи с помощью итерационной диаграммы. Используя понятие множителя, покажите, что неподвижная точка этого отображения устойчива. Можно ли использовать отображение $x_{n+1} = a/x_n$? Почему?

5. В соответствии с методом Ньютона уравнение $F(x) = 0$ можно решать численно с помощью итерационной формулы

$$x_{n+1} = x_n - F(x_n)/F'(x_n).$$

Рассматривая это соотношение как отображение, обсудите характер устойчивости в неподвижной точке.

6. Постройте отображение, описывающее движение маятника вблизи верхнего положения равновесия, и изучите его устойчивость.

1.5. Логистическое отображение и бифуркационное дерево

Оказывается, нелинейные отображения могут демонстрировать поведение гораздо более сложное, чем в рассмотренной задаче о бесконечной цепочке сопротивлений. Для этого достаточно, чтобы функция $f(x)$ имела квадратичный экстремум. Простейшей такой функцией является парабола, а соответствующее отображение называют логистическим

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n). \quad (27)$$

Изобразим итерационную диаграмму этого отображения (рис.15).

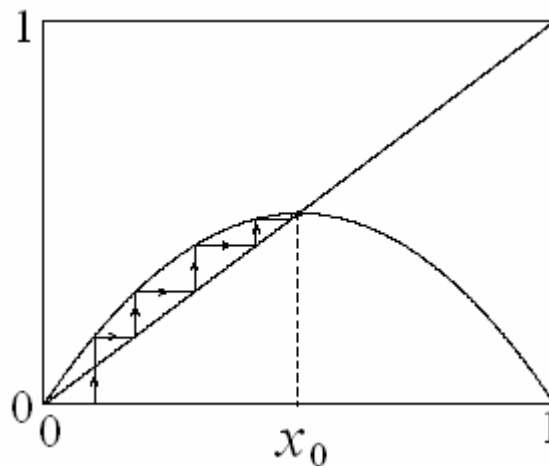


Рис. 15. Итерационная диаграмма логистического отображения.

Хорошо видно, что это отображение может иметь уже две неподвижных точки. Одна из них имеет абсциссу $x_0=0$. Исследуем устойчивость этой точки, для чего вычислим соответствующую производную (мультипликатор):

$$f'(x) = (r - 2rx)|_{x=0} = r. \quad (28)$$

При $r > 1$ эта точка неустойчива. Динамика именно в этом случае изображена на итерационной диаграмме (рис.15, здесь $r=2$). Можно заметить, что итерации вблизи начала координат идут по закону геометрической прогрессии. Этот факт послужил основой для серьезного изучения логистического отображения в популяционной биологии. Действительно, известно, что при достаточном количестве пищи (параметр r) популяция (например, рыба в пруду) размножается по закону геометрической прогрессии. Для простоты будем считать, что x_n дает количество рыбы в пруду в n -ый год. Таким образом, начальное значение x_1 – это число рыб, выпущенных в пруд в первый год, x_2 – количество рыбы на следующий год и т.д. Спрашивается, что будет с этой рыбой по истечении достаточно большого времени? Сначала количество рыбы будет нарастать по гео-

метрической прогрессии. Ясно, однако, что если рыбы слишком много, то популяция перестает расти. Поэтому график $f(x)$ и имеет падающий участок.

Интуиция говорит о том, что количество рыбы в пруду сначала нарастает, а затем стабилизируется. (Математики сказали бы, что последовательность x_n имеет предел.) Наш график как будто подтверждает это (рис.15): как можно видеть, есть еще одна неподвижная точка x_0 , к которой сходятся итерации. Ее несложно найти аналитически:

$$x_0 = rx_0(1 - x_0), \quad x_0 = 1 - \frac{1}{r}. \quad (29)$$

Это и будет установившееся количество рыбы в водоеме. Однако устойчива ли эта неподвижная точка? Найдем ее мультипликатор

$$\mu = f'(x_0) = r - 2rx_0 = r - 2r\left(1 - \frac{1}{r}\right) = 2 - r. \quad (30)$$

Если r немного больше 1, то точка устойчива. С ростом r мультипликатор уменьшается, и неподвижная точка становится все более устойчивой. При $r=2$ мультипликатор обращается в нуль, и точка оказывается сверхустойчивой. Однако при дальнейшем росте параметра мультипликатор становится отрицательным и начинает нарастать по абсолютной величине. Наконец, при $r=3$ он обращается в -1 , и при $r>3$ получаем, что мультипликатор $\mu = |f'(x_0)| > 1$. Значит, «стабильное» состояние популяции при $r>3$ оказывается неустойчивым. Какой же режим рождается в этом случае? Используя итерационную диаграмму, можно предположить, что это будет ситуация, показанная на рис. 16.

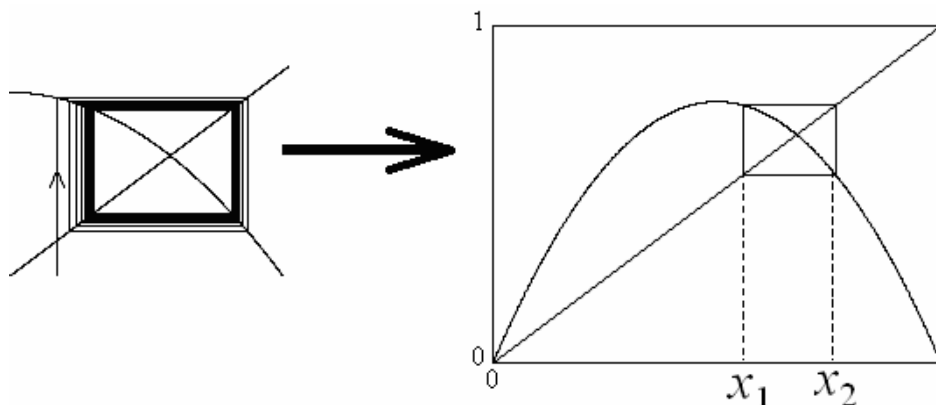


Рис.16. 2-цикл логистического отображения.

Говорят, что в этом случае отображение имеет 2-цикл. Можно легко получить явное выражение для его элементов из следующего условия:

$$\begin{cases} f(x_2) = x_1 \\ f(x_1) = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = rx_2(1 - x_2) \\ x_2 = rx_1(1 - x_1) \end{cases}. \quad (31)$$

Сложим друг с другом оба уравнения, а затем вычтем из первого уравнения второе:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = (x_1 - x_2)[r(x_1 + x_2) - r] \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)\left(\frac{r-1}{r}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{1+r}{r} \\ x_1x_2 = \frac{1+r}{r^2} \end{cases}. \quad (32)$$

Используя теорему Виета, можем записать уравнение для поиска элементов 2-цикла:

$$x^2 - \frac{1+r}{r}x + \frac{1+r}{r^2} = 0. \quad (33)$$

Решая это квадратное уравнение, получаем:

$$x_{1,2} = \frac{1+r \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}. \quad (34)$$

Из этой формулы хорошо видно, что 2-цикл рождается при $r=3$, а при $r<3$ его существование невозможно. Итак, если пищи достаточно много, то первые поколения нарастают очень быстро по численности, а затем вместо установления стационарной численности рыбы она начинает меняться периодически от года к году: x_1, x_2, x_1, x_2 и т.д. Это очень важный результат с точки зрения динамики популяции.

Ну а если еще больше увеличить r ? Аналитически можно показать, что существует значение параметра, при котором станет неустойчивым и 2-цикл. Действительно, для элемента 2-цикла можно написать соотношение

$$x_1 = f(x_2) = f(f(x_1)). \quad (35)$$

Таким образом, элемент 2-цикла есть неподвижная точка двукратно проитерированного отображения. Это позволяет легко определить устойчивость цикла, поскольку тогда можно применить полученный ранее способ анализа устойчивости неподвижной точки. При этом только надо использовать правило дифференцирования сложной функции. Итак

$$\mu = [f(f(x_1))] = f'(f(x_1))f'(x_1) = f'(x_2)f'(x_1). \quad (36)$$

В нашем случае $f'(x) = r - 2rx$ и легко получаем

$$\begin{aligned} \mu &= r^2(1 - 2x_1)(1 - 2x_2) = r^2[1 - 2(x_1 + x_2) + 4x_1x_2] = \\ &= r^2\left[1 - 2\frac{1+r}{r} + 4\frac{1+r}{r^2}\right] = -r^2 + 2r + 4 \end{aligned} \quad (37)$$

Таким образом, при $r=1+\sqrt{6}=3,449\dots$ мультипликатор обращается в -1 , и 2-цикл становится неустойчивым. При этом точка x_1 «удвоится» – расщепится на

две. То же самое произойдет с точкой x_2 . Значит, у нового движения будет четыре элемента, посещаемых точкой поочередно, т.е. реализуется 4-цикл.

Что произойдет, если еще больше увеличить параметр? Это можно установить при помощи компьютерного моделирования, использовав программу для построения итерационных диаграмм на компьютере. На рис. 17 показаны некоторые типы итерационных диаграмм, которые возможны для отображения, заданного квадратичной параболой. Мы здесь и далее будем использовать другое представление квадратичного отображения

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad (38)$$

которое более удобно в ряде отношений (см. задачу 1).

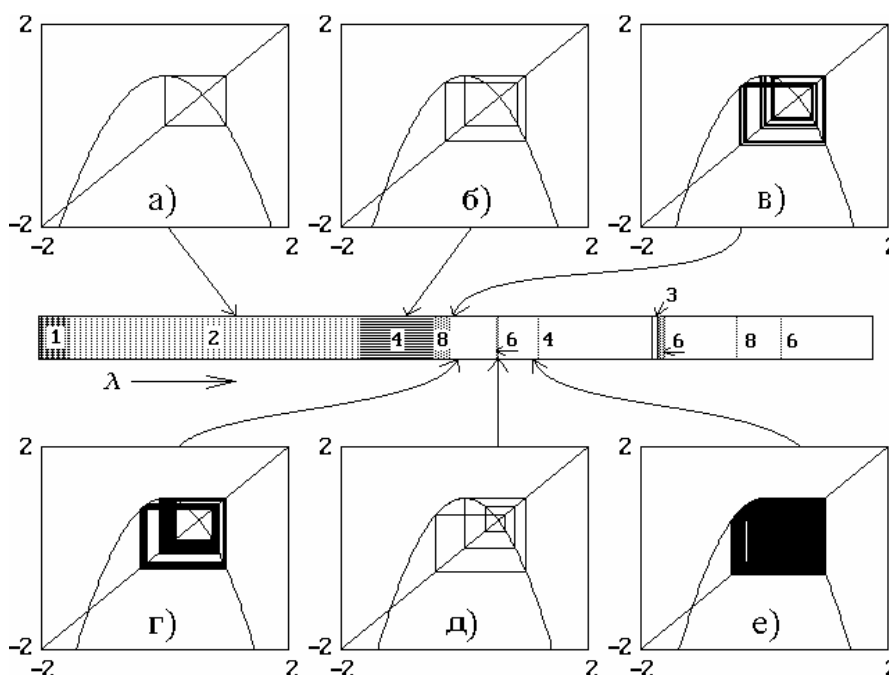


Рис. 17. Примеры итерационных диаграмм логистического отображения (38) при различных значениях параметра λ .

Мы видим, что 4-цикл превращается в циклы периода 8, 16 и т.д., затем, при превышении некоторого значения параметра $\lambda_c = 1,401152\dots$ возможен сложный, неповторяющийся процесс, который называют динамическим хаосом. Это значение параметра соответствует некоторому «пограничному» состоянию между периодическими и хаотическими режимами. Такие состояния принято называть критическим, а соответствующее значение параметра – *критическим значением* или *критической точкой*. Что это означает на языке динамики популяции? Пусть мы запустили рыбу в пруд и подкармливаем ее, чтобы иметь большой улов. Если пищи дается немного, то численность популяции станет стабильной. Если «выдачу» пищи увеличить, то возможны колебания численности рыбы год от года – в одном году рыбы много, а на будущий год – мало.

Если же количество пищи перейдет через некоторое пороговое значение, то численность рыбы начнет хаотически, непредсказуемо меняться год от года! Весьма неожиданный и нетривиальный результат. Ясно, что сама возможность такого поведения в предельно простых и предсказуемых системах является важным открытием.

Вернемся к нашим диаграммам. Можно видеть, что с ростом параметра возникает не только хаос, но и сложные циклы периодов 3, 6 и т.д., чередующиеся с областями непериодического поведения. Среди них есть и 4-циклы, и 8-циклы и т.д., но с существенно иным видом итерационной диаграммы, чем в основной области удвоений периода. Мы рекомендуем составить «коллекцию» основных таких циклов (задача 7). Начальные представители этой коллекции показаны на рис.18. Значения параметра на этих рисунках отвечают сверхустойчивым циклам, опирающимся на экстремум отображения (подумайте, почему сверхустойчивый цикл обязательно опирается на экстремум). Отметим, что циклов периода 3 и 4 – по одному, циклов периода 5 уже 3, периода 6 – 4; циклов периода 7 будет 9 и т.д.. Итак, эксперименты с «подкармливанием рыбы» могут привести к необычайно разнообразным режимам.

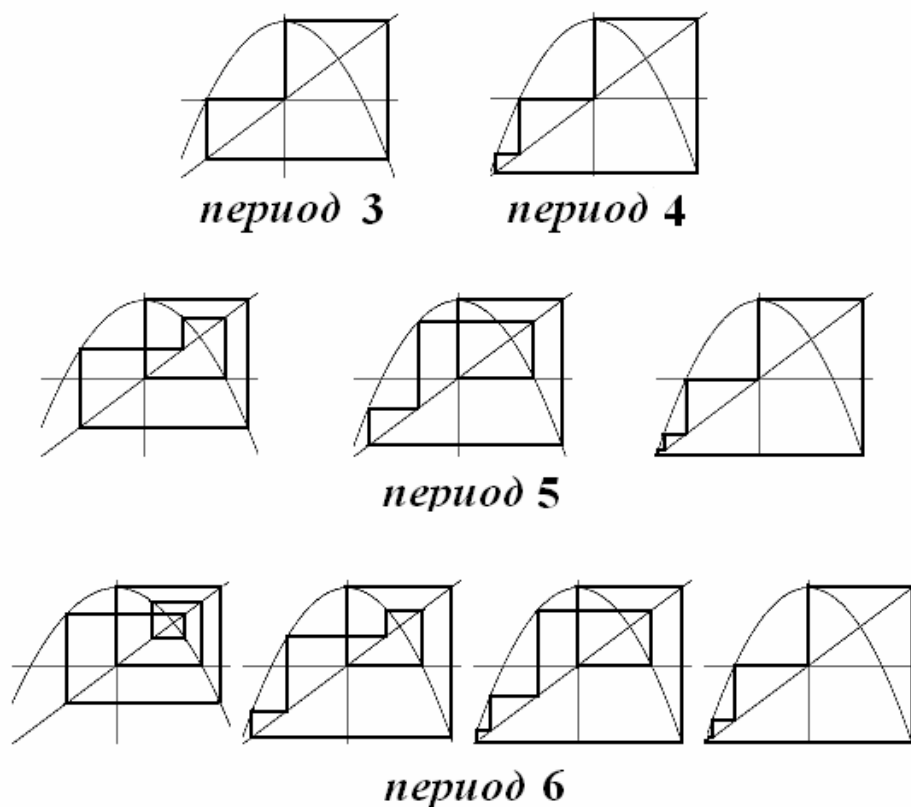


Рис.18. Сверхустойчивые циклы различных периодов логистического отображения.

Еще одна эффектная иллюстрация сложного поведения квадратичного отображения – *бифуркационное дерево* (или, как иногда говорят, *дерево Фейгенбаума* – по имени ученого, установившего многие существенные законы дина-

мики отображений). Бифуркационное дерево дает зависимость установившихся значений переменной x от параметра. Наше аналитическое рассмотрение позволяет нарисовать начальный участок дерева (рис. 19).

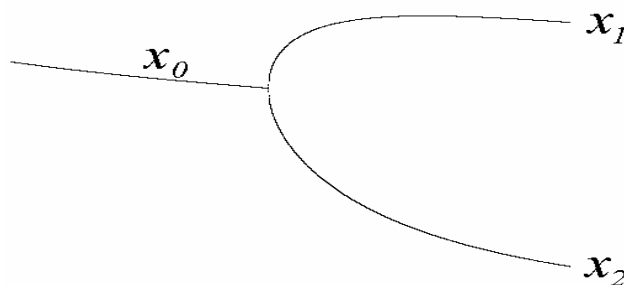


Рис. 19. Зависимость установившегося значения переменной от параметра при бифуркации удвоения периода

На нем изображены устойчивая неподвижная точка и рождающийся 2-цикл. В последнем случае переменная последовательно посещает две ветви дерева. Такую ситуацию расщепления дерева называют *бифуркацией удвоения периода*. Как мы видели выше, ее условием является обращение мультипликатора μ в -1 . Полное дерево (для всех значений параметра) можно построить с помощью компьютера. Для этого надо задать некоторое начальное значение переменной и параметра. Затем выполнить несколько сот итераций отображения, чтобы исключить переходные процессы и реализовать установившийся режим, и вывести некоторое количество точек на экран дисплея. Затем процедуру повторить для слегка измененного количества параметра (рекомендуем в качестве нового начального значения переменной использовать полученное на предыдущем шаге процедуры) и продолжать повторять до тех пор, пока весь интересный диапазон значений управляющего параметра не будет пройден. В результате получится картинка, показанная на рис. 20.

На бифуркационном дереве хорошо видны моменты удвоений периода, в которые дерево расщепляется на две ветви, хаотический режим и различные «окна» периодических режимов в хаосе, которым соответствуют приведенные на рис. 18 циклы различных периодов. Как можно видеть, наиболее широкое окно отвечает 3-циклу.

Тщательное рассмотрение бифуркационного дерева приводит к интересному выводу: внутри окон периодичности также наблюдаются удвоения периода! Например, при $\lambda=1,75$ возникает устойчивый 3-цикл. Однако с ростом λ он исчезает на дереве (на самом деле становится неустойчивым), и от него отделяется устойчивый 6-цикл, затем 12-цикл и т.д. Каскад удвоений 3-цикла завершается переходом к хаосу в своей, новой критической точке. То же самое относится и к циклам других периодов.

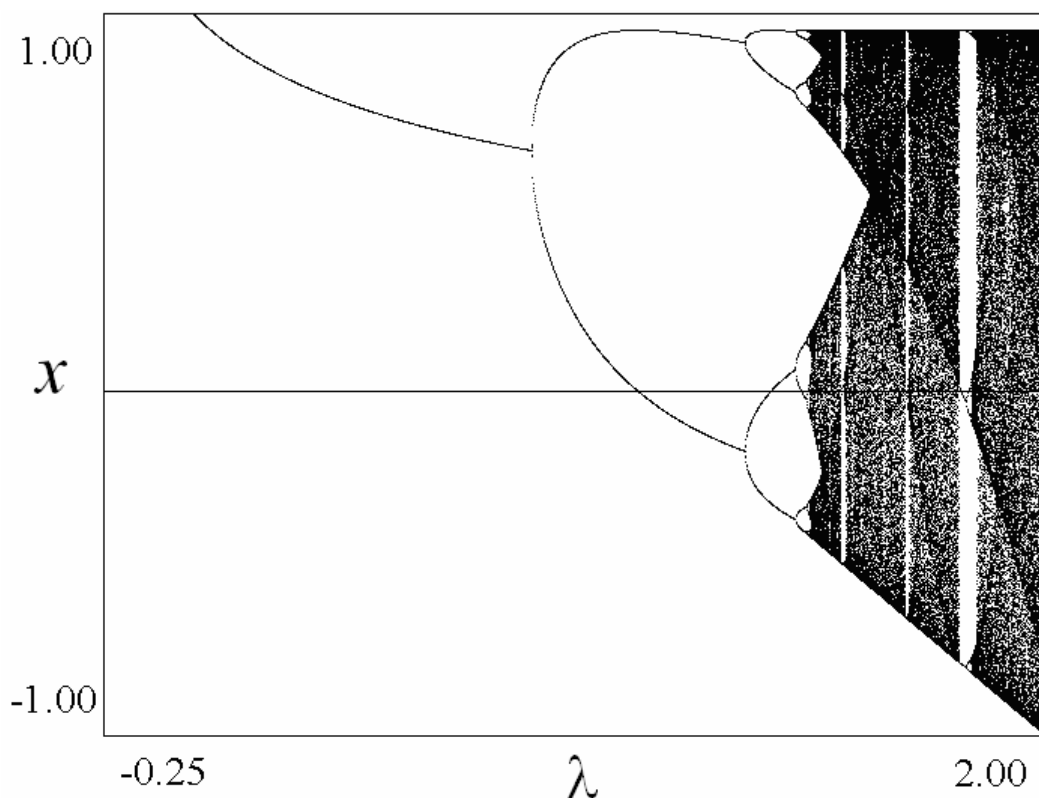


Рис. 20. Бифуркационное дерево логистического отображения (38).

Задачи

1. Покажите, что отображение $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ заменой переменных приводится к виду $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$. Проведите исследование неподвижных точек и 2-циклов логистического отображения в форме $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$ аналогично тому, как это сделано в тексте.

2. Найдите значение параметра λ , отвечающее сверхустойчивому 2-циклу, характеризующемуся равным нулю мультипликатором.

3. Реализуйте программу, которая строит бифуркационное дерево для логистического отображения. Укажите значения параметров, при которых реализуются 2-цикл, 3-цикл, 4-циклы (их несколько!), 5-циклы.

4. Постройте итерационные диаграммы логистического отображения, дающие характерные циклы и хаотические режимы.

5. Постройте бифуркационное дерево для отображения $x_{n+1} = \lambda \cos x_n$. Сравните его с деревом для логистического отображения.

6. Создайте программу, которая при щелчке мышью на бифуркационном дереве в отдельном окне строит итерационную диаграмму.

7. Подготовьте «коллекцию» итерационных диаграмм циклов периода 3, 4, 5 и т.д., лежащих в критической области. Обратите внимание на их тополо-

гию и возрастание их числа с ростом периода. Удобно отслеживать сверхустойчивые циклы, начальный элемент которых опирается на экстремум функции.

1.6. Бифуркации

Мы видели, что при изменении параметра может происходить качественное изменение типа режима. Такие качественные изменения называют *бифуркациями* (от латинского *bifurcus* – разветвление). Их изучение и классификация – предмет теории бифуркаций. В настоящее время это обширная область теории динамических систем, которая продолжает активно развиваться. Логистическое отображение демонстрируют две самые простые и распространенные бифуркации, которые легко определяются с помощью мультипликатора. Одна из них – бифуркация удвоения периода – уже рассмотрена нами.

Другая бифуркация состоит в рождении (исчезновении) пары устойчивой и неустойчивой неподвижных точек. Обратимся к логистическому отображению в форме (38)¹: $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$. Его неподвижные точки легко найти из соответствующего квадратного уравнения $x_0 = 1 - \lambda x_0^2$:

$$x_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda}}{2\lambda}. \quad (39)$$

Таким образом, существует две неподвижные точки, которым отвечают разные знаки в полученном соотношении. Нетрудно видеть, что эти точки рождаются парой при бифуркационном значении параметра $\lambda = -0,25$.

Вычислим теперь мультипликатор:

$$\mu = f'(x_0) = -2\lambda x_0 = 1 \mp \sqrt{1 + 4\lambda}. \quad (40)$$

В точке бифуркации неподвижные точки сливаются, и, соответственно, имеют одинаковые мультипликаторы $\mu = +1$. Это и есть условие данной бифуркации. Нетрудно видеть, что при $\lambda > -0,25$ характер устойчивости этих двух точек различен: для первой (верхний знак) $\mu < 1$, и эта точка устойчива, для второй (нижний знак) – $\mu > 1$ и точка неустойчива.

Такую бифуркацию называют *касательной*². Причина состоит в том, что в момент бифуркации биссектриса на итерационной диаграмме касается графика функции. (Величина мультипликатора определяет наклон касательной, а $\mu = f'(x_0) = 1$.)

¹ Заметим, что для отображения в форме (27) такая бифуркация отсутствует.

² Иногда ее называют седло-узловой, перенося на отображения терминологию теории би-

Таким образом, имеются две основные бифуркации дискретных отображений: касательная и бифуркация удвоения периода. Обе они могут быть найдены с помощью мультипликатора, причем первой отвечает значение $\mu = +1$, а второй: $\mu = -1$.

Задача

Нарисуйте итерационную диаграмму логистического отображения (38) в окрестности точки касательной бифуркации: а) до порога бифуркации рождения пары неподвижных точек, б) непосредственно в точке бифуркации, в) за порогом. Обсудите динамику изображающей точки на итерационной диаграмме во всех трех случаях.

1.7. Законы Фейгенбаума

Одно из удивительных открытий американского физика М. Фейгенбаума состояло в том, что аналогично логистическому отображению, описанный в п.1.5 каскад бифуркаций удвоения периода демонстрируют и другие отображения, моделирующие математические, физические, химические и даже социальные системы. Он сумел обосновать этот факт теоретически. Еще более удивительно, что и системы в виде дифференциальных уравнений тоже демонстрируют такое поведение – переход к хаосу через удвоения периода. При этом законы такого перехода, открытые Фейгенбаумом, *универсальны* – то есть одинаковы для всех систем. Так, было установлено, что значения параметра λ_k , при которых происходят бифуркации удвоения периода, удовлетворяют соотношению

$$\lambda_k \approx \lambda_C - K \cdot \delta_F^k, \quad (41)$$

где $\delta_F=4,669201609102990672\dots$ – универсальная константа, одинаковая для любых систем, демонстрирующих последовательность бифуркаций удвоения периода. Хотя соотношение (41) приближенное, оно выполняется тем лучше, чем ближе мы подходим к критической точке, и уже для циклов периодов 16 и выше его точность весьма высока. Можно сказать, что возникновение хаоса в результате каскада удвоений периода – это одна из фундаментальных закономерностей природы.

Одним из отражений закономерностей Фейгенбаума является тот факт, что бифуркационное дерево в окрестности точки перехода к хаосу обладает *само-*

фуркаций систем, описываемых дифференциальными уравнениями.

подобной структурой, которая воспроизводится во все более мелких масштабах. Это свойство называется свойством *скейлинга* (от английского *scale* – масштаб), или масштабной инвариантности. Для иллюстрации этого на рис. 21 показана окрестность критической точки $\lambda_c = 1,401152\dots$ во все большем масштабе – каждый выделенный прямоугольник дан в увеличенном виде. При этом масштаб по горизонтальной оси пересчитывается в $\delta=4,6692\dots$ раз относительно критической точки $\lambda=\lambda_c$, а по вертикальной оси x – в $\alpha=-2,5029\dots$ раз (вторая универсальная константа Фейгенбаума) относительно точки $x=0$. (Знак минус означает изменение ориентации координатных осей – картинка переворачивается «вверх ногами».) Получаемые в результате этой операции рисунки совпадают друг с другом, причем качество совпадения тем лучше, чем ближе к критической точке мы находимся.

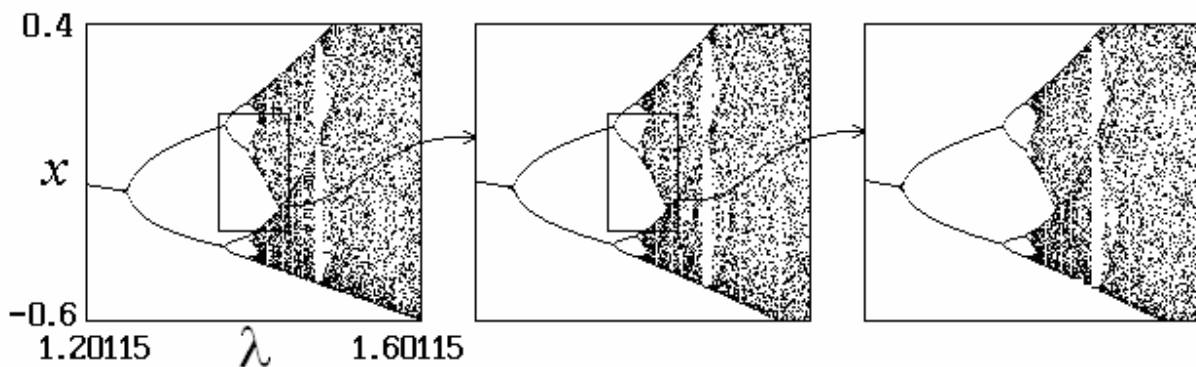


Рис. 21. Самоподобие (скейлинг) в структуре бифуркационного дерева логистического отображения. Каждый рисунок представляет собой увеличение выделенного на предыдущем фрагмента.

Задачи

1. В таблице 2 представлены значения параметра, отвечающие удвоениям периода на базе неподвижной точки логистического отображения. Оцените по этим данным константы K и δ в законе Фейгенбаума.

Таблица 2

n	λ_n	n	λ_n
0	0,75	4	1,39963724
1	1,25	5	1,40082874
2	1,36809894	6	1,40108527
3	1,39404616		...

2. Реализуйте на компьютере иллюстрации скейлинга на бифуркационном дереве.

1.8. Шум и бифуркационное дерево

В отличие от рассмотренных нами ранее моделей, в реальных системах всегда присутствуют случайные флуктуации или шум. Анализ колебательных систем с шумом – очень непростая задача, которая представляет собой существенную часть отдельной науки – статистической радиофизики. Действительно, если система описывается дифференциальным уравнением, не вполне очевидно, как учесть при ее описании естественные шумы. А вот для дискретных отображений эта задача радикально проще. Действительно, в рамках биологической интерпретации представим себе, что количество пищи не одинаково год от года, а случайно меняется вблизи некоторого постоянного значения. Тогда мы приходим к отображению вида

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 + \varepsilon \xi_n, \quad (42)$$

где ε – амплитуда шума, ξ_n – случайная последовательность. Дискретная случайная величина ξ_n может генерироваться любым компьютером. Используя соответствующий генератор случайных чисел, можно построить бифуркационное дерево для системы с шумом (рис. 22).

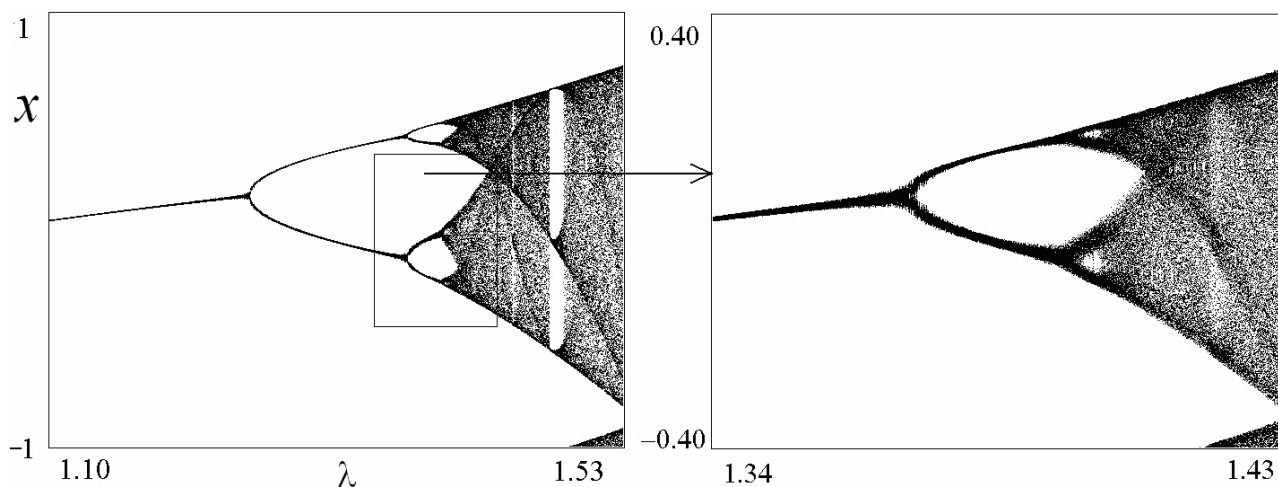


Рис. 22. Иллюстрации воздействия шума на бифуркационное дерево.

На нем хорошо видно, что шум «размывает» ветви дерева. Показанный в увеличенном виде фрагмент дерева в этом случае демонстрирует, что влияние шума тем сильнее, чем более долгопериодические циклы мы рассматриваем, то есть чем ближе к критической точке мы находимся. Таким образом, сколь ни был бы мал шум, он обязательно разрушит картину удвоений периода вблизи критической точки. Это означает, что в реальных системах всегда наблюдается конечное число удвоений периода (оно зависит от вида системы и характера шума).

Таким образом, дискретные отображения – удобные модели, иллюстрирующие влияние шума на динамические системы. Любопытно, что в компьютере в качестве генератора случайных чисел также используются дискретные отображения!

Задача

Скейлинг на бифуркационном дереве с шумом возможен, если амплитуду шума уменьшать на каждом очередном уровне на величину $\mu_F = 6,61903\dots$ – это новая универсальная константа для отображений с квадратичным экстремумом. Дайте соответствующую иллюстрацию на компьютере.

1.9. Ляпуновский показатель

Как мы уже выяснили, для решения вопроса об устойчивости неподвижной точки необходимо вычислить ее мультипликатор, то есть производную функции в неподвижной точке. Несложно также понять, как определить, устойчив или неустойчив цикл некоторого периода: если в исходном отображении имеется N -цикл, в N раз проитерированном отображении ему соответствует неподвижная точка, и устойчивость цикла совпадает с устойчивостью этой неподвижной точки. Последняя же определяется мультипликатором, формулу для вычисления которого можно преобразовать с использованием правила вычисления производной сложной функции:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{df^{(N)}(x_0)}{dx} = \frac{df(f^{(N-1)}(x_0))}{df^{(N-1)}(x_0)} \cdot \frac{df^{(N-1)}(x_0)}{dx} = \\ &= f'(x_0) \cdot \frac{df^{(N-1)}(x_0)}{dx} = \dots = f'(x_0)f'(x_1) \cdot \dots \cdot f'(x_{N-1}), \end{aligned} \quad (43)$$

где x_0, x_1, \dots, x_{N-1} – элементы N -цикла. Таким образом, понятие мультипликатора можно распространить и на циклы дискретных отображений: мультипликатор цикла равен произведению производных функции в каждой его точке.

Как мы видели, возможны, однако, и непериодические режимы (см., например, рис.20). Возникает вопрос: можно ли распространить понятие устойчивости на непериодический режим. Оказывается, можно.

Вспомним, что при введении понятия устойчивости неподвижной точки рассматривалось поведение близких к ней точек. Аналогично для того, чтобы определить устойчивость траектории (в том числе и непериодической), необходимо рассмотреть близкую к ней траекторию. Если с течением времени эта траектория будет приближаться к данной, то исследуемая траектория устойчива,

если нет – неустойчива. А теперь придадим этим рассуждениями сравнительно строгую форму.

Пусть x_0 – некоторая начальная точка, тогда в любой момент (дискретного) времени N мы можем определить ее образ под действием отображения $f^N(x)$, т.е. получить траекторию отображения в виде последовательности точек $x_1, x_2=f(x_1), x_3=f^2(x_1), \dots$

Возьмем близкую к начальной точку $x_1 + \tilde{x}_1$, где \tilde{x}_1 – малая добавка (возмущение). Тогда траектория отображения, испущенного из этой точки, определится последовательностью $x_1 + \tilde{x}_1, f(x_1 + \tilde{x}_1) = f(x_1) + f'(x_1)\tilde{x}_1 = x_2 + \tilde{x}_2, f(x_2 + \tilde{x}_2) = f(x_2) + f'(x_2)\tilde{x}_2 = x_3 + \tilde{x}_3, \dots$ Таким образом, мы можем проследить за тем, как изменяется со временем малое возмущение начального условия: его последовательные значения равны

$$\begin{aligned} & \tilde{x}_1 \\ & \tilde{x}_2 = f'(x_1)\tilde{x}_1 \\ & \tilde{x}_3 = f'(x_2)\tilde{x}_2 = f'(x_2)f'(x_1)\tilde{x}_1 \\ & \dots\dots\dots \\ & \tilde{x}_N = f'(x_{N-1})\tilde{x}_{N-1} = \tilde{x}_1 \prod_{i=1}^N f'(x_i) \\ & \dots\dots\dots \end{aligned} \tag{44}$$

По аналогии с неподвижной точкой следует сказать, что если со временем это возмущение убывает, то траектория устойчива, а если нарастает – неустойчива³. Можно ввести и количественную характеристику устойчивости траектории. Для этого предположим, что через достаточно большое время (или, как говорят, асимптотически) возмущение будет изменяться в соответствии с законом $\tilde{x}_N = \tilde{x}_0 e^{\Lambda N}$. Понятно, что в этом случае его эволюция определяется величиной Λ : при $\Lambda < 0$ возмущение убывает и траектория устойчива, при $\Lambda > 0$ возмущение нарастает и траектория неустойчива. Несложно видеть, что эту величину можно вычислить по формуле

$$\Lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i) \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)|. \tag{45}$$

(Предельный переход $N \rightarrow \infty$ учитывает тот факт, что экспоненциальная зависимость возмущения от времени верна асимптотически.)

³ Заметим, что это лишь одно из возможных определений устойчивости траектории, однако, пожалуй, наиболее важное для нелинейной динамики.

Такой способ определения устойчивости траектории был предложен русским математиком А.М. Ляпуновым (1857–1918), разработавшим теорию устойчивости динамических систем, и поэтому величина Λ называется *ляпуновским показателем*. Сразу следует отметить, что, строго говоря, ляпуновский показатель является характеристикой конкретной траектории, и при выборе другого начального условия может, вообще говоря, получиться другое значение ляпуновского показателя. Однако для подавляющего большинства отображений (и, в частности, для всех отображений, которые встретятся нам далее в этой книге) при фиксированных параметрах ляпуновский показатель почти для всех траекторий совпадает.

Непосредственно из формулы для расчета ляпуновского показателя видно, что для неподвижных точек и периодических режимов (циклов) ляпуновский показатель связан с мультипликатором весьма простой формулой:

$$\Lambda = \frac{1}{N} \ln|\mu|, \quad (46)$$

где N – период цикла.

Отсюда видно, что при $|\mu| < 1$ ляпуновский показатель отрицателен и режим устойчив, а при $|\mu| > 1$ ляпуновский показатель положителен и режим неустойчив, т.е. устойчивость неподвижных точек, определенная по мультипликаторам и по ляпуновскому показателю, совпадает.

Для непериодических режимов ляпуновский показатель, как правило, приходится вычислять численно. Сделать это можно, просто подсчитав его по формуле (45). (При этом предел при $N \rightarrow \infty$ нужно, конечно, заменить вычислением суммы при достаточно большом⁴ числе итераций N .) Полученный таким образом график зависимости ляпуновского показателя логистического отображения (38) от параметра приведен на рис. 23. (Сверху для сравнения приведено бифуркационное дерево, построенное в том же масштабе по параметру).

⁴ Возникает естественный вопрос: какое число итераций N будет «достаточно большим»? Ответ на него существенно зависит как от структуры отображения и значений его параметров, так и от точности, которой мы хотим достичь. Так, для того, чтобы построить график рис. 23, достаточно 100 итераций. В то же время существуют задачи, в которых и сотен тысяч итераций оказывается недостаточно. В качестве практического критерия достаточности числа итераций можно предложить следующий: при увеличении числа итераций в 2 раза результат (численное значение, вид графика и т.п.) не должен изменяться в рамках требуемой точности.

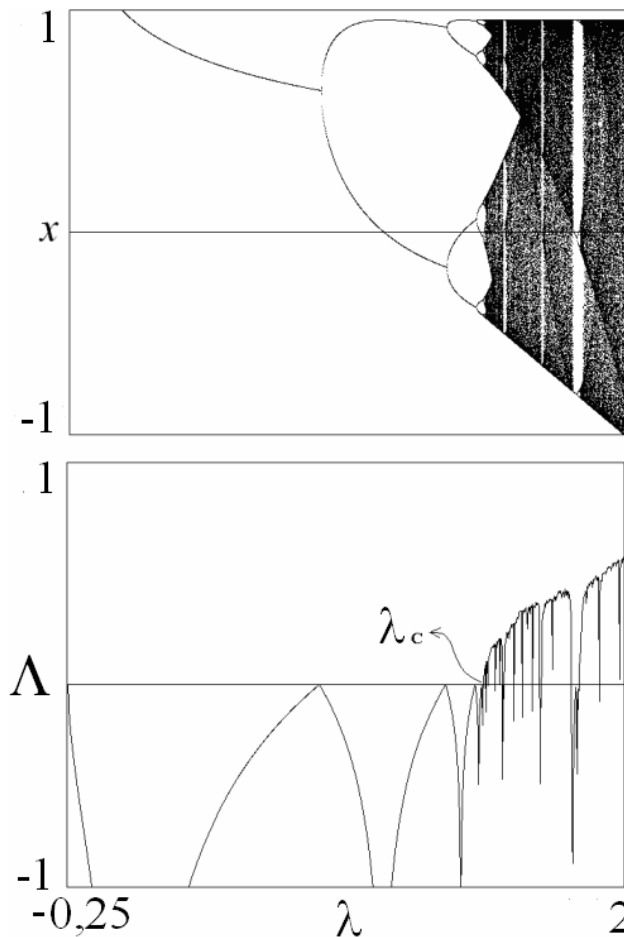


Рис. 23 Бифуркационное дерево и график ляпуновского показателя логистического отображения.

На этом графике хорошо видно, что до тех пор, пока в системе реализуются периодические режимы, ляпуновский показатель отрицателен. По графику ляпуновского показателя также фиксируются и точки бифуркаций удвоения: в этих точках показатель обращается в ноль. Появлению же непериодического режима соответствует положительный ляпуновский показатель, и такие режимы становятся возможными при $\lambda > \lambda_c = 1,401152\dots$

Возникает, таким образом, достаточно интересная ситуация. С одной стороны, ляпуновский показатель положителен и режим неустойчив: две изначально близкие траектории с течением времени экспоненциально расходятся. С другой стороны, значения переменной остаются конечными. Возникающий режим принято называть *динамическим хаосом*. (Следует различать непериодические и хаотические режимы. Любой хаотический режим, конечно, непериодический, однако далеко не всякий непериодический режим является хаотическим. В качестве простейшего примера можно привести режимы, возникающие из периодических при воздействии шума.)

К чему же приводит наличие в системе положительного ляпуновского показателя и реализация режима динамического хаоса? С одной стороны, динами-

ческая система (например, логистическое отображение) полностью детерминирована, т.е. задав *абсолютно точно* текущее значение динамической переменной, мы можем абсолютно точно узнать значения переменной в любой сколь угодно удаленный последующий момент времени. Однако, как несложно понять, абсолютно точно задать значение какой-либо переменной ни в физическом, ни в численном эксперименте принципиально невозможно: точность ограничена как в физическом, так и в численном (разрядностью используемой переменной) эксперименте. Таким образом, реально мы всегда знаем значение переменной с некоторой погрешностью. Если ляпуновский показатель отрицателен, то при моделировании динамики системы эта погрешность будет убывать⁵. Таким образом, значения переменных через некоторое достаточно большое время мы узнаем с примерно такой же погрешностью, с которой знали начальное значение, и получаемая нами информация вполне адекватно опишет динамику системы.

Совсем иначе обстоит дело, если ляпуновский показатель положителен. В этом случае погрешность будет очень сильно нарастать, поэтому через некоторое конечное время даже при очень малой начальной погрешности ее величина станет сравнима с размером области, в которой локализованы значения переменной. Это означает, что получаемые значения переменных уже не несут никакой информации о динамике траектории, испущенной из конкретной точки, т.е. поведение системы непредсказуемо. Это и есть режим динамического, или детерминированного хаоса.

Таким образом, ляпуновский показатель является весьма важной характеристикой системы, позволяющей определить тип ее динамики. Отметим, что именно наличие положительного ляпуновского показателя является критерием хаоса, а все другие характеристики (непериодичность, сложный вид траектории и т.п.) – лишь косвенные признаки наличия хаотической динамики в системе.

Задача

Напишите программу, вычисляющую зависимость ляпуновского показателя от параметра для логистического отображения.

1.10. Отображения с двумя параметрами

⁵ Здесь имеется в виду погрешность, вызванная ошибкой в начальных условиях.

Мы рассмотрели пока только одно отображение, являющееся простейшим представителем отображений с единственным квадратичным экстремумом, и обсуждали картину бифуркаций и переход к хаосу, которые наблюдаются при вариации единственного управляющего параметра λ . В реальности, однако, часто встречаются ситуации, в которых система характеризуется не одним, а, по крайней мере, двумя параметрами. Пусть, например, мы наблюдаем за динамикой популяции, описываемой дискретной переменной x_n . Можно представить себе ситуацию, когда количество пищи, задающее параметр отображения λ , меняется с периодичностью два года. Это может происходить и по естественным причинам, или, например, за счет периодического искусственного подкармливания. Такая система может быть охарактеризована уже двумя параметрами:

$$x_{n+1} = 1 - \lambda_1 x_n^2, \quad x_{n+2} = 1 - \lambda_2 x_{n+1}^2. \quad (47)$$

Эта задача приводится к одномерному «квартичному» отображению (см. задачу):

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - bx_n^4. \quad (48)$$

Как мы видели, возможность сложной динамики и хаоса в отображениях связана с наличием квадратичного экстремума. Поэтому если говорить о некоей общей теории, естественным шагом является переход от отображения с единственным квадратичным экстремумом к отображению с двумя такими экстремумами. Простейшим вариантом функции с двумя экстремумами является кубическая парабола. Таким образом, приходим к отображению:

$$x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3, \quad (49)$$

Это отображение естественно назвать *кубическим*. В отличие от логистического отображения, в этом случае изменение знака перед нелинейным членом существенно меняет свойства отображения, поэтому для полноты картины следует рассмотреть и отображение

$$x_{n+1} = a + bx_n - x_n^3. \quad (50)$$

Переход к кубическому отображению как следующей «естественной» модели теории можно обосновать более строго с использованием разложения в ряд *Тейлора* (см. Приложение 1). Такой подход позволяет перейти далее к трехпараметрическим моделями и т.д. Заметим, что число существенных параметров, от которых зависит картина динамических режимов и бифуркаций, является важной характеристикой моделей и явлений в нелинейной динамике и поэтому носит специальное название – *корузмерность*.

Задача

Рассмотрите динамику популяции, описываемую отображением (47). Покажите, что двукратно проитерированное отображение приводится к двухпараметрическому кватричному отображению $x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - bx_n^4$, и найдите выражения для параметров a и b . Сколько экстремумов и какого порядка может иметь это отображение?

1.11. Карты динамических режимов

Иллюстрации в виде бифуркационных деревьев демонстрируют возможность нетривиальной эволюции аттракторов и, соответственно, колебательных режимов динамических систем при вариации одного параметра. Еще большее разнообразие режимов можно наблюдать, если система характеризуется двумя параметрами. На первый взгляд кажется, что исследование такой системы требует кропотливой работы, и это действительно так. Однако сейчас в нелинейной динамике стал популярным весьма простой, наглядный и информативный прием, который позволяет быстро получить существенную информацию о системе. Продемонстрируем его на примере кубического отображения (49).

Компьютерный алгоритм двухпараметрического исследования состоит в следующем. Выбираются какие-либо значения параметров a и b . Затем из некоторой начальной точки (*начального условия*) выполняется несколько сотен итераций отображения для того, чтобы система вышла на аттрактор (*выбирается переходной процесс*), и запоминается полученная точка.

После этого выполняется еще несколько итераций уже непосредственно на аттракторе, и после каждой из них производится сравнение полученного значения с запомненной точкой. Если два из них совпадают с достаточно высокой (наперед заданной) точностью, то разделяющее их число итераций принимается за период движения. (Возможная блок-схема этой части программы приведена на рис. 24.) На плоскости параметров (на экране дисплея) соответствующая этим значениям параметров точка отмечается некоторым цветом, причем цветовая палитра выбрана заранее, так что движениям с определенными периодами отвечают определенные цвета. После этого процедура повторяется при слегка измененных значениях параметров, так что в конечном итоге выполняется полное «сканирование» плоскости параметров. В результате плоскость оказывается окрашенной в разные цвета в соответствии с периодом движения на аттракторе. Области хаоса (непериодические режимы) также обозначаются специальным образом.

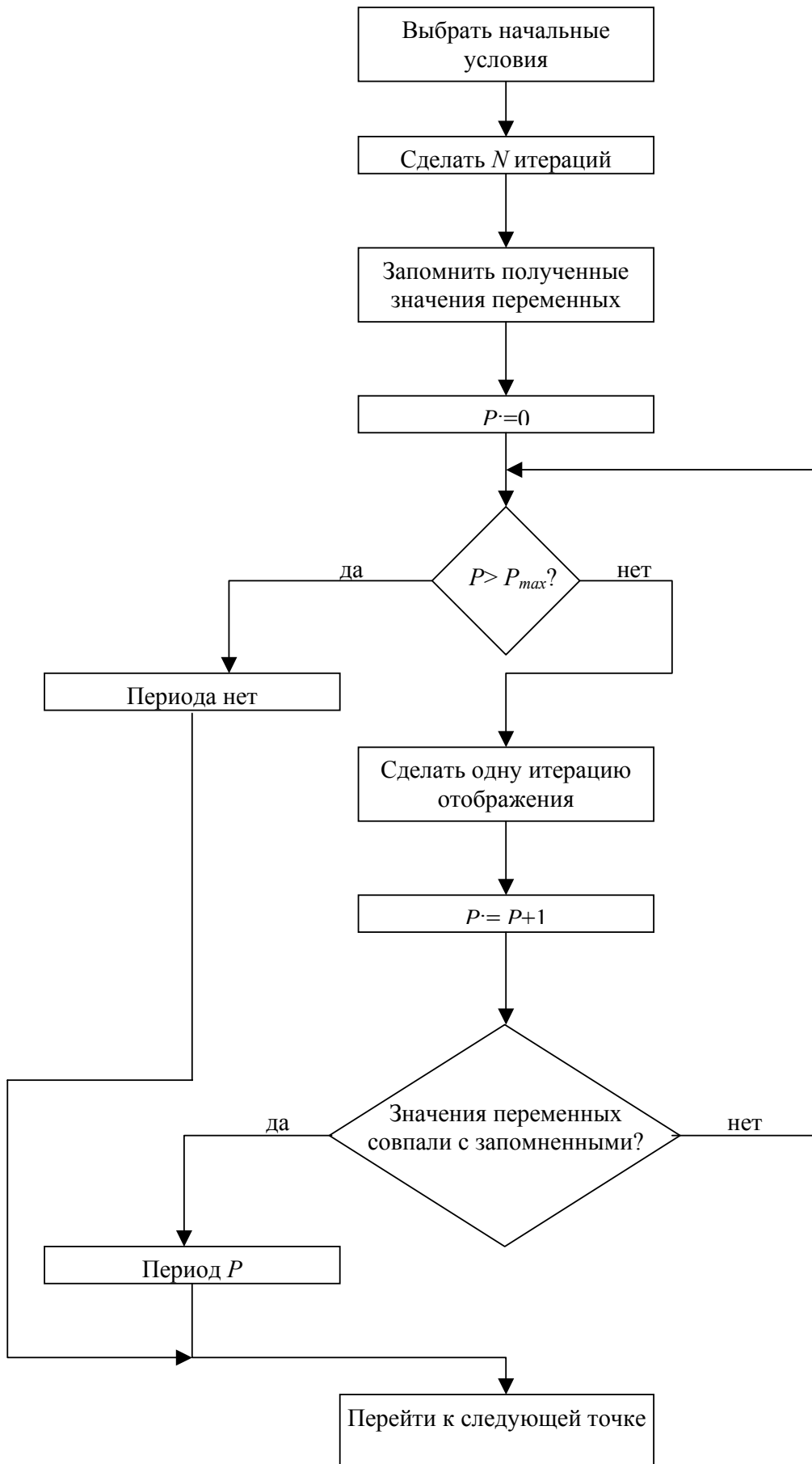


Рис. 24. Блок-схема алгоритма построения карты динамических режимов.

Может, однако, оказаться, что при некоторых значениях параметров значения динамической переменной начнут неограниченно нарастать (например, для логистического отображения (38) это происходит при $\lambda > 2$). Такая ситуация, обыкновенно называемая на «жаргоне» нелинейной динамики «разбеганием», приводит, как правило, к остановке программы с выдачей сообщения об ошибке. Чтобы этого избежать, необходимо при каждой итерации отображения проверять, не превышает ли значение динамической переменной некоторого заранее определенного числа, например, 1000. Если да, то необходимо отметить эту точку плоскости параметров соответствующим образом и перейти к следующей точке.

По очевидной аналогии с географией такую «раскрашенную» плоскость называют *картой динамических режимов*. На рис. 25 показана карта динамических режимов кубического отображения (49).

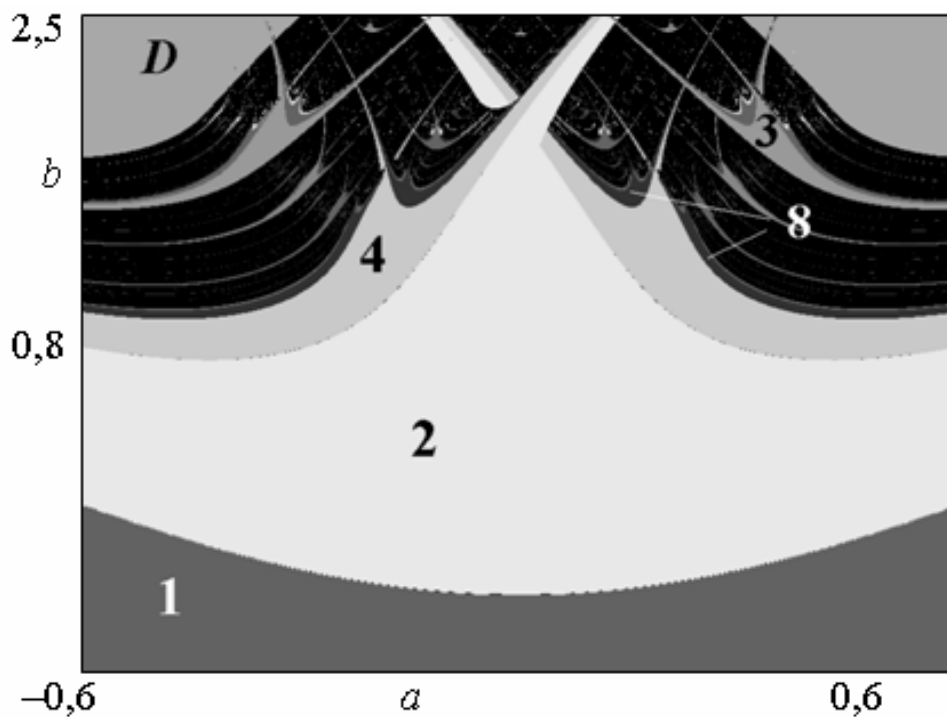


Рис. 25. Карта режимов кубического отображения (49). Цифрами обозначены периоды основных циклов, D – область «разбегания», черным цветом обозначена область непериодических режимов.

Как видим, столь простая модель демонстрирует очень большое разнообразие режимов и бифуркаций. В нижней части рисунка видна область существования устойчивой неподвижной точки, обозначенная цифрой 1. Ее верхняя граница представляется собой линию бифуркации удвоения периода. Выше нее наблюдается устойчивый 2-цикл. Линий рождения 4-цикла в результате аналогичной бифуркации уже две, причем область устойчивости 2-цикла имеет характерный вид с уходящим «вверх» пересекающимися «отростками».

Таким образом, область устойчивости 2-цикла ограничена этими линиями удвоений, а также двумя линиями касательных бифуркаций (которые также часто называют *складками*, используя терминологию теории катастроф), образующими нижнюю границу видимых в верхней части карты «отростков». Отметим, что линии складок продолжаютсЯ внутрь области устойчивости 2-цикла и сходятся в точке, которую в теории катастроф называют *точкой сборки* ($a=0, b=2$). На карте динамических режимов эта точка, однако, не видна.

Описанная совокупность бифуркационных линий показана схематически на рис. 26, на котором область существования устойчивого цикла определенного периода заштрихована. Она демонстрирует весьма типичную структуру на картах, названную французским специалистом в области нелинейной динамики К. Мира *crossroad area* – «перекресток». На карте можно видеть две аналогичные конфигурации на базе 8-циклов. Внутри самых широких окон устойчивости (периодических режимов) в области хаоса, реализующихся на основе 3-циклов, можно идентифицировать конфигурации *crossroad area*, отвечающие областям устойчивости 6-циклов.

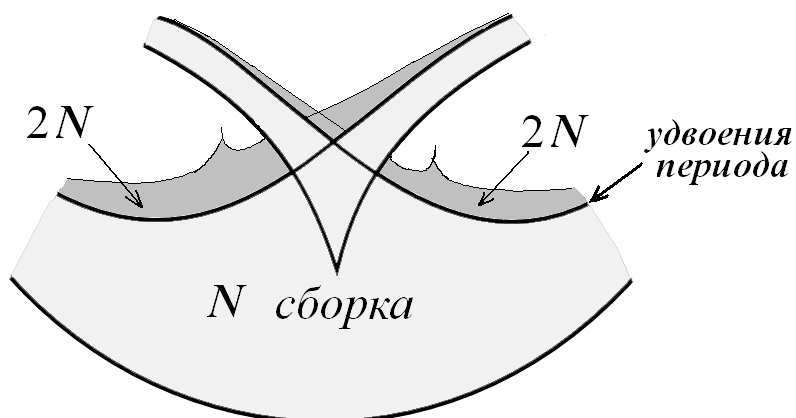


Рис. 26. Схематическое изображение структуры типа *crossroad area* на плоскости параметров.

Отметим также, что карты динамических режимов обладают одной особенностью. Если провести сканирование карты различными способами (например, снизу вверх, или слева направо), то отдельные фрагменты карт могут получиться отличающимися. Это связано со свойством *мультистабильности* динамических систем. Оно состоит в том, что при заданных значениях параметров могут сосуществовать одновременно несколько (иногда мало, иногда много) аттракторов. Соответственно, в зависимости от начальных условий траектория может выйти на тот или иной аттрактор. Поэтому, построив карту, стоит попробовать сделать тоже самое, но при других начальных условиях. Полезным также является прием, когда, при переходе к следующим значениям парамет-

ров, в качестве начального условия берут точку аттрактора, получившегося на предыдущем шаге. Иногда об этом способе говоря, что карту строят *с наследованием начальных условий*. Поскольку шаг по параметру, как правило, мал, такой способ позволяет быть уверенным в том, что мы отслеживаем один и тот же аттрактор, а также сокращает переходный процесс, так как начальная точка уже расположена вблизи аттрактора.

Приведем и карту динамических режимов второй «версии» кубического отображения (50) (рис.27). Здесь черным отмечены области непериодических режимов, серым – области D неограниченного роста значений переменной. На этой карте можно видеть второй типичный структурный элемент плоскости параметров отображений, который К. Мира назвал *spring area* («капля» – одно из значений слова «spring»). Схематически он показан на рис.28.

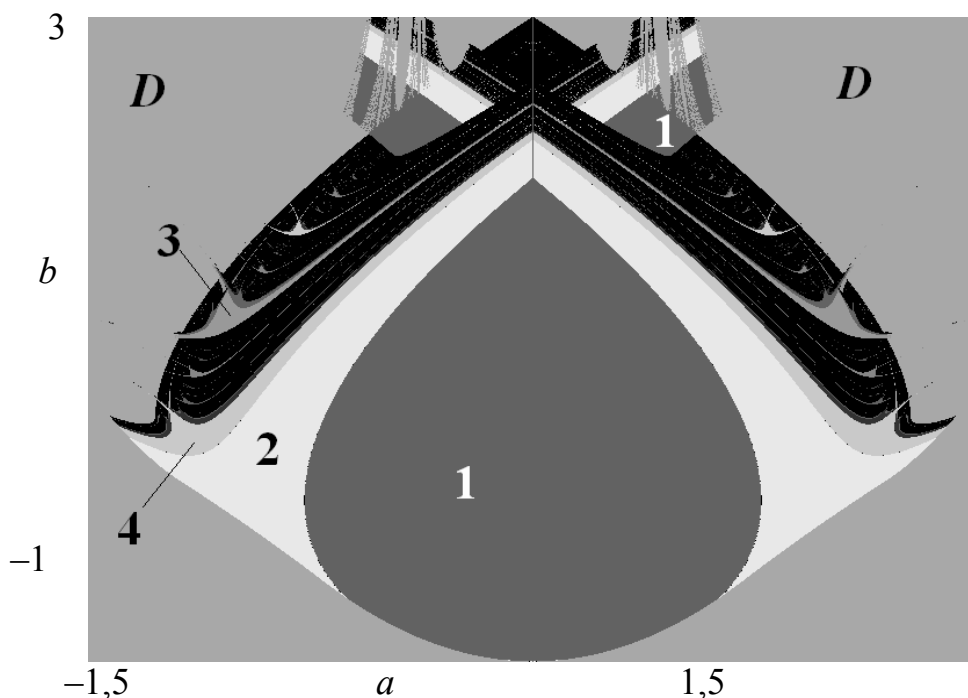


Рис.27. Карта режимов кубического отображения (50).

Эта структура также возникает в окрестности точки сборки. В отличие от *crossroad area*, линия, на которой мультипликатор равен минус единице, имеет более сложную структуру, образуя «петлю». В верхней части рисунка она является линией удвоения периода, так что пересекая ее, попадаем в область цикла удвоенного периода. Однако нижняя часть этой линии отвечает другой, не описанной нами бифуркации⁶, связанной с жестким (скачкообразным) переходом,

⁶ Описание и анализ этой бифуркации более сложны, с ними можно познакомиться по литературе по теории бифуркаций.

хотя для нее $\mu = -1$. От точки, где линия мультипликатора перестает быть линией удвоения, отходит и линия касательной бифуркации цикла удвоенного периода. Следует сказать, что на карте на рис.27 можно видеть и структуры *crossroad area* на базе циклов других периодов, особенно крупные относятся к 4-циклу и 3-циклу.

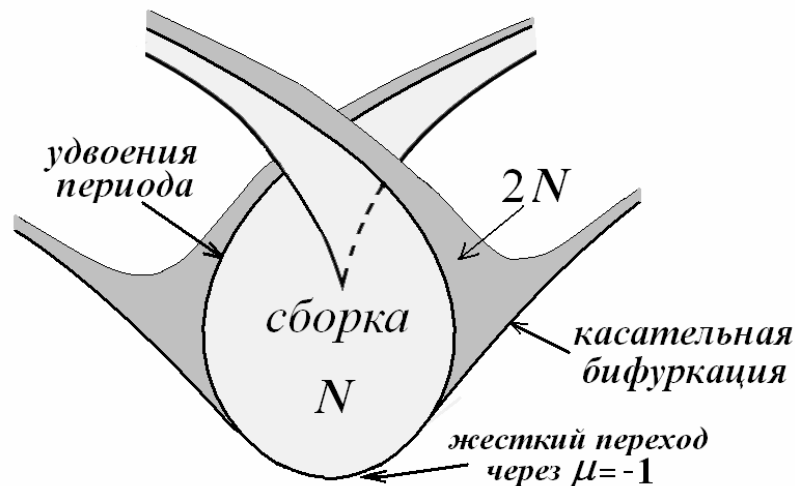


Рис.28. Схематическое изображение структуры *spring area* на плоскости параметров.

Обратим также внимание на изрезанную структуру в верхней части карты. Ее присутствие вместо изображенной на рис. 28 гладкой структуры объясняется тем, что область, из которой итерации сходятся к аттрактору (или, как говорят, его *бассейн притяжения*) при этих значениях параметров достаточно мала и к тому же имеет сложную структуру. При этом начальная точка, используемая для построения карты (в случае рис. 27 это $x=0$), находится вблизи границы этой области и при небольшом изменении параметра переходит через нее. Это эффекта можно было избежать, используя описанную выше технологию построения карт с наследованием.

Итак, рассмотренные нами достаточно простые отображения характеризуются сложной топографией карт динамических режимов. Как правило, карты содержат детали, неоднократно повторяющиеся во все меньших и меньших масштабах, что позволяет говорить о, своего рода, «фрактальных пейзажах». В некоторых случаях вблизи специальных точек карты обладают определенными законами самоподобия (скейлинга), аналогичными законам Фейгенбаума.

В современной нелинейной динамике весьма часто требуется получить качественную информацию об основных особенностях устройства пространства параметров исследуемой системы, например, чтобы определить соответствующие нетривиальному поведению значения параметров. Метод карт динамических режимов позволяет сделать это достаточно быстро. С набором карт для некоторых часто используемых в нелинейной динамике сравнительно простых

«модельных» систем можно познакомиться, например, в сети Интернет по адресу <http://www.sgtnd.narod.ru/science/atlas/rus/index.htm>. С некоторыми из них мы встретимся в нашей книжке.

Задача

Создайте программу, строящую карты динамических режимов одномерных отображений. Постройте карту кубического отображения и ее наиболее интересные увеличенные фрагменты.

1.12. Итерационные диаграммы двухпараметрических отображений

В отличие от задающей логистическое отображение квадратичной, функция, задающая кубическое отображение, может иметь два экстремума. Вследствие этого резко возрастает (по сравнению с квадратичным) количество возможных типов циклов. Укажем сначала на простейший пример, иллюстрирующий это утверждение (рис. 29а): это 2-цикл, который опирается одновременно на оба экстремума отображения.

Как мы уже знаем, если цикл опирается на экстремум отображения, то его мультипликатор равен нулю и цикл является сверхустойчивым. Можно сказать, что опирающийся на два экстремума цикл характеризуется *двойной сверхустойчивостью*: слегка «пошевелив» параметры, мы сможем наблюдать сверхустойчивые циклы, опирающиеся только на максимум либо только на минимум. Таким образом, от точки, соответствующий циклу двойной сверхустойчивости, на плоскости параметров должны отходить две линии, соответствующие «простым» сверхустойчивым циклам. Двигаясь вдоль них, можно вновь добиться ситуации, когда цикл (уже более высокого периода, после пересечения с линией бифуркации удвоения периода) опирается на оба экстремума.

Некоторые из таких циклов представлены на рис.29в. Их можно классифицировать, обозначая через (m,n) цикл, при котором максимум отображается в минимум за m итераций, а минимум в максимум – за n . Ясно, что с ростом периода возможное разнообразие типов циклов возрастает.

На рис. 29б показано, как точки циклов двойной сверхустойчивости и маршруты, соответствующие отображению экстремума в экстремум располагаются на плоскости параметров отображения (49). Они образуют некоторое дерево, «крона» которого формирует наиболее сложно и тонко устроенную часть плоскости параметров. Следует отметить, что несмотря на крайнюю простоту исходной модели, устройство соответствующей «кроне» дерева сверхус-

тойчивых циклов части плоскости параметров столь сложно, что до сих пор полностью не исследовано.

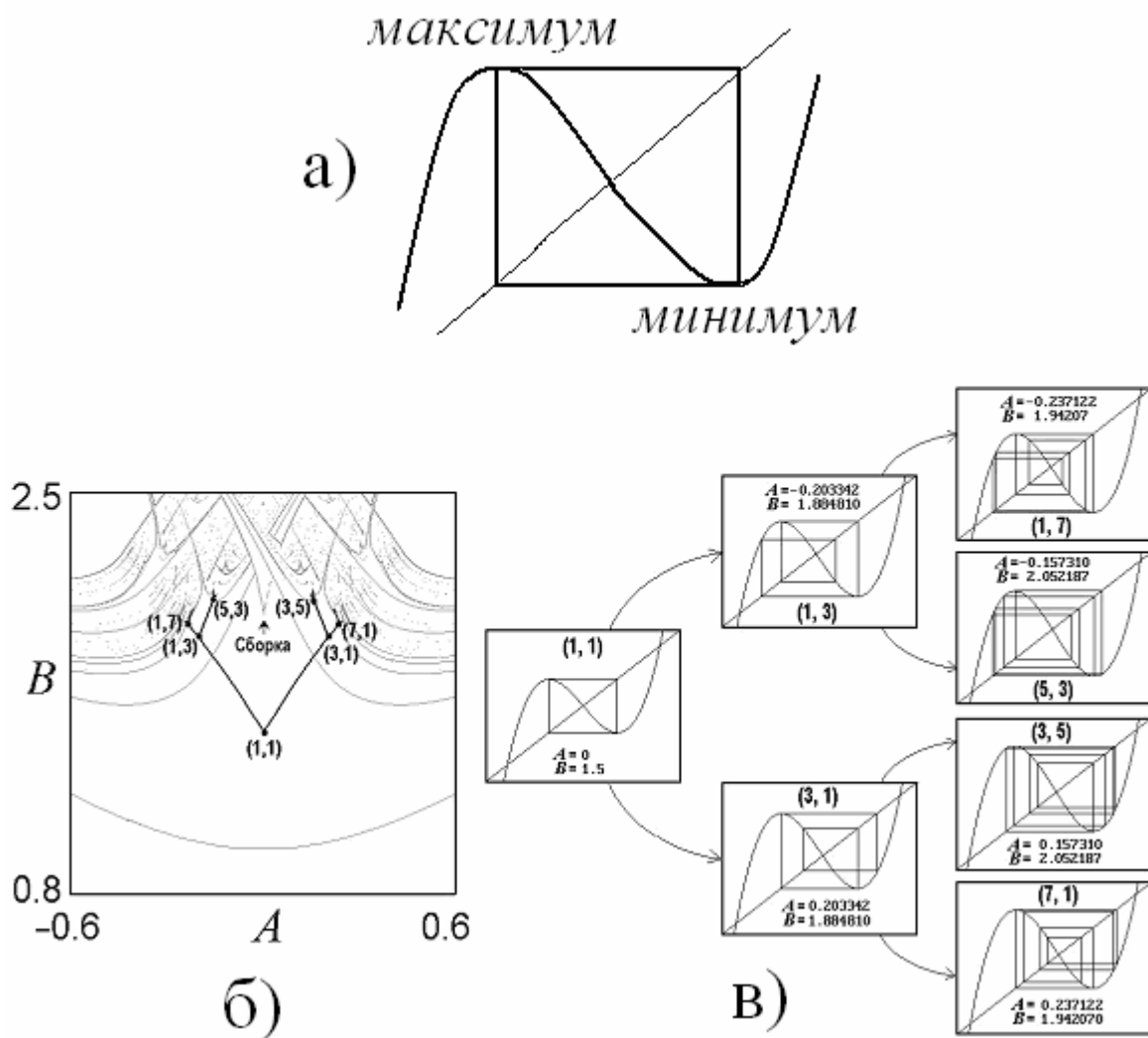


Рис.29. а) Простейший цикл двойной сверхустойчивости в отображении с двумя экстремумами, б) положение различных сверхустойчивых циклов на плоскости параметров, в) дерево сверхустойчивых орбит и различные типы циклов.

Задачи

1. Для отображения (49) найдите значения параметров, при которых реализуется цикл, изображенный на рис.28.
2. Напишите программу, которая при щелчке мыши на карте строит итерационную диаграмму в соответствующей точке. С ее помощью наблюдайте эволюцию итерационных диаграмм при «путешествии» по карте. Подберите конфигурации циклов, которые существенно связаны с наличием двух экстремумов у отображения.

1.13. Карта ляпуновского показателя

Как видно из предыдущих разделов, построение карт динамических режимов является в некотором смысле двухпараметрическим аналогом бифуркационных деревьев, позволяя получить информацию о наличии устойчивых циклов различных периодов. Однако наряду с периодом реализующихся циклов, существенную информацию о динамике системы несет ляпуновский показатель. При двухпараметрическом анализе наиболее полную информацию даст, очевидно, зависимость ляпуновского показателя от обоих параметров. В нелинейной динамике принято такую зависимость визуализировать при помощи *карты ляпуновского показателя*.

Карта ляпуновского показателя представляет собой плоскость параметров отображения, каждая точка которой окрашена в определенный цвет в соответствии со значением ляпуновского показателя в этой точке. Поскольку ляпуновский показатель является непрерывной величиной (в отличие от, например, периода цикла), то обычно используют градиентную окраску, при которой значение ляпуновского показателя кодируется насыщенностью оттенка некоторого выбранного цвета (обычно серого). Как правило, используется следующая раскраска: отрицательные значения ляпуновского показателя кодируются серым цветом тем более насыщенного оттенка, чем больше абсолютное значение ляпуновского показателя. При этом нулевому значению соответствует белый цвет, а достаточно большим отрицательным значениям – черный цвет. Положительные же значения обыкновенно обозначаются одним выделенным оттенком серого цвета⁷, поскольку изменения ляпуновского показателя в положительной области, как правило, менее интересны, чем в отрицательной. Пример такой карты для кубического отображения (49) приведен на рис.30.

Если сравнить ее с картой динамических режимов того же отображения (рис. 25), то видно, что общая структура карт весьма похожа. Проанализируем карту ляпуновских показателей более подробно. На карте хорошо видна граница между областями хаотических и нехаотических (регулярных) режимов: хаосу соответствует положительный ляпуновский показатель, регулярным режимам – нулевой и отрицательный. Далее, нулевой ляпуновский показатель отмечается белым цветом. Поскольку ляпуновский показатель становится равным нулю в моменты бифуркаций⁸, то линии бифуркаций на карте должны быть

⁷ Иногда используется и другая «палитра»: отрицательные значения кодируются синим цветом, а положительные – красным (или желтым), при этом насыщенность цвета возрастает с увеличением абсолютного значения ляпуновского показателя.

⁸ Вообще говоря, ляпуновский показатель равен нулю еще и для некоторых режимов, например, для квазипериодических движений, которые на картах ляпуновских показателей видны в виде белых областей. Более подробно такие движения мы рассмотрим в части III.

«прорисованы» белым цветом. Так, на рис. 30 можно различить линии бифуркаций удвоения неподвижной точки и 2-цикла.

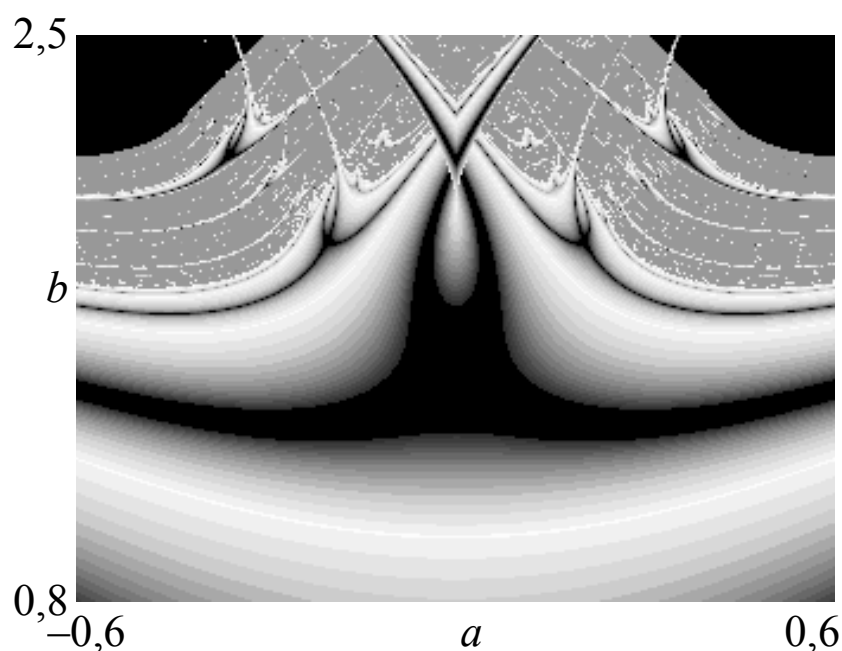


Рис. 30. Карта ляпуновского показателя кубического отображения (49). Черным цветом отмечена область «разбегания» траекторий, серым цветом средней насыщенности – область хаотической динамики (положительный ляпуновский показатель).

Кроме этого, на карте хорошо видны черные линии, образующие в области *crossroad area* характерную «петлю». При выбранной палитре черному цвету соответствуют очень большие отрицательные значения ляпуновских показателей. В соответствии с (46) мультипликатор при этом близок к нулю, поэтому на этих линиях реализуются циклы (режимы) максимальной устойчивости.

Приведем также карту ляпуновских показателей для другой версии кубического отображения (50) (рис. 31).

Таким образом, карты ляпуновских показателей позволяют визуализировать такие важные для нелинейной динамики объекты, как линии бифуркаций и линии режимов максимальной устойчивости. Заметим, что последние не визуализируются на картах динамических режимов. Кроме того, существенным преимуществом карт ляпуновских показателей является возможность применения для анализа динамики систем с непериодическим внешним воздействием: в этом случае отсутствуют, естественно, циклы, поэтому построение карт динамических режимов бессмысленно, однако ляпуновский показатель подсчитать можно.

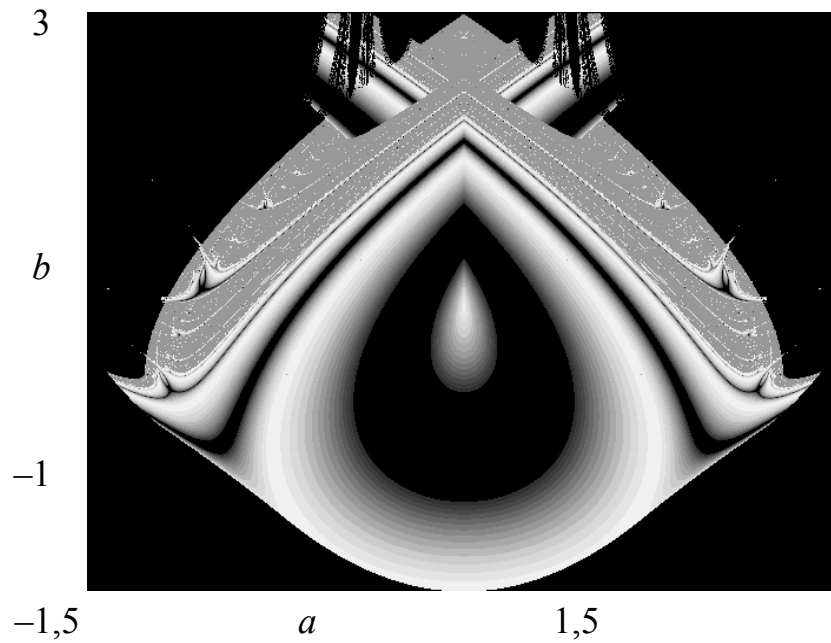


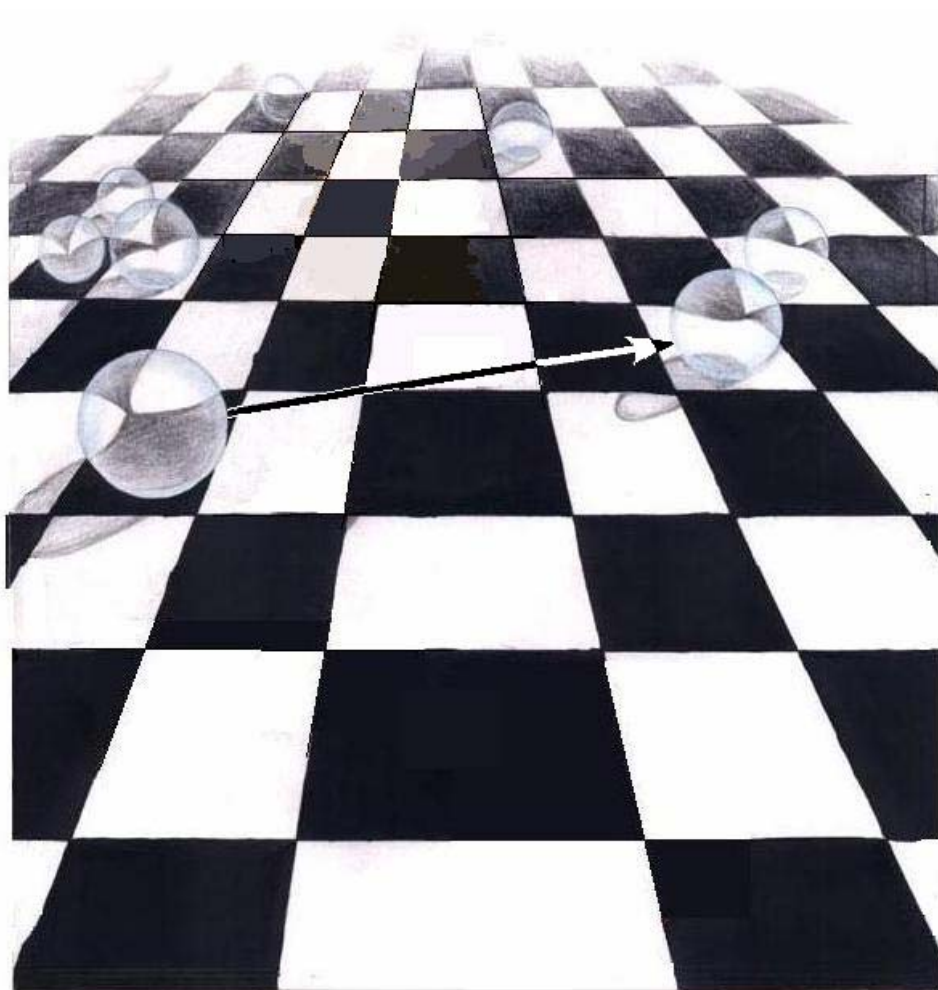
Рис. 31. Карта ляпуновских показателей отображения (50). Соответствие оттенков значениям показателя такое же, как на рис.30.

Задачи

1. Напишите программу, которая строит карту ляпуновских показателей кубического отображения.
2. Постройте карту ляпуновских показателей в кубическом отображении с шумом. Пронаблюдайте ее трансформации при увеличении амплитуды шума.

Часть II

ДВУМЕРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ



y_n

x_n

2.1 Отображение «прыгающего шарика»

Все рассмотренные в предыдущей части примеры относились к одномерным отображениям, поскольку характеризовались единственной переменной x . Весьма часто, однако, одной переменной оказывается недостаточно для того, чтобы полностью описать динамику рассматриваемой системы. Приведем пример системы, для описания которой необходимо следить за изменением двух переменных.

Вернемся к задаче о шарике, падающем на горизонтальный стол (задача 1 из раздела 1.2). Разумно предположить, что высота подскока шарика после n -го удара о стол h_n задается соотношением

$$h_{n+1} = (1 - \varepsilon)^2 h_n, \quad (51)$$

где ε – доля теряемой при ударе скорости. Соотношение (51) представляет собой убывающую геометрическую прогрессию, так как $(1 - \varepsilon) < 1$. Попробуем модифицировать эту систему так, чтобы она демонстрировала более сложное поведение. Понятно, что в первую очередь для этого необходимо как-то поддерживать колебания шарика. Простейшее решение состоит в том, чтобы заставить поверхность стола вибрировать, например, по гармоническому закону (рис. 32).

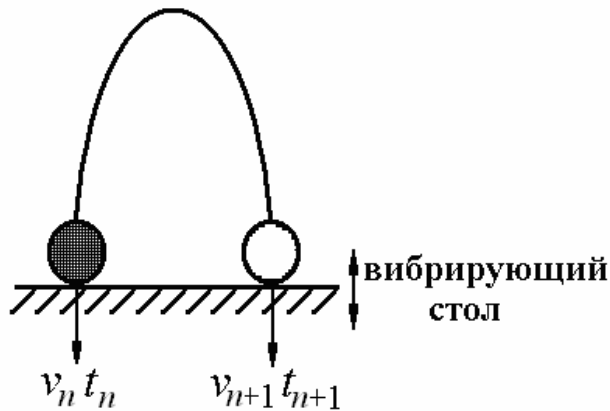


Рис. 32. Модель «прыгающего шарика».

Тогда, двигаясь навстречу шарика, стол может сообщать ему энергию и поддерживать колебания. Для такой системы довольно просто построить дискретное отображение. Прежде всего, договоримся о выборе дискретных переменных. В отличие от (51) их будет две: скорость шарика перед n -ым ударом v_n и момент его удара о стол t_n .

Почему следует выбрать именно эти переменные? Как несложно понять, скорость шарика после удара однозначно связана с высотой, на которую он поднимется, поэтому выбор скорости в качестве динамической переменной фактически эквивалентен выбору высоты подскока. Из дальнейших рассужде-

ний станет понятно, что выбор скорости упростит вычисления. Вторая же переменная – момент времени, соответствующий очередному удару – появилась, так как теперь скорость шарика после удара и, соответственно, высота подскока, зависит не только от его скорости перед ударом, но и от скорости стола в момент удара, которая и определяется моментом времени, в который происходит удар.

Теперь рассмотрим, как изменится скорость шарика при ударе о стол. Пусть скорость шарика перед n -ым ударом о стол равна v_n , а скорость стола зависит от времени по закону

$$V(t) = V_0 \sin \omega t. \quad (52)$$

Тогда перед n -ым ударом шарика скорость стола есть $V_n = V_0 \sin \omega t_n$. Перейдем теперь в систему отсчета, связанную со столом. В этой системе отсчета шарик падает на неподвижный стол со скоростью $v_n + V_0 \sin \omega t_n$. При ударе по условию задачи шарик теряет долю скорости, пропорциональную величине ε . Тогда в этой системе отсчета скорость шарика после n -го удара будет равна $(1 - \varepsilon)(v_n + V_0 \sin \omega t_n)$. Вернемся в исходную систему отсчета, для чего добавим к найденному значению скорости скорость стола. Тогда шарик отскакивает от него со скоростью $(1 - \varepsilon)(v_n + V_0 \sin \omega t_n) + V_0 \sin \omega t_n$.

Далее сделаем одно предположение, которое позволит получить отображение в простом явном виде: будем пренебрегать смещением стола, т.е. считать, что координата стола не меняется, но скорость стола меняется по гармоническому закону⁹. Тогда ясно, что, перед $(n+1)$ -м ударом шарик будет иметь ту же скорость, что и после n -го удара, поскольку по условию сопротивления воздуха отсутствует; и можно записать выражение, связывающее скорость шарика перед $(n+1)$ -ым ударом со скоростью перед n -ым ударом:

$$v_{n+1} = (1 - \varepsilon)v_n + V_0(2 - \varepsilon)\sin \omega t_n. \quad (53)$$

Напомним, что динамика шарика характеризуется двумя переменными: скоростью в момент удара о стол и временем удара. Формула (53) определяет изменение скорости шарика. Теперь рассмотрим, как меняется время, отвечающее моментам удара шарика о стол. Очевидно, что время свободного полета шарика есть

$$\tau = \frac{2v_{n+1}}{g}. \quad (54)$$

⁹ Подумайте самостоятельно, при каких условиях справедливо такое приближение.

С другой стороны, $\tau = t_{n+1} - t_n$. Тогда очевидно, что

$$t_{n+1} = t_n + \frac{2v_{n+1}}{g}. \quad (55)$$

Таким образом, мы получили искомое двумерное отображение, заданное соотношениями (53) и (55). Его можно несколько упростить, приведя к безразмерному виду. Для этого положим¹⁰ $\varphi_n = \omega t_n$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= (1 - \varepsilon)v_n + V_0(2 - \varepsilon)\sin \varphi_n, \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \frac{2\omega}{g}v_{n+1}. \end{aligned} \quad (56)$$

Упростим это отображение, сделав замену (или, как говорят, перенормировку) переменной): $V = \frac{2\omega}{g}v$. Тогда получим

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= (1 - \varepsilon)V_n + k \sin \varphi_n, \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + V_{n+1} \pmod{2\pi}, \end{aligned} \quad (57)$$

где введено обозначение $k = \frac{2(2 - \varepsilon)V_0\omega}{g}$, а символы $\pmod{2\pi}$ означают, что по-

лученное значение переменной φ_{n+1} нужно отнормировать на 2π , т.е. представить в виде $\varphi = 2\pi l + \tilde{\varphi}$, где $0 < \tilde{\varphi} < 2\pi$, и затем оставить только член $\tilde{\varphi}$, отбросив $2\pi l$. Это вполне естественно, т.к. φ является фазой колебаний плиты, а отличающиеся на 2π значения фазы физически неразличимы. С такого рода операциями нам придется часто сталкиваться при рассмотрении явлений, связанных с синхронизацией (часть III).

Обратите внимание, что новые переменные V и φ являются безразмерными величинами. Такой прием – приведение к безразмерным величинам – часто используется при анализе различных физических задач.

Итак, в безразмерном виде наше отображение характеризуется двумя параметрами: величиной диссипации ε и безразмерной амплитудой колебаний стола k . Перейдем теперь к анализу полученного отображения.

Для начала убедимся, что вибрация стола действительно поддержит колебания шарика. Для этого найдем неподвижную точку отображения (57). Для нахождения неподвижной точки нужно решить следующую систему:

¹⁰ Отметим, что такая замена имеет и глубокий физический смысл: ведь важен не момент удара сам по себе, а фаза колебаний плиты в этот момент, которая и определяет ее скорость. Переменная φ как раз есть фаза колебаний.

$$\begin{aligned}
 V_0 &= (1 - \varepsilon)V_0 + k \sin \varphi_0, \\
 \varphi_0 &= \varphi_0 + V_0 - 2\pi n.
 \end{aligned}
 \tag{58}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
 V_0 &= 2\pi n, \\
 \frac{2\pi n \varepsilon}{k} &= \sin \varphi_0.
 \end{aligned}
 \tag{59}$$

Второе уравнение системы (59) имеет два решения вида

$$\varphi_0 = \pm \arcsin \frac{2\pi n \varepsilon}{k},
 \tag{60}$$

которые существуют при условии $2\pi n \varepsilon < k$. (Здесь n – произвольное целое число.) Можно показать, что одна из этих точек устойчива, а другая – нет¹¹. Таким образом, если безразмерная амплитуда достаточно велика ($k > 2\pi \varepsilon$), то в системе возможна неподвижная точка, которой отвечает одинаковое после каждого удара значение скорости шарика и, соответственно, подскоки на одинаковую высоту, которую несложно определить:

$$h = \frac{mv_{n+1}^2}{2} = \frac{mg^2}{8\omega^2} V^2 = \frac{mg^2 \pi^2}{2\omega^2}.
 \tag{61}$$

Что произойдет, если увеличить амплитуду колебаний стола k ? Для ответа на этот вопрос обратимся к компьютерному моделированию.

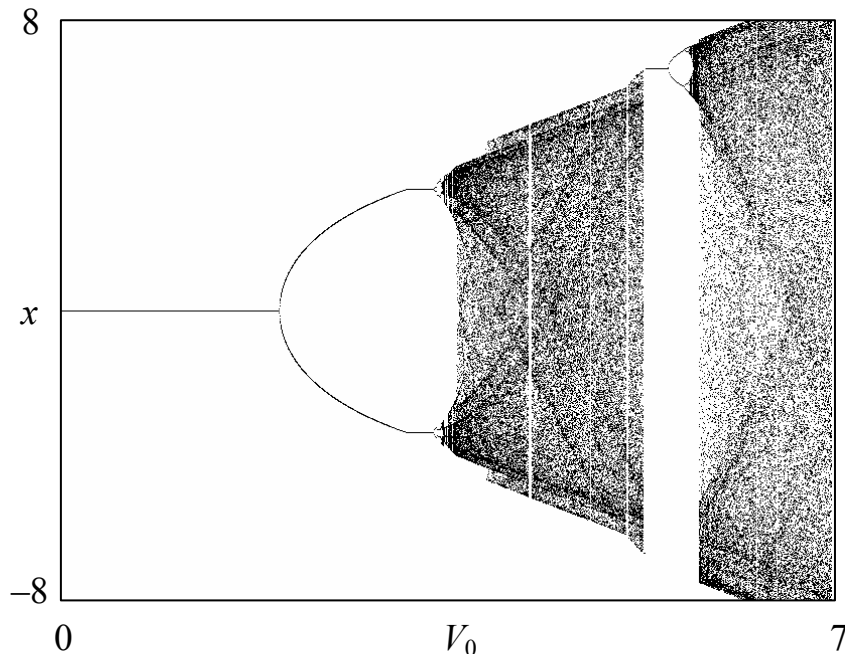


Рис. 33. Бифуркационное дерево отображения «прыгающего шарика» (57) при $\varepsilon=0,9$.

¹¹ Вообще, устойчивые и неустойчивые точки, как правило, рождаются (и исчезают) парами в результате упоминавшейся нами ранее касательной бифуркации. Так происходит и в отображении (57).

На рис. 33 показано бифуркационное дерево, дающее зависимость установившейся скорости V от амплитуды k при фиксированном значении параметра диссипации $\varepsilon=0,9$.

Можно видеть, что в системе имеют место бифуркации удвоения периода и реализуется сценарий перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода, что хорошо заметно на увеличенном фрагменте дерева (рис.34). Обратим внимание на схожесть этого рисунка с бифуркационным деревом для логистического отображения (например, сравните верхнюю «половину» дерева с рис. 21), что может служить еще одним подтверждением универсальности закономерностей Фейгенбаума.

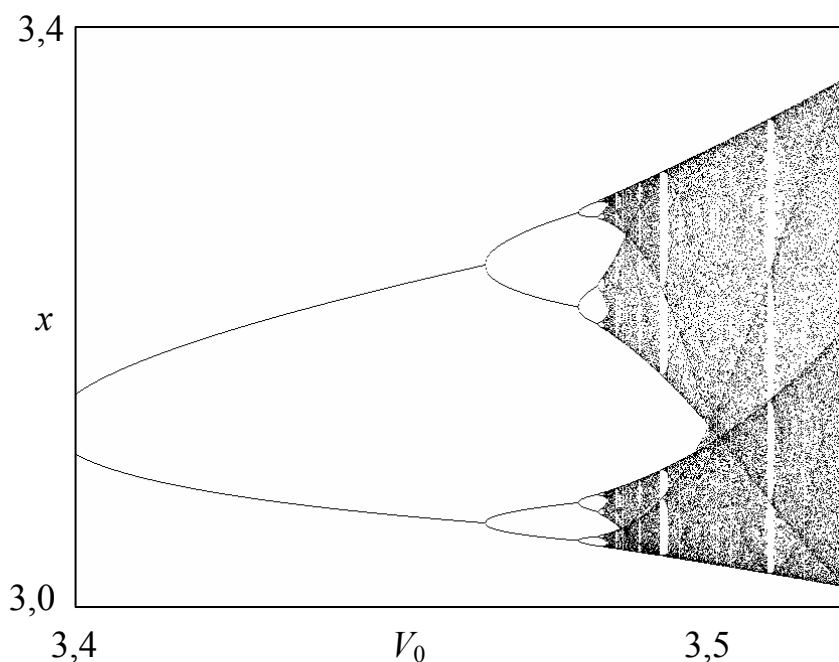


Рис. 34. Увеличенный фрагмент бифуркационного дерева отображения (57), демонстрирующий каскад бифуркаций удвоения периода.

Нам остается лишь добавить, что наша практически школьная задача на самом деле является одной из серьезных моделей нелинейной динамики. Ее ввел российский физик Г.М. Заславский в процессе построения модели одного из явлений астрофизики: ускорения космических частиц гравитационными полями звезд, или ускорения Ферми. Особой популярностью пользуется консервативный вариант этой модели, соответствующий отсутствию потерь энергии при ударе ($\varepsilon=0$). Он возникает во многих физических задачах, как весьма общих и формальных (движение частицы в особом волновом пакете, динамика ротатора под внешним воздействием), так и достаточно конкретных, например, при описании движения элементарных частиц в одном из наиболее простых ускорителей – циклотроне. В силу достаточно прозрачной физической интерпретации и простой формы записи он стал классической моделью в разделе нелинейной

динамики, изучающем консервативные системы, и получил там наименование *стандартного отображения*.

Диссипативный (т.е. с потерями при ударе) вариант популярность получил скорее именно как модель шарика, прыгающего на столе. Ее реализовывали и экспериментально, для чего в качестве вибрирующего стола использовали диффузор громкоговорителя (рис. 35). Отметим, что в эксперименте наблюдались как удвоения периода, так и хаотические колебания.

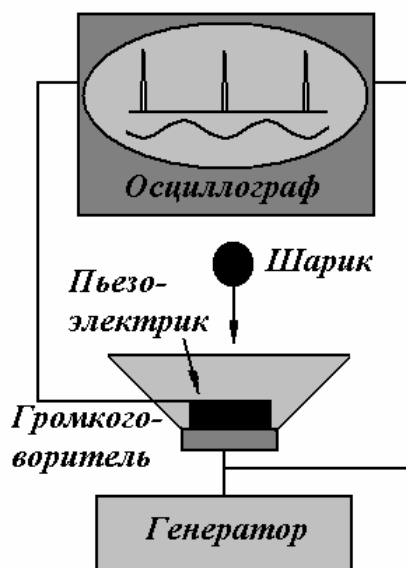


Рис.35 Экспериментальная установка, моделирующая отображение «прыгающего шарика».

Задачи

1. Постройте бифуркационное дерево в задаче о прыгающем шарике для $\varepsilon=0,3$, $\varepsilon=0,5$ и $\varepsilon=0,9$.

2. Изобразите качественно график зависимости высоты шарика над столом от времени $y=y(t)$ для случая неподвижной точки и цикла периода 2 в отображении.

3. Напишите программу, которая строит график $y(t)$. Рассмотрите случаи 2-цикла, 4-цикла, хаоса, и другие возможные варианты.

4. Обсудите применимость сделанного приближения о пренебрежении смещением плиты. Когда оно будет справедливо?

5. Получите отображение для механической системы, являющейся моделью Улама ускорения Ферми (см. рис. 36). Стенка колеблется по гармоническому закону, шарик перемещается без трения, смещением стенки пренебречь. Рассмотрите различные варианты: а) удар о левую стенку упругий, а при ударе о правую теряется доля энергии ε ; б) удар о правую стенку упругий, а при ударе о левую теряется доля энергии ε .

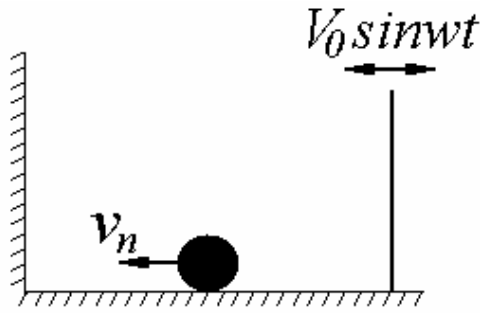


Рис. 36. Механическая система, иллюстрирующая модель Улама ускорения Ферми.

2.2 Отображение Эно

Рассмотрим еще один пример двумерного отображения, широко используемого в нелинейной динамике.

Как известно, простейшим одномерным отображением со сложной динамикой является логистическое отображение

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \text{ или } x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad (62)$$

которое описывает, например, динамику биологической популяции. Тогда возникает правомерный вопрос: нельзя ли построить двумерное обобщение логистического отображения? Это можно сделать различными способами, наиболее простым из которых является следующий. При введении одномерного отображения мы предполагали, что численность популяции в $(n+1)$ -ый год зависит лишь от ее численности в n -ый год. Предположим теперь, что память «глубже», т.е. численность популяции в $(n+1)$ -ый год зависит как от численности в n -ом году, так и от численности в $(n-1)$ -ом году. Будет считать, что последняя зависимость должна быть слабой, поэтому будем полагать ее линейной. Тогда отображение запишется в виде

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) - bx_{n-1}, \quad (63)$$

где b – некоторый новый коэффициент.

Введем теперь обозначение $y_{n+1} = x_n$. Тогда (63) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= rx_n(1 - x_n) - by_n, \\ y_{n+1} &= x_n. \end{aligned} \quad (64)$$

Это и есть искомое двумерное отображение. Если использовать другой вариант исходного логистического отображения, то можно прийти к записи в виде

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - by_n, \\ y_{n+1} &= x_n. \end{aligned} \quad (65)$$

Такое отображение впервые предложил французский астрофизик Мишель Эно (M. Hénon), и оно носит его имя¹². Отметим, что Эно не использовал биологическую интерпретацию, а действовал чисто математическими методами, конструируя простейшие двумерные квадратичные отображения со сложной динамикой.

Несмотря на это, отображение Эно может описывать поведение и некоторых физических систем. Пример одной из них приведена на рис. 37: на поверхности вязкой жидкости находится лодочка с закрепленным на ней магнитом. Если рядом расположить электромагниты, питаемые короткими импульсами тока, то отображение, задающее координаты лодочки через интервалы времени, равные периоду следования импульсов, будет представлять собой отображение Эно¹³.

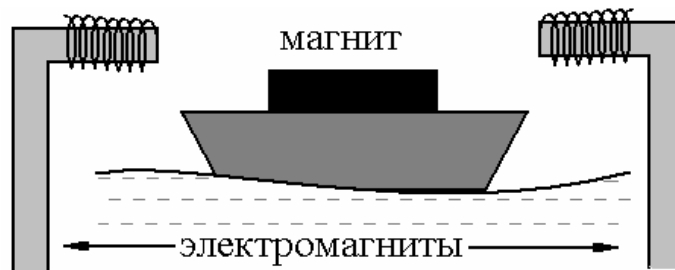


Рис. 37. Схематическое изображение системы, динамика которой описывается отображением Эно.

Отображение Эно допускает аналитический поиск не только неподвижной точки, но и 2-цикла. Сначала найдем неподвижную точку отображения Эно. Для этого надо решить следующую систему

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 - \lambda x_0^2 - b y_0, \\ y_0 &= x_0. \end{aligned} \quad (66)$$

Отсюда следует, что

$$\lambda x_0^2 + (1 + b)x_0 - 1 = 0 \quad (67)$$

и

$$x_0 = \frac{-(1 + b) \pm \sqrt{(1 + b)^2 + 4\lambda}}{2\lambda}. \quad (68)$$

Таким образом, при выполнении условия $\lambda = \frac{-(1 + b)^2}{4}$ в системе рождается пара неподвижных точек, одна из которых будет устойчивой, а вторая – не-

¹² Часто встречается также другая транскрипция: отображение Хенона.

¹³ Строгий вывод можно найти в книге «Динамический хаос» [4].

устойчивой, т.е. происходит уже встречавшаяся нам ранее касательная бифуркация.

Теперь найдем 2-цикл отображения. Для его элементов справедливы соотношения

$$\begin{aligned} x_2 = 1 - \lambda x_1^2 - by_1, & \quad x_1 = 1 - \lambda x_2^2 - by_2 \\ y_2 = x_1, & \quad y_1 = x_2 \end{aligned} \quad (69)$$

Тогда

$$\begin{aligned} x_2(1+b) &= 1 - \lambda x_1^2, \\ x_1(1+b) &= 1 - \lambda x_2^2. \end{aligned} \quad (70)$$

Складывая и вычитая первое и второе уравнения (70), легко находим

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)(1+b) &= \lambda(x_2^2 - x_1^2), \\ (x_2 + x_1)(1+b) &= 2 - \lambda(x_2^2 + x_1^2). \end{aligned} \quad (71)$$

Из первого уравнения следует, что

$$x_2 + x_1 = \frac{(1+b)}{\lambda}. \quad (72)$$

В свою очередь, подставляя этот результат во второе уравнение (71) и используя очевидное соотношение $x_2^2 + x_1^2 = (x_2 + x_1)^2 - 2x_2x_1$, получим

$$x_2 + x_1 = \frac{(1+b)}{\lambda}, \quad \text{и} \quad x_2x_1 = \frac{(1+b)^2 - \lambda}{\lambda^2}. \quad (73)$$

Отсюда следует, что, согласно теореме Виета, x_1 и x_2 являются корнями следующего квадратного уравнения

$$x^2 - \frac{1+b}{\lambda}x + \frac{(1+b)^2 - \lambda}{\lambda^2} = 0, \quad (74)$$

из которого легко находятся элементы цикла:

$$x_{1,2} = \frac{(1+b) \pm 2\sqrt{\lambda - 3(1+b)^2/4}}{2\lambda}. \quad (75)$$

Нетрудно видеть, в частности, что корни существуют только при условии $\lambda > \frac{3(1+b)^2}{4}$, откуда следует, что 2-цикл рождается при условии $\lambda = \frac{3(1+b)^2}{4}$.

На рис. 38 показано бифуркационное дерево отображения Эно при $b=0,3$. Можно видеть, что оно демонстрирует не только рождение устойчивого 2-цикла из неподвижной точки, но и весь каскад бифуркаций удвоения периода, хаос и окна периодичности в хаосе. Новым по сравнению с логистическим отображением является то, что дерево иногда скачком «разбухает», то есть размер аттрактора резко увеличивается. Такое явление в нелинейной динамике назы-

вают *кризисом*. Оно встречается достаточно часто (например, оно есть в отображении прыгающего шарика, см. рис. 33) и обыкновенно возникает, если в системе присутствует мультистабильность: в этом случае при определенных значениях параметров два аттрактора могут слиться в один, и именно этот момент отображается на дереве в виде его резкого расширения. Возможны, однако, и другие варианты кризисов.

Отметим, что динамика отображения Эно на самом деле столь многообразна, что ему можно посвятить целую монографию. Более того, многие современные исследователи по-прежнему используют отображения Эно в своих работах.

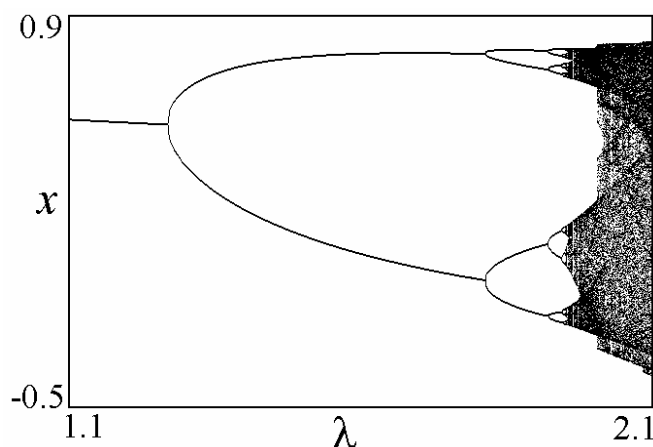


Рис. 38. Бифуркационное дерево отображения Эно (65) при $b=0,3$.

Задачи

1. Нарисуйте на плоскости b, λ область существования неподвижной точки отображения (65). Параметр $-1 < b < 1$.
2. Создайте программу, рисующую бифуркационное дерево для отображения Эно (65). Постройте его для случаев $b=0,3, b=0,6, b=0,9$. Что происходит с деревом при приближении b к единице?
3. Проведите аналогичные исследования для отображения в форме (64).

2.3 Фазовое пространство и аттракторы

Теперь от конкретных примеров двумерных отображений перейдем к обсуждению более общих понятий.

Зададимся вопросом: как проследить за эволюцией динамической системы при заданных начальных условиях? Для этого нужно «увидеть», что происходит с задающими динамическую систему переменными x, y, \dots по мере эволюции во времени. Введем некоторое пространство, по осям координат которого отложим эти переменные. Его принято называть *фазовым пространством*.

Фраза «задано начальное состояние динамической системы» теперь означает, что задана точка в фазовом пространстве. «Включим» время. Если система определена дискретным отображением, например, отображением Эно или отображением прыгающего шарика, то изображающая точка при каждой итерации будет совершать «прыжки» в фазовом пространстве.

Динамическая система полностью задает закон эволюции во времени, однако, чтобы получить полную информацию о характере такой эволюции, надо провести исследование для различных начальных условий. Современные компьютеры делают эту задачу не умозрительной, а вполне реальной и позволяют получать наглядные геометрические образы такого процесса.

Итак, рассмотрим множество начальных состояний системы. В фазовом пространстве в этом случае будем иметь уже не одну изображающую точку, а некоторый набор, или облако точек. При «включении» времени они все начнут совершать «прыжки». При компьютерном моделировании разумно создать мгновенные «снимки» облака через определенные промежутки времени (число итераций). Тогда можно следить за эволюцией облака на экране дисплея.

Перейдем к компьютерному моделированию. В качестве исследуемой системы выберем отображение Эно (65). На рис. 39 показаны мгновенные «снимки» облака изображающих точек на фазовой плоскости для отображения Эно, сделанные через одну итерацию.

Наиболее существенный результат, вытекающий из компьютерного моделирования, состоит в том, что облако изображающих точек «конденсируется» на некоторые предельные объекты, размерность которых меньше, чем размерность фазового пространства. Их называют *аттракторами* (от английского *to attract* – притягивать). Полезно также привести сравнительно строгое определение: аттрактором называется множество в фазовом пространстве, обладающее следующими свойствами:

1. Его размерность меньше, чем размерность фазового пространства (т.е. для двумерных отображений, например, аттрактором не может быть некоторая область плоскости).

2. Это множество инвариантно относительно действия отображения (т.е. если точка принадлежит аттрактору, то после действия отображения она останется на аттракторе).

3. Существует некоторое множество в фазовом пространстве, обязательно включающее аттрактор и его некоторую малую окрестность, все точки которого после некоторого (быть может, очень большого) количества итераций отобра-

жения окажутся на аттракторе. Это множество называется *бассейном притяжения* (или просто бассейном) аттрактора.

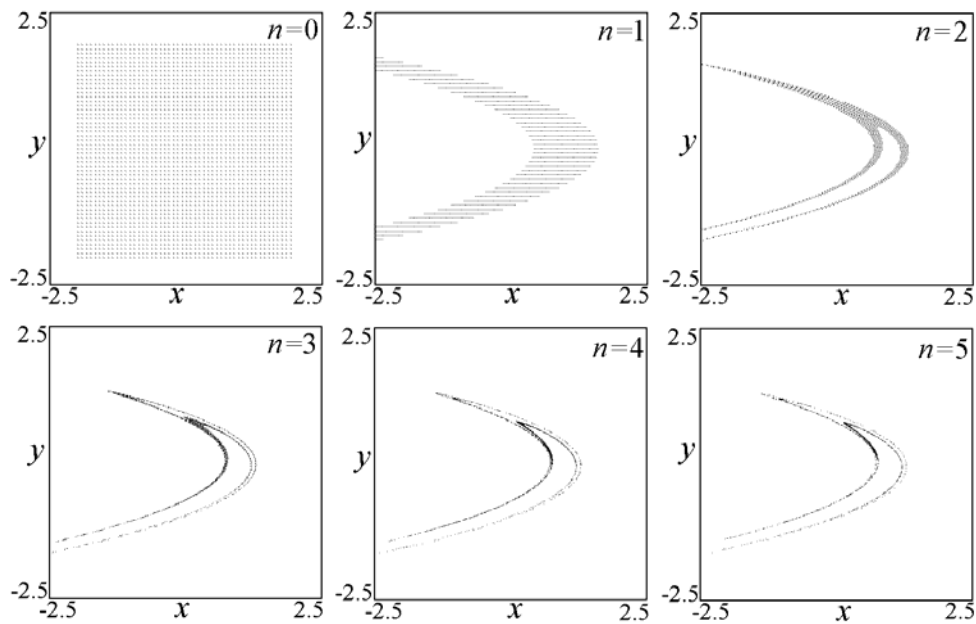


Рис. 39. Конденсация облака изображающих точек в фазовом пространстве для отображения Эно (65). Значения параметров $\lambda=1,4$, $b=0,3$.

Поскольку в соответствии с первым свойством размерность аттрактора меньше, чем размерность фазового пространства (это хорошо заметно на рис. 39), то занимаемый выбранным облаком точек объем в фазовом пространстве (обычно его называют *фазовым объемом*) должен уменьшаться при итерациях отображения. Динамические системы, которые обладают таким свойством (а, следовательно, и аттракторами) называются *диссипативными*, а динамические системы, фазовый объем в которых не изменяется со временем – *консервативными*. Поведение диссипативных и консервативных динамических систем весьма различно, и в настоящей книге мы будем рассматривать только диссипативные системы.

Важной характеристикой отображения, позволяющей судить о наличии сжатия фазового пространства, является его *якобиан*.

Пусть имеется двумерное отображение общего вида

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n). \end{aligned} \tag{76}$$

Неподвижная точка этого отображения удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} x_0 &= f(x_0, y_0), \\ y_0 &= g(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{77}$$

Динамика малых возмущений этой неподвижной точки \tilde{x}_n и \tilde{y}_n в линейном приближении будет описываться соотношением:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{y}_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix}, \quad (78)$$

где матрица возмущений M составлена из соответствующих производных

$$M = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix}. \quad (79)$$

Определитель $J = f'_x g'_y - f'_y g'_x$ этой матрицы, вычисленный в неподвижной точке, называется якобианом и определяет, как известно из математического анализа, эволюцию малого элемента площади при действии отображения. При $|J| < 1$ этот элемент сжимается, так что отображение будет диссипативным. Если $J = 1$, то отображение оказывается консервативным, и фазовый объем по мере эволюции не меняется.

Найдем для примера якобиан отображения Эно. Вычисляя соответствующие частные производные, находим:

$$M = \begin{pmatrix} -2\lambda x & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (80)$$

В этом случае якобиан $J = b$. Таким образом, параметр b управляет степенью сжатия фазового элемента. При $b = 0$ оно «бесконечно сильное», так что отображение Эно редуцирует к одномерному логистическому отображению. При $b = 1$ реализуется противоположный предельный случай – консервативная система.

Отображение Эно представляет пример систем с постоянным якобианом. В более общем случае якобиан системы может зависеть от значений динамических переменных, так что в отдельных областях фазового пространства наблюдается сжатие, а в других – растяжения фазового элемента. В этом случае могут возникать новые эффекты, которые будут обсуждаться ниже.

Итак, диссипативные динамические системы обладают аттракторами. Это свойство является очень важным и существенно упрощает процесс исследования таких систем. Ведь вследствие притяжения к аттрактору траектории, стартовавшие из различных точек, с течением времени приходят к одной и той же, то есть со временем система «забывает» начальные условия и ее поведение определяется только значениями параметров. Следовательно, для изучения поведения диссипативной динамической системы достаточно исследовать ее аттракторы. Это, в частности, существенно упрощает компьютерное моделирование:

не надо следить за всеми изображающими точками¹⁴. Достаточно выбрать одну из них, выполнить определенное (не очень маленькое) число итераций, чтобы эта точка «вышла» на аттрактор, а затем вывести ее движение на экран компьютера. Тогда мы и получим портрет аттрактора.

Аттракторы динамических систем могут быть как очень простыми (неподвижная точка, цикл определенного периода), так и более сложными. Пример такого сложного аттрактора дает рис. 39, демонстрирующий, что изображающие точки притягиваются к некоторой сложной слоистой структуре. Если посмотреть с помощью компьютера как «микроскопа» отдельные фрагменты такого аттрактора, то обнаруживается, что он весь состоит из отдельных «нитей» и областей пустого пространства, причем каждая нить в свою очередь имеет аналогичную тонкую структуру (см. рис. 40). Как говорят, аттрактор в этом случае обладает *фрактальными свойствами*. Подобные аттракторы были обнаружены в семидесятые годы нашего века и получили название *странных*. Обычно (но не всегда) им соответствует режим динамического хаоса.

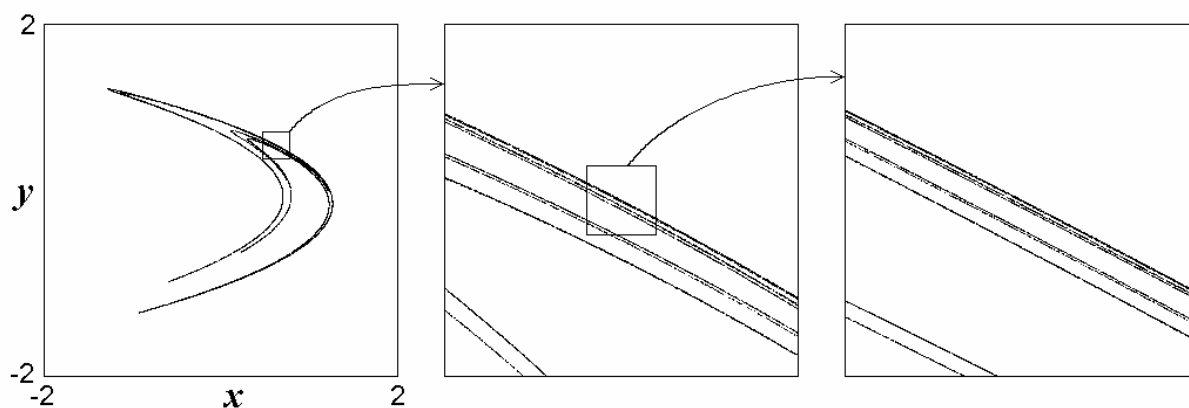


Рис.40. Фрактальная структура аттрактора отображения Эно (65). Значения параметров $\lambda=1,4$ и $b=0,3$.

Задачи

1. Напишите программу, которая реализует конденсацию облака изображающих точек на аттрактор для отображения Эно.
2. Напишите программу, которая строит на экране аттрактор отображения Эно. (Для этого необходимо предварительно выполнить несколько сот итераций без вывода на экран для выхода изображающей точки на аттрактор.)
3. Создайте программу, которая позволяет просматривать фрагменты аттрактора с некоторым увеличением. (Можно, например, с помощью мыши вы-

¹⁴ Заметим, что отсутствие аналогичного свойства для консервативных систем привело к тому, что столь наглядных методов представления динамики, как карты динамических режимов и т.п., для них практически нет.

делять фрагмент аттрактора.) С ее помощью убедитесь, что аттрактор Эно обладает фрактальной структурой.

4. Создайте программу, которая позволяет наблюдать конденсацию изображающих точек на аттрактор, а так же построить сам аттрактор для отображения прыгающего шарика. Постройте несколько характерных аттракторов. Постарайтесь, чтобы Ваша «коллекция» была достаточно полной, т.е. включала все качественно различные аттракторы.

5. Покажите, что якобиан двумерного отображения

$$x_{n+1} = f(x_n) - by_n,$$

$$y_{n+1} = x_n,$$

(отображение данного вида называют отображением типа Эно) постоянен и не зависит от вида функции $f(x_n)$.

2.4 Карты динамических режимов двумерных отображений и фазовые портреты

Одной из основных задач нелинейной динамики является исследование поведения различных систем, в том числе заданных в виде отображений. Такая задача подразумевает выявление основных динамических режимов, наблюдаемых в системе, а так же значений параметров, соответствующих смене динамического режима (бифуркациям). Хотя в каждом конкретном случае, безусловно, требуются отдельные методы исследования, можно сформулировать некоторую общую технологию первоначального численного исследования, направленную на выявление основных динамических режимов.

Кратко ее можно сформулировать так: сначала строится карта динамических режимов, а потом пишется программа, которая с помощью «щелчка» мыши на карте в отдельном окне выводит вид аттрактора системы или фазового портрета (при некоторых начальных условиях). В результате такого исследования выявляются наиболее характерные разновидности аттракторов. В качестве «итоговой» иллюстрации будет выступать карта режимов, с «вынесенными» на отдельные рисунки портретами аттракторов. Такая иллюстрация для отображения прыгающего шарика дана на рис. 41.

Отметим, что указанную выше программу можно доработать так, чтобы она позволяла при помощи «щелчков» мыши задавать на карте линии (не обязательно вертикальные или горизонтальные), вдоль которых будет строиться и выводиться так же в отдельном окне бифуркационное дерево.

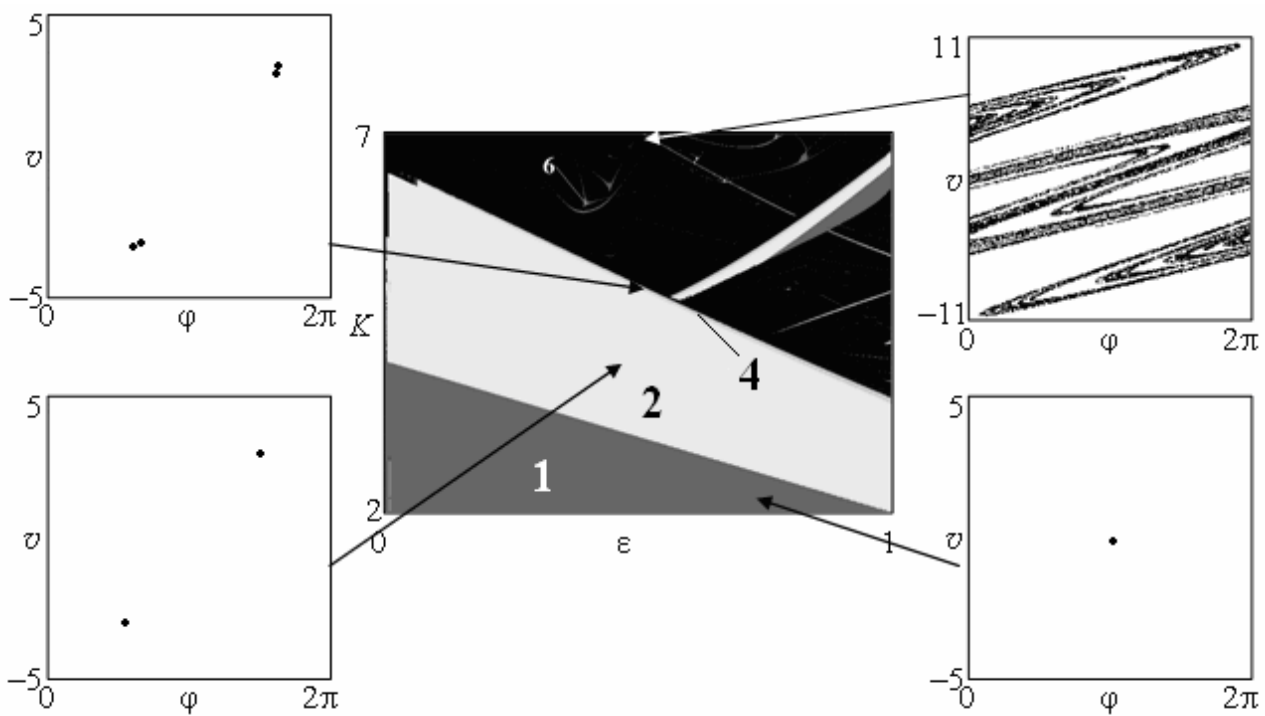


Рис. 41 Карта динамических режимов отображения «прыгающего шарика» (57) и его характерные аттракторы.

Задачи

1. Напишите программу, которая строит карту динамических режимов для отображения Эно. Потом модифицируйте ее так, что бы при «щелчке» мыши на карте она строила портрет аттрактора в соответствующей точке. С ее помощью наблюдайте эволюцию аттракторов при «путешествии» по карте отображения Эно.

2. Модифицируйте предыдущую программу так, чтобы визуализировался не один аттрактор, а одновременно все (или почти все) притягивающие множества, для чего при щелчке мыши в избранной точке плоскости параметров используйте конденсацию облака изображающих точек на фазовой плоскости. Дополните эту программу анализом периода высвеченных аттракторов и обозначьте их разными цветами. Продемонстрируйте возможность сосуществования различных аттракторов в фиксированных точках плоскости параметров. Какие области плоскости параметров отображений Эно и прыгающего шарика более богаты мультистабильными состояниями?

3. Напишите программу, которая строит карту динамических режимов для отображения прыгающего шарика и модифицируйте ее так, что бы при «щелчке» мыши на карте она строила портрет аттрактора в соответствующей точке.

2.5 Аттрактор – инвариантная кривая

Мы видели, что двумерные отображения Эно и прыгающего шарика демонстрируют те же два типа аттракторов, что и одномерные: периодические циклы (в том числе неподвижные точки) и странные хаотические аттракторы. Оказывается, что для двумерных отображений типичен еще один вид аттракторов, невозможный в одномерных отображениях. Чтобы дать соответствующие иллюстрации, нам понадобится новое отображение.

Обратимся вновь к логистическому отображению, которое в данном случае удобно выбрать в форме (27): $x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)$.

Как и при построении отображения Эно, будем считать, что динамика системы зависит от значения переменной на предыдущем шаге дискретного времени $y_n = x_{n-1}$. Теперь будем считать, однако, что добавка осуществляется не к самой переменной, а к управляющему параметру λ , при этом воздействие на параметр зависит от разности состояний системы в текущий и предыдущий моменты времени, т.е. необходимо выполнить замену $\lambda \rightarrow \lambda + \varepsilon(x_n - y_n)$. Если наша система реализована каким-то радиотехническим способом, то это означает, что она «управляется» не только «внешним» изменением параметра, но и самим сигналом системы, взятым с запаздыванием. Тогда приходим к следующему отображению:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (\lambda + \varepsilon(x_n - y_n))x_n(1 - x_n) \\ y_{n+1} &= x_n \end{aligned} \quad (80)$$

Будем называть полученное отображение *модифицированным отображением Эно*.

Карта динамических режимов отображения (80) показана на рис.42. В левой части карты система демонстрирует аналогичное отображению Эно поведение: наблюдаются удвоения периода и характерная область хаоса. Необычным, однако, выглядит фрагмент карты, показанный в увеличенном виде внизу. На этом рисунке можно видеть области, которые фиксируются в численных расчетах как непериодические. Однако фазовые портреты, которые им отвечают, не являются хаотическими. Они представляют собой новый вид аттрактора, который на рисунке выглядит как замкнутая кривая в виде немного деформированной окружности (рис.43а). Такие аттракторы носят название *инвариантных кривых*.

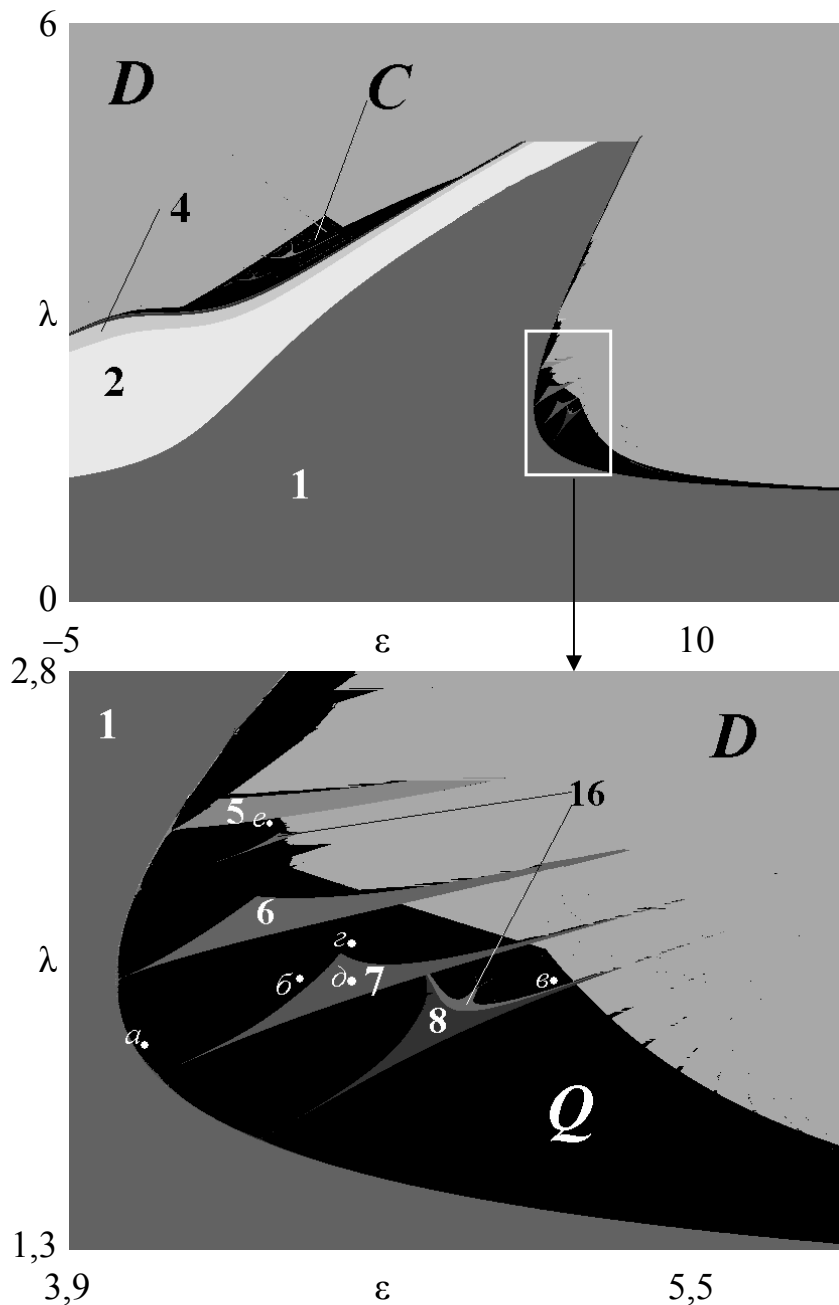


Рис. 42. Карта динамических режимов отображения (80). Нижний рисунок соответствует выделенному фрагменту на верхнем. Цифрами обозначены периоды циклов, D – «разбегание», C – хаос, Q – квазипериодические движения.

На рис. 43 показаны аттракторы отображения в нескольких точках плоскости параметров, отмеченных на увеличенном фрагменте рис. 42. Обратите внимание, что вблизи границы области устойчивой неподвижной точки (рис. 43а) инвариантная кривая похожа на гладкий овал. По мере удаления от этой границы (рис. 43б) форма кривой усложняется, становясь более «извилистой». На значительном удалении от границы (рис. 43в,г,е) аттрактор уже является не гладкой кривой, а странным аттрактором, что особенно заметно на рис. 43г,е. В этом случае наблюдаемый режим становится хаотическим. Это – еще один сценарий перехода к хаосу, отличный от рассмотренного нами ранее перехода че-

рез каскад бифуркаций удвоения периода. Этот сценарий заключается в образовании аттрактора в виде инвариантной кривой и ее последующем разрушении вследствие *потери гладкости*. Поскольку инвариантной кривой соответствуют *квазипериодические движения* (более подробно см. ниже), то этот сценарий обыкновенно называют переходом к хаосу через разрушение квазипериодических движений.

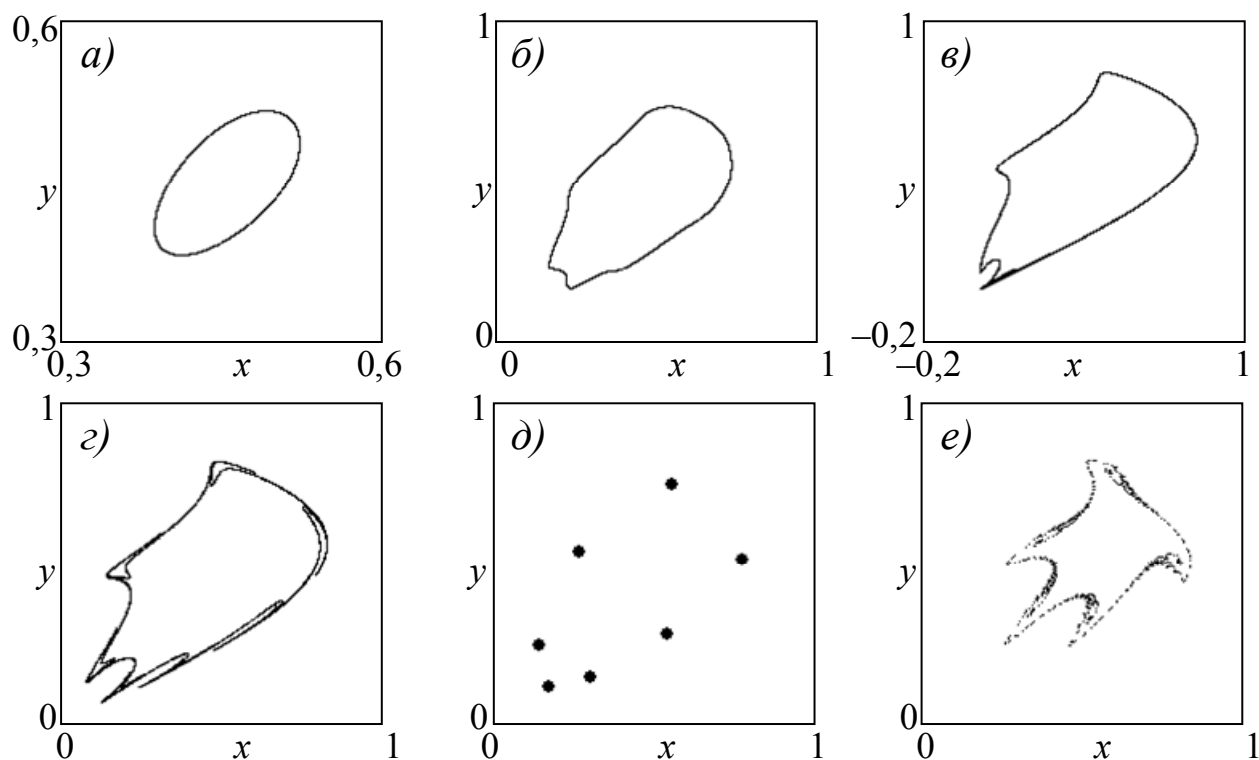


Рис. 43. Аттракторы отображения (80) в различных точках плоскости параметров, отмеченных на рис. 42.

В область существования инвариантной кривой «встроены» и области периодических режимов – циклов. Особенность их состоит в том, что они возникают в окрестности инвариантной кривой. При этом двигаясь на плоскости параметров параллельно границе области квазипериодических режимов, мы будем наблюдать чередование инвариантной кривой и циклов различных периодов. Такие циклы называют *резонансными циклами*, пример резонансного цикла периода 7 показан на рис. 43д.

Если проследить динамику изображающей точки на инвариантной кривой, то можно обнаружить, что точка совершает «прыжки» по кривой, как качественно показано на рис.44а. На этом рисунке последовательные положения точки указаны соответствующими цифрами. (Для облечения восприятия соседние положения соединены отрезками прямых.) Если изображающая точка, обходя полный круг (или несколько полных кругов), все время будет немного «промахиваться» относительно своего первоначального положения (рис. 44а), то дви-

жение будет не периодическим, и если подождать достаточно долго, изображающая точка прочертит замкнутую кривую. Такое движение называется квазипериодическим. Если же после некоторого числа итераций изображающая точка попадает точно в «свой след» (рис.44б), то процесс является периодическим, что соответствует резонансному циклу.

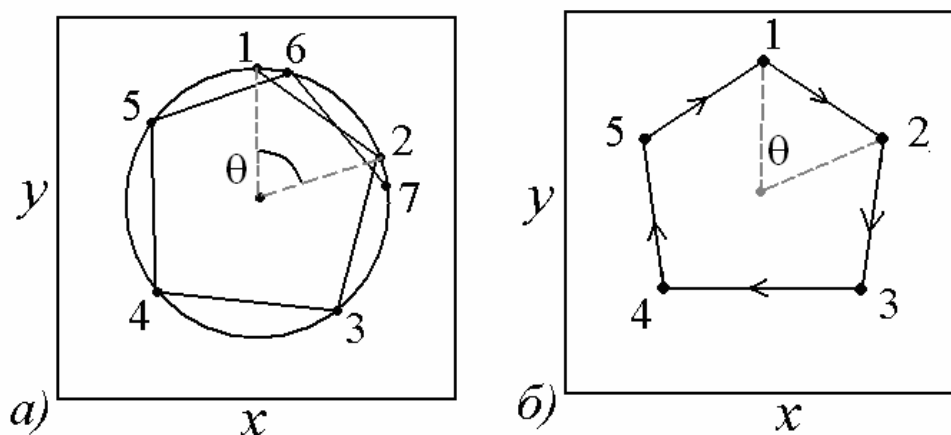


Рис.44. Динамика изображающей точки: а) инвариантная кривая, б) резонансный цикл периода 5.

На плоскости параметров, как мы говорили, инвариантной кривой отвечает область непериодических режимов. Области резонансных циклов обычно имеют вид узких сужающихся к своему основанию языков, встроенных в область непериодических движений. Такая картина является типичной для многих модельных и реальных систем. Система областей периодических режимов подобного типа носит название *языков Арнольда*, по имени российского математика В.И. Арнольда, внесшего значительный вклад в их исследование.

Оказывается, что понять возникновение квазипериодических режимов и картину языков Арнольда можно, привлекая особый класс одномерных отображений. Действительно, сопоставим каждому положению изображающей точки на инвариантной кривой свой угол θ (рис.44а). Если теперь удастся описать динамику угловой переменной с помощью одномерного отображения $\theta_{n+1} = f(\theta_n)$, то можно изучить закономерности движения изображающей точки по инвариантной кривой. Особенность данного отображения по сравнению с изученными нами состоит в том, что функция $f(\theta)$ должна быть 2π периодической функцией своего аргумента – фазового угла. Это, как мы увидим далее, существенным образом сказывается на характере динамики. Отображения такого типа приводят к новому интересному кругу явлений, связанных с понятием синхронизации, к обсуждению которых мы перейдем в следующей части книги.

Задачи

1. Постройте карту динамических режимов другого варианта модифицированного отображения Эно

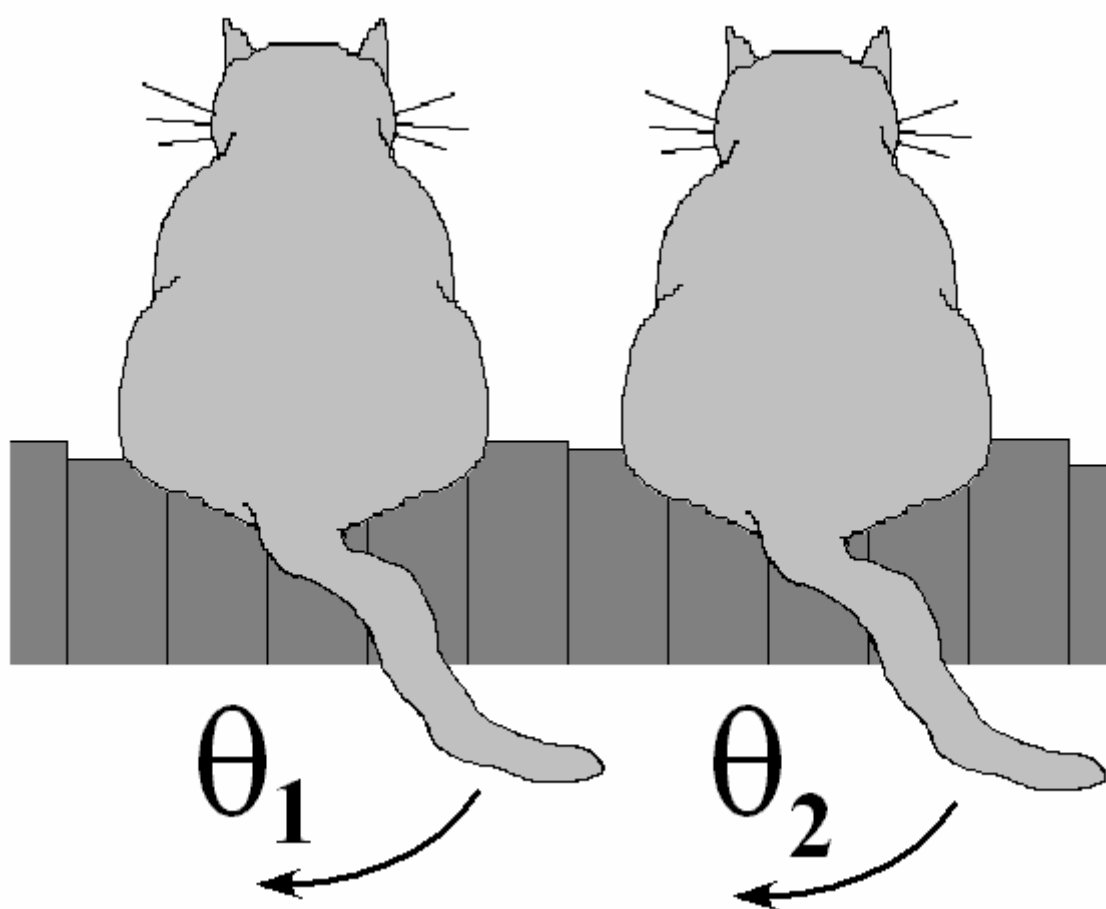
$$\begin{aligned}x_{n+1} &= (\lambda + \varepsilon(x_n - y_n))(1 - x_n^2) \\ y_{n+1} &= x_n\end{aligned}\tag{81}$$

и укажите на ней систему языков Арнольда.

2. Для отображения (81) получите аттракторы в виде инвариантных кривых и изучите их метаморфозы при движении по плоскости параметров. Постройте фазовые портреты внутри языков Арнольда.

Часть III

**СИНХРОНИЗАЦИЯ
В ТЕРМИНАХ
ДИСКРЕТНЫХ
ОТОБРАЖЕНИЙ**



3.1 Генератор пилообразных колебаний с модулируемым порогом срыва

В этой главе мы обсудим в терминах дискретных отображений круг явлений, возникающих при взаимодействии двух систем, каждая из которых «по одиночке» демонстрирует периодические автоколебания. Понятно, что подобные ситуации весьма распространены как в природе, так и в технике. В этом случае системы могут начать колебаться на одной частоте, даже если до введения взаимодействия их частоты были различны. Такое явление называется *синхронизацией* и характеризуется определенным типичным устройством пространства параметров, особенности которого мы и обсудим ниже.

Простейшая физическая ситуация, в которой наблюдается явление синхронизации и возникают обыкновенно сопутствующие ему квазипериодические режимы, состоит в воздействии на генератор автоколебаний внешнего периодического сигнала. Априорно ясно, что она интересна для анализа, поскольку имеется нелинейное взаимодействие двух ритмов – собственного ритма автоколебательной системы и ритма внешнего воздействия. Замечательно, что эта ситуация может быть описана при помощи простейшей дискретной модели в виде неавтономного генератора «пилообразных» колебаний (иногда такие модели называют системами типа «накопление-сброс»).

Итак, пусть имеется генератор «пилообразных колебаний»¹⁵, выходной сигнал которого представляет собой напряжение V , убывающее по линейному закону:

$$V(t) = U_0 - \alpha(t - t_n), \quad (82)$$

где U_0 и α – постоянные, до тех пор, пока не достигнет нуля в некоторый момент времени t_n . После этого напряжение скачком увеличивается до величины U_0 (рис. 45а). Колебания в этом случае будут периодическими во времени с периодом $T = U_0/\alpha$. Соответственно, закон изменения сигнала от времени можно записать в форме:

$$V(t) = U_0 - \frac{U_0}{T}(t - t_n) \quad (83)$$

на каждом отрезке времени $t_n < t < t_{n+1}$.

¹⁵ Простейший вариант физической модели такого генератора может быть реализован при помощи неоновой лампы.

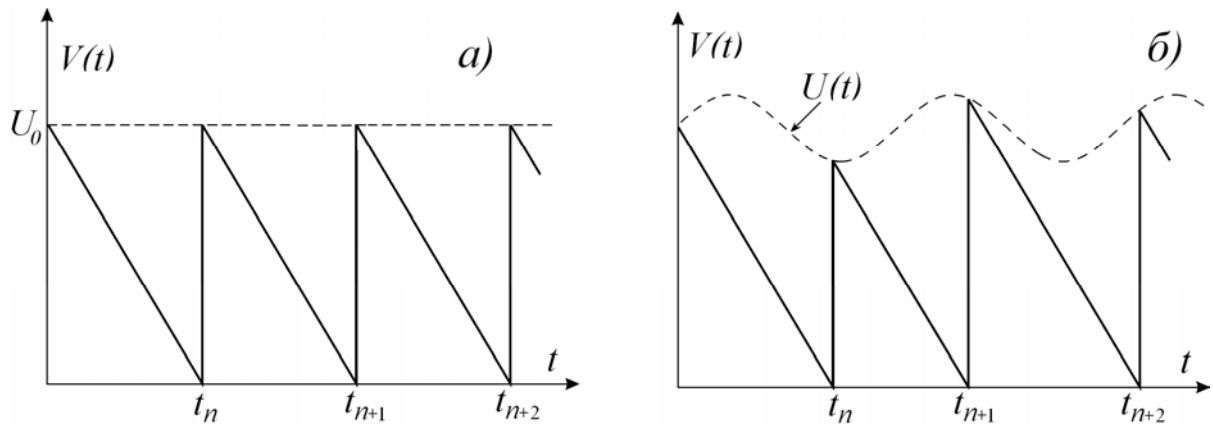


Рис. 45. Сигнал, генерируемый автономным (а) и неавтономным (б) генератором пилообразных колебаний.

Введем внешнее воздействие, изменяющее верхний порог по гармоническому закону: $U(t) = U_0 + U_m \sin \omega t$ (рис. 45б). Теперь зависимость напряжения от времени в пределах одного импульса описывается соотношением

$$V(t) = U(t_n) - \frac{U_0}{T}(t - t_n) = U_0 + U_m \sin \omega t_n - \frac{U_0}{T}(t - t_n). \quad (84)$$

Нетрудно получить выражение, связывающее моменты времени t_{n+1} и t_n , в которые напряжение обращается в нуль:

$$U_0 + U_m \sin(\omega t_n) - \frac{U_0}{T}(t_{n+1} - t_n) = 0. \quad (85)$$

Разрешая его относительно t_{n+1} , получим:

$$t_{n+1} = t_n + T(1 + \frac{U_m}{U_0} \sin \omega t_n). \quad (86)$$

Это отображение удобно записать в безразмерном виде, переходя к безразмерной переменной $\theta_n = \omega t_n$:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta + k \sin \theta_n. \quad (87)$$

Это и есть искомая модель. В полученное отображение входят два параметра. Один из них $\Delta = \omega T = 2\pi\omega/\omega_0$, где $\omega_0 = 2\pi/T$ – частота собственных колебаний генератора, его можно интерпретировать как расстройку по частоте внешнего сигнала и собственных колебаний системы. Второй параметр $k = \omega T U_m / U_0$ представляет собой безразмерную амплитуду внешнего воздействия.

Задача

Постройте аналогичную рис.45 диаграмму для случая, когда внешний сигнал имеет вид периодической последовательности «треугольных импульсов». Напишите выражение для отображения окружности, отвечающего этой задаче.

3.2. Синус-отображение окружности

Отображение (87) – еще одна из эталонных моделей нелинейной динамики, которую называют *стандартным отображением окружности* или *синус-отображением окружности*.

Происхождение термина «отображение окружности» следующее. Переменная θ_n имеет смысл фазы внешнего воздействия, на которую приходится «зуб» пилы, поэтому она определена в интервале от нуля до 2π (аналогично переменной θ в отображении «прыгающего шарика»). Это означает, что ее можно мыслить как угол, задающий точку на окружности единичного радиуса, и соответственно, отображение (87) описывает движение точки по окружности, то есть, выражаясь математическим языком, является «отображением окружности на себя»¹⁶. Для более корректной записи в отображение (87) необходимо добавить значок $\text{mod } 2\pi$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta + K \sin \theta_n \pmod{2\pi}. \quad (88)$$

Этот знак означает, что для фазовой переменной отбрасывается часть, кратная 2π , поскольку отличающиеся на полный угол положения точки на окружности физически неразличимы.

Значительный интерес к отображению (86) объясняется тем, что это простейшее отображение, демонстрирующее появление квазипериодических режимов и явление синхронизации. (В принципе, возможны и другие варианты отображения окружности, отличающиеся видом нелинейной функции в правой части, см. задачу 4 и задачу из предыдущего раздела. Все они могут быть записаны в виде $\theta_{n+1} = f(\theta_n)$, где $f(\theta)$ – 2π -периодическая функция θ .)

Обсудим, как зависит динамика синус-отображения окружности от параметров k и Δ . На рис.46 приведена соответствующая карта динамических режимов. Основным элементом устройства плоскости параметров является характерная глобальная картина областей периодических режимов, имеющих вид отдельных «языков», упирающихся своими остриями в ось частотной расстройки. Замечательно, что эта картина в качественном отношении соответствует выявленной в п.2.5 для модельного двумерного отображения. Как мы отмечали, эти области называют *языками Арнольда*.

¹⁶ См. в связи с этим обсуждение в п.3.3 и рис.49.

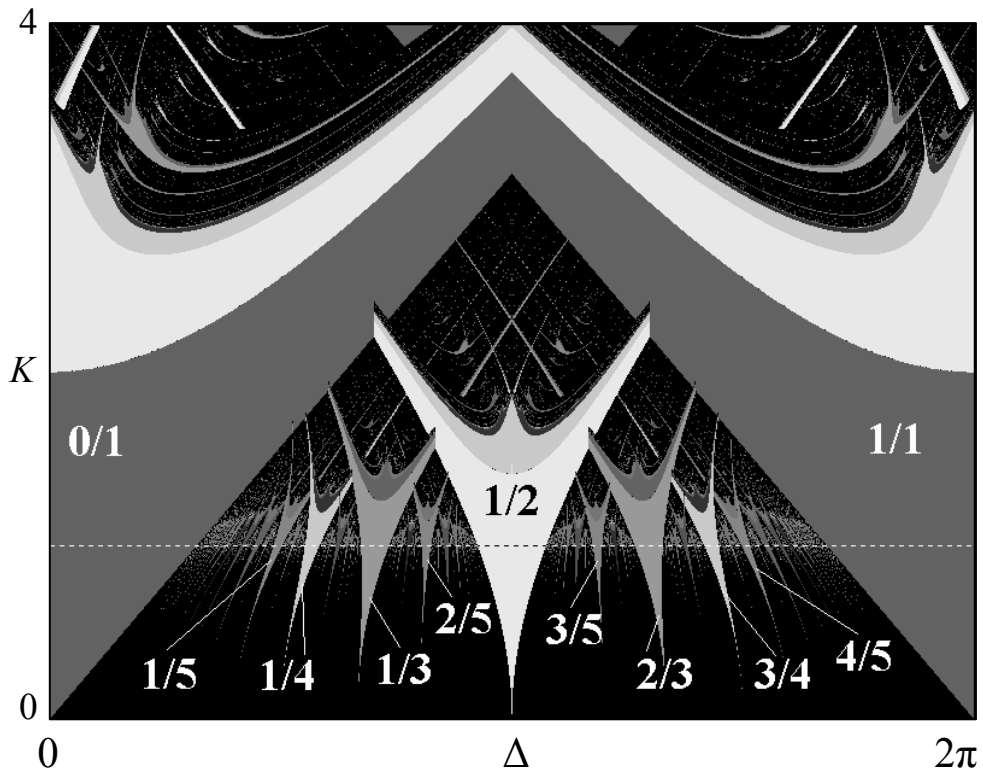


Рис.46 Карта динамических режимов на плоскости параметров отображения окружности (88). Черным цветом отмечена область неперiodических режимов, различными оттенками серого цвета – области циклов различных периодов (до 64 включительно). Пунктиром проведена линия перекрытия языков Арнольда $K=1$, подписаны соответствующие языкам синхронизации числа вращения (см. ниже).

Определим границы основного языка Арнольда, которому отвечает период 1, то есть устойчивая неподвижная точка. При $\theta_{n+1} = \theta_n = \theta$ из (88) следует

$$-\Delta \pm 2\pi n = K \sin \theta. \quad (89)$$

Неподвижная точка существует, если (89) имеет решение. Соответственно, на границе области существования неподвижной точки $\sin \theta = \pm 1$ и тогда, очевидно, $K = \pm(-\Delta \pm 2\pi n)$. В силу периодичности динамики по Δ и периодичности фазовой переменной, получаем, что существует два условия

$$K = \Delta, \quad K = -\Delta + 2\pi, \quad (90)$$

которые и определяют границы основного языка Арнольда. Именно эти линии и служат границами языка периода 1 (число вращения 0/1 и 1/1) на рис. 46.

Из соотношения (89) видно, что неподвижные точки рождаются парами, и нетрудно показать, что одна из них устойчива, а одна – неустойчива. При этом происходит касательная бифуркация. Условием этой бифуркации является обращение мультипликатора в плюс единицу: $\mu=+1$. Для отображения (88) мультипликатор

$$\mu = f'(\theta) = 1 + K \cos \theta. \quad (91)$$

Тогда условие $\mu=+1$ дает $\cos \theta=0$, что при подстановке в (89) приводит к (90).

Условие касательной бифуркации позволяет искать границы языков более высоких периодов как линии касательной бифуркации соответствующего цикла, то есть проитерированного соответствующее число раз отображения. К сожалению, аналитически это выполнить, как правило, не удастся, и приходится использовать численные методы. Тем не менее, такое исследование или более детальный анализ карты, приводят к выводу о том, что из каждого рационального числа p/q на оси абсцисс $\Delta/2\pi$ выходит свой язык синхронизации. При этом чем больше знаменатель несократимой дроби q , тем уже оказывается соответствующий язык.

Нетрудно показать, что внутри основного языка имеется и бифуркация удвоения периода. Действительно, приравнивая мультипликатор минус единице, получаем

$$\mu = f'(\theta) = 1 + K \cos \theta = -1. \quad (92)$$

Совместно с условием существования неподвижной точки (89) при $n=0$ это дает уравнение гиперболы

$$\Delta^2 + 4 = K^2, \quad (93)$$

которую также можно видеть внутри основного языка на карте на рис.46. Аналогично линии удвоений имеются и внутри других языков.

Задачи

1. Покажите, что из рождающихся на границе основного языка синхронизации неподвижных точек одна устойчива, а одна неустойчива.

2. Постройте карту динамических режимов для отображения окружности.

3. Постройте карту динамических режимов в случае воздействия на генератор пилообразных колебаний не гармонического сигнала, а «треугольных» импульсов.

4. Получите отображение окружности для следующей модели. Пусть изображающая точка вращается по окружности с постоянной угловой скоростью ω вокруг начала координат на плоскости (x,y) . С периодом T на точку действует импульс, который увеличивает ее ординату y на величину C . В качестве фазовой переменной используйте угол поворота θ . (Такое отображение, исследованное Л. Глассом, возникает в задаче о воздействии импульсов на автоколебательную систему.)

$$\text{Ответ: } \theta_{n+1} = \arctg\left(\frac{\sin \theta_n + C}{\cos \theta_n}\right) + \omega T.$$

3.3. Описание синхронизации с помощью отображения окружности

Обсудим теперь свойства возможных периодических режимов отображения (88). Принято говорить, что периодическим режимам, или языкам Арнольда, отвечают режимы синхронизации. Вообще синхронизацию принято определять как явление, состоящее в подстройке ритмов либо двух взаимодействующих автоколебательных систем, либо автоколебательной системы под внешним воздействием. В нашем случае – это подстройка ритма колебаний генератора пилообразных колебаний под действием внешнего синусоидального сигнала.

Поясним явление синхронизации для обсуждаемого примера. Пусть сначала частоты внешнего сигнала и частота генератора равны друг другу: $\omega = \omega_0 = 1$. Тогда $\Delta = 2\pi$ и имеет место картина, показанная на рис. 47а. Хорошо видно, что частота сигнала и генерируемых колебаний совпадают. В этом случае момент начала падающего участка всегда приходится на одно и то же состояние внешнего сигнала, или, как принято говорить, на одну и ту же его фазу. Для выбранных значений параметров генератор «не замечает» модуляции сигнала, и реагирует точно на средний уровень внешнего напряжения, т.е. ведет себя как автономный генератор. В соответствии с (88), в отображении окружности в этом случае (при $\Delta = 2\pi$) существует устойчивая неподвижная точка $\theta = 0$. На рис.47а условие $\theta = 0$ определяет момент срыва генератора, как раз на среднем уровне сигнала.

Теперь увеличим немного частоту внешнего воздействия ω (рис. 47б), при этом период внешнего сигнала немного уменьшится. В этом случае получается картина, показанная на рис.47б. Мы видим, что уменьшился не только период колебаний внешнего сигнала, но и период колебаний генератора, хотя собственную частоту генератора мы не изменяли. При этом оба этих периода точно равны друг другу и «зуб» пилы по-прежнему приходится все время в одну и ту же фазу внешнего сигнала, правда, уже в другую. Это и есть явление синхронизации. Часто о таком режиме говорят как о режиме *захвата частоты*, имея в виду, что частота генератора подстраивается к частоте внешнего сигнала, то есть как бы «захватывается» им.

Как мы уже заметили, при изменении частоты внешнего сигнала «зуб» пилы смещается относительно него, то есть возникает некоторый *сдвиг фаз* между собственными колебаниями генератора и внешним сигналом. Его величину несложно определить аналитически с помощью отображения окружности (88).

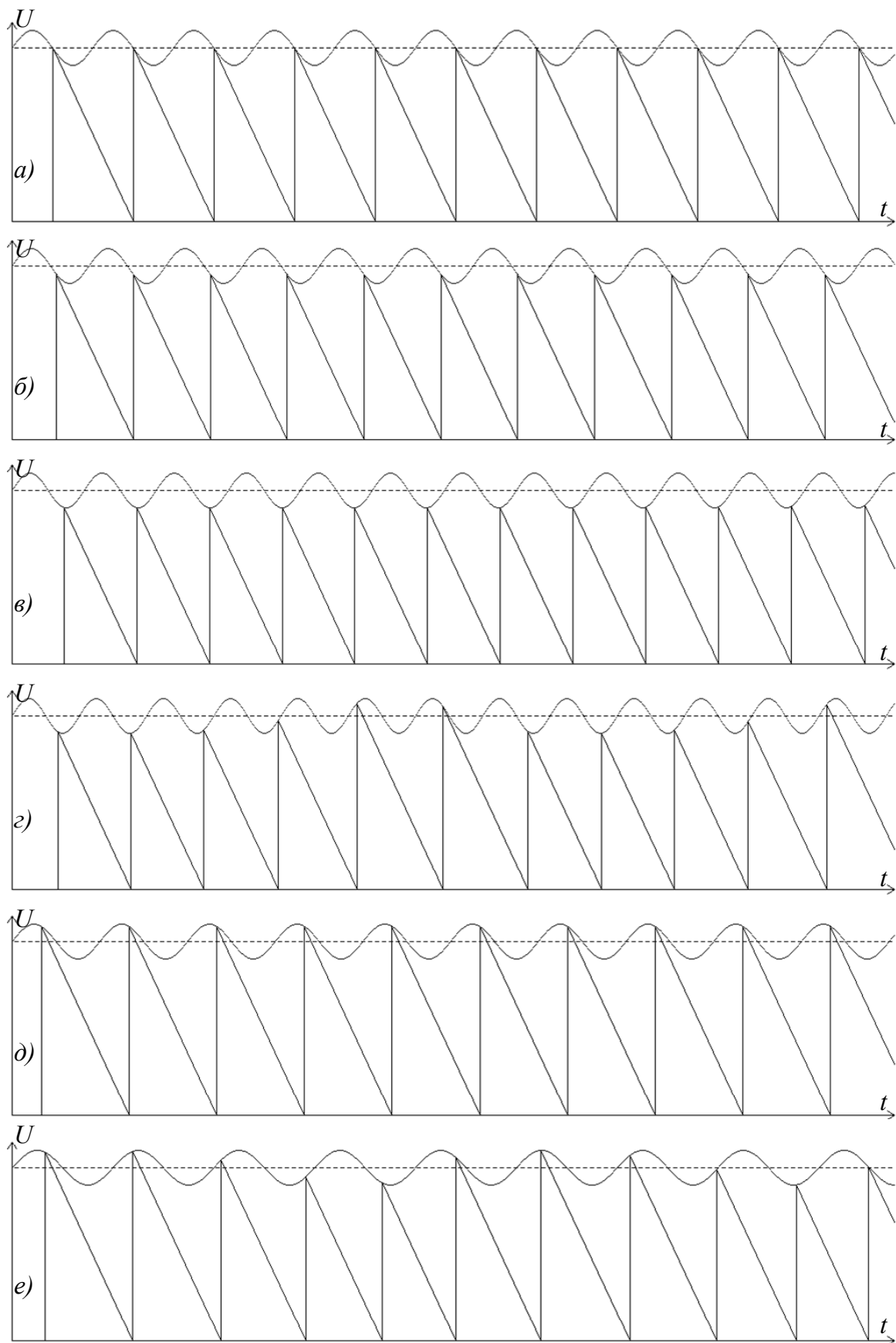


Рис.47. Временные зависимости сигнала генератора пилообразных колебаний с модулируемым гармоническим сигналом порогом срыва. Собственная частота генератора $\omega_0=1$, амплитуда сигнала $U_m=0,1$, частота сигнала $\omega=1,00$ (а); $\omega=1,05$ (б); $\omega=1,12$ (в); $\omega=1,20$ (г); $\omega=0,92$ (д); $\omega=0,80$ (е). Пунктиром проведена линия немодулированного порога срыва.

Действительно, режиму синхронизации отвечает неподвижная точка этого отображения. Поскольку если $\omega = \omega_0(1 + \delta)$, то $\Delta = 2\pi(1 + \delta)$, имеем

$$\delta = -K \sin \theta \text{ и } \theta = -\arcsin \frac{\delta}{K}. \quad (94)$$

Знак «минус» говорит о том, что собственные колебания отстают от внешнего сигнала, что действительно видно на рис. 47б. При дальнейшем уменьшении периода (увеличении частоты) внешнего сигнала, сдвиг фаз θ становится больше и «зуб» пилы перемещается вправо относительно синусоиды и, наконец, достигает значения $\theta = \pi/2$, соответствующего условию $\delta=K$. При больших значениях расстройки δ (94) уже не имеет решений, следовательно, существование постоянного сдвига фаз становится невозможным. В этот момент и происходит разрушение синхронного режима, что как раз и отвечает границе языка синхронизации на плоскости параметров на рис.46. После этого режим становится квазипериодическим: на каждом следующем периоде «зуб» пилы смещается относительно задающей внешней синусоиды (рис. 47в). Такой процесс называют *дрейфом фазы*, т.к. при этом сдвиг фазы θ медленно меняется со временем. С увеличением расстройки скорость этого дрейфа возрастает (рис. 47г), и начиная с определенной расстройки можно найти такие периоды внешнего сигнала, на которых вообще нет «зуба» пилы (например, 5-й период на рис. 47г). Это соответствует быстрому увеличению разности фаз на полный угол 2π , и такое явление обычно называют *проскоком фазы*. С увеличением расстройки проскоки фазы происходят все чаще и чаще.

Заметим также, что при уменьшении частоты сигнала наблюдается абсолютно аналогичная картина: при небольших расстройках наблюдается синхронный (рис. 47д), а при существенных – квазипериодический (рис. 47е) режимы.

Аналогичная картина будет наблюдаться и если частота сигнала будет находиться в рациональном отношении с собственной частотой генератора. Например, на рис. 48 приведены иллюстрации для случая, когда частота сигнала в два раза меньше частоты генератора, что соответствует $\Delta=\pi$ и центральному на рис. 46 языку синхронизации с числом вращения $1/2$. Аналогично рис. 47 можно видеть режим с нулевым сдвигом фаз, соответствующий середине языка (рис. 48а), синхронный режим с ненулевым сдвигом (рис. 48б) и квазипериодический режим (рис. 48в). На последнем рисунке хорошо видно, что разность фаз достаточно долго (в течение 5-ти периодов) остается вблизи нулевого значения, однако затем начинает достаточно быстро меняться.

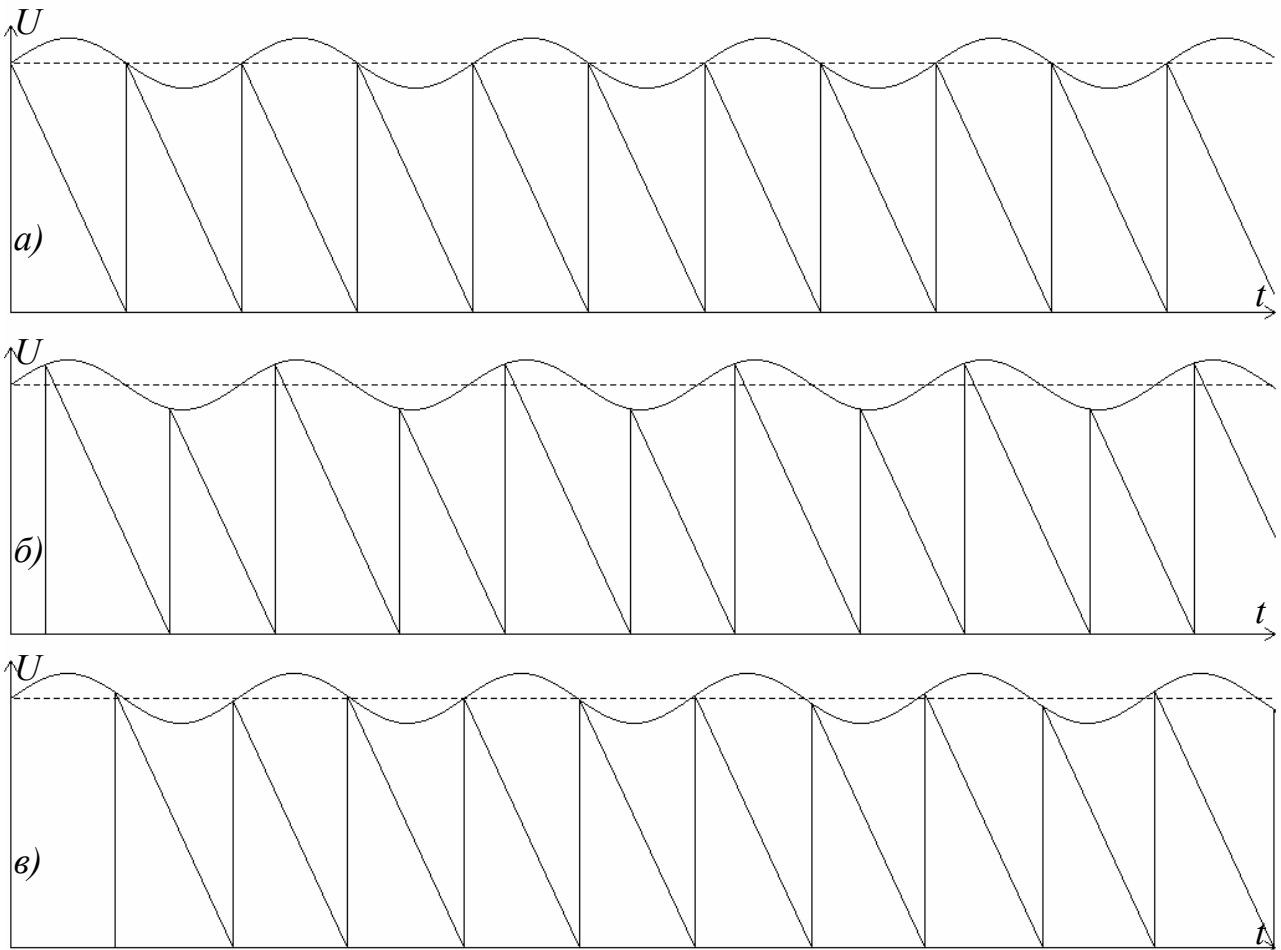


Рис.48. Временные зависимости сигнала генератора пилообразных колебаний с модулируемым гармоническим сигналом порогом срыва. Собственная частота генератора $\omega_0=1$, амплитуда сигнала $U_m=0,1$, частота сигнала $\omega=0,500$ (а); $\omega=0,505$ (б); $\omega=0,510$ (в). Пунктиром проведена линия немодулированного порога срыва.

На приведенных рисунках вдоль оси абсцисс отложено время t . При работе с отображением, как мы говорили выше, удобно использовать безразмерное время, или фазу колебаний $\theta = \omega t$. Рис. 49 поясняет, как ось времени можно преобразовать в окружность, угол на которой как раз соответствует фазе θ . В данном случае на окружности показан режим периода 2, аналогично рис.48.

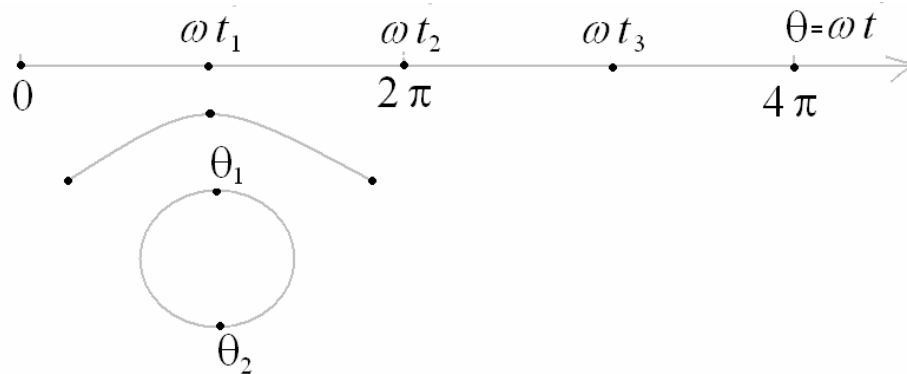


Рис.49. Преобразование оси времени в окружность, определение угловой координаты на окружности.

Аналогичным образом могут возникать режимы синхронизации с соотношением частот $w=p/q$, где p и q – целые числа. Их также удобнее всего представлять на окружности, что приводит к иллюстрациям типа рис.50 (сравните с рис.44).

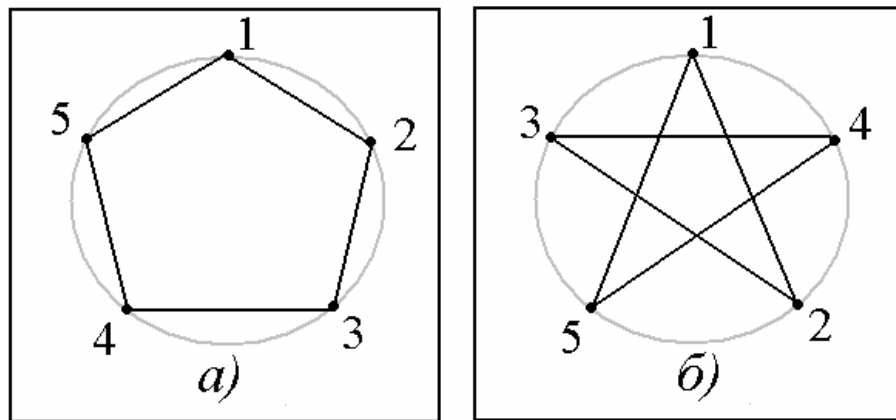


Рис.50. Режимы синхронизации: $p/q=1/5$ (а), $p/q=2/5$ (б).

В рамках этой интерпретации фаза θ задает угол, под которым изображающая точка располагается на окружности. В соответствии с дискретным отображением, эта точка совершает прыжки по окружности так, что после каждого прыжка угол изменяется на величину $\Delta\theta$. Если она представляет собой рациональное число p/q , то через q «прыжков» точка начнет повторять свою траекторию, совершив при этом p полных оборотов. Таким образом, q задает период движения, а p определяет конкретный тип движения: если $p=1$, то точка «прыгает» по соседним «следам» своей траектории; если $p=2$, то через один и т.д. (см. рис. 50).

Задачи

1. Изобразите график зависимости внешнего и генерируемого сигналов типа рис.43 в случае режимов синхронизации с соотношением частот $1/3$ и $2/3$.
2. Дайте иллюстрации, аналогичные рис.50, для всех режимов синхронизации, отношения частот для которых имеют знаменатель, равный 7.

3.4. Итерационные диаграммы синус-отображения окружности

Обсудим теперь вопрос о том, какие режимы наблюдаются в отображении окружности, с помощью итерационных диаграмм.

На рис.51 показаны итерационные диаграммы, иллюстрирующие различные режимы. При этом использовано отображение (88), включающее операцию

взятие по модулю 2π , отчего на диаграммах появились «нефизические» разрывы у функции, задающей отображение.

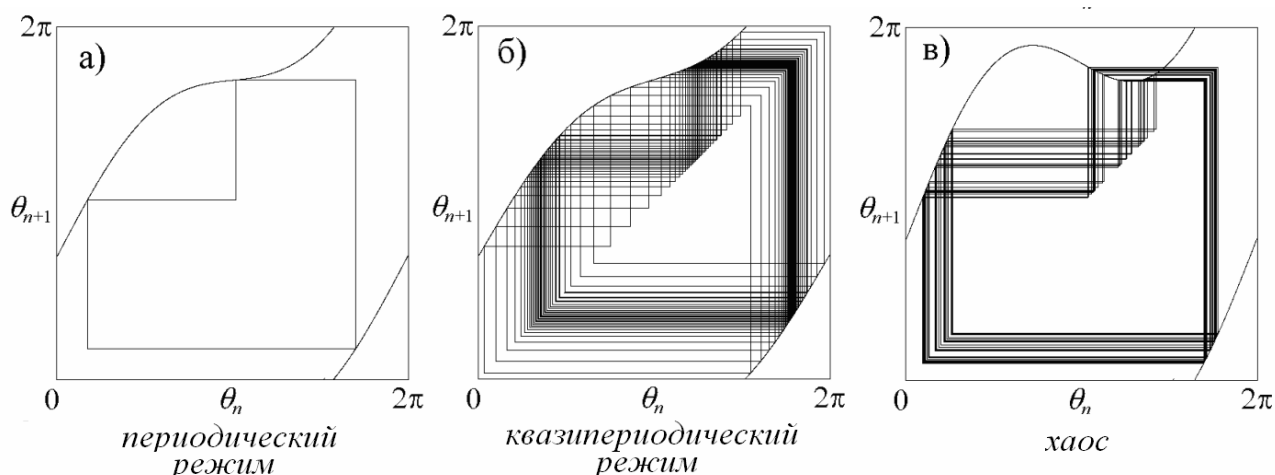


Рис.49. Итерационные диаграммы, иллюстрирующие различные режимы динамики отображения окружности.

На рис.51а можно видеть цикл периода 3. Он отвечает внутренней области языка Арнольда для синхронизации с соотношением частот $1/3$ (см. рис.46).

Рис.51б иллюстрирует квазипериодический режим, реализующийся вне языков Арнольда. Хорошо видно, что точки на итерационной диаграмме никогда не повторяются. Интересно отметить, что поскольку точка на плоскости параметров выбрана вблизи соответствующего языка синхронизации, на рис.51б виден «теневого» след цикла периода 3. В этом случае изображающая точка наиболее часто посещает окрестность цикла, и как раз этому моменту соответствует медленно меняющийся сдвиг фаз, упоминавшийся при обсуждении рис. 48в.

Для сравнения на рис.51в оказан хаотический режим, реализующийся, если оставаться в пределах языка $1/3$ и увеличивать амплитудный параметр k . Можно видеть, что хаос также реализуется в окрестности 3-цикла, но характер итерационной диаграммы в этом случае существенно другой.

Задачи

1. Изобразите динамику изображающей точки, отвечающей режиму на рис.51а в отображении окружности без знака модуля.
2. Напишите программу, которая при щелчке мыши на карте строит итерационные диаграммы типа рис.51 для синус-отображения окружности, и наблюдайте типы режимов внутри и вне различных языков синхронизации.

3.5. Иррациональные и рациональные числа вращения

Обсудим теперь более подробно уже упоминавшуюся нами ранее полезную характеристику, позволяющую различать периодические и квазипериодические режимы и обобщающую информация о динамике угловой переменной на окружности – число вращения. Его можно определить как

$$w(\Delta, k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n - \theta_0}{2\pi n}. \quad (96)$$

(В этом случае отображение берется со снятым знаком модуля.)

Режим будет периодическим, если начальное значение θ через некоторое число шагов q воспроизводится с точностью до добавки целого числа полных периодов, то есть $\theta_{n+q} - \theta_n = 2\pi p$. Такому режиму отвечает рациональное число вращения $w = p/q$. Так, режим, показанный на рис.50а, характеризуется числом вращения $w = 1/5$, а на рис.50б – $w = 2/5$.

Квазипериодические режимы имеют *иррациональное число вращения*. В этом случае изображающая точка будет «прыгать», прорисовывая окружность все более четко, но никогда не попадая точно в свои предыдущие «следы». На рис.52 показан начальный участок такой траектории, близкой к циклу периода пять.

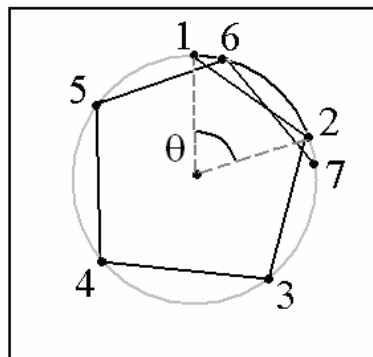


Рис.52. Схематическое изображение динамики точки для квазипериодической орбиты.

Приведенное рассуждение позволяет понять появление множества языков Арнольда в исследуемой системе. Действительно, известно, что любое иррациональное число допускает все более точную аппроксимацию рациональным числом, правда, со все бóльшими значениями числителя и знаменателя p и q . Замечательный пример дает так называемое «золотое сечение»

$$\omega = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,618034005... \quad (97)$$

Его последовательно улучшающиеся аппроксимации рациональными числами получаются как отношения последовательных чисел Фибоначчи¹⁷:

$$\omega_m = F_{m-1}/F_m. \quad (98)$$

Таким образом, получается ряд рациональных чисел

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \dots \rightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \quad (99)$$

(Интересно, что такая ситуация возникла в рассмотренной в разделе 1.4 задаче о цепочке сопротивлений с нарастающим количеством звеньев.)

Соответственно, поскольку в любой малой окрестности иррационального числа обязательно присутствуют рациональные, то на плоскости параметров в малой окрестности линии с постоянным иррациональным числом вращения, отвечающей квазипериодическим режимам, располагается все более узкие языки Арнольда. В случае все более точной аппроксимации иррационального числа рациональным, языки становятся все более узкими, «прижимающимися» к линии с иррациональным числом вращения (рис.53).

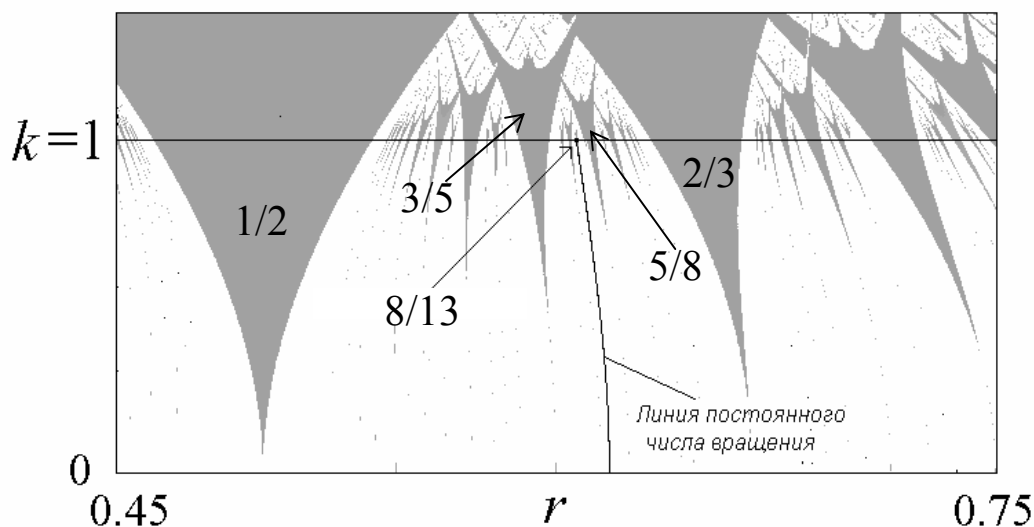


Рис. 53. Языки синхронизации, отвечающие рациональным аппроксимациям чисел Фибоначчи, и линия с числом вращения, заданным «золотым сечением». Области периодических режимов отмечены серым, непериодических – белым цветом.

Задачи

1. Обсудите, как будет двигаться изображающая точка по окружности, если число вращения $w = 1/\sqrt{2}$.
2. Покажите, что при $k=0$ число вращения определяется как $w=\Delta/2\pi$.

¹⁷ Числа Фибоначчи определяются рекуррентным соотношением $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, при этом $F_0=F_1=1$. Более подробную информацию об этих числах и цепных дробях можно найти в [20,21].

3. Как будет происходить динамика на окружности, если число вращения очень мало?

4. Бактерии имеют такой закон развития: каждая живет 1 час и каждые полчаса порождает одну новую (всего две за свою жизнь). Покажите, что динамика популяции бактерий описывается числами Фибоначчи.

5. Укажите еще несколько членов ряда (99), аппроксимирующего «золотое сечение».

3.6. Критическая линия и лестница чисел вращения

Как известно, иррациональных чисел в определенном смысле «гораздо больше», чем рациональных: множество рациональных чисел счетно, а иррациональных – имеет мощность континуума, и мера множества рациональных чисел равна нулю. Поэтому в нижней части карты динамических режимов на рис.46 языки Арнольда очень узкие и между ними доминируют квазипериодические режимы. Их мера падает по мере увеличения амплитуды воздействия, и точно при $k=1$ квазипериодические режимы исчезают полностью. В области $k>1$, как видно из рис.46, внутреннее устройство языков синхронизации усложняется, в частности, можно наблюдать структуры типа *crossroad area* и переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Линия $k=1$, разграничивающая области существенно различного динамического поведения, называется *критической линией*.

Существование критической линии очень просто связать с видом отображения. Заметим, что фигурирующая в правой части выражения (88) функция $f(\theta) = \theta + \Delta + k \sin \theta$ имеет разные свойства при $k<1$, $k=1$ и $k>1$ (рис.54). При $k<1$ она монотонна и отображение является взаимно-однозначным. При $k=1$ отображение по-прежнему монотонное и взаимно-однозначное, но имеет кубические точки перегиба. Наконец, при $k>1$ функция $f(\theta)$ становится немонотонной, она имеет максимумы и минимумы (по одному на каждый период) и уже не является взаимно-однозначной.

Таким образом, при критическом значении параметра на самом деле происходит потеря обратимости: если при меньших k по данному значению динамической переменной можно найти не только следующее, но и предыдущее значение, то при больших k однозначно найти предыдущее значение нельзя: некоторым значениям переменных соответствуют два возможных предыдущих значения, при этом у отображения на отрезке $(0, 2\pi)$ появляются локальный минимум и максимум. В этом оно становится похожим на кубическое отображе-

ние, поэтому внутреннее устройство основного языка синхронизации напоминает устройство плоскости параметров кубического отображения: там появляются структуры *crossroad area*, области хаоса и т.д. (Сравните карты синус-отображения окружности на рис.46 и кубического отображения на рис.25.)

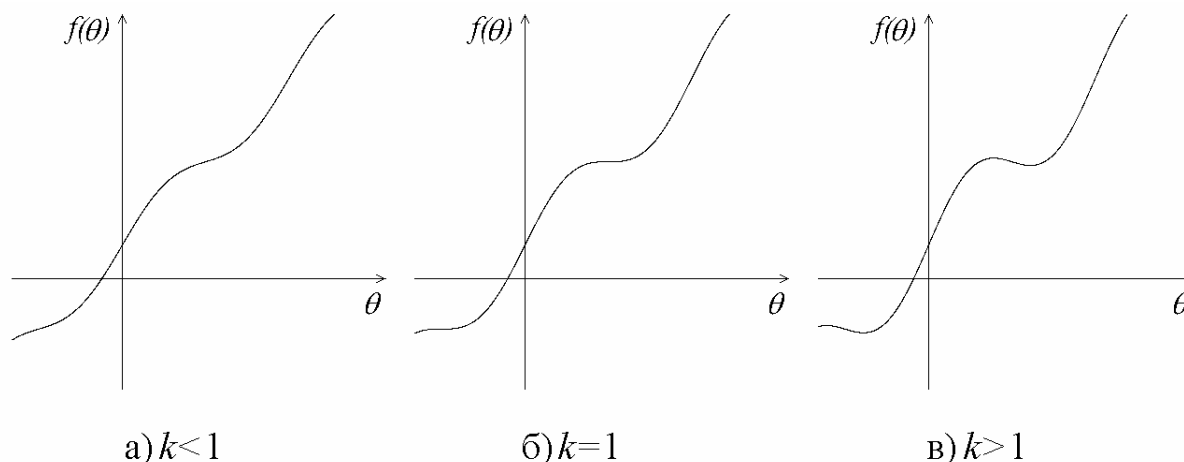


Рис.54 График функции $f(\theta) = \theta + \Delta + k \sin \theta$ в докритической области (а), при критическом значении параметра k (б) и в закритической области (в).

В закритической области $k > 1$ языки Арнольда частично перекрываются, и при одних и тех же значениях параметров может сосуществовать несколько аттракторов, отвечающих разным динамическим режимам. Каждый из них реализуется при задании начальных условий в бассейне притяжения соответствующего аттрактора.

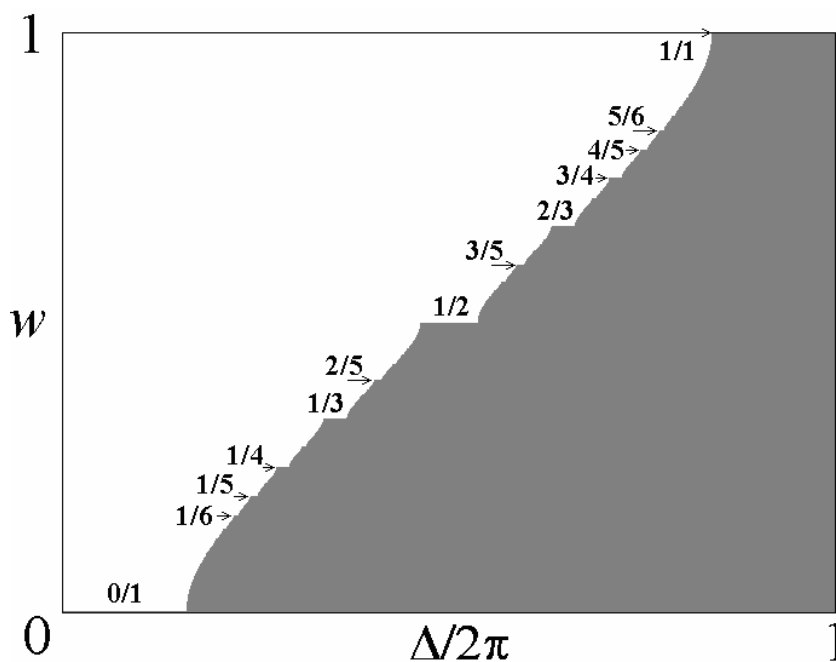


Рис.55. Лестница чисел вращения - зависимость числа вращения от параметра $r = \Delta/2\pi$ на критической линии $k=1$ в отображении окружности (88).

Как мы отмечали, при $k=0$ при рациональных значениях $\Delta/2\pi$ имеют место периодические, а при иррациональных – квазипериодические режимы. При фиксированном $0 < k < 1$ для каждого рационального числа p/q существует свой интервал значений параметра расстройки, в пределах которого число вращения фиксировано и равно p/q . Этот интервал определяется шириной соответствующего языка Арнольда при данном k . Зависимость числа вращения от параметра расстройки оказывается монотонной непрерывной функцией, содержащей бесконечное число горизонтальных ступенек (рис.55). Ее называют «чертовой лестницей». При $k \rightarrow 0$ суммарная длина всех ступенек лестницы стремится к нулю. При увеличении k она монотонно возрастает, и при $k=1$ становится равной единице.

Задача

Постройте «трехмерную» лестницу чисел вращения синус-отображения окружности в пространстве (Δ, k, w) . Как выглядит проекция этой картины на плоскость (Δ, k) ?

3.7. Отображение окружности и ляпуновский показатель

Чтобы подытожить наше обсуждение периодических, квазипериодических и хаотических режимов в отображении окружности, приведем карту ляпуновского показателя (рис.56.).

На этой карте языкам Арнольда отвечают отрицательные значения показателя (оттенки серого цвета), хаотическим режимам – положительные (светло-серый цвет), а квазипериодическим режимам – нулевые (белый цвет). Это существенное свойство квазипериодического режима, которое позволяет диагностировать его при анализе отображений. Действительно, традиционная карта для этого не пригодна – и хаотические, и квазипериодические режимы фиксируются на ней одним цветом, как непериодические (см. рис.46). Таким образом, если есть предположение, что в системе возможны квазипериодические режимы, карту режимов следует дополнять картой ляпуновского показателя. Отметим, что в численных расчетах нулевая величина показателя фиксируется с высокой, но конечной точностью, которую необходимо задать заранее.

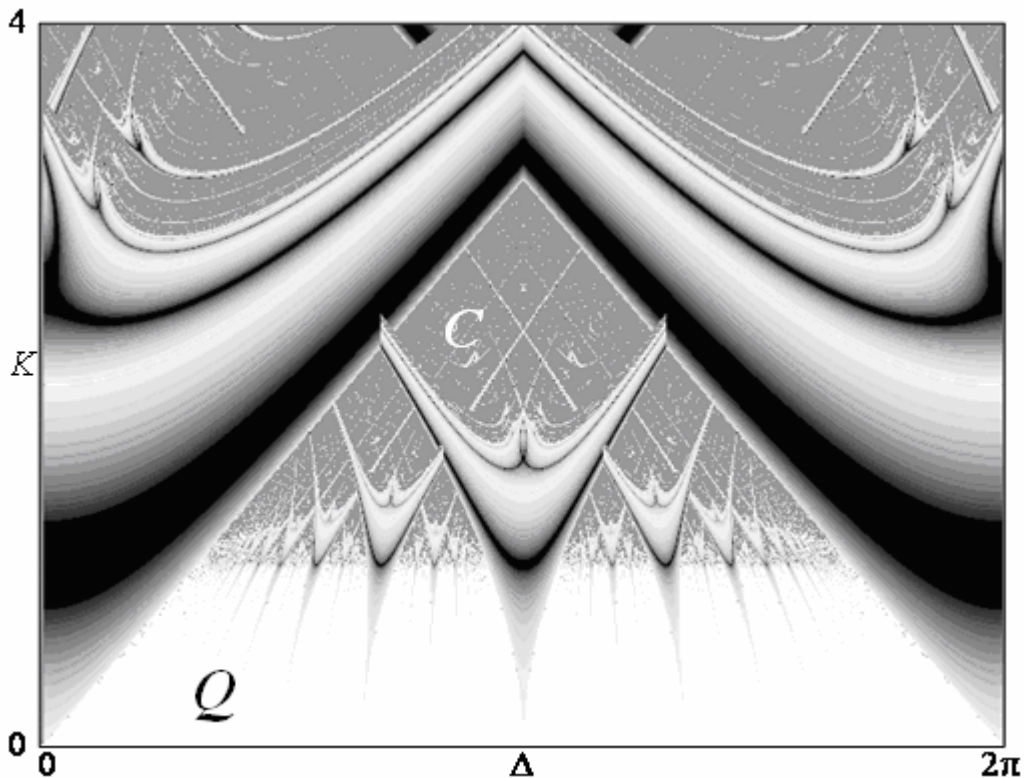


Рис.56. Карта ляпуновского показателя отображения окружности (88). Соответствие оттенков серого цвета значениям ляпуновского показателя аналогично использованному на рис.30 и 31. Буквами обозначены: Q – квазипериодическая динамика, C – хаос.

Задача

Постройте карту ляпуновского показателя синус-отображения окружности.

3.8. Картина квазипериодических режимов в эксперименте и ряды Фарея

Скажем теперь несколько слов о возможности выявления описанной картины в эксперименте. Это необходимо сделать, поскольку в выполненном с определенной точностью реальном эксперименте невозможно наблюдать эту картину в полном объеме. В частности, в эксперименте долгопериодические циклы и квазипериодические режимы окажутся неразличимы,

Действительно, пусть некоторое радиофизическое устройство, например автогенератор с внешним возбуждением, реализовано так, что на экране осциллографа можно наблюдать динамику на окружности. Тогда для долгопериодического цикла луч на экране будет оставлять столь частые «следы», что визуально его траектория будет восприниматься как непрерывная линия. Это тем более понятно, что луч на экране дает не отдельную точку, а оставляет «след» конечного размера. Далее, в эксперименте всегда присутствуют шумы, которые

так же «размывают» след электронного луча. Это означает, что в эксперименте будут наблюдаться лишь основные языки синхронизации, «погруженные» в область квазипериодического поведения (рис.57). Более точные эксперименты, однако, могут выявить внутри этой области более тонкую структуру языков синхронизации.

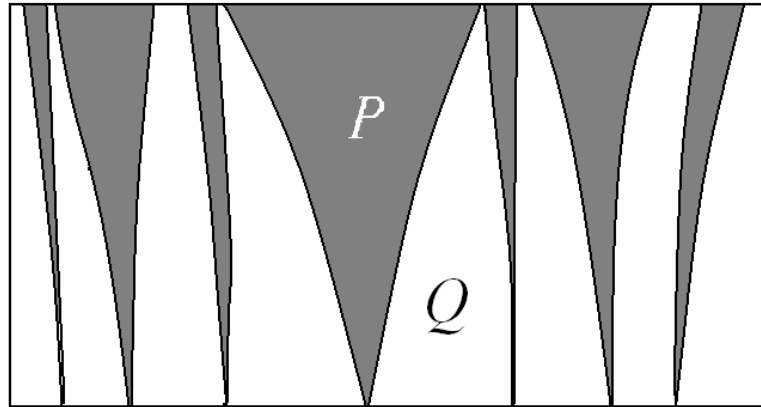


Рис. 57. Качественная картина синхронизации в эксперименте. P – языки Арнольда, Q – квазипериодические режимы.

Интересный вопрос состоит в том, какие из языков синхронизации будут «выживать» при таком наблюдении? Интуитивно ясно, что это должны быть языки, отвечающие низко периодическим циклам, так как, чем больше период цикла, тем труднее его наблюдать в эксперименте. Как мы видели, если язык характеризуется числом вращения $w = \frac{p}{q}$, то период цикла определяется знаменателем дроби q .

Таким образом, чтобы ответить на поставленный вопрос, нужно проклассифицировать дроби по величине знаменателя q .

Такую классификацию дает замечательный математический объект, известный как *ряд Фарея*. Ряд строится следующим образом. На первом уровне построения «стартуем» с двух самых простых несократимых дробей: $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$, которые ограничивают единичный отрезок. Затем ищем так называемую *медианту* этих дробей по правилу:

$$\frac{p'}{q'} = \frac{p + p''}{q + q''}. \quad (100)$$

Это правило, для того, чтобы его было удобно запомнить, называют «правилом двоечника»: именно так двоечник может сложить дроби, складывая по отдельности числители и знаменатели. Тогда получим

$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}. \quad (101)$$

Это число лежит посередине между «стартовыми». Можно показать, что это общее свойство: медианта всегда лежит между порождающими ее дробями. Выписываем теперь в ряд все три дроби: $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$, (рис.58). Мы получили все дроби, знаменатели которых меньше, или равны двум.

$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{1}$	$q \leq 1$								
$\frac{0}{1}$		$\left(\frac{1}{2}\right)$		$\frac{1}{1}$	$q \leq 2$								
$\frac{0}{1}$	$\left(\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{2}{3}\right)$	$\frac{1}{1}$	$q \leq 3$								
$\frac{0}{1}$	$\left(\frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{3}{4}\right)$	$\frac{1}{1}$	$q \leq 4$						
$\frac{0}{1}$	$\left(\frac{1}{5}\right)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{2}{5}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{3}{5}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\left(\frac{4}{5}\right)$	$\frac{1}{1}$	$q \leq 5$		
$\frac{0}{1}$	$\left(\frac{1}{6}\right)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{3}{5}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\left(\frac{5}{6}\right)$	$\frac{1}{1}$	$q \leq 6$

Рис.58. Иллюстрация построения ряда Фарея. Новые дроби на каждом шаге построения обведены эллипсом.

Продолжаем построение по «правилу двоечника». На следующем шаге получится уже пять дробей (третья строка таблицы на рис.58). Это все дроби, знаменатели которых не превосходят $q = 3$.

Следующий шаг приводит к девяти дробям, но среди них есть «лишние», знаменатели которых более пяти. Если их отбросить, то получится следующая, четвертая строка таблицы на рис.58, и так далее. В результате такой процедуры можно упорядочить все дроби, знаменатели которых не превосходят число $q = n$.

Теперь полезно обратиться к карте режимов отображения окружности на рис.46. На этом рисунке соответствующими цифрами указаны наиболее широкие языки синхронизации. Можно видеть, что получается замечательное соответствие с рядом Фарея, отвечающим пятой строке таблицы.

Таким образом, устройство системы языков отвечает последовательным членам ряда Фарея. В самом «грубом» приближении наблюдаются самые широкие языки с числами вращения $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$. Следующий, более узкий язык имеет

число вращения $\frac{1}{2}$, и т.д. Используя таблицу ряда Фарея, можно, например, сразу ответить на вопрос, какой наиболее широкий язык синхронизации на рис.46 (на рисунке он не подписан) лежит между языками с числами вращения $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$. Это язык с числом вращения $\frac{1+1}{3+4} = \frac{2}{7}$.

Стоит отметить, что ряд Фарея обладает замечательным свойством: он полон в том смысле, что с его помощью на «бесконечном уровне» получаются все иррациональные числа, лежащие на отрезке от нуля до единицы. При это все получаемые на каждом уровне дроби являются несократимыми. Таким образом, ряд Фарея дает полную классификацию языков синхронизации, включая и случай больших числителей и знаменателей чисел вращения.

Задачи

1. Продолжите построение ряда Фарея и укажите еще одну строку в таблице на рис.58.
2. Какой самый широкий язык синхронизации можно видеть на карте динамических режимов отображения окружности на рис.46 между обозначенными на этом рисунке языками с числами вращения $1/5$ и $1/4$?
3. Постройте ускоренный ряд Фарея, для которого не проводится дополнительный отбор дробей, а на каждом шаге каждая дробь порождает две в соответствии с «правилом двоечника».

3.9. Внутренняя синхронизация и бифуркация Неймарка-Сакера

Мы обсудили простейшие свойства синхронных и квазипериодических режимов. В определенной мере это рассмотрение позволяет понять и картину описанных в п.2.5 квазипериодических явлений, связанных с динамикой на инвариантной кривой.

Стоит отметить, что все же имеются и некоторые отличия. Действительно, в обсуждаемом случае нет четко выделенных двух ритмов в системе, так что для двумерных отображений приходится говорить о некоторой *внутренней синхронизации* в системе. Еще одно отличие состоит в том, что при приближении к характерной линии, вдоль которой выстроены основания языков на рис.43, инвариантная кривая уменьшается в размере. Точно на этой линии она сжимается в точку. В этом случае рассуждения, который относятся к динамике на окружности, оказываются некорректными. Таким образом, указанная линия

представляет собой некоторую новую бифуркацию неподвижной точки, характерную только для двумерных отображений и состоящую в рождении (исчезновении) инвариантной кривой. Ее называют *бифуркацией Неймарка-Сакера*.

Полезно указать на связь бифуркации Неймарка-Сакера с поведением мультипликаторов. Мультипликаторы двумерного отображения являются собственными числами матрицы возмущений (79), имеющей размерность два. Соответственно, они являются корнями квадратного характеристического уравнения, поэтому могут быть либо действительными, либо комплексно-сопряженными. Последний случай и связан с бифуркацией Неймарка-Сакера. Для комплексного мультипликатора $\mu = \rho \exp(i\varphi)$. Полагая для малого возмущения $\tilde{z}_n = \tilde{x}_n + i\tilde{y}_n = |\tilde{z}_n| \exp(i\theta_n)$, получаем, что

$$\tilde{z}_n \cdot \mu = |\tilde{z}_n| \rho \exp(i\varphi + i\theta_n), \quad (102)$$

то есть действие отображения приводит, во-первых, к умножению радиуса точки на $\rho = |\mu|$ и, во-вторых, к повороту на угол, равный аргументу мультипликатора $\varphi = \arg \mu$. Первое условие позволяет указать, как искать бифуркацию Неймарка-Сакера. Действительно, равновесие станет неустойчивым при $\rho = |\mu| > 1$. Для матриц 2×2 $\mu_1 \cdot \mu_2 = J$, и если $\mu_{1,2} = \rho \exp(\pm i\varphi)$, то $\rho^2 = J$, так что условием бифуркации Неймарка-Сакера является обращение в единицу якобиана матрицы возмущений: $J = 1$.

Второе условие позволяет определить характер возникающего режима. Вспоминая определение числа вращения, заключаем, что на линии бифуркации Неймарка-Сакера числа вращения связаны с мультипликатором соотношением

$$w = \frac{1}{2\pi} \arg \mu. \quad (103)$$

Для примера найдем бифуркацию Неймарка-Сакера модифицированного отображения Эно (80). Его неподвижные точки

$$x = y = 0, \quad x = y = \frac{\lambda - 1}{\lambda}. \quad (104)$$

Матрица возмущений (79) отображения (80) имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (105)$$

где $f(x, y) = (\lambda + \varepsilon(x_n - y_n))x_n(1 - x_n)$. Таким образом, якобиан этой матрицы легко находится:

$$J = -\frac{\partial f}{\partial y} = \varepsilon x(1-x). \quad (106)$$

Для первой неподвижной точки (104) всегда $J = 0$, а для второй

$$J = \varepsilon \frac{\lambda - 1}{\lambda^2}. \quad (107)$$

Приравнявая якобиан единице, находим условие бифуркации Неймарка-Сакера

$$\varepsilon = \frac{\lambda^2}{\lambda - 1}. \quad (108)$$

Эта линия и служит границей области устойчивости неподвижной точки (периода 1) и квазипериодических режимов на увеличенном фрагменте карты на рис.42.

Задача

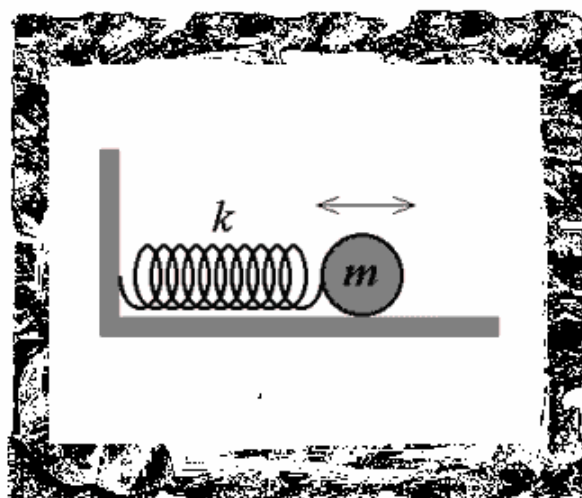
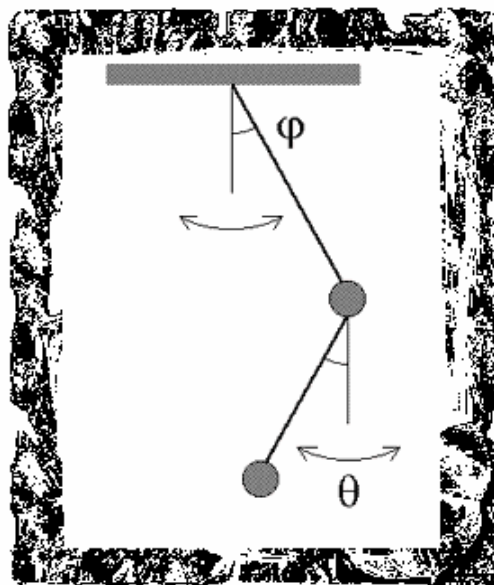
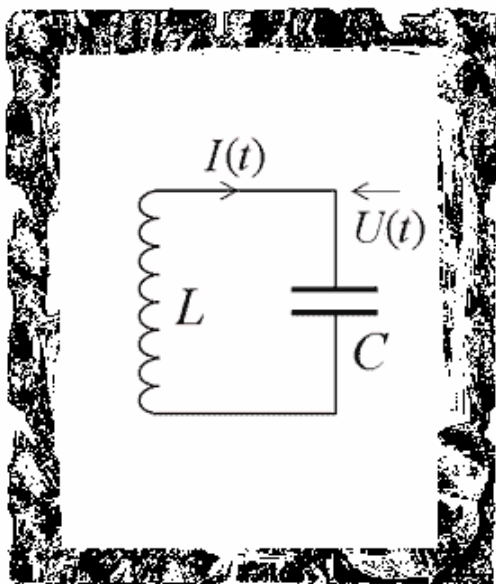
Найдите условие бифуркации Неймарка-Сакера для отображения

$$x_{n+1} = (\lambda + \varepsilon(x_n - y_n))(1 - x_n^2)$$

$$y_{n+1} = x_n$$

Часть IV

«КОЛЛЕКЦИЯ» ОТОБРАЖЕНИЙ



В этой части мы рассмотрим некоторые дополнительные примеры отображений и представим иллюстрации их динамики. Это будут как, в определенной мере, формальные модели, так и физически реализуемые системы. Значительное внимание будет уделено базовым объектам теории колебаний – осцилляторам.

4.1. Отображение Эно

Мы уже обсуждали отображение Эно

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - by, \\y_{n+1} &= x_n,\end{aligned}\tag{109}$$

которое является двумерным обобщением логистического отображения $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$. В дополнение к этому представим карту динамических режимов и ее увеличенный фрагмент, показанные на рис.59. На карте видны характерные области удвоенного периода, хаотического поведения и «разбегания». В области хаоса можно обнаружить структуры *crossroad area*, которые были нами подробно рассмотрены при анализе одномерных отображений (см. п.1.11). Две наиболее крупные структуры, образованные на базе режимов периода 5 и 7, показаны на увеличенном фрагменте карты. Таким образом, структуры *crossroad area* характерны не только для одномерных, но и для двумерных отображений.

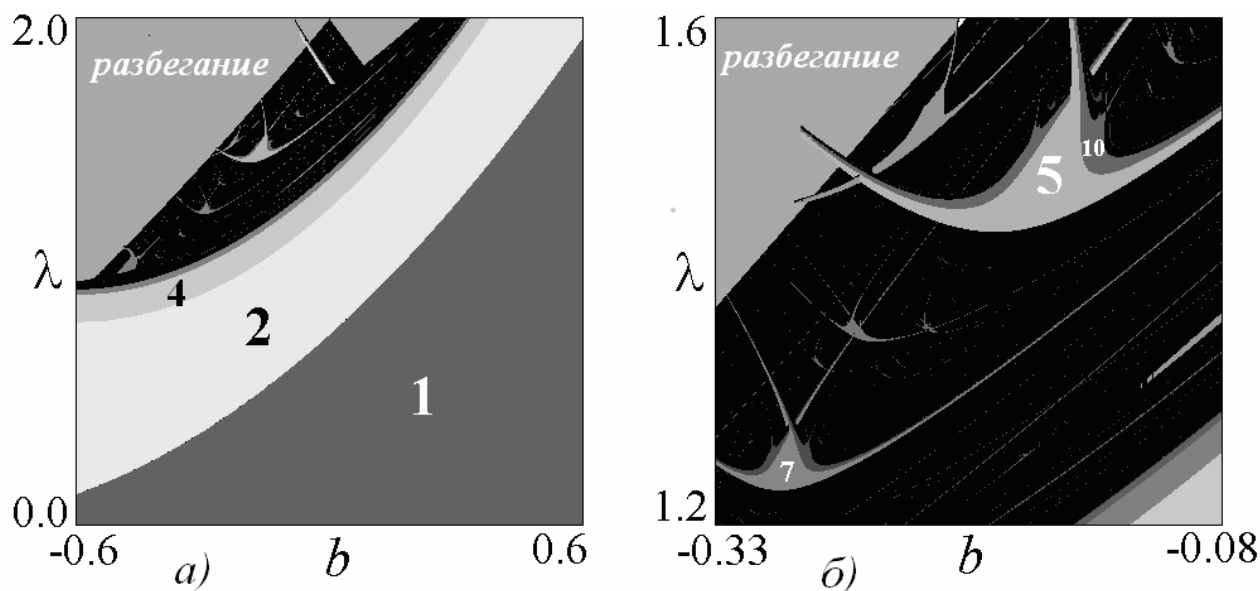


Рис.59. Карта динамических режимов отображения Эно и ее увеличенный фрагмент.

Задача

Определите период цикла внутри структуры *crossroad area*, расположенной на рис.59б между структурами, отвечающими периоду 5 и 7.

4.2. Отображение Холмса

Отображение Эно было построено в п.2.2 как модификация логистического отображения, учитывающая значение динамической переменной на предпоследнем шаге дискретного времени. Точно такую же процедуру можно применить к любому одномерному отображению. Как мы видели в п.1.10, естественный шаг в теории одномерных отображений состоит в переходе от квадратичного логистического отображения к кубическому. Используя процедуру, аналогичную использованной при выводе отображения Эно, можно получить отображение, обобщающее кубическое на случай двух измерений:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= a - bx_n + x_n^3 - cy_n, \\ y_{n+1} &= x_n.\end{aligned}\tag{110}$$

Его еще иногда называют отображением Холмса. Нетрудно показать, что это отображение имеет постоянный якобиан $J = c$ (задача 1).

На рис.60 показана карта динамических режимов отображения Холмса при значении ответственного за степень сжатия в фазовом пространстве параметра $c=0,3$. Можно видеть, что в этом случае становятся характерными не только структуры *crossroad area*, как для исходного кубического отображения, но и структуры типа *spring area*, в частности на базе цикла периода 3. С ростом параметра c и при приближении его значения к 1 области хаоса становятся все меньше и меньше, пока не исчезнут совсем при $c=1$. При $c>1$ отображение демонстрирует лишь убегание траекторий на бесконечность.

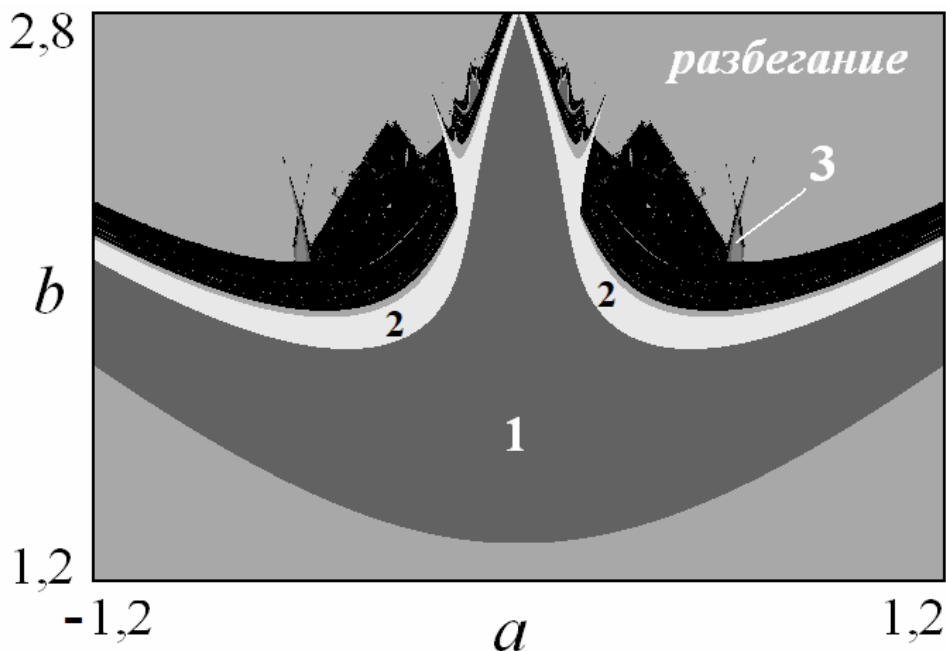


Рис. 60. Карта динамических режимов отображения Холмса на плоскости (b,a) , $c=0,3$.

Задачи

1. Покажите, что якобиан отображения Холмса $J = c$.
2. Постройте карту режимов отображения Холмса и наблюдайте трансформацию структуры типа *crossroad area* с ростом параметра c .

4.3. Универсальное двумерное отображение

Отображение Эно и отображение Холмса имеют постоянный якобиан и поэтому не демонстрируют бифуркацию Неймарка-Сакера. Чтобы получить все основные бифуркационные сценарии двумерных отображений, можно использовать следующее отображение¹⁸:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2), \\y_{n+1} &= Jx_n - \frac{1}{5}(x_n^2 + y_n^2).\end{aligned}\tag{111}$$

Как и отображение Эно, оно сконструировано с использованием линейных и квадратичных членов, однако его динамика богаче. Покажем это.

Простейшей неподвижной точкой отображения (111) является начало координат $x = y = 0$. Вычислим матрицу возмущений (79) отображения (111) в этой точке:

$$M = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S, -1 \\ J, 0 \end{pmatrix}.\tag{112}$$

Нетрудно видеть, что след этой матрицы равен S , а якобиан – равен J . Таким образом, замечательное свойство отображения (111) состоит в том, что его параметры являются непосредственно следом и якобианом матрицы возмущений, которая отвечает за характер бифуркаций в двумерных отображениях.

Для анализа бифуркаций нам надо вычислить мультипликаторы неподвижной точки, которые являются собственными числами матрицы (112). Это сделать просто, поскольку для матриц «два на два» справедливы соотношения

$$\mu_1 + \mu_2 = S, \quad \mu_1\mu_2 = J.\tag{113}$$

Заметим, что соотношения (113) очень удобны. Чтобы их запомнить, используем следующее рассуждение. След матрицы и ее якобиан являются *инвариантами* матрицы, т.е. не зависят от возможных замен переменных. С другой стороны, всякая матрица может быть заменой переменных приведена к диагонально-

¹⁸ Отображение предложено А.П. Кузнецовым и С.П. Кузнецовым.

му виду:

$$\begin{pmatrix} \mu_1, & 0 \\ 0, & \mu_2 \end{pmatrix}. \quad (114)$$

Вычисляя равный сумме диагональных членов след матрицы и ее якобиан, приходим к соотношениям (113).

Из (113) по теореме Виета получаем, что мультипликаторы двумерного отображения могут быть вычислены из соотношения

$$\mu^2 - S\mu + J = 0. \quad (115)$$

Поэтому для мультипликаторов справедливо выражение:

$$\mu_{1,2} = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - J}. \quad (116)$$

Теперь мы можем определить условия всех бифуркаций любого двумерного отображения на плоскости параметров (S, J) . Действительно, для касательной бифуркации $\mu = +1$, так что из (115) получим

$$1 - S + J = 0. \quad (117)$$

Для бифуркации удвоения периода $\mu = -1$, так что

$$1 + S + J = 0. \quad (118)$$

Наконец, для бифуркации Неймарка-Сакера

$$J = 1. \quad (119)$$

Все эти бифуркационные линии на плоскости (S, J) образуют характерный «треугольник устойчивости» (рис.61). Переход через левую его границу приводит к бифуркации удвоения периода, через правую – к касательной бифуркации, при которой неподвижная точка в начале координат сливается с неустойчивой и исчезает. Переход через верхнюю границу отвечает бифуркации Неймарка-Сакера. На рис.61 показана так же линия $J = S^2/4$, выше которой в соответствии с (116) мультипликаторы комплексные. Нетрудно видеть, что вся линия бифуркации Неймарка-Сакера отвечает комплексным мультипликаторам.

Вернемся к отображению (111). Поскольку его параметры – это S и J , то рис.61 дает, фактически, картину плоскости параметров отображения. В этом убеждаемся, обратившись к карте динамических режимов отображения (111) на рис.62.

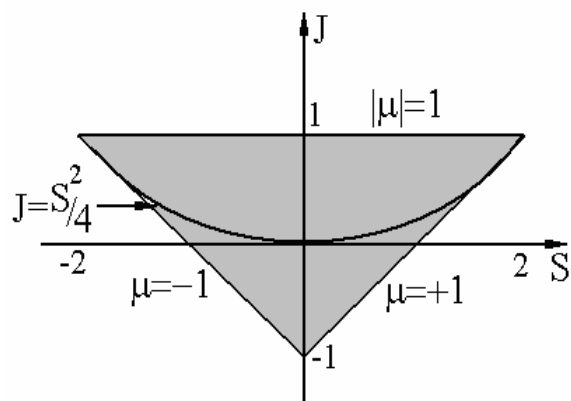


Рис.61. Треугольник устойчивости неподвижной точки двумерного отображения на плоскости след S - якобиан J матрицы возмущений.

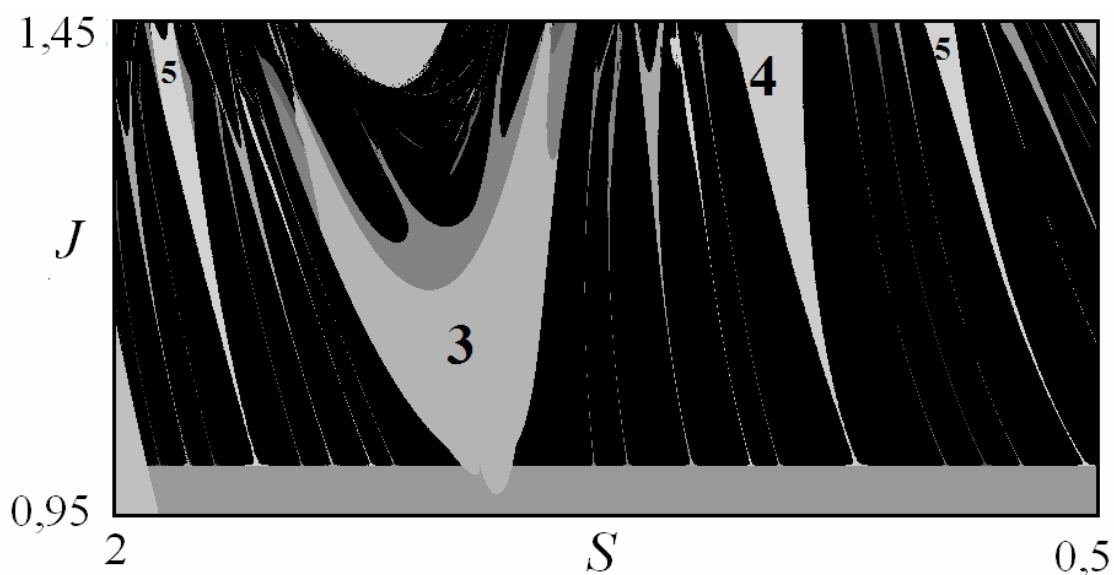
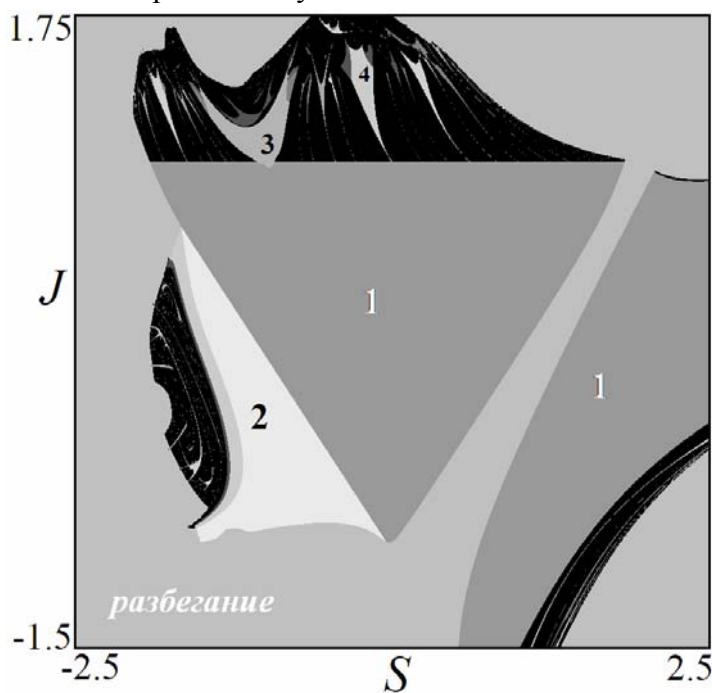


Рис. 62. Карта динамических режимов двумерного универсального отображения на плоскости (S, J) и ее увеличенный фрагмент в окрестности линии бифуркации Неймарка-Сакера.

На карте можно видеть треугольник устойчивости неподвижной точки. При переходе через его правую границу происходит жесткий переход в область устойчивости другой неподвижной точки. При переходе через левую границу наблюдается каскад удвоений периода с переходом к хаосу по Фейгенбауму. И, наконец, верхняя граница треугольника отвечает бифуркации Неймарка-Сакера. К ней примыкает система языков Арнольда разного периода, хорошо видных на увеличенном фрагменте карты. Можно отметить, однако, что система языков вдоль линии бифуркации Неймарка-Сакера не вполне эквивалентна случаю отображения окружности. Это хорошо видно на примере языка периода 3, который имеет характерное «округлое» основание. Языки на рис.62 имеют сложную внутреннюю структуру: так внутри языка периода 3 имеются области удвоенного периода. В то же время внутреннее устройство языков не универсально, что хорошо видно из сравнения языков периода 3 и 4.

Задача

Постройте фазовые портреты универсального двумерного отображения внутри и вне языков периода 3, 4 и 5.

4.4. Возбуждение нелинейных колебаний

Отображения можно использовать для описания поведения различных колебательных систем, которые обычно называют *осцилляторами*. Простейшими примерами являются различные маятники, колебательный контур и другие системы, которые распространены не только в физике, но и в биологии, химии и других науках. Оказывается, что если внешний сигнал возбуждает нелинейную колебательную систему, то ее поведение также может быть сложным.

Рассмотрим простейшую модель возбуждения нелинейного колебательного процесса. Пусть система в отсутствие внешнего воздействия совершает затухающие колебания:

$$x(t) = x(0)e^{-\gamma t} \cos \frac{2\pi}{T} t. \quad (120)$$

Здесь T – период собственных колебаний осциллятора, а параметр γ характеризует степень диссипации (затухания) в системе. С течением времени амплитуда колебаний в соответствии с (120) уменьшается до нуля. Чтобы поддержать колебания, необходимо внешнее воздействие. Пусть периодически, в моменты времени $t = n\tau$, переменная x возрастает на величину C . Обозначим через x_n значение переменной сразу после n -го воздействия. Через время τ в соответ-

вии с (120) переменная примет значение $x = x_n e^{-\gamma\tau} \cos \frac{2\pi}{T} \tau$. Затем, следует снова стадия внешнего воздействия, так что переменная станет равной¹⁹

$$x_{n+1} = x_n e^{-\gamma\tau} \cos \frac{2\pi}{T} \tau + C. \quad (121)$$

Мы получили искомое отображение. Однако оно является линейным и описывает очень простое поведение. А именно, последовательность x_n стремится к неподвижной точке, которая и определяет установившуюся амплитуду колебаний.

Сложная динамика появляется, если учесть нелинейные эффекты. Для колебательных систем проявление нелинейности состоит, в первую очередь, в эффекте *неизохронности* – в зависимости периода колебаний от их амплитуды. (Для малых колебаний это не так – период определяется лишь параметрами системы и не зависит от амплитуды колебаний.) Для отображения (121) в качестве амплитуды выступает переменная x_n . Предположим, что период колебаний T возрастает с ростом x_n , так что $T = T_0(1 + \beta x_n)$, где параметр β характеризует степень неизохронности системы. Тогда из (121) получаем:

$$x_{n+1} = x_n e^{-\gamma\tau} \cos \frac{2\pi}{T_0(1 + \beta x_n)} \tau + C. \quad (122)$$

Введем далее обозначение $N = T_0 / \tau$ – параметр, характеризующий соотношение собственного периода системы и периода внешнего воздействия, своего рода частота внешнего воздействия, а также $d = \gamma T_0$ – безразмерный параметр затухания. Тогда получим искомое отображение, описывающее возбуждение нелинейных колебаний²⁰:

$$x_{n+1} = x_n e^{-\frac{d}{N}} \cos \frac{2\pi}{N(1 + \beta x_n)} + C. \quad (123)$$

Полученное отображение является одномерным, но *мультимодальным*, т.е. характеризуется наличием множества экстремумов. Карта динамических режимов отображения (123) на плоскости параметров частота воздействия – его амплитуда (N, C) приведена на рис. 63. Видно, что учет нелинейности приводит к появлению сложной динамики: внутри области существования неподвижной точки появляются острова удвоенного периода. Разные острова возникают за

¹⁹ Здесь есть одна тонкость: необходимо считать затухание слабым, и считать дополнительно, что осциллятор в результате внешнего воздействия останавливается, чтобы можно было снова использовать формулу (120).

²⁰ Такое отображение было предложено Б.П. Безручко.

счет того, что за время между двумя фазами воздействия система успевает совершить разное число собственных колебаний. В свою очередь, внутри островов периода 2 появляются острова периода 4, причем они могут быть «расщеплены» на два острова за счет структур *crossroad area*. Внутри островов имеют место хаотические режимы.

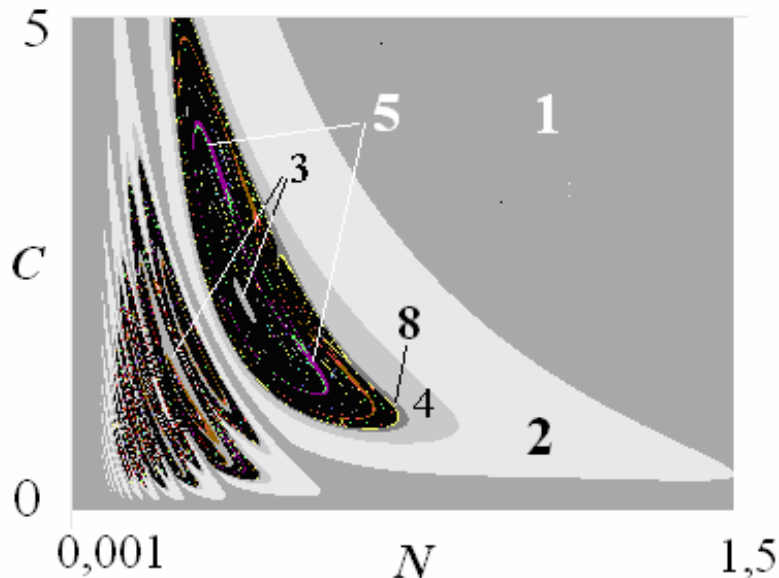


Рис.63. Карта динамических режимов отображения (123) на плоскости параметров (C, N) . Значения остальных параметров фиксированы: $d=0,2$; $\beta=1$.

Задача

Постройте карту динамических режимов отображения (123) и проследите трансформации итерационных диаграмм при движении от острова к острову.

4.5. Нелинейные и автоколебательные осцилляторы и отображения

Рассмотренная выше модель использует целый ряд довольно грубых (модельных) предположений о динамике осциллятора. Поэтому проведем более детальное обсуждение поведения нелинейных осцилляторов.

Осцилляторы, вообще говоря, описываются дифференциальными уравнениями. Классической моделью является математический маятник:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \sin x = 0. \quad (124)$$

Здесь γ – параметр затухания, которое считаем пропорциональным скорости маятника \dot{x} . Соотношение (124) в рамках механической интерпретации – это второй закон Ньютона. В этом случае вторая производная \ddot{x} определяет ускорение маятника. Если величина координаты осциллятора x остается все время малой, то, используя приближенную формулу $\sin x \approx x$, из (124) получаем хо-

рошо известное уравнение линейных колебаний: $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + x = 0$.

В теории колебаний популярна модель нелинейного *осциллятора Дуффинга*:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + x + \beta x^3 = 0. \quad (125)$$

Осциллятор Дуффинга (125) характеризуется потенциальной энергией $U(x) = x^2/2 + \beta x^4/4$, при этом параметр β отвечает за отклонение формы потенциальной ямы от квадратичной, и, как следствие – за неизохронность, т.е. зависимость периода колебаний от амплитуды. Отметим, что математический маятник приводится приближенно к осциллятору Дуффинга, если учесть следующий член ряда Тейлора в аппроксимации синуса: $\sin x \approx x - x^3/6$.

Важный класс образуют *автоколебательные осцилляторы*, в которых есть дополнительный источник энергии, обеспечивающий поддержку колебаний даже в отсутствии внешнего воздействия. Простейшим примером является *осциллятор Ван-дер-Поля*:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0. \quad (126)$$

Здесь λ – параметр, характеризующий «подкачку» энергии от внешнего источника («отрицательная диссипация»), а член x^2 отвечает за нелинейные потери энергии, нарастающие с ростом амплитуды колебаний. Эти потери при достаточно большой амплитуде компенсируют подкачку энергии, в результате чего и устанавливаются стационарные автоколебания.

Часто используют также модель, обобщающую (125) и (126) – *осциллятор Ван-дер-Поля-Дуффинга*:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = 0. \quad (127)$$

Динамику осцилляторов принято представлять на фазовой плоскости (x, \dot{x}) . В отличие от отображений, траектория осциллятора на фазовой плоскости будет непрерывной линией. Качественно фазовый портрет осциллятора показан на рис.64а, а автоколебательной системы – на рис.64б. Можно видеть, что для автоколебательной системы все траектории стремятся к некоторой предельной – аттрактору – который в данном случае представляет собой замкнутую притягивающую орбиту. Ее называют *предельным циклом*.

Предельные циклы автоколебательных систем при вариации параметра рождаются из неподвижной точки в результате *бифуркации Андронова-Хопфа*. Для систем (126) и (127) условие этой бифуркации может быть легко найдено из физических соображений. Действительно, при $\lambda < 0$ в этих осцилляторах имеется диссипация, пропорциональная скорости осциллятора, поэтому колебания затухают. При $\lambda > 0$ и малых амплитудах колебаний коэффициент при

скорости оказывается положительным и возникает «отрицательное трение», которое приводит к «раскачке» колебаний. Однако с ростом амплитуды колебаний коэффициент при скорости в (126) убывает, и при некотором ее значении становится равным нулю. Это значения и соответствует амплитуде установившихся колебаний, т.к. при бóльших ее значениях этот коэффициент станет отрицательным и колебания будут затухать. Таким образом, при $\lambda > 0$ в системе возможны установившиеся колебания. Это автоколебания, т.к. устанавливающееся значение амплитуды определяется только параметров λ .

Следовательно, $\lambda = 0$ и является бифуркационным значением, соответствующим возникновению автоколебаний.

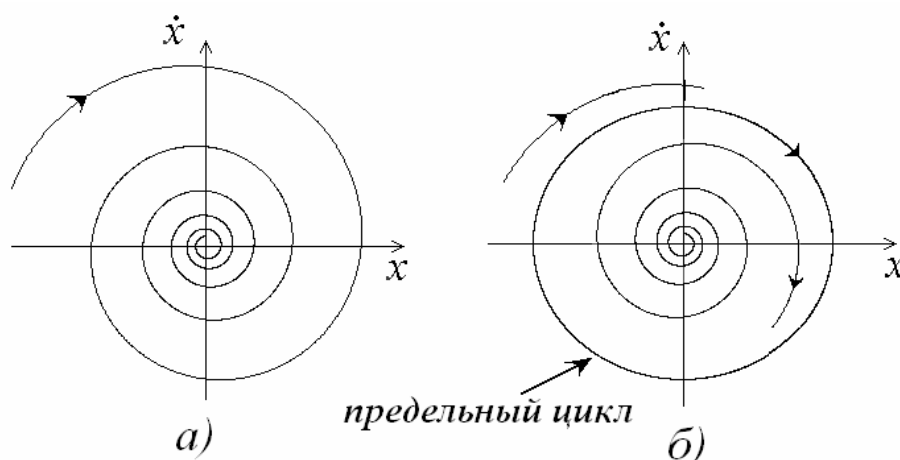


Рис.64. а) Фазовая траектории затухающих колебаний осциллятора, б) аттрактор автоколебательной системы – предельный цикл и приближающиеся к нему фазовые траектории.

Как мы уже отмечали, свободные осцилляторы демонстрируют очень простое поведение, которое, превращается в сложное при введении внешнего воздействия. Обсудим, как в этом случае можно получить отображение. Пусть осциллятор периодически получает удар в виде импульса. Как известно из курса физики, кратковременное действие внешнего импульса почти не меняет координату материальной точки, но увеличивает ее импульс (скорость) на некоторую величину V . На фазовой плоскости (x, \dot{x}) действие импульса, таким образом, будет приводить к смещению точки вдоль оси ординат на величину V .

Обозначим скорость и координату осциллятора сразу после действия n -го импульса (x_n, \dot{x}_n) . После этого движение осциллятора является свободным, т.е. подчиняется одному из уравнений (124 – 127). Эти уравнения можно решить либо численно, либо приближенно аналитически. (Точно они аналитически не решаются.) Тогда можно получить значения координаты и скорости через время, равное периоду импульса T :

$$\begin{aligned} x(T) &= f(x_n, \dot{x}_n, T), \\ \dot{x}(T) &= g(x_n, \dot{x}_n, T). \end{aligned} \quad (128)$$

После этого действует импульс, и мы получаем значения координаты и скорости (x_{n+1}, \dot{x}_{n+1}) , см. рис.65. Тогда:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, \dot{x}_n, T), \\ \dot{x}_{n+1} &= g(x_n, \dot{x}_n, T) + B. \end{aligned} \quad (129)$$

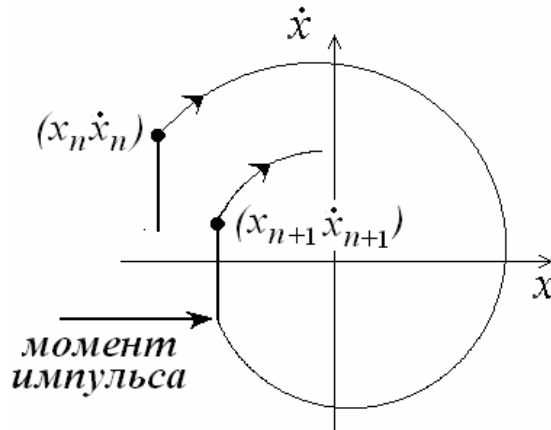


Рис.65. Иллюстрация построения двумерного отображения для осциллятора с импульсным возбуждением.

Это и есть искомое двумерное отображение. Таким образом, системы типа осцилляторов с импульсным возбуждением приводятся к отображениям, необходимо только каким-либо способом решить уравнение свободного осциллятора в промежутке между импульсами.

Задача

Используя решение для затухающего линейного осциллятора с заданными начальными координатой и скоростью, постройте двумерное отображение для осциллятора с импульсным возбуждением.

4.6. Отображение Икеды

Нелинейное уравнение осциллятора Дуффинга (125) не допускает точного аналитического решения. Однако если диссипация невелика, то решение может быть получено приближенно, в рамках метода медленно меняющихся амплитуд. Суть этого метода состоит в том, что решение ищется в виде колебаний, отвечающих линейному диссипативному осциллятору, амплитуда и фаза которых медленно меняются во времени. В результате можно получить следующее решение (см. Приложение 2):

$$\begin{aligned}
x(T) &= R_n e^{-\gamma T/2} \cos\left(T + \frac{3}{8}\beta R_n^2 \frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma} + \varphi_n\right), \\
\dot{x}(T) &= -R_n e^{-\gamma T/2} \sin\left(T + \frac{3}{8}\beta R_n^2 \frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma} + \varphi_n\right).
\end{aligned}
\tag{130}$$

Здесь R_n и φ_n – начальные амплитуда и фаза, для которых

$$x_n = R_n \cos \varphi_n, \quad \dot{x}_n = -R_n \sin \varphi_n. \tag{131}$$

С учетом действия импульса и соотношений (129), получаем

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= R_n e^{-\gamma T/2} \cos\left(T + \frac{3}{8}\beta R_n^2 \frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma} + \varphi_n\right), \\
\dot{x}_{n+1} &= -R_n e^{-\gamma T/2} \sin\left(T + \frac{3}{8}\beta R_n^2 \frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma} + \varphi_n\right) + C.
\end{aligned}
\tag{132}$$

Выражения (132) удобнее записать в комплексной форме, введя новую комплексную переменную z :

$$z = (\dot{x} + ix) \sqrt{\frac{3}{8}\beta \frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma}}. \tag{133}$$

Используя начальные условия (131), получим для этой переменной иско-
мое двумерное отображение в виде

$$z_{n+1} = A + Bz_n \exp(i(|z_n|^2 + T)), \tag{134}$$

где параметры A и B определяются через параметры исходной системы

$$A = C \sqrt{\frac{3\beta}{8} \cdot \frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma}}, \quad B = e^{-\gamma T/2}. \tag{135}$$

Заметим, что точно такое же отображение было получено японским исследователем К. Икедой для оптического кольцевого резонатора со средой с фазовой нелинейностью, возбуждаемого лучом лазера. Поэтому его называют отображением Икеды.

На рис.66 показана карта динамических режимов отображения Икеды на плоскости параметров безразмерная амплитуда – параметр диссипации (A, B) для случая $T = 2\pi$ (период воздействия точно равен собственному периоду колебаний линейного осциллятора) и ее выделенный фрагмент.

Система Икеды демонстрирует удвоения периода и характерные структуры *crossroad area*. Можно наблюдать целую их систему на базе неподвижной точки, периодически повторяющуюся с ростом параметра A , отвечающего за амплитуду воздействия. Несколько характерных фазовых портретов отображения Икеды в области хаоса также показаны на рис.66. Мы видим, что аттракторы имеют вид спирали, формируя фрактальную структуру в «поперечном» на-

правлении. С ростом амплитуды воздействия и при уменьшении параметра B спиральная структура аттрактора становится все менее выраженной, и он превращается, фактически, в тонкую линию – одномерный объект. Это позволяет дать важную иллюстрацию ситуации, когда двумерная система может быть приближенно описана одномерным отображением. В нашем случае оно может быть построено аналитически.

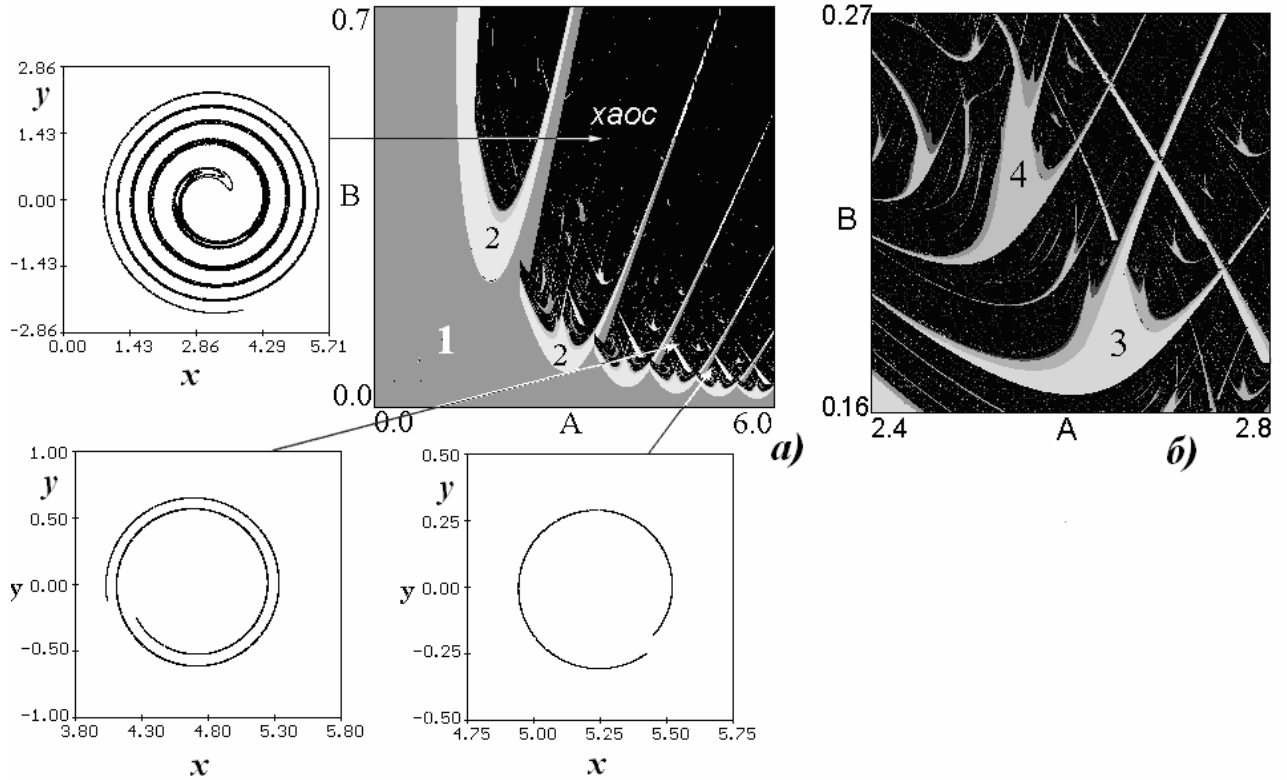


Рис. 66. Карта динамических режимов отображения Икеды, ее выделенный фрагмент и фазовые портреты в области хаоса.

Для этого представим комплексную переменную z следующим образом:

$$z = A(1 + B\bar{z}). \quad (136)$$

Подставим это выражение в уравнение (134) и разрешим его относительно переменной \tilde{z}_{n+1} :

$$\tilde{z}_{n+1} = (1 + B\bar{\tilde{z}}_n) \exp \left[i \left(\varphi + \lambda \operatorname{Re} \tilde{z}_n + \frac{1}{2} \lambda B |\tilde{z}_n|^2 \right) \right]. \quad (137)$$

Здесь введены новые параметры

$$\lambda = 2A^2B, \quad \varphi = A^2 + T. \quad (138)$$

Будем считать параметр B малым и пренебрежем соответствующими членами в выражении (137), оставив только члены первого порядка малости. Тогда для действительной части $\xi_n = \operatorname{Re} \tilde{z}_n$ из (137) следует одномерное отображение

$$\xi_{n+1} = \cos(\lambda \xi_n + \varphi), \quad (139)$$

которое заменой $x=\lambda\xi+\varphi$ приводится к более удобному виду - «отображению косинуса»

$$x_{n+1} = \lambda \cos x_n + \varphi. \quad (140)$$

Заметим, что переход к одномерному отображению привел к уменьшению числа существенных параметров с трех до двух.

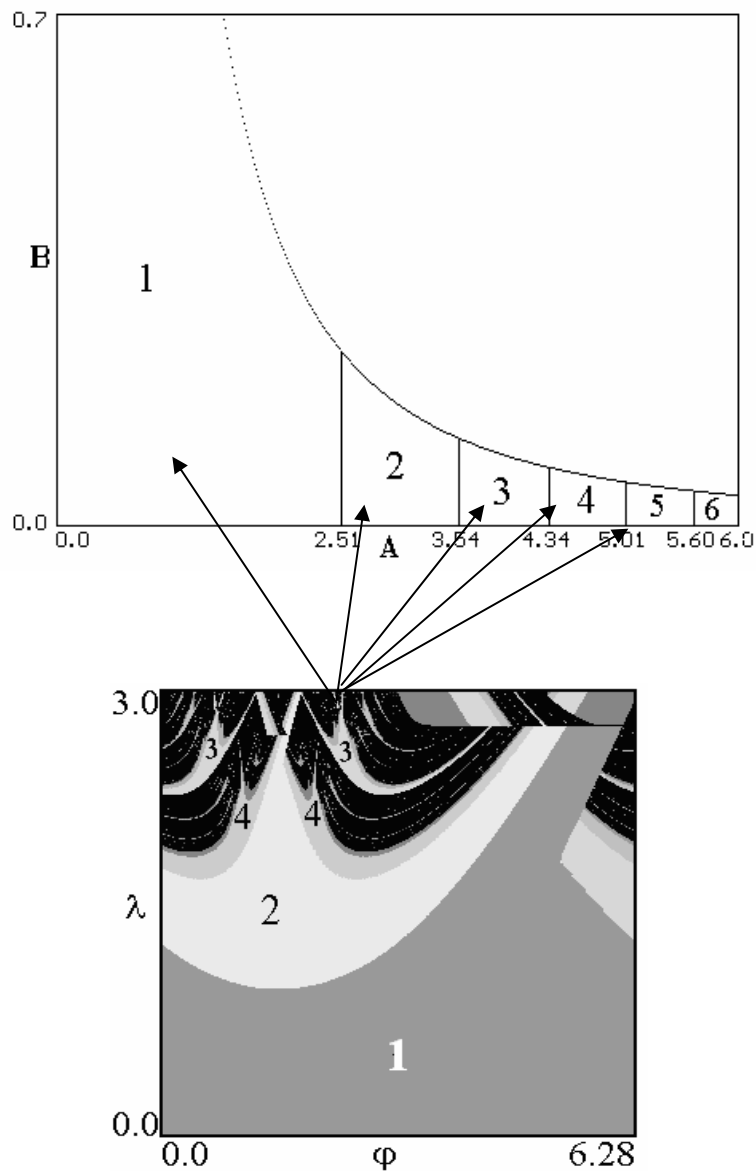


Рис. 67. Карта отображения косинуса и рисунок, поясняющий устройство плоскости параметров отображения Икеды.

Карта динамических режимов «отображения косинуса» показана на рис.67. Этот рисунок позволяет понять устройство плоскости параметров отображения Икеды. Действительно, благодаря периодичности косинуса и соотношениям (139), элементарная «ячейка» в виде карты отображения косинуса с границами $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$ и $\lambda = const$ трансформируется в систему криволинейных ячеек на плоскости (A, B) , как показано на рис.67.

Задачи

1. Как меняются фазовые портреты отображения Икеды при выходе из окна периода 3 в область хаоса.
2. Обсудите, почему «отображение косинуса» и кубическое отображение дают похожие карты динамических режимов.

4.7. Автоколебательный осциллятор с внешним воздействием – отображение Гласса

Получим теперь простейшее отображение, описывающее динамику возбуждаемого импульсами автоколебательного осциллятора. Оказывается, в этом случае можно сразу построить приближенное одномерное отображение, если считать, что в промежутке между импульсами изображающая точка на фазовой плоскости успевает вернуться на предельный цикл.

Итак, пусть имеется автоколебательная система, установившемуся режиму которой отвечает движение точки по предельному циклу в виде окружности радиуса R , рис.68. В отсутствие внешнего воздействия за время t точка поворачивается на угол $\theta = \omega t$. Для простоты положим частоту вращения $\omega = 1$. Пусть на такую систему через определенные моменты времени T действуют внешние импульсы, которые приводят к изменению ординаты точки на постоянную величину – амплитуду импульса B .

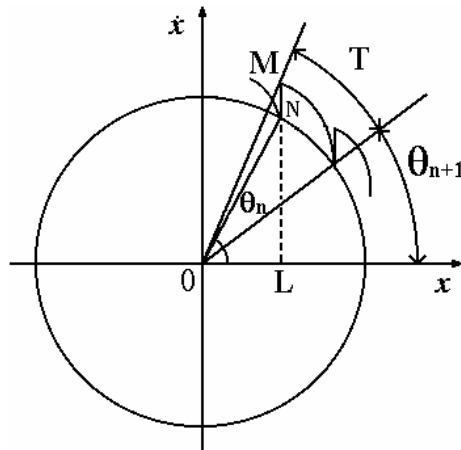


Рис.68. Иллюстрация построения отображения для автоколебательной системы с предельным циклом в виде окружности под импульсным воздействием.

Пусть изображающая точка непосредственно перед n -ым внешним импульсом находится в точке N и характеризуется углом θ_n (рис.68). В результате действия импульса изображающая точка на фазовой плоскости «поднимается» вверх на величину B , и попадает в точку M . Затем наступает период автономной эволюции в течение времени, равного периоду внешнего воздействия T . За это

время фазовый угол меняется на T , а изображающая точка успевает вернуться на предельный цикл. Теперь она характеризуется фазовым углом θ_{n+1} . Как видно из рис.68

$$\operatorname{tg}(\theta_{n+1} + T) = \frac{MN + NL}{OL}. \quad (141)$$

В свою очередь $OL = R \cos \theta_n$, $NL = R \sin \theta_n$, $MN=B$. Поэтому

$$\operatorname{tg}(\theta_{n+1} + T) = \frac{B + R \sin \theta_n}{2R \cos \theta_n}. \quad (142)$$

Разрешая это соотношение относительно θ_{n+1} , получаем одномерное отображение

$$\theta_{n+1} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin \theta_n + C}{\cos \theta_n}\right) - T. \quad (143)$$

Здесь $C = B/R$ – нормированная на радиус предельного цикла амплитуда воздействия.

Отображение (143) было предложено канадским биофизиком Л. Глассом. Оно представляет собой вариант отображения окружности. Построение отображения Гласса на основе рис. 68 делает наглядным введение фазы θ «на окружности», в качестве каковой выступает предельный цикл автоколебательной системы.

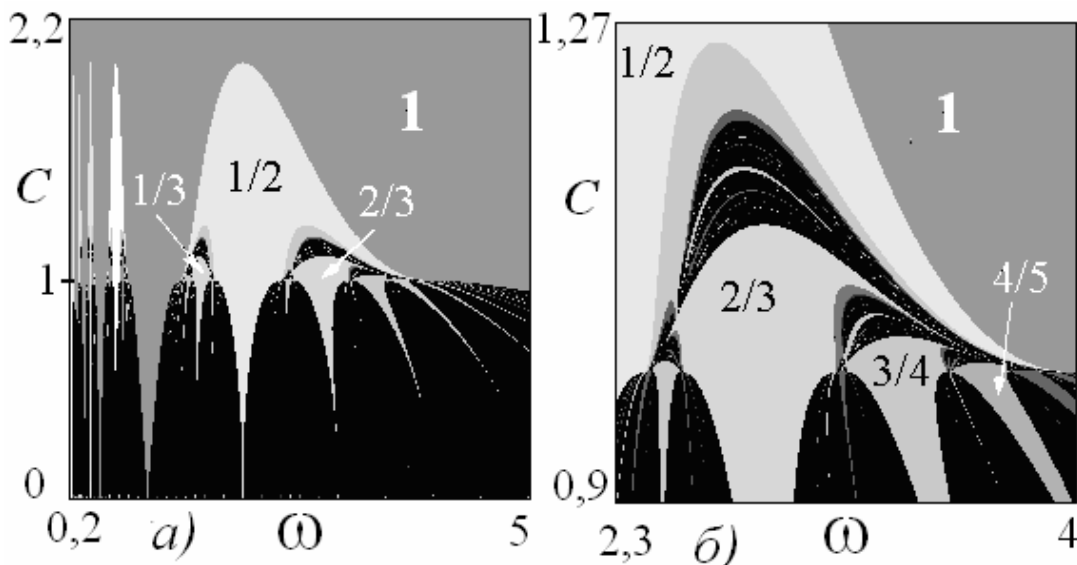


Рис.69. Карта динамических режимов отображения Гласса.

Карта динамических режимов отображения Гласса и ее увеличенный фрагмент на плоскости частота $\omega = 2\pi/T$ – амплитуда воздействия C показаны на рис.69. В области малых амплитуд C она похожа на карту стандартного синус-отображения окружности. Можно видеть систему языков синхронизации, разделенных областями квазипериодических режимов. Перекрывание языков на

ступает при значении $C = 1$. Однако выше этой линии имеет место другое устройство плоскости параметров, нежели для синус-отображения окружности, что хорошо видно на увеличенном фрагменте рис.69б. В этом случае каскад удвоенный периода наблюдается при уменьшении, а не при увеличении амплитуды внешнего сигнала. На увеличенном фрагменте хорошо видно, что окно в хаотической области, которому отвечает период 3, оказывается «сопряженным» с языком синхронизации с числом вращения $2/3$. Аналогичное поведение можно обнаружить и для других окон, характерных для систем, демонстрирующих переход к хаосу через удвоения периода.

Такая динамика системы связана с иным, чем для стандартного отображения окружности, видом функции, задающей отображение (142). Обратимся к рис.70, где эта функция показана для нескольких значений амплитуды воздействия C .

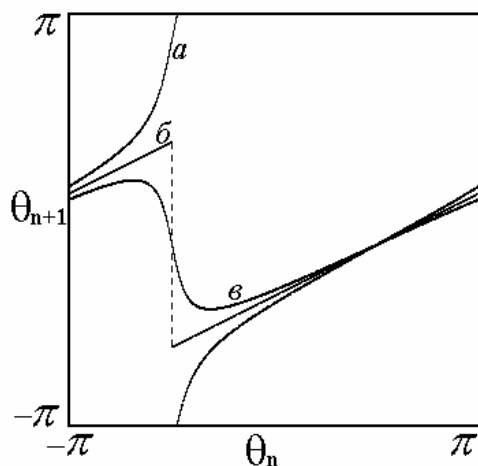


Рис.70. Функция, задающее отображение Гласса, для нескольких значений амплитуды внешнего воздействия: $C=0,8$ (а), $C=1,0$ (б), $C=1,2$ (в).

При $C < 1$ отображение является разрывным, точно при $C=1$ оно превращается в кусочно-линейное, а при $C > 1$ становится бимодальным, причем «размах» отображения падает с ростом амплитуды. Это и определяет особенности устройства карты режимов по сравнению с синус-отображением окружности, для которого исчезновение квазипериодических режимов связано не с кусочно-линейной функцией, а кубической точкой перегиба.

Отметим, что появление особенности в динамике системы при $C=1$ легко понять из геометрической иллюстрации рис.68. Действительно, в этом случае импульсы «подбрасывают» изображающую точку на фазовой плоскости вверх на величину $B=R$. Мысленно сместим предельный цикл вверх. При указанном условии он перестает охватывать начало координат, относительно которого определяется фаза колебаний.

Задача

Постройте карту динамических режимов отображения Гласса и проследите трансформации итерационных диаграмм при движении внутри языка периода 3 с увеличением амплитуды и переходе в область $C > 1$

4.8. Автоколебательный осциллятор с внешним воздействием

Более корректное описание автоколебательной системы с импульсным возбуждением приводит к двумерному отображению. Наиболее общая модель может быть выбрана в форме осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = 0. \quad (144)$$

Для него, используя подход, изложенный в п.4.5, так же можно построить двумерное отображение, для чего, однако, следует использовать аналитическое решение в промежутке между импульсами, полученное с помощью метода медленно меняющихся амплитуд и соотношения (128). Приведем здесь конечный результат – двумерное отображение²¹

$$z_{n+1} = \frac{z_n e^{\lambda T/2 - i\psi_n}}{\sqrt{1 + |z_n|^2 \frac{e^{\lambda T} - 1}{4\lambda}}} + iB, \quad (145)$$

где $\psi_n = \frac{3}{2}\beta \ln \left| \frac{|z_n|^2}{4\lambda} (e^{\lambda T} - 1) + 1 \right|$ – набег фазы, связанный с нелинейностью по типу осциллятора Дуффинга, а C – амплитуда импульсов.

Карта динамических режимов отображения (145) приведена на рис.71. В левой части карты наблюдается картина языков, которые не имеют сложного внутреннего устройства. Их вершины выстроены вдоль границы области периода 1, которая в этом случае оказывается линией бифуркации Неймарка-Сакера. (Отметим в этом плане характерное расположение языка периода 3, который «заходит» за эту линию. Сравните с рис.62б, при таком сравнении учтите, что картина на рис.62 «перевернута».)

²¹ Вывод этого отображения можно найти в [19], см. также задачу к Приложению 2.

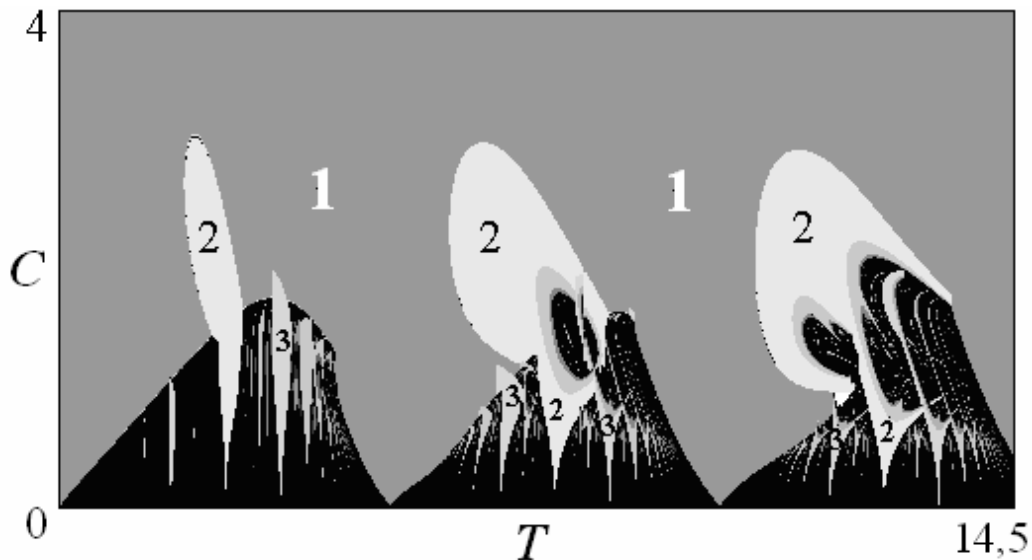


Рис.71. Карта динамических режимов двумерного отображения для осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга, $\beta=1$, $\lambda=0,2$.

Отличие от всех вариантов отображения окружности состоит в том, что карта теперь не периодична по T . Действительно, на рис.71 области между первым и вторым, вторым и третьим и т.д. языками периода 1 не совпадают. Причина этого проста. Если справедливо одномерное отображение, то в промежутке между импульсами точка успевает вернуться на предельный цикл. Тогда, если импульсы будут следовать через моменты времени $T = T_0$, $T = 2T_0$ и т.д., то динамика системы будет совершенно эквивалентной. (Здесь T_0 – период собственных колебаний.). В рассматриваемом случае точка не успевает вернуться на предельный цикл между первым и вторым импульсами, поэтому динамика оказывается принципиально двумерной, и для ее описания не достаточно только угловой координаты, а существенно и расстояние до предельного цикла.

Из приведенного рассуждения ясно, что чем реже следуют импульсы, тем ближе к предельному циклу приближается точка между ними, и тем лучше должна работать одномерная аппроксимация в виде отображения окружности. С точки зрения рис.71 это означает, что области в правой части карты могут быть описаны одномерным отображением.

Полезно получить такое отображение непосредственно из соотношения (145). Прежде всего, обсудим условие эффективности одномерной аппроксимации. Из предыдущего рассуждения вытекает, что чем реже следуют импульсы, тем лучше одномерная аппроксимация, т.е. необходимо, чтобы величина T была большой. С другой стороны, скорость приближения к предельному циклу управляется параметром λ , поэтому, чем он больше, тем быстрее изображающая точка выходит на предельный цикл. Как видно из (145), эти факторы вхо-

дят в виде произведения, так что необходимо, чтобы величина λT была большой.

В этом случае экспоненциальный член в (145) будет доминировать, и тогда

$$z_{n+1} = 2\sqrt{\lambda} \exp(-i\theta_n) + iB, \quad \theta_n = -\varphi_n + T + \psi_n, \quad (146)$$

где $\varphi_n = \arg z_n$ – угол, под которым изображающая точка на плоскости (x, y) видна из начала координат.

Умножение комплексного числа на $\exp(-i\theta)$ отвечает повороту на угол θ . Таким образом, динамика отображения, заданного формулой (146), может быть разбита на два этапа. Сначала изображающая точка, лежащая на окружности радиуса $2\sqrt{\lambda}$ (предельный цикл системы) и имеющая угловую координату $\varphi_n = \arg z_n$, поворачивается на угол $(T + \psi_n)$. Затем изображающая точка «поднимается» по оси ординат на величину B (мнимая добавка iB в (146).) Это точно такая же динамика, как и для случая отображения Гласса. Отличие стоит только в том, что вместо поворота на угол T , благодаря неизохронности системы Ван-дер-Поля – Дуффинга происходит поворот на угол $(T + \psi_n)$.

Поделив мнимую и действительную части соотношения (146), получим:

$$\operatorname{tg}\varphi_{n+1} = \frac{C - \sin\theta_n}{\cos\theta_n}, \quad (147)$$

где $C = B/2\sqrt{\lambda}$ – нормированная амплитуда воздействия. В свою очередь, из второго соотношения (146) следует $\varphi_{n+1} = -\theta_{n+1} + T + \psi_{n+1}$, так что из (147) получаем

$$\theta_{n+1} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\theta_n - C}{\cos\theta_n}\right) + T + \psi_{n+1}. \quad (148)$$

Осталось вычислить нелинейный набег фазы ψ_{n+1} . Из (145) с учетом условия, что $e^{\lambda T} \gg 1$, следует

$$\psi_{n+1} = \frac{3}{2}\beta\lambda T + \frac{3}{2}\beta \ln \frac{|z_{n+1}|^2}{4\lambda}. \quad (149)$$

Величину $|z_{n+1}|^2$ легко вычисляем из (146):

$$|z_{n+1}|^2 = (2\sqrt{\lambda} \cos\theta_n)^2 + (2\sqrt{\lambda} \sin\theta_n - B)^2 = 4\lambda(1 - 2C \sin\theta_n + C^2). \quad (150)$$

Собирая (148)-(150) вместе, получаем

$$\theta_{n+1} = \Omega + \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\theta_n - C}{\cos\theta_n}\right) + \frac{3}{2}\beta \ln|1 - 2C \sin\theta_n + C^2|. \quad (151)$$

Здесь $\Omega = T(1 + \frac{3}{2}\beta\lambda)$ – параметр, пропорциональный периоду воздействия. Соотношение (151) и есть искомое одномерное отображение.

Карта динамических режимов этого отображения для $\beta=1$ показана на рис.72а. Нетрудно видеть, что представленный рисунок визуально аналогичен правой части карты на рис.71. Это и подтверждает эффективность одномерного отображения. При этом параметр $\lambda=0,2$, т.е. достаточно мал. Понятно, что если увеличивать λ , то для двумерного отображения картина будет близка к рис.72а для все большей области на карте (задача 1).

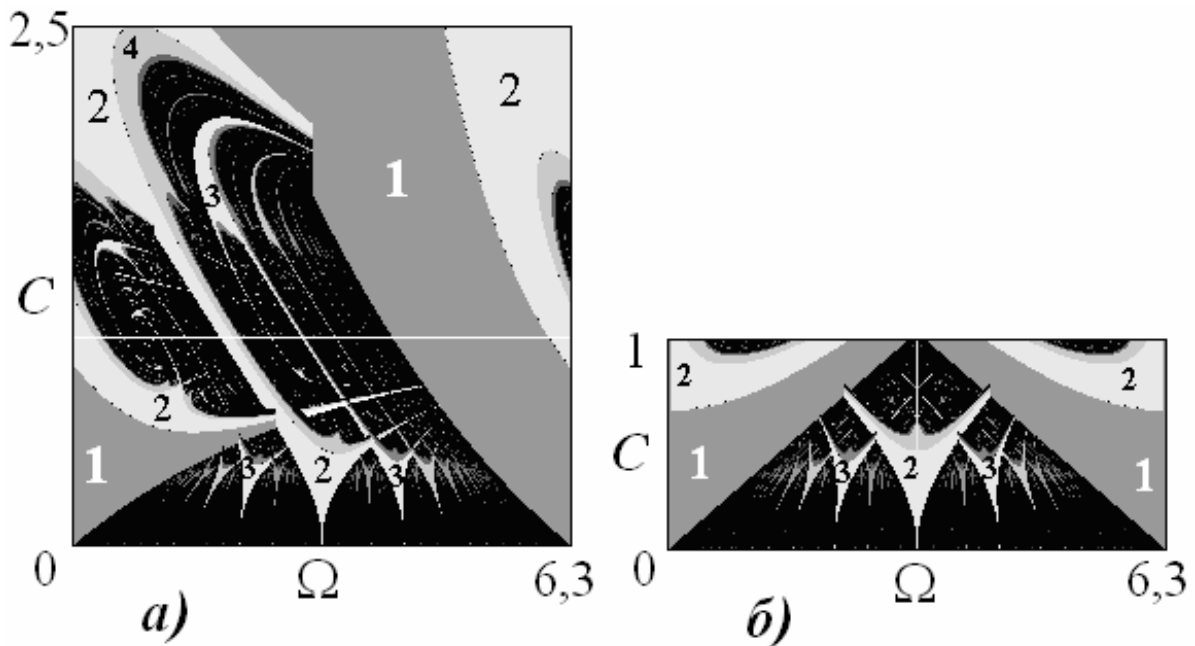


Рис.72. Карта динамических режимов обобщенного отображения окружности в случае большой фазовой нелинейности $\beta=1$ (а). Справа (б) - карта динамических режимов синус-отображения окружности (151).

Проанализируем теперь некоторые частные случаи. Если исходная система представляет собой осциллятор Ван-дер-Поля, то $\beta = 0$ и (151) превращается в отображение Гласса. Таким образом, отображение Гласса приближенно описывает систему Ван-дер-Поля с импульсным возбуждением.

Пусть теперь параметр нелинейности β , характеризующий неизохронность колебаний осциллятора, велик. Если амплитуда воздействия C невелика, то $\arctg(\frac{\sin\theta_n - C}{\cos\theta_n}) \approx \theta_n$. Кроме того, можно воспользоваться приближенным соотношением $\ln(1+x) \approx x$. Тогда из (151) получаем:

$$\theta_{n+1} = \Omega + \theta_n - 3\beta C \sin\theta_n. \quad (152)$$

Мы получили стандартное синус-отображение окружности, свойства кото-

рого подробно обсуждены в части III.

Итак, отображение Гласса и стандартное синус-отображение окружности являются эталонными моделями, причем первая из них относится к изохронным системам, а вторая – к существенно неизохронным, для которых заметно влияние нелинейности (типа осциллятора Дуффинга) на период колебаний. При этом отображение (151) можно назвать *обобщенным отображением окружности*.

На рис.72 показаны рядом карты обобщенного отображения окружности (151) при $\beta=1$ и стандартного синус-отображения окружности (152). Из рисунка хорошо видно, что при $C < 1$ картинка визуально идентична. В тоже время при больших амплитудах воздействия можно наблюдать и существенные отличия. Так, картина для обобщенного отображения имеет некоторые черты, характерные для отображения Гласса. Например, в левом верхнем углу рисунка располагается область цикла периода 2, которая «сопряжена» с соответствующим языком синхронизации. При этом удвоения периода могут наблюдаться при выходе из этой области с уменьшением амплитуды воздействия, что характерно как раз для отображения Гласса. Отметим, что эта область и язык синхронизации периода 2 объединяются через структуру *crossroad area* на базе цикла периода 2.

Задачи

1. Постройте увеличенный фрагмент рис.71 в области линии бифуркации Неймарка-Сакера.

2. Постройте карту динамических режимов двумерного отображения для осциллятора Ван-дер-Поля с импульсным возбуждением для $\lambda=1$. Какие наблюдаются изменения по сравнению с рис.71?

3. Постройте карту динамических режимов для обобщенного отображения окружности для $\beta=0,3$ и сравните результат со случаями стандартного синус-отображения окружности и отображения Гласса.

4.9. Дискретные осцилляторы

Существует еще один прием построения отображений, опирающийся на свойства осцилляторов. Он состоит в следующем. Пусть имеется осциллятор общего вида

$$\ddot{x} + g(\dot{x}, x) + f(x) = 0. \quad (153)$$

Это уравнение можно переписать в виде двумерной динамической системы:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -g(y, x) - f(x).\end{aligned}\tag{154}$$

Простейший метод численного решения такой системы (*метод Эйлера*) состоит в том, что выполняется следующая аппроксимация производных

$$\begin{aligned}\dot{x} &\rightarrow (x_{n+1} - x_n) / \varepsilon, \\ \dot{y} &\rightarrow (y_{n+1} - y_n) / \varepsilon,\end{aligned}\tag{155}$$

где ε – параметр, представляющий собой шаг интегрирования.

Посмотрим теперь на процедуру (155) иначе. Из (154) и (155) получаем

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \varepsilon y_n, \\ y_{n+1} &= y_n - \varepsilon g(y_n, x_n) - \varepsilon f(x_n),\end{aligned}\tag{156}$$

Формулы (156), задают, фактически, некоторую новую динамическую систему в форме отображения. При этом параметр ε можно считать уже не малым. Этот метод оказывается весьма эффективным с позиций построения моделей с новыми свойствами²². При этом динамика полученных отображений, с одной стороны, наследует основные свойства прототипа, а с другой – оказывается существенно более богатой. Мы будем называть этот метод *методом искусственной дискретизации*.

При его применении оказывается удобным использовать *полуявную схему Эйлера*, так что

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \varepsilon y_{n+1}, \\ y_{n+1} &= y_n - \varepsilon g(y_n, x_n) - \varepsilon f(x_n).\end{aligned}\tag{157}$$

Ее преимущество состоит в том, что если порождающая дифференциальная система представляет собой консервативный осциллятор, то отображение также оказывается консервативным (задача 1).

Приведем некоторые примеры. Так если применить процедуру дискретизации к осциллятору Дуффинга (125), то получаем отображение

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \varepsilon y_{n+1}, \\ y_{n+1} &= y_n - \varepsilon(\gamma y_n + x_n + \beta x_n^3).\end{aligned}\tag{158}$$

Применяя тот же прием к уравнению (126), можно получить дискретный осциллятор Ван-дер-Поля

²² Такой метод использовали в своих работах одни из создателей теории стохастических колебаний Г.М.Заславский, Б.В. Чириков и другие авторы.

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \varepsilon y_{n+1}, \\y_{n+1} &= y_n + \varepsilon(\lambda y_n - x_n^2 y_n - x_n).\end{aligned}\tag{159}$$

Карта динамических режимов отображения (159) на плоскости (ε, λ) показана на рис.73.

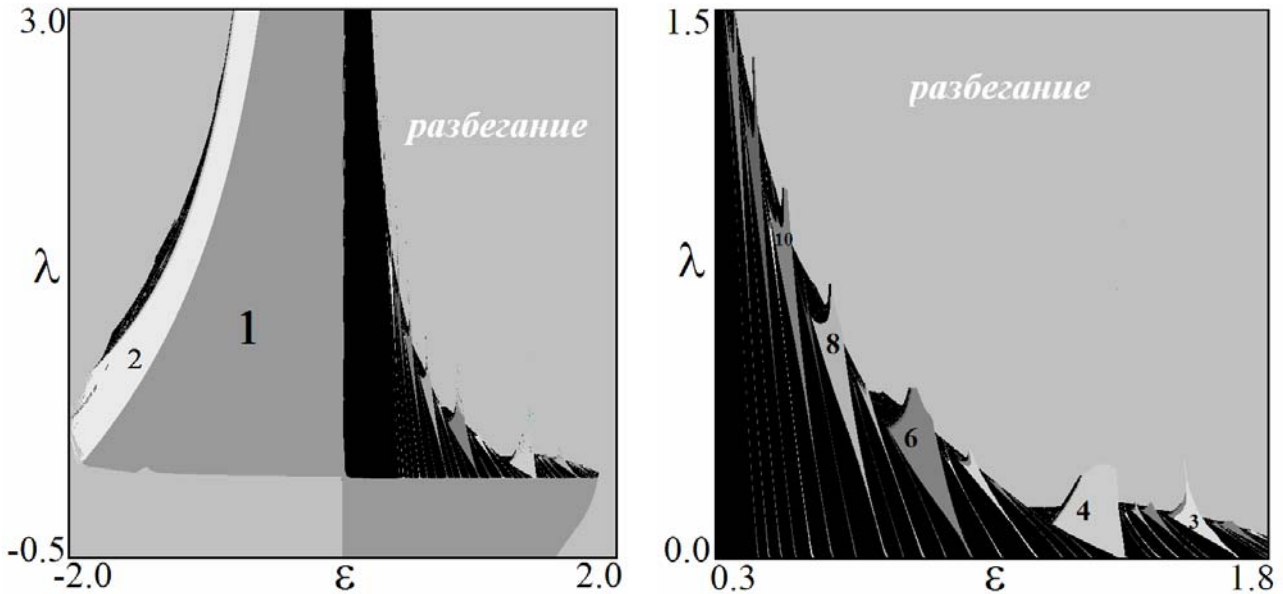


Рис.73. Карта динамических режимов дискретного осциллятора Ван-дер-Поля (158) и ее увеличенный фрагмент

В исходном уравнении (126) условие $\lambda = 0$ отвечает бифуркации рождения автоколебаний (бифуркации Андронова-Хопфа). Действительно, осциллятор (126) при $\lambda > 0$ характеризуется отрицательным трением.

В дискретном осцилляторе (159) равенство $\lambda = 0$ превращается в условие бифуркации Неймарка-Сакера (задача 6). Выше этой линии возможны квазипериодические режимы со встроенной системой языков Арнольда, что хорошо видно на увеличенном фрагменте карты.

При построении рис.73 использовались как положительные, так и отрицательные значения параметра дискретизации ε . При этом следует иметь в виду, что отрицательным ε отвечает обращение времени в исходном уравнении – прототипе (126). В области $\varepsilon < 0$ можно видеть удвоения периода с переходом к хаосу по Фейгенбауму.

Задачи

1. Рассмотрите консервативный осциллятор, для которого $g(x, y) = 0$. Получите для него отображение, используя полуявную схему Эйлера, и покажите, что его якобиан равен единице.

2. Покажите, что искусственная дискретизация уравнения $\dot{x} = a - x^2$, известного в теории бифуркаций как основная модель бифуркации седло-узел, приводит к логистическому отображению.

3. Для модели бифуркации «трехкратное равновесие» $\dot{x} = a + bx + x^3$, покажите, что искусственная дискретизация приводит к кубическому отображению.

4. Одна из моделей теории бифуркаций

$$\ddot{x} - (\alpha - \beta x)\dot{x} + x - x^2 = 0, \quad (160)$$

демонстрирует бифуркацию Богданова-Такенса. Получите соответствующий дискретный осциллятор (отображение Богданова) и постройте карту динамических режимов.

5. Найдите условие бифуркации удвоения периода неподвижной точки в дискретном осцилляторе Дуффинга

6. Найдите условие бифуркации Неймарка-Сакера неподвижной точки в дискретном осцилляторе Ван-дер-Поля.

4.10. Связанные отображения

Еще один прием «конструирования» отображений состоит в рассмотрении связанных отображений. В этом случае можно говорить, например, о биологической интерпретации в виде сосуществования двух популяций, эволюция которых во времени связана друг с другом. Понятно, что в этом случае мы перейдем к описанию динамики системы уже с помощью двумерного отображения.

Заметим, что связь между отображениями может быть введена по-разному и от этого, вообще говоря, зависит динамика системы. Мы здесь выберем связь самым простым образом: через разность динамических переменных связанных систем. Мы выберем ситуацию, когда связанными оказываются два логистических отображения

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda_1 - x_n^2 + \varepsilon(x_n - y_n), \\ y_{n+1} &= \lambda_2 - y_n^2 + \varepsilon(y_n - x_n). \end{aligned} \quad (161)$$

На рис.74 показана карта режимов системы (161) на плоскости управляющих параметров подсистем (λ_2, λ_1) и ее увеличенный фрагмент. Области хаоса и квазипериодической динамики показаны белым цветом, чтобы лучше визуализировать наблюдаемые структуры.

Если фиксировать небольшое значение одного из управляющих параметров, например λ_2 и увеличивать другой, то будут наблюдаться удвоения пе-

риода с переходом к хаосу по Фейгенбауму. Иная картина наблюдается, если параметры λ_1 и λ_2 отличаются не сильно. Тогда после двух удвоений возникает область квазипериодического поведения со встроенными в нее языками Арнольда. Два наиболее крупных языка расположены на рис.74 симметрично относительно диагонали. Им отвечает соотношение периода цикла, на базе которого они возникли, и собственного периода, равное $1/3$, поэтому на карте они отвечают периоду 12. Языки выстроены вдоль границы области периода 4, которая является линией бифуркации Неймарка-Сакера.

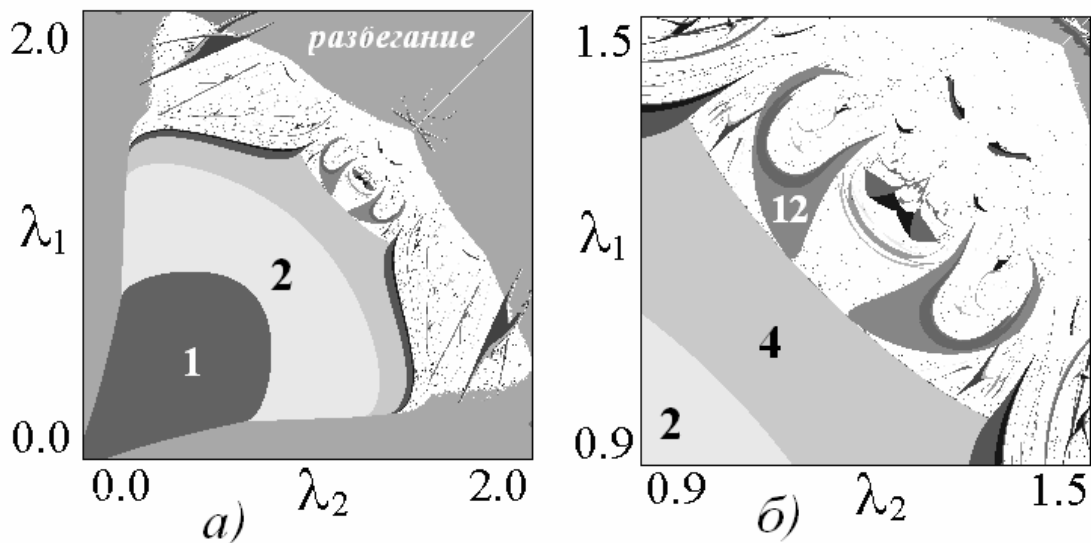


Рис.74. Карта динамических режимов и ее увеличенный фрагмент для связанных логистических отображений на плоскости их управляющих параметров, константа связи $\epsilon = 0.4$. Области хаоса и квазипериодической динамики показаны белым цветом.

Таким образом, введение связи между системами с удвоениями периода может приводить к квазипериодической динамике, при этом квазипериодическим режимам и режимам синхронизации может предшествовать картина нескольких удвоений периода. В силу распространенности и универсальности удвоений периода этот факт так же является универсальным.

На рис.75 представлены фазовые портреты системы в избранных точках плоскости параметров в окрестности наиболее крупного языка синхронизации. Здесь цифры обозначают соответствующие точки на плоскости параметров. На вставке 1 мы видим четыре замкнутые кривые: именно такую форму имеет аттрактор в этой системе. Это инвариантная кривая, возникшая на базе 4-цикла. Изображающая точка в этом случае последовательно посещает четыре «ветви» кривой; при своем движении она, однако, всюду плотно заполняет соответствующие части аттрактора.

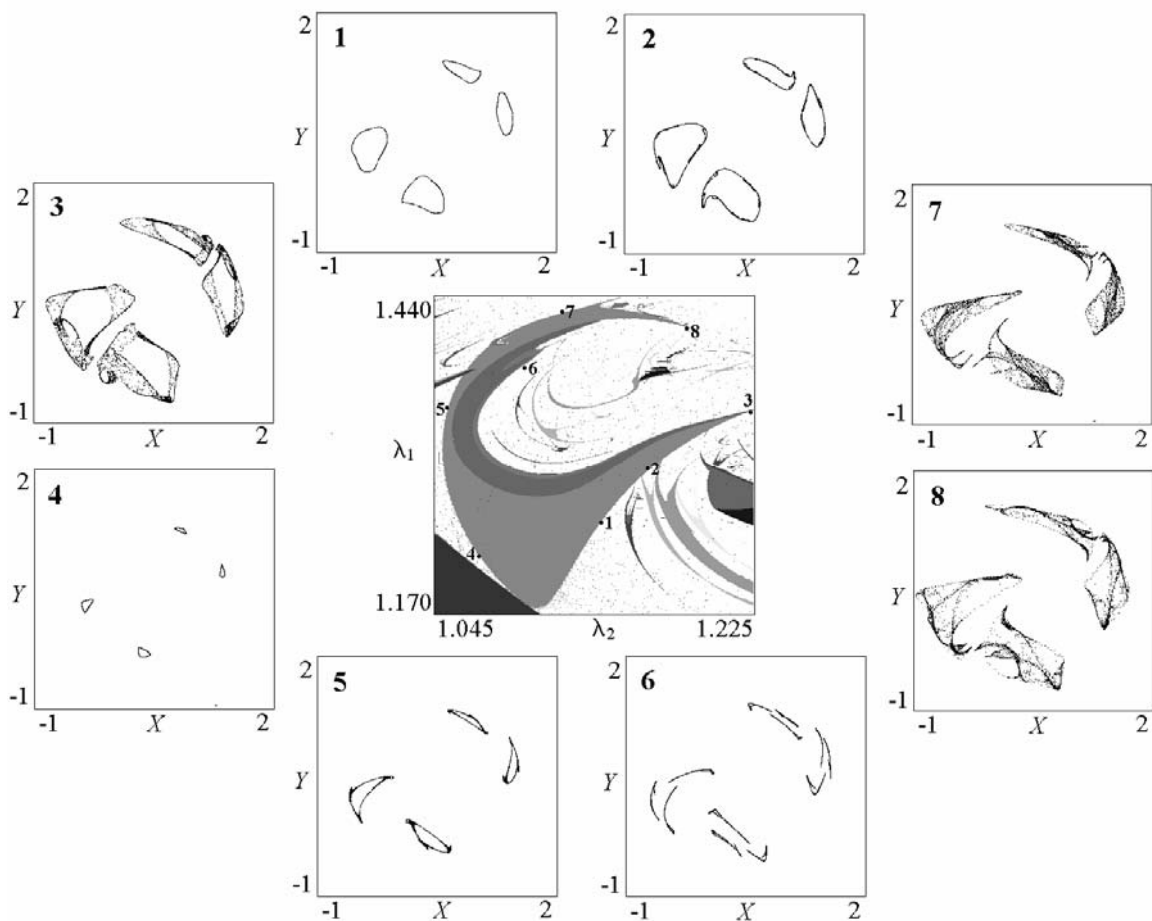


Рис.75. Фазовые портреты аттракторов системы связанных логистических отображений в различных точках плоскости параметров (λ_2, λ_1) , $\varepsilon = 0,4$. Области хаоса и квазипериодической динамики показаны белым цветом.

При движении вдоль границы языка в направлении области хаоса можно обнаружить искажение формы инвариантной кривой и ее разрушение через *потерю гладкости*, как и для примера, рассмотренного в п.2.5. Этот эффект иллюстрирует фазовый портрет на вставке 2. Таким образом, это, наряду с удвоениями периода, еще один из классических *сценариев перехода к хаосу*, характерный для систем с квазипериодическими режимами. Далее на вставках можно видеть разнообразные хаотические аттракторы, возможные в рассматриваемой системе.

Задача

Проследите метаморфозы карты динамических режимов связанных логистических отображений при вариации параметра связи.

Приложение 1. Отображения и ряд Тейлора

При обсуждении одномерных отображений мы последовательно рассматривали примеры со все более сложным поведением: сначала линейное отображение, затем квадратичное (логистическое), а затем – кубическое. Построение такой системы моделей можно обосновать более строго с использованием *разложения в ряд Тейлора*.

Пусть имеется некоторая функция $y = f(x)$. Тогда она может быть представлена в окрестности некоторой точки x_0 с помощью ряда Тейлора²³: Для простоты поместим начало системы координат в эту точку. Тогда

$$y = f_0 + f'_0 \cdot x + \frac{1}{2} f''_0 \cdot x^2 + \frac{1}{6} f'''_0 \cdot x^3 + \frac{1}{24} f^{IV}_0 \cdot x^4 + \dots + \frac{1}{n!} f_0^{(n)} x^n + \dots \quad (\text{П1})$$

Здесь f_0 – значение функции в начале координат, а f'_0, f''_0, f'''_0 и т.д. – первая, вторая, третья и т.д. производные, вычисленные в этой точке.

Чем больше членов ряда Тейлора сохранить, тем более точно описывается функция в окрестности начала координат. Этот факт имеет простой геометрический смысл. Если сохранить только линейный член, т.е. $y = f_0 + f'_0 \cdot x + \dots$, то мы заменяем функцию касательной. Если удерживать члены до квадратичного включительно, то функция аппроксимируется более точно – квадратичной параболой. Если удерживать кубический член, то аппроксимация станет еще более точной. Одновременно расширяется область, в которой аппроксимация эффективна.

Поскольку отображения задаются в общем виде некоторыми функциями: $x_{n+1} = f(x_n)$, то подход на основе ряда Тейлора оказывается эффективным для построения и классификации отображений.

Действительно, если ограничиться линейным членом в формуле Тейлора, то получим

$$x_{n+1} = f_0 + f'_0 \cdot x_n. \quad (\text{П2})$$

Обозначая $a = f_0$ и $b = f'_0$, получаем линейное отображение (16), исследованное в п.1.2:

$$x_{n+1} = a + b x_n. \quad (\text{П3})$$

Учтем следующий член ряда Тейлора:

$$x_{n+1} = f_0 + f'_0 \cdot x_n + \frac{1}{2} f''_0 \cdot x_n^2. \quad (\text{П4})$$

²³ При этом функция должна, строго говоря, удовлетворять некоторым условиям, например, не иметь разрывов. Здесь для нас здесь достаточно интуитивного представления о «гладкости» функции.

Мы получили квадратичное отображение, в которое входит уже три коэффициента, и которые удобно обозначит через A, B, C :

$$x_{n+1} = A + Bx_n + Cx_n^2. \quad (\text{П5})$$

Оказывается, однако, что изменением масштаба переменной и сдвигом начала координат их число можно сократить до одного. Для этого используем замену переменной типа сдвига, которая позволяет устранить линейный член: $x \rightarrow x - \frac{B}{2C}$. В результате получаем:

$$x_{n+1} = D + Cx_n^2, \quad (\text{П6})$$

где $D = A + \frac{B}{2C} - \frac{B^2}{4C}$. Теперь изменим масштаб переменной, так что $x \rightarrow \alpha x$:

$$x_{n+1} = \frac{D}{\alpha} + C\alpha x_n^2. \quad (\text{П7})$$

Нетрудно видеть, что подбором параметра $\alpha = D$ это отображение приводится к виду

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad (\text{П8})$$

где $\lambda = -CD$. Таким образом, мы получили логистическое отображение.

Такой анализ можно продолжить и удержать в разложении в ряд члены до кубического включительно:

$$x_{n+1} = f_0 + f'_0 \cdot x_n + \frac{1}{2} f''_0 \cdot x_n^2 + \frac{1}{6} f'''_0 \cdot x_n^3, \quad (\text{П9})$$

или

$$x_{n+1} = A + Bx_n + Cx_n^2 + Dx_n^3. \quad (\text{П10})$$

Действуем аналогично: заменой типа сдвига $x \rightarrow x - \frac{C}{3D}$ устраняем квадратичный член:

$$x_{n+1} = E + Gx_n + Dx_n^3, \quad (\text{П11})$$

где $E = A - \frac{BC}{3D} + \frac{2C^3}{27D^2}$, $G = B - \frac{C^2}{3D}$. Затем изменяем масштаб $x \rightarrow \alpha x$:

$$x_{n+1} = \frac{E}{\alpha} + Gx_n + D\alpha^2 x_n^3. \quad (\text{П12})$$

Если выбрать $\alpha = 1/\sqrt{|D|}$, и ввести обозначения $a = E\sqrt{D}$, $b = G$, то приходим к кубическому отображению

$$x_{n+1} = a + bx_n \pm x_n^3. \quad (\text{П13})$$

(Отметим, что «спрятать» знак перед кубическим членом нельзя, потому что

переменная x нормируется на величину $\alpha = 1/\sqrt{|D|}$, которая всегда положительна. При этом знак выбирается в соответствии со знаком D .)

Итак, мы имеем систему моделей, первой строкой в которой стоит линейное отображение, затем квадратичное, затем, кубическое. Ясно, что этот ряд можно продолжить. Нетрудно уже просто «угадать» вид *трехпараметрического* отображения:

$$x_{n+1} = a + bx_n + cx_n^2 + x_n^4. \quad (\text{П14})$$

Здесь следует сделать одно существенное замечание. Если исходная функция $f(x)$ задана, то коэффициенты ряда Тейлора – это некоторые числа. Если она зависит от параметра (параметров), то эти коэффициенты сами будут некоторыми функциями этих параметров. Представленный здесь подход интересен в том плане, что можно рассматривать λ или a, b и т.д. как *новые параметры*. При этом, если мы изучим поведение полученных отображений при всех их значениях, то мы, в определенной мере, получим полную картину явлений в одно, двух, трех и более параметрических отображениях. Такой подход не столь очевиден, как может показаться, но он замечателен тем, что позволяет понять универсальность получаемых результатов. В рамках такого похода в рассмотрение вводится система универсальных моделей со все более сложным поведением, при этом возрастает число существенных параметров, от которого это поведение зависит. Это очень важный принцип теории бифуркаций. Минимальное для данного типа поведения число существенных параметров в теории бифуркаций носит специальное название – *коразмерность*.

Задача

Проведите аккуратный вывод отображения $x_{n+1} = a + bx_n + cx_n^2 + x_n^4$, исходя из разложения Тейлора четвертой степени.

Приложение 2. Метод медленно меняющихся амплитуд

Нелинейные уравнения осциллятора Дуффинга и Ван-дер-Поля могут быть решены приближенно в рамках квазигармонического приближения, когда влияние нелинейности невелико и колебания можно представить как близкие к линейным, но с медленно меняющимися амплитудами и фазами. Соответствующий метод известен как метод медленно меняющихся амплитуд (или метод Ван-дер-Поля). Мы кратко изложим его канву, однако, для дальнейшего он не столь важен и при желании можно опираться на соответствующие решения просто как на готовые «справочные» формулы.

Для уравнения осциллятора Дуффинга (125) нормировка выбрана так, что собственная частота линейных колебаний равна единице. В соответствии с этим представим координату осциллятора x в виде:

$$x = \frac{a}{2} e^{it} + \frac{a^*}{2} e^{-it}. \quad (\text{П15})$$

Здесь $a(t)$ – комплексная амплитуда, медленно меняющаяся на фоне колебаний с единичной частотой.

Поскольку мы ввели, фактически, две новых функции $a(t)$ и $a^*(t)$, то на них можно наложить дополнительное условие, которое традиционно имеет вид

$$\dot{a} e^{it} + \dot{a}^* e^{-it} = 0. \quad (\text{П16})$$

Тогда для скорости получаем

$$\dot{x} = \frac{1}{2} (i a e^{it} - i a^* e^{-it}). \quad (\text{П17})$$

Теперь необходимо подставить (П15) и (П17) в исходное уравнение (125). С этой целью вычислим вторую производную

$$\ddot{x} = \frac{1}{2} (i \dot{a} e^{it} - a e^{it} - i \dot{a}^* e^{-it} - a e^{-it}). \quad (\text{П18})$$

С учетом дополнительного условия (П14) можно получить, что

$$\frac{1}{2} (i \dot{a} e^{it} - i \dot{a}^* e^{-it}) = \frac{1}{2} (i \dot{a} e^{it} - i \omega \dot{a}^* e^{-it}) = i \dot{a} e^{it}. \quad (\text{П19})$$

Тогда имеем

$$\ddot{x} + x = i \dot{a} e^{it}. \quad (\text{П20})$$

Подставим теперь все полученные выражения в исходное соотношение (125). Следуя логике метода медленно меняющихся амплитуд, сохраним только члены, содержащие экспоненциальный множитель вида e^{it} . Остальные на этом фоне являются быстро осциллирующими и исчезают при усреднении за период воздействия. Тогда

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x &= i \dot{a} e^{it}, \\ \dot{x} &= \frac{1}{2} i a e^{it} + \dots, \end{aligned} \quad (\text{П21})$$

$$x^3 = \frac{1}{8} [a^3 e^{3it} + 3a^2 a^* e^{it} + 3(a^*)^2 a e^{-it} + (a^*)^3 e^{-3i\omega t}] = \frac{3}{8} |a|^2 a e^{it} + \dots$$

В результате приходим к так называемому *укороченному уравнению* для осциллятора Дуффинга:

$$\dot{a} = -\frac{\gamma}{2} a + \frac{3}{8} i \beta |a|^2 a. \quad (\text{П22})$$

Введем теперь действительную амплитуду $R(t)$ и фазу $\varphi(t)$ с помощью соотношения

$$a(t) = R(t)e^{i\varphi(t)}. \quad (\text{П23})$$

Подставим выражение для $a(t)$ в укороченное уравнение (П22) и выделим в нем действительную и мнимую части. Тогда для действительных амплитуды и фазы получим:

$$\dot{R} = -\frac{\gamma}{2}R, \quad \dot{\varphi} = \frac{3}{8}\beta R^2. \quad (\text{П24})$$

Эти уравнения допускают могут быть проинтегрированы аналитически:

$$R(t) = R_n e^{-\gamma t/2}, \quad \varphi(t) = \frac{3}{8}\beta R_n^2 \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} + \varphi_n, \quad (\text{П25})$$

где R_n и φ_n - начальные амплитуда и фаза сразу после n -го импульса.

Из полученных соотношений можно найти выражения, задающие зависимости координаты $x(t)$ и скорости $v(t)$ осциллятора от времени:

$$\begin{aligned} x(t) &= R(t) \cos[t + \varphi(t)], \\ \dot{x}(t) &= -R(t) \sin[t + \varphi(t)]. \end{aligned} \quad (\text{П26})$$

Тогда через интервал времени T получаем

$$\begin{aligned} x(T) &= R(T) \cos[T + \varphi(T)], \\ \dot{x}(T) &= -R(T) \sin[T + \varphi(T)]. \end{aligned} \quad (\text{П27})$$

Используя решения для амплитуды и фазы (П25), получаем выражения для координаты и скорости осциллятора:

$$x(T) = R_n e^{-\gamma T/2} \cos\left(T + \frac{3}{8}\beta R_n^2 \frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma} + \varphi_n\right), \quad (\text{П27})$$

$$\dot{x}(T) = -R_n e^{-\gamma T/2} \sin\left(T + \frac{3}{8}\beta R_n^2 \frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma} + \varphi_n\right). \quad (\text{П28})$$

При этом начальные амплитуда и фаза связаны с начальными значениями координаты и скорости соотношениями

$$x_n = R_n \cos \varphi_n, \quad \dot{x}_n = -R_n \sin \varphi_n. \quad (\text{П29})$$

Задача

С помощью метода медленно меняющихся амплитуд покажите, что укороченные уравнения для осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга (143) имеют вид:

$$\dot{a} = \frac{\lambda}{2}a - \frac{1}{8}|a|^2 a + \frac{3}{8}i\beta|a|^2 a.$$

Запишите их для действительных амплитуды и фазы и решите аналитически. С помощью полученного решения получите отображение (145).

Дополнительная литература

О сложной динамике, хаосе, бифуркациях, отображениях можно почитать

1. Берже П., Помо И., Видаль К. *Порядок в хаосе*. М.: Мир, 1991, 368с.

2. Шустер Г. *Детерминированный хаос*. М.: Мир, 1990, 240с.

3. Мун Ф. *Хаотические колебания*. М.: Мир, 1990, 312с.

4. Кузнецов С.П. *Динамический хаос*. М.: Физматлит, 2001, 296с.

5. Постнов Д.Э. *Введение в динамику итерировуемых отображений*. Саратов, изд-во СГУ, 2008, 160с.

Представление об осцилляторах Дуффинга и Ван-дер-Поля, методе медленно меняющихся амплитуд можно получить из большинства учебников по теории колебаний, в частности,

6. Ланда П.С. *Нелинейные колебания и волны*. М.: Наука, 1997. 495 с.

7. Ланда П.С. *Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы*. М.: Наука, 1980, 360с.

8. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. *Нелинейные колебания*. М.: Физматлит, 2002, 292с.

О явлении синхронизации кроме этих книг можно рекомендовать²⁴

9. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление*. М.: Техносфера, 2003. 494 с.

Примеры карт динамических режимов и ляпуновских показателей различных отображений (а также систем, описываемых дифференциальными уравнениями) в цветной графике доступны на Интернет–ресурсе

10. *Атлас динамических режимов карт*

<http://sgtnd.narod.ru/science/atlas/rus/index.htm>

Различные примеры отображений, в частности с бифуркацией Неймарка-Сакера, а также трехмерных отображений можно найти на

11. *Интернет-странице Ж.Спротта (J. Sprott)*

<http://sprott.physics.wisc.edu/pubs.htm>

12. *Интернет-странице Д.Галласа (J. Gallas)*

<http://www.if.ufrgs.br/~jgallas/OFICINA/quinq12-08.html>

Одномерное отображение возбуждаемого нелинейного осциллятора введе-

²⁴ Большинство этих книг доступно в Интернете.

13. Безручко Б.П. *Нелинейные маятники и их модели. Соросовский образовательный журнал*, 2000, № 9, с. 95-102.

Универсальное двумерное отображение введено и обсуждается в

14. Кузнецов А.П., Кузнецова А.Ю., Сатаев И.Р. *О критическом поведении отображения с бифуркацией Неймарка – Сакера при разрушении фазовой синхронизации в предельной точке фейгенбаумовского каскада. Известия вузов – Прикладная нелинейная динамика*, 2003, №1, с. 12-18.

Отображение Икеды было введено в работе

15. Ikeda K., Daido H., Akimoto O. *Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity. Phys. Rev. Lett.*, 1980, Vol.45, p709.

Для возбуждаемого импульсами осциллятора Дуффинга отображение Икеды получено и обсуждается в

16. Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. *Динамические системы разных классов как модели нелинейного осциллятора с импульсным воздействием. Известия вузов – Прикладная нелинейная динамика*, 2000, №2, с.31-42.

Отображение Гласса получено и исследовано в

17. Glass L., Sun J. *Periodic forcing of a limit-cycle oscillator: Fixed points, Arnold tongues, and the global organization of bifurcations. Phys. Rev.*, 1994, Vol.50, № 6, p.5077-5084.

18. Ding E.J. *Analytic treatment of a driven oscillator with a limit cycle. Phys. Rev.*, 1987, Vol.A35, № 6, p.2669-2683.

Отображение для возбуждаемого импульсами осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга и обобщенное отображение окружности получены и исследованы в

19. Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. *Синхронизация автоколебательной системы Ван дер Поля – Дуффинга короткими импульсами. Известия вузов – Прикладная нелинейная динамика*, 2004, №5, с. 16-31.

Об аппроксимации иррациональных чисел рациональными и рядах Фарей можно почитать

20. Нестеренко Ю.В., Никишин Е.М. *Очерк о цепных дробях, Квант*, 1983, №5, с.16-20.

21. Бескин Н.М. *Цепные дроби и календарь, Квант*, 1970, №1, с.16-26.

22. Вагутен В.Н. *Близкие дроби. Квант*, 1985, №8, с. 33-39.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
Часть I. Одномерные отображения	7
1.1. Дискретизация физических величин и отображения	8
1.2. Итерационные диаграммы, линейные отображения, неподвижные точки	10
1.3. Неустойчивость	16
1.4. Нелинейные отображения и анализ устойчивости	17
1.5. Логистическое отображение и бифуркационное дерево	22
1.6. Бифуркации	29
1.7. Законы Фейгенбаума	30
1.8. Шум и бифуркационное дерево	32
1.9. Ляпуновский показатель	33
1.10. Отображения с двумя параметрами	38
1.11. Карты динамических режимов	39
1.12. Итерационные диаграммы двухпараметрических отображений	45
1.13. Карта ляпуновского показателя	47
Часть II. Двумерные отображения	51
2.1. Отображение «прыгающего шарика»	52
2.2. Отображение Эно	58
2.3. Фазовое пространство и аттракторы	61
2.4. Карты динамических режимов двумерных отображений и фазовые портреты	66
2.5. Аттрактор – инвариантная кривая	68
Часть III. Синхронизация в терминах дискретных отображений	73
3.1. Генератор пилообразных колебаний с модулируемым порогом срыва	74
3.2. Синус-отображение окружности	76
3.3. Описание синхронизации с помощью отображения окружности	79
3.4. Итерационные диаграммы синус-отображения окружности	83
3.5. Иррациональные и рациональные числа вращения	85
3.6. Критическая линия и лестница чисел вращения	87
3.7. Отображение окружности и ляпуновский показатель	89
3.8. Картина квазипериодических режимов в эксперименте и ряды Фарея	90
3.9. Внутренняя синхронизация и бифуркация Неймарка-Сакера	93
Часть IV. «Коллекция» отображений	97
4.1. Отображение Эно	98
4.2. Отображение Холмса	99

4.3. Универсальное двумерное отображение	100
4.4. Возбуждение нелинейных колебаний	103
4.5. Нелинейные и автоколебательные осцилляторы и отображения	105
4.6. Отображение Икеды	108
4.7. Автоколебательный осциллятор с внешним воздействием – отображение Гласса	112
4.8. Автоколебательный осциллятор с внешним воздействием	115
4.9. Дискретные осцилляторы	119
4.10. Связанные отображения	122
Приложение 1. Отображения и ряд Тейлора	125
Приложение 2. Метод медленно меняющихся амплитуд	127
Дополнительная литература	130

Учебное пособие

*Кузнецов Александр Петрович
Савин Алексей Владимирович
Тюрюкина Людмила Владимировна*

ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ НЕЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пособие издано в авторской редакции.
Ответственный за выпуск А.В. Савин

Подписано в печать 16.03.2010 г.
Формат 60x80 1/16. Бумага Снегурочка. Гарнитура Times New Roman.
Усл.-печ. л. 8,38(9,22). Тираж 100 экз.

Издательство «Научная книга» 410031, Саратов, ул. Московская, д.35