

**А.П. Кузнецов, А.В. Савин
Ю.В. Седова, Л.В. Тюрюкина**

***БИФУРКАЦИИ
ОТОБРАЖЕНИЙ***

ООО Издательский центр «Наука»
Саратов
2012

УДК 530.77

К89

Кузнецов А.П., Савин А.В., Седова Ю.В., Тюрюкина Л.В.

Бифуркации отображений – Саратов: ООО Издательский центр «Наука», 2012, 196 с.

Учебно-научное издание

Представлено введение в теорию бифуркаций отображений. Обсуждаются свойства основных бифуркаций. Даны различные примеры. Изложение ведется с «физических» позиций, так что выбираются простейшие модели, для которых проводится комплексное рассмотрение, включая аналитический поиск бифуркаций, иллюстрации в виде карт динамических режимов и карт ляпуновских показателей и т.д. Представлены задачи по всем разделам. Будет полезна студентам, аспирантам и преподавателям как пособие в области нелинейной динамики и теории динамических систем.

Использованы материалы, полученные при выполнении проектов РФФИ № 11-02-91334-ННЮа и № 12-02-00342а

ISBN 978-5-9999-1185-8

Рекомендуют к печати:

Базовая кафедра динамических систем Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского,
к.ф.-м.н. Сатаев И.Р.

Оригинал-макет подготовлен авторами

© Кузнецов А.П., Савин А.В., Седова Ю.В., Тюрюкина Л.В., 2012

ISBN 978-5-9999-1185-8

Слово «бифуркация» означает «раздвоение»
и употребляется как название любого
скачкообразного изменения,
происходящего при плавном
изменении параметров
в любой системе:
динамической, экологической и т. д.
В.И. Арнольд

Предисловие

Настоящее пособие является продолжением книги А.П. Кузнецов, А.В. Савин, Л.В. Тюрюкина «Введение в физику нелинейных отображений», в которой были рассмотрены основные понятия теории одномерных и двумерных отображений, представлены разнообразные физические примеры и даны соответствующие иллюстрации. В настоящем пособии более подробно обсуждаются *бифуркации отображений*. При этом в рассмотрение вводятся также и системы с более высокой размерностью фазового пространства: трехмерные и четырехмерные отображения. В то же время, изложенный материал представляет собой «взгляд физика». Это выражается, прежде всего, в выборе моделей – это не нормальные формы каждой бифуркации, что наиболее принято в математике, а *простейшие* модели, которые могут быть легко *сконструированы* из тех или иных достаточно простых соображений. Мы вводим характерную для теории бифуркаций терминологию, включая такие понятия, как *коразмерность* и др., считая их очень важными для физики. По этой же причине мы не ограничиваемся формальным анализом бифуркаций, а даем разнообразные иллюстрации, такие, как карты динамических режимов и ляпуновские карты, которые позволяют исследовать динамические системы хотя и не столь строго, но в стиле «компьютерного эксперимента», дающего существенную информацию о динамике системы в целом. Одна из особенностей изложения состоит в последовательном подходе, рассматривающем инварианты матриц возмущения соответствующих отображений как существенные параметры задачи. Это позволяет получать *универсальную* и достаточно полную картину для каждого шага по увеличению размерности фазового пространства. Значительное внимание уделено ситуациям, связанным с квазипериодическими колебаниями. Рассмотрены

связанные системы с бифуркацией Неймарка-Сакера и различные модели отображений для фаз взаимодействующих осцилляторов, которые приводят к *квазипериодическим бифуркациям* и таким эффектам, как *резонансная паутина Арнольда* и пр.

Авторы выражают благодарность профессору, доктору физико-математических наук Кузнецову С.П. и ведущему научному сотруднику СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН Сатаеву И.Р. за полезное обсуждение.

При написании пособия использован опыт учебных курсов на Факультете нелинейных процессов Саратовского государственного университета и материалы, полученные при выполнении проектов РФФИ № 11-02-91334-ННИОа и № 12-02-00342а в Саратовском филиале ИРЭ им. В.А.Котельникова РАН.

Авторы.



ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Часть I. Бифуркации одномерных отображений	
О динамических системах и бифуркациях	10
1. 1. Одномерные отображения, неподвижные точки, мультипликаторы	11
1.2. Однопараметрический бифуркационный анализ	14
1.2.1. Касательная (седло-узловая) бифуркация	15
1.2.2. Бифуркация «вилка»	17
1.2.3. Бифуркация удвоения периода	19
1.2.4. Жесткий переход через мультипликатор $\mu = -1$.	
Производная Шварца	20
1.2.5. Бифуркации циклов	23
1.3. Двухпараметрический бифуркационный анализ	24
1.3.1. Касательная бифуркация	25
1.3.2. Точка сборки	26
1.3.3. Понятия типичности и коразмерности	29
1.3.4. Удвоения периода. Структуры «crossroad area»	30
1.3.5. Жесткий переход через $\mu = -1$. Структуры «spring area»	32
1.3.6. Глобальный бифуркационный анализ	34
Задачи	37
Часть II. Бифуркации двумерных отображений	
2.1. Двумерные отображения, неподвижные точки и мультипликаторы	42
2.2. Треугольник устойчивости и бифуркации неподвижных точек	48
2.3. Бифуркации циклов	51
2.4. Бифуркационный анализ отображения Эно	52
2.5. Минимальное отображение Спротта	57
2.6. Универсальное двумерное отображение	64
2.7. Бифуркации потоков и их дискретные аналоги	69
2.8. Дискретный осциллятор Богданова-Такенса и отображение Богданова	72
2.9. Седло-узловая бифуркация инвариантных кривых и вырожденная бифуркация Неймарка-Сакера	78
2.10. Устойчивое и неустойчивое многообразие	83
2.11. Гомоклиническая структура	87

2.12. Примеры расчета устойчивого и неустойчивого многообразий. Нелокальные бифуркации	88
2.13. Физическая реализация двумерных отображений	90
Задачи	90

Часть III. Бифуркации трехмерных отображений

3.1. Трехмерные отображения, неподвижные точки и мультипликаторы	94
3.2. Условия основных бифуркаций трехмерных отображений	95
3.3. Пространство параметров и бифуркации трехмерных отображений	96
3.4. Отображения Рихтера	101
3.5. Модели Спротта	105
3.6. Дискретный осциллятор Ресслера. Бифуркация удвоения инвариантной кривой (тора)	106
3.7. Универсальное трехмерное отображение	110
3.8. Модели с консервативной динамикой	112
3.9. Трехмерное отображение Эно	112
Задачи	117

Часть IV. Бифуркации четырехмерных отображений

4.1. Четырехмерные отображения, неподвижные точки и мультипликаторы	120
4.2. Устройство линий и точек бифуркаций в системе с двойной бифуркацией Неймарка-Сакера	122
4.3. Универсальное четырехмерное отображение	125
4.4. Четырехмерное отображение Эно	126
4.5. Дискретные модели «хищник-жертва»	128
4.6. Связанные отображения с бифуркацией Неймарка-Сакера. Квазипериодические бифуркации	133
Задачи	143

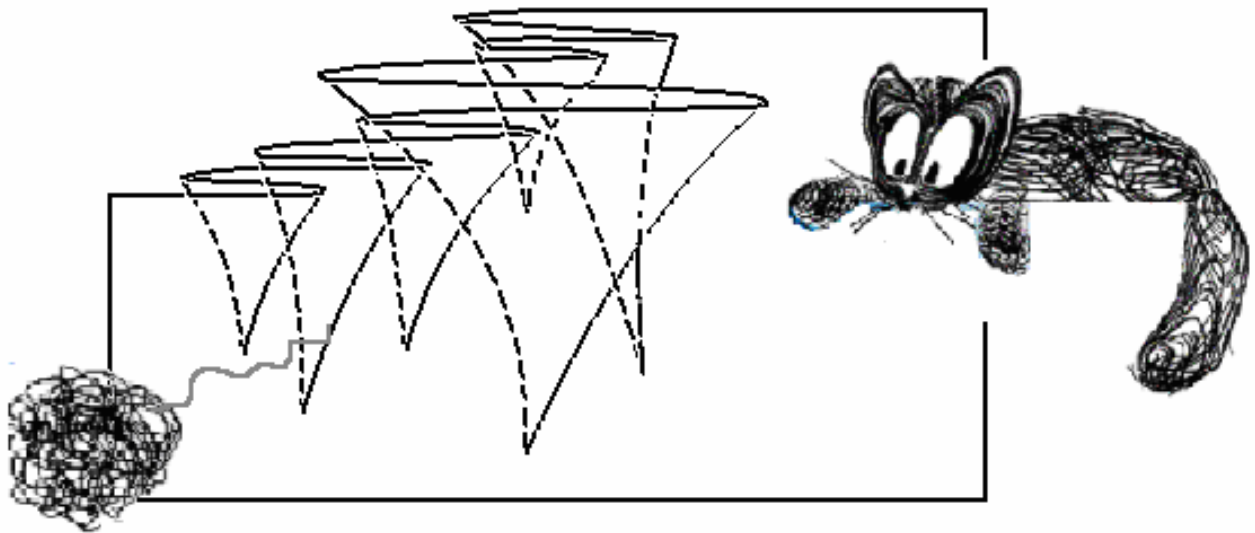
Часть V. Фазовые модели

5.1. Отображение окружности	146
5.2. Уравнение Адлера и его дискретизация	148
5.3. Возбуждаемый осциллятор Ван-дер-Поля-Дуффинга	151
5.4. Простейшие свойства синус-отображения окружности	152
5.5. Отображения на торе	154
5.6. Отображение Кима-Остлунда	156
5.7. Отображение на торе: три диссипативно связанных	

фазовых осциллятора	163
5.8. Отображение на торе: два связанных возбуждаемых осциллятора	172
5.9. Дискретные модели осцилляторов. Общее обсуждение	175
5.10. Отображение на торе: три реактивно связанных осциллятора	177
Задачи	180
Литература	182
Приложение 1. Радиофизическая реализация универсального двумерного отображения	187
Приложение 2. Фазовые уравнения трех диссипативно связанных автоколебательных осцилляторов	192
Приложение 3. Фазовые уравнения трех реактивно связанных осцилляторов	194

Часть I

БИФУРКАЦИИ ОДНОМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ



О динамических системах и бифуркациях

Весьма важным и продуктивным понятием естествознания является понятие *динамической системы*. Под динамической системой понимают математическую модель того или иного реального процесса, обладающую следующими свойствами. Во-первых, должен быть известен некоторый набор величин, который однозначно задает *состояние* системы. Во-вторых, должен быть известен закон, по которому можно однозначно определить состояние системы в любой момент времени, если известно ее начальное состояние. Это понятие является очень широким и поэтому примеры динамических систем можно найти практически во всех областях физики, биологии, химии и т.д.

В математическом плане динамические системы бывают двух типов в зависимости от вида используемых уравнений. Это, во-первых, системы с непрерывным временем, описываемые простыми дифференциальными уравнениями. В теории динамических систем их часто называют *потоками*. Такое название связано с тем, что в пространстве состояний – фазовом пространстве – эволюция системы представлена потоком фазовых траекторий. Второй способ задания динамических систем состоит в использовании *итерируемых отображений*. В этом случае наблюдение за динамической переменной ведется не непрерывно, а в определенные (дискретные) фиксированные моменты времени.

Динамические системы (как потоки, так и отображения) могут классифицироваться по величине их *размерности*, т.е. проще говоря, по числу существенных переменных. Соответственно, выделяют одномерные, двумерные, трехмерные и т.д. системы. Потоки и отображения на самом деле глубоко взаимосвязаны благодаря методу, известному как *метод сечений Пуанкаре*, когда потоку сопоставляется некоторое отображение, порождаемое пересечением определенной поверхности фазовыми траекториями в пространстве состояний.

Поведение динамической системы, в частности, установившиеся с течением времени режимы, могут зависеть от некоторых *параметров*. Оказывается, что при медленном изменении параметра могут происходить качественные перестройки установившихся режимов. Изучение таких перестроек при вариации параметров в динамических системах (причем, не только в отображениях, но и в дифференциальных уравнениях) составляет предмет *теории бифуркаций* [1-13]. Она выявляет типичные бифуркации, изучает и классифицирует их. Теория бифуркаций является математической наукой. Ее приложения, тем не менее, очень разнообразны и встречаются практически во всех естественных науках. Поэтому необходимым и полезным является изложение ее подходов и методов

на физическом уровне так, чтобы их было удобно использовать в различных приложениях.

Бифуркации допускают определенную классификацию. Во-первых, по минимальной величине размерности системы, для которой возможна данная бифуркация. А, во-вторых, по минимальному количеству параметров, необходимых для данного типа перестройки. Мы представим обсуждение бифуркаций отображений в соответствии с такой классификацией. В качестве первого шага рассмотрим основные бифуркации одномерных отображений.

1.1. Одномерные отображения, неподвижные точки, мультипликаторы

Одномерное отображение – это простейшая модель эволюционного процесса, когда состояние системы характеризуется единственной переменной, а время – дискретно. Примером может служить динамика численности биологической популяции, если наблюдение за ее численностью производится, например, один раз в год. Другие примеры и более подробное обсуждение можно найти в [8,9].

Одномерное отображение в общем случае задается итерационным соотношением

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (1.1)$$

Оно действует следующим образом. Возьмем стартовое значение переменной x_1 . Тогда с помощью (1.1) можно вычислить последующее значение: $x_2 = f(x_1)$, затем $x_3 = f(x_2)$ и т.д. Эволюцию переменной x удобно представлять на итерационной диаграмме (рис.1.1), на которой изображены график функции $f(x)$ и биссектриса.

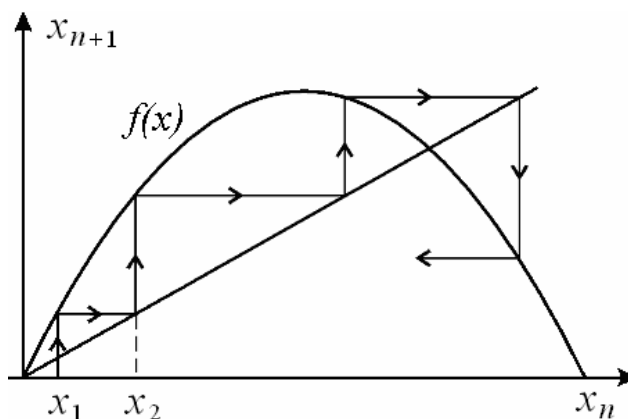


Рис.1.1. Итерационная диаграмма.

Несмотря на простой вид эволюционного уравнения (1.1), в зависимости от

вида функции $f(x)$ оно может демонстрировать сложную и разнообразную динамику. При этом важным является *установившийся режим*, который будет наблюдаться после некоторого переходного процесса. Можно выделить три основных типа установившегося режима:

- а) неподвижная точка, когда переменная перестает изменяться;
- б) цикл, когда переменная «пробегает» последовательно несколько значений (их число равно периоду цикла), а затем динамика повторяется;
- в) хаотический режим, когда динамика не повторяется и визуально кажется случайной.

Обсудим сначала простейший случай, когда отображение имеет неподвижную точку. Уравнение для поиска неподвижной точки x_0 имеет вид $x_0 = f(x_0)$. Таким образом, неподвижной точке отвечает точка пересечения графика функции и биссектрисы на итерационной диаграмме, рис.1.2.

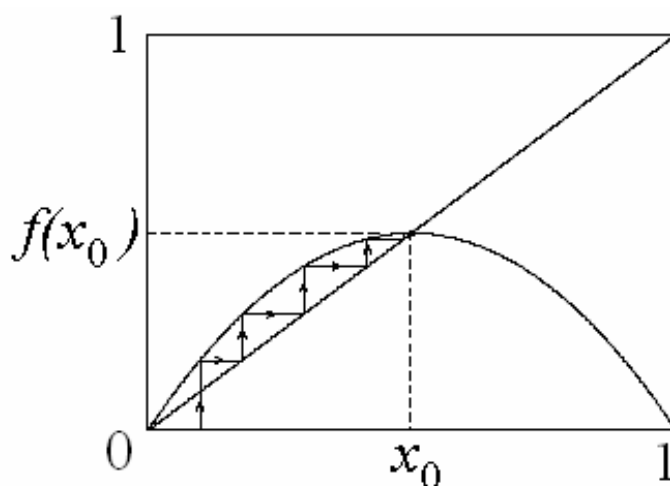


Рис.1.2. Неподвижная точка x_0 на итерационной диаграмме.

Неподвижные точки могут быть как *устойчивыми*, так и *неустойчивыми*. Характер устойчивости можно определить с помощью специальной характеристики – *мультипликатора*, представляющей собой производную функции, вычисленную в неподвижной точке. Действительно, в малой окрестности неподвижной точки можно считать, что $x_{n+1} = x_0 + \tilde{x}_{n+1}$ и $x_n = x_0 + \tilde{x}_n$, где знаком «тильда» сверху обозначены малые добавки к x_0 . Тогда из (1.1) имеем

$$x_0 + \tilde{x}_{n+1} = f(x_0 + \tilde{x}_n) \approx f(x_0) + f'(x_0)\tilde{x}_n.$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{x}_{n+1} = f'(x_0)\tilde{x}_n. \tag{1.2}$$

Поэтому мультипликатор удобно ввести с помощью соотношения:

$$\mu = f'(x_0). \tag{1.3}$$

В соответствии с (1.2) на каждом шаге дискретного времени возмущение умножается на величину, равную мультипликатору. Этот факт, в частности, определяет и его название (*multiplication* – умножение).

Из соотношения (1.2) ясно, что возмущение будет убывать, и, соответственно, точка будет устойчивой, если $|\mu| < 1$, или $-1 < \mu < +1$. Аналогично при $|\mu| > 1$ возмущение будет нарастать, и точка окажется неустойчивой.

По характеру приближения траектории к неподвижной точке на итерационной диаграмме можно дополнительно выделить два типа неподвижных точек. Первый тип отвечает положительным значениям мультипликатора. В этом случае изображающая точка приближается к неподвижной точке таким образом, что все время находится от нее с одной и той же стороны, рис.1.3а. Если же мультипликатор отрицателен, то изображающая точка приближается к неподвижной точке, перемещаясь на итерационной диаграмме так, что попеременно оказывается то справа, то слева от нее, рис.1.3б. Используя терминологию теории систем с непрерывным временем можно назвать первую точку точкой типа «узел», а вторую – точкой типа «фокус».

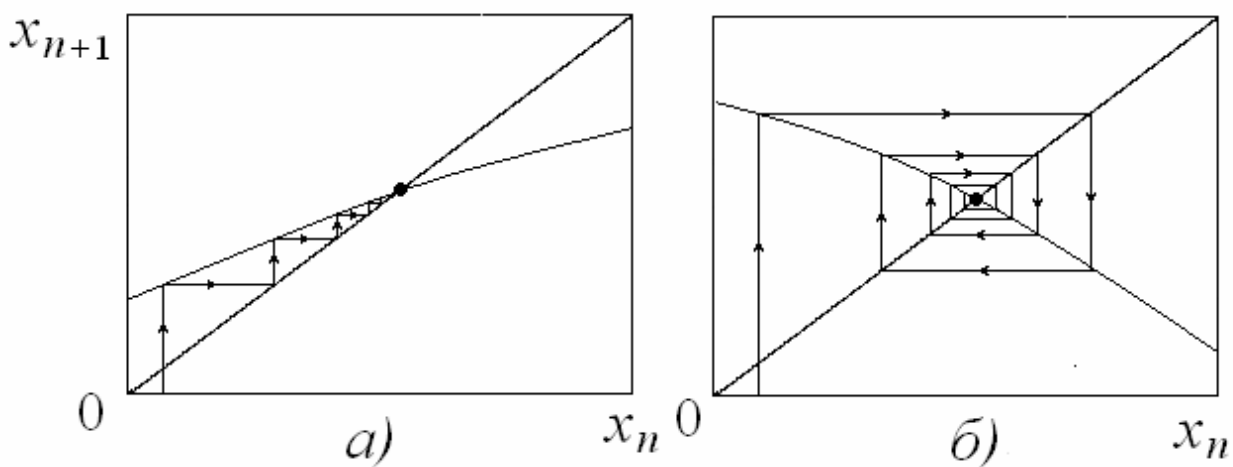


Рис.1.3. Два типа неподвижных точек, отличающихся знаком мультипликатора.

Наличие неподвижных точек в отображении является *случаем общего положения*. В этот термин вкладывается следующий смысл. Пусть мы слегка изменим параметр, характеризующий отображение. Тогда, «скорее всего» (или «в большинстве случаев») неподвижная точка сохранится и сохранит свой характер устойчивости, рис.1.4а. Соответствующий «тест» называют *методом малых шевелений*. Также случаем общего положения является и ситуация, когда неподвижных точек нет вообще, рис.1.4б.

Возможны, впрочем, выделенные (или, как говорят, *вырожденные*) ситуации), когда это не так. В этих случаях, даже если «пошевелить» параметр очень

мало, то динамика изменится существенным образом, рис.1.4в. Такая ситуация и соответствует *бифуркации*. Еще говорят, что случай общего положения является *грубым*, а бифуркационная ситуация - *негрубой*.

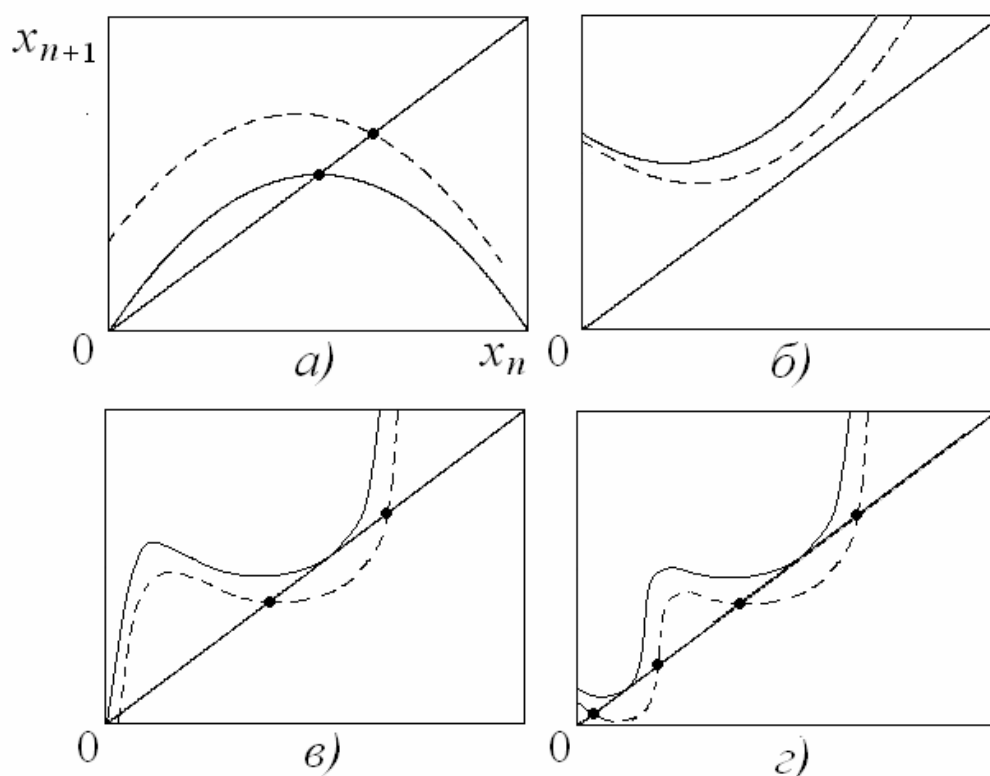


Рис.1.4. а), б) Случаи общего положения, в) вырожденная (бифуркационная) ситуация, г) двукратно вырожденная ситуация. Пунктир – положение функции при небольшом изменении параметра.

Отметим, что степень вырождения может быть разной. Например, для ситуации на рис.1.4г «произвольное» шевеление параметров разрушит обе ситуации касания. Однако, можно некоторым специальным образом регулировать параметры так, что одно из касаний сохранится, а второе – разрушится¹.

Введенные термины относятся не только к одномерным отображениям: они являются существенно более общими, и открывают путь к определенной стратегии исследования и классификации бифуркаций, о чем мы поговорим несколько позднее.

1.2. Однопараметрический бифуркационный анализ

Обсудим теперь, какие типы бифуркаций возможны для одномерных отображений при вариации параметров. Сначала рассмотрим случай, когда суще-

¹ Случай рис.1.4г приводит к важному понятию *коразмерности*, о котором более подробно говорится в разделе 1.3.3.

ственный параметр один. Следует ожидать, что качественная перестройка установившегося режима в одномерных отображениях управляется мультипликатором. Это утверждение с очевидностью носит общий характер. Действительно, пусть имеется некоторое одномерное отображение, зависящее от единственного параметра и имеющее неподвижную точку. Тогда при плавном изменении этого параметра будет изменяться взаимное расположение функции, характеризующей отображение, и биссектрисы на итерационной диаграмме. Следовательно, будет меняться мультипликатор неподвижной точки. При выполнении условия $|\mu| = 1$ точка будет терять устойчивость, а значит, будет иметь место некоторая бифуркация. Для одномерных отображений мультипликатор всегда действительная величина, поэтому бифуркации возможны в двух случаях: $\mu = +1$ и $\mu = -1$.

Перечислим и охарактеризуем основные однопараметрические бифуркации одномерных отображений. При обсуждении бифуркаций, прежде всего, надо выявить ситуацию, при которой возникает та или иная бифуркация. Затем следует указать и изучить простейшую модель, демонстрирующую этот тип бифуркаций. Такой подход оказывается очень продуктивным и общим. Простейшая модель при этом выступает как своего рода *эталонная*. В строгой математической теории бифуркаций существуют специальные процедуры выявления таких моделей, которые приводят, как говорят к *нормальным формам* бифуркаций. Для простейших бифуркаций такие модели, однако, можно просто сконструировать, используя эмпирические соображения или физическую мотивацию.

1.2.1. Касательная (седло-узловая) бифуркация

Пусть функция, характеризующая отображение, при изменении параметра λ эволюционирует так, как показано на рис.1.5. В этом случае при $\lambda < \lambda_0$ неподвижных точек нет вообще, а при $\lambda > \lambda_0$ появляется пара – устойчивая и неустойчивая точки. Такую бифуркацию называют *касательной*, потому что точно в момент бифуркации биссектриса на итерационной диаграмме касается графика функции. Таким образом, в точке такой бифуркации мультипликатор равен $\mu = +1$. Еще одно принятое название для этой бифуркации – *fold*, от английского *fold* – складка.

К сожалению, для бифуркаций нет однозначной терминологии, разные авторы в зависимости от ситуации употребляют разные названия. В данном случае: «касательная бифуркация», «бифуркация *fold*», иногда просто говорят «би-

фуркация $\mu = +1$ ». По аналогии с бифуркациями дифференциальных систем говорят еще «седло-узловая бифуркация» (*saddle-node*). Последний термин подчеркивает, что при такой бифуркации сливаются две неподвижных точки, устойчивая и неустойчивая (седло и узел).



Рис.1.5. Касательная бифуркация. Момент бифуркации отвечает значению параметра $\lambda = \lambda_0$.

Простейшее отображение, для которого появляется касательная бифуркация, может быть выбрано в виде

$$x_{n+1} = \lambda + x_n - x_n^2. \quad (1.4)$$

Неподвижные точки этого отображения ищем из уравнения $x_0 = \lambda + x_0 - x_0^2$. Откуда получаем, что $x_0 = \pm\sqrt{\lambda}$. Таким образом, неподвижные точки возможны при условии $\lambda > 0$. Следовательно, $\lambda = \lambda_0 = 0$ – это бифуркационное значение параметра, когда у отображения (1.4) появляются две неподвижных точки.

Убедимся в этом, вычисляя мультипликатор в неподвижной точке:

$$\mu = f'(x_0) = 1 - 2x_0 = 1 \mp 2\sqrt{\lambda}. \quad (1.5)$$

При $\lambda = 0$ мультипликатор обращается в +1. Если выбрать верхний знак в полученных соотношениях, то мультипликатор по модулю больше единицы, так что соответствующая точка неустойчива. Для нижнего знака вблизи порога бифуркации мультипликатор меньше единицы, и такая точка устойчива. Это хорошо видно и на рис.1.5, если обратить внимание на наклон касательной в каждой из неподвижных точек.

Если параметр λ близок к бифуркационному значению $\lambda_0 = 0$, то эволюция в «дискретном времени» протекает очень медленно, и на каждой итерации динамическая переменная изменяется очень мало. Как говорят, в этом случае изображающая точка движется по узкому «коридору». Можно оценить число итераций, за которое точка проходит коридор. Поскольку за один шаг переменная

очень мало меняется, то можно положить $x_{n+1} - x_n \approx \frac{dx}{d\tau}$, где τ играет роль непрерывного времени. Тогда из (1.4) следует, что

$$\frac{dx}{d\tau} = \lambda - x^2. \quad (1.6)$$

Это уравнение легко решается, и при $\lambda < 0$ получаем оценку

$$\tau = \frac{2}{\sqrt{-\lambda}} \operatorname{arctg} \frac{x_1}{\sqrt{-\lambda}}. \quad (1.7)$$

Здесь x_1 – начальное значение переменной. Понятно, что чем ближе параметр λ к нулю, тем медленнее точка движется по коридору. Это один из примеров *замедления времени* вблизи точки бифуркации.

1.2.2. Бифуркация «вилка»

Пусть в момент бифуркации функция, описывающая отображение, касается биссектрисы, и при этом выполняется дополнительное условие: вторая производная в точке касания равна нулю, рис.1.6.

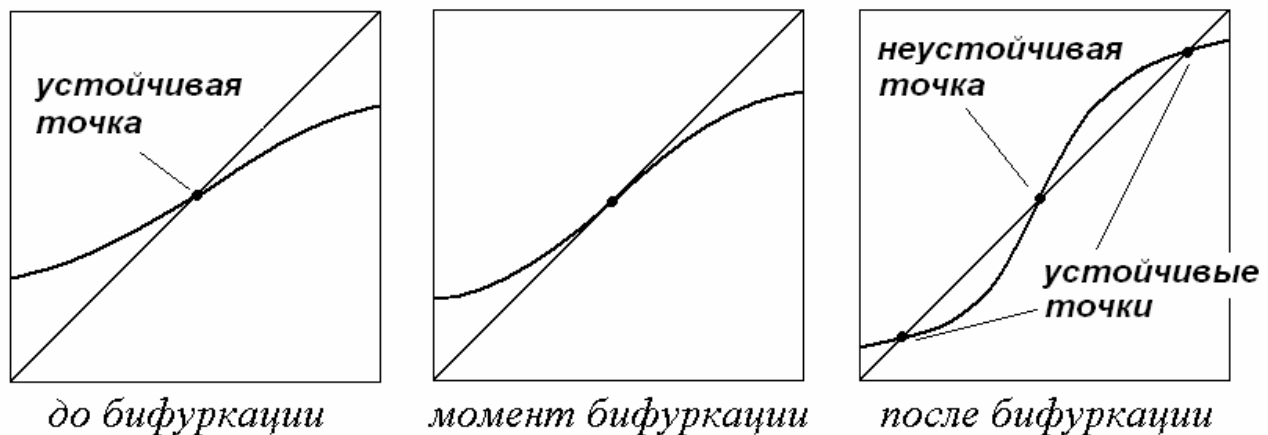


Рис.1.6. Бифуркация «вилка».

Это тоже бифуркационная ситуация, которой отвечает мультипликатор $\mu = +1$, однако конфигурация взаимного расположения функции и биссектрисы иная, чем в случае касательной бифуркации. Для того, чтобы вторая производная обратилась в ноль, нужно дополнительное условие, т.е. система должна характеризоваться некоторой *симметрией*. Такая симметрия достаточно часто встречается, так что введение соответствующей бифуркации оправдано. Ее называют бифуркацией «вилка» (*pitch-fork*).

Простейшей моделью, демонстрирующей бифуркацию «вилка», является отображение

$$x_{n+1} = \lambda x_n - x_n^3. \quad (1.8)$$

Неподвижные точки (1.8) ищем из уравнения $x_0 = \lambda x_0 - x_0^3$. Таким образом, при $\lambda < 1$ у отображения есть одна устойчивая неподвижная точка $x_0 = 0$. При $\lambda > 1$ ее мультипликатор $\mu = \lambda$ проходит через $+1$, и она теряет устойчивость. При этом возникает пара новых устойчивых точек $x_0 = \pm\sqrt{\lambda - 1}$.

Возможен, однако, и иной характер бифуркации «вилки». Действительно, изменим в простейшем модельном отображении (1.8) знак перед нелинейным членом:

$$x_{n+1} = \lambda x_n + x_n^3. \quad (1.9)$$

В этом случае в области $\lambda < 1$ наряду с неподвижной точкой $x_0 = 0$ возможны еще две неподвижные точки $x_0 = \pm\sqrt{1 - \lambda}$. Эволюция функции, задающей отображение, с ростом параметра λ при этом будет протекать так, как показано на рис.1.7.

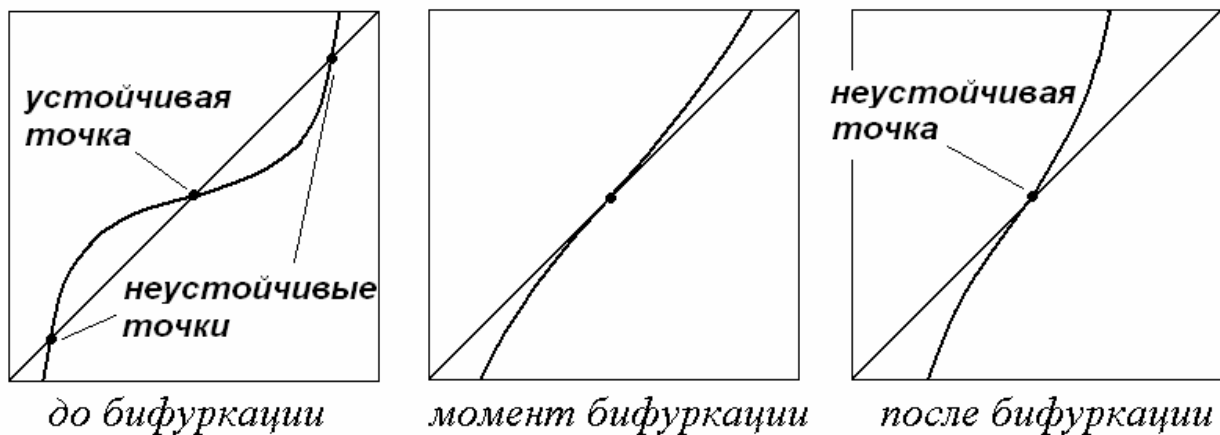


Рис.1.7. Обратная бифуркация «вилка».

Такая бифуркация при $\lambda = 1$ состоит в том, что сливаются две неустойчивых неподвижных точки и одна устойчивая, а в результате возникает единственная неустойчивая неподвижная точка. Эту форму бифуркации называют *обратной*. (Для того, чтобы прояснить смысл этого термина, сравните рис.1.7 и рис.1.6).

Другой вариант названия: *субкритическая* форма бифуркации «вилка». Соответственно, за первым случаем оставляют название *прямая* или *суперкритическая* бифуркация. Большинство бифуркаций имеют обе формы – прямую и обратную. Определенное исключение составляет касательная бифуркация, поскольку для нее смена знака перед нелинейным членом не приводит к принципиально новой ситуации, а лишь меняет порядок неподвижных точек.

1.2.3. Бифуркация удвоения периода

Обратимся теперь к случаю, когда мультипликатор проходит через значение $\mu = -1$. В этом случае касательная к графику функции оказывается перпендикулярна к биссектрисе. Что произойдет за порогом бифуркации? Пусть взаимная конфигурация функции, задающей отображение, и биссектрисы на итерационной диаграмме такая, как показано на левом рис.1.8. В этом случае, после того, как мультипликатор проходит через значение $\mu = -1$, возникает цикл периода 2 (или 2-цикл). Таким образом, это *бифуркация удвоения периода*². Отметим, что возникающий в результате описанной бифуркации 2-цикл устойчив. В свою очередь, неподвижная точка в результате такой бифуркации не исчезает, а просто становится неустойчивой.

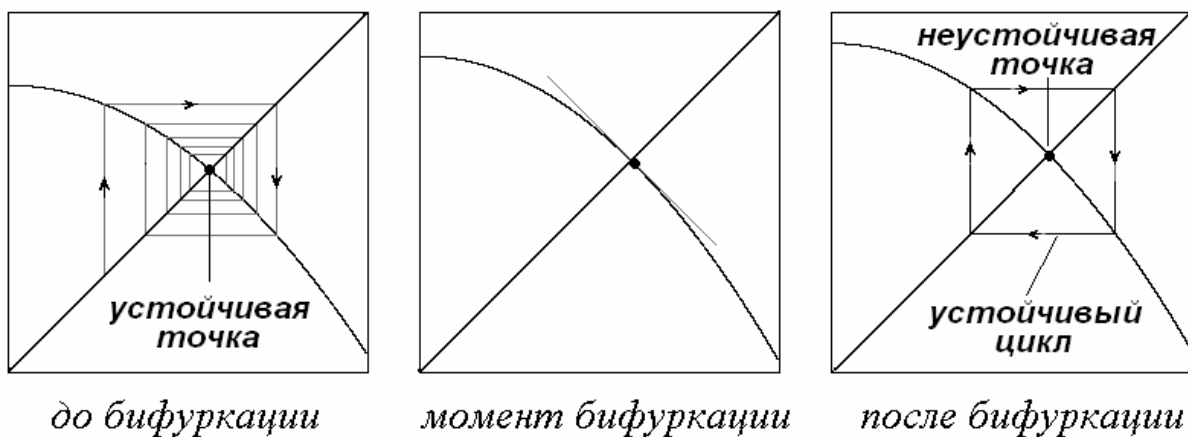


Рис.1.8. Бифуркация удвоения периода.

Простейшей моделью, описывающей бифуркацию удвоения периода, может служить логистическое отображение

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2. \quad (1.10)$$

Его неподвижные точки ищутся из решения соответствующего квадратного уравнения $x_0 = 1 - \lambda x_0^2$, так что

$$x_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda}}{2\lambda}. \quad (1.11)$$

Вычислим мультипликатор неподвижной точки

$$\mu = f'(x_0) = -2\lambda x_0 = 1 \mp \sqrt{1 + 4\lambda}. \quad (1.12)$$

При $\lambda = -0.25$ имеет место касательная бифуркация (когда $\mu = +1$), в результате которой возникают неустойчивая и устойчивая точки. Им отвечают соответ-

² «Period doubling» в англоязычной литературе. Иногда ее еще называют «флип-бифуркация» от английского flip – переворот, имея в виду характерное движение изображающей точки

венно верхний и нижний знак в (1.12). При $\lambda = 0$ мультипликатор устойчивой точки $\mu = 1 - \sqrt{1 + 4\lambda}$ проходит через ноль (сверхустойчивость), а при $\lambda = 0.75$ оказывается равен $\mu = -1$. Таким образом, эта точка, в свою очередь, теряет устойчивость, и в результате бифуркации от нее отделяется устойчивый 2-цикл.

1.2.4. Жесткий переход через мультипликатор $\mu = -1$. Производная Шварца

Взаимная конфигурация функции и биссектрисы на итерационной диаграмме, отвечающая проходу мультипликатора через минус единицу, может быть несколько иной, как показано на правом рис.1.9. Если уменьшать управляющий параметр, то в этом случае неустойчивая точка становится устойчивой, и от нее отделяется неустойчивый предельный цикл, рис.1.9.

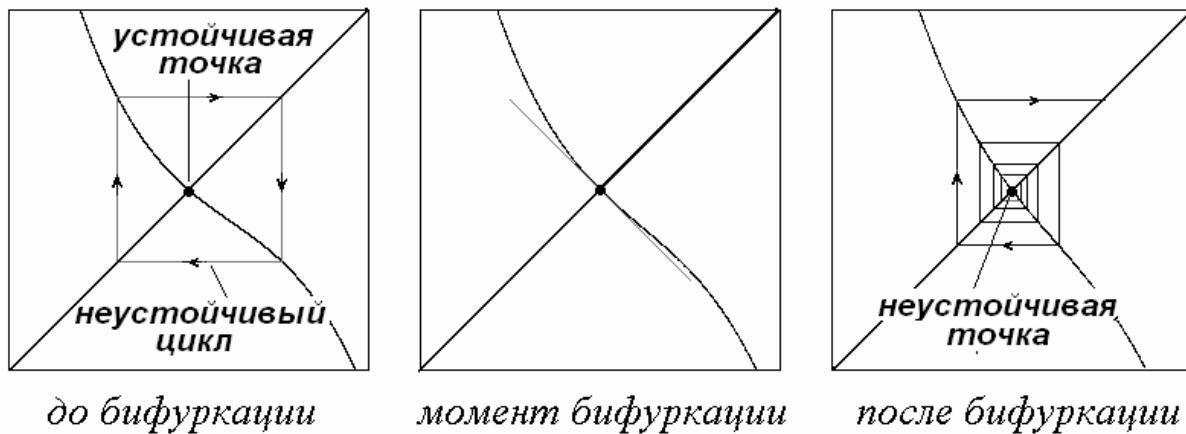


Рис.1.9. Жесткий переход через мультипликатор $\mu = -1$.

Обсудим, почему эта бифуркация протекает именно так, и одновременно обсудим, как различать два типа бифуркации $\mu = -1$.

Пусть мультипликатор исходного отображения $x_{n+1} = f(x_n)$ проходит через -1 . Для ответа на поставленный выше вопрос необходимо изучить свойства двукратно проитерированного отображения

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad F(x) = f(f(x)), \quad (1.13)$$

при дополнительном условии $\mu = -1$.

Обратимся сначала к логистическому отображению. Двукратно проитерированное логистическое отображение характеризуется функцией

$$F(x) = 1 - \lambda(1 - \lambda x^2)^2 = 1 - \lambda + 2\lambda^2 x^2 - \lambda^3 x^4, \quad (1.14)$$

при отрицательном значении мультипликатора, рис.1.3б.

являющейся полиномом четвертой степени. Трансформации функции $F(x)$, происходящие вблизи точки удвоения периода $\lambda = 0.75$, показаны на рис.1.10.

Можно видеть, что одна из неподвижных точек теряет устойчивость, и от нее отделяются две устойчивые. Для них

$$F(x) = f(f(x)) = x. \quad (1.15)$$

Таким образом, они представляют собой элементы 2-цикла исходного отображения: $x_2 = f(x_1)$ и $x_1 = f(x_2)$. Отметим, что эволюция функции на рис.1.10 напоминает бифуркацию «вилки». Обоснование этого утверждения в общем случае для произвольной функции $f(x)$ будет дано ниже. В конечном итоге такой анализ позволит различать два типа бифуркации $\mu = -1$.

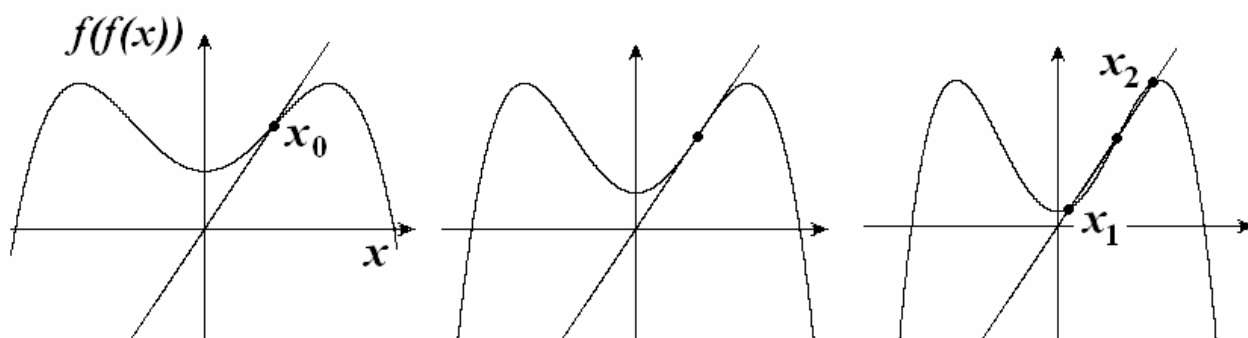


Рис.1.10. Функция, задающая двукратно проитерированное логистическое отображение при бифуркации удвоения периода; x_0 – устойчивая неподвижная точка исходного отображения, x_1 и x_2 – элементы 2-цикла исходного отображения.

Обсудим случай произвольной функции $f(x)$, задающей отображение. Функция $F(x) = f(f(x))$ обладает рядом свойств. Во-первых, ее мультипликатор в точке, когда $f'(x) = -1$, обращается в $\mu = F'(x) = +1$. Действительно, по правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$F'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x) = [f'(x)]^2 = (-1)^2 = +1, \quad (1.16)$$

поскольку $f'(x) = -1$. (Для сокращения записи опускаем индекс у неподвижной точки.)

Во-вторых, вторая производная $F''(x)$ обращается в ноль. Действительно,

$$F''(x) = f''(f(x)) \cdot [f'(x)]^2 + f'(f(x)) \cdot f''(x) = f''(x) - f''(x) = 0, \quad (1.17)$$

поскольку

$$f(x) = x \text{ и } f'(x) = -1. \quad (1.18)$$

Наконец, третья производная $F'''(x)$ связана с так называемой *производной Шварца*, определяемой как

$$Sf = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2. \quad (1.19)$$

Для доказательства опять используем правила дифференцирования сложной функции, и получаем

$$F'''(x) = f'''(f(x)) \cdot [f'(x)]^3 + 3f'(x) \cdot f''(f(x)) \cdot f''(x) + f'(f(x))f'''(x). \quad (1.20)$$

Используя соотношения (1.18), приходим к уравнению

$$F'''(x) = -2f'''(x) - 3 \cdot [f''(x)]^2. \quad (1.21)$$

В свою очередь, для производной Шварца в анализируемой точке имеем

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2 = -f'''(x) - \frac{3}{2} [f''(x)]^2. \quad (1.22)$$

Таким образом,

$$F'''(x) = 2Sf(x). \quad (1.23)$$

Полученные соотношения и позволяют утверждать, что на «языке» двукратно проитерированного отображения $F(x) = f(f(x))$ наблюдается бифуркация «вилка» в том случае, когда в исходном отображении происходит бифуркация $\mu = -1$. Действительно, пусть $x_n = x + \tilde{x}_n$, где \tilde{x}_n – малая величина. Тогда в окрестности неподвижной точки, используя разложение в ряд Тейлора, имеем

$$\tilde{x}_{n+1} = F'(x) \cdot \tilde{x}_n + \frac{1}{2} F''(x) \cdot \tilde{x}_n^2 + \frac{1}{6} F'''(x) \cdot \tilde{x}_n^3 + \dots \quad (1.24)$$

Но, используя установленные свойства производных функции $F(x)$, без труда получаем:

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + \frac{1}{6} F'''(x) \cdot \tilde{x}_n^3 + \dots \quad (1.25)$$

Таким образом, мы действительно имеем ситуацию, отвечающую бифуркации «вилка». Ее появление говорит о наличии некоторой «скрытой» симметрии для двукратно проитерированной функции. (Мы говорим о скрытой симметрии, поскольку по виду исходной функции ее было бы трудно предположить.)

Теперь становится ясно, когда реализуется ситуация, показанная на рис.1.8, а когда – на рис.1.9. Это зависит от того, прямая или обратная бифуркация «вилка» имеет место для двукратно проитерированной функции. А это, в свою очередь, зависит от знака производной Шварца. Если производная Шварца отрицательна $Sf < 0$, то имеет место прямая бифуркация «вилка», рис.1.8. В этом случае в терминах исходного отображения наблюдается бифуркация удвоения периода.

Если же производная Шварца положительна $Sf > 0$, то для двукратно про-

итерированной функции имеем обратную бифуркацию «вилка». Для функции $F(x) = f(f(x))$ в этом случае до бифуркации имеются две неустойчивых и одна устойчивая неподвижные точки, как показано на рис.1.5. В терминах исходного отображения неустойчивые точки отвечают элементам неустойчивого 2-цикла. В результате бифуркации этот цикл сливается с устойчивой точкой и исчезает, так что остается единственная неустойчивая точка. Таким образом, мы объяснили происхождение рис.1.9. Эту бифуркацию можно назвать обратной (субкритической) бифуркацией удвоения периода. Ее еще называют *жестким переходом через мультипликатор $\mu = -1$* . Такое название связано с тем, что при потере устойчивости неподвижной точкой по этому «сценарию», изображающая точка обычно перебрасывается на другой аттрактор системы или убегает на бесконечность.

Итак, в определении типа бифуркации «мультипликатор $\mu = -1$ » важную роль играет производная Шварца. Заметим, что для логистического отображения производная Шварца отрицательна (поскольку $f'''(x) = 0$), поэтому для него характерны именно удвоения периода.

1.2.5. Бифуркации циклов

Развитая выше классификация относилась, вообще говоря, к бифуркациям неподвижных точек. Замечательное свойство отображений состоит в том, что бифуркационный анализ периодических циклов может быть построен совершенно аналогично анализу бифуркаций неподвижных точек. Обоснуем это утверждение.

Пусть отображение $x_{n+1} = f(x_n)$ имеет цикл периода N . Это означает, что через N итераций последовательность x_n повторяется, т.е. $x_{n+N} = x_n$. Поскольку $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_{n+2} = f(f(x_n))$ и т.д., то условие реализации N -цикла можно, в свою очередь, переписать так:

$$x_n = f^N(x_n), \quad (1.26)$$

где $f^N(x) = f(f(\dots f(x)\dots))$ – N -кратно проитерированная функция, задающая отображение. Следовательно, если отображение имеет N -цикл, то отображение $f^N(x)$ имеет неподвижную точку (и наоборот). Этот результат позволяет сразу ввести определение мультипликатора N -цикла:

$$\mu = (f^N(x))'. \quad (1.27)$$

Соотношение (1.27) дает также простое и удобное выражение для мультипликатора N -цикла. Действительно, по правилу вычисления производной слож-

ной функции получаем

$$\mu = f'(x_N) \cdot f'(x_{N-1}) \cdot \dots \cdot f'(x_2) \cdot f'(x_1), \quad (1.28)$$

где $x_N = f^{N-1}(x_1)$, $x_{N-1} = f^{N-2}(x_1)$, ..., $x_2 = f(x_1)$, x_1 - элементы N -цикла. Это соотношение очень удобно для определения мультипликаторов циклов как при аналитическом исследовании, так и при компьютерном анализе. В частном случае 2-цикла имеем

$$\mu = f'(x_2) \cdot f'(x_1). \quad (1.29)$$

Если мультипликатор цикла обратится в ноль, то такой цикл будет *сверхустойчивым*. Из соотношения (1.29) ясно, что сверхустойчивый цикл хотя бы одним своим элементом опирается на экстремум отображения.

Таким образом, методология бифуркационного анализа циклов полностью повторяет методологию бифуркационного анализа неподвижных точек. В частности, возможна касательная бифуркация циклов. Именно такая бифуркация ответственна за возникновение циклов в «закритической» области $\lambda > 1.4011552\dots$ для логистического отображения, когда возможны хаотические режимы. Например, при $\lambda = 1.75$ в результате такой бифуркации рождается пара: устойчивый и неустойчивый 3-циклы, которые показаны на рис.1.11.

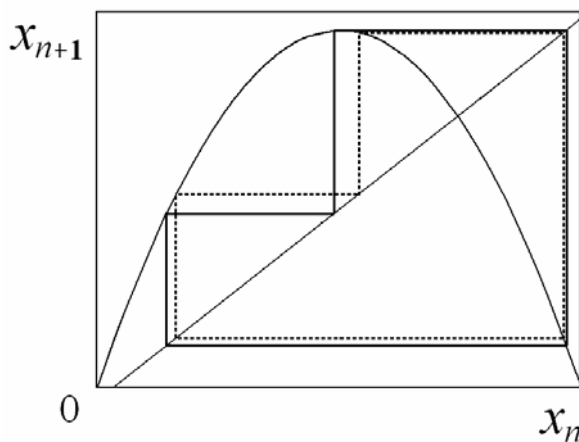


Рис.1.11. Возникновение 3-цикла в результате касательной бифуркации. Пунктиром показан неустойчивый цикл.

Возможны и бифуркации удвоения циклов, которые столь характерны для логистического отображения. Например, возможно удвоение периода 2-цикла с рождением 4-цикла и т.д. В свою очередь, 3-цикл на рис.1.11 может претерпевать такую бифуркацию с возникновением 6-цикла и т.д.

1.3. Двухпараметрический бифуркационный анализ

Перейдем теперь к обсуждению отображений с двумя параметрами. Варьируя оба параметра, можно изменять вид функции $f(x)$, задающей отображе-

ние. Понятно, что число возможных перестроек при этом возрастает. Их удобно изучать и классифицировать, имея в виду устройство плоскости двух параметров, задающих отображение.

Если простейшим примером однопараметрического отображения является квадратичное, то простейшим примером отображения с двумя параметрами может служить *кубическое отображение*

$$x_{n+1} = a + bx_n - x_n^3. \quad (1.30)$$

Для кубического отображения существенным является знак перед нелинейным членом. Поэтому следует рассмотреть и второй вариант кубического отображения:

$$x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3. \quad (1.31)$$

На примере отображений (1.30) и (1.31) обсудим основные бифуркации отображений с двумя параметрами. Такой анализ направлен на выявление устройства плоскости (a, b) с точки зрения возможных бифуркаций.

Прежде всего, отметим, что в двухпараметрических отображениях будут наблюдаться и все указанные выше бифуркации, характерные для отображений с одним параметром. Действительно, мы всегда можем выполнить однопараметрический анализ такого отображения. Самый простой вариант – зафиксировать один из параметров и варьировать другой. Несколько более сложный вариант – варьировать оба параметра одновременно, но так, чтобы этому отвечало движение по определенному маршруту на плоскости параметров. Из сказанного ясно, что обсуждавшимся выше бифуркациям будут отвечать определенные *линии* на плоскости параметров. Обратимся сначала к касательной бифуркации.

1.3.1 Касательная бифуркация

Обсудим свойства кубического отображения (1.30). Неподвижные точки этого отображения определяются уравнением

$$x^3 + (1 - b)x - a = 0. \quad (1.32)$$

В силу свойств кубического уравнения понятно, что в системе возможно сосуществование трех неподвижных точек. Их мультипликаторы определяются соотношением:

$$\mu = f'(x) = b - 3x^2. \quad (1.33)$$

Условием касательной бифуркации является обращение мультипликатора в $+1$, что приводит к условию $b - 3x^2 = 1$. Решая это уравнение совместно с (1.32), получаем уравнение для линии касательной бифуркации на плоскости парамет-

ров отображения:

$$a = \pm \frac{2}{3} \cdot \frac{(b-1)^{3/2}}{\sqrt{3}}. \quad (1.33)$$

Такая линия содержит две ветви, которым отвечают два варианта знака в соотношении (1.33). Линия на плоскости параметров (a, b) показана на рис.1.12.

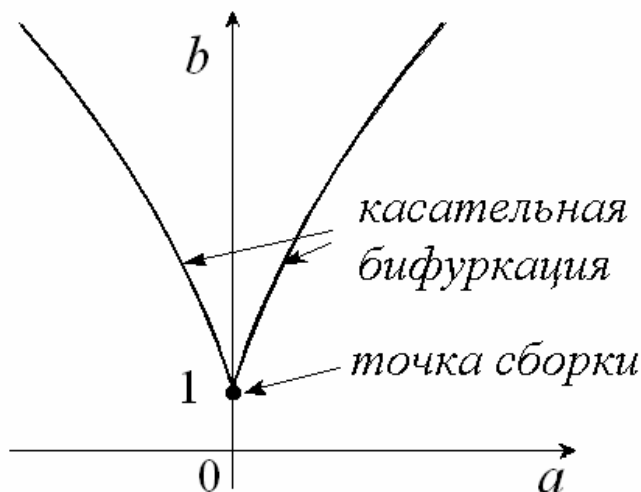


Рис.1.12. Линии касательной бифуркации и точка сборки на плоскости параметров.

1.3.2. Точка сборки

На рис.1.12 можно видеть, что две ветви линии касательной бифуркации сходятся в некоторой *особой точке* с координатами $a = 0, b = 1$. Это действительно особенность (понимаемая в математическом смысле), поскольку касательная в этой точке вертикальна, а характерному «клюву» отвечает степенной закон с показателем $3/2$. Такую точку называют *точкой сборки*. Это название обусловлено следующими причинами. Построим в трехмерном пространстве (b, a, x) поверхность, заданную соотношением (1.32), рис.1.13. Она дает зависимость координаты неподвижной точки от параметров отображения и напоминает сборку на ткани, что и обусловило такое название. Проекция этой поверхности на плоскость (b, a) дает линии касательной бифуркации, изображенные на рис.1.12. Имея в виду такую интерпретацию, их иногда называю еще и *линиями складки*. Термины «сборка» и «складка» широко распространены, поскольку соответствующие объекты появляются не только в теории бифуркаций, но и в математической *теории проектирования* (так называемые сборки Уитни), а также в *теории катастроф*, где они возникают при глубоком развитии идеи аппроксимации функций рядами Тейлора [48].

Нетрудно понять, что если условие касательной бифуркации имеет вид

$\mu = f'(x) = +1$, то для определения точки сборки необходимо выполнение сразу двух условий:

$$\begin{aligned} f'(x) &= +1, \\ f''(x) &= 0. \end{aligned} \tag{1.34}$$

На «вставках» рис.1.14 показаны характерные конфигурации функции, задающей отображение, в окрестности точки сборки. Причем, демонстрируются как случаи общего положения, так и бифуркационные ситуации.

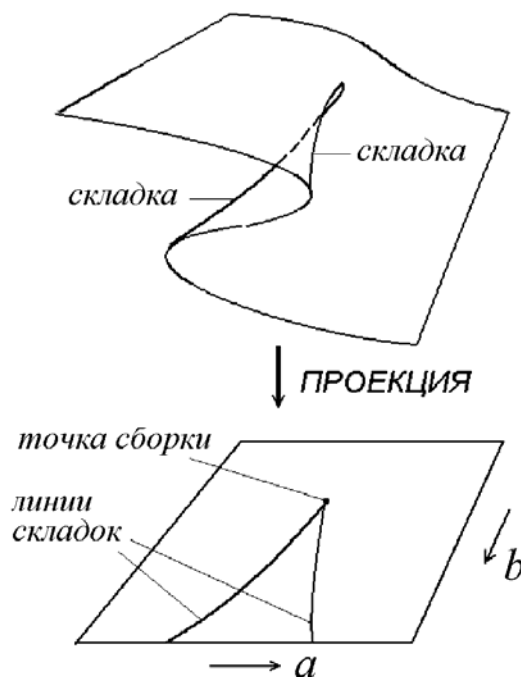


Рис.1.13. Появление складок и сборок при проектировании.

Можно видеть, что в верхней части плоскости параметров отображение характеризуется сосуществованием трех неподвижных точек, из которых две устойчивы, а одна нет. При движении по часовой стрелке мы проходим первую линию касательной бифуркации, на которой левая устойчивая неподвижная точка сливается с неустойчивой. После бифуркации остается только одна неустойчивая точка. При дальнейшем движении по этому маршруту в результате другой касательной бифуркации рождается пара: устойчивая и неустойчивая точки, и мы возвращаемся к исходной ситуации. На одной из вставок показана конфигурация отображения непосредственно в точке сборки. Она представляет собой кубическую параболу, имеющую точку перегиба, причем биссектриса является касательной в этой точке. Отметим, наконец, что при движении по плоскости параметров по вертикальной линии $b = 1$, мы будем наблюдать бифуркацию типа «вилка».

Выберем теперь другой вариант кубического отображения (1.31), отличающийся знаком перед кубическим членом. В этом случае уравнение для по-

иска неподвижных точек имеет вид

$$x^3 - (1+b)x + a = 0, \quad (1.35)$$

а выражение для мультипликатора $\mu = -b + 3x^2$. Условие $\mu = +1$ приводит к уравнению

$$a = \pm \frac{2}{3} \cdot \frac{(b+1)^{3/2}}{\sqrt{3}}. \quad (1.36)$$

Это также полукубическое острие, вершина которого расположена на плоскости параметров в точке с координатами $a = 0, b = -1$. Его отличие от предыдущего случая состоит в том, что для него характер устойчивости неподвижных точек изменен на противоположный. Теперь возможно сосуществование двух неустойчивых и одной устойчивой точек. (Рекомендуем самостоятельно построить в этом случае рисунок, аналогичный рис.1.14.) Этот факт позволяет считать соответствующую бифуркацию обратной по отношению к рассмотренному выше случаю.

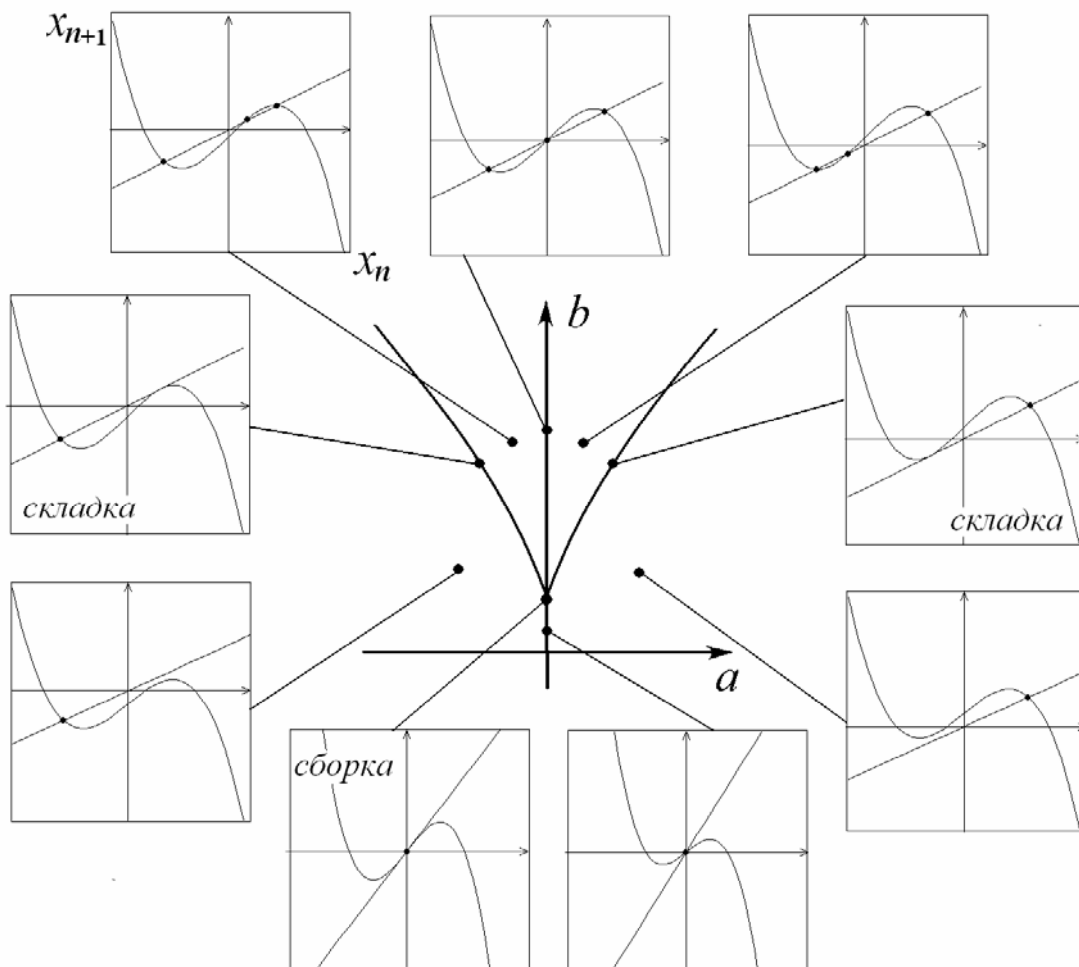


Рис.1.14. Конфигурации функции, задающей отображение (1.30), в разных точках плоскости параметров в окрестности точки сборки.

1.3.3. Понятия типичности и коразмерности

На примере точки сборки и отходящих от нее линий складок мы столкнулись с важным моментом в теории бифуркаций, который лежит в основе их классификации и позволяет сформулировать конструктивную стратегию исследования, восходящую к А. Пуанкаре. Ее идея состоит в том, чтобы не пытаться сразу анализировать *все* возможные феномены, которые реализуются в том или ином классе динамических систем, а классифицировать их *по степени типичности*. Или, иными словами, сначала изучить явления, представляющиеся наиболее вероятными при «случайном» выборе параметров. Такой подход приводит к важному понятию *коразмерности* бифуркаций. Поясним его более подробно.

Пусть система характеризуется всего двумя параметрами. Тогда при случайном выборе точки на плоскости параметров мы, скорее всего, попадем в *ситуации общего положения*, когда малое шевеление параметров не изменит тип динамики. Далее на плоскости параметров можно обнаружить линии, разделяющие области с разным типом поведения. Пересекая их по какой-либо траектории, мы сможем наблюдать соответствующую бифуркацию. Этот тип бифуркации можно назвать *однопараметрическим*, поскольку для его реализации достаточно варьировать один параметр (или одну комбинацию из двух параметров). В этом случае говорят, что мы имеем *бифуркацию коразмерности один*. Если теперь двигаться только вдоль этой выделенной линии, то мы будем наблюдать в определенной мере *вырожденный* тип поведения, при этом малые шевеления в пределах линии «скорее всего» не меняют этот тип поведения. Однако, путешествуя по этой линии, мы можем наткнуться на некоторую точку, где произойдет новая бифуркация даже в пределах этого вырожденного класса. Эта ситуация характеризуется еще большей степенью вырождения и имеет, как говорят, *коразмерность два*.

Эти рассуждения можно обобщить на случай трехмерного пространства параметров. Тогда бифуркациям коразмерности один будут отвечать некоторые поверхности, а коразмерности два – линии в пространстве параметров. При этом окажутся возможными бифуркации *коразмерности три*, которым будут отвечать некоторые избранные точки. Аналогичным образом можно ввести и бифуркации более высокой коразмерности.

Таким образом, коразмерность представляет собой *минимальное число параметров*, при котором тот или иной тип бифуркации является типичным. Например, для удвоений периода и касательной бифуркации это один параметр, а

для сборки – два.

Под коразмерностью можно понимать и *число дополнительных условий*, которое необходимо наложить для наблюдения данной бифуркации. Например, для касательной бифуркации оно одно: $f'(x) = +1$, поэтому ее коразмерность единица. А для сборки их два: $f'(x) = +1$, $f''(x) = 0$; таким образом, коразмерность сборки равна двум. Отсюда, кстати, сразу вытекает возможность бифуркации коразмерности три, которой отвечают условия $f'(x) = +1$, $f''(x) = 0$, $f'''(x) = 0$ и т.д.

Коразмерность – важное понятие, которое применимо не только в теории бифуркаций или теории катастроф, но имеет гораздо более общее значение, поскольку формирует стратегию исследования сложных явлений, акцентируя программу работ на исследовании наиболее типичных и характерных эффектов, а не на поиске наиболее экзотических феноменов.

1.3.4. Удвоения периода. Структуры «crossroad area»

Обсудим теперь бифуркации, связанные с мультипликатором $\mu = -1$, в двухпараметрическом случае. Обратимся вновь к двум разновидностям кубического отображения, которые в этом случае приводят к более существенным различиям. Начнем анализ с отображения (1.31).

Используя выражение для неподвижной точки этого отображения и приравнявая $\mu = -b + 3x^2 = -1$, без труда получаем выражение для бифуркационной линии:

$$a = \pm \frac{2}{3}(2 + b)\sqrt{\frac{b-1}{3}}. \quad (1.37)$$

Для этого отображения $f'''(x) = 6$, поэтому вдоль найденной линии производная Шварца:

$$Sf(x) = -f'''(x) - \frac{3}{2}[f''(x)]^2 \quad (1.38)$$

будет строго отрицательна. Таким образом, вся линия (1.37) отвечает бифуркации удвоения периода, т.е. рождению устойчивого 2-цикла. Взаимное расположение этой линии и линий касательной бифуркации показано на рис.1.15. Отметим, что найденная линия не имеет самопересечений.

Продолжим исследование отображения (1.31) и обсудим бифуркации 2-цикла. Уравнения для поиска элементов 2-цикла имеют вид:

$$\begin{aligned} x_2 &= a - bx_1 + x_1^3, \\ x_1 &= a - bx_2 + x_2^3. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Их следует дополнить условием на мультипликатор

$$\mu = (-b + 3x_1^2)(-b + 3x_2^2) = \pm 1. \quad (1.40)$$

В этом случае следует выбирать знак «+» для поиска касательной бифуркации 2-цикла и знак «-» – для бифуркации удвоения. (Отметим, что обращение мультипликатора 2-цикла в +1 отвечает одновременно и уже найденной нами линии удвоения для неподвижной точки. Действительно, как мы видели выше для двукратно проитерированной функции, в этом случае реализуется бифуркация «вилка».)

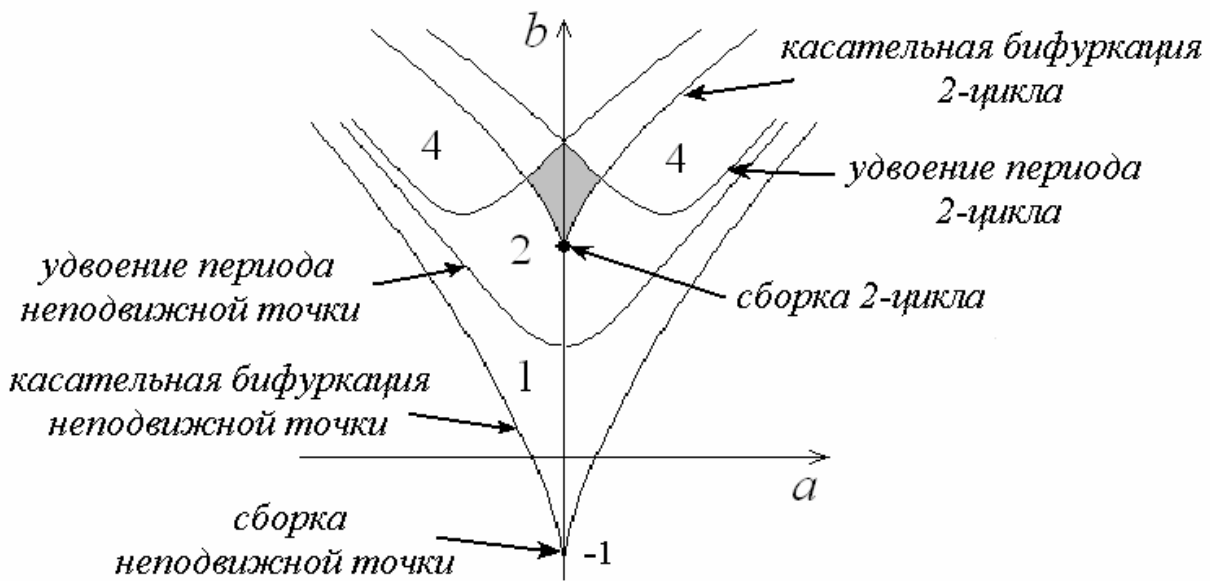


Рис.1.15. Бифуркации неподвижной точки и 2-цикла кубического отображения (1.31) на плоскости параметров; цифрами указан период цикла. Серым цветом показана область бистабильности 2-циклов. «Crossroad area» – область существования 2-циклов.

Соотношения (1.39)-(1.40) задают в неявной форме на плоскости (a, b) систему линий, также показанную на рис.1.15. На этом рисунке можно видеть, что область устойчивости 2-цикла снизу ограничена линией «предыдущего» удвоения периода. В центре этой области располагается точка сборки, от которой отходят две ветви линии касательной бифуркации. По их «берегам», в свою очередь, идут линии удвоения 2-цикла (рождения 4-цикла), которые проходят мимо точки сборки, приближаясь затем к линии предыдущего удвоения. На рис.1.15 серым цветом выделена область *бистабильности*, внутри которой существуют два устойчивых 2-цикла, и изображающая точка может притянуться к какому-то одному из них в зависимости от начальных условий.

Из рис.1.15 видно, что область существования 2-цикла имеет на плоскости

параметров некоторую характерную форму. Французский математик К. Мира предложил для такой структуры специальное название *crossroad area*. (В переводе с английского – перекресток. Некоторые исследователи называли такие образования «ласточками» из-за их характерной формы.)

Компьютерное моделирование выявляет *типичность* таких структур на плоскости параметров для самых разных отображений. Более того, они могут возникать на базе циклов всевозможных периодов и образовывать своего рода «элементы» в устройстве плоскости параметров. Типичность таких структур в определенной мере объясняет рис.1.14. Можно видеть, что при движении по плоскости параметров снизу вверх слева от точки сборки, функция отображения эволюционирует так, что складываются условия для *новой* бифуркации удвоения. Типичность же точек сборки на плоскости параметров объясняется величиной коразмерности два для этой бифуркации.

1.3.5. Жесткий переход через $\mu = -1$. Структуры «spring area»

Иная ситуация возникает для кубического отображения в форме (1.30). В этом случае условие обращение мультипликатора в минус единицу $\mu = b - 3x^2 = -1$ приводит к уравнению

$$a = \pm \frac{2}{3}(2 - b)\sqrt{\frac{b+1}{3}}. \quad (1.41)$$

Эта линия имеет более сложную форму, показанную на рис.1.16. В частности, она имеет самопересечение в точке $a = 0, b = 2$ и охватывает точку сборки, пересекая вертикальную ось в точке $a = 0, b = -1$.

Вычислим производную Шварца в этом случае. Поскольку $f'''(x) = -6$ и $f''(x) = -6x$, то

$$Sf(x) = -f'''(x) - \frac{3}{2}[f''(x)]^2 = 6(1 - 9x^2). \quad (1.42)$$

Таким образом, для анализируемого отображения производная Шварца может быть как отрицательной, так и положительной. Точки смена знака производной Шварца на плоскости параметров находим из совместного решения уравнений $1 - 9x^2 = 0$, $\mu = b - 3x^2 = -1$ и соотношения (1.41). Решая их, получаем:

$$b = -\frac{2}{3}, a = \pm \frac{16}{27}. \quad (1.43)$$

На рис.1.16 точки (1.43) (так же, как и точка сборки) отмечены жирными

кружками. Нетрудно показать, что линиям, уходящим от них вверх, отвечает отрицательная производная Шварца, т.е. это линии бифуркации удвоения периода. Отрезок, уходящий вниз и соединяющий эти точки, характеризуется положительной производной Шварца и отвечает жесткому переходу через мультипликатор $\mu = -1$.

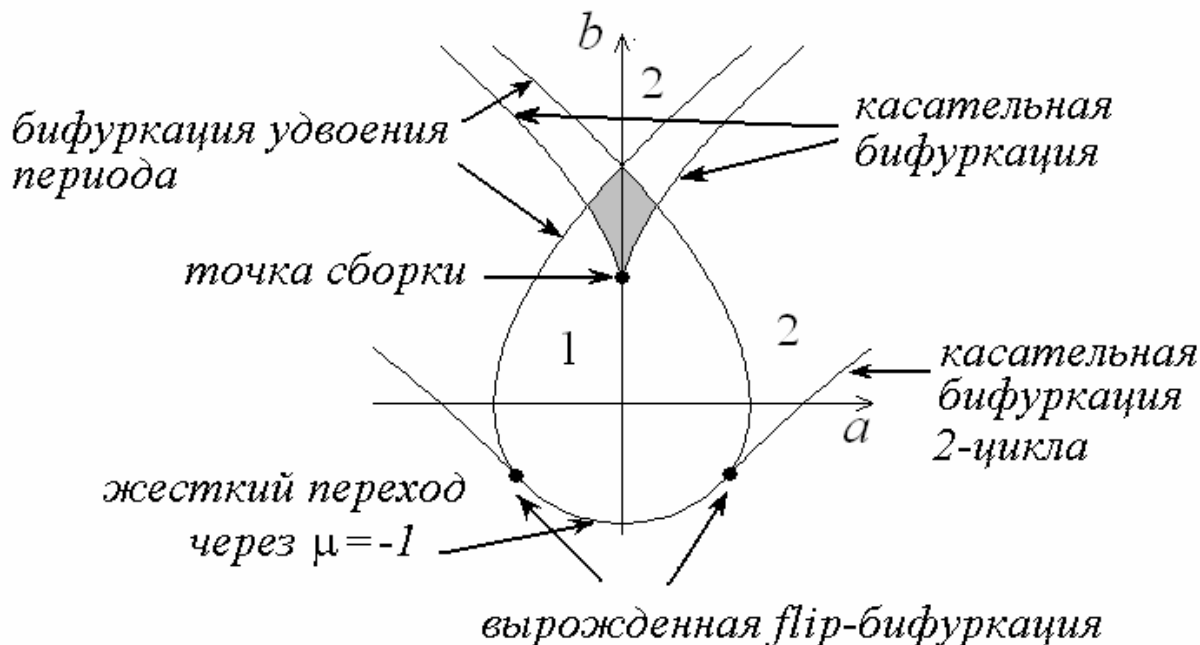


Рис.1.16. Бифуркации неподвижной точки кубического отображения (1.30) на плоскости параметров; цифрами указан период цикла. Серым цветом показана область бистабильности неподвижных точек. «Spring area» – область существования неподвижной точки.

Таким образом, наш анализ выявил новую бифуркацию *коразмерности два*: точку на линии $\mu = -1$, в которой линия удвоения превращается в линию жесткого перехода через мультипликатор $\mu = -1$. Можно, однако, показать, что мы установили не все бифуркационные линии, которые подходят к данной точке. Область существования устойчивого 2-цикла ограничена снизу линией касательной бифуркации, которая также подходит к исследуемой точке. В параметрической форме она ищется из условия реализации 2-цикла и обращения его мультипликатора в $+1$:

$$\begin{aligned} x_2 &= a + bx_1 - x_1^3, \\ x_1 &= a + bx_2 - x_2^3, \\ \mu &= (b - 3x_1^2)(b - 3x_2^2) = 1. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Соответствующая линия также показана на рис.1.16. Заметим, что линия жесткого перехода через мультипликатор $\mu = -1$ и линия касательной бифуркации 2-цикла подходят к обсуждаемой точке с одинаковым наклоном, т.е. линия, являющаяся их объединением и не имеет излома. Обсуждаемая бифуркация не

имеет в научной литературе строго определенного названия. Один из часто используемых вариантов: *вырожденная флип-бифуркация (degenerate flip)*.

Представленная на рис.1.16 конфигурация также оказывается типичной при двухпараметрическом анализе различных отображений в случае знакопеременной производной Шварца. Для такой структуры Мира предложил название «*spring area*».

Структуры «*crossroad area*» и «*spring area*» появляются в других двухпараметрических отображениях, а также, имея коразмерность два, наблюдаются и для трехпараметрических отображений в тех или иных сечениях пространства параметров. Конечно, для трехпараметрических отображений картина бифуркаций существенно усложняется. Возможно, например, превращение структуры «*crossroad area*» в «*spring area*», и наоборот, при вариации третьего параметра (так называемый «*crossroad area - spring area transition*»). Однако, в данном изложении мы ограничимся двухпараметрическим анализом.

Наконец, следует отметить, что структуры «*crossroad area*» и «*spring area*» возможны и в двумерных отображениях. Мы продемонстрируем это ниже.

1.3.6. Глобальный бифуркационный анализ

Анализ бифуркаций, как мы уже отмечали, предполагает, фактически, локальное исследование плоскости параметров. Переход к выделению структурных элементов типа «*crossroad area*» и «*spring area*» уже представляет в определенной мере отход от такой позиции, поскольку в поле зрения оказываются области пространства параметров конечных размеров. О нетривиальности такого шага говорит тот факт, что осознание роли этих структур было выполнено существенно позже открытия основных бифуркаций и обязано в значительной мере компьютерному моделированию.

Еще более «широкий» взгляд на плоскость параметров выявляет интересные моменты в ее организации. Наличие множества точек сборки на базе циклов разных периодов с отходящими от них линиями касательных бифуркаций дает возможность представлять плоскость параметров в виде сложной, «гофрированной» многолистной поверхности, рис.1.17.

Области перекрытия отдельных листов отвечают сосуществованию нескольких режимов (в зависимости от начальных условий), или, как говорят, *мультистабильности*.

Весьма характерным является существование целой системы сборок и, соответственно, структур «*crossroad area*» на базе циклов все возрастающих уд-

военных периодов, что качественно иллюстрирует рис.1.18. Такое устройство плоскости параметров характерно и для кубического отображения (1.31) в окрестности точки сборки на базе 2-цикла.

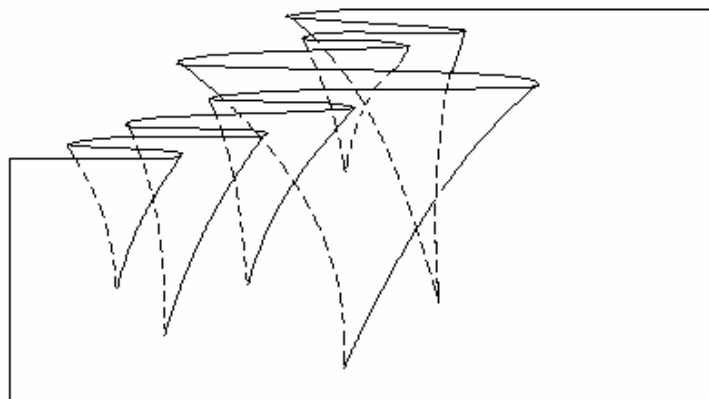


Рис.1.17. Качественный рисунок, иллюстрирующий многолистную структуру плоскости параметров.

В целом же структура плоскости параметров, как правило, является очень сложной и тонко организованной. Она насыщена мультистабильными состояниями, о которых сигнализируют структуры типа «*crossroad area*» или «*spring area*».

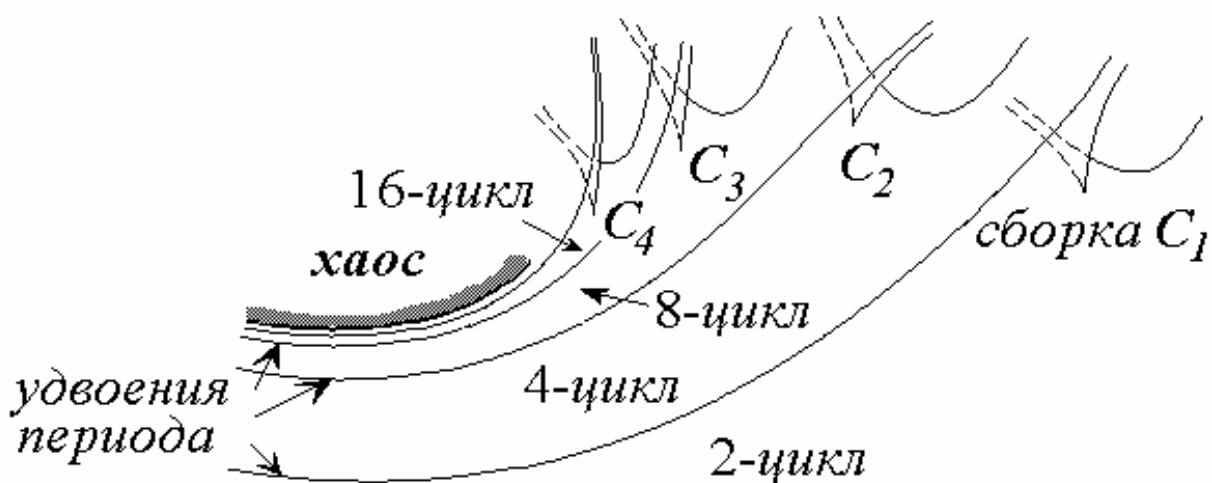


Рис.1.18. Иерархическая организация структур «*crossroad area*» на базе циклов удвоенного периода.

При проведении глобального бифуркационного анализа приходится прибегать к численным методам, поскольку аналитически удается найти только самые простые бифуркации неподвижных точек или 2-циклов. Для численного анализа бифуркаций можно использовать те или иные стандартные пакеты программ из сети Интернет. Например, достаточно эффективной и удобной является программа *Content*, которая позволяет искать как бифуркации коразмерности

Интересно проследить за линией D_3 , отвечающей мультипликатору $\mu = -1$. На рисунке она начинается как линия удвоения периода у левого обреза рамки, а затем посещает сначала окрестность точки сборки C_2 , затем – точки сборки C_3' , обходя вокруг нее, как характерно для структур «*spring area*». При этом небольшой фрагмент линии D_3 превращается в линию жесткого перехода (на рис.1.19 не показан). Затем линия D_3 посещает окрестность точки сборки C_3 и уходит через нижнюю границу рисунка.

Таким образом, линия удвоения периода D_3 оказывается весьма извилистой, посещающей окрестности разных точек сборки. При этом отрезки линии D_3 входят в разные системы фейгенбаумовских каскадов удвоений, отвечающие разным листам плоскости параметров. Соответственно, структуры типа «*spring area*» тоже могут образовывать иерархическую организацию на плоскости параметров.

Задачи

1. Как известно, в сечении конуса плоскостью может наблюдаться эллипс, парабола и гипербола. Какие из этих случаев являются случаями общего положения, а какие вырожденными?

2. Укажите примеры случаев общего положения и вырожденных ситуаций взаимного расположения тора и плоскости. В своих рассуждениях используйте метод малых шевелений

3. Какие типы бифуркаций возможны в отображении $x_{n+1} = \lambda \sin x_n$?

4. Оцените число итераций отображения $x_{n+1} = \lambda + x_n - x_n^2$, необходимое для прохождения «коридора» ширины $\Delta x = 0.1$, в случае $\lambda = -0.001$.

5. Покажите, что для отображения $x_{n+1} = \frac{\lambda x_n}{\sqrt{1 + x_n^2}}$ имеет место бифуркация типа «вилка». Найдите бифуркационное значение параметра и изобразите итерационные диаграммы для ситуаций до и после бифуркации.

6. Найдите значения параметра, отвечающие касательной бифуркации и бифуркации удвоения периода для неподвижной точки отображения $x_{n+1} = \lambda - x_n^4$.

7. Получите уравнения, определяющие значения переменной x и бифуркационные значения параметра λ для касательной бифуркации неподвижных точек отображения $x_{n+1} = \lambda \cos x_n$. Дайте графическое решение уравнения для пе-

ременной x . Покажите, что существует множество таких бифуркаций. Приближенно оцените соответствующие значения параметра λ . Прodelайте то же самое для бифуркации удвоения периода.

8. Изобразите с помощью компьютера двукратно проитерированную функцию $f(x) = 1 - \lambda x^2$. Опишите ее эволюцию с ростом параметра λ и укажите ситуацию бифуркации вилка, отвечающую моменту бифуркации удвоения периода в исходной системе. Укажите элементы 2-цикла на этом графике.

9. Пусть известны элементы 3-цикла логистического отображения $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$. Найдите мультипликатор цикла.

10. Изобразите сверхустойчивый 2-цикл логистического отображения на итерационной диаграмме. То же самое для цикла удвоенного периода.

11. Покажите, что при $\lambda = 1.75$ в логистическом отображении действительно имеет место касательная бифуркация 3-цикла.

12. Получите уравнение, с помощью которого можно найти 3-цикл максимальной устойчивости логистического отображения и определите соответствующее значение параметра λ (хотя бы приближенно).

13. Найдите производную Шварца для отображения $x_{n+1} = \lambda \cos x_n$. Возможен ли в такой системе жесткий переход через мультипликатор минус единица?

14. Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ может иметь разное число корней. Изобразите плоскость параметров (p, q) , разбитую на соответствующие области, и исследуйте вопрос о коразмерности каждой из возможных ситуаций

15. Напишите уравнения, отвечающие линиям касательной бифуркации для двухпараметрического отображения косинуса $x_{n+1} = \lambda \cos x_n + \varphi$. Получите аналитические оценки, используя разложение тригонометрических функций в ряд Тейлора.

16. Получите условия для основных бифуркаций в кватричном отображении $x_{n+1} = 1 + ax_n^2 + bx_n^4$.

17. Найдите точки сборки для отображения $x_{n+1} = \lambda \cos x_n + \varphi$ и нанесите их на плоскость параметров (φ, λ) .

18. Изобразите трехмерную картину для структуры «*crossroad area*», используя «портрет» сборки в виде трехмерной поверхности на рис.1.13.

19. Постройте карту динамических режимов для отображения $x_{n+1} = \lambda \cos x_n + \varphi$ на плоскости параметров (φ, λ) . Укажите основные «элементы» полученной картины.

20. Решите аналогичную задачу для отображения $x_{n+1} = 1 + ax_n^2 + bx_n^4$.

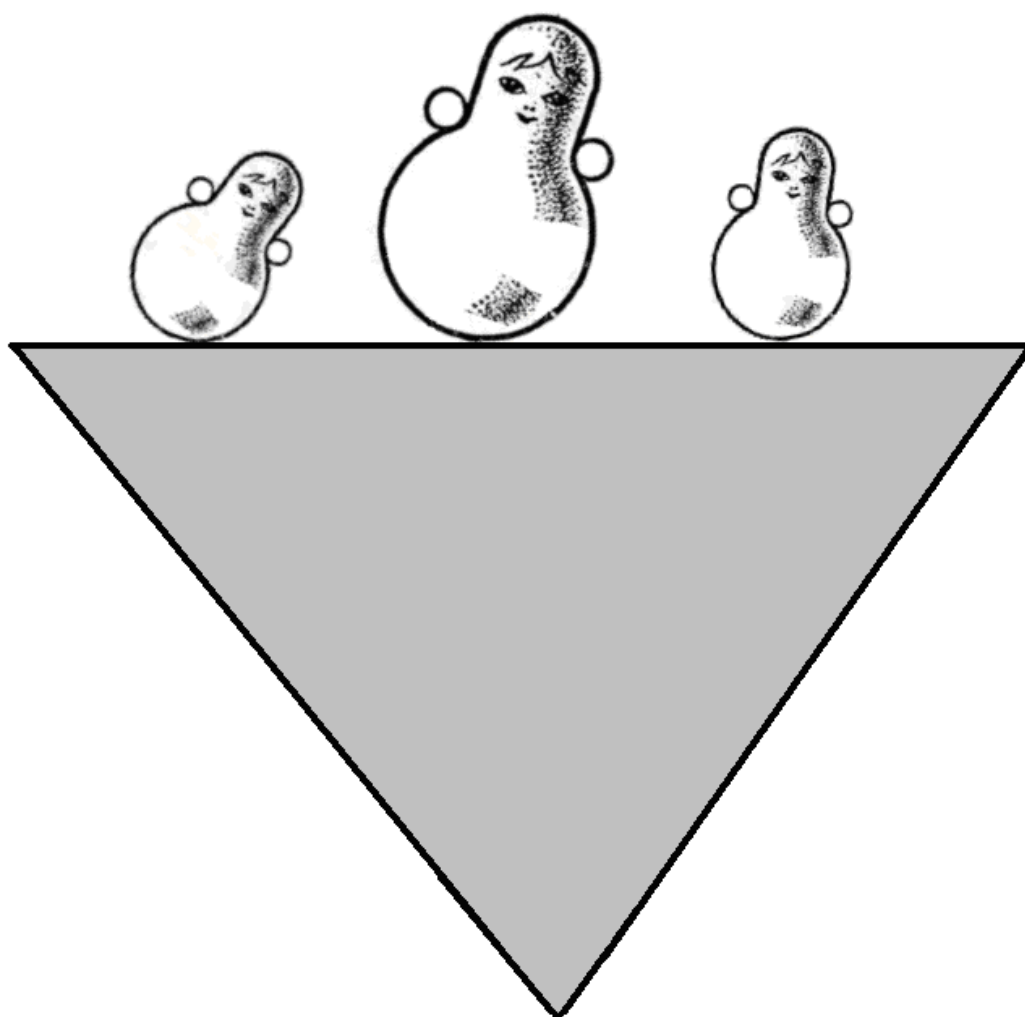
21. С помощью компьютера изобразите линии касательной бифуркации для обоих вариантов кубического отображения и наблюдайте метаморфозы задающей отображение функции при вариации параметров.

22. Покажите, что для кубического отображения (1.31) линия касательной бифуркации 2-цикла, выходящая из правой точки вырожденной *flip*-бифуркации коразмерности два, пересекает ось $b = 0$ в точке $a = \sqrt{2/3}$.

23. Проведите численный бифуркационный анализ отображения $x_{n+1} = \lambda \cos x_n + \varphi$.

24. Постройте карты динамических режимов трехпараметрического отображения $x_{n+1} = 1 + ax_n + bx_n^2 + cx_n^4$ для нескольких значений параметра c . Укажите характерные элементы на плоскости параметров.

Часть II
БИФУРКАЦИИ
ДВУМЕРНЫХ
ОТОБРАЖЕНИЙ



2.1. Двумерные отображения, неподвижные точки и мультипликаторы

Эволюция многих реальных и модельных нелинейных систем допускает описание с помощью *двумерных отображений*. Это такие системы, как отображение Икеды, описывающее возбуждаемый лазером кольцевой оптический резонатор в среде с фазовой нелинейностью; модели ускорения Ферми в виде задач о динамике частицы, возбуждаемой колеблющейся стенкой; отображение Эно, представляющее собой логистическое отображение с учетом запаздывания; модели нейронов и пр. [1-9].

В общем виде двумерное отображение задается с помощью соотношений

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, y_n), \\y_{n+1} &= g(x_n, y_n).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Здесь $f(x, y)$, $g(x, y)$ – некоторые (обычно гладкие) функции.

Динамика двумерных отображений происходит на *фазовой плоскости* двух переменных (x, y) . За счет появления второго измерения она может быть более разнообразной, чем в случае одномерных отображений. В частности, наряду с неподвижными точками, циклами и хаосом, возможны *квазипериодические режимы*. Впрочем, начнем обсуждение с простейшего режима, которому отвечает неподвижная точка.

Неподвижной точкой отображения (2.1) называют такую точку, которая переходит сама в себя при его однократной итерации. Соответственно, она является решением следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}x_0 &= f(x_0, y_0), \\y_0 &= g(x_0, y_0).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Исследуем динамику системы вблизи неподвижной точки, для чего положим $x_n = x_0 + \tilde{x}_n$ и $y_n = y_0 + \tilde{y}_n$, где \tilde{x}_n и \tilde{y}_n – малые возмущения. Тогда, линеаризуя отображение (2.1) вблизи неподвижной точки, получаем уравнения, описывающие динамику возмущений \tilde{x}_n и \tilde{y}_n :

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{n+1} &= f'_x \cdot \tilde{x}_n + f'_y \cdot \tilde{y}_n, \\ \tilde{y}_{n+1} &= g'_x \cdot \tilde{x}_n + g'_y \cdot \tilde{y}_n.\end{aligned}$$

Здесь производные вычислены в неподвижной точке (2.2). Последние соотношения удобно переписать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{y}_{n+1} \end{pmatrix} = \hat{M} \begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix},\tag{2.3}$$

где

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Матрица \hat{M} , составленная из частных производных функций, задающих отображение и вычисленных в неподвижной точке, представляет собой *матрицу Якоби*.

По своим свойствам динамические системы делятся на *консервативные* и *диссипативные*. Для консервативных систем якобиан матрицы \hat{M} равен единице: $J = 1$. В соответствии со свойствами матриц, условие $J = 1$ означает, что при эволюции любого малого элемента на фазовой плоскости его площадь сохраняется. Для диссипативных систем это не так – они обладают (по крайней мере, локально) свойством сжатия фазового пространства, в результате чего возможно существование притягивающих объектов – *аттракторов*, которые отвечают за установившуюся динамику системы.

Характер устойчивости неподвижной точки определяется свойствами матрицы Якоби \hat{M} . В рассматриваемом случае она является матрицей «два на два». Как известно, такая матрица имеет два собственных числа μ_1 и μ_2 , которые по определению и являются *мультипликаторами* неподвижной точки двумерного отображения. Именно мультипликаторы определяют, устойчива неподвижная точка или нет.

При работе с матрицами удобными величинами являются их *инварианты*, которые не меняются при переходе к какой-либо другой косоугольной системе координат. Из свойств матриц следует, что мультипликаторы удовлетворяют следующим соотношениям

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 &= S, \\ \mu_1 \cdot \mu_2 &= J, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где S и J – два *инварианта* матрицы, ее *след* и *якобиан* соответственно. Происхождение этих двух инвариантов легко понять, если матрица приведена к диагональному виду, так что

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

По определению след – это сумма диагональных элементов такой матрицы, а якобиан для диагональной матрицы равен их произведению. Тогда приходим к соотношениям (2.5).

Далее, по теореме Виета из (2.5) получаем, что мультипликаторы удовле-

творяют уравнению:

$$\mu^2 - S\mu + J = 0. \quad (2.7)$$

Это квадратное уравнение, решение которого имеет следующий вид:

$$\mu_{1,2} = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - J}. \quad (2.8)$$

Таким образом, мультипликаторы неподвижной точки двумерного отображения могут быть либо действительными, если $S^2 > 4J$, либо комплексно-сопряженными, если $S^2 < 4J$. Это новый момент, связанный с существованием двух измерений. В соответствии с этим фактом неподвижные точки двумерных отображений делятся на два типа.

Сначала рассмотрим случай, когда оба мультипликатора являются действительными. Обсудим эволюцию возмущений в малой окрестности неподвижной точки, когда можно использовать линеаризованное в ее окрестности отображение (2.3). Известно, что матрица с действительными собственными числами некоторой линейной заменой переменных

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \hat{m} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

может быть приведена к диагональному виду. При этом замена переменных (2.9) отвечает введению некоторой *косоугольной системы координат* на фазовой плоскости старых переменных, рис.2.1.

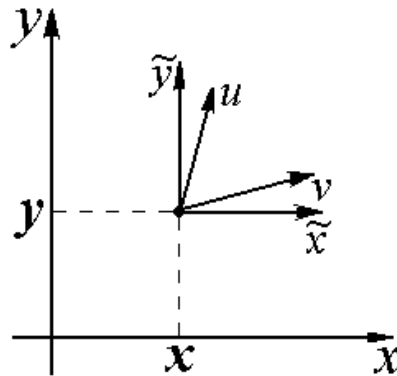


Рис.2.1 Геометрическое пояснение перехода от переменных (x, y) к новым переменным (u, v) .

Для новых переменных справедливо отображение

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \hat{m} \hat{M} \hat{m}^{-1} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

а новая матрица эволюции системы имеет вид

$$\hat{m}M\hat{m}^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

(В теории матриц матрицы \hat{M} и $\hat{m}M\hat{m}^{-1}$ называют *подобными*, а \hat{m} – *матрицей перехода*.)

Соотношения (2.10)-(2.11) делают понятной эволюцию неподвижной точки в новой системе координат (u, v) . Действительно, в соответствии с (2.11) линеаризованное двумерное отображение в новой системе координат распадается на два несвязанных одномерных отображения:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \mu_1 u_n, \\ v_{n+1} &= \mu_2 v_n. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Таким образом, в новой системе координат каждая переменная эволюционирует независимо от другой, причем на каждой итерации величина возмущения умножается на соответствующий мультипликатор.

В результате можно сформулировать критерий устойчивости неподвижной точки двумерного отображения: она устойчива, если оба мультипликатора лежат в диапазоне от -1 до $+1$, и неустойчива вне этого диапазона. Нетрудно также понять, как будет выглядеть динамика вблизи неподвижной точки. В ходе итераций в ее окрестности изображающая точка будет совершать «прыжки» по плоскости (u, v) , характер которых зависит от величины и знака мультипликатора. Очевидно, что возможны четыре комбинации знаков, которые приводят к характерным ситуациям, показанным на рис. 2.2. Для наглядности точки, отвечающие соседним «следам» на фазовой плоскости соединены отрезками прямых линий.

Пусть оба мультипликатора положительные и меньше единицы. Тогда, если взять начальную точку в первой четверти плоскости координат, она, согласно уравнениям (2.12), будет «прыгать» по некоторой траектории, приближаясь к началу координат, как показано на рис.2.2а. Если же один мультипликатор положительный, а другой отрицательный, то динамика в окрестности неподвижной точки будет несколько иной. А именно, теперь изображающая точка будет приближаться к началу координат, поочередно посещая либо первую и вторую четверти, если мультипликатор μ_1 – отрицательный, а μ_2 – положительный (рис.2.2б), либо первую и четвертую четверти, если мультипликатор μ_1 – положительный, а μ_2 – отрицательный (рис.2.2в). И, наконец, если оба мультипликатора отрицательные, то изображающая точка будет вести себя как показано на рис.2.2г: «прыгать» из первой четверти в третью, приближаясь к началу координат.

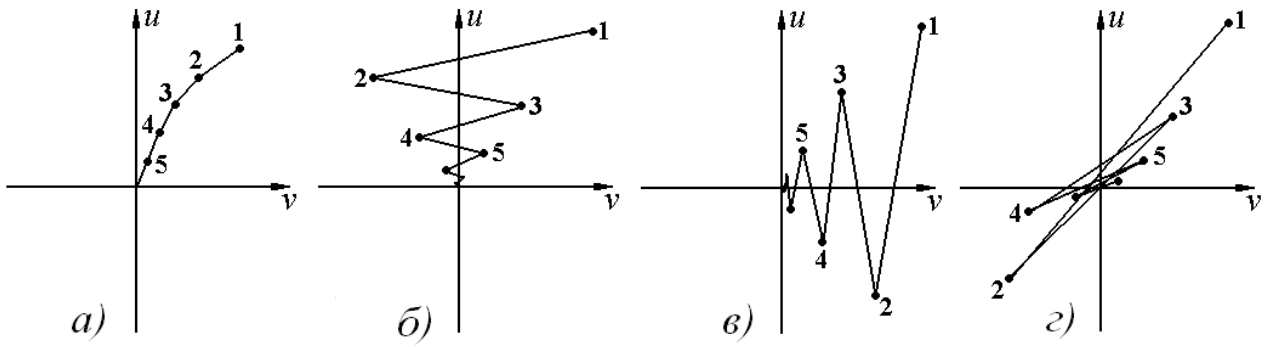


Рис.2.2. Динамика в окрестности устойчивой неподвижной точки двумерного отображения, задаваемая линеаризованным отображением (2.12), в зависимости от знаков мультипликаторов: а) $0 < \mu_1 < 1$ и $0 < \mu_2 < 1$; б) $-1 < \mu_1 < 0$ и $0 < \mu_2 < 1$; в) $0 < \mu_1 < 1$ и $-1 < \mu_2 < 0$; г) $-1 < \mu_1 < 0$ и $-1 < \mu_2 < 0$. Цифры означают номер итерации.

Теперь рассмотрим случай комплексно-сопряженных мультипликаторов, которые можно представить в виде: $\mu_1 = \alpha + i\beta$ и $\mu_2 = \alpha - i\beta$. Из теории матриц известно, что при таком условии матрица «два на два» приводится заменой переменных к виду:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

В этом случае линеаризованное двумерное отображение примет вид

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \alpha u_n - \beta v_n, \\ v_{n+1} &= \beta u_n + \alpha v_n. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Такая замена уже не приводит к системе несвязанных уравнений. Для того, чтобы описать эволюцию системы в этом случае, перейдем к полярным координатам. Это удобно сделать, вводя комплексную переменную $z = u + iv$.

Умножим второе соотношение (2.14) на мнимую единицу и сложим с первым. Тогда получаем:

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= u_{n+1} + iv_{n+1} = \alpha u_n - \beta v_n + i\beta u_n + i\alpha v_n = \\ &= \alpha(u_n + iv_n) + i\beta(u_n + iv_n) = (\alpha + i\beta)z_n. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Положим

$$\mu = \alpha + i\beta = \rho \cdot \exp(i\theta), \quad (2.16)$$

где $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ – модуль мультипликатора, а θ – его фаза (аргумент). Комплексную переменную z запишем в виде $z = r \cdot \exp(i\varphi)$, где r и φ – модуль (радиус) и фаза переменной z соответственно.

Подставив выражение для μ и z в (2.15), после деления действительной и мнимой частей, для радиуса и фазы переменной z получим следующую систему несвязанных уравнений:

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \rho r_n, \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \theta. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Таким образом, в полярных координатах на каждой итерации радиус точки умножается на величину, равную модулю мультипликатора ρ , а фаза получает добавку, равную аргументу мультипликатора θ .

Для устойчивости неподвижной точки необходимо, чтобы после каждой итерации изображающая точка приближалась к ней. Из (2.17) следует, что это условие будет выполняться в том случае, если модуль мультипликатора $\rho = |\mu|$ будет меньше единицы. Соответственно, если модуль мультипликатора больше единицы, то неподвижная точка двумерного отображения будет неустойчивой.

Возможно весьма разнообразное поведение изображающей точки, характер которого будет зависеть от величины аргумента мультипликатора. Для примера на рис.2.3 показана эволюция изображающей точки в случаях, когда модуль мультипликатора слегка меньше единицы, а аргумент а) близок к нулю, б) равен $\pi/2$, в) близок к π . Для наглядности точки, отвечающие соседним итерациям, также соединены отрезками прямых линий, цифры означают номер итерации.

Из рисунка 2.3 хорошо видно, что в случае комплексных мультипликаторов движение в окрестности неподвижной точки будет напоминать своего рода спираль. При этом вид траектории будет существенно зависеть от того, рационально или иррационально число $w = \theta/2\pi$. В первом случае движение по угловой переменной φ будет периодическим (рис.2.3б), а во втором о – нет (рис.2.3а,в).

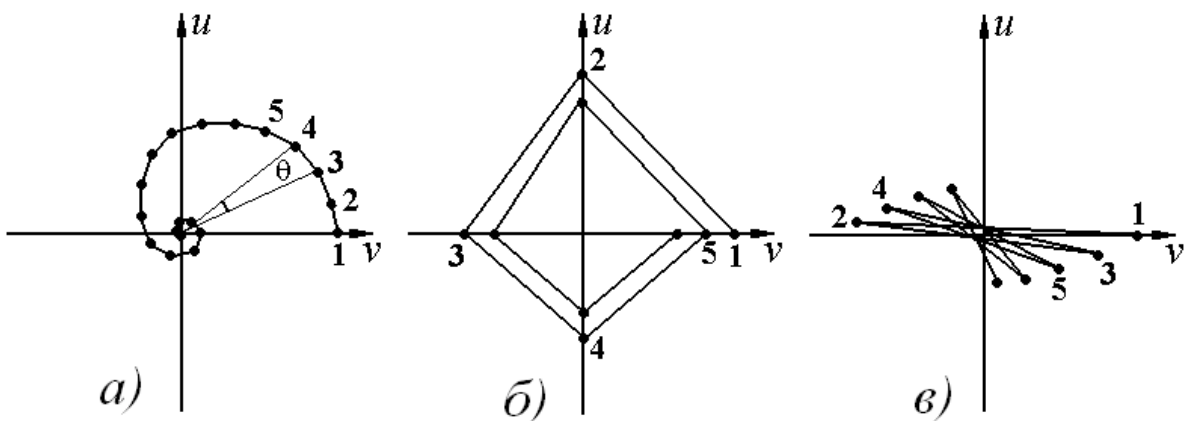


Рис.2.3. Динамика в окрестности неподвижной точки двумерного отображения, задаваемая линеаризованным отображением (2.14), в зависимости от величины аргумента мультипликатора: а) $\theta \approx 0$; б) $\theta = \pi/2$; в) $\theta \approx \pi$. Модуль мультипликатора ρ немного меньше единицы.

Отметим, что случаи, представленные на рис.2.2, можно с использованием

терминологии потоковых систем назвать *устойчивыми узлами*, а на рис.2.3 – *устойчивыми фокусами*.

Чтобы проиллюстрировать динамику в окрестности *неустойчивой точки*, можно обратить время на рис.2.2 и 2.3. Тогда изображающая точка будет убежать от неподвижной по соответствующей траектории. Отметим, что для случая двух переменных появляется новый тип неподвижных точек, которые называют *седловыми* (или просто *седлами*). В этом случае один из мультипликаторов по модулю меньше единицы, а второй – больше единицы. При этом существует некоторое направление, по которому траектории приближаются к неподвижной точке, и направление, вдоль которого они убегают, см. раздел 2.10.

2.2. Треугольник устойчивости и бифуркации неподвижных точек

Теперь мы можем определить границы области устойчивости неподвижной точки двумерного отображения. Их естественно выявить в пространстве параметров исходного отображения. Однако удобно, оказывается, рассматривать в качестве параметров инварианты след S и якобиан J матрицы Якоби отображения. Понятно, что если говорить об анализе устойчивости конкретного отображения, то надо указать связь этих инвариантов с параметрами отображения. Но использование в качестве параметров инвариантов обладает тем преимуществом, что дает *универсальную картину* для всех двумерных отображений.

Как мы отмечали выше, граница области устойчивости задается условиями $\mu = +1$ и $\mu = -1$ для действительных мультипликаторов, и $|\mu| = 1$ – для комплексных. В первом случае из соотношения (2.7) $\mu^2 - S\mu + J = 0$ получаем $1 - S + J = 0$. Во втором случае, полагая $\mu = -1$ в (2.7), получаем $1 + S + J = 0$. И, наконец, третий тип границы отвечает тому, что мультипликаторы неподвижной точки принимают комплексные значения, а их модуль равен единице. В соответствии с (2.8) мультипликаторы являются комплексными, если $J > S^2 / 4$, и тогда $\mu = S/2 \pm i\sqrt{J - S^2/4}$. Отсюда легко находим, что $\mu \cdot \mu^* = J$. Таким образом, условие $|\mu| = 1$ означает, что $J = 1$.

Все три найденные линии изображены на плоскости параметров (S, J) на рис.2.4. Пересекаясь, они образуют на плоскости параметров *треугольник устойчивости* неподвижной точки, внутренняя область которого соответствует устойчивой неподвижной точке и показана серым цветом, а внешняя область – неустойчивой. Более темным серым оттенком обозначена область, в которой

мультипликаторы принимают комплексные значения. Из формулы (2.8) следует, что эта область ограничена снизу параболой $J = S^2 / 4$.

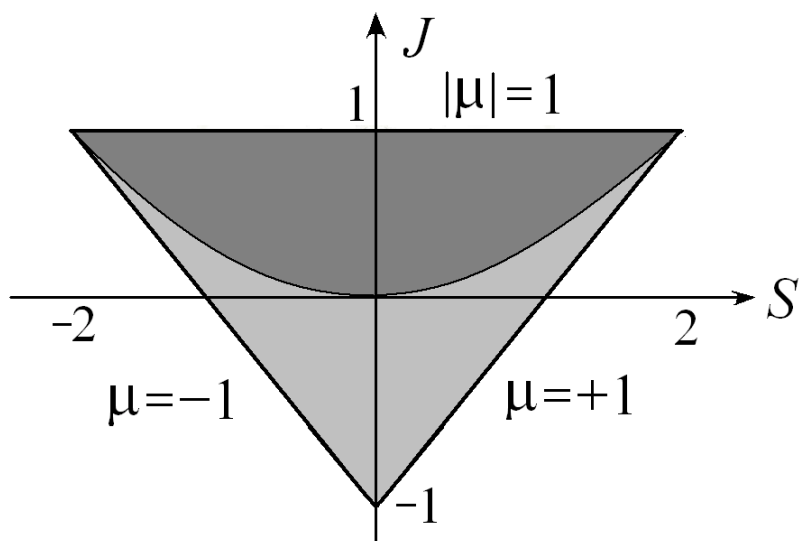


Рис. 2.4. Треугольник устойчивости неподвижной точки двумерного отображения на плоскости след S - якобиан J матрицы Якоби. Приведены значения мультипликатора, отвечающего за соответствующую бифуркацию.

Отметим, что в наших рассуждениях мы фиксировали один из мультипликаторов, однако, легко найти и второй. Сделаем это, и обсудим поведение мультипликаторов на границах треугольника. Пусть сначала мультипликаторы действительные. Рассмотрим линию $1 - S + J = 0$. Из соотношения (2.8) легко получаем, что $\mu_1 = +1$, а $\mu_2 = S - 1$. Таким образом, при движении по плоскости след - якобиан от нижней вершины треугольника к правой вершине вдоль его правой границы первый мультипликатор остается постоянным и равным $+1$, а второй изменяется от -1 до $+1$, рис.2.5.

Аналогично для левой границы треугольника, заданной соотношением $1 + S + J = 0$, получаем, что $\mu_1 = S + 1$, а $\mu_2 = -1$. Следовательно, при движении от нижней вершины треугольника к левой вершине вдоль его левой границы второй мультипликатор остается постоянным и равным -1 , а первый изменяется от $+1$ до -1 , рис.2.5.

Теперь рассмотрим верхнюю границу. Она отвечает тому, что мультипликаторы неподвижной точки являются комплексно-сопряженными. В этом случае их удобно записать в виде $\mu = \rho \cdot \exp(i\theta)$, где ρ - модуль мультипликатора, а θ - его фаза. На этой границе $\rho = 1$, а фаза θ будет меняться в зависимости от параметра S . Эту зависимость легко найти из соотношения $\mu = S/2 \pm i\sqrt{J - S^2/4}$, учитывая, что $J = 1$. Тогда для фазы мультипликаторов имеем:

$$\operatorname{tg}\theta = \pm \frac{\sqrt{1 - S^2/4}}{S/2}.$$

В результате при движении вдоль верхней границы треугольника, от его правой вершины $S = +2$ к левой $S = -2$, фаза одного из мультипликаторов будет меняться от $\theta = 0$ до $\theta = \pi$. Причем, при $S = 0$ фаза будет точно равна $\theta = \pi/2$. Отметим, что изменение фазы второго мультипликатора будет происходить в обратном направлении, т.е. от π до 0 .

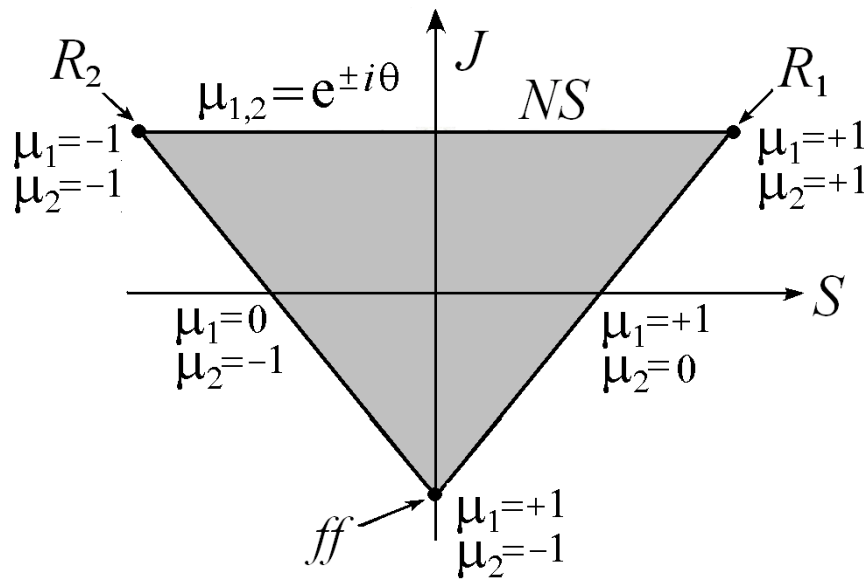


Рис.2.5. Треугольник устойчивости на плоскости (S, J) ; обозначены линия бифуркации Неймарка-Сакера NS , а также бифуркационные точки коразмерности два: резонанс 1:1 R_1 , резонанс 1:2 R_2 , точка *fold-flip* ff . Указаны значения обоих мультипликаторов в характерных точках.

Проведенное выше рассмотрение позволяет легко классифицировать простейшие бифуркации неподвижных точек двумерного отображения. Границы треугольника устойчивости отвечают бифуркациям *коразмерности один*, а его вершины – бифуркациям *коразмерности два*.

Перечислим сначала бифуркации коразмерности один. Две из них известны из анализа одномерных отображений, а третья является новой.

а) *Касательная бифуркация (fold)*, $\mu = +1$. (Еще один вариант названия – *бифуркация седло-узла*.) Ей отвечает правая граница треугольника на рис.2.5:

$$1 - S + J = 0. \quad (2.18)$$

б) *Бифуркация удвоения периода (flip)*, $\mu = -1$. Ей отвечает левая граница треугольника на рис.2.5³:

³ В принципе, возможна и бифуркация жесткого перехода через мультипликатор минус еди-

$$1 + S + J = 0. \quad (2.19)$$

в) *Бифуркация Неймарка-Сакера*, $J = 1$. Это новая бифуркация, характерная для систем с размерностью фазового пространства два и более. Ей отвечает верхняя граница треугольника:

$$J = 1. \quad (2.20)$$

Теперь перечислим бифуркации коразмерности два, которым отвечают точки на границе треугольника устойчивости. Они все являются новыми, и не имеют аналогов в теории одномерных отображений. Соответственно, они имеют свои специальные названия.

а) *Резонанс 1:1*, R_1 . При такой бифуркации оба мультипликатора обращаются в единицу, $\mu_1 = \mu_2 = +1$. Условием этой бифуркации является:

$$S = 2, J = 1. \quad (2.21)$$

б) *Резонанс 1:2*, R_2 . Оба мультипликатора обращаются в минус единицу, $\mu_1 = \mu_2 = -1$. Условие бифуркации имеет вид:

$$S = -2, J = 1. \quad (2.22)$$

в) *Бифуркация fold-flip, ff*. Для этой бифуркации $\mu_1 = +1$, $\mu_2 = -1$ и

$$S = 0, J = -1. \quad (2.23)$$

На плоскости инвариантов матрицы Якоби эти бифуркационные точки являются соответствующими вершинами треугольника, рис.2.5.

2.3. Бифуркации циклов

Как и в случае одномерных отображений, анализ устойчивости неподвижных точек двумерных отображений легко переносится на циклы. Для отображения в общем виде (2.1) элементы 2-цикла определяются из соотношений:

$$\begin{aligned} x_2 = f(x_1, y_1), & \quad x_1 = f(x_2, y_2), \\ y_2 = g(x_1, y_1), & \quad y_1 = g(x_2, y_2). \end{aligned} \quad (2.24)$$

На фазовой плоскости 2-циклу будет отвечать аттрактор в виде двух точек, между которыми последовательно совершает «прыжки» изображающая точка.

Линеаризуя отображение (2.1) и применяя его дважды, приходим к следующей матрице Якоби 2-цикла:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix}_{\substack{x=x_2 \\ y=y_2}} \cdot \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix}_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}}. \quad (2.25)$$

ница, как в случае одномерных отображений. Но для двумерных отображений нет такого простого критерия, как производная Шварца, для разделения этих двух типов поведения.

Она представляет собой произведение двух матриц, вычисленных для первого и второго элементов цикла соответственно. Собственные числа такой матрицы будут служить мультипликаторами 2-цикла. Поскольку 2-цикл можно рассматривать как неподвижную точку двукратно проитерированного отображения, то весь анализ устойчивости неподвижной точки переносится и на 2-цикл.

Все вышеизложенное справедливо для циклов других периодов.

2.4. Бифуркационный анализ отображения Эно

Проиллюстрируем проведенное выше рассмотрение на примере простейшего двумерного квадратичного отображения – отображения Эно:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - by_n, \\y_{n+1} &= x_n.\end{aligned}\tag{2.26}$$

Это отображение можно интерпретировать как логистическое отображение с дополнительным запаздыванием на один шаг дискретного времени: $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 - bx_{n-1}$. Полагая $y_{n+1} = x_n$, приходим к (2.26).

Неподвижные точки отображения Эно определяются соотношением:

$$x_0 = y_0 = \frac{-(1+b) \pm \sqrt{(1+b)^2 + 4\lambda}}{2\lambda}.\tag{2.27}$$

Запишем теперь матрицу Якоби. Для этого надо найти соответствующие частные производные, так что в результате получаем:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} -2\lambda x_0 & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\tag{2.28}$$

Перейдем к параметрам след S и якобиан J матрицы Якоби. Для этого след вычисляем как сумму диагональных элементов матрицы, а якобиан – по известному правилу вычисления определителя. Тогда $S = -2\lambda x_0$, $J = b$. Используя выражение для неподвижной точки (2.27), получаем связь следа и якобиана с исходными параметрами отображения:

$$\begin{aligned}S &= (1+b) \mp \sqrt{(1+b)^2 + 4\lambda}, \\J &= b.\end{aligned}\tag{2.29}$$

Таким образом, отображение Эно характеризуется *постоянным якобианом*. Это означает, что оно будет демонстрировать не все описанные выше бифуркации, поскольку условие диссипативности отображения $|b| < 1$ в этом случае означает $|J| < 1$ и бифуркация Неймарка-Сакера невозможна. В отображении Эно будут наблюдаться только касательная бифуркация и бифуркация удвоения пе-

риода. То есть отображение Эно лишь обобщает уже известные для одномерных отображений бифуркации на случай двух измерений. Тем не менее, его бифуркационный анализ представляет интерес, как пример приложения представленного выше подхода.

Начнем анализ с касательной бифуркации, условие которой задается соотношением $1 - S + J = 0$. Используя (2.29), получаем:

$$1 - b - 1 \pm \sqrt{(b+1)^2 + 4\lambda} + b = 0,$$

что после некоторых преобразований дает условие

$$\lambda = -\frac{(1+b)^2}{4}. \quad (2.30)$$

Будем постепенно увеличивать λ , двигаясь по плоскости (b, λ) вдоль линии $b = const$ снизу вверх, рис.2.6.

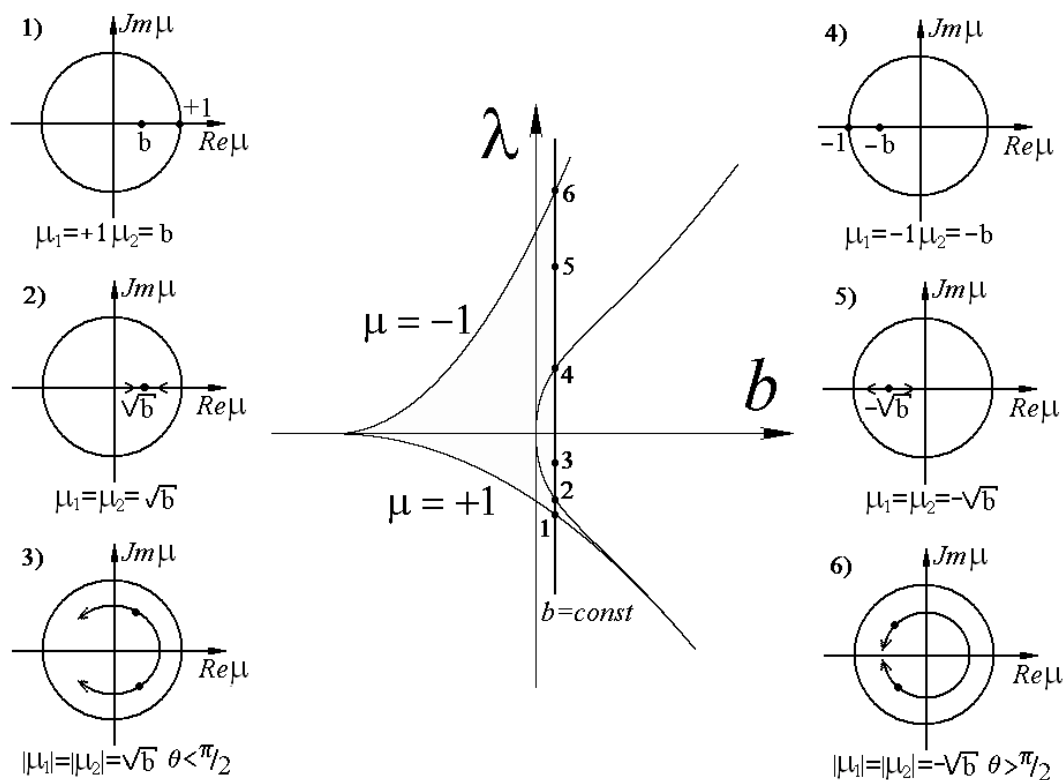


Рис.2.6. Качественная эволюция положения мультипликаторов неподвижной точки отображения Эно на комплексной плоскости при движении по плоскости параметров (b, λ) вдоль линии $b = const$. Цифры отвечают соответствующим точкам на плоскости параметров.

При $\lambda < -\frac{(1+b)^2}{4}$ в отображении Эно нет неподвижных точек. Устойчивая

и неустойчивая точки появляются в результате касательной бифуркации при выполнении условия (2.30). Мультипликаторы при этом сначала будут оста-

ваться действительными, но при условии $S^2 = 4J$ сольются на комплексной плоскости и станут комплексно-сопряженными. Для параметра λ этот момент отвечает условию $\lambda = b - \sqrt{b}(1+b)$. Затем мультипликаторы движутся по окружности радиуса \sqrt{b} , обходят начало координат, и снова сливаются при условии $\lambda = -b + \sqrt{b}(1+b)$. После чего они опять расходятся вдоль действительной оси. Наконец, при выполнении условия $1 + S + J = 0$, которому отвечает:

$$\lambda = \frac{3(1+b)^2}{4}, \quad (2.31)$$

один из мультипликаторов обратится в -1 и произойдет бифуркация удвоения периода.

Заметим, что для отображений с постоянным якобианом мультипликаторы никогда не обращаются в ноль в силу соотношения $\mu_1 \mu_2 = J$. Это существенное отличие от случая одномерных отображений. Соответственно, у двумерных отображений не бывает сверхустойчивых циклов. «Наиболее устойчивая» ситуация занимает некоторый диапазон по параметру, отвечающий движению мультипликаторов в комплексной плоскости.

Перейдем теперь к анализу устойчивости 2-цикла. Элементы 2-цикла несложно найти с помощью соотношений (2.24) и (2.26)

$$x_{1,2} = \frac{(1+b) \pm 2\sqrt{\lambda - 3(1+b)^2/4}}{2\lambda}, \quad (2.32)$$

$$y_{1,2} = x_{2,1}.$$

Вычислим матрицу Якоби. В соответствии с формулой (2.25) получаем

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} -2\lambda x_2 & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\lambda x_1 & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\lambda^2 x_1 x_2 - b & 2\lambda x_2 \\ -2\lambda x_1 & -b \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Откуда получаем выражение для следа и якобиана:

$$S = 4\lambda^2 x_1 x_2 - 2b, \quad (2.34)$$

$$J = b^2.$$

Если теперь воспользоваться соотношением $x_2 x_1 = \frac{(1+b)^2 - \lambda}{\lambda^2}$, то имеем

$$S = 4(1+b)^2 - 4\lambda - 2b, \quad (2.35)$$

$$J = b^2.$$

(Отметим, что якобиан можно вычислить и непосредственно из свойств матрицы, используя что для произведения матриц $J = J_1 J_2$.)

Определим теперь бифуркации 2-цикла. Очевидно, что касательной бифуркации 2-цикла отвечает линия, заданная соотношением (2.31), т.е. линия удвое-

ния неподвижной точки. Поэтому нам осталось найти линии удвоения периода 2-цикла. Используя соотношение $1 + S + J = 0$, после некоторых преобразований получаем условие удвоения периода для 2-цикла:

$$\lambda = (1 + b)^2 + (1 - b)^2 / 4. \quad (2.36)$$

Таким образом, устойчивая неподвижная точка рождается в результате касательной бифуркации, затем она теряет устойчивость с рождением 2-цикла, который, в свою очередь, теряет устойчивость в момент рождения 4-цикла. Соответствующие бифуркационные линии на плоскости (b, λ) задаются соотношениями (2.30), (2.31), (2.36) и определяют на ней линии, изображенные на рис.2.7. При движении по плоскости этих параметров вдоль линии $b = 0$ можно наблюдать каскад удвоений, отвечающий логистическому отображению.

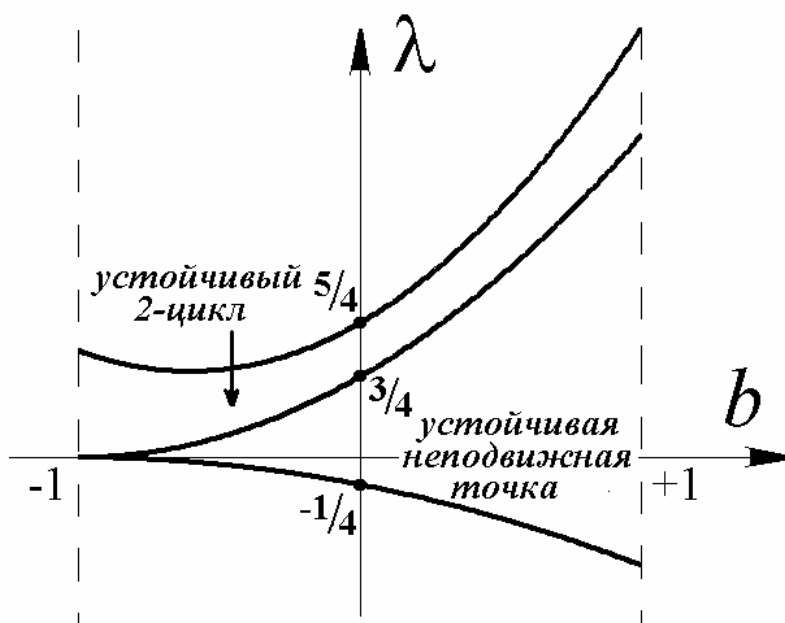


Рис.2.7. Плоскость (b, λ) отображения Эно и линии простейших бифуркаций.

К сожалению, аналитическое исследование бифуркаций долгопериодических циклов невозможно. Впрочем, можно сделать некоторые качественные заключения. Якобиан двумерного отображения отвечает за сжатие элементарной площадки на плоскости динамических переменных. Якобиан неподвижной точки равен b , а 2-цикла $-b^2$. В силу свойства якобиана матрицы Якоби ясно, что якобиан 4-цикла будет равняться b^4 и т.д. Таким образом, с ростом периода циклов якобиан очень быстро стремится к нулю, что на геометрическом языке означает сильное сжатие в фазовом пространстве и, фактически, эффективность некоторого одномерного отображения.

При этом весьма характерно следующее поведение мультипликаторов. Когда мультипликаторы комплексные, то по мере удвоений периода они двигают-

ся по окружностям все меньшего и меньшего радиуса. При больших периодах циклов они, фактически, двигаются по действительной оси: один из них изменяется от $+1$ до -1 , как в одномерном отображении, а второй находится практически в нуле. Это достаточно общее соображение объясняет, почему двумерные отображения для долгопериодических режимов демонстрируют универсальность Фейгенбаума.

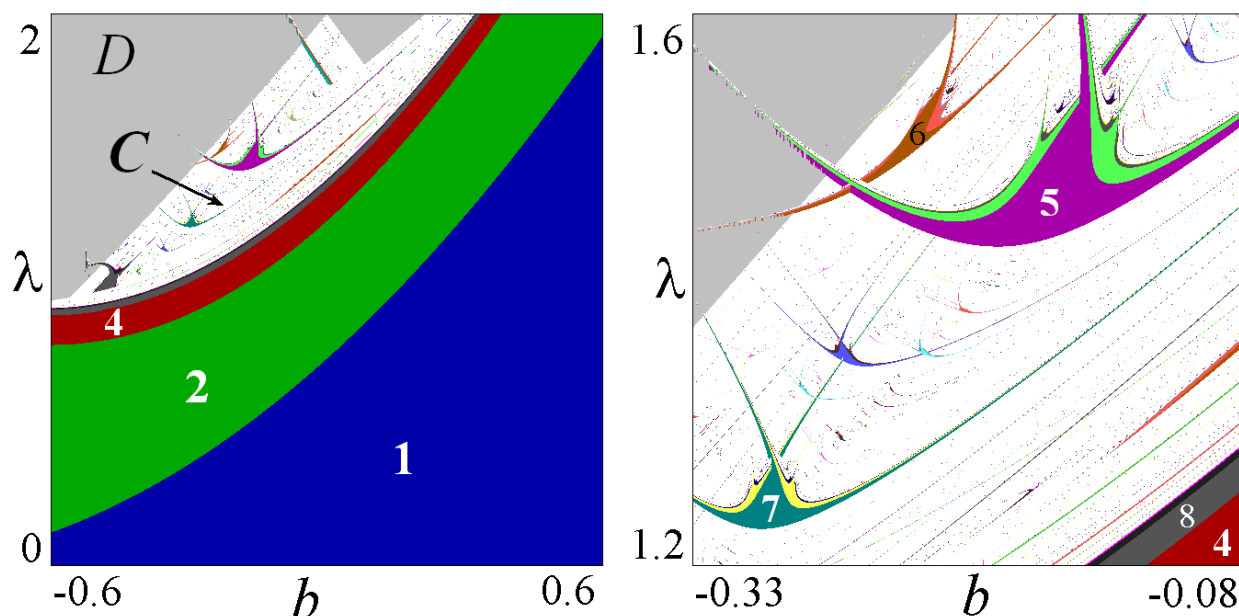


Рис.2.8. Карта динамических режимов и ее увеличенный фрагмент для отображения Эно. Цифрами обозначены периоды режимов, D – область разбегания траекторий, C – хаос.

Для более детального исследования плоскости параметров приходится прибегать к численным методам. На рис.2.8а показана построенная численно иллюстрация в виде *карты динамических режимов*. Этот метод представляет собой достаточно удобный способ определения типов колебательных режимов в различных точках плоскости параметров. В рамках такого представления разными цветами на плоскости параметров показывают области существования устойчивых режимов разных периодов, а также области непериодических режимов, в данном случае *хаоса* C (*chaos*) и «убегания» траекторий на бесконечность D (*divergency*). Область разбегания траекторий показана серым цветом, а хаоса – белым⁴. На карте можно видеть линии рождения 2- и 4-цикла, подтверждающие аналитическое рассмотрение в рамках бифуркационного анализа, а также области долгопериодических циклов. Внутри области хаоса обнаруживаются структуры типа «*crossroad area*», которые подробно рассмотрены при анализе одномерных отображений. Две такие структуры, образованные на базе

⁴ О методе карт динамических режимов более подробно см. [2,8,14].

режимов периода 5 и 7, показаны на увеличенном фрагменте карты.

Отметим, что все вышесказанное верно лишь для случая $-1 < b < 1$, когда отображение Эно диссипативно. На линиях $b = \pm 1$ наблюдается особое поведение, отвечающее *консервативному* случаю. В этом случае в отображении нет аттракторов, вместо них в фазовом пространстве наблюдается особый объект – неподвижная точка *эллиптического типа*, которая с ростом параметра λ теряет устойчивость и становится точкой *гиперболического типа*. При этом в ее окрестности появляется 2-цикл эллиптического типа. Если и дальше увеличивать λ , то он теряет устойчивость и становится 2-циклом гиперболического типа, а в его окрестности появляется 4-цикл эллиптического типа и т.д. Таким образом, при движении вдоль линий $b = \pm 1$ имеют место специфические консервативные удвоения периода. Теория таких систем представляет собой отдельную ветвь нелинейной динамики, поэтому мы не будем здесь подробно останавливаться на этих вопросах.

2.5. Минимальное отображение Спротта

Как мы уже отмечали, отображение Эно не демонстрирует бифуркацию Неймарка-Сакера. Дж. Спротт (J. Sprott) предложил простую модификацию отображения Эно, чтобы такая бифуркация стала возможной [18]. Для этого следует просто поменять местами переменные в первом уравнении (2.26):

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \lambda y_n^2 + b x_n, \\ y_{n+1} &= x_n. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Спротт называет отображение (2.37) «минимальным» (*minimal 2-D quadratic map*), поскольку это практически простейшее по своему виду квадратичное отображение с бифуркацией Неймарка-Сакера. Отметим, что, как и отображение Эно, минимальное отображение Спротта может быть записано в форме системы с запаздыванием: $x_{n+1} = 1 - \lambda x_{n-1}^2 + b x_n$.

Неподвижные точки отображения (2.37) определяются теми же соотношениями (2.27), что и для отображения Эно. Матрица Якоби имеет вид:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} b & -2\lambda y_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Отсюда легко находим след и якобиан матрицы Якоби, и с учетом (2.27) получаем связь следа и якобиана с исходными параметрами отображения:

$$\begin{aligned} S &= b, \\ J &= 2\lambda y_0 = -(1-b) \mp \sqrt{(1-b)^2 + 4\lambda}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Бифуркацию Неймарка-Сакера находим, приравнивая якобиан единице.

После простых преобразований получаем: $\lambda = \frac{3-2b}{4}$.

Концевыми точками для линии бифуркации Неймарка-Сакера являются точки резонанса 1:1 и 1:2. Их находим с помощью соотношений (2.21) и (2.22):

а) резонанс 1:1, $b = 2$, $\lambda = -0.25$,

б) резонанс 1:2, $b = -2$, $\lambda = 1.75$.

Карта динамических режимов отображения Спротта на плоскости (b, λ) показана на рис.2.9. Для удобства восприятия дана расшифровка использованной цветовой палитры: сверху для периодических режимов, снизу – для непериодических. (О классификации непериодических режимов см. ниже.)

На карте рис.2.9 визуализируется линия бифуркации Неймарка-Сакера NS , заканчивающаяся в точках резонанса 1:1 и 1:2⁵. Характерная для бифуркации Неймарка-Сакера картина состоит в возникновении области *квазипериодических режимов* Q с погруженной в нее системой языков Арнольда.

Языки Арнольда – это области периодических режимов, острия которых выстроены вдоль линии Неймарка-Сакера, рис.2.9. Каждый язык отвечает циклу определенного периода. В точке контакта языка и линии Неймарка-Сакера мультипликатор этого цикла является комплексным, а его аргумент определяет период цикла. Например, если $\arg \mu = \pi/2$, то период цикла равен 4. Рост превышения над порогом бифуркации Неймарка-Сакера (рост параметра λ) приводит к расширению языков.

Удобной характеристикой каждого языка является *число вращения* $w = \arg \mu / 2\pi$. Например, для языка периода 3 число вращения $w = 1/3$. Соответствующую точку на линии Неймарка-Сакера часто выделяют как характерную точку бифуркации коразмерности два и называют *резонанс 1:3*. Найдем ее координаты для минимального отображения Спротта. Из (2.8) и (2.39) следует, что на линии Неймарка-Сакера

$$\mu = \frac{b \pm i\sqrt{4-b^2}}{2} \text{ и } \operatorname{tg}(\arg \mu) = \frac{\sqrt{4-b^2}}{b}.$$

⁵ При сопоставлении карт динамических режимов и бифуркационного анализа следует иметь в виду, что метод карт является своего рода численным экспериментом, результаты которого в определенной мере зависят от выбора начальных условий. Поэтому, например, на рис.2.9 небольшой отрезок линии Неймарка-Сакера в окрестности резонанса 1:1 не визуализируется.

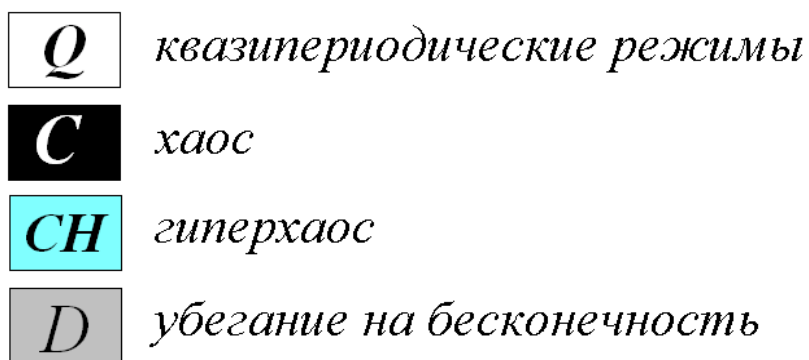
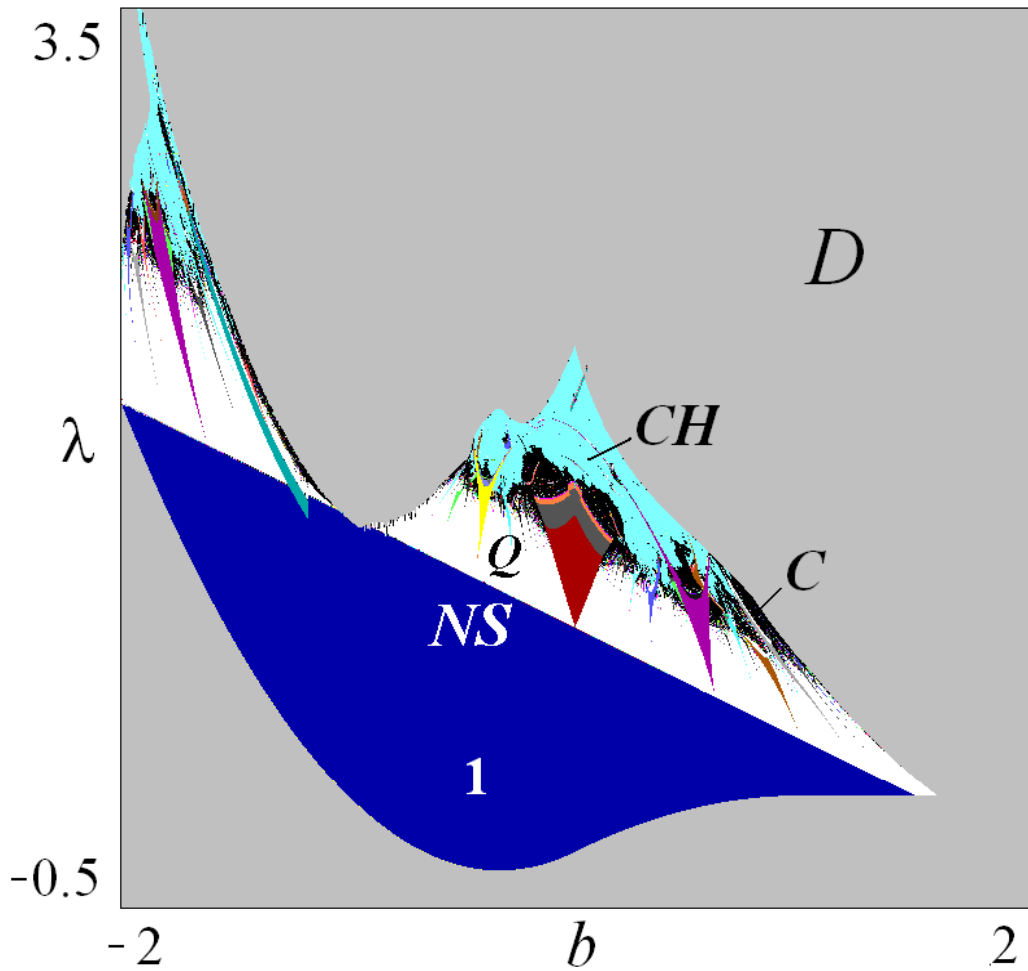


Рис.2.9. Карта динамических режимов минимального отображения Спротта и цветовая палитра для комбинированной карты; NS – линия бифуркации Неймарка-Сакера.

В свою очередь, для резонанса $1:3$ $\arg \mu = 2\pi/3$. Тогда с учетом выражения для линии Неймарка-Сакера $\lambda = (3 - 2b)/4$ получаем координаты точки резонанса $1:3$: $b = -1$, $\lambda = 5/2$. Некоторая особенность отображения Спротта состоит в том, что язык периода 3 расположен в окрестности области разбегания тра-

екторий, и поэтому слабо визуализируется на карте. Обычно язык периода 3 – самый широкий (см. примеры ниже).

Следующим по порядку является язык периода 4, который характеризуется числом вращения $w = 1/4$. В увеличенном виде язык Арнольда периода 4 показан слева на рис.2.10. Для отображения Спротта его острие – точка *резонанса* $1:4$ – имеет координаты $b = 0, \lambda = 0.75$.

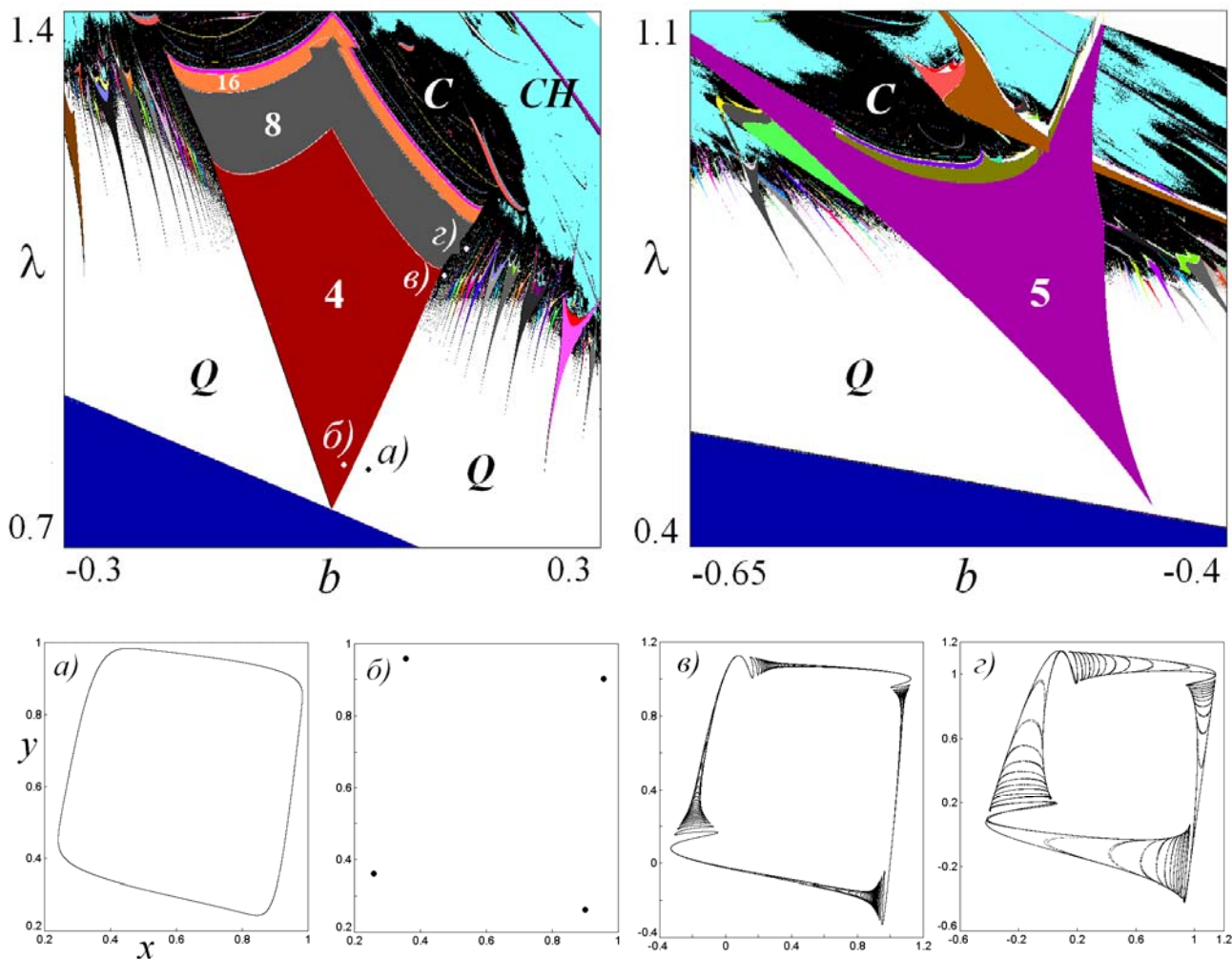


Рис.2.10. Языки Арнольда периода 4 и 5 для минимального отображения Спротта и фазовые портреты в точках, отмеченных буквами.

При выходе через границу языка возникают квазипериодические режимы, характеризующиеся аттрактором в форме *инвариантной кривой*. Фазовый портрет в этом случае приведен на рис.2.10а. Отметим, что циклы внутри языков Арнольда являются своего рода *резонансами*, возникающими из инвариантной кривой: переход от рис.2.10а к рис.2.10б.

Сделаем одно терминологическое замечание. Если представлять отображение как сечение Пуанкаре потока, то инвариантным кривым будут отвечать то-

ры в фазовом пространстве трехмерной потоковой системы [2-5]⁶. Поэтому иногда и инвариантные кривые в отображениях называют *торами*. В этом контексте режимы, отвечающие языкам Арнольда, представляют собой *резонансные предельные циклы*, возникающие на поверхности тора.

Вернемся к обсуждению устройства плоскости параметров. Если двигаться вдоль границы языка, постепенно увеличивая параметр λ , то инвариантная кривая начинает искажаться, а затем она *теряет гладкость*, рис.2.10в. Этот эффект связан с возникновением *гомоклинической структуры*, см. раздел 2.11. Затем инвариантная кривая разрушается, как говорят, через *потерю гладкости*, с возникновением хаотического аттрактора, рис.2.10г.

Следующий по порядку язык, язык периода 5, показан справа на рис.2.10. Вообще говоря, циклу периода 5 отвечает не один, а два языка, для которых числа вращения равны $w = 1/5$ и $w = 2/5$. Их можно видеть на рис.2.9 – слева и справа от языка периода 4. Заметим, что рис.2.10 соответствует языку, для которого число вращения $w = 1/5$.

Мы обсудили основные языки Арнольда. На самом деле (в математическом контексте) их бесконечно много: из каждой точки линии Неймарка-Сакера, для которой число вращения $w = p/q$ рационально, выходит свой язык. При этом, чем больше период q , тем больше число языков данного периода и тем более узкими они являются.

Структуры в виде системы языков Арнольда на плоскости параметров являются типичными и распространенными феноменами нелинейной динамики. В физическом плане они обычно связаны с явлением *синхронизации*. В этом случае управляющими параметрами являются амплитуда и частота внешнего воздействия. Языки Арнольда отвечают *синхронизации* фазы возбуждаемой системы и внешнего сигнала с определенным, фиксированным соотношением частот, заданным числом вращения. Бифуркация Неймарка-Сакера представляет, в некоторой степени, альтернативный механизм возникновения квазипериодической динамики. В этом случае языки ассоциируются с некоторыми *внутренними резонансами* в системе. С физической точки зрения наблюдаемая картина будет отвечать автономным генераторам квазипериодических колебаний⁷.

⁶ При этом, однако, отображение должно быть *обратимым* во времени. Отображение Эно – обратимо, а отображение Спротта – нет.

⁷ В задачах о синхронизации неавтономных систем бифуркация Неймарка-Сакера также возникает, но в области больших амплитуд внешнего воздействия, когда внешний сигнал заметно влияет не только на фазу, но и на саму амплитуду колебаний.

Интересным является вопрос о внутреннем устройстве языков Арнольда. Так, внутри языка периода 4 на рис.2.10 хорошо видны области удвоений периода. Отметим специфическое устройство границ языка в этом случае. Линии удвоений периода, лежащие внутри языка, заканчиваются на его краях; им отвечает набор точек бифуркаций *fold-flip* на базе циклов удвоенных периодов⁸. В этом существенное отличие от случая традиционного одномерного синус-отображения окружности, для которого линии удвоений не пересекают границы языков синхронизации, а бифуркации *fold-flip* невозможны.

На рис.2.11 представлена «коллекция» непериодических аттракторов минимального отображения Спротта.

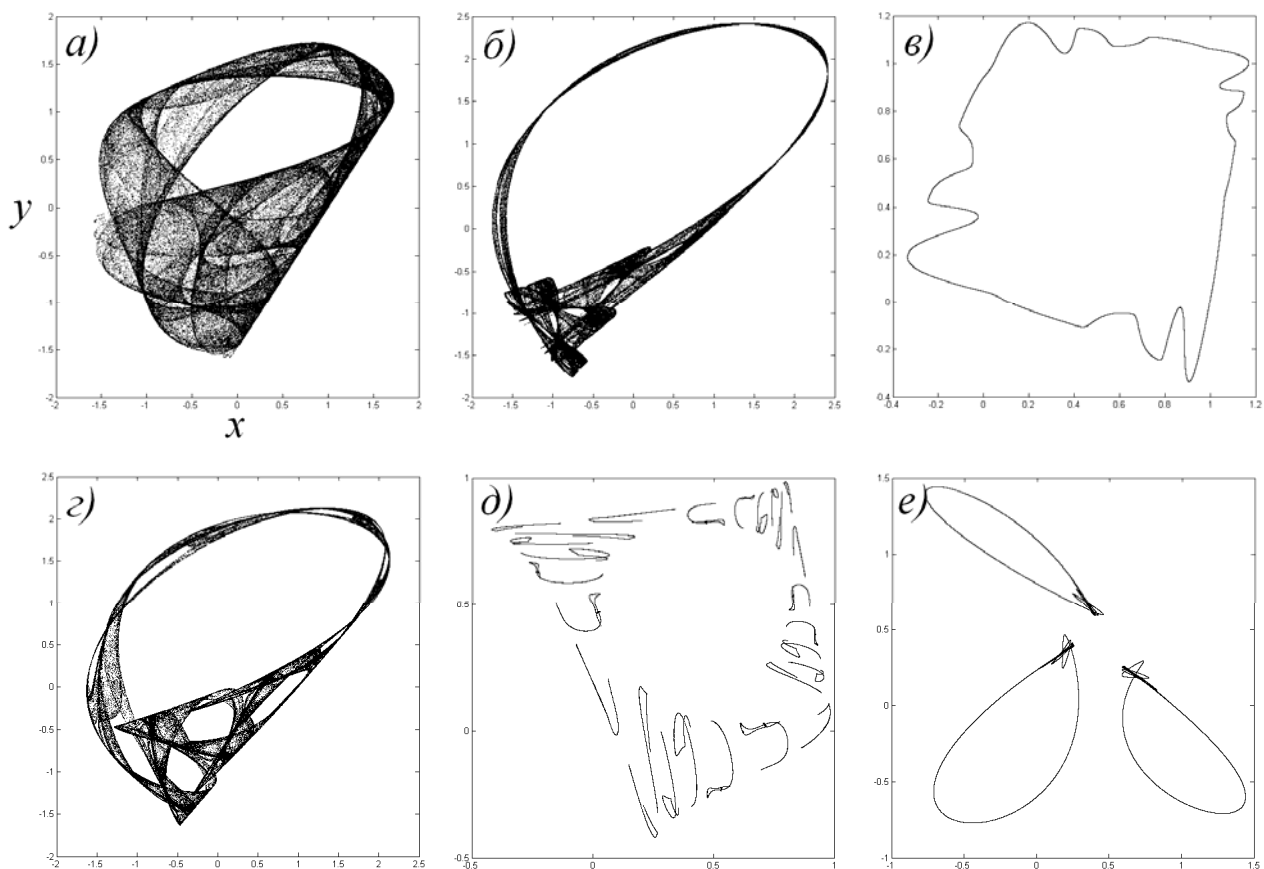


Рис.2.11. Примеры непериодических аттракторов минимального отображения Спротта: а) $\lambda = 1, b = 0.675$, б) $\lambda = 0.59948, b = 1$, в) $\lambda = 1, b = 0.17$, г) $\lambda = 0.7, b = 0.9$, д) $\lambda = 1.3, b = -0.2$, е) $\lambda = 1.1, b = -0.9$.

Квазипериодическим режимам, как мы уже отмечали, соответствуют аттракторы в форме замкнутой инвариантной кривой, рис.2.11в. Инвариантная кривая может быть как достаточно гладкой, так и деформированной. Она может

⁸ На самом деле картина бифуркаций в окрестности таких точек имеет более сложное и тонкое устройство. Детали можно найти, например, в [19].

состоять из одного или нескольких несвязанных элементов, которые изображающая точка посещает по очереди, рис.2.11e. Можно видеть также большое разнообразие хаотических аттракторов, возникающих из разрушающейся инвариантной кривой.

Обсудим непериодические режимы несколько подробнее. Квазипериодические режимы не являются периодическими, впрочем, они не отвечают и хаосу, для которого характерно наличие положительного ляпуновского показателя. Для более полной классификации непериодических режимов необходимо вычислять *полный спектр показателей Ляпунова*⁹. Эти показатели характеризуют устойчивость (неустойчивость) системы по всем возможным направлениям.

Число показателей Ляпунова равно размерности системы, так что для двумерных отображений имеются два показателя Λ_1 и Λ_2 . В соответствии с величинами показателей Λ_1, Λ_2 выделяют следующие типы режимов:

- а) квазипериодические Q : $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 < 0$;
- б) хаотические C : $\Lambda_1 > 0 > \Lambda_2$;
- в) гиперхаотические CH : $\Lambda_1 > \Lambda_2 > 0$.

Возможность существования таких режимов и их эволюцию иллюстрируют показанные на одном рисунке 2.12 бифуркационное дерево и графики двух ляпуновских показателей Λ_1, Λ_2 в зависимости от параметра λ вдоль маршрута $b = 0.6$. Можно видеть следующую последовательность режимов. Сначала имеется неподвижная точка. Затем в результате бифуркации Неймарка-Сакера рождается квазипериодический режим Q , которому отвечает «полочка» нулевого ляпуновского показателя Λ_1 . Затем возникает синхронный режим периода 4, и оба показателя становятся отрицательными. На карте рис.2.9 это отвечает тому, что выбранный маршрут проходит через соответствующий язык Арнольда. Затем 4-цикл испытывает удвоение периода с рождением цикла периода 8. При дальнейшем росте управляющего параметра возникает узкая область хаоса C , а при последующем его увеличении – гиперхаоса CH .

Отметим, что для двумерных отображений удобно строить «комбинированные» карты, на которых, кроме периодических режимов, дополнительно показывают соответствующим цветом области хаоса, гиперхаоса и квазипериодических режимов. Так, на рис.2.9 и 2.10 белый цвет отвечает квазипериодическим режимам, черный – хаосу, светло-голубой – гиперхаосу.

⁹ О численной процедуре определения спектра показателей Ляпунова можно прочесть, например, в книге [2].

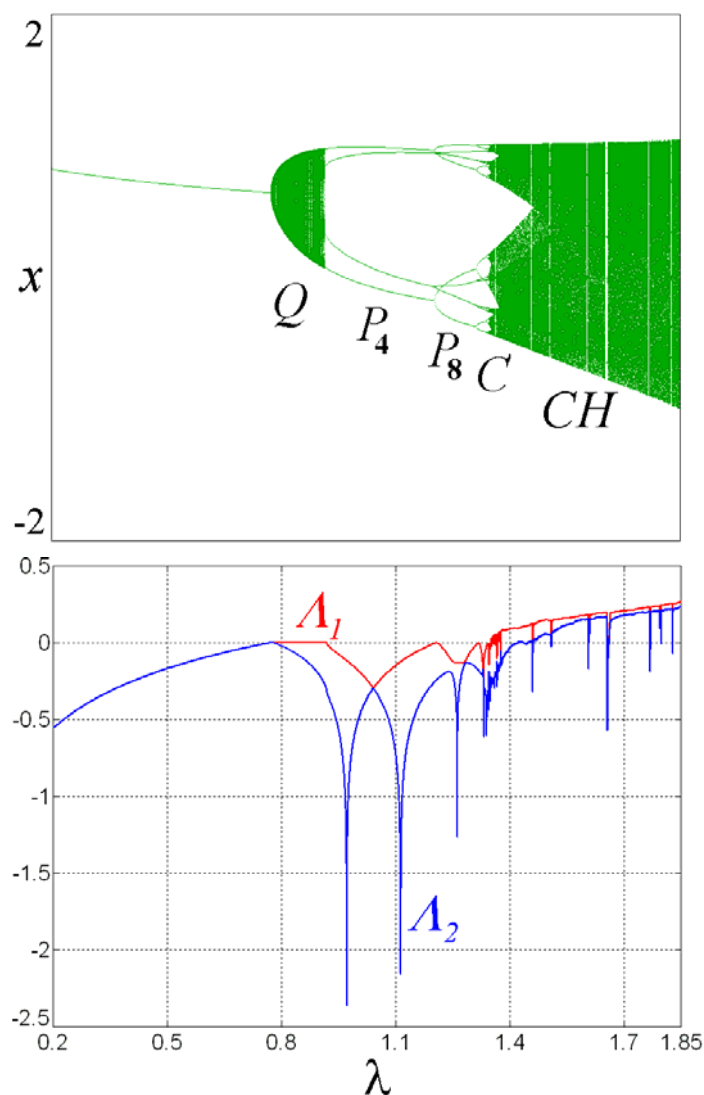


Рис.2.12. Бифуркационное дерево и графики ляпуновских показателей отображения Спротта, $b=0.6$. Буквой Q обозначен квазипериодический режим; P_4 – режим, отвечающий языку Арнольда периода 4, P_8 – режим удвоенного периода на его базе; C – хаос, CH – гиперхаос.

2.6. Универсальное двумерное отображение

Как мы отмечали, *универсальная* и достаточно *полная* картина бифуркаций двумерных отображений наблюдается на плоскости инвариантов матрицы Якоби – след S и якобиан J . Такой анализ приводит к треугольнику устойчивости, показанному на рис.2.4. В этом случае должна наблюдаться не только бифуркация Неймарка-Сакера, но и удвоения периода, которых нет в минимальном отображении Спротта. Поэтому заманчивым является идея построить отображение, в которых след и якобиан были бы непосредственно регулируемы параметрами.

Сконструируем сначала соответствующее линейное отображение:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= Sx_n - y_n, \\y_{n+1} &= Jx_n.\end{aligned}$$

Это отображение имеет неподвижную точку в начале координат. Легко показать, что матрица Якоби такого отображения имеет вид:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} S & -1 \\ J & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, параметры S и J действительно являются следом и якобианом матрицы Якоби. Добавим теперь простейшую квадратичную нелинейность вида $(x^2 + y^2)$. Тогда отображение примет вид:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2), \\y_{n+1} &= Jx_n - \frac{1}{5}(x_n^2 + y_n^2).\end{aligned}\tag{2.40}$$

Множитель $1/5$ введен для более удобного представления результатов.

Карта динамических режимов отображения (2.40) на плоскости (S, J) показана на рис.2.13. Использована техника построения комбинированной карты, так что, наряду с областями различных периодов, показаны области квазипериодической динамики, хаоса и гиперхаоса. На карте можно видеть треугольник устойчивости, отвечающий рис.2.4 и аналитическому рассмотрению.

Правая граница треугольника на карте отвечает касательной бифуркации с жестким переходом на другой режим. В рассматриваемом случае – это область устойчивости другой неподвижной точки. Левая граница треугольника отвечает бифуркации удвоения периода, причем возможен полный фейгенбаумовский каскад с переходом к хаосу. Отметим, что небольшой отрезок (верхняя часть) этой границы отвечает не удвоению периода, а *жесткому переходу через мультипликатор -1* . На рисунке хорошо видна точка коразмерности два, в которой линия удвоения превращается в линию жесткого перехода. На самом деле система областей удвоенного периода в окрестности этой точки имеет тонкую организацию, которую можно выявить с помощью численного бифуркационного анализа.

Верхняя граница треугольника устойчивости соответствует бифуркации Неймарка-Сакера. На рис.2.13 внизу показана в увеличенном виде картина языков Арнольда, выстроенных вдоль этой линии. Можно видеть, что языки погружены в область квазипериодических режимов. С ростом параметра J , отвечающего за превышение над порогом бифуркации Неймарка-Сакера, в области перекрытия языков Арнольда возникает хаос, а затем – и гиперхаос.

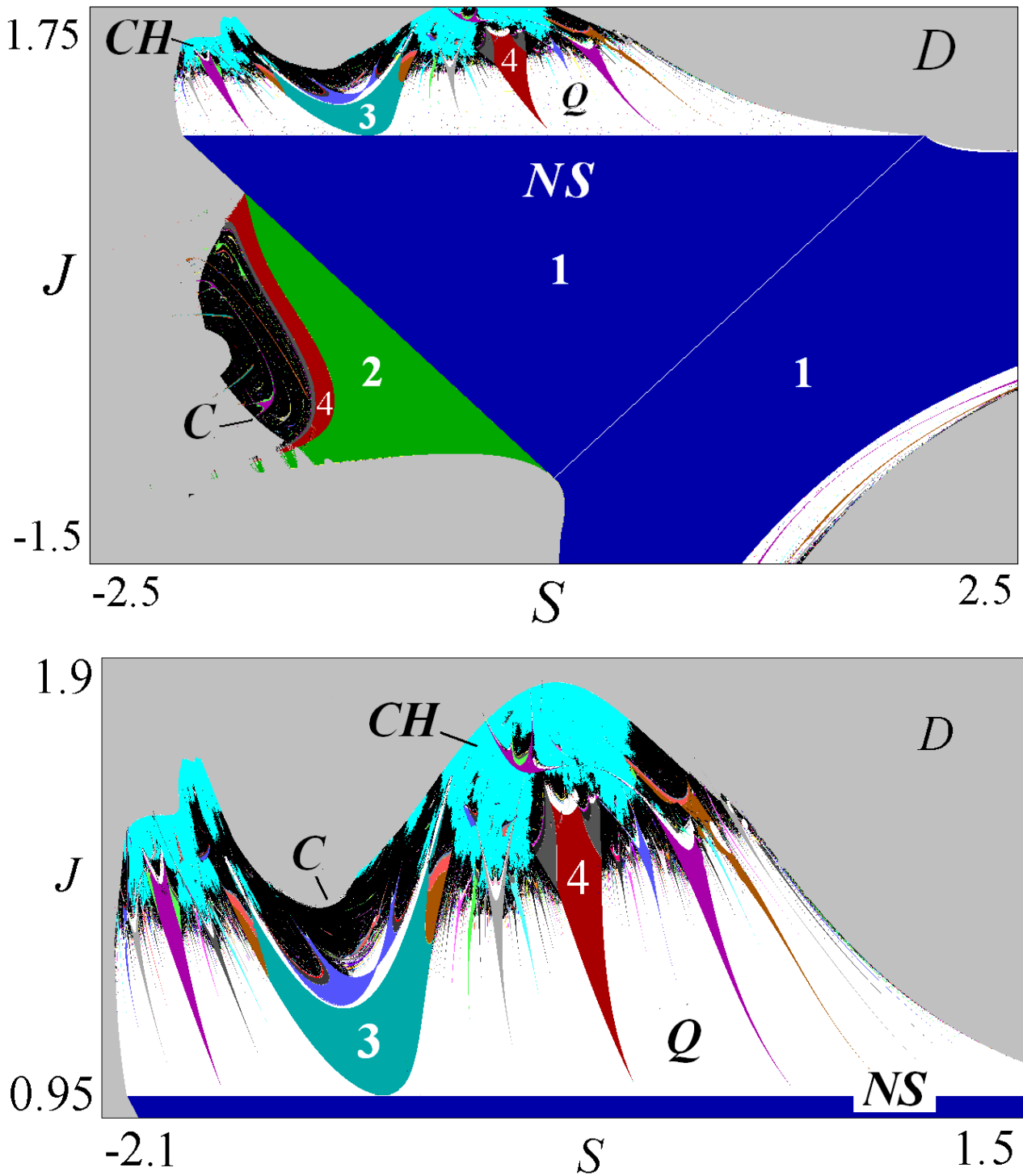


Рис.2.13. Карта динамических режимов двумерного универсального отображения и ее увеличенный фрагмент в окрестности линии бифуркации Неймарка-Сакера.

Вычислим числа вращения w на линии бифуркации Неймарка-Сакера. В соответствии с (2.8), при $J=1$ для мультипликаторов имеем $\mu = S/2 \pm i\sqrt{1 - S^2/4}$. Тогда $\operatorname{tg}(\arg \mu) = (\sqrt{4 - S^2})/S$. С учетом $\arg \mu = 2\pi w$, легко получаем связь параметра S (следа матрицы Якоби) с числом вращения w :

$$S = 2 \cos(2\pi w).$$

Качественное расположение языков с основными числами вращения вдоль линии бифуркации Неймарка-Сакера показано на рис.2.14. Число вращения меняется вдоль этой линии от значения $w = 1/2$ в точке резонанса 1:2 до $w = 0$ в точке резонанса 1:1. (Слева направо на рис.2.13 и 2.14.)

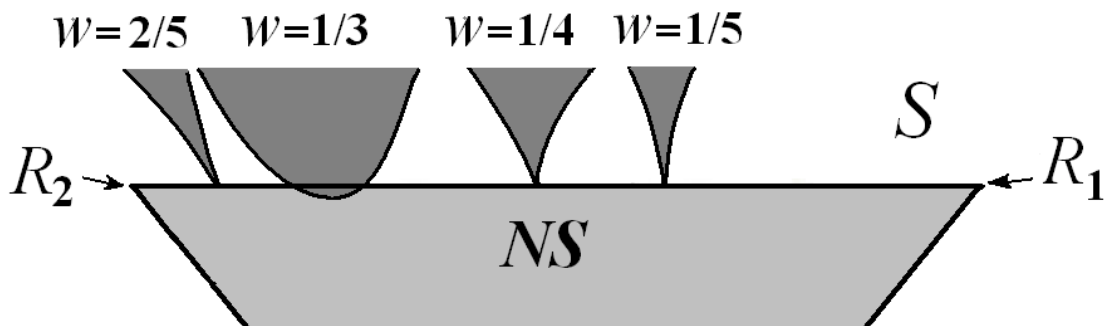


Рис.2.14. Качественное расположение основных языков Арнольда вдоль линии бифуркации Неймарка-Сакера (верхней границы треугольника устойчивости); NS – линия бифуркации Неймарка-Сакера, R_1 – резонанс 1:1, R_2 – резонанс 1:2, w – число вращения.

В целях удобства значения параметра S для основных резонансов приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

$w = 1/2$	$w = 2/5$	$w = 1/3$	$w = 1/4$	$w = 1/5$	$w = 0$
$S = -2$	$S = -1.618\dots$	$S = -1$	$S = 0$	$S = 0.618\dots$	$S = 2$

В то же время можно отметить определенные особенности *внутреннего устройства* основных языков по сравнению с языками Арнольда в минимальном отображении Спротта. На рис.2.15 показан в увеличенном виде язык периода 4 в окрестности своей верхней границы. На верхней границе устойчивости резонансного 4-цикла возникает разрыв области существования цикла периода 8. Теперь граница устойчивости 4-цикла в центральной части языка становится линией *вторичной бифуркации Неймарка-Сакера* NS_2 . В этом случае на базе цикла периода 4 возникает новая инвариантная кривая. На фазовом портрете можно наблюдать появление инвариантных кривых из каждого элемента 4-цикла (нижняя часть рис.2.15). При этом изображающая точка попеременно посещает каждый такой овал в соответствии с тем же правилом, которое реализовалось для обхода элементов 4-цикла. Можно отметить также возникновение внутри области квазипериодической динамики специфических областей периодических режимов, которые не контактируют с линией вторичной бифуркации Неймарка-Сакера.

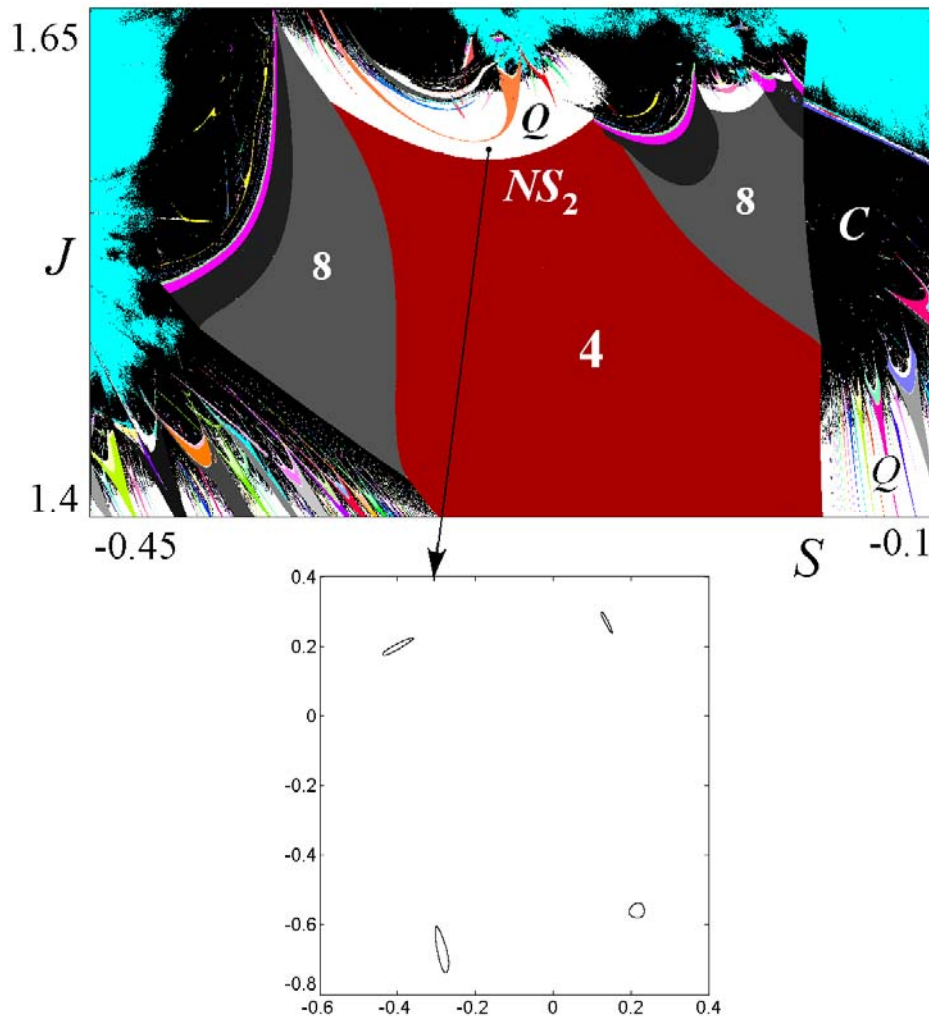


Рис.2.15. Язык Арнольда периода 4 и характерный фазовый портрет, иллюстрирующий вторичную бифуркацию Неймарка-Сакера NS_2 .

Аналогичная картина с вторичной бифуркацией Неймарка-Сакера реализуется и для цикла периода 8, отвечающего на рис.2.15 правой области существования этого цикла. Эта часть периода 8 является маленькой «копией» языка периода 4. В то же время, для левой области периода 8 наблюдается более традиционное устройство с непрерывными линиями удвоений периода.

Таким образом, внутреннее устройство языков синхронизации может быть разным. Оно может представлять собой совокупность областей удвоенного периода, как на рис.2.10, а может – вторичные бифуркации Неймарка-Сакера на базе циклов удвоенного периода, как на рис.2.15.

Отметим, что можно ввести третий параметр, который будет отвечать за эволюцию внутреннего устройства языков синхронизации. Для этого нужно модифицировать универсальное отображение следующим образом:

$$x_{n+1} = Sx_n - y_n - (\epsilon x_n^2 + y_n^2),$$

$$y_{n+1} = Jx_n - \frac{1}{5}(x_n^2 + y_n^2).$$

Тогда при малых значениях третьего параметра ϵ будет наблюдаться картина, характерная для рис.2.10. С ростом ϵ линия удвоения внутри некоторых языков претерпевает разрыв с образованием вторичной линии бифуркации Неймарка-Сакера и переходом к картине, показанной на рис.2.15. При этом пороговое значение ϵ является своим для каждого языка.

2.7. Бифуркации потоков и их дискретные аналоги

Как мы отмечали ранее, динамические системы могут быть представлены как дифференциальными уравнениями (потоками), так и дискретными отображениями. При этом потоковые системы характеризуются некоторыми своими бифуркациями, которые также изучает и классифицирует теория бифуркаций. Мы не будем полно обсуждать вопрос о бифуркациях потоков, но отметим, что можно проследить определенную взаимосвязь бифуркаций потоков и отображений.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Обратимся к уравнению осциллятора общего вида:

$$\ddot{x} - g(x)\dot{x} + f(x) = 0. \quad (2.41)$$

Здесь $f(x) = U'(x)$ – сила, действующая на осциллятор, $U(x)$ – соответствующий потенциал, $g(x)$ – функция, характеризующая нелинейное трение (в частности, отрицательное для автоколебательных систем).

Уравнение (2.41) можно представить в стандартной для динамических систем второго порядка форме:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= g(x)y - f(x). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Приравняв нулю левые части, находим *состояния равновесия* системы

$$\begin{aligned} y_0 &= 0, \\ f(x_0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Соотношения (2.43) имеют простой физический смысл: скорость осциллятора $\dot{x} = y$ в состоянии равновесия равна нулю, а координата отвечает нулевой силе f , то есть экстремуму потенциала $U(x)$.

Матрица Якоби системы (2.42) для состояний равновесия имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(x_0) & g(x_0) \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Теперь находим след и якобиан этой матрицы:

$$S = g(x_0), \quad J = f'(x_0). \quad (2.45)$$

Как и для отображений, для потоков простейшие бифуркации определяются следом и якобианом матрицы Якоби, однако, для потоков реализуются свои бифуркации, и, соответственно, свои условия на след и якобиан [6]. Система (2.42) может демонстрировать следующие основные бифуркации потоков.

Бифуркация седло-узел. Эта бифуркация отвечает слиянию устойчивого и неустойчивого равновесий, в результате чего они исчезают. Бифуркации отвечает равенство нулю якобиана $J = 0$, так что получаем

$$f(x_0) = 0, \quad f'(x_0) = 0. \quad (2.46)$$

Физически условия (2.46) отвечают равенству нулю силы, действующий на осциллятор, и слиянию максимума и минимума потенциала $U(x)$.

Бифуркация Андронова-Хопфа. Эта бифуркация состоит в том, что состояние равновесия из устойчивого становится неустойчивым и от него отделяется устойчивый предельный цикл, являющийся образом автоколебаний в фазовом пространстве. Для этой бифуркации след $S = 0$ при дополнительном условии $J > 0$, так что

$$f(x_0) = 0, \quad g(x_0) = 0, \quad f'(x_0) > 0. \quad (2.47)$$

В физическом плане второе условие (2.47) отвечает обращению диссипации в ноль, т.е. переходу от положительного трения к отрицательному, что реализуется при «подкачке» энергии из внешнего источника и, соответственно, приводит к возникновению автоколебаний.

Перечисленные бифуркации имеют коразмерность один. Можно указать и характерную бифуркацию коразмерности два.

Бифуркация Богданова-Тakensа. Эта бифуркация представляет собой общую точку бифуркаций седло-узел и Андронова-Хопфа, так что одновременно $S = 0$, $J = 0$. Тогда получаем

$$f(x_0) = 0, \quad g(x_0) = 0, \quad f'(x_0) = 0. \quad (2.48)$$

Чтобы провести сопоставление с бифуркациями отображений, нужно построить дискретные модели, опирающиеся на свойства потоковой системы-прототипа (2.41). Воспользуемся для этого следующим приемом.

В численных расчетах дифференциальные уравнения на самом деле всегда

заменяются отображениями. Например, это можно сделать с помощью простейшей схемы Эйлера, когда производные заменяются на конечные разности по правилу

$$\dot{x} \rightarrow \frac{x_{n+1} - x_n}{\varepsilon}, \quad \dot{y} \rightarrow \frac{y_{n+1} - y_n}{\varepsilon}. \quad (2.49)$$

Такая аппроксимация тем лучше, чем меньше шаг дискретизации ε . Отметим, что соотношения (2.49), фактически, дают «физическое» определение скорости изменения переменных, основанное на небольшом, но все же конечном временном интервале наблюдения.

Подобную процедуру можно использовать как один из способов построения *новых дискретных моделей*. С физической точки зрения такой прием отвечает введению некоторого внешнего возмущения дискретного характера (например, добавлению периодических импульсных толчков в осциллятор-прототип). Этот прием широко используется, например, в работах одних из создателей теории стохастических колебаний Г.М. Заславского, Б.В. Чирикова и др.

Обсудим представленный подход с точки зрения бифуркаций двумерных отображений. Применим указанную процедуру к осциллятору (2.41). При этом более удобным оказывается использовать полуявную схему Эйлера¹⁰

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \varepsilon y_{n+1}, \\ y_{n+1} &= y_n + \varepsilon g(x_n) y_n - \varepsilon f(x_n). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Мы получили некоторую новую модель – двумерное отображение, которое в определенной мере наследует свойства динамики системы-прототипа, но демонстрирует более богатую динамику. Такую модель логично назвать *дискретным осциллятором*.

Обсудим бифуркации дискретного осциллятора общего вида (2.50). Это отображение может иметь неподвижные точки, определяемые теми же соотношениями, что и состояния равновесия осциллятора-прототипа

$$y_0 = 0, \quad f(x_0) = 0. \quad (2.51)$$

Вычислим матрицу Якоби в неподвижных точках:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon^2 f' & \varepsilon + \varepsilon^2 g' \\ -\varepsilon f' & 1 + \varepsilon g \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Найдем след и якобиан этой матрицы:

¹⁰ Тогда консервативный осциллятор порождает консервативное отображение; для простой схемы Эйлера это не так.

$$\begin{aligned} S &= 2 - \varepsilon^2 f' + \varepsilon g, \\ J &= 1 + \varepsilon g. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Теперь, используя соотношения (2.18)-(2.23), легко найти условия основных бифуркаций для дискретного осциллятора.

Касательная бифуркация. Условие этой бифуркации (2.18) с учетом выражений для следа и якобиана (2.53) приводит к равенству $f(x_0) = 0$, что точно соответствует бифуркации седло-узел в осцилляторе-прототипе.

Бифуркация Неймарка-Сакера. Положив в (2.53) $J = 1$, получаем $g(x_0) = 0$. Таким образом, условие бифуркации Неймарка-Сакера не зависит от параметра дискретизации ε и точно совпадает с условием бифуркации Андронова-Хопфа в осцилляторе-прототипе.

Бифуркация удвоения периода. Подставляя (2.53) в (2.19), получаем

$$4 - \varepsilon^2 f'(x_0) + 2\varepsilon g(x_0) = 0. \quad (2.54)$$

Эта бифуркация невозможна в исходной системе (2.41). Это видно и из самого соотношения (2.54): оно не имеет решения в пределе обращения в ноль параметра дискретизации $\varepsilon \rightarrow 0$. Последнее утверждение согласуется с тем известным фактом, что бифуркация удвоения периода невозможна в двумерном потоке. Таким образом, дискретный осциллятор демонстрирует новые свойства по сравнению со своим прототипом.

Резонанс 1:1. Соотношения (2.21) приводят к условию $f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$, что точно отвечает бифуркации Богданова-Тakensа в исходной системе. Таким образом, резонанс 1:1 – это тот феномен, который в отображении приходит на смену бифуркации Богданова-Тakensа в потоке.

Резонанс 1:2. Условия (2.22) приводят к соотношениям

$$4 = \varepsilon^2 f'(x_0), \quad g(x_0) = 0. \quad (2.55)$$

Fold-flip. Из (2.23) получаем:

$$f'(x_0) = 0, \quad \varepsilon g(x_0) = -2. \quad (2.56)$$

Нетрудно видеть, что и резонанс 1:2, и бифуркация *fold-flip* не имеют предела при стремлении параметра дискретизации к нулю $\varepsilon \rightarrow 0$, так что они являются новыми по сравнению с бифуркациями двумерных потоков.

2.8. Дискретный осциллятор Богданова-Тakensа и отображение Богданова

Проиллюстрируем сказанное на конкретных примерах. В качестве первого примера используем осциллятор

$$\ddot{x} - (\mu - x)\dot{x} + a - x^2 = 0, \quad (2.57)$$

где функция $f(x) = a - x^2$ отвечает потенциалу в виде кубического полинома $U(x) = ax - x^3/3$. Такой потенциал при $a > 0$ имеет минимум при $x = -\sqrt{a}$ и максимум при $x = \sqrt{a}$.

Система (2.57) обладает тем замечательным свойством, что дает *нормальную форму бифуркации Богданова-Тakensа*. На рис.2.16 показана плоскость параметров (μ, a) этого осциллятора, иллюстрирующая характерные бифуркации и характерные фазовые портреты. Используя (2.47), легко находим линию седло-узловой бифуркации $a = 0$, бифуркацию Андронова-Хопфа $\mu = -\sqrt{a}$ и точку Богданова-Тakensа $\mu = a = 0$. Помимо этого, из точки Богданова-Тakensа выходит линия *нелокальной бифуркации*¹¹, которой отвечает столкновение предельного цикла с петлей сепаратрисы состояния равновесия. (Бифуркация *влипания предельного цикла в петлю сепаратрисы*.) Таким образом, устойчивый предельный цикл наблюдается в области между линиями AH и G . Такая картина линий является универсальной для бифуркации Богданова-Тakensа.

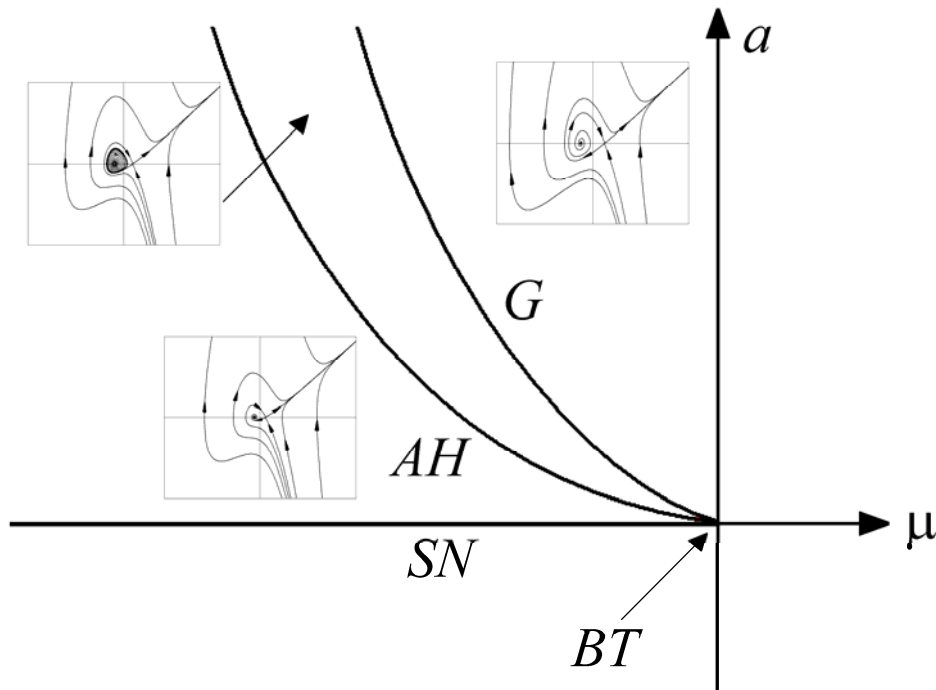


Рис.2.16. Плоскость параметров и фазовые портреты осциллятора Богданова-Тakensа, AH – линия бифуркации Андронова-Хопфа, SN – линия бифуркации седло-узел, G – линия влипания предельного цикла в петлю сепаратрисы, BT – точка Богданова-Тakensа.

¹¹ Все обсуждавшиеся ранее нами бифуркации были локальными. Нелокальными называют бифуркации, в результате которых перестройка фазового портрета не ограничивается сколь угодно малой областью в фазовом пространстве.

Построим теперь дискретную модель, используя в качестве прототипа осциллятор Богданова-Такенса (2.57). В свете сказанного выше, можно ожидать, что мы получим новую модель с интересными и существенными свойствами. Применим к модели (2.57) процедуру (2.50):

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \varepsilon y_{n+1}, \\y_{n+1} &= y_n + \varepsilon((\mu - x_n)y_n - a + x_n^2).\end{aligned}\tag{2.58}$$

Полученное отображение естественно назвать *дискретным осциллятором Богданова-Такенса* [22]. Найдем условия бифуркаций этого отображения¹².

Неподвижные точки (2.58) задаются соотношениями

$$x_0 = \pm\sqrt{a}, y = 0.\tag{2.59}$$

Верхний знак соответствует всегда неустойчивой точке, так что положим $x_0 = -\sqrt{a}$. Теперь мы можем воспользоваться готовыми результатами предыдущего раздела, используя конкретный вид функций $f(x) = a - x^2$ и $g(x) = \mu - x$. Тогда получаем

Бифуркация Неймарка-Сакера: $\mu = -\sqrt{a}$.

Касательная бифуркация: $a = 0$.

Бифуркация удвоения периода: $2 + \varepsilon(\sqrt{a} + \mu) - \varepsilon^2\sqrt{a} = 0$.

Резонанс 1:1: $\mu = 0, a = 0$.

Резонанс 1:2: $\mu = -2/\varepsilon^2, a = 4/\varepsilon^4$.

Fold-flip: $\mu = -2/\varepsilon, a = 0$.

Дальнейшие иллюстрации свойств отображения (2.58) удобно представить с использованием карты динамических режимов, показанной на рис.2.17, для значения параметра дискретизации $\varepsilon = 0.8$. Верхняя левая карта построена в достаточно большом масштабе. На ней можно видеть найденные выше аналитически линии и точки бифуркаций, в частности, линию бифуркации Неймарка-Сакера с примыкающей к ней системой языков Арнольда. В левой части рис.2.17а располагаются линии удвоений периода. На этом рисунке имеются точки бифуркаций коразмерности два: *fold-flip* и резонанс 1:1. Точка резонанса 1:2 располагается при больших значениях параметра a и при выбранных масштабах в поле зрения не попадает.

¹² С использованием терминологии теории бифуркаций можно сказать, что мы построили своего рода дискретный «unfolding» бифуркации Богданова-Такенса, «раздув» пространство параметров ее нормальной формы за счет нового параметра дискретизации. Такая процедура применима и для других бифуркаций.

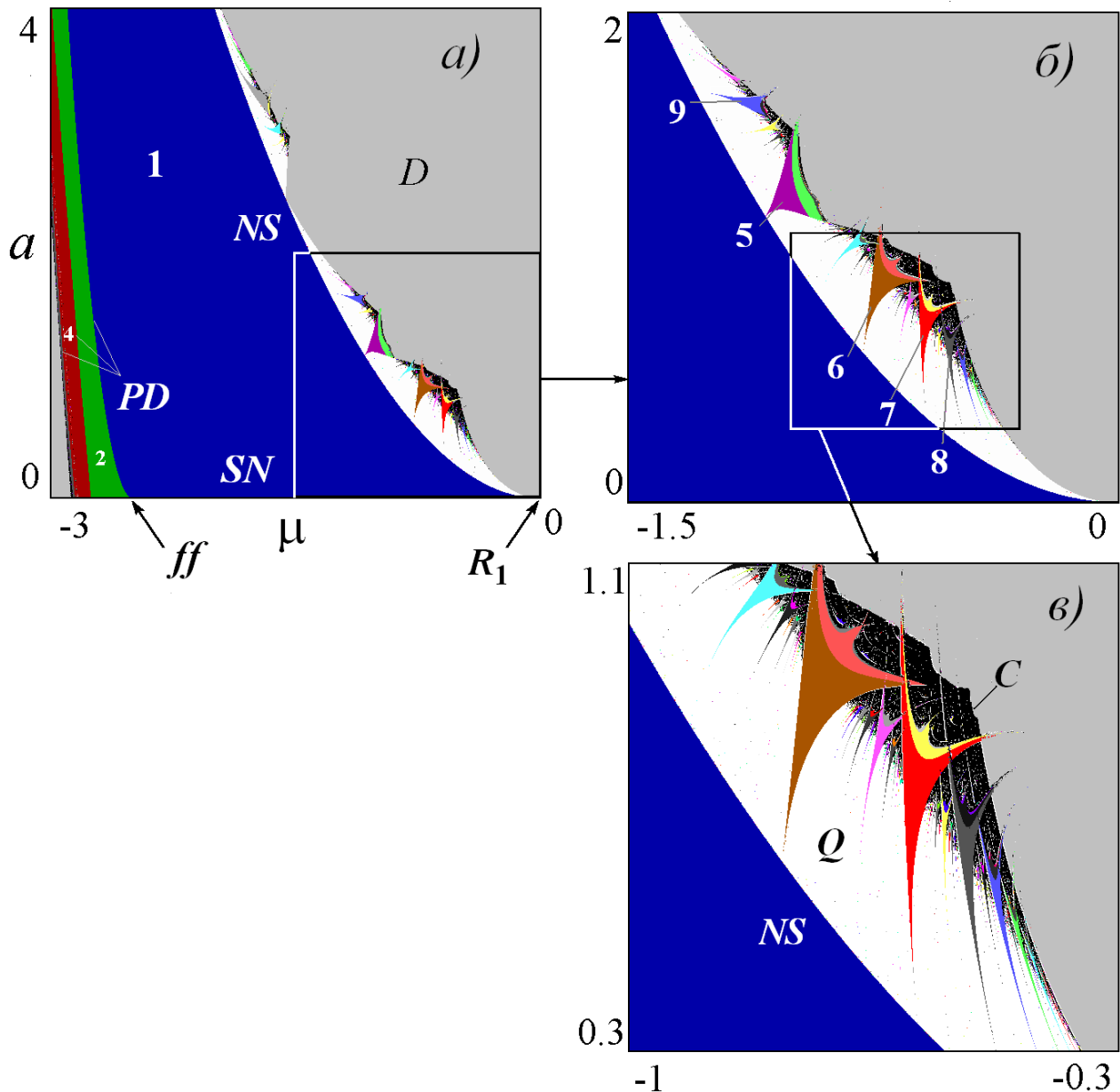


Рис.2.17. Карта динамических режимов дискретного осциллятора Богданова-Тakens в разных масштабах. Символами обозначены: NS – бифуркация Неймарка-Сакера, SN – касательная бифуркация, PD – линии удвоения периода, Q – область квазипериодических режимов, C – область хаоса, D – область убегания фазовых траекторий на бесконечность. Цифрами обозначены периоды циклов.

На рис.2.17б показана окрестность точки $\mu = a = 0$ в том же масштабе, что и для потоковой системы-прототипа на рис.2.16. Сравнивая эти рисунки, видим, что на смену бифуркации Андронова-Хопфа действительно приходит бифуркация Неймарка-Сакера. Точка бифуркации Богданова-Тakens $\mu = a = 0$ заменяется на резонанс 1:1. Однако, область существования предельного цикла потоковой системы (2.57) существенно изменяется. На смену ей приходит область квазипериодических режимов, в которую встроена система различных периодических режимов в виде языков Арнольда. Внизу (рис.2.17в) показан еще бо-

лее увеличенный фрагмент карты, демонстрирующий детали структуры языков синхронизации.

На смену бифуркации влипания предельного цикла в петлю сепаратрисы приходит бифуркация двумерного отображения, которая состоит в *столкновении инвариантной кривой с неустойчивым многообразием* неподвижной точки. Это пример *нелокальной бифуркации отображений* (см. п.2.12).

На рис.2.18 показаны фазовые портреты в некоторых избранных точках плоскости параметров, иллюстрирующие возможность реализации аттрактора в виде гладкой инвариантной кривой и резонансного цикла на ней, а также потерю гладкости кривой при продвижении в область хаоса.

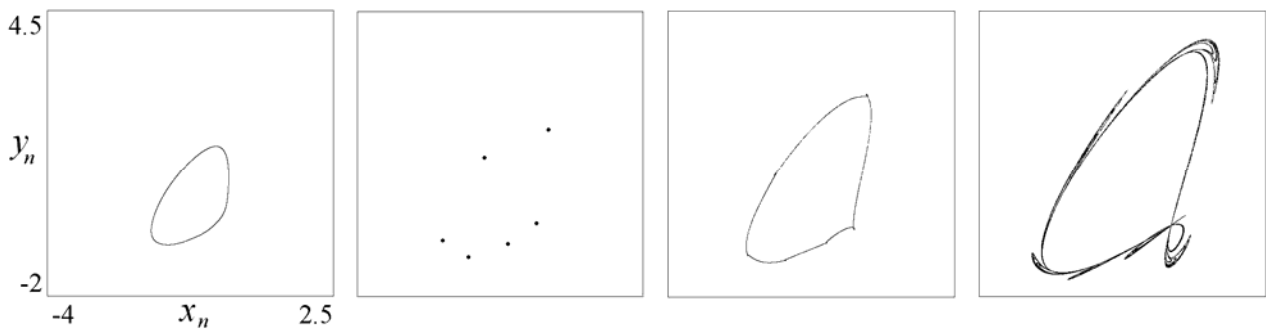


Рис.2.18. Иллюстрация существования инвариантной кривой, резонансного цикла и потери гладкости инвариантной кривой дискретного осциллятора Богданова-Такенса. Значения $\varepsilon = 0.8$, а) $\mu = -0.68, a = 0.65$, б) $\mu = -0.74, a = 0.85$, в) $\mu = -0.68, a = 0.875$, г) $\mu = -0.58, a = 0.93$.

Языки Арнольда на рис.2.17 опираются своими основаниями на линию бифуркации Неймарка-Сакера, при этом число вращения можно определить по аргументу мультипликатора $w = \frac{\arg \mu}{2\pi}$. В соответствии с (2.7) при $J = 1$ имеем

$$\mu = \frac{S}{2} \pm i \sqrt{1 - \frac{S^2}{2}}. \quad (2.60)$$

В свою очередь, для следа матрицы Якоби из (2.53) с учетом условия бифуркации Неймарка-Сакера $J = 1$ справедливо:

$$S = 2 - 2\varepsilon^2 \sqrt{a}. \quad (2.61)$$

Отсюда для аргумента мультипликатора при малых значениях величины $\varepsilon^4 a$ получаем оценку:

$$\operatorname{tg}(\arg \mu) = \frac{\sqrt{1 - S^2/2}}{S/2} \approx \sqrt[4]{4a\varepsilon^4}. \quad (2.62)$$

Таким образом, аргумент мультипликатора вблизи точки Богданова-Такенса

близок к нулю и «управляется» фактором $a\varepsilon^4$. Это означает, что при уменьшении параметра дискретизации ε в некоторое число раз N , картина языков будет в определенной мере подобной при изменении масштаба по оси параметра a в N^4 раз, а по оси μ в соответствии с (2.60) – в N^2 раз.

Полезно обсудить, что происходит с дискретным осциллятором при убывании параметра дискретизации ε . Из приведенного обсуждения вытекает, что при уменьшении параметра дискретизации ε в окрестности точки резонанса 1:1 (точки Богданова-Тakensа) наблюдаются языки все более и более высокого порядка. Соответственно, фазовый портрет внутри языков содержит все большее число точек, а сами языки становятся все более узкими. Именно так протекает предельный переход к двумерному потоку.

Отметим, что формально, при сколь угодно малом ε , все еще существуют очень узкие языки Арнольда, отвечающие периодическим режимам. Соответственно, при $\varepsilon \rightarrow 0$ инвариантная кривая превращается в предельные циклы потока, а область квазипериодических режимов – в область автоколебаний. Линия удвоения периода и точки резонанса 1:2 и *fold-flip* уходят на бесконечность.

Еще один пример отображения с бифуркацией Неймарка-Сакера в виде дискретного осциллятора получается при дискретизации уравнения

$$\ddot{x} - (\bar{\alpha} + \bar{\beta}x)\dot{x} + x - x^3 = 0, \quad (2.63)$$

Соответствующее отображение имеет вид

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \varepsilon y_{n+1}, \\ y_{n+1} &= y_n + \alpha y_n + kx_n(x_n - 1) + \beta x_n y_n. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Его параметры связаны с параметрами осциллятора (2.63) следующим образом: $\alpha = \varepsilon\bar{\alpha}$, $\beta = \varepsilon\bar{\beta}$, $k = \varepsilon^2$ (по своему определению $k > 0$, а $\beta > 0$) и, кроме того, выполнена перенормировка, $y \rightarrow \varepsilon y$.

Отображение (2.64) называют *отображением Богданова (Bogdanov map)* [21]. Для неподвижной точки этого отображения $x = y = 0$ легко находятся условия для бифуркации Неймарка-Сакера: $\alpha = 0$ и мультипликатора минус единица: $4 + 2\alpha - k = 0$. Таким образом, картина простейших бифуркаций не зависит от параметра β , имеющего смысл параметра нелинейной диссипации.

Карта динамических режимов отображения Богданова (2.64) показана на рис.2.19 при $\beta = -1$. Компьютерное исследование выявляет возможность существования областей квазипериодической динамики и системы языков Арнольда, примыкающих к линии бифуркации Неймарка-Сакера. Отметим, что на карте хорошо видно, что отрезок линии $\mu = -1$ является линией жесткого перехода.

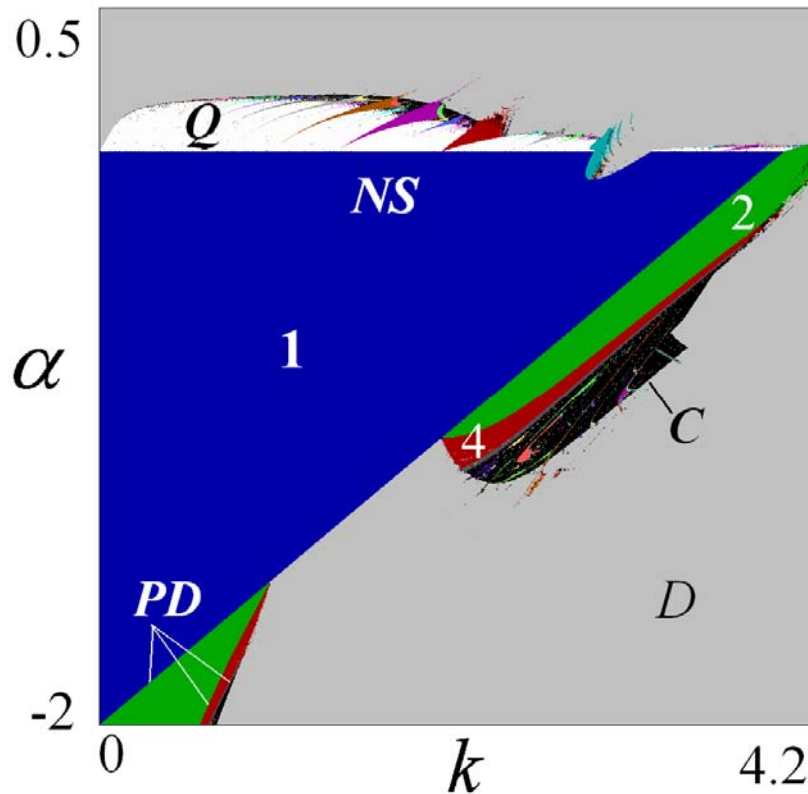


Рис.2.19. Карта динамических режимов отображения Богданова, $\beta = -1$.

При уменьшении по абсолютной величине параметра β , отвечающего за нелинейную диссипацию, вид карты качественно не изменяется, но область квазипериодических режимов становится все уже. Таким образом, при малых β по мере увеличения параметра α , ответственного за отрицательное трение в осцилляторе, почти сразу после своего возникновения инвариантная кривая разрушается.

2.9. Седло-узловая бифуркация инвариантных кривых и вырожденная бифуркация Неймарка-Сакера

Можно проиллюстрировать еще несколько интересных бифуркаций отображений, если рассмотреть дискретный аналог автогенератора с жестким возбуждением. Такая потоковая модель описывается следующим уравнением:

$$\ddot{x} - (\lambda + \mu x^2 - x^4)\dot{x} + x = 0. \quad (2.65)$$

Здесь λ – параметр, отвечающий за трение, которое может быть как отрицательным при $\lambda > 0$, так и положительным при $\lambda < 0$. Параметр μ указывает на степень нелинейного насыщения колебаний.

Бифуркационная диаграмма модели (2.65) на плоскости (μ, λ) показана на рис.2.20. Линия $\lambda = 0$ отвечает бифуркации Андронова-Хопфа. В данном случае бифуркация может быть *суперкритической* (прямой) при $\mu < 0$ и *субкрити-*

ческой (обратной) при $\mu > 0$. Таким образом, при $\lambda = \mu = 0$ расположена точка коразмерности два, в которой меняется характер бифуркации Андронова-Хопфа. Такую точку называют *обобщенной* бифуркацией Андронова-Хопфа (*generalized Andronov-Hopf bifurcation*) или бифуркацией Баутина [7]. Иногда ее называют также вырожденной бифуркацией Андронова-Хопфа (*degenerate Andronov-Hopf bifurcation*). Мы будем использовать этот вариант, и обозначать такую точку *DAH*.

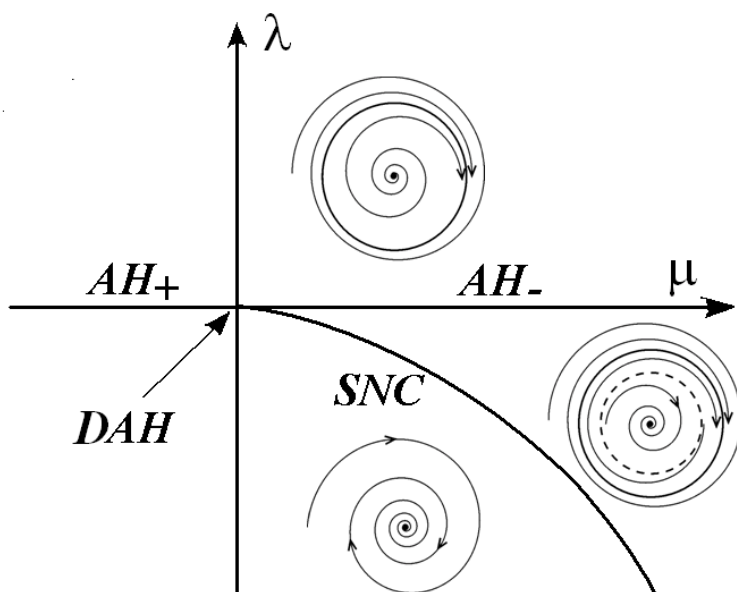


Рис.2.20. Окрестность точки вырожденной бифуркации Андронова-Хопфа *DAH*. На рисунке показаны: AH_+ – суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа, AH_- – субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа, SNC – линия слияния устойчивого и неустойчивого предельных циклов. Пунктиром показан неустойчивый предельный цикл.

Если на плоскости параметров рис.2.20 обойти точку *DAH* по часовой стрелке, начиная с третьей четверти, то можно наблюдать такие метаморфозы фазового портрета. Сначала имеется единственное состояние равновесия – устойчивый фокус в начале координат. При пересечении линии AH_+ происходит суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа, равновесие становится неустойчивым и от него отделяется устойчивый предельный цикл. При пересечении линии AH_- происходит субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа, так что равновесие превращается в устойчивый фокус и от него отделяется неустойчивый предельный цикл. В области между линиями AH_- и SNC в системе сосуществуют устойчивый и неустойчивый предельные циклы, а также устойчивое равновесие в начале координат. При уменьшении параметра λ предельные циклы сближаются и на линии SNC сливаются и исчезают. Такую бифуркацию можно назвать *седло-узловой бифуркацией предельных циклов*. Отметим, что в

окрестности точки DAN линию SNC можно найти приближенно в рамках квази-гармонического приближения – она задается отрезком параболы $\lambda \approx -\mu^2 / 8$ [6].

Перейдем теперь к соответствующей дискретной модели с помощью полу-явной схемы Эйлера и соотношений (2.52). Получаем отображение

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \varepsilon y_{n+1}, \\ y_{n+1} &= y_n + \varepsilon y_n (\lambda + \mu x_n^2 - x_n^4) - \varepsilon x_n. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Как было показано в разделе 2.7, при подобном переходе линия бифуркации Андронова-Хопфа превращается в линию бифуркации Неймарка-Сакера. Точка вырожденной бифуркации Андронова-Хопфа при этом переходит в точку ко-размерности два, которую по аналогии можно назвать *вырожденной точкой Неймарка-Сакера DNS*. В литературе она иногда носит специальное название: *бифуркация Ченцинера (Chenciner)*. В этой точке в соответствии со свойствами осциллятора-прототипа линия бифуркации Неймарка-Сакера превращается из суперкритической в субкритическую. В результате в модели (2.66) возможно рождение как устойчивой, так и неустойчивой инвариантных кривых. По аналогии с рис.2.20 следует ожидать, что к точке обобщенной бифуркации Неймарка-Сакера подходит линия *седло-узловой бифуркации инвариантных кривых*, которая порождается линией SNC в системе–прототипе.

Напомним, что если мыслить отображение как сечение Пуанкаре потока, то инвариантным кривым будут отвечать торы в фазовом пространстве трехмерной потоковой системы. В этом контексте бифуркации инвариантных кривых отображений представляют собой в определенном смысле *бифуркации торов* в потоках.

Карта динамических режимов дискретного осциллятора с жестким возбуждением показана на рис.2.21. На этом рисунке слева представлена карта для значения параметра дискретизации $\varepsilon = 0.2$. Из свойств системы–прототипа ясно, что в рассматриваемом случае важную роль играют неустойчивые режимы. Для того, чтобы их пронаблюдать, можно использовать следующий прием – обратить время в исходной системе (2.65). В силу правила замены производных по времени на конечные разности (2.49), такой переход эквивалентен изменению знака параметра дискретизации ε . Соответствующая карта неустойчивых режимов для $\varepsilon = -0.2$ показана справа на рис.2.21. Аналогичным образом и фазовые портреты неустойчивых режимов строились в обратном времени. Отметим, что на рис.2.21 представлена наиболее интересная полуплоскость $\mu > 0$.

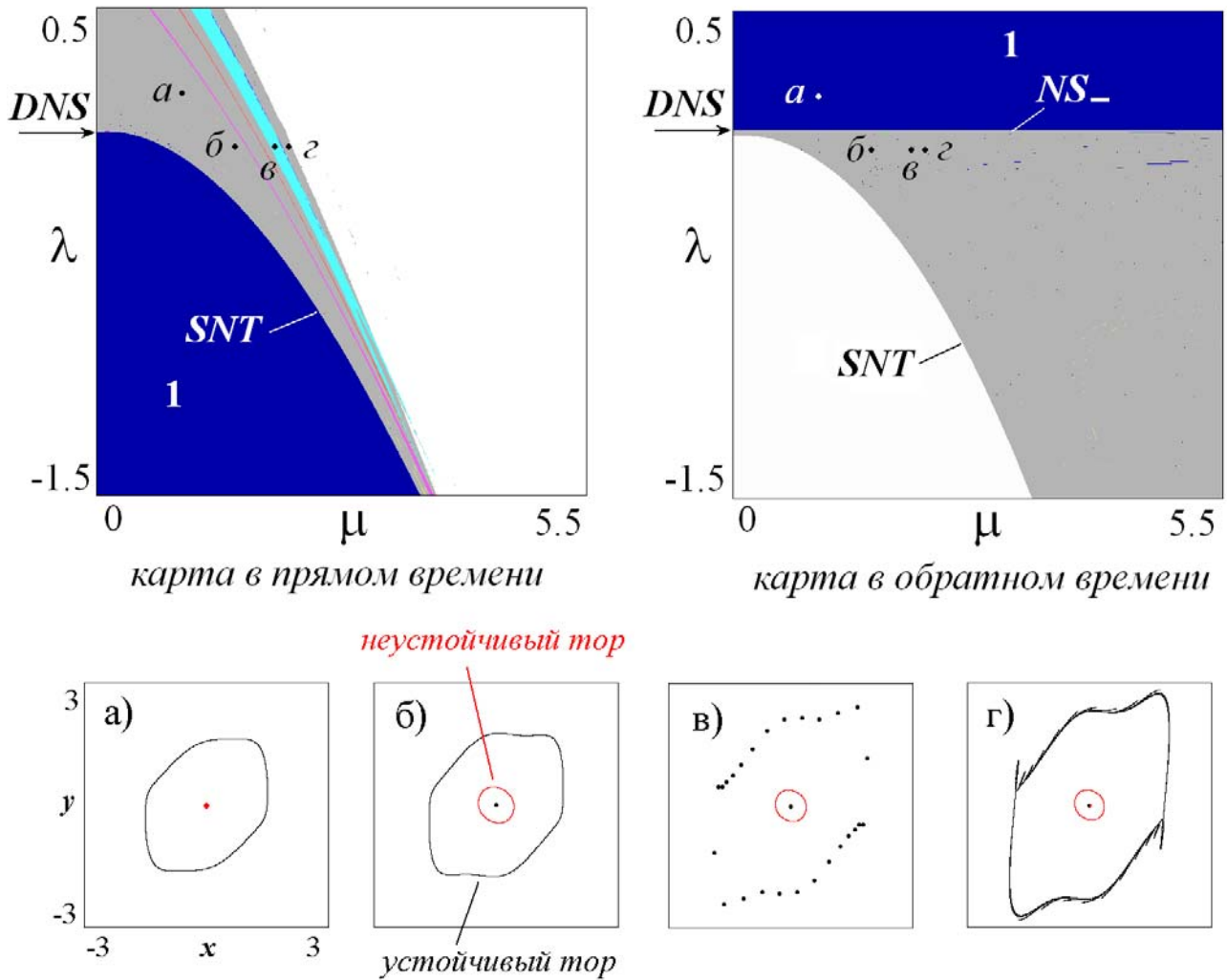


Рис.2.21. Карта режимов дискретного автогенератора с жестким возбуждением для значения параметра $|\varepsilon|=0.2$ в прямом и обратном времени и характерные фазовые портреты; *DNS* – точка вырожденной бифуркации Неймарка-Сакера, *SNT* – линия седло-узловой бифуркации инвариантных кривых (торов), *NS-* – линия субкритической бифуркации Неймарка-Сакера. Синий цвет и цифра 1 отвечают неподвижной точке, серый цвет – неперiodическим режимам.

Обсудим характерные фазовые портреты. В точке (а) при $\lambda > 0$ можно видеть устойчивую инвариантную кривую, охватывающую неустойчивую неподвижную точку, что соответствует системе-прототипу на рис.2.20. Уменьшим теперь управляющий параметр так, что $\lambda < 0$, и перейдем в точку (б). В этом случае неустойчивая точка испытывает субкритическую бифуркацию Неймарка-Сакера, в результате чего она становится устойчивой, а от нее отделяется неустойчивая инвариантная кривая. Таким образом, на рис.2.21б сосуществуют устойчивая и неустойчивая инвариантные кривые и устойчивая неподвижная точка. Область реализации подобного режима можно найти, совместив карты в прямом и обратном времени. Перекрытие областей серого цвета на первой и

второй картах как раз и отвечает зоне сосуществования устойчивой и неустойчивой инвариантных кривых.

Если теперь еще уменьшить управляющий параметр λ , то на линии SNT устойчивая и неустойчивая инвариантные кривые сольются и исчезнут. Таким образом, эту линию можно назвать линией *седло-узловой бифуркации инвариантных кривых*. В результате этой бифуркации остается лишь устойчивая точка в начале координат.

Здесь следует отметить одно обстоятельство. Метод карт динамических режимов визуализирует только режим с определенным начальным условием. Но в рассматриваемом случае могут сосуществовать устойчивые неподвижная точка и инвариантная кривая. Поэтому построение карты на рис.2.21 в этой области выполнено с подбором таких начальных условий, чтобы визуализировался режим с инвариантной кривой.

Увеличим теперь параметр μ и перейдем из точки (б) в точку (в). В этом случае возникает режим, не имеющий аналога в исходном потоке-прототипе. А именно, на устойчивой инвариантной кривой возникает *резонансный цикл* большого периода. Если теперь еще продвинуться в сторону увеличения параметра μ , то устойчивая инвариантная кривая потеряет гладкость, рисунок (г), и исчезнет. Траектории убегут на бесконечность, за исключением начальных точек, лежащих внутри области, охватываемой неустойчивой инвариантной кривой. Таким образом, неустойчивая инвариантная кривая выступает *границей бассейна притяжения* устойчивой неподвижной точки.

На картах рис.2.21 области периодических режимов (резонансов) достаточно узкие, причем на карте неустойчивых режимов их вообще не видно. Это связано с тем, что параметр дискретизации мал, и система близка к потоку-прототипу. Если увеличить параметр дискретизации ε , то резонансные области расширяются. Для примера на рис.2.22 показана карта в обратном времени для $\varepsilon = -0.4$. Видно, что внутри области квазипериодических режимов появились достаточно широкие окна периодической динамики. Пример *неустойчивого резонансного цикла* приведен на вставке справа от карты. Этот цикл найден итерациями в обратном времени и, соответственно, является неустойчивым по всем направлениям. (Как иногда говорят – *репеллером*.) Таким образом, резонансные циклы могут возникать не только на устойчивой, но и на неустойчивой инвариантной кривой, т.е. возможна своего рода синхронизация неустойчивых режимов.

Отметим, что в рассматриваемой системе могут присутствовать и *седловые циклы*, для которых существует одно устойчивое и одно неустойчивое направ-

ление (см. раздел 2.10). О возможности их реализации «сигнализирует» возникновение резонансов на устойчивой и неустойчивой инвариантных кривых. Такие циклы, однако, не визуализируются использованными здесь методами, поскольку траектории убегают от них при итерациях как в прямом, так и в обратном времени.

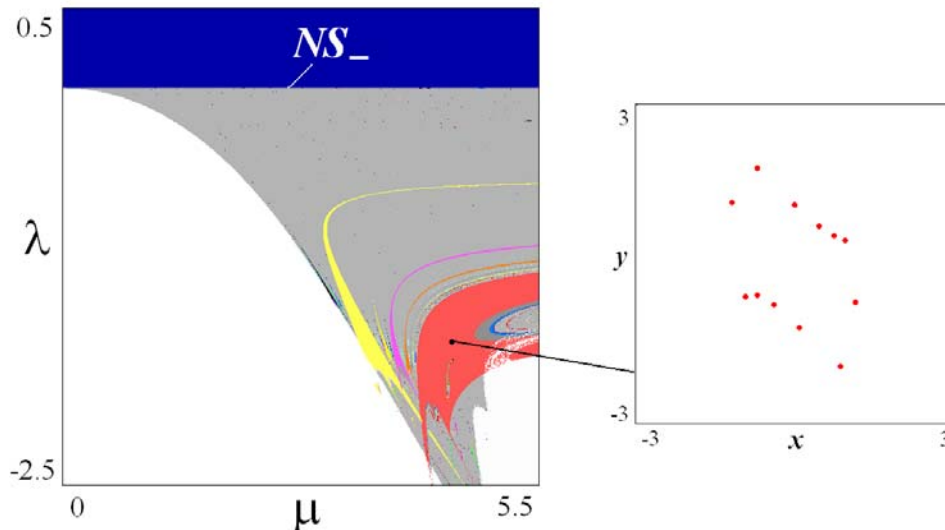


Рис.2.22. Карта режимов дискретного автогенератора с жестким возбуждением в обратном времени, $\varepsilon = -0.4$, и портрет неустойчивого цикла в выделенной точке.

2.10. Устойчивое и неустойчивое многообразия

Познакомимся теперь более подробно с понятием *устойчивого* и *неустойчивого многообразий*.

Обратимся к двумерному отображению общего вида (2.1). Пусть оно имеет неподвижную точку, которая является *седловой*. Это означает, что ее мультипликаторы действительные, причем один из них по модулю больше, а второй – меньше единицы. Рассмотрим сначала малую окрестность неподвижной точки. В такой окрестности отображение аппроксимируется линейными уравнениями и отвечает матрице Якоби. Введем косоугольную систему координат, в которой эта матрица диагональна, см. раздел 2.1. Эволюция возмущения в такой системе координат определяется соотношением (2.12):

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \mu_1 u_n, \\ v_{n+1} &= \mu_2 v_n. \end{aligned}$$

Как уже сказано, для седловой точки выполняется условие $|\mu_1| < 1 < |\mu_2|$. Нетрудно понять, что в этом случае «почти все» точки на фазовой плоскости будут при последовательных итерациях уходить на бесконечность (точки, показанные черным на рис.2.23а). Исключение составляют точки, лежащие на оси u

(показаны синим на рис.2.23а). Если стартовая точка лежит точно на этой оси, она в процессе своей эволюции будет оставаться на ней, асимптотически приближаясь к седлу. Такую линию называют *устойчивым многообразием*.

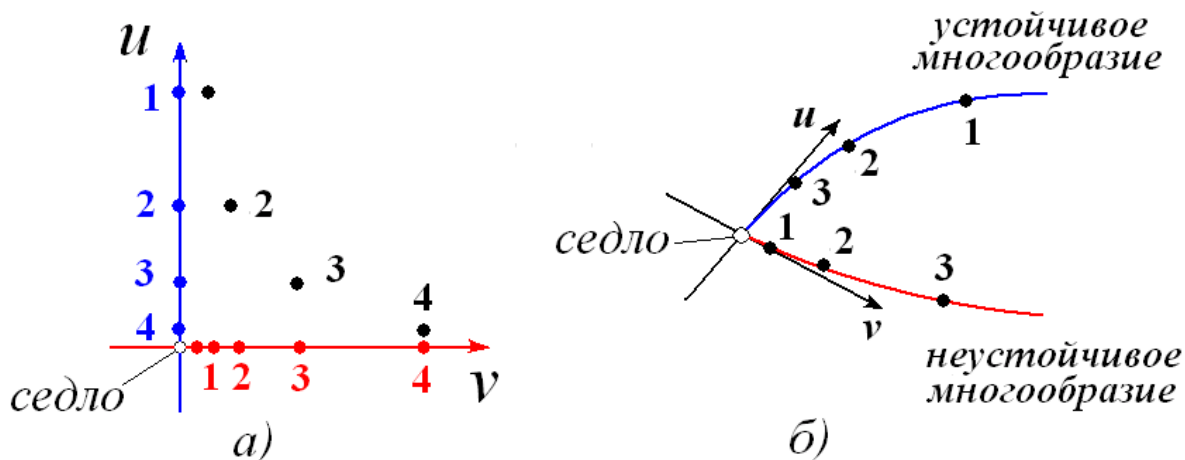


Рис.2.23. а) Устойчивое (синий цвет) и неустойчивое (красный цвет) многообразия седловой точки в координатах, отвечающих диагональному виду матрицы Якоби; б) устойчивое и неустойчивое многообразия нелинейного отображения.

Аналогично можно определить и *неустойчивое многообразие*. Это линия, для которой все точки, уходящие от неподвижной, всегда остаются на ней. Нетрудно понять, что этой линией служит ось v . Исходя из соотношений (2.12), любые другие точки при $n \rightarrow \infty$ асимптотически стремятся к этой линии.

Если отображение обратимо, то из (2.12) в обратном времени получаем

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{\mu_1} u_n, \\ v_{n+1} &= \frac{1}{\mu_2} v_n. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Теперь устойчивое многообразие отображения в обратном времени совпадает с неустойчивым многообразием исходного отображения.

В теории динамических систем доказывается, что эти результаты обобщаются и на нелинейный случай. Таким образом, множество точек, обладающее тем свойством, что любая точка из этого множества при итерациях движется строго по нему, приближаясь к неподвижной точке, называется *устойчивым многообразием*. Аналогично дается определение неустойчивого многообразия, только точки уходят от неподвижной. В случае нелинейного отображения многообразия уже не являются прямыми, а представляют собой некоторые гладкие линии, которые могут иметь очень сложную форму (рис.2.23б).

Отметим, что аналогичным образом определяются устойчивое и неустойчивое многообразия циклов. Особенность состоит в том, что изображающая

точка, двигающаяся по соответствующему многообразию, последовательно посещает окрестность каждого элемента цикла.

На рис.2.24 показано, как качественно эволюционируют устойчивое и неустойчивое многообразия циклов при последовательных удвоениях периода.

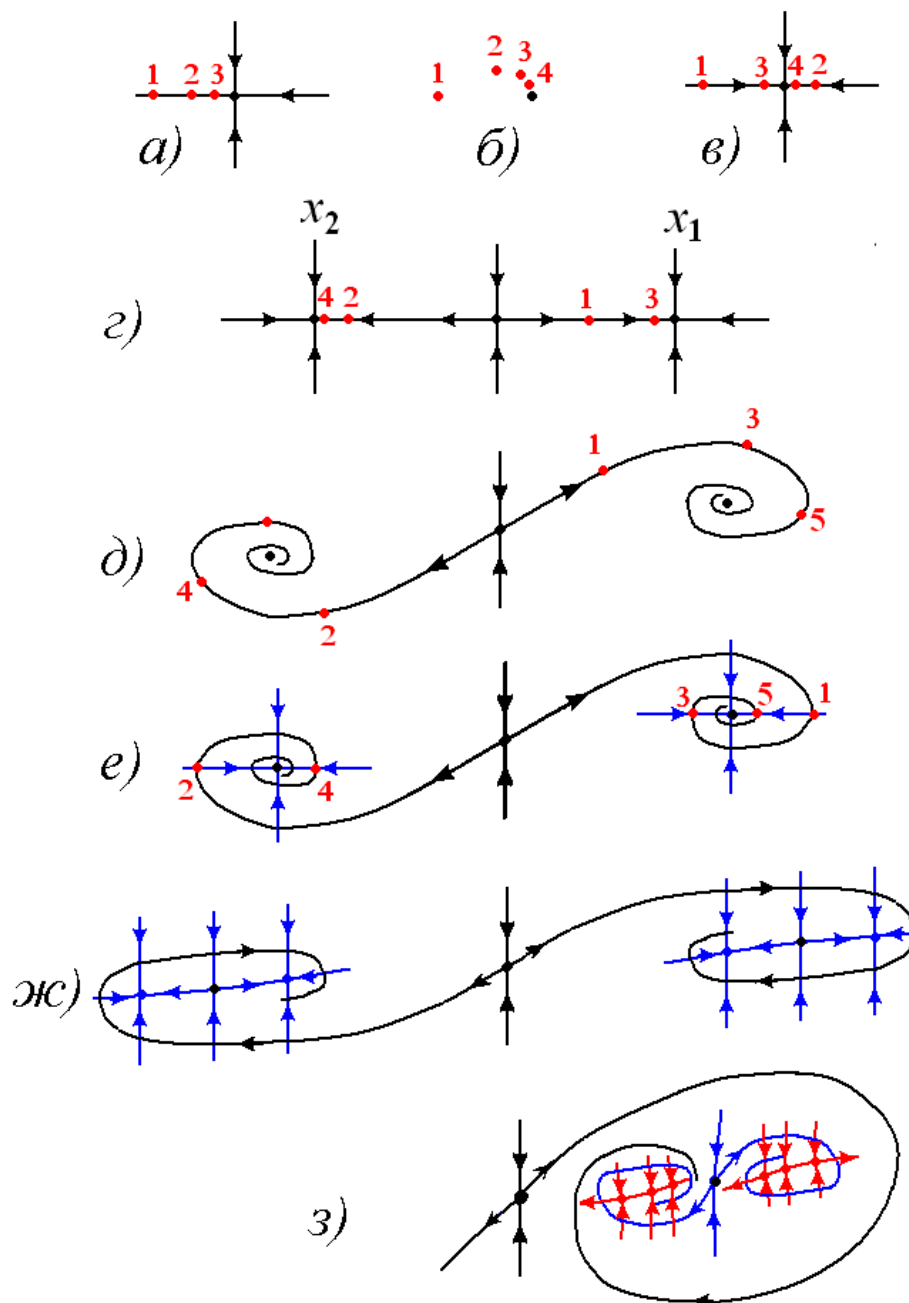


Рис.2.24. Эволюция многообразий при последовательных удвоениях периода. Черным цветом показаны многообразия неподвижной точки, синим – соответствующего 2-цикла, красным – 4-цикла.

Первоначально имеется устойчивая неподвижная точка типа узел, для которой мультипликаторы действительные, положительные и оба меньше единицы, рис.2.24а. Затем с ростом управляющего параметра мультипликаторы становятся комплексно сопряженными. В этом случае многообразия не существу-

ют, а точка представляет собой устойчивый фокус, рис.2.24б. Затем мультипликаторы, описав окружность в комплексной плоскости, возвращаются на действительную ось. Теперь снова можно построить устойчивое и неустойчивое многообразия неподвижной точки. Возникшая картина аналогична рис.2.24а, но изображающая точка теперь попеременно оказывается по разные стороны от неподвижной, рис.2.24в.

Затем мультипликаторы расходятся по действительной оси, один из них переходит через минус единицу и происходит удвоение периода, рис.2.24г. При этом исходная неподвижная точка теряет устойчивость и превращается в седло. Если теперь стартовать из точки 1, то мы будем удаляться от этого седла, попеременно приближаясь к равновесиям, которые являются элементами 2-цикла x_1 и x_2 . При этом горизонтальная линия на рис.2.24г одновременно является неустойчивым многообразием седла и устойчивым многообразием 2-цикла. Можно видеть, что локально в окрестности элемента 2-цикла, например, x_1 , картина аналогична рис.2.24а с тем лишь отличием, что динамика точки происходит через две итерации.

При еще большем увеличении управляющего параметра мультипликатор 2-цикла становится комплексным, его многообразия исчезают, а точки приближаются к элементам 2-цикла по спирали, являющейся неустойчивым многообразием седла, рис.2.24д. При этом изображающая точка попеременно посещает окрестности элементов 2-цикла x_1 и x_2 .

Затем мультипликаторы 2-цикла снова становятся действительными, причем один из них – отрицательный, рис.2.24е. В этом случае изображающая точка приближается к x_1 попеременно то слева, то справа. Интересная особенность картины на рис.2.24е состоит в том, что показанные точки одновременно движутся как по устойчивому многообразию 2-цикла, так и по неустойчивому многообразию седла, «наматывающегося» на точку x_1 .

Когда мультипликатор 2-цикла проходит через минус единицу, происходит еще одно удвоение периода, рис.2.24ж. На этом рисунке показано расположение многообразий неподвижной точки в виде седла, седлового 2-цикла и устойчивого 4-цикла. Еще один этап удвоений иллюстрирует рис.2.24з. Таким образом, при удвоениях периода картина многообразий становится все более непростой, определяя тем самым усложняющуюся динамику системы.

2.11. Гомоклиническая структура

С устойчивым и неустойчивым многообразиями неподвижных точек связаны такие понятия, как *гомоклиническая* и *гетероклиническая структуры*. Рассмотрим этот вопрос более подробно. Пусть двумерное отображение имеет неподвижную точку типа седло, т.е. у нее есть устойчивое и неустойчивое многообразия. Тогда может возникнуть такая ситуация, что устойчивое и неустойчивое многообразия пересекутся в некоторой, отличной от неподвижной, точке. Обозначим ее Γ_0 (рис.2.25). С одной стороны, точка Γ_0 принадлежит устойчивому многообразию, следовательно, стартуя из нее, траектория будет приближаться к неподвижной точке, т.е. точка Γ_1 , получаемая из точки Γ_0 за одну итерацию отображения тоже будет принадлежать устойчивому многообразию. С другой стороны, точка Γ_0 принадлежит неустойчивому многообразию, следовательно стартовая из нее траектория должна удаляться от неподвижной точки, а все точки, получаемые из Γ_0 при итерации отображения, будут принадлежать неустойчивому многообразию. А значит, и точка Γ_1 тоже принадлежит неустойчивому многообразию. Следовательно, точка Γ_1 является точкой пересечения устойчивого и неустойчивого многообразия. Продолжая рассуждать таким образом, нетрудно показать, что если устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются, то они должны иметь бесконечно много точек пересечения. Как следствие, устойчивое и неустойчивое многообразия неподвижной точки искривляются сложным образом. Возникающая при этом в фазовом пространстве структура называется *гомоклинической*. Появление гомоклинической структуры говорит о возникновении *сложной динамики* системы.

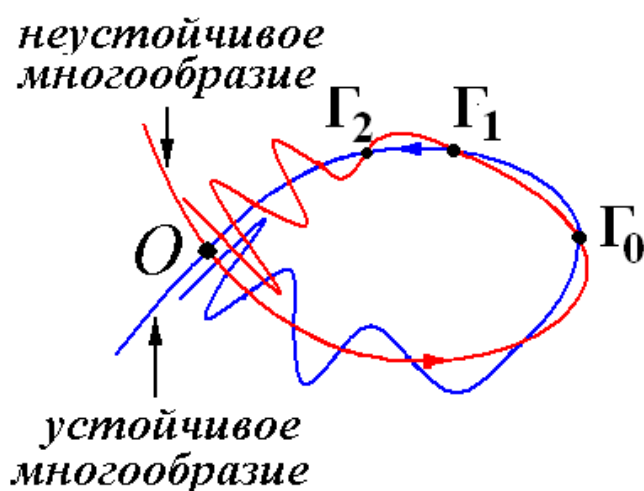


Рис.2.25. Качественная иллюстрация образования гомоклинической структуры при пересечении устойчивого и неустойчивого многообразий. O – неподвижная точка; Γ_0 , Γ_1 и Γ_2 – точки пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий.

Гетероклиническая структура так же образуется в результате пересечения

устойчивого и неустойчивого многообразий, но принадлежащих разным неподвижным точкам.

2.12. Примеры расчета устойчивого и неустойчивого многообразий. Нелокальные бифуркации

Алгоритм поиска устойчивого и неустойчивого многообразий на компьютере может выглядеть следующим образом. В очень малой окрестности неподвижной точки выбирается случайным образом стартовая точка, которая подвергается последовательным итерациям. Затем процедура повторяется для другой стартовой точки и т.д. В результате на экране компьютера прорисовывается устойчивое многообразие. Для реализации этого метода необходимо очень точно знать координаты неподвижной точки. Если их не удастся определить аналитически, то предварительно необходимо организовать соответствующий численный поиск с помощью метода Ньютона.

Чтобы построить неустойчивое многообразие, необходимо реализовать ту же процедуру, итерируя отображение в обратном времени. Это легко сделать для *обратимого* отображения. Примером обратимого отображения является отображение Эно. Действительно, из (2.26) легко получить:

$$\begin{aligned} y_{n-1} &= \frac{1}{b}(1 - \lambda y_n^2 - x_n), \\ x_{n-1} &= y_n. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Приведем иллюстрации взаимного расположения устойчивого и неустойчивого многообразий, полученных при помощи этого алгоритма. Устойчивое и неустойчивое многообразие отображения Эно (2.26) приведены на рис. 2.26а. Синим цветом показано устойчивое многообразие, красным – неустойчивое, неподвижная точка выделены черным. При выбранных значениях параметров многообразия образуют гомоклиническую структуру, что «сигнализирует» о наличии сложной динамики в отображении.

На рис.2.6б показаны устойчивое и неустойчивое многообразия для *модифицированного отображения Эно*:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 + b y_n + \varepsilon x_n y_n + \mu x_n^3, \\ y_{n+1} &= x_n. \end{aligned} \quad (2.69)$$

В этом случае имеются две седловые точки (отмечены квадратиками) и наблюдаемая структура образована пересечением неустойчивого многообразия левой точки с устойчивым многообразием правой, т.е. является гетероклинической.

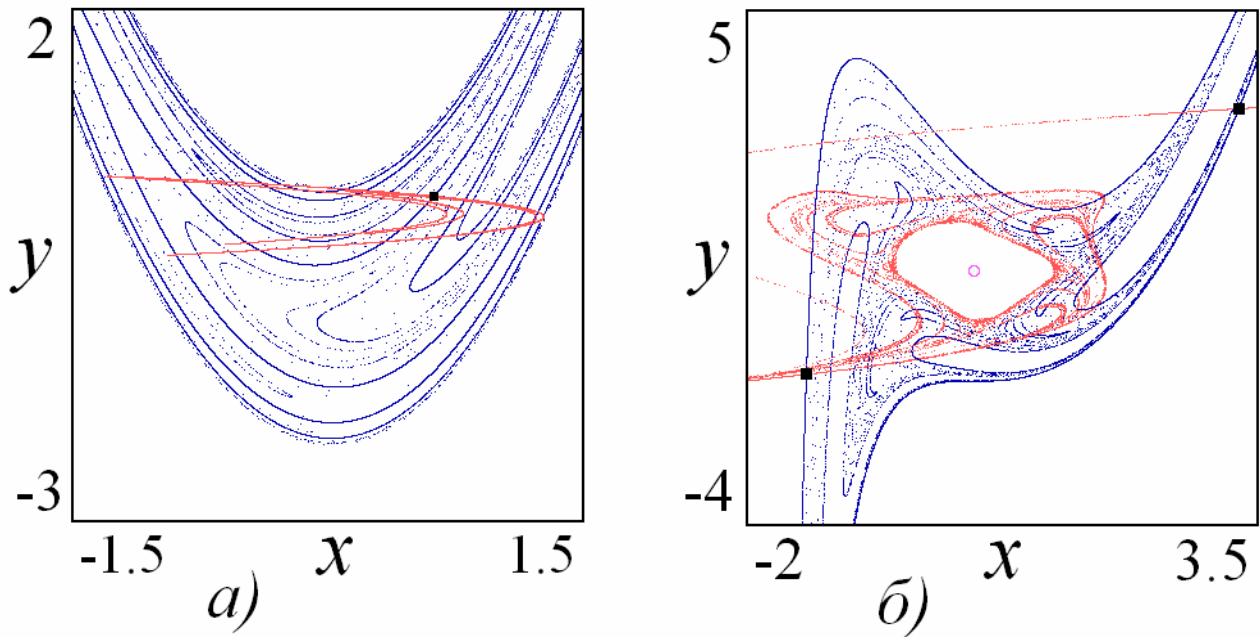


Рис. 2.26. Гомоклиническая структура седловой точки отображения Эно (2.26), $\lambda = 1.4$; $b = 0.3$; б) гетероклиническая структура модифицированного отображения Эно (2.69), $\lambda = 0.6933$, $\varepsilon = -0.5$, $\mu = 0.5$, $b = 0.797$. Синим цветом показано устойчивое многообразие, красным – неустойчивое, неподвижные точки выделены черным, неустойчивый фокус – кружком в центре на рис.б).

Устойчивое и неустойчивое многообразия играют важную роль в *нелокальных бифуркациях*. При локальных бифуркациях перестройка вблизи порога бифуркации происходит в сколь угодно малой области фазового пространства. При нелокальных бифуркациях перестройка захватывает некоторый конечный элемент фазового пространства.

Пример нелокальной бифуркации иллюстрирует рис.2.27. На нем показаны устойчивое и неустойчивое многообразия для дискретного осциллятора Богданова-Тakens (2.58). В этом случае на рис.2.27а аттрактор представляет собой инвариантную кривую. Можно видеть, что неустойчивое многообразие седла приходит в инвариантную кривую (в некотором смысле инвариантная кривая является «частью» неустойчивого многообразия.) При вариации параметра инвариантная кривая сближается с устойчивым многообразием. В результате аттрактор исчезает, а неустойчивое многообразие образует петлю, на основе которой возникает хорошо заметная на рис. 2.27б гомоклиническая структура. Это пример нелокальной бифуркации – *столкновения инвариантной кривой с устойчивым многообразием седла*. Отметим, что в дискретном осцилляторе Богданова-Тakens она приходит на смену бифуркации влипания предельного цикла в петлю сепаратрисы в потоке-прототипе.

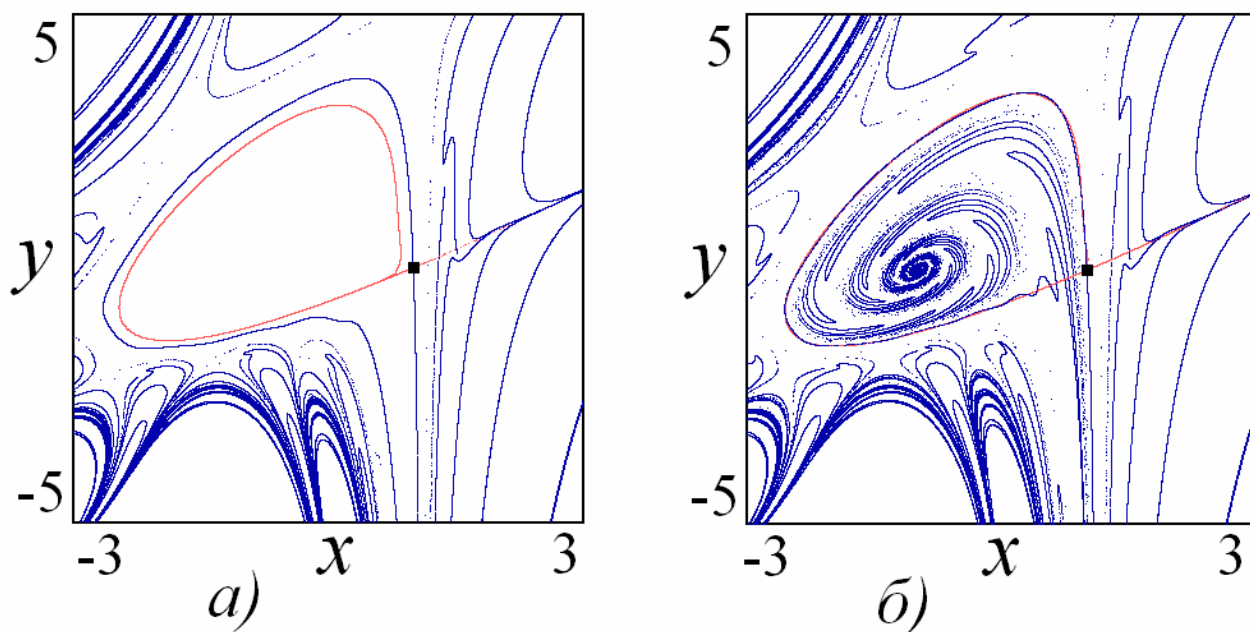


Рис. 2.27. Устойчивое и неустойчивое многообразия седловой точки дискретного осциллятора Богданова-Тakens (2.58) при значениях параметров $a = 1$, $\varepsilon = 0.565$, $\mu = -0.66$ (а) и $\mu = -0.62$ (б). Показан только фрагмент фазовой плоскости вблизи седловой точки.

2.13. Физическая реализация двумерных отображений

Как мы уже отмечали, физически мотивированные двумерные отображения могут быть получены непосредственно из уравнений, описывающих конкретные системы. Например, для нелинейного осциллятора Дуффинга с импульсным возбуждением можно получить отображение Икеды, для моделей ускорения Ферми может быть получено «отображение прыгающего шарика», можно придать физический смысл отображению Эно и т.д. [1-7].

Можно, однако, сформулировать, в определенном смысле обратную задачу: как реализовать физическую систему, которая описывает то или иное двумерное отображение? Современные средства, типа программного пакета Multisim [55] позволяют решать такие задачи, синтезируя соответствующие радиотехнические схемы. Для примера в Приложении 1 представлена радиотехническая система, моделирующая универсальное двумерное отображение (2.40).

Задачи

1. Изобразите качественно динамику изображающей точки на фазовой плоскости двумерного отображения непосредственно в окрестности неподвижной точки в случаях, когда оба мультипликатора действительны и, кроме того, а) $\mu_1 > 1, \mu_2 > 1$; б) $\mu_1 < -1, \mu_2 < -1$; в) $\mu_1 > 1, \mu_2 < -1$.

2. Изобразите качественно динамику изображающей точки на фазовой плоскости двумерного отображения в окрестности неподвижной точки в случаях, когда оба мультипликатора комплексные, причем модуль немного больше единицы, а фаза близка к а) нулю; б) $\pi/3$; в) π .

4. Укажите на треугольнике устойчивости точки, для которых мультипликаторы принимают значения: а) $\mu_1 = 1, \mu_2 = 1/2$; б) мультипликаторы комплексные, причем модуль равен единице, а фаза – $\pi/4, \pi/3, \pi/6, 2\pi/3$.

5. Найдите для отображения Гукенхеймера и Холмса

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= y_n, \\ y_{n+1} &= \alpha y_n (1 - x_n)\end{aligned}$$

нетривиальную неподвижную точку. Найдите матрицу Якоби и мультипликаторы. Укажите маршрут на плоскости след – якобиан матрицы, возникающий при вариации параметра α . Какие бифуркации при этом возможны?

6. Приведите матрицу Якоби отображения Гукенхеймера-Холмса к диагональному виду.

7. Найдите точки рождения 2-цикла и 4-цикла отображения Эно в консервативном случае.

8. Считая элементы 3-цикла известными, найдите соответствующую матрицу Якоби отображения Эно.

9. Исследуйте неподвижные точки, матрицу Якоби и ее инварианты для «стандартного» диссипативного отображения:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + y_{n+1}, \\ y_{n+1} &= k \sin x_n + by_n.\end{aligned}$$

Найдите возможные бифуркации неподвижных точек.

10. При каких значениях параметров мультипликаторы неподвижной точки «стандартного» диссипативного отображения будут комплексными? Опишите их эволюцию на комплексной плоскости при вариации параметра k .

11. Постройте карту динамических режимов диссипативного «стандартного» отображения и сравните результаты с бифуркационным анализом.

12. Возможна ли бифуркация *fold-flip* в минимальном отображении Спротта?

13. Для минимального отображения Спротта найдите координаты острых языков Арнольда, которым отвечает период 5.

14. Изобразите треугольник устойчивости и укажите на нем основания языков Арнольда с разными числами вращения.

15. Найдите матрицу Якоби отображения Богданова, укажите ее след и

Якобиан. Найдите точки бифуркаций коразмерности два.

16. Постройте примеры характерных фазовых портретов универсального двумерного отображения.

17. Для универсального двумерного отображения с бифуркацией Неймарка-Сакера укажите на плоскости параметров S, J точки, в которых расположены острия языков периода 6 и 7. Сколько таких языков? Чему равны их числа вращения?

18. Для универсального двумерного отображения постройте бифуркационное дерево и графики двух показателей Ляпунова вдоль нескольких маршрутов $S=const$. Обсудите полученные результаты.

19. Методом карт динамических режимов изучите эволюцию внутреннего устройства языков Арнольда с образованием вторичной бифуркации Неймарка-Сакера в случае универсального отображения с дополнительным, третьим параметром.

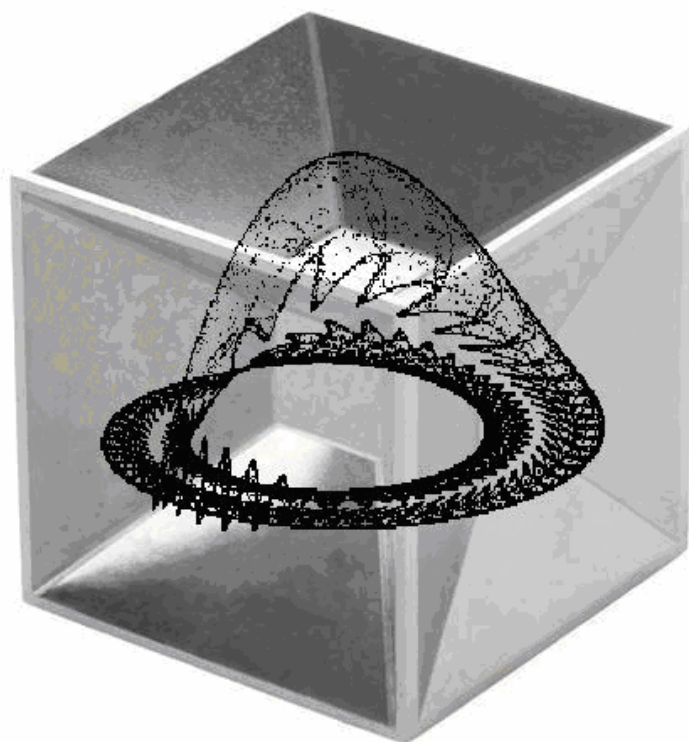
20. Найдите линию бифуркации Неймарка-Сакера на базе симметричного 2-цикла для двух связанных логистических отображений:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 + \varepsilon(y_n - x_n), \\y_{n+1} &= \lambda - y_n^2 + \varepsilon(x_n - y_n).\end{aligned}$$

Изобразите найденную линию на плоскости параметров. (*Указание.* Используя свойства якобиана для произведения матриц, найдите якобиан матрицы Якоби такого цикла и приравняйте его единице. Для нахождения элементов 2-цикла используйте выражения для произведения и суммы элементов 2-цикла логистического отображения.)

21. Создайте программу, которая строит устойчивое и неустойчивое многообразия неподвижной точки для отображения Эно. Пронаблюдайте трансформацию многообразий при вариации параметров. Зафиксируйте момент образования гомоклинической структуры и наблюдайте ее эволюцию.

Часть III
БИФУРКАЦИИ
ТРЕХМЕРНЫХ
ОТОБРАЖЕНИЙ



3.1. Трехмерные отображения, неподвижные точки и мультипликаторы

Перейдем теперь к анализу трехмерных отображений. В общем виде трехмерное отображение задается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, y_n, z_n), \\y_{n+1} &= g(x_n, y_n, z_n), \\z_{n+1} &= v(x_n, y_n, z_n).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Оно может иметь неподвижную точку (x_0, y_0, z_0) , одна итерация которой приводит в ту же точку, т.е.

$$\begin{aligned}x_0 &= f(x_0, y_0, z_0), \\y_0 &= g(x_0, y_0, z_0), \\z_0 &= v(x_0, y_0, z_0).\end{aligned}\tag{3.2}$$

Малые возмущения в окрестности неподвижной точки эволюционируют в соответствии с матрицей Якоби, вычисленной в этой точке:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \end{pmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)}.\tag{3.3}$$

Собственные числа матрицы \hat{M} являются мультипликаторами отображения, которые определяют характер устойчивости неподвижной точки и отвечают за бифуркации. Для трехмерных отображений матрица \hat{M} – это матрица 3×3 , поэтому уравнение для определения собственных чисел

$$\det(\hat{M} - \mu \hat{E}) = 0\tag{3.4}$$

где \hat{E} – единичная матрица, имеет третий порядок.

Матрица \hat{M} (3.3) имеет три собственных числа, и, соответственно, три мультипликатора. Поскольку уравнение для определения собственных чисел действительное, то все три мультипликатора могут быть либо действительными числами, либо один из них является действительным, а два оставшихся – комплексно-сопряженными. Таким образом, можно сформулировать критерий устойчивости: неподвижная точка будет устойчивой, если все мультипликаторы по модулю меньше единицы.

Как и в случае двух измерений, для анализа картины бифуркаций используем в качестве параметров *инварианты матрицы возмущений*. Для этого надо найти связь этих параметров с мультипликаторами. Обозначим мультипликаторы отображения (3.1) через μ_1, μ_2, μ_3 . Тогда уравнение третьего порядка (3.4)

может быть записано в форме

$$(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)(\mu - \mu_3) = 0. \quad (3.5)$$

Раскрывая в (3.5) скобки, приходим к соотношению

$$\mu^3 - S\mu^2 + H\mu - J = 0, \quad (3.6)$$

в котором введены обозначения

$$\begin{aligned} S &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \\ H &= \mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3, \\ J &= \mu_1\mu_2\mu_3. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Величины S , H , J и есть три инварианта матрицы возмущений (матрицы Якоби).

3.2. Условия основных бифуркаций трехмерных отображений

Прежде всего, выясним, как в случае трехмерных отображений представлены классические бифуркации, характерные для случаев одного и двух измерений. Обсудим их по возрастающей коразмерности.

Сначала найдем условия реализации в трехмерных отображениях известных бифуркаций коразмерности один.

а) *Касательная бифуркация* $\mu = +1$. Подставляя $\mu = +1$ в (3.6), получаем условие этой бифуркации:

$$H = J - 1 + S. \quad (3.8)$$

б) *Бифуркация* $\mu = -1$. Подставляя $\mu = -1$ в (3.6), получаем:

$$H = -J - 1 - S. \quad (3.9)$$

в) *Бифуркация Неймарка-Сакера*. Условием этой бифуркации является обращение в единицу модуля двух комплексно-сопряженных мультипликаторов, так что $\mu_1 = e^{i\theta}$, $\mu_2 = e^{-i\theta}$. Подставим эти значения в соотношения (3.7). Тогда получим уравнения, содержащие только третий мультипликатор и фазу θ :

$$S = 2 \cos \theta + \mu_3, \quad H = 2\mu_3 \cos \theta + 1, \quad J = \mu_3. \quad (3.10)$$

Исключая их, получаем условие бифуркации Неймарка-Сакера:

$$H = SJ - J^2 + 1. \quad (3.11)$$

Обсудим теперь бифуркации коразмерности два. Сначала представим бифуркации, уже известные для двумерных отображений.

а) *Резонанс 1:1* R_1 . Для этой бифуркации два мультипликатора обращаются в единицу: $\mu_1 = +1$, $\mu_2 = +1$. Подставляя эти соотношения в (3.7) и исключая третий мультипликатор, получаем:

$$S = J + 2, \quad H = 2J + 1. \quad (3.12)$$

б) *Резонанс 1:2 R_2* . Условием бифуркации являются равенства $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = -1$. Действуя аналогично предыдущему случаю, получаем:

$$S = J - 2, \quad H = -2J + 1. \quad (3.13)$$

в) *Бифуркация fold-flip ff*. Для этой бифуркации $\mu_1 = +1$, $\mu_2 = -1$, так что из (3.7) следует

$$S = -J, \quad H = -1. \quad (3.14)$$

В трехмерной системе появляются также *новые бифуркации коразмерности два*, обусловленные наличием трех измерений и трех мультипликаторов. Действительно, бифуркация Неймарка-Сакера связана с комплексно-сопряженными мультипликаторами, лежащими на единичной окружности: $\mu_1 = e^{i\theta}$, $\mu_2 = e^{-i\theta}$. В трехмерной системе появляется дополнительное условие устойчивости, связанное с третьим мультипликатором: $-1 < \mu_3 < 1$. Таким образом, возможны новые бифуркации коразмерности два, когда одновременно выполняются условие бифуркации Неймарка-Сакера и условие обращения в $+1$ или -1 третьего мультипликатора. В соответствии с этими условиями, новые бифуркации носят названия *фолд-Неймарк-Сакер (fold-Neimark-Saker)* и *флип-Неймарк-Сакер (flip-Neimark-Saker)*.

Найдем условия реализации таких бифуркаций. Поскольку, в соответствии с третьим уравнением (3.10) $\mu_3 = J$, то равенство $\mu_3 = \pm 1$ приводит к условию $J = \pm 1$. Таким образом, с учетом (3.11) для новых бифуркаций имеем:

$$\text{e) } \textit{fold-NS}: \quad H = S, \quad J = 1. \quad (3.15)$$

$$\text{d) } \textit{flip-NS}: \quad H = -S, \quad J = -1. \quad (3.16)$$

3.3. Пространство параметров и бифуркации трехмерных отображений

Чтобы наблюдалась полная картина описанных бифуркаций, система должна характеризоваться тремя существенными параметрами. Рассмотрим вложение этой картины в пространство инвариантов матрицы возмущений (J, S, H) . Удобство и важность использования такого пространства обусловлено тем, что получаемая картина будет, во-первых, *полной*, а, во-вторых, *универсальной* для трехмерных отображений.

В пространстве (J, S, H) бифуркациям коразмерности один будут отвечать некоторые *поверхности*, а бифуркациям коразмерности два – *линии*. Для выяснения структуры пространства (J, S, H) построим сначала его сечения плоскостями $S = \text{const}$. Соответствующие иллюстрации для $S = 0$, $S = 2$ и $S = -2$

представлены на рис.3.1. Обсудим их более подробно.

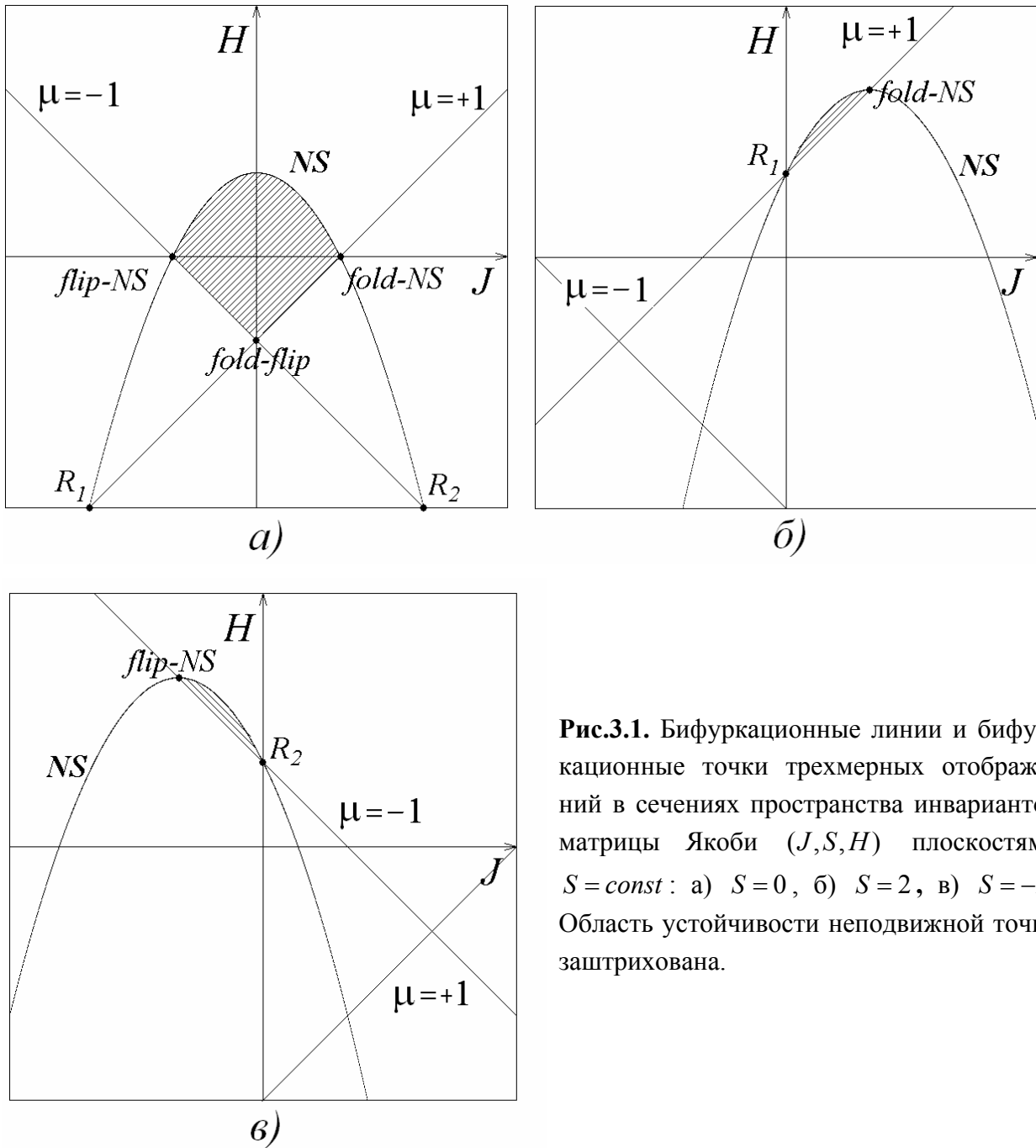


Рис.3.1. Бифуркационные линии и бифуркационные точки трехмерных отображений в сечениях пространства инвариантов матрицы Якоби (J, S, H) плоскостями $S = const$: а) $S = 0$, б) $S = 2$, в) $S = -2$. Область устойчивости неподвижной точки заштрихована.

Сечение $S = 0$. В этом сечении на рис.3.1а можно видеть линию бифуркации Неймарка-Сакера NS , которая в соответствии с (3.11) представляет собой отрезок параболы $H = 1 - J^2$. Эта линия ограничена двумя новыми точками, характерными для трехмерных отображений: $fold-NS$ ($J = 1, H = 0$) и $flip-NS$ ($J = -1, H = 0$). Через эти точки проходят также ограничивающие область устойчивости линии бифуркаций $\mu = +1$: $H = J - 1$ и $\mu = -1$: $H = -J - 1$. Они, в свою очередь, пересекаются в точке $fold-flip$ с координатами $(J = 0, H = -1)$. Заметим, что резонансы R_1 и R_2 не попадают в область устойчивости – для них

третий мультипликатор оказывается по модулю больше единицы.

Сечение $S = 2$. Сечение $S = 2$ показано на рис.3.1б. В этом случае область устойчивости ограничена линией бифуркации Неймарка-Сакера, концевыми точками которой являются точки *fold-NS* и резонанса R_1 . Второй границей области устойчивости является линия $\mu = +1$.

Сечение $S = -2$. На рис.3.1в показано сечение $S = -2$. В этом случае отрезок линии Неймарка-Сакера ограничен точками *flip-NS* и резонанса R_2 . Второй границей области устойчивости является линия мультипликатора $\mu = -1$.

Таким образом, представленные рисунки иллюстрируют разнообразные возможные и типичные варианты устройства границы области устойчивости неподвижной точки трехмерных отображений.

Используя рис.3.1, можно построить картину вложения бифуркаций в трехмерное пространство инвариантов матрицы возмущений (S, J, H) , которая показана на рис.3.2. Как мы уже отмечали, в пространстве параметров бифуркациям коразмерности один отвечают некоторые поверхности, а бифуркациям коразмерности два – линии. Возникают и *бифуркации коразмерности три*, которым соответствуют некоторые точки в пространстве параметров.

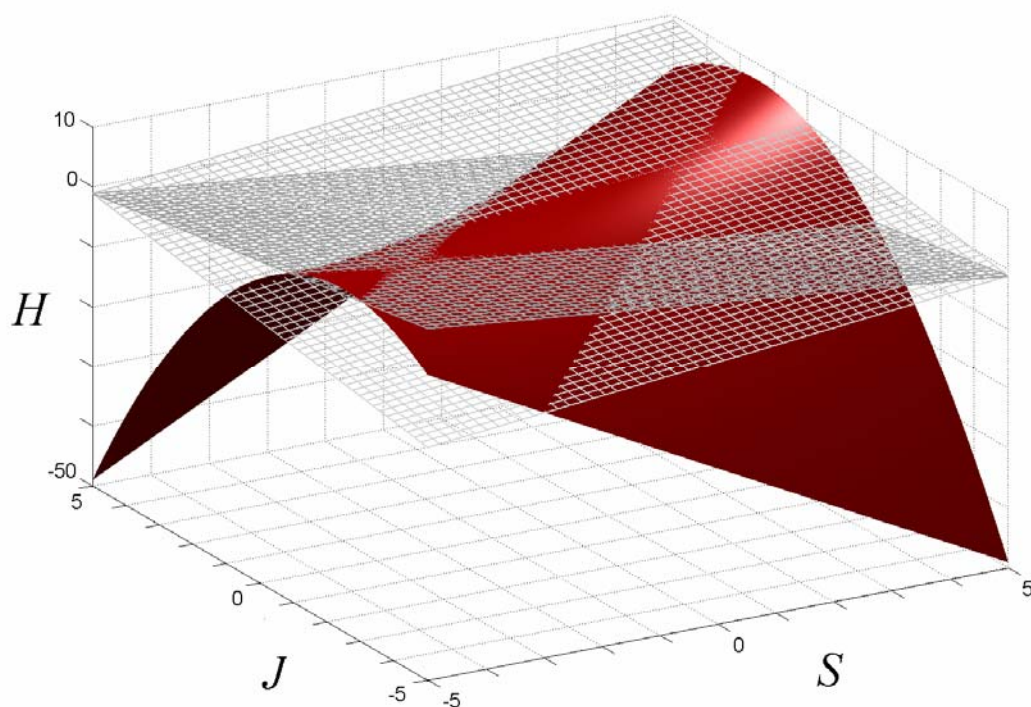


Рис.3.2. Поверхность бифуркации Неймарка-Сакера, плоскости мультипликаторов $\mu = +1$ и $\mu = -1$ трехмерных отображений в пространстве инвариантов матрицы возмущений (J, S, H) .

На рисунке 3.2 можно видеть следующие поверхности.

- Поверхность $H = SJ - J^2 + 1$, которая показана в цветной графике. Она отвечает условию обращения в единицу модуля двух комплексно-сопряженных мультипликаторов.

- Поверхности $H = J - 1 + S$ и $H = -J - 1 - S$, которые показаны на рисунке в черно-белой графике с нанесенной сеткой координат. Они являются плоскостями в трехмерном пространстве параметров и отвечают условиям обращения одного из мультипликаторов в $+1$ и -1 .

Можно видеть, что за бифуркацию Неймарка-Сакера отвечает лишь часть поверхности $H = SJ - J^2 + 1$. Ее устройство удобно исследовать, обратившись к показанной на рис.3.3 проекции поверхности бифуркации Неймарка-Сакера на плоскость (J, S) .

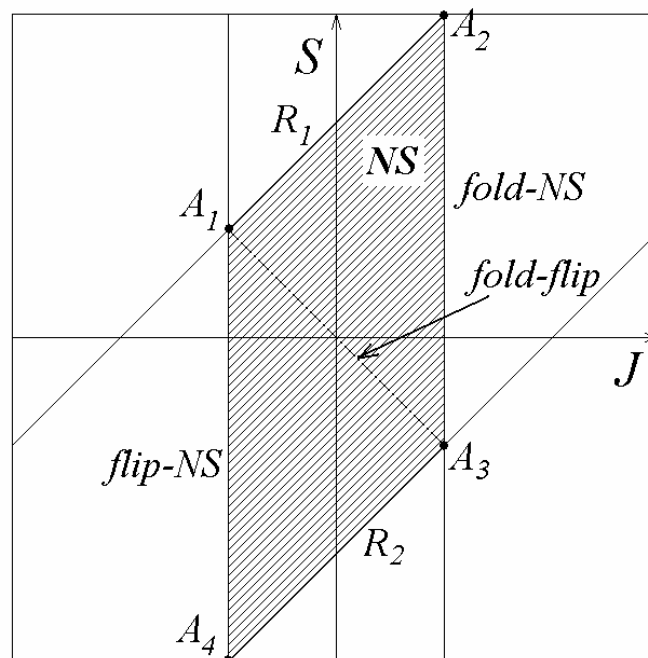


Рис.3.3. Проекция поверхности Неймарка-Сакера NS и ограничивающих ее линий $flip-NS$, $fold-NS$, R_1 и R_2 на плоскость (S, J) . Пунктир – проекция линии $fold-flip$.

В соответствии с этим рисунком, в пространстве инвариантов матрицы возмущений бифуркации Неймарка-Сакера отвечает поверхность, ограниченная линиями $fold-NS$, $flip-NS$, резонансов R_1 и R_2 . Из рис.3.2 и рис.3.3 можно видеть, что имеются также точки новых бифуркаций коразмерности три. Они обозначены буквами A и бывают четырех типов.

- A_1 : $\mu_1 = +1, \mu_2 = +1, \mu_3 = -1$, общая точка бифуркаций $flip-NS$ и R_1 .
- A_2 : $\mu_1 = +1, \mu_2 = +1, \mu_3 = +1$, общая точка бифуркаций $fold-NS$ и R_1 .
- A_3 : $\mu_1 = +1, \mu_2 = -1, \mu_3 = -1$, общая точка бифуркаций $fold-NS$ и R_2 .
- A_4 : $\mu_1 = -1, \mu_2 = -1, \mu_3 = -1$, общая точка бифуркаций $flip-NS$ и R_2 .

Координаты точек таких бифуркаций в пространстве параметров (J, S, H) даются соотношениями

$$A_1 (-1, 1, -1); A_2 (1, 3, 3); A_3 (1, -1, -1); A_4 (-1, -3, 3).$$

В соответствии со свойствами матрицы возмущения, ее якобиан J отвечает за величину диссипации в системе. С ростом якобиана диссипация уменьшается, так что случай $J = 1$ отвечает *консервативной* системе. Поэтому с физической точки зрения важно построить также и сечения пространства параметров плоскостью $J = const$.

Случай $J = 0$. Это очень сильная диссипация, система редуцируется к двумерному отображению. Из уравнений для мультипликаторов (3.6) получаем, что $\mu^2 - S\mu + H = 0$. Таким образом, картине бифуркаций отвечает классический треугольник устойчивости на плоскости (S, H) . Интересно, что при переходе к двумерному отображению роль якобиана играет третий инвариант матрицы возмущений H .

Случай $J = 0.5$. Картине бифуркационных линий и точек отвечает искаженный по форме «треугольник устойчивости», показанный на рис.3.4. При этом линии и точки бифуркаций качественно отвечают случаю двумерных отображений.

Случай $J = 1$. Это случай нулевой диссипации, отвечающий переходу к консервативному пределу. При этом линия Неймарка-Сакера и линия $\mu = +1$ в соответствии с (3.8) и (3.11) даются одним и тем же соотношением $H = S$. Таким образом, эти линии сливаются, и область устойчивости неподвижной точки исчезает. Это интересная особенность трехмерных отображений. В двумерных отображениях это не так: при приближении якобиана к единице, область устойчивости не стремится к нулю, а заключена в интервале $-1 < S < 1$.

Сечение $H = const$. Для полноты картины построим сечение пространства параметров плоскостью $H = 0$. В этом случае бифуркация Неймарка-Сакера (3.11) дается отрезками линии $S = \frac{J^2 - 1}{J}$. В соответствии с (3.8), (3.9) бифуркации $\mu = +1$ отвечает условие $S = 1 - J$, а бифуркации $\mu = -1$ – условие $S = -1 - J$. Суммарная картина показана на рисунке 3.5. Можно видеть, что одна ветвь линии бифуркации Неймарка-Сакера ограничена точкой резонанса 1:1 $R_1 (J = -1/2, S = 3/2)$ и точкой *flip-NS* ($J = -1, S = 0$). Вторая ветвь ограничена точкой резонанса 1:2 $R_2 (J = 1/2, S = -3/2)$ и точкой *fold-NS* ($J = 1, S = 0$).

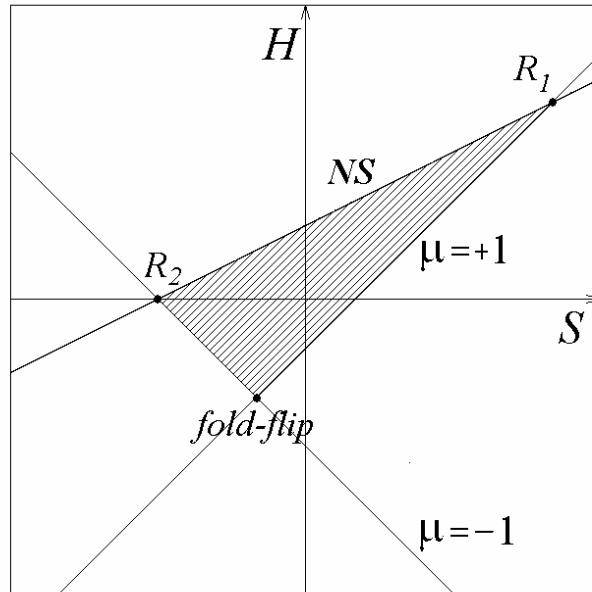


Рис.3.4. Бифуркационные линии и точки трехмерных отображений в сечении пространства инвариантов матрицы возмущений (J, S, H) плоскостью $J = 0.5$.

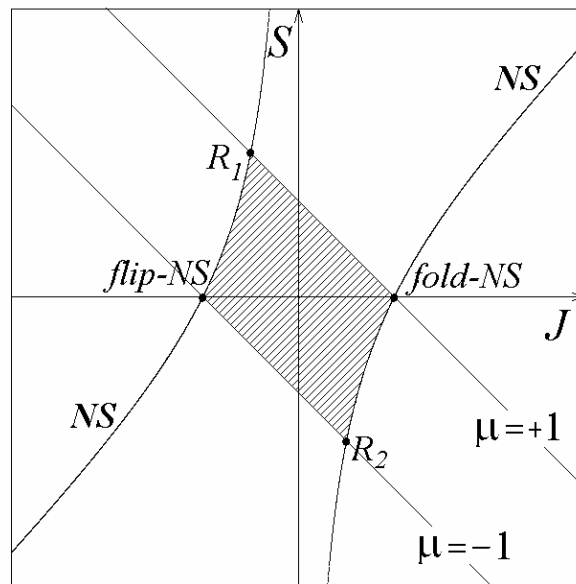


Рис.3.5. Бифуркационные линии и точки трехмерных отображений в сечении пространства инвариантов матрицы возмущений (J, S, H) плоскостью $H = 0$.

Представленные иллюстрации дают полную картину возможных вариантов устройства бифуркационных поверхностей и линий в трехмерном пространстве параметров. Перейдем теперь к некоторым примерам.

3.4. Отображения Рихтера

Трехмерные отображения, известные в литературе, встречаются обычно как достаточно искусственные конструкции. Представим некоторые из них и

обсудим их свойства. Отображение Рихтера (Richter H.) предложено в [24]:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= a - y_n^2 + bz_n, \\y_{n+1} &= x_n, \\z_{n+1} &= y_n.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Автор называет его «*обобщенным отображением Эно*» (*generalized Henon map*), хотя структура первого уравнения не вполне отвечает отображению Эно.

Система (3.17) – это двухпараметрическая модель. Нетрудно показать, что это отображение имеет две неподвижных точки

$$x_0 = y_0 = z_0 = [b - 1 \pm \sqrt{(b - 1)^2 + 4a}] / 2,$$

а его матрица Якоби (3.3) имеет вид:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & -2y_0 & b \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (3.4) в этом случае приводит к характеристическому уравнению $\mu^3 + 2y_0\mu - b = 0$. Сравнивая его с (3.6), с учетом выражения для неподвижной точки, заключаем, что инварианты матрицы Якоби даются соотношениями

$$S = 0, \quad J = b, \quad H = b - 1 \pm \sqrt{(b - 1)^2 + 4a}.$$

Таким образом, модель Рихтера (3.17) характеризуется равным нулю следом матрицы возмущений $S = 0$. Поэтому она дает частный случай трехпараметрической картины, отвечающий рис.3.1а. При этом на плоскости параметров (b, a) в соответствии с (3.11), (3.15), (3.16) имеет место линия Неймарка–Сакера $4a = b^4 + 2b^3 - 4b^2 - 2b + 3$, ограниченная точками *fold-NS* ($a = 0, b = 1$) и *flip-NS* ($a = 0, b = -1$).

Для описания более полной картины наблюдаемых типов поведения построим численно соответствующую карту динамических режимов. На рис.3.6а показана карта отображения Рихтера (3.17). На рисунке можно видеть линию бифуркации Неймарка–Сакера, которая является границей между областью устойчивости неподвижной точки и областью непериодических режимов. Вдоль этой линии выстроена система языков синхронизации. Самый большой язык отвечает периоду 4. На рис.3.6а можно видеть также отмеченные стрелками характерные острия на границе области существования неподвижной точки, которые отвечают бифуркациям *fold-NS* и *flip-NS*.

Карты динамических режимов типа рис.3.6а, однако, не позволяют различать квазипериодические и хаотические режимы: на них они фиксируются оди-

наковым образом как непериодические режимы. Поэтому в дополнение к традиционным картам режимов для трехмерных (и более высокоразмерных) отображений целесообразно строить также и *ляпуновские карты*, которые отображают спектр показателей Ляпунова.

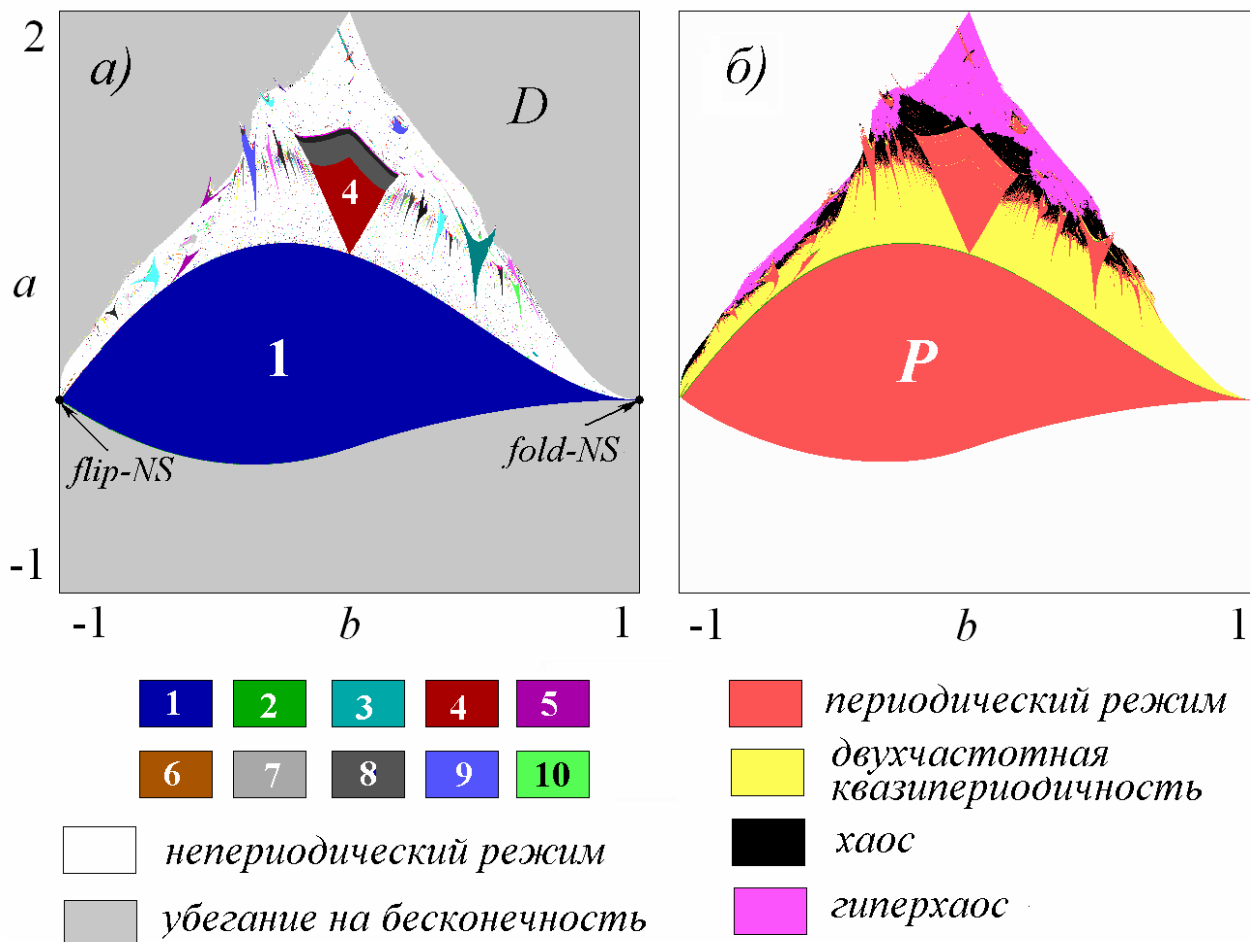


Рис.3.6. Карта динамических режимов (а) и карта ляпуновских показателей (б) отображения Рихтера (3.17) на плоскости (b, a) . Указана цветовая палитра на карте режимов и карте ляпуновских показателей.

Для этого в каждой точке плоскости параметров вычисляются все ляпуновские показатели системы. В случае трехмерных отображений их три (по числу измерений в фазовом пространстве). Затем карта окрашивается в разные цвета, в соответствии со спектром показателей Ляпунова. Такая карта для отображения (3.17) показана на рис.3.6б. На ней отмечены следующие области:

- периодические режимы $0 > \Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_3$, красный цвет,
- двухчастотная квазипериодичность $0 = \Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_3$, желтый цвет,
- классический хаос, $\Lambda_1 > 0 > \Lambda_2 > \Lambda_3$, черный цвет,
- гиперхаос $\Lambda_1 > \Lambda_2 > 0 > \Lambda_3$, сиреневый цвет,
- белый цвет, разбегание.

Отметим, что предусмотрена возможность обнаружения не только двухчастотной, но и трехчастотной квазипериодичности, критерием которой является обращение в ноль сразу двух показателей Ляпунова. Однако, для случая рис.3.6б такой вариант режима не возникает.

Еще одно трехмерное отображение предложено Рихтером в [25]. Оно имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + bz_n, \\y_{n+1} &= x_n, \\z_{n+1} &= y_n.\end{aligned}\tag{3.18}$$

В качестве функции $f(x)$ используется $f(x) = ax(1 - x^2)\exp(-x^2)$. В этом случае отображение (3.18) имеет неподвижную точку в начале координат $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Получив характеристическое уравнение для мультипликаторов (3.18) и используя (3.6), нетрудно показать, что для этой точки

$$S = a, \quad J = b, \quad H = 0.\tag{3.19}$$

Таким образом, эта модель тоже дает частный случай, но для $H = 0$. При этом параметры (3.18) являются непосредственно двумя оставшимися инвариантами матрицы возмущений. В этом случае (см. рис.3.3) одна ветвь линии Неймарка-Сакера $S = \frac{1-b^2}{b}$ заканчивается точками R_1 и *flip-NS*, а вторая – R_2 и *fold-NS*. Координаты точек бифуркаций коразмерности два для модели (3.18) приведены в таблице 3.1.

Область устойчивости ограничена также отрезками линий бифуркации $\mu = +1$ ($S = 1 - b$) и $\mu = +1$ ($S = -1 - b$).

Таблица 3.1

<i>flip-NS</i>	<i>fold-NS</i>	резонанс R_1	резонанс R_2
$a = 0, b = -1$	$a = 0, b = 1$	$a = 3/2, b = -1/2$	$a = -3/2, b = 1/2$

Карты динамических режимов и ляпуновских показателей модели (3.18) показаны на рис.3.7. Отметим, что на этом рисунке правее линии $\mu = +1$ происходит жесткий переход, который в данном случае отвечает другой неподвижной точке отображения, область устойчивости которой на карте показана голубым цветом.

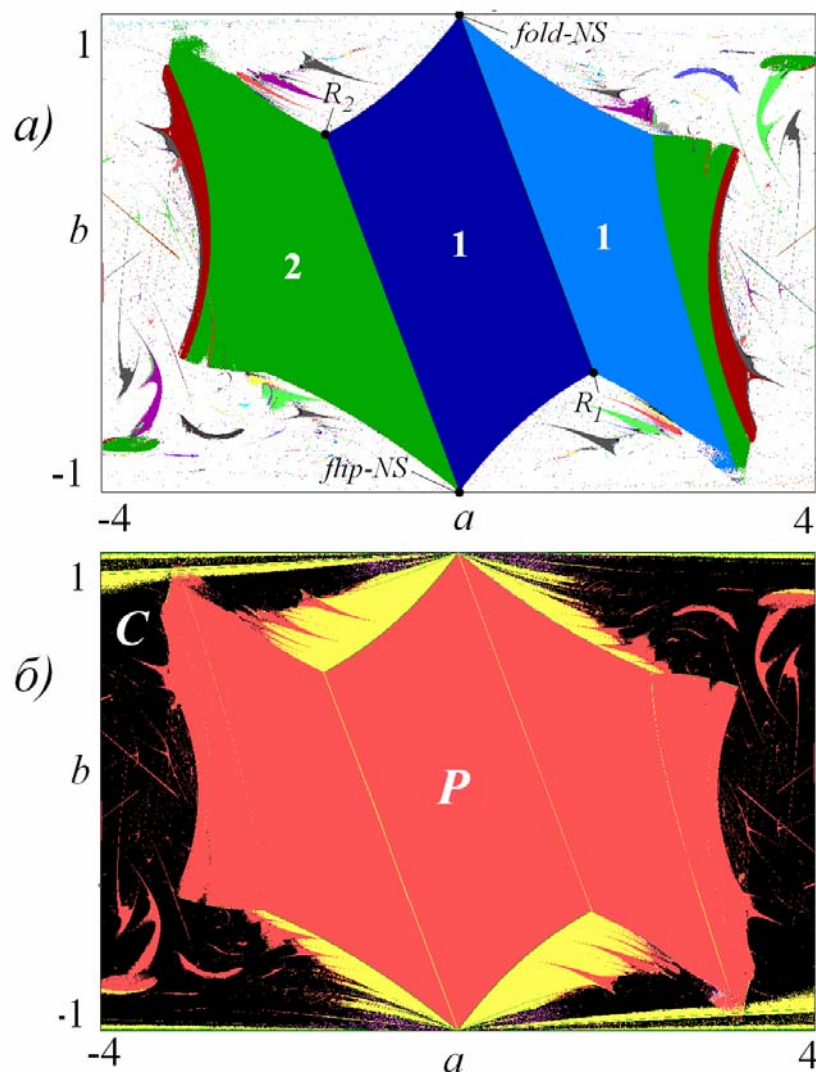


Рис.3.7. Карта динамических режимов (а) и карта ляпуновских показателей (б) отображения Рихтера (3.18) на плоскости (a, b) .

Рис.3.7а иллюстрирует важную особенность точки *flip-NS*. Действительно, можно видеть что в ее окрестности реализуется две системы языков Арнольда. Одна – на базе неподвижной точки, а вторая – на базе удвоенного режима, цикла периода 2. Такого поведения для двумерных отображений не наблюдалось и, поэтому, оно является характерным именно для случая трех измерений.

3.5. Модели Спротта

Спротт (Sprott E.) формулирует задачу о трехмерном квадратичном отображении (3.1) в общем виде, для случая, когда функции $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ являются *квадратичными формами*. В этом случае отображение содержит слишком много коэффициентов. Можно развить определенную классификацию, однако, существенным оказывается все же большое число вариантов. Простейшие варианты, наиболее подробно рассмотренные Спроттом [26]:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= 1 + ax_n + by_n - z_n^2, & x_{n+1} &= 1 + ax_n y_n + by_n - z_n^2, & x_{n+1} &= 1 + az_n + bx_n y_n, \\
y_{n+1} &= x_n, & y_{n+1} &= x_n, & y_{n+1} &= x_n, \\
z_{n+1} &= y_n, & z_{n+1} &= y_n, & z_{n+1} &= y_n.
\end{aligned}
\tag{3.20}$$

Впрочем, это тоже двухпараметрические модели, так что их бифуркационный анализ дает лишь некоторую частную картину.

3.6. Дискретный осциллятор Ресслера. Бифуркация удвоения инвариантной кривой (тора)

Обратимся теперь к трехпараметрическим моделям. Как мы отмечали, одним из способов построения новых моделей является дискретизация потоковой системы. Применим этот прием к трехмерным системам.

Наиболее популярным примером трехмерной потоковой системы является классическая система Ресслера [2-4], которая описывается системой дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -y - z, \\
\dot{y} &= x + ay, \\
\dot{z} &= b + (x - r)z.
\end{aligned}
\tag{3.21}$$

Здесь x, y, z – динамические переменные, a, b, r – параметры. Таким образом, осциллятор Ресслера – это трехмерная трехпараметрическая система.

Применим к системе-прототипу (3.21) процедуру дискретизации, т.е. заменим соответствующие производные конечными разностями, так что

$$\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{x_{n+1} - x_n}{\varepsilon}, \quad \frac{dy}{dt} \rightarrow \frac{y_{n+1} - y_n}{\varepsilon}, \quad \frac{dz}{dt} \rightarrow \frac{z_{n+1} - z_n}{\varepsilon},
\tag{3.22}$$

где ε – параметр дискретизации. Как и в случае двух измерений, следует ожидать, что при малых ε определенные свойства потока-прототипа «наследуются», а с ростом этого параметра отображение проявляет более богатые свойства.

С использованием (3.22) получаем трехмерное отображение, которое логично назвать *дискретным осциллятором Ресслера* [23]:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - \varepsilon(y_n + z_n), \\
y_{n+1} &= y_n + \varepsilon(x_n + ay_n), \\
z_{n+1} &= z_n + \varepsilon b + \varepsilon(x_n - r)z_n.
\end{aligned}
\tag{3.23}$$

Обсудим его свойства. На рис.3.8 приведены примеры проекций аттракторов дискретного осциллятора Ресслера на плоскость (x, y) при малом значении

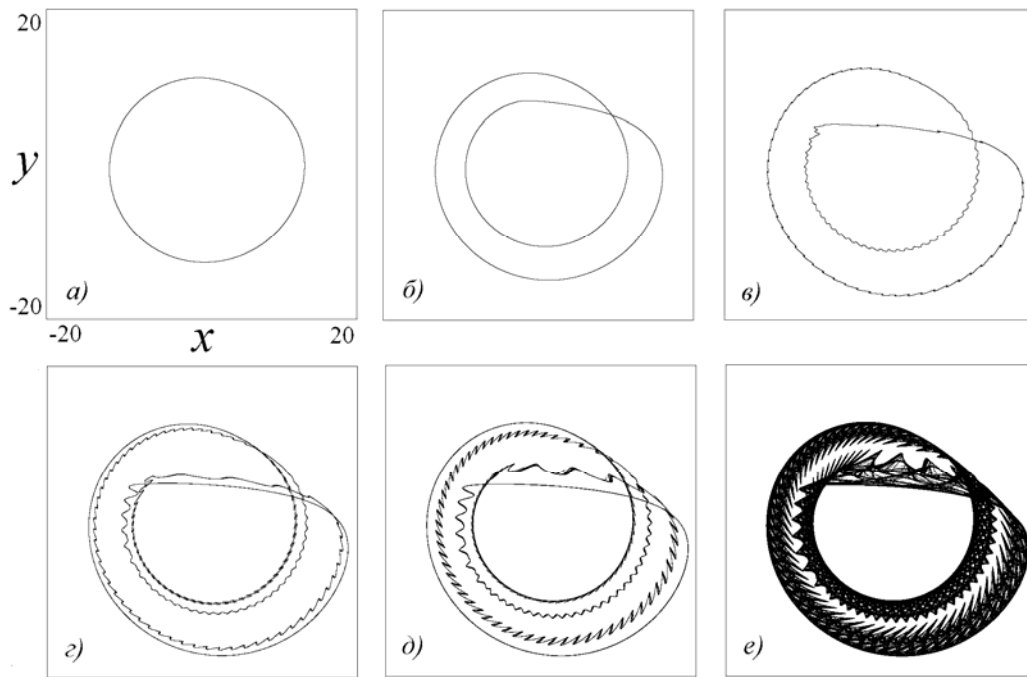


Рис.3.8. Проекция аттракторов дискретного осциллятора Ресслера на плоскость (x, y) , $\varepsilon = 0.1$, $b = 0.2$, $r = 9$. Значения оставшегося параметра: а) $a = -0.02$, б) $a = 0.04$, в) $a = 0.0946$, г) $a = 0.0976$, д) $a = 0.1017$, е) $a = 0.1042$.

параметра дискретизации $\varepsilon = 0.1$, а на рис.3.9 – соответствующие фазовые портреты в трехмерном пространстве (x, y, z) . Из рис.3.8а и 3.9а можно видеть, что на смену предельному циклу потоковой системы-прототипа в трехмерном отображении приходит инвариантная кривая. С ростом параметра a эта кривая претерпевает новую бифуркацию, которую называют *бифуркацией удвоения инвариантной кривой*¹³ [27]. Ее иллюстрирует переход от рис.3.8-9а к рис.3.8-9б. Это новый тип бифуркаций, который возможен только в трехмерных отображениях (или отображениях более высокой размерности). Соответственно, в потоках, для которых отображение выступает как сечение Пуанкаре, размерность фазового пространства должна быть не менее четырех. При дальнейшем увеличении управляющего параметра происходит эффект *потери гладкости* удвоенной инвариантной кривой, что иллюстрируют рис.3.8-9в.

Для более детальной характеристики наблюдаемых режимов на всех фрагментах рис.3.9 приведены численные значения старшего ляпуновского показателя. Для рис.3.8-9а-в он равен нулю, так что наблюдающиеся режимы отвечают квазипериодическим колебаниям. При переходе к рис.3.8-9г квазипериоди-

¹³ Если дискретное отображение выступает в роли сечения Пуанкаре некоторой потоковой системы, то удвоение инвариантной кривой отвечает *удвоению тора* в такой системе.

ческое движение разрушается, и возникает слабый хаос с положительным старшим ляпуновским показателем.

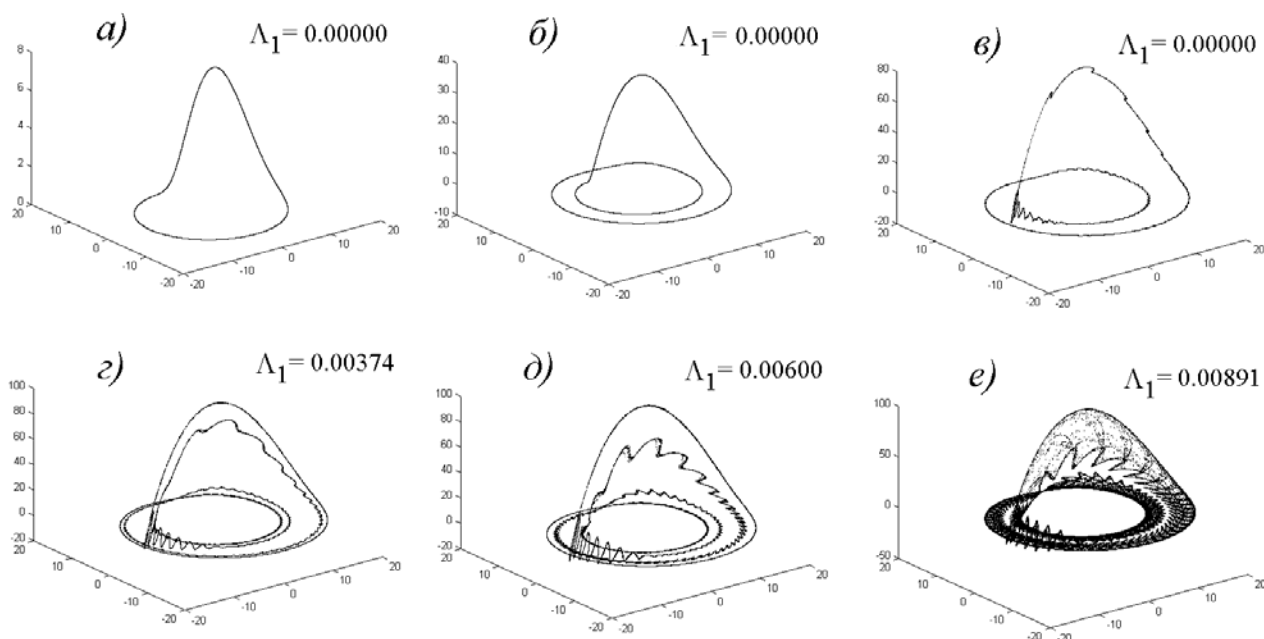


Рис.3.9. Аттракторы дискретного осциллятора Ресслера в трехмерном пространстве (x, y, z) ; $\varepsilon = 0.1$, $b = 0.2$, $r = 9$. Величина параметра a отвечает рис.3.8. Указано значение старшего показателя Ляпунова.

Отметим, что переход от рис.3.8-9в к рис.3.8-9г визуально воспринимается как удвоение разрушенной инвариантной кривой. Однако, формально говоря, такая бифуркация, по-видимому, не возможна, так как аттрактор разрушен, и, соответственно, обладает фрактальной структурой¹⁴.

При дальнейшем увеличении управляющего параметра аттрактор все более усложняет свою структуру, при этом ляпуновский показатель возрастает по величине, что иллюстрируют рис.3.8-9д-е. Полезно построить график зависимости двух старших показателей Ляпунова от параметра a . Такой график представлен на рис.3.10, причем буквами указаны значения, отвечающие соответствующим фазовым портретам на рис.3.8-9.

Обсудим с точки зрения поведения ляпуновских показателей бифуркацию удвоения инвариантной кривой. Из рис.3.8-9 можно видеть, что случаям а) и б) отвечает нулевой старший показатель. В свою очередь, поведение второго показателя дает критерий поиска точки удвоения инвариантной кривой. А именно, второй ляпуновский показатель в этой точке обращается в ноль, оставаясь при других значениях параметра отрицательным.

¹⁴ Тем не менее, в литературе можно встретить упоминание о феномене удвоения разрушенных торов, см., например, [28].

Увеличим управляющий параметр a . Как видно из рис.3.10, точка в) лежит на границе разрушения инвариантной кривой, а точки г)-е) отвечают хаосу.

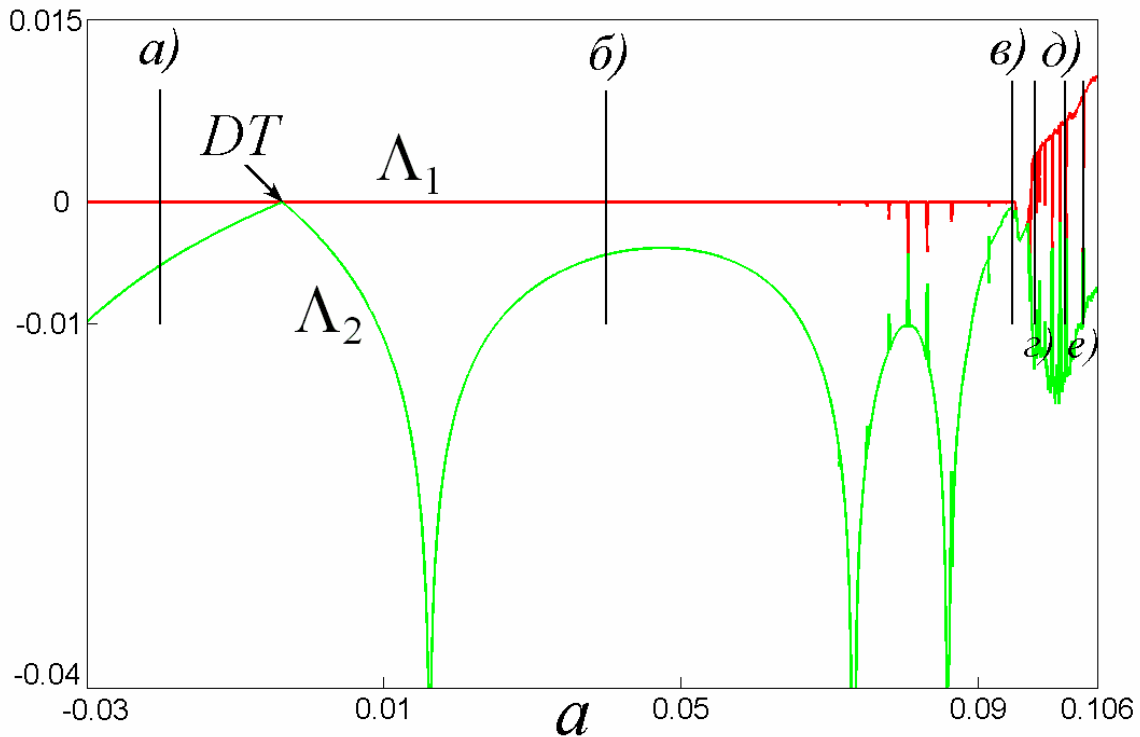


Рис.3.10. График зависимости двух старших показателей Ляпунова Λ_1 (красный цвет) и Λ_2 (зеленый цвет) для дискретного осциллятора Ресслера от параметра a ; $\varepsilon = 0.1$, $b = 0.2$, $r = 9$. Стрелками и буквами отмечены значения, отвечающие рис.3.8-3.9, DT – точка удвоения инвариантной кривой.

В случае небольших значений параметра дискретизации ε в пространстве параметров дискретного осциллятора Ресслера доминируют области устойчивости неподвижной точки, непериодических режимов, а также область убегания траектории на бесконечность. Соответствующая карта динамических режимов представлена на рис.3.11а.

С ростом ε становятся заметными и синхронные режимы, которым соответствуют языки Арнольда. Для примера на рис.3.11б показана карта динамических режимов при $\varepsilon = 1$. В нижней части карты можно видеть языки синхронизации, возникающие на базе неподвижной точки системы. В верхней части карты языки Арнольда возникают на базе цикла периода 2, что иллюстрирует увеличенный фрагмент, показанный справа на рис.3.11б. Таким образом, в этом случае бифуркацию Неймарка-Сакера претерпевает цикл периода 2.

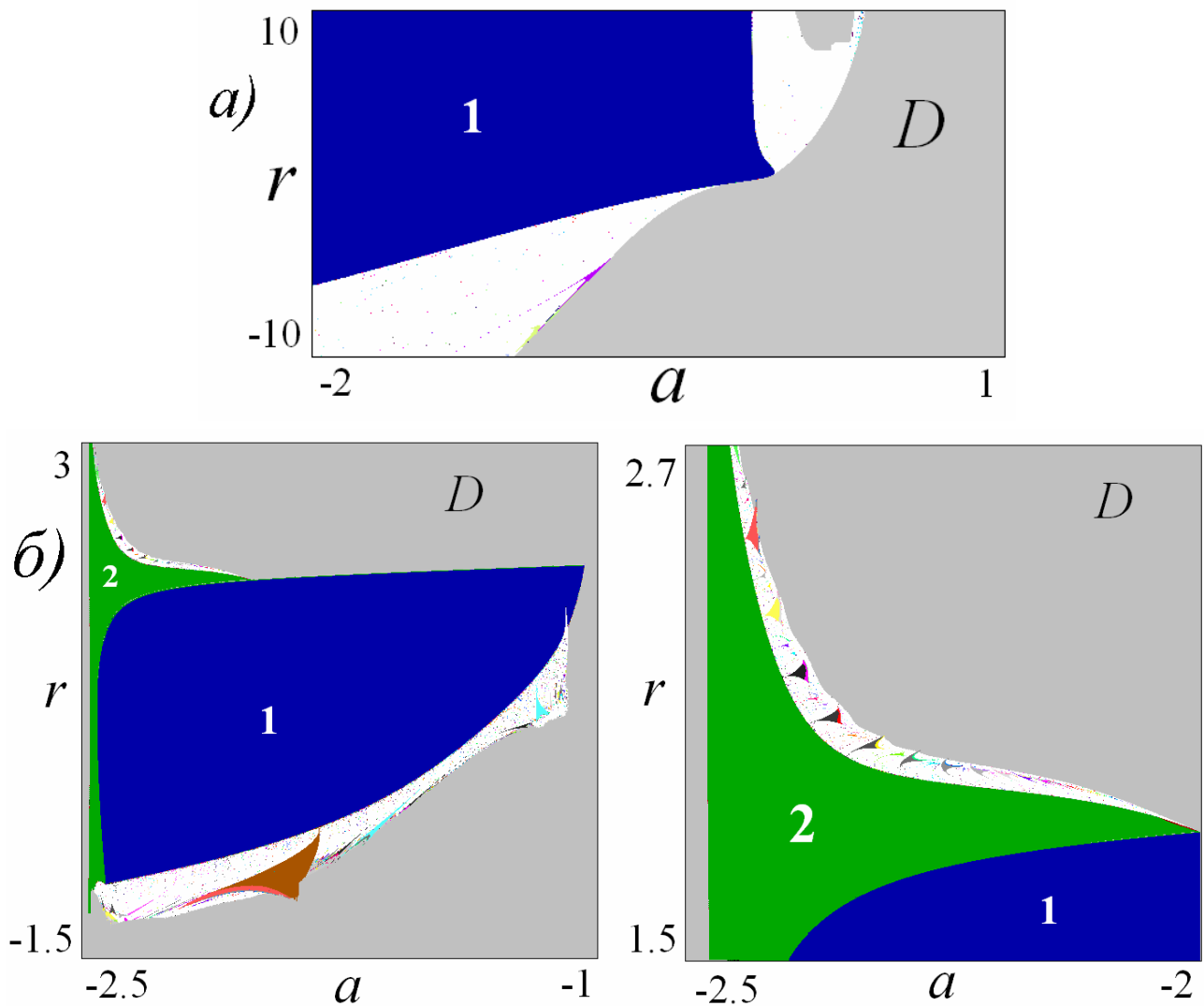


Рис.3.11. Карты динамических режимов дискретного осциллятора Ресслера: а) параметр дискретизации $\varepsilon = 0.1$; б) параметр дискретизации $\varepsilon = 1$. В обоих случаях $b = 0.2$.

3.7. Универсальное трехмерное отображение

Как мы видели при обсуждении двумерных отображений, продуктивным является подход, когда конструируется модель, параметры которой являются непосредственно инвариантами матрицы возмущений. Такой подход можно применить и для конструирования соответствующего *универсального трехмерного отображения*. Можно сформулировать требования к такому отображению:

- отображение должно характеризоваться тремя существенными параметрами;
- его параметры должны совпадать с инвариантами матрицы возмущений;

- в случае сильной диссипации $J = 0$ и редукции к двумерному отображению должны наблюдаться оба бифуркационных сценария (удвоение периода и квазипериодическая динамика).

Для построения такого отображения используем такую же нелинейность, как и для двумерного случая, и введем дополнительное запаздывание на один шаг дискретного времени:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= Sx_n - Hy_n - (x_n^2 + y_n^2) + Jy_{n-1}, \\y_{n+1} &= x_n - \frac{1}{5}(x_n^2 + y_n^2),\end{aligned}\tag{3.24}$$

так что в традиционной форме:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= Sx_n - Hy_n - (x_n^2 + y_n^2) + Jz_n, \\y_{n+1} &= x_n - \frac{1}{5}(x_n^2 + y_n^2), \\z_{n+1} &= y_n.\end{aligned}\tag{3.25}$$

Полученное отображение имеет неподвижную точку в нуле $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Матрица Якоби для (3.25) в этой точке имеет вид:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} S & -H & J \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (3.4) для поиска мультипликаторов имеет вид:

$$\det \begin{pmatrix} S - \mu & -H & J \\ 1 & -\mu & 0 \\ 0 & 1 & -\mu \end{pmatrix} = \mu^3 - S\mu^2 + H\mu - J = 0.$$

Таким образом, матрица Якоби действительно имеет своими инвариантами набор параметров (S, J, H) .

При нулевом якобиане $J = 0$ уравнение редуцируется к двумерному отображению со следом S , а роль якобиана выполняет параметр H :

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= Sx_n - Hy_n - (x_n^2 + y_n^2), \\y_{n+1} &= x_n - \frac{1}{5}(x_n^2 + y_n^2).\end{aligned}\tag{3.26}$$

Таким образом, отображение (3.25) удовлетворяет всем сформулированным выше критериям. Для примера на рис.3.12 показаны карты такого универсального трехмерного отображения в сечении $S = 0$, которые полезно сопоставить с рис.3.1а. Отображение (3.25) дает картину бифуркаций, отвечающую всем перечисленным выше вариантам сечений пространства параметров на рис.3.1, 3.4 и 3.5.

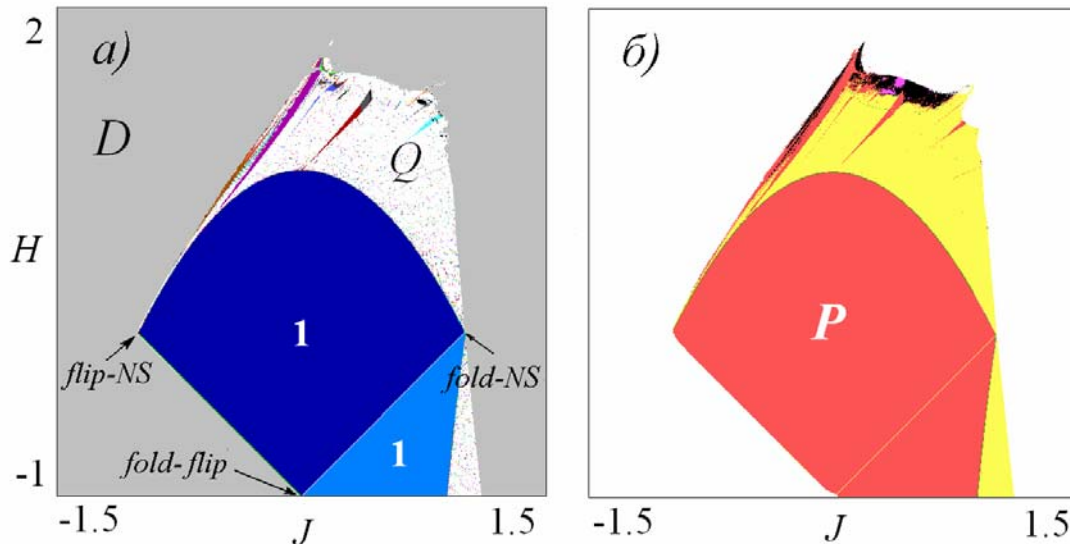


Рис.3.12. Карта динамических режимов (а) и карта ляпуновских показателей (б) для универсального трехмерного отображения в сечении $S = 0$.

3.8. Модели с консервативной динамикой

Частный случай $J = \pm 1$ отвечает отсутствию диссипации, и, таким образом, соответствует консервативной динамике. Подробный анализ поведения такой системы в зависимости от двух оставшихся параметров – инвариантов матрицы возмущений – можно найти в [27]. Авторы в своей объемной работе рассматривают квадратичные отображения достаточно общего вида, классифицируя динамику по положению двух мультипликаторов на комплексной плоскости в зависимости от выбора точки на плоскости (S, H) .

3.9. Трехмерное отображение Эно

Еще один вариант трехмерного отображения может быть построен как обобщение двумерного отображения Эно:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a + by_n + cz_n - x_n^2, \\ y_{n+1} &= x_n, \\ z_{n+1} &= y_n. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Эта модель, как и классическое отображение Эно, может быть проинтерпретирована в контексте систем с запаздыванием. Только при этом отображение характеризуется «памятью» не на один, а на два шага дискретного времени. Действительно, (3.27) можно переписать в виде

$$x_{n+1} = a - x_n^2 + bx_{n-1} + cx_{n-2}. \tag{3.28}$$

Поэтому авторы [30] предлагают для него название *трехмерное отображение Эно* (*3D Hénon map*). Отображение (3.27) дает достаточно полную картину би-

фуркаций трехмерных отображений, хотя для него они не столь тривиальны, как для универсального трехмерного отображения. Проведем подробный анализ трехмерного отображения Эно¹⁵.

Отображение (3.27) имеет две неподвижные точки

$$x_0 = y_0 = z_0 = \frac{b + c - 1 \pm \sqrt{(b + c - 1)^2 + 4a}}{2}. \quad (3.29)$$

Им отвечают разные знаки в выражении (3.29). Нетрудно показать, что знак минус отвечает всегда неустойчивой точке. Это легко понять для случая $b = c = 0$, когда отображение редуцируется к стандартному логистическому отображению $x_{n+1} = a - x_n^2$, и точка $x_0 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}$ всегда неустойчива. Поэтому в дальнейшем оставляем только знак «+».

Матрица возмущений трехмерного отображения Эно (3.27) выглядит следующим образом:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} -2x_0 & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Соответственно, получаем уравнение для поиска мультипликаторов:

$$\det \begin{pmatrix} -2x_0 - \mu & b & c \\ 1 & -\mu & 0 \\ 0 & 1 & -\mu \end{pmatrix} = 0. \quad (3.31)$$

Откуда следует характеристическое уравнение

$$\mu^3 + 2x_0\mu^2 - b\mu - c = 0. \quad (3.32)$$

С помощью (3.6) и с учетом выражения для неподвижной точки (3.29), находим связь инвариантов матрицы возмущений с параметрами отображения (3.27):

$$S = 1 - b - c - \sqrt{(1 - b - c)^2 + 4a}, \quad H = -b, \quad J = c. \quad (3.33)$$

Теперь из (3.8), (3.9), (3.11) получаем условия бифуркаций коразмерности один:

- бифуркация Неймарка-Сакера: $4a = \frac{1+b}{c} \left[\frac{1+b}{c} + 1 - 2(b+c) \right]$,
- бифуркация $\mu = +1$: $4a = -(b+c-1)^2$,
- бифуркация $\mu = -1$: $4a = 4(1-b)^2 - (b+c-1)^2$, $b < 1$.

¹⁵ Заметим, что в [30] исследованы в основном сечения пространства параметров плоскостями $c = const$. Однако в этих сечениях новые бифуркации *fold-NS* и *flip-NS* невозможны.

Для бифуркаций коразмерности два из (3.12)-(3.16) имеем:

- резонанс 1:1: $4a = -(2 + c)^2$, $b = -2c - 1$,
- резонанс 1:2: $4a = (6 - 7c)(2 - c)$, $b = 2c - 1$,
- *fold-flip*: $4a = -c^2$, $b = 1$,
- *fold-NS*: $4a = -b^2$, $c = 1$,
- *flip-NS*: $4a = b(3b - 4)$, $c = -1$, $b < 1$.

На рис.3.13а-в показаны примеры карт динамических режимов и карт ляпуновских показателей, отвечающие сечениям $a = 0.5$, $b = 0.5$, $c = 0.7$ пространства параметров трехмерного отображения Эно.

В первом случае область устойчивости неподвижной точки ограничена линиями бифуркации Неймарка-Сакера и $\mu = -1$. Они имеют общие точки резонанс 1:2 и *flip-NS*.

Во втором случае имеются все три типа линий (Неймарка-Сакера, $\mu = +1$ и $\mu = -1$), а также точки $R_1, R_2, fold-NS, flip-NS$. Это наиболее «представительная» с точки зрения основных бифуркаций ситуация.

Наконец, при $c = 0.7$ картина аналогична двумерному отображению: имеются все три типа линий и точки R_1, R_2 и *fold-flip*. Для удобства восприятия бифуркации коразмерности два для неподвижных точек, отвечающих рис.3.13, сведены в таблицу 3.2.

Таблица 3.2

	R_1	R_2	<i>fold-flip</i>	<i>fold-NS</i>	<i>flip-NS</i>
$a = 0.5$	нет	$b = 0.2922$ $c = 0.6461$	нет	нет	$b = -0.3874$ $c = -1$
$b = 0.5$	$a = -0.3906$ $c = -0.75$	$a = 0.2343$ $c = 0.75$	нет	$a = -0.0625$ $c = 1$	$a = -0.3125$ $c = -1$
$c = 0.7$	$a = -1.825$ $b = -2.4$	$a = 0.3575$ $b = 0.4$	$a = -0.1225$ $b = 1$	нет	нет

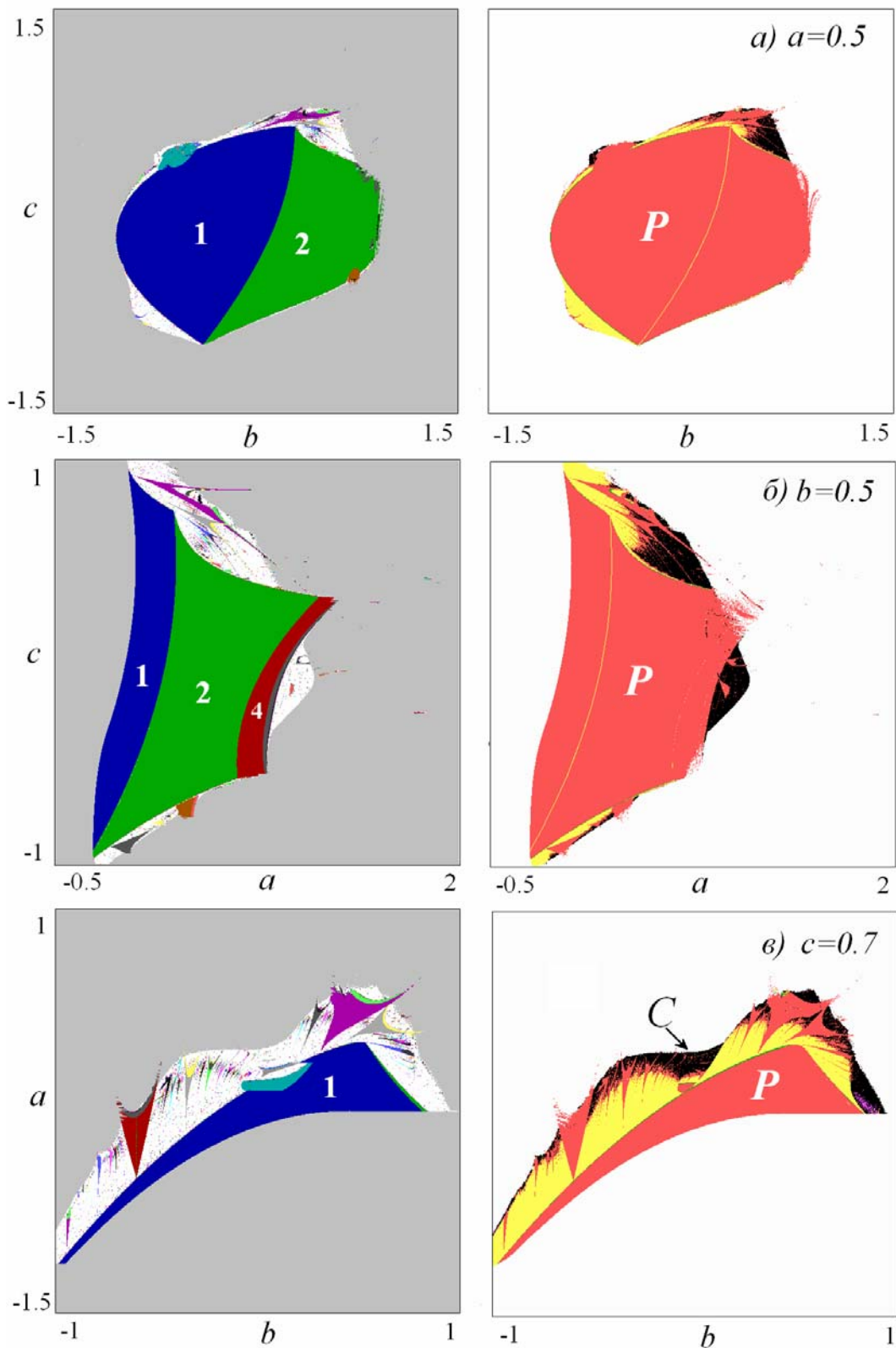


Рис.3.13. Карты режимов и ляпуновских показателей трехмерного отображения Эно в разных сечениях пространства параметров; а) $a = 0.5$, б) $b = 0.5$, в) $c = 0.7$.

Рис.3.14-3.16 иллюстрируют примеры аттракторов, которые могут наблюдаться в трехмерном отображении Эно. Пусть сначала $a = 1.4$, $b = 0.2$, $c = 0.1$, так что влияние третьего измерения, за которое отвечает параметр c , невелико. На рис.3.14 приведен трехмерный портрет аттрактора и две его двумерные про-

екции. Этот аттрактор качественно аналогичен классическому аттрактору Эно, хотя проекция на плоскость (z, x) демонстрирует более сложную его структуру, вложенную в трехмерное пространство. Такой аттрактор можно назвать *Эно-подобным аттрактором (Henon-like attractor)*.

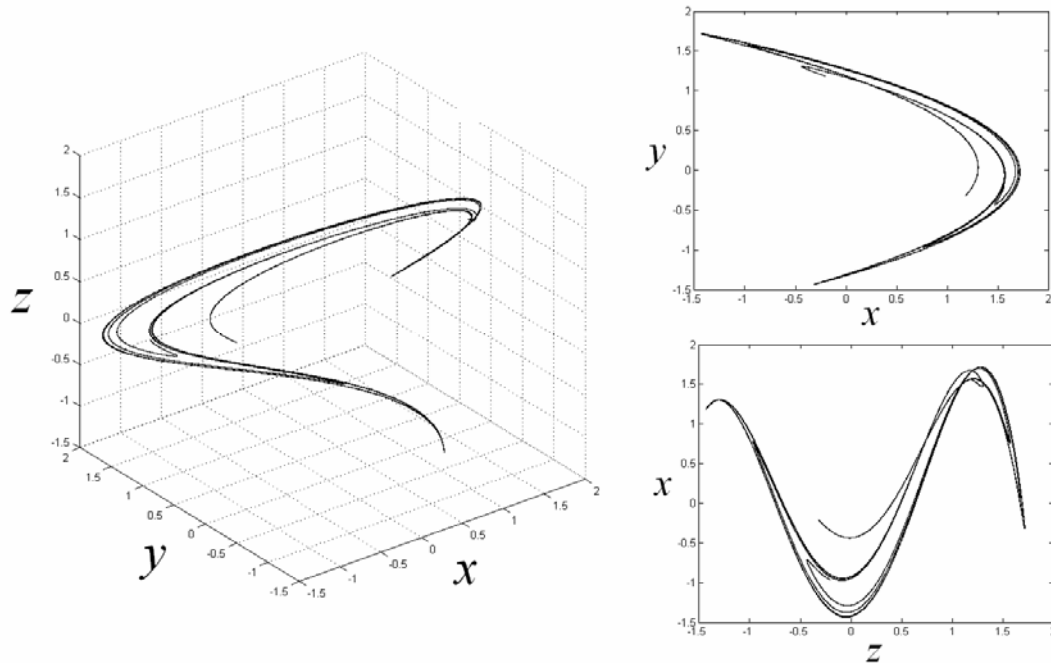


Рис.3.14. Аттрактор трехмерного отображения Эно в фазовом пространстве (x, y, z) и в проекции на плоскости (x, y) и (z, x) ; $a = 1.4$, $b = 0.2$, $c = 0.1$.

Выберем теперь значения параметров $a = 0$, $c = 0.7$. Влияние третьего измерения становится существенным. Будем варьировать оставшийся параметр b . Сначала наблюдается простейшая инвариантная кривая, для которой старший ляпуновский показатель равен нулю, а второй – отрицателен. При $b \approx 0.7666$ второй показатель также обращается в ноль, инвариантная кривая претерпевает бифуркацию удвоения, так что возникает кривая, показанная рис.3.15а. Можно видеть, однако, что это несколько иной способ удвоения, нежели наблюдавшийся на рис.3.9 для дискретного осциллятора Ресслера. Теперь возникают два изолированных овала, причем изображающая точка по очереди посещает каждый из них.

При дальнейшем росте параметра b могут наблюдаться как квазипериодические, так и хаотические режимы. При этом овалы сближаются и визуально объединяются, рис.3.15б,в. Для хаотических аттракторов на рис.3.15г,д,е старший показатель Ляпунова растет, и хаос становится все более развитым. Особенность хаотических аттракторов этого типа, однако, состоит в том, что второй ляпуновский показатель не является отрицательным, как для традиционно-

го хаоса, а нулевым (или очень близким к нулю, по крайней мере, с точностью до 10^{-5}). Авторы [30] называют такой аттрактор *Лоренце-подобным аттрактором* (*Lorenz-like attractor*), имея в виду его характерное устройство, которое в определенной мере аналогично классическому аттрактору Лоренца, что проявляется на рис.3.15г,д,е. Серия рисунков 3.16 иллюстрирует эволюцию такого аттрактора с ростом управляющего параметра a , а также появление режима развитого «классического» хаоса при фиксированном значении $b = 0.801$.

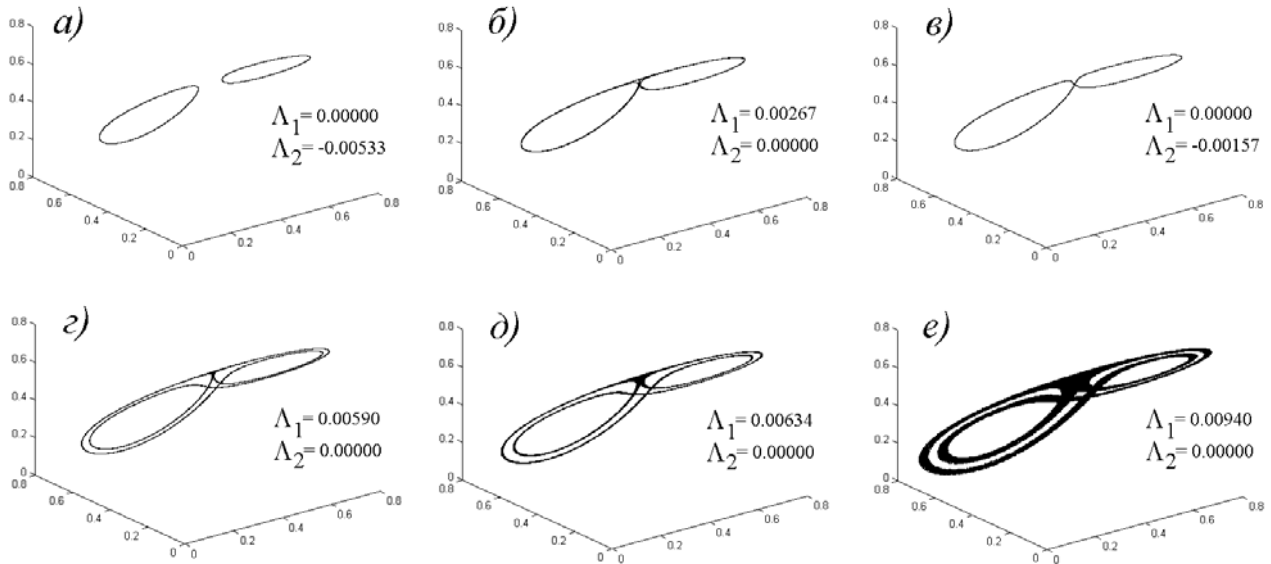


Рис.3.15. Аттракторы трехмерного отображения Эно в фазовом пространстве (x, y, z) , $a = 0$, $c = 0.7$; а) $b = 0.801$, б) $b = 0.802$, в) $b = 0.803$, г) $b = 0.807$, д) $b = 0.810$, е) $b = 0.817$. Указаны значения двух старших показателей Ляпунова.

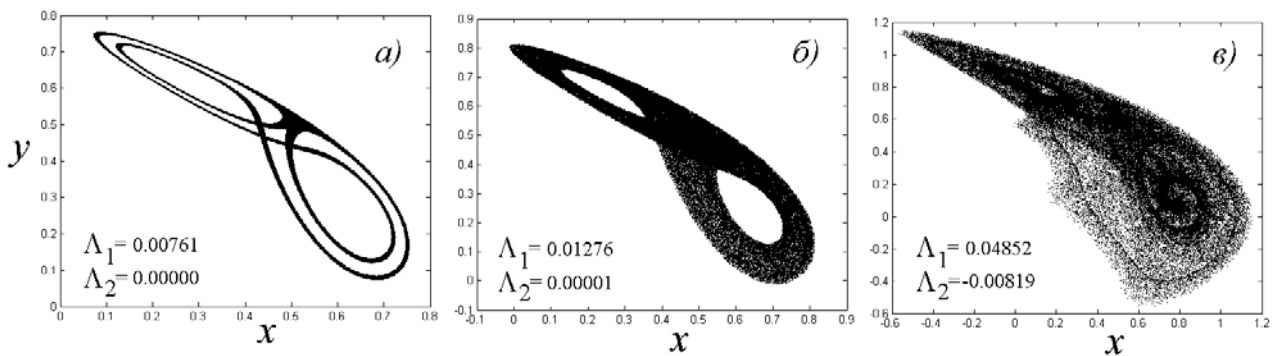


Рис.3.16. Аттракторы трехмерного отображения Эно в проекции на плоскость (x, y) ; $b = 0.801$, $c = 0.7$; а) $a = 0.01$, б) $a = 0.01$, в) $a = 0.1$. Указаны два старших показателя Ляпунова.

Задачи

1. Постройте рисунок, аналогичный рис.3.1, в случае, когда сливаются точки бифуркации резонанс 1:1 и *flip-NS*.

2. Выясните, как будет меняться рис.3.5, отвечающий сечениям $H = const$ пространства параметров инвариантов матрицы Якоби, при вариации H .

3. Для первого трехмерного отображения Спротта (3.20) найдите неподвижные точки, матрицу Якоби и ее инварианты. Укажите все бифуркации коразмерности один и два неподвижной точки, возможные в такой системе.

4. Постройте карты динамических режимов отображений Спротта (3.20). Укажите на них линию Неймарка-Сакера и языки Арнольда основных периодов.

5. Постройте карту спектра показателей Ляпунова для первого отображения Спротта (3.20).

6. Для дискретного осциллятора Ресслера напишите уравнения поиска неподвижных точек. Выпишите матрицу Якоби и ее инварианты.

7. Получите дискретный осциллятор, отвечающий генератору Кислова-Дмитриева:

$$T \frac{dx}{dt} + x = Mz \exp(-z^2),$$
$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{Q} \frac{dz}{dt} + z = x.$$

Здесь M – коэффициент усиления, Q – добротность. Найдите матрицу Якоби и ее инварианты. Постройте характерные фазовые портреты и попробуйте найти бифуркации удвоения тором.

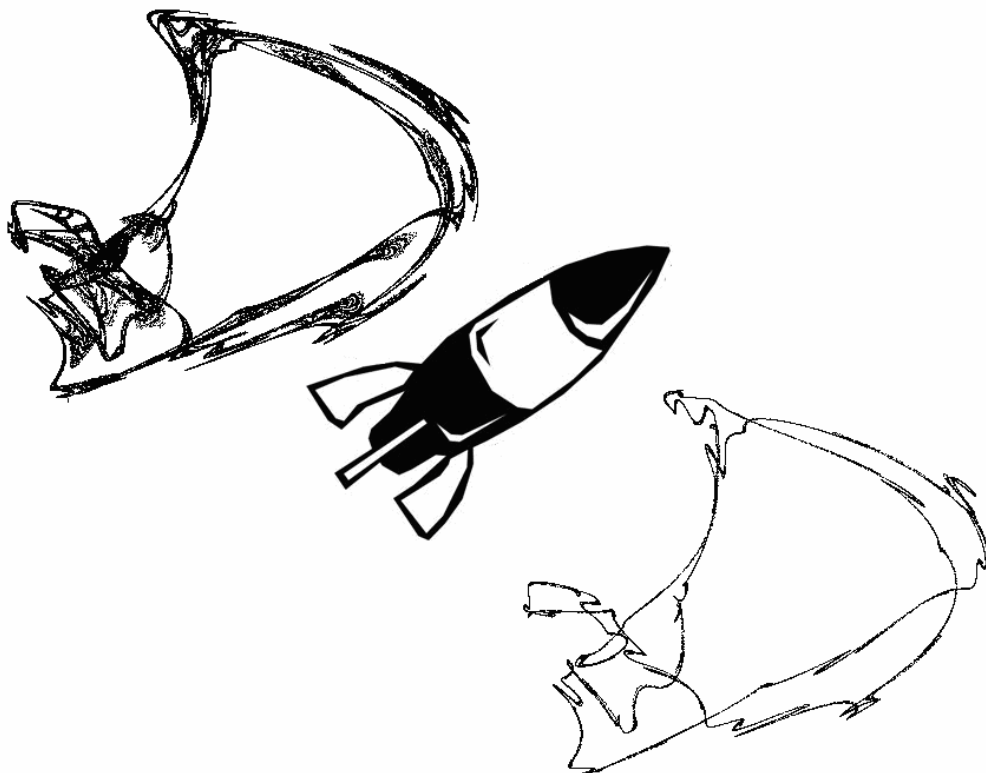
8. Рассмотрите следующий вариант логистического отображения с запаздыванием:

$$x_{n+1} = [\lambda + \varepsilon(x_n - x_{n-1}) + \nu(x_{n-1} - x_{n-2})]x_n(1 - x_n).$$

Найдите неподвижные точки, матрицу Якоби и ее инварианты. Обсудите возможные бифуркации разной коразмерности.

9. Постройте дискретный аналог системы Лоренца. Создайте «коллекцию» карт динамических режимов.

Часть IV
БИФУРКАЦИИ
ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ
ОТОБРАЖЕНИЙ



4.1. Четырехмерные отображения, неподвижные точки и мультипликаторы

Четырехмерное отображение в общем виде задается соотношениями

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, y_n, z_n, w_n), \\y_{n+1} &= g(x_n, y_n, z_n, w_n), \\z_{n+1} &= v(x_n, y_n, z_n, w_n), \\w_{n+1} &= h(x_n, y_n, z_n, w_n).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Оно может иметь неподвижные точки (x_0, y_0, z_0, w_0) . Как и в случаях более низкой размерности, малые возмущения в окрестности неподвижной точки эволюционируют в соответствии с матрицей Якоби \hat{M} . Собственные числа этой матрицы являются мультипликаторами отображения, определяющими характер устойчивости неподвижной точки и отвечающими за бифуркации.

Проведем анализ четырехмерных отображений аналогично тому, как это было сделано для случая трех измерений, т.е. выясним условия существования основных бифуркаций в пространстве параметров инвариантов матрицы возмущений.

Уравнение для поиска мультипликаторов $\det(\hat{M} - \mu\hat{E}) = 0$ в рассматриваемом случае имеет четвертый порядок, так что справедливо соотношение

$$(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)(\mu - \mu_3)(\mu - \mu_4) = 0.$$

Раскрывая скобки, приходим к уравнению

$$\mu^4 - S\mu^3 + H\mu^2 - L\mu + J = 0,\tag{4.2}$$

в котором введены следующие обозначения для инвариантов матрицы возмущений

$$\begin{aligned}S &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4, \\H &= \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_4, \\L &= \mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3\mu_4 + \mu_1\mu_2\mu_4 + \mu_2\mu_3\mu_4, \\J &= \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Действуя аналогично случаю трехмерных систем, нетрудно найти условия уже известных бифуркаций для случая четырех измерений. Перечислим сначала бифуркации коразмерности один.

а) *Бифуркация* $\mu = +1$. Находим ее, подставляя в (4.2) $\mu = +1$:

$$H = S + L - J - 1.\tag{4.4}$$

б) *Бифуркация* $\mu = -1$. Находим ее, подставляя в (4.2) $\mu = -1$:

$$H = -S - L - J - 1.\tag{4.5}$$

в) *Бифуркация Неймарка-Сакера*. Условием этой бифуркации является обращение в единицу модулей двух комплексно-сопряженных мультипликаторов, то есть $\mu_1 = \exp(i\theta)$, $\mu_2 = \exp(-i\theta)$. Тогда из (4.3) следует

$$\begin{aligned} S &= 2 \cos \theta + \mu_3 + \mu_4, \\ H &= 1 + 2(\mu_3 + \mu_4) \cos \theta + \mu_3 \mu_4, \\ L &= \mu_3 + \mu_4 + 2\mu_3 \mu_4 \cos \theta, \\ J &= \mu_3 \mu_4. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Исключая μ_3 , μ_4 и θ , получаем условие бифуркации Неймарка-Сакера в терминах инвариантов матрицы Якоби:

$$(S - L)(L - SJ) = (1 - J)^2 (H - 1 - J). \quad (4.7)$$

Приведем теперь условия для бифуркаций коразмерности два.

а) *Резонанс 1:1* R_1 ($\mu_1 = +1$, $\mu_2 = +1$). Исключая из уравнений (4.3) третий и четвертый мультипликаторы, получаем:

$$H = 2S + J - 3, \quad L = S + 2J - 2. \quad (4.8)$$

Далее, действуя аналогично, находим условия реализации всех бифуркаций коразмерности два.

б) *Резонанс 1:2* R_2 ($\mu_1 = -1$, $\mu_2 = -1$):

$$H = -2S + J - 3, \quad L = S - 2J + 2. \quad (4.9)$$

в) *Бифуркация fold-flip* ($\mu_1 = +1$, $\mu_2 = -1$):

$$S = -L, \quad H = -J - 1. \quad (4.11)$$

г) *Бифуркация fold-NS* ($|\mu_{1,2}| = 1$, $\mu_3 = +1$):

$$H = (1 + J)(S - J), \quad L = 1 + J(S - J). \quad (4.11)$$

д) *Бифуркация flip-NS* ($|\mu_{1,2}| = 1$, $\mu_3 = -1$):

$$H = -(1 + J)(S + J), \quad L = -1 + J(S + J). \quad (4.12)$$

В четырехмерной системе появляется новая бифуркация коразмерности два. Этот факт можно пояснить следующим образом. Бифуркация Неймарка-Сакера характеризуется потерей устойчивости, связанной с обращением модуля комплексно-сопряженных мультипликаторов в единицу: $\mu_1 = \exp(i\theta)$, $\mu_2 = \exp(-i\theta)$. В четырехмерной системе появляется дополнительная возможность и второй паре мультипликаторов стать комплексно-сопряженными. Обращение их модулей в единицу является вторым дополнительным условием: $\mu_3 = \exp(i\alpha)$, $\mu_4 = \exp(-i\alpha)$. Таким образом, соответствующая бифуркация имеет достаточно низкую коразмерность два, и называется *двойной бифуркацией Неймарка-Сакера* (*double Neimark-Sacker*).

Найдем ее условие в пространстве инвариантов матрицы возмущений. Для этого подставляем

$$\mu_1 = e^{i\theta}, \mu_2 = e^{-i\theta}, \mu_3 = e^{i\alpha}, \mu_4 = e^{-i\alpha} \quad (4.13)$$

в соотношения (4.3) и исключаем угловые переменные θ и α . В результате получаем:

$$S = L, J = 1. \quad (4.14)$$

Соотношения (4.14) задают условия двойной бифуркации Неймарка-Сакера в пространстве параметров.

4.2. Устройство линий и точек бифуркаций в системе с двойной бифуркацией Неймарка-Сакера

Обсудим более подробно новую бифуркацию, характерную для четырехмерных отображений, и выясним, как она вложена в пространство параметров – инвариантов матрицы возмущений (S, H, L, J) . Благодаря низкой коразмерности этой бифуркации, для ее наблюдения можно фиксировать два параметра. Поэтому обратимся к сечению $L = 0$. В этом случае бифуркация Неймарка-Сакера в соответствии с (4.7) дается соотношением:

$$S = \pm \sqrt{\frac{J+1-H}{J}}(1-J). \quad (4.15)$$

Аналогично из (4.4) и (4.5) следуют условия для бифуркаций $\mu = +1$ и $\mu = -1$:

$$S = J + 1 + H, \quad S = -J - 1 - H. \quad (4.16)$$

Зафиксируем также и второй параметр $H = 0$. Конфигурация области устойчивости неподвижной точки на плоскости двух оставшихся параметров (J, S) в этом случае показана на рис.4.1. Она ограничена двумя ветвями линии бифуркации Неймарка-Сакера (4.15) и линиями мультипликаторов $\mu = +1$ и $\mu = -1$ (4.16). Эти линии пересекаются в точках резонансов $R_1 (J = 1/3, S = 4/3)$ и $R_2 (J = 1/3, S = -4/3)$ ¹⁶.

Линия (4.15), отвечающая условию бифуркации Неймарка-Сакера, имеет точку пересечения двух своих ветвей при условии

$$J = 1, S = 0. \quad (4.17)$$

Это и есть точка двойной бифуркации Неймарка-Сакера *NS-NS*.

¹⁶ Заметим, что в соответствии с рис.4.1 в точке $J = -1, S = 0$ имеется определенное вырождение, которое, впрочем, исчезает при $H > 0$ с возникновением точек *fold-NS* и *flip-NS*. Этот момент не является существенным для описания точки *NS-NS*.

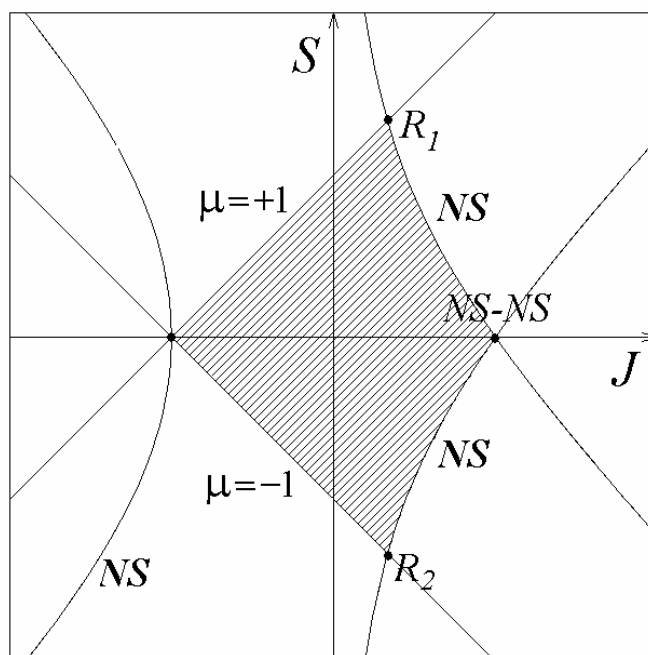


Рис.4.1. Бифуркационные линии и точки на плоскости инвариантов матрицы возмущений (J, S) для четырехмерных отображений. Значения остальных инвариантов: $L = 0$, $H = 0$. Заштрихована область устойчивости неподвижной точки.

В точке $NS-NS$ две ветви линии бифуркации Неймарка-Сакера пересекаются под некоторым конечным углом. Действительно, из (4.15) при $J \approx 1$ находим, что $S \approx \pm\sqrt{2}(1 - J)$. Отметим, что правее точки $NS-NS$ линия (4.15) перестает быть границей области устойчивости.

Изменим теперь параметр H . При возрастании H происходит изменение конфигурации линий и точек бифуркаций, причем, при условии $H = 1$ имеет место качественная перестройка наблюдаемой картины. Для значения $H < 1$ реализуется ситуация, аналогичная рис.4.1; а при $H > 1$ типичной становится конфигурация, показанная на рис.4.2а: в этом случае единственной границей области устойчивости неподвижной точки является линия (4.15), отвечающая бифуркации Неймарка-Сакера, а точка $NS-NS$ представляет собой точку самопересечения этой линии.

С дальнейшим ростом H область устойчивости, ограниченная линией Неймарка-Сакера, стягивается в точку ($H = 2$), а затем исчезает, как показано на рис.4.2а-в. Точно при выполнении условия $H = 2$ точка самопересечения превращается в особенность типа сборки, имеющую острие с законом «трех вторых». Это легко показать с помощью (4.15), полагая $H = 2$ и $J \approx 1$:

$$S \approx (J - 1)^{3/2}. \quad (4.18)$$

Таким образом, при

$$J = 1, S = 0, H = 2 \quad (4.19)$$

располагается новая точка более высокой коразмерности, в окрестности которой поверхность бифуркации Неймарка-Сакера исчезает через особенность, связанную с законом «трех вторых».

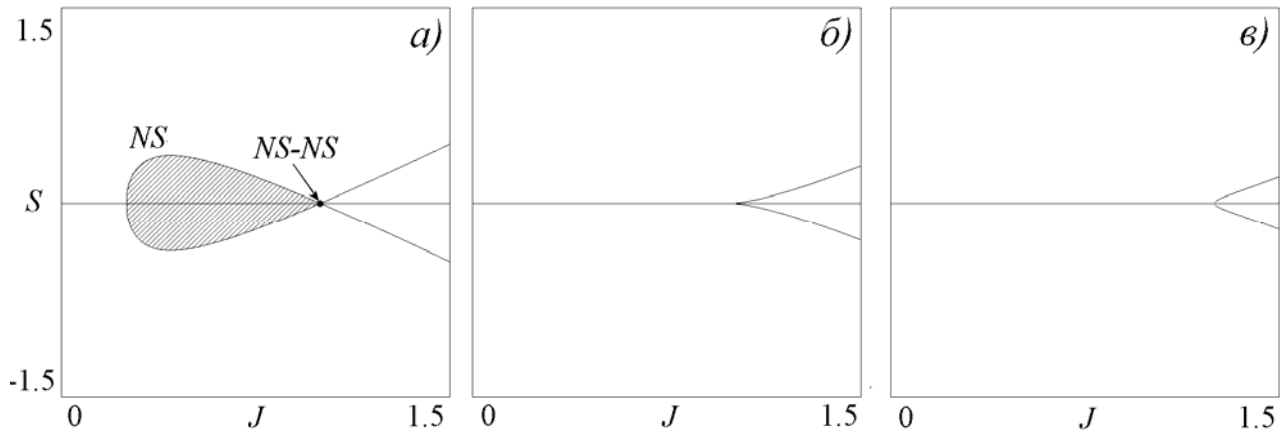


Рис.4.2. Бифуркационные линии и точки на плоскости инвариантов матрицы возмущений (J, S) для четырехмерных отображений. Значения остальных инвариантов: $L = 0$, а) $H = 1.25$, б) $H = 2$, в) $H = 2.25$. Заштрихована область устойчивости неподвижной точки.

Мы рассмотрели случай $L = 0$. В общем случае из (4.7) несложно получить следующее выражение для линии Неймарка-Сакера:

$$S = \frac{L(1+J) \pm (J-1)\sqrt{(2J-H+1)^2 - (H-1)^2 + L^2}}{2J}. \quad (4.20)$$

В точке $NS-NS$ с координатами $J = 1$, $S = L$ линия (4.20) имеет точку самопересечения. При этом решение существует, если дискриминант (4.20) положителен

$$(2J - H + 1)^2 > (H - 1)^2 - L^2. \quad (4.21)$$

Следовательно, необходимо проанализировать два дополнительных условия.

Если

$$(H - 1)^2 < L^2, \quad (4.22)$$

то неравенство (4.21) выполняется всегда. В этом случае на плоскости (J, S) всегда имеет место точка самопересечения линии Неймарка-Сакера – точка $NS-NS$.

Если же

$$(H - 1)^2 > L^2, \quad (4.23)$$

то решение возможно при

$$2J > H - 1 + \sqrt{(H - 1)^2 - L^2} \quad \text{или} \quad 2J < H - 1 - \sqrt{(H - 1)^2 - L^2}. \quad (4.24)$$

В таком случае условие равенства нулю дискриминанта

$$2J = H - 1 + \sqrt{(H - 1)^2 - L^2}$$

задает «точку поворота» кривой Неймарка-Сакера.

Теперь нетрудно найти условие, отвечающее тому, что область, ограниченная линией Неймарка-Сакера, стягивается в точку. Для этого должны одновременно выполняться равенства $J = 1$, $S = L$, а дискриминант обращаться в ноль. В результате получаем:

$$H = 2 + \frac{L^2}{4}, \quad J = 1, \quad S = L. \quad (4.25)$$

Нетрудно показать, что в этом случае дополнительное условие (4.23) выполняется автоматически.

4.3. Универсальное четырехмерное отображение

Для более детального обсуждения картины наблюдаемых режимов необходимо исследовать конкретные отображения. Можно, например, использовать универсальное четырехмерное отображение, которое строится по аналогии с трехмерным, необходимо только ввести дополнительное запаздывание еще на один шаг дискретного времени. В результате приходим к следующему отображению

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Sx_n - Hy_n + Lz_n - Jw_n - (x_n^2 + y_n^2), \\ y_{n+1} &= x_n - \frac{1}{5}(x_n^2 + y_n^2), \\ z_{n+1} &= y_n, \\ w_{n+1} &= z_n. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Нетрудно показать, что отображение (4.26) имеет неподвижную точку в нуле, при этом параметры отображения (S, H, L, J) являются соответствующими инвариантами матрицы Якоби, вычисленной в этой точке.

На рис.4.3 представлена карта ляпуновских показателей отображения (4.26), которая демонстрирует фрагмент, содержащий линию Неймарка-Сакера, точку резонанса 1:2 и точку $NS-NS$ (сравните с рис.4.1). Для лучшего восприятия устройства плоскости параметров, область существования неподвижной точки дополнительно выделена серым цветом. Показана также серия фазовых портретов, иллюстрирующая разрушение инвариантной кривой с ростом якобиана J .

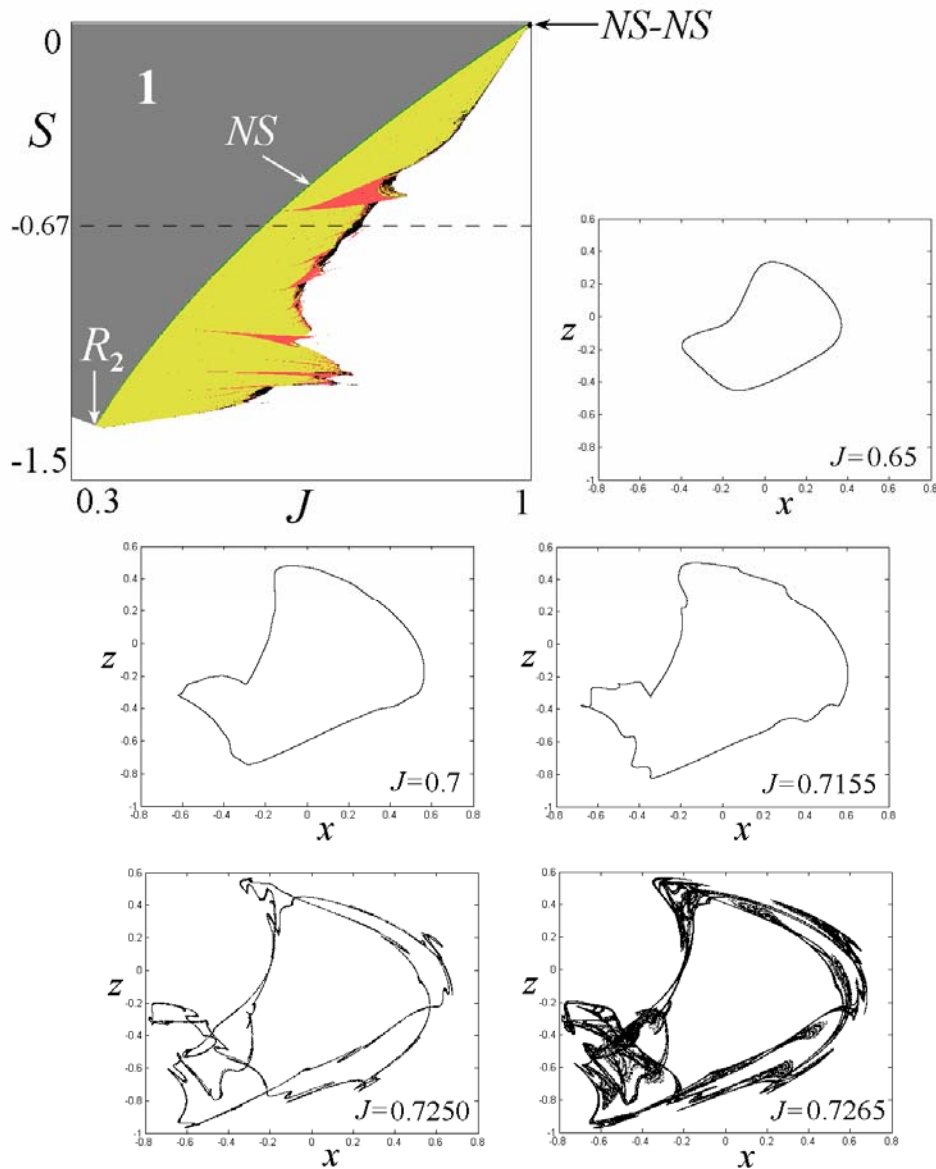


Рис.4.3. Карта ляпуновских показателей универсального четырехмерного отображения (4.26) на плоскости параметров (J, S) , остальные параметры $L = 0$, $H = 0$. Показаны фазовые портреты вдоль линии $S = -0.67$.

4.4. Четырехмерное отображение Эно

Примером системы с двойной бифуркацией Неймарка-Сакера может служить четырехмерное отображение Эно, которое легко может быть получено из логистического отображения при введении запаздывания на три шага дискретного времени:

$$x_{n+1} = -a - x_n^2 - bx_{n-1} + cx_{n-2} - dx_{n-3}.$$

(Как мы увидим ниже, такой выбор знаков удобен при анализе.) Тогда получаем:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= -a - x_n^2 - by_n + cz_n - dw_n, \\
y_{n+1} &= x_n, \\
z_{n+1} &= y_n, \\
w_{n+1} &= z_n.
\end{aligned}
\tag{4.27}$$

Отображение (4.27) имеет неподвижные точки

$$x_0 = y_0 = z_0 = w_0 = \frac{-b + c - d - 1 \pm \sqrt{(b - c + d + 1)^2 - 4a}}{2}.
\tag{4.28}$$

Знак « \pm » всегда отвечает неустойчивой точке. Выписывая матрицу Якоби (4.27) \hat{M} , находим уравнение для поиска мультипликаторов:

$$\det \begin{pmatrix} -2x_0 - \mu & b & c & d \\ 1 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\mu \end{pmatrix} = 0.
\tag{4.29}$$

Отсюда получаем характеристическое уравнение:

$$\mu^4 + 2x_0\mu^3 + b\mu^2 - c\mu + d = 0.
\tag{4.30}$$

С учетом выражения для неподвижной точки (4.28) и соотношения (4.2), вычисляем инварианты матрицы возмущений как функции параметров отображения:

$$S = 1 + b - c + d - \sqrt{(1 + b - c + d)^2 - 4a}, \quad H = b, \quad L = c, \quad J = d.
\tag{4.31}$$

Положим $c = 0, b = 0$. В этом случае можно аналитически найти основные бифуркации неподвижной точки. С учетом выражений (4.31), из (4.4), (4.5) и (4.7) получаем следующие условия бифуркаций коразмерности один:

а) Бифуркация $\mu = -1$: $a = -\frac{3}{4}(1 + d)^2$,

б) Бифуркация $\mu = +1$: $a = \frac{1}{4}(1 + d)^2$,

в) Бифуркация Неймарка-Сакера: $a = \frac{d^2 - 1}{4} \left(\frac{1 - d}{d} \pm 2\sqrt{\frac{1 + d}{d}} \right)$.

Первые две линии пересекают линию Неймарка-Сакера в точках резонансов 1:1 и 1:2, которые находим из (4.8), (4.9):

а) Резонанс 1:1 R_1 : $d = 1/3, a = 4/9$,

б) Резонанс 1:2 R_2 : $d = 1/3, a = -4/3$.

На рис.4.4 показаны карты динамических режимов четырехмерного отображения Эно на плоскости (d, a) для случая $c = 0, b = 0$ (а) и случая

$c = 0$, $b = 1.25$ (б). Можно видеть, что они отвечают двум характерным ситуациям, проиллюстрированным на рис.4.1 и рис.4.2а. Точки $NS-NS$ отмечены стрелочкой.

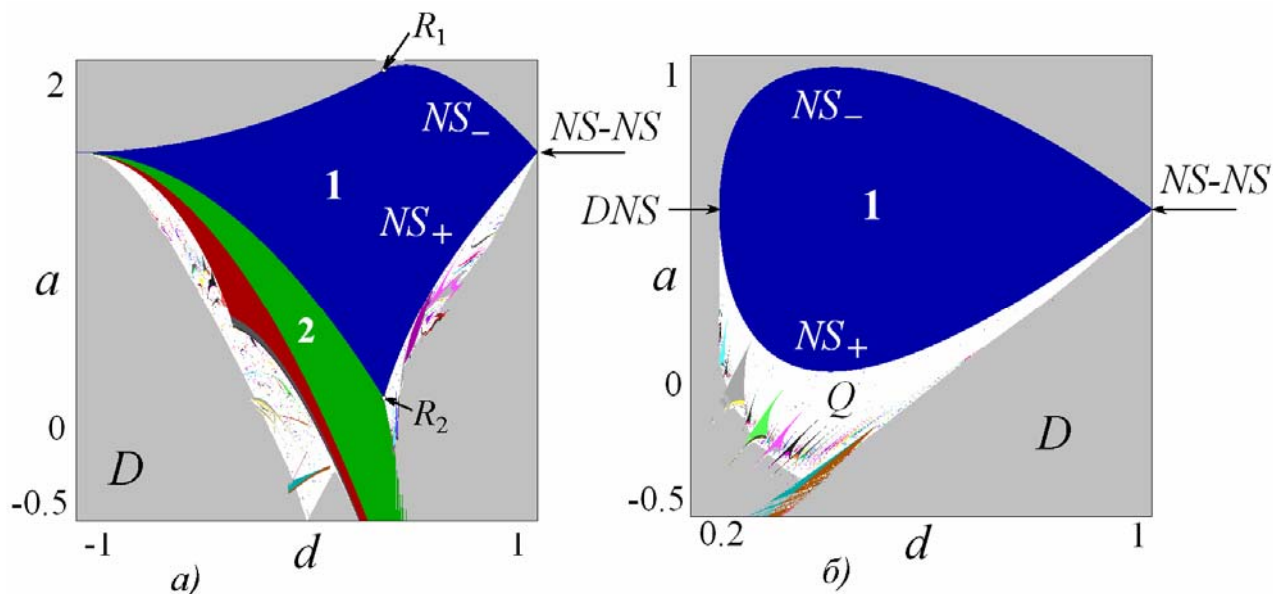


Рис.4.4. Карты динамических режимов четырехмерного отображения Эно (4.27), $c = 0$, а) $b = 0$, б) $b = 1.25$.

Численный анализ обнаруживает некоторые особенности картины. Так, только одна из ветвей линии бифуркации Неймарка-Сакера NS_+ на рис.10а является *суперкритической*, т.е. отвечает потере устойчивости неподвижной точки с рождением устойчивой инвариантной кривой. Вторая ветвь соответствует *субкритической* форме бифуркации NS_- , для которой исчезновение устойчивой неподвижной точки происходит в результате слияния с неустойчивой инвариантной кривой [8,9]. Особенность случая на рис.10б состоит в наличии бифуркации коразмерности два – *вырожденной точки бифуркации Неймарка-Сакера DNS (degenerate Neimark-Sacker bifurcation)*, в которой суперкритическая бифуркация Неймарка-Сакера превращается в субкритическую. Соответственно на карте рис.10б только нижняя часть линии Неймарка-Сакера ограничивает область устойчивых квазипериодических режимов Q со встроенной системой языков Арнольда.

4.5. Дискретные модели «хищник-жертва»

В рамках биологической интерпретации четырехмерное отображение Эно может рассматриваться как модель динамики популяции с запаздыванием. Однако, для ее реализации требуется достаточно глубокое запаздывание – на три шага дискретного времени. Этот недостаток можно исправить, если обратиться

к моделям типа *хищник-жертва* (*predator-prey model*).

Обобщенная модель «хищник-жертва» в виде дифференциальной потоковой системы, которую иногда называют *моделью Колмогорова*, имеет вид:

$$\dot{x} = xf(x, y), \quad \dot{y} = yg(x, y). \quad (4.32)$$

Коэффициенты $f(0, 0)$ и $g(0, 0)$ определяют экспоненциальное нарастание изолированных популяций при малой их численности, а функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ могут описывать нелинейное насыщение данной популяции и взаимодействие между популяциями.

Выбор функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ определяет конкретную модель. Наиболее известной является *модель Лотки-Вольтерра* (*Lotka-Volterra model*), для которой

$$f(x, y) = a - by, \quad g(x, y) = -c + dx. \quad (4.33)$$

В этом случае параметр a определяет скорость роста популяции «жертв», c – скорость убывания «хищников» в отсутствии «жертв». Взаимодействие популяций учитывают коэффициенты b и d .

Если учесть нелинейное насыщение численности «жертв» с помощью логистической функции, то можно использовать следующую модель:

$$f(x, y) = a(1 - x) - by, \quad g(x, y) = -c + dx. \quad (4.34)$$

Еще один пример взаимодействия популяций дает *экспоненциальная модель*, для которой

$$f(x, y) = \exp(r_1 + ax + by), \quad g(x, y) = \exp(r_2 + cx + dy). \quad (4.35)$$

Перейдем теперь к системам в виде отображений. Дискретный аналог модели Колмогорова представляет собой двумерное отображение и имеет вид:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= y_n g(x_n, y_n). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Конкретизировав функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$, можно получить, например, дискретную модель Лотки-Вольтера или экспоненциальную модель.

Нетривиальные неподвижные точки (4.36) даются соотношениями¹⁷

$$f(x_0, y_0) = 1, \quad g(x_0, y_0) = 1. \quad (4.37)$$

С учетом (4.37) матрица Якоби принимает вид:

¹⁷ Мы здесь не рассматриваем случай, когда численность одной из популяций обращается в ноль. Учет таких случаев приводит к мультистабильности.

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 + x \frac{\partial f}{\partial x} & x \frac{\partial f}{\partial y} \\ y \frac{\partial g}{\partial x} & 1 + y \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)} \quad (4.38)$$

Ее след S и якобиан J определяются соотношениями

$$\begin{aligned} S &= 2 + x_0 \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} + y_0 \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \\ J &= 1 + x_0 \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} + y_0 \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} + x_0 y_0 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \right) \Big|_{(x_0, y_0)} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Все производные и значения переменных вычислены в неподвижной точке (4.37).

Для модели Лотки-Вольтерра (4.33) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$, так что всегда $S = 2$. Как

можно видеть из треугольника устойчивости на рис.2.4, с точки зрения возможных бифуркаций это вырожденный случай. Поэтому более предпочтительной является модификация этой модели с нелинейным насыщением численности популяции (4.34). Используем ее, для простоты положив $c = 0$. В этом случае неподвижные точки даются соотношениями

$$x_0 = \frac{1}{d}, \quad y_0 = \frac{ad - a - d}{bd}. \quad (4.40)$$

Матрица Якоби имеет вид

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \frac{d-a}{d} & -\frac{b}{d} \\ \frac{ad-a-d}{b} & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.41)$$

Теперь легко вычисляем след и якобиан матрицы Якоби:

$$S = \frac{2d-a}{d}, \quad J = \frac{a(d-2)}{d}. \quad (4.42)$$

Отметим, что инварианты матрицы Якоби зависят только от двух параметров a, d и не зависят от b . Таким образом, картина бифуркаций будет двухпараметрической. Укажем, например, условие бифуркации Неймарка-Сакера. Полагая $J = 1$, получаем $a = \frac{d}{d-2}$.

Для дальнейшего обсуждения будет удобно ввести вспомогательную матрицу

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} x \frac{\partial f}{\partial x} & x \frac{\partial f}{\partial y} \\ y \frac{\partial g}{\partial x} & y \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)} \quad (4.43)$$

Тогда соотношения (4.39) принимают вид

$$S = 2 + s, \quad J = 1 + s + j, \quad (4.44)$$

где s и j – след и якобиан вспомогательной матрицы \hat{m} . Благодаря соотношениям (4.44), на плоскости параметров (s, j) также реализуется треугольник устойчивости, а значит, могут быть описаны все характерные бифуркации двумерных отображений.

Построим теперь модель с запаздыванием. Будем использовать уравнения в общем виде, т.е. дискретные аналоги модели Колмогорова (4.36). Считаем, что запаздывание не влияет на рост малочисленной популяции. Тогда приходим к следующей модели

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n f(x_{n-1}, y_{n-1}), \\ y_{n+1} &= y_n g(x_{n-1}, y_{n-1}). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Уравнения (4.45) можно переписать в виде четырехмерного отображения:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n f(z_n, v_n), \\ y_{n+1} &= y_n g(z_n, v_n), \\ z_{n+1} &= x_n, \\ v_{n+1} &= y_n. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Нетривиальные неподвижные точки (4.46) даются соотношениями

$$f(x_0, y_0) = 1, \quad g(x_0, y_0) = 1, \quad z_0 = x_0, \quad v_0 = y_0. \quad (4.47)$$

Нетрудно видеть, что они определяются точно теми же соотношениями, что и неподвижные точки исходного отображения без запаздывания (4.37).

Матрица Якоби четырехмерного отображения (4.46) имеет вид:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} f & 0 & x \frac{\partial f}{\partial z} & x \frac{\partial f}{\partial v} \\ 0 & g & y \frac{\partial g}{\partial z} & y \frac{\partial g}{\partial v} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(x_0, y_0, z_0, v_0)}. \quad (4.48)$$

Поскольку матрица \hat{M} вычисляется в неподвижной точке, то с учетом (4.47) и того факта, что неподвижные точки отображения без запаздывания и с запаздыванием совпадают, получаем:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \frac{\partial f}{\partial x} & x \frac{\partial f}{\partial y} \\ 0 & 1 & y \frac{\partial g}{\partial x} & y \frac{\partial g}{\partial y} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)} \quad (4.49)$$

Теперь нетрудно получить характеристическое уравнение. Из $\det(\hat{M} - \mu \hat{E}) = 0$ и (4.49) после некоторых преобразований получим:

$$\mu^2(\mu - 1)^2 - s\mu(\mu - 1) + j = 0. \quad (4.50)$$

Здесь использованы след s и якобиан j вспомогательной матрицы \hat{m} . Далее, раскрывая скобки в (4.50), получаем

$$\mu^4 - 2\mu^3 + (1 + s)\mu^2 - s\mu + j = 0. \quad (4.51)$$

Используя выражения для инвариантов четырехмерной матрицы (4.2) (мы будем отмечать их чертой сверху), имеем:

$$\bar{S} = 2, \bar{H} = 1 - s, \bar{L} = -s, \bar{J} = j. \quad (4.52)$$

Таким образом, свойства отображения с запаздыванием описываются всего двумя параметрами s, j , причем, эти же параметры управляют бифуркациями исходного отображения без запаздывания. При этом картина бифуркаций четырехмерного отображения с использованием в качестве параметров s, j универсальна и не зависит от конкретного вида функций, задающих отображение. От вида функций зависит лишь связь этих параметров и параметров исходного отображения.

Теперь бифуркации (4.36) легко найти с помощью общих выражений (4.5)-(4.12). Так, для бифуркации Неймарка-Сакера получаем

$$(2 + s)(s + 2j) = (1 - j)^2(s + j). \quad (4.53)$$

Для двойной бифуркации Неймарка-Сакера находим

$$s = -2, j = 1. \quad (4.54)$$

Если рассматривать модель Лотки-Вольтерра с насыщением, то, используя связь параметров с инвариантами вспомогательной матрицы (4.42), (4.44), получаем условие двойной бифуркации Неймарка-Сакера:

$$d = 2, a = 4. \quad (4.55)$$

При численном моделировании следует иметь в виду возможную мультистабильность в системе и учитывать, что мы рассмотрели только один из «листов» плоскости параметров.

4.6. Связанные отображения с бифуркацией Неймарка-Сакера. Квазипериодические бифуркации

Повышение размерности системы до четырех позволяет ввести в рассмотрение модели типа связанных двумерных отображений с бифуркацией Неймарка-Сакера. В физическом плане такие системы будут полезны при рассмотрении задачи о динамике связанных автономных квазипериодических генераторов [33,34], демонстрирующих бифуркацию Неймарка-Сакера и внутренние резонансы, организованные в систему языков Арнольда.

Наиболее простой и удобной является система связанных универсальных отображений (2.40). Действительно, в этом случае параметры отображения J_1 и J_2 управляют превышением над порогом бифуркации Неймарка-Сакера в автономных подсистемах, т.е. имеют четкий физический смысл. Таким образом, возникает задача об устройстве плоскости параметров (J_1, J_2) .

С другой стороны, для универсального отображения на линии бифуркации Неймарка-Сакера $J = 1$ имеется однозначная связь второго параметра S с числом вращения w : $S = 2 \cos(2\pi w)$, см. раздел 2.6. Поэтому при увеличении J мы имеем, фактически, картину диссипативной версии теории КАМ. Действительно, при $J_{1,2} = 1$ плоскость (S_1, S_2) дает плоскость двух чисел вращения, каждое из которых может быть как рациональным, так и иррациональным. Если же увеличивать связь или превышение над порогом бифуркации Неймарка-Сакера, то можно получить картину разрушения торов разной размерности.

Запишем два несвязанных универсальных отображения (2.40)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f_1(x_n, y_n), & u_{n+1} &= f_2(u_n, v_n), \\ y_{n+1} &= g_1(x_n, y_n), & v_{n+1} &= g_2(u_n, v_n), \end{aligned} \quad (4.56)$$

где

$$\begin{aligned} f_i(x, y) &= S_i x - y - (x^2 + y^2), \\ g_i(x, y) &= J_i x - (x^2 + y^2)/5. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Здесь x, y – переменные первого отображения, S_1, J_1 – его параметры, а u, v и S_2, J_2 – переменные и параметры второго отображения.

Связь между подсистемами организуем следующим образом. Сначала выполняется по одной итерации каждого отображения, так что

$$\begin{aligned} \tilde{x}_n &= f_1(x_n, y_n), & \tilde{u}_n &= f_2(u_n, v_n), \\ \tilde{y}_n &= g_1(x_n, y_n), & \tilde{v}_n &= g_2(u_n, v_n). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Затем включается связь, пропорциональная разности проитерированных пере-

менных, и которая дает добавку к проитерированным переменным. При такой организации связи она обычно носит *диссипативный* характер [35]:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f_1(x_n, y_n) + \mu(\tilde{x}_n - \tilde{u}_n), \\ y_{n+1} &= g_1(x_n, y_n) + \mu(\tilde{y}_n - \tilde{v}_n), \\ u_{n+1} &= f_2(u_n, v_n) + \mu(\tilde{u}_n - \tilde{x}_n), \\ v_{n+1} &= g_2(u_n, v_n) + \mu(\tilde{v}_n - \tilde{y}_n). \end{aligned} \quad (4.59)$$

В результате приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1-\mu)f_1(x_n, y_n) + \mu f_2(u_n, v_n), \\ y_{n+1} &= (1-\mu)g_1(x_n, y_n) + \mu g_2(u_n, v_n), \\ u_{n+1} &= (1-\mu)f_2(u_n, v_n) + \mu f_1(x_n, y_n), \\ v_{n+1} &= (1-\mu)g_2(u_n, v_n) + \mu g_1(x_n, y_n). \end{aligned} \quad (4.60)$$

На рис.4.5 представлена карта спектра ляпуновских показателей этой системы на плоскости параметров (J_1, J_2) , которые отвечают за бифуркации Неймарка-Сакера в подсистемах.

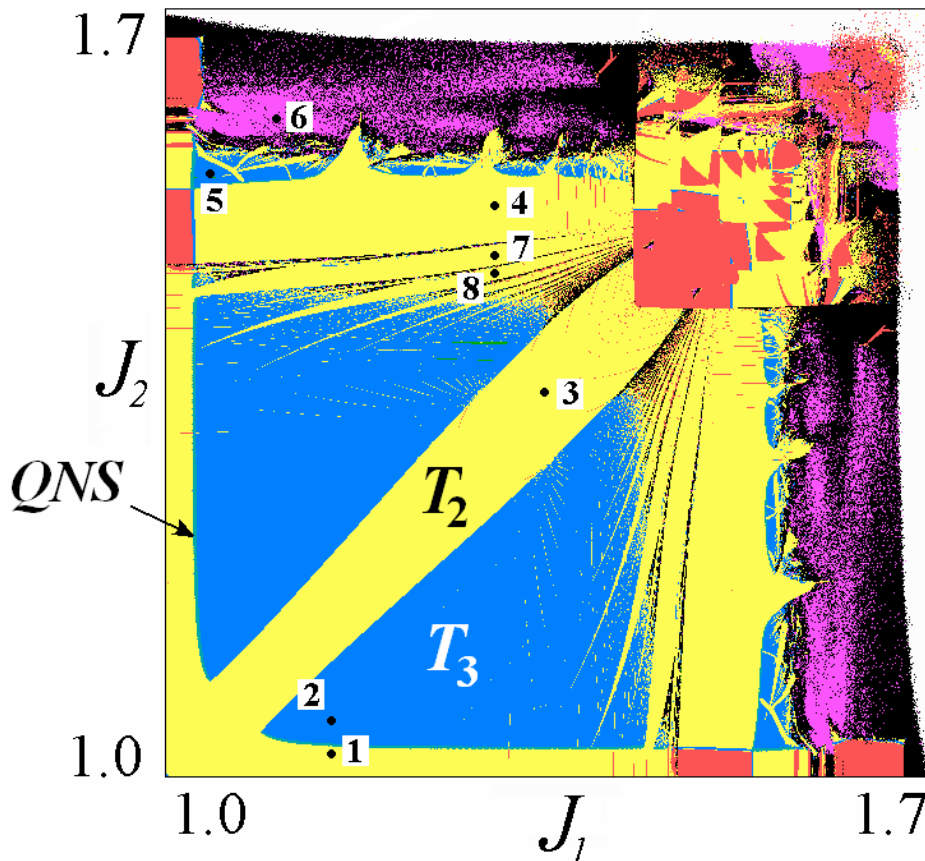


Рис.4.5. Карта спектра ляпуновских показателей связанных универсальных отображений на плоскости параметров (J_1, J_2) ; $S_1 = S_2 = 0.2$, $\mu = 0.01$. Красный цвет – периодические режимы, желтый – область двухчастотной квазипериодичности T_2 , синий – трехчастотной квазипериодичности T_3 , черный – хаоса, сиреневый – гиперхаоса. QNS – линия квазипериодической бифуркации Неймарка-Сакера. Цифры отвечают фазовым портретам на рис.4.6-4.8.

При этом второй параметр выберем $S_1 = S_2 = 0.2$. Если обратиться к карте индивидуального отображения на рис.2.13, то можно видеть, что при $S = 0.2$ с увеличением параметра J в отображении наблюдаются, в основном, квазипериодические режимы. И лишь при достаточно больших J «маршрут» подходит к языку Арнольда периода пять.

На карте можно видеть строго периодические режимы, двух- и трехчастотные квазипериодические режимы, а также области хаоса и гиперхаоса. Существенно новым моментом является возможность существования *трехчастотной квазипериодичности*, то есть таких режимов, которые характеризуются двумя нулевыми показателями Ляпунова. В терминах потоковой системы можно говорить о *торах более высокой размерности*.

Понять устройство плоскости параметров, отвечающих за бифуркации Неймарка-Сакера, помогают фазовые портреты на рис.4.6-4.8. Они представляют собой проекции аттракторов четырехмерной системы (4.60) на трехмерное пространство (x, y, u) и плоскость двух первых переменных парциальных отображений (x, u) . Обсудим сначала первую серию рисунков, рис.4.6.

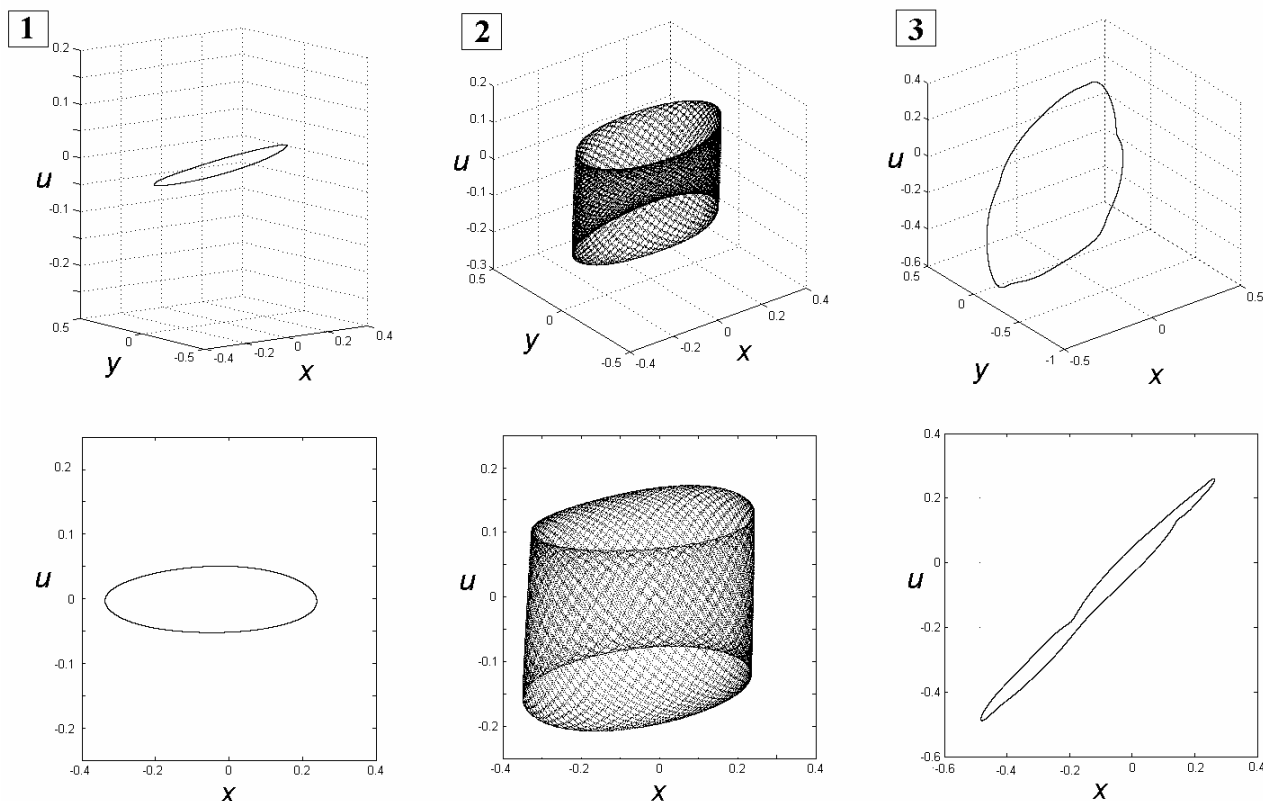


Рис.4.6. Трехмерные и двумерные проекции аттракторов связанных универсальных отображений (4.60). Двухчастотный (1) и трехчастотный (2) режимы с доминированием второй подсистемы, а также двухчастотные колебания (3), близкие к симметричным.

В точке 1 реализуется двухчастотный квазипериодический режим. При этом фазовая траектория представляет собой инвариантную кривую. Ее особенность состоит в том, что она существенно сжата по оси переменной u второго отображения. Причина заключается в доминировании второй подсистемы. Действительно, выбранная точка отвечает условию $J_2 < J_1$. Это означает, что вторая подсистема не значительно «отстроена» от случая неподвижной точки. Соответственно, ее переменная u мало меняется в процессе динамики, что можно видеть на первой части рис.4.6.

Если теперь увеличить степень возбуждения второй подсистемы и перейти в точку 2 рис.4.5, то возникает *трехчастотный квазипериодический режим*. В фазовом пространстве наблюдается *трехчастотный тор* (рис.4.6, вставка 2). При этом, тем не менее, вторая подсистема отчасти все еще доминирует – фазовый портрет близок к цилиндру, вытянутому вдоль оси u .

Увеличивая еще больше степень возбуждения парциальных подсистем, попадаем в другую «ветвь» области двухчастотных торов, вытянутую на плоскости (J_1, J_2) вдоль диагонали. Соответствующий фазовый портрет представлен на третьей вставке (рис.4.6). Теперь параметры возбуждения подсистем близки: $J_1 \approx J_2$. Поэтому возникает двухчастотный режим, которому в проекции на плоскость переменных обеих подсистем (x, u) отвечает инвариантная кривая, вытянутая вдоль диагонали. Таким образом, наблюдается слабо возмущенный квазипериодическим образом режим почти симметричного движения подсистем.

Увеличим существенным образом параметр возбуждения второй подсистемы J_2 и перейдем в область на карте рис.4.5, на которой отмечены точки 4, 5 и 6. Соответствующие фазовые портреты даны на рис.4.7. Обратимся сначала к точке 4. Степень превышения второй подсистемой порога бифуркации Неймарка-Сакера теперь настолько велика, что для нее в автономном режиме становится возможной возникновение синхронного режима периода пять. Взаимодействие с первой подсистемой, находящейся в режиме автономных квазипериодических колебаний, приводит к возникновению двухчастотного тора на базе цикла периода 5. Поэтому фазовый портрет выглядит, как пять замкнутых инвариантных кривых, каждую из которых изображающая точка посещает по очереди.

Увеличение параметра J_2 приводит к выходу из условий синхронизации второй подсистемы, что, в свою очередь, приводит к возникновению трехчастотных колебаний на базе данного режима, вставка 5 рис.4.7. При этом портрет

аттрактора «размазывается», но сохраняется его структура, обусловленная резонансным характером режима периода 5. При еще большем увеличении параметра возбуждения возникает хаос, а затем и гиперхаос, и тонкая структура аттрактора полностью разрушается, вставка 6.

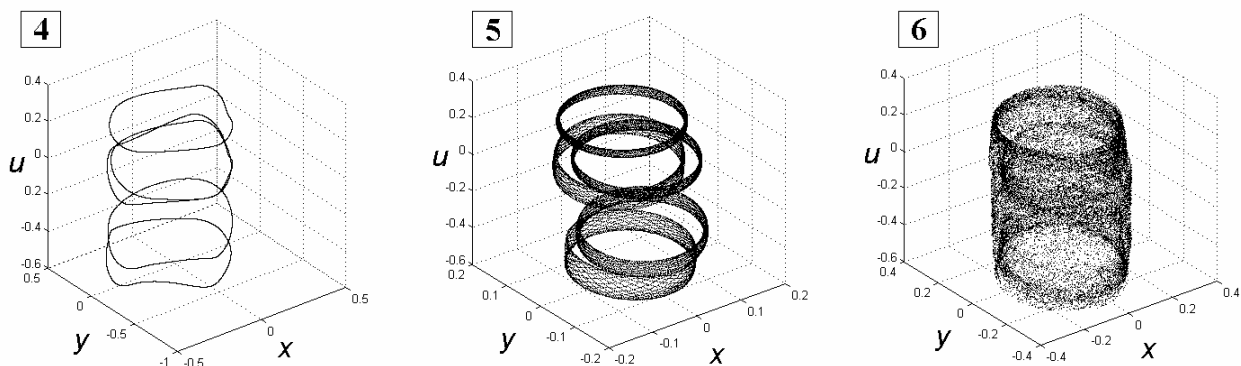


Рис.4.7. Трехмерные проекции аттракторов связанных универсальных отображений. Двухчастотный тор на базе режима периода 5 (4) и его превращение в трехчастотный тор (5) и гиперхаос (6).

Интересные режимы возникают, если двигаться от портрета на вставке 4 в сторону уменьшения параметра возбуждения J_2 . На ляпуновской карте можно видеть участок узких языков двухчастотных режимов, погруженных в область трехчастотных торов. Портреты аттракторов на плоскости переменных обеих подсистем представлены на рис.4.8. На «стартовом» рисунке можно видеть инвариантную кривую, состоящую из пяти овалов. Портреты на вставках 7 и 8 дают представление об аттракторах внутри соседних языков двухчастотных режимов. Видно, что овалы перестают быть изолированными, так что возникают более сложные резонансные двухчастотные режимы. Их можно классифицировать по количеству точек поворота на фазовой плоскости. Для картинке на вставке 4 это число равно пяти, на вставке 7 – шести, а на вставке 8 – семи.

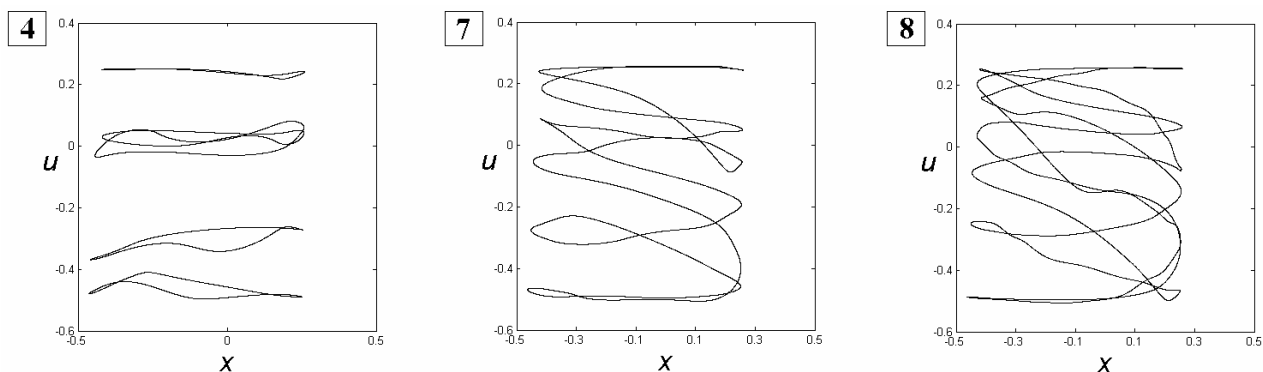


Рис.4.8. Двумерные проекции аттракторов связанных универсальных отображений. Двухчастотный тор на базе режима периода 5 (4) и близкие к нему резонансные двухчастотные квазипериодические режимы (7) и (8), отвечающие языкам двухчастотных торов на рис.4.5.

В организации плоскости параметров рис.4.5 взаимодействующих систем с квазипериодическим поведением важную роль играют бифуркации нового типа, которые относятся к классу *бифуркаций квазипериодических режимов*. В этом случае бифуркационные изменения претерпевают инвариантные кривые (инвариантные торы). Действительно, обратимся к карте на рис.4.5. Фиксируем управляющий параметр второй подсистемы $J_2 = 1.18$. Если выключить связь между подсистемами, то при $J_1 = 1$ в первой подсистеме наблюдается бифуркация Неймарка-Сакера, состоящая в потере устойчивости неподвижной точки с возникновением инвариантной кривой. Введение связи со второй подсистемой, совершающей квазипериодические колебания, возмущает этот режим. Теперь вместо неподвижной точки будет наблюдаться двухчастотный квазипериодический режим, а вместо инвариантной кривой – трехчастотный режим. Соответственно, граница между двумя этими типами режимов будет некоторой новой бифуркацией – *квазипериодической бифуркацией Неймарка-Сакера QNS (quasi-periodic Neimark-Saker bifurcation)*¹⁸.

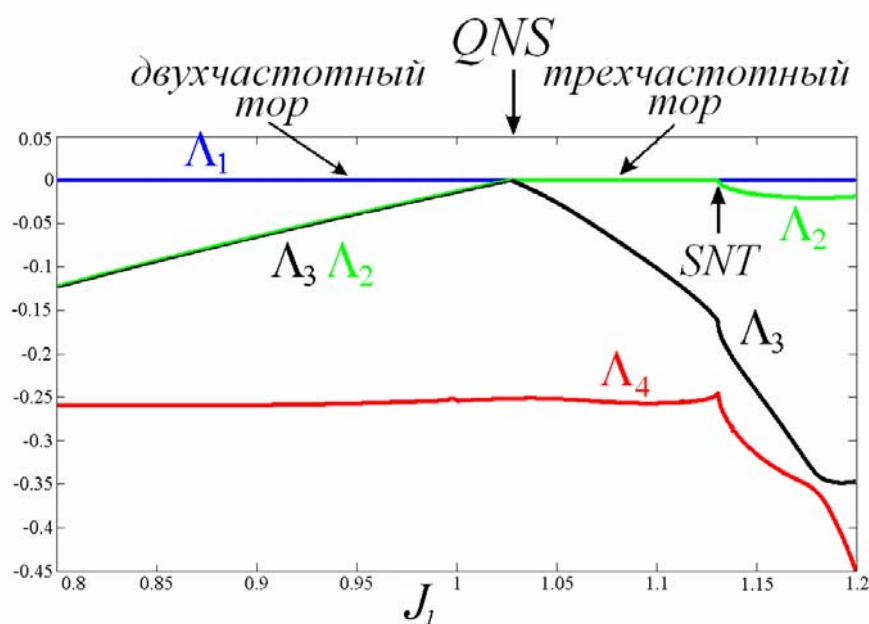


Рис.4.9. График ляпуновских показателей в окрестности точки квазипериодической бифуркации Неймарка-Сакера *QNS*. Символами *SNT* обозначена седло-узловая бифуркация инвариантных кривых.

На рис.4.9 показаны графики всех ляпуновских показателей исследуемой системы в зависимости от управляющего параметра J_1 вдоль линии $J_2 = 1.18$. Можно видеть, что сначала равен нулю один ляпуновский показатель Λ_1 – это

¹⁸ В [33] ее называют также квазипериодической бифуркацией Хопфа (*quasi-periodic Hopf bifurcation*).

отвечает двухчастотному режиму. Интересно отметить, что при этом два других показателя совпадают: $\Lambda_2 = \Lambda_3$. Такое поведение достаточно характерно для обсуждаемой бифуркации и связано с комплексно-сопряженными мультипликаторами. Непосредственно в точке QNS оба этих показателя обращаются в ноль: $\Lambda_2 = \Lambda_3 = 0$. При дальнейшем увеличении параметра за точкой квазипериодической бифуркации Неймарка-Сакера эти показатели становятся не равными друг другу – второй показатель обращается в ноль $\Lambda_2 = 0$, так что теперь имеется два нулевых показателя и возникает трехчастотный квазипериодический режим. График же третьего ляпуновского показателя Λ_3 , коснувшись линии $\Lambda = 0$, снова уходит в область отрицательных значений. При этом в точке QNS график имеет излом, который также является достаточно характерным атрибутом точки квазипериодической бифуркации Неймарка-Сакера. Отметим, что эта бифуркация наблюдается при $J_1 \approx 1.03$, т.е. взаимодействие подсистем немного сдвигает точку бифуркации по сравнению с соответствующей точкой бифуркации Неймарка-Сакера индивидуальной системы $J_1 = 1$.

В соответствии с вышеописанной ситуацией на карте рис.4.5 располагается линия рождения трехчастотных режимов QNS . За порогом этой бифуркации возникает система языков резонансных двухчастотных торов, погруженных в область трехчастотной квазипериодичности. При этом границы языков двухчастотных режимов образованы линиями *седло-узловых бифуркаций инвариантных кривых*. Для таких бифуркаций характерно возникновение аттрактора с двумя нулевыми ляпуновскими показателями в результате слияния и исчезновения устойчивой и седловой инвариантных кривых. На графике рис.4.9 можно видеть одну точку такой бифуркации SNT , которая отвечает области двухчастотных режимов, вытянутой вдоль диагонали на карте рис.4.5. К сожалению, проблема визуализации седловой инвариантной кривой достаточно сложна, так что непосредственно проиллюстрировать седло-узловую бифуркацию инвариантных кривых лучше всего в рамках фазовых моделей, см. часть 5.

В то же время, представленные квазипериодические бифуркации характеризуются разной картиной эволюции аттракторов, что иллюстрирует рис.4.10 и 4.11. Серия рисунков 4.10 отвечает квазипериодической бифуркации Неймарка-Сакера. В этом случае трехчастотный режим возникает «мягким» образом в окрестности исходной инвариантной кривой. Можно видеть, что аттрактор в форме «бублика» постепенно увеличивается в размерах с ростом превышения над порогом бифуркации.

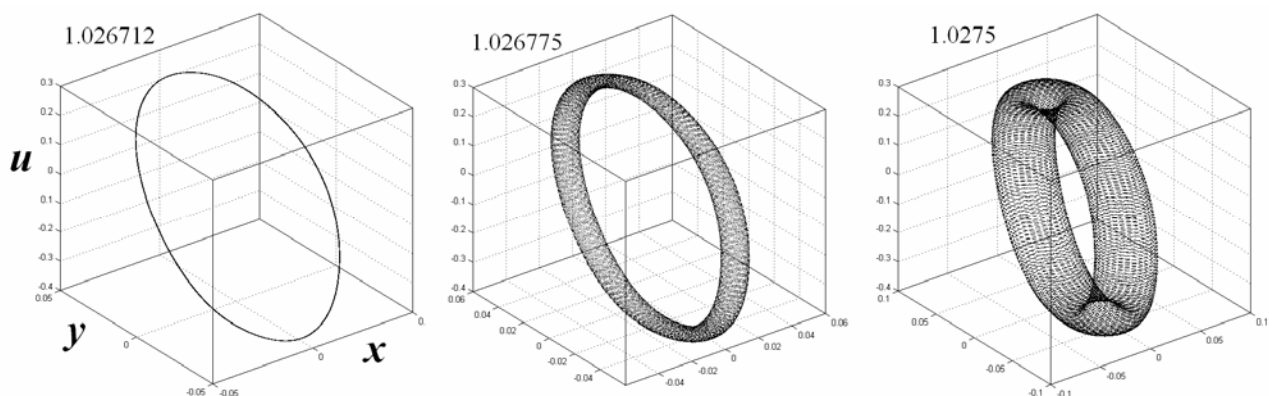


Рис.4.10. Эволюция аттрактора при квазипериодической бифуркации Неймарка-Сакера, $J_2 = 1.2$, $\mu = 0.01$. Значения параметра J_1 указаны на рисунке.

Серия рис.4.11 отвечает седло-узловой бифуркации инвариантных кривых. Второй рисунок серии иллюстрирует сгущение траекторий в окрестности исчезнувшей инвариантной кривой. Третий рисунок демонстрирует, что трехчастотный аттрактор возникает, в определенной мере, «жестким» образом: траектории уже не локализованы в окрестности исходной инвариантной кривой.

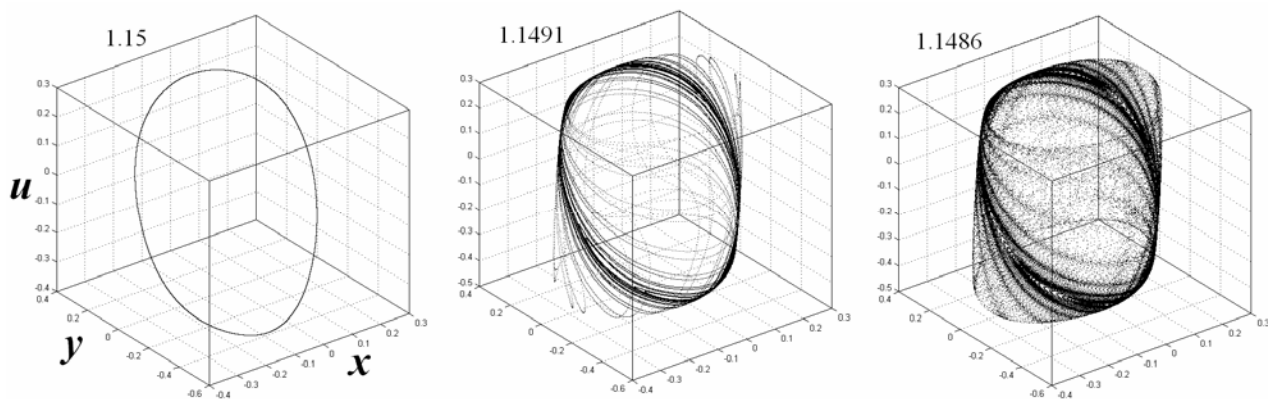


Рис.4.11. Эволюция аттрактора при квазипериодической седло-узловой бифуркации; $J_2 = 1.2$, $\mu = 0.01$. Значения параметра J_1 указаны на рисунке.

Мы обсудили устройство плоскости параметров связанных отображений, отвечающих за бифуркацию Неймарка-Сакера в подсистемах. Фиксируем теперь параметры $J_1 = J_2 = 1.17$, $\mu = 0.01$ и обратимся к карте динамических режимов и карте ляпуновских показателей на плоскости второй пары управляющих параметров индивидуальных отображений (S_1, S_2) , рис.4.12. Как мы отмечали выше, параметры S_1, S_2 , фактически, отвечают за числа вращения индивидуальных систем.

На ляпуновской карте рис.4.12б можно видеть систему вертикальных и горизонтальных полос областей двухчастотных режимов T_2 . На пересечении полос наблюдаются периодические режимы. Такая структура плоскости парамет-

ров связана с различными резонансами в системе. Так, самая большая область периодических режимов P отвечает периоду 3. (Напомним, что для универсального отображения язык периода 3 является самым широким, см. рис.2.13.). Границы этой области при малой связи примерно определяются шириной языка синхронизации периода 3 автономных отображений.

Возникают также и другие разнообразные резонансы, определяемые теми или иными комбинациями двух чисел вращения w_1 и w_2 взаимодействующих подсистем. При этом каждый резонанс удобно характеризовать фактором $(p, q)/n$, где после сокращения дроби величина $w_1 = p/n$ представляет собой первое число вращения, $w_2 = q/n$ – второе, а n – общий знаменатель. На карте динамических режимов такой резонанс фиксируется как область периода n . Характеристику резонанса $(p, q)/n$ можно назвать *комбинационным числом вращения*. Так, например, упомянутый выше самый сильный резонанс периода три характеризуется комбинационным числом вращения $(1, 1)/3$.

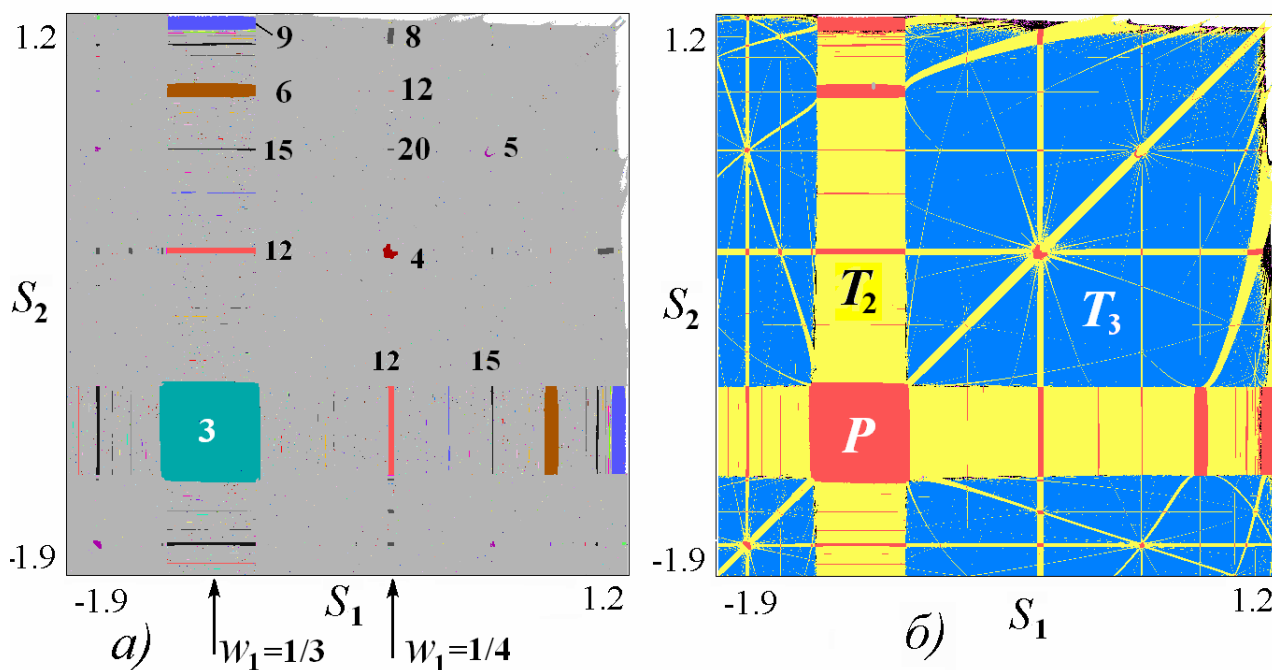


Рис.4.12. Карта динамических режимов (а) и карта спектра ляпуновских показателей (б) связанных универсальных отображений на плоскости параметров, ответственных за числа вращения индивидуальных подсистем; $J_1 = J_2 = 1.17$, параметр связи $\mu = 0.01$.

Фиксируем теперь частотный параметр первой подсистемы S_1 , как показано левой стрелкой на рис.4.12а, и рассмотрим возникающие резонансы внутри вертикальной полосы двухчастотных торов. Физически такой режим отвечает тому, что первая подсистема при выключенной связи совершает колебания периода три, а нас интересуют режимы, наблюдающиеся в связанной системе при

увеличении частотного параметра второй подсистемы.

В этом случае взаимодействие подсистем может приводить к двухчастотным квазипериодическим колебаниям или к периодическим колебаниям, если динамика второй подсистемы близка к ее собственному индивидуальному резонансу. Для индивидуальной второй подсистемы с ростом S_2 выраженными будут области с числами вращения $w_2 = 1/3, 1/4, 1/5$ и т.д., рис.2.13. В сочетании с динамикой первой подсистемы при $w_1 = 1/3$ такая последовательность порождает систему резонансов с комбинационными числами вращения:

$$(1, 1)/3, (4, 3)/12, (5, 3)/15, (2, 1)/6, (7, 3)/21, (8, 3)/24, (3, 1)/9... \quad (4.61)$$

Последовательность (4.61) можно видеть на рис.4.12а как области режимов периода 3, 12, 15, 6..., 9. (Области периода 21 и 24 слишком узкие.)

Отметим, что размер области периодических резонансов на плоскости параметров определяется теперь не только индивидуальными числами вращения w_1 и w_2 , но и их взаимными свойствами. В результате, например, окно периода 6, хотя и отвечает малому значению второго числа вращения $w_2 = 1/6$, но в связанной системе оказывается достаточно широким из-за резонансного характера взаимодействия подсистем, когда числа вращения $w_1 = 1/3$ и $w_2 = 1/6$ относятся как 2:1.

Если теперь зафиксировать параметр S_1 так, что число вращения первой подсистемы $w_1 = 1/4$ (правая стрелка-указатель на рис.4.12а), то с ростом S_2 наблюдаются следующие режимы:

$$(3, 4)/12, (1, 1)/4, (5, 4)/20, (3, 2)/12, (7, 4)/28, (2, 1)/8, (9, 4)/36... \quad (4.62)$$

Некоторые наиболее широкие окна этого семейства также указаны на карте.

В свою очередь, все эти окна порождают собственную систему резонансных двухчастотных полос, пересечение которых приводит к «островкам» новых периодических резонансов. Наиболее выраженными резонансами такого рода на рис.4.12 являются резонансы периода 4 и 5, лежащие на диагонали плоскости S_1, S_2 , которая отвечает примерному равенству частотных параметров. Они тоже соединены полосой двухчастотных режимов. При этом вся система периодических и двухчастотных режимов погружена в область трехчастотных колебаний T_3 и образует, таким образом, сложную структуру.

Отметим, что аналогичные структуры характерны для задач, относящихся к взаимодействию многочастотных систем, см. часть 5 и, например, [44]. По аналогии с системами с консервативной динамикой, где похожие структуры возникают из-за выполнения резонансных условий в фазовом пространстве

[53,54], авторы [49] предлагают называть такие структуры *резонансной паутиной Арнольда (Arnold resonance web)*.

Обсудим теперь влияние связи на картину наблюдаемых режимов. С этой целью обратимся к другому сечению пространства параметров: фиксируем параметры первой подсистемы, отвечающие квазипериодическому режиму. Построим карту динамических режимов на плоскости «частотный параметр второй системы S_2 – величина связи μ », рис.4.13а. Можно видеть, что при малой связи ($\mu \leq 0.067$) в объединенной системе существуют, практически, только квазипериодические режимы. Эта область плоскости параметров показана на рис.4.13б в виде ляпуновской карты и выглядит как система языков двухчастотных торов, погруженных в область трехчастотных режимов.

Если теперь увеличить связь, то возникает простейший режим типа неподвижной точки с единственным окном квазипериодических режимов, расширяющимся с ростом связи. Таким образом, в соответствии с рис.4.13а модель при большой связи ведет себя как единая, отчасти аналогичная индивидуальному отображению. Это понятно в силу диссипативного характера связи. Особенность состоит лишь в наличии резонансного языка двухчастотного режима, достигающего своим основанием оси нулевой связи $\mu = 0$ и отвечающему резонансному условию $S_2 \approx S_1 = 0.2$.

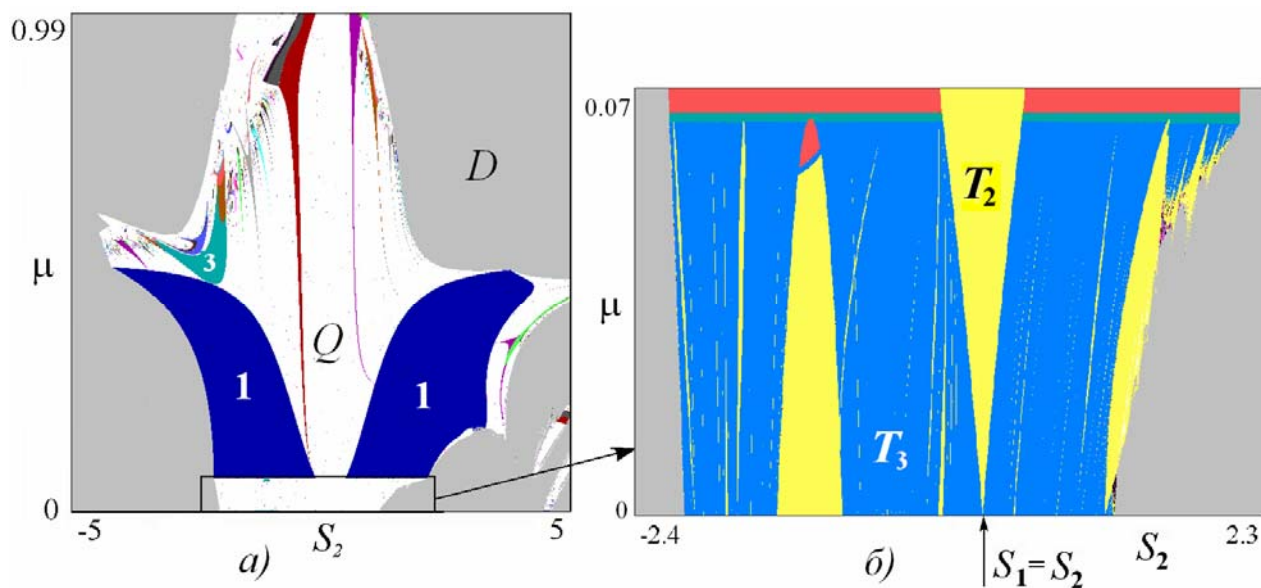


Рис.4.13. Карта динамических режимов (а) и ее увеличенный фрагмент в виде карты ляпуновских показателей (б) для связанных универсальных отображений на плоскости «частотный параметр второй подсистемы – величина связи»; $J_1 = J_2 = 1.15$, $S_1 = 0.2$.

Задачи

1. Найдите аргумент мультипликатора на линии Неймарка-Сакера как

функцию трех инвариантов матрицы Якоби. Рассмотрите также случай $L = 0$. Найдите в этом случае аргумент в «точке поворота» линии Неймарка-Сакера, а также в точке двойной бифуркации Неймарка-Сакера.

2. Постройте карту динамических режимов дискретной модели Лотки-Вольтерра без запаздывания на плоскости параметров (d, a) . Укажите на ней линию бифуркации Неймарка-Сакера.

3. Проведите полный анализ бифуркаций коразмерности один и два обобщенной дискретной модели хищник-жертва. Результаты представьте на плоскости инвариантов вспомогательной матрицы (s, j) .

4. Проведите полный анализ бифуркаций коразмерности один и два дискретной модели Лотки-Вольтерра с запаздыванием. Результаты представьте на плоскости параметров (d, a) .

5. Для предыдущей задачи рассмотрите бифуркации неподвижной точки, которой отвечает обращение в ноль численности одной популяции.

6. Проведите анализ бифуркаций экспоненциальной модели с запаздыванием.

7. Для четырехмерного отображения Рихтера

$$x_{n+1} = a - z_n^2 + bw_n,$$

$$y_{n+1} = x_n,$$

$$z_{n+1} = y_n,$$

$$w_{n+1} = z_n$$

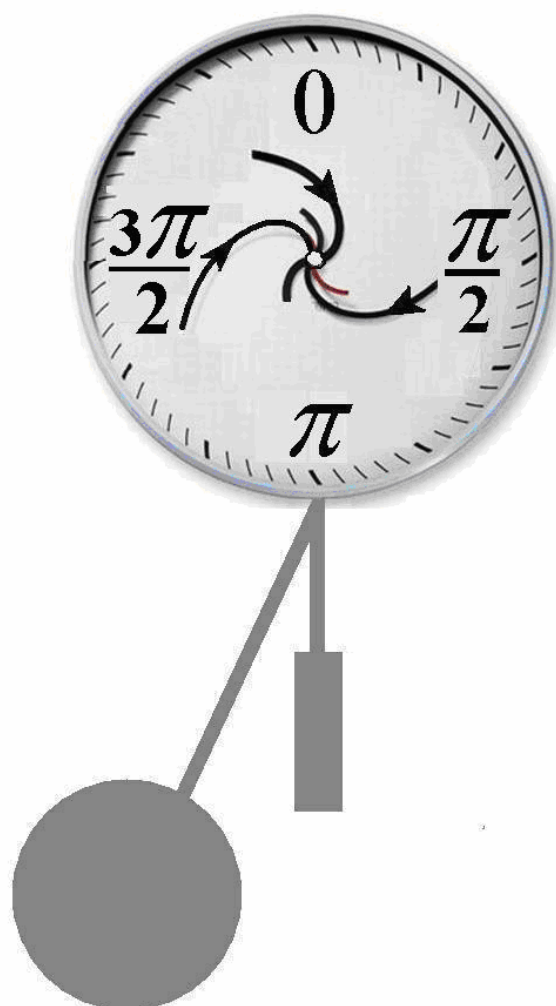
найдите неподвижные точки, матрицу Якоби, ее инварианты и получите условия основных бифуркаций коразмерности один и два. Возможна ли в такой системе точка двойной бифуркации Неймарка-Сакера?

8. Постройте карту ляпуновских показателей для четырехмерного отображения Рихтера.

9. Постройте карту ляпуновских показателей связанных универсальных отображений на плоскости параметров первого отображения (S_1, J_1) при фиксированных параметрах второго $S_2 = 0.2, J_2 = 0.15$ и величине связи $\mu = 0.01$.

Часть V

ФАЗОВЫЕ МОДЕЛИ



5.1. Отображение окружности

В физическом плане достаточно часто представляет интерес особый класс отображений, когда в качестве динамической переменной выступает одна или несколько фаз, которые обладают свойством 2π -периодичности. Это, например, задачи о динамике различных осцилляторов, для которых оказывается удобным следить за фазой колебаний. Если фаза одна, то приходим к одномерному отображению

$$\varphi_{n+1} = f(\varphi_n). \quad (5.1)$$

В простейшем случае это отображение может быть линейным, так что

$$\varphi_{n+1} = \Omega + \varphi_n. \quad (5.2)$$

В этом случае фаза при каждой итерации получает постоянную добавку Ω . Если представлять фазу, как угловую переменную некоторой вращающейся точки, то каждая итерация отвечает повороту на угол Ω , рис.5.1. Поэтому такое отображение называется *отображением поворота*. С точки зрения физики оно соответствует свободным колебаниям осциллятора. Параметр Ω в рамках такой интерпретации определяет угловую скорость вращения фазы, т.е. частоту колебаний.

Оказывается удобным ввести нормированную частоту – *число вращения* $w = \Omega / 2\pi$. При этом значение $w = 1$ отвечает полному повороту на 360° , $w = 1/2$ – повороту на 180° и т.д.

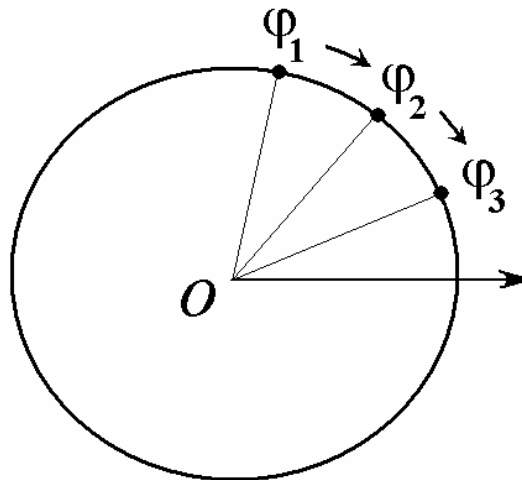


Рис.5.1. Динамика фазы на окружности.

Особенность фазы, а именно, ее 2π -периодичность, можно учесть в отображении (5.2), записывая его, как

$$\varphi_{n+1} = \Omega + \varphi_n, \text{ mod } 2\pi. \quad (5.3)$$

Здесь запись $\text{mod } 2\pi$ означает, что фаза берется «по модулю 2π », т.е. если фаза

превышает значение 2π , то часть, кратная 2π , отбрасывается. В дальнейшем будем полагать такую процедуру выполненной, а знак $\text{mod } 2\pi$ для сокращения записи опускать.

Влияние дополнительных факторов (например, внешнее воздействие) может возмущать динамику отображения поворота, так что в общем случае следует записать

$$\varphi_{n+1} = \Omega + \varphi_n + f(\varphi_n), \quad (5.4)$$

где $f(\varphi)$ – 2π -периодическая функция аргумента: $f(\varphi + 2\pi n) = f(\varphi)$. Благодаря этому свойству функции $f(\varphi)$, при итерациях отображения (5.4) можно считать, что изображающая точка «прыгает» по окружности, как показано на рис.5.1. Поэтому отображение (5.4) называют *отображением окружности*.

Свойства отображения окружности зависят от конкретного вида функции $f(\varphi)$. Наиболее простой и популярной моделью является *синус-отображение окружности*. К этой модели можно прийти разными способами, как чисто формальными, так и достаточно физически обоснованными. Полезно продемонстрировать все соответствующие подходы.

В рамках первого подхода используем свойство периодичности фазы. С этой целью разложим периодическую функцию $f(\varphi)$ в ряд Фурье, т.е. представим в виде суперпозиции синусов и косинусов:

$$f(\varphi) = \sum a_m \sin m\varphi + \sum b_m \cos m\varphi, \quad (5.5)$$

где суммирование выполняется по целому индексу m . Оставим теперь только первые, наиболее существенные члены ряда:

$$f(\varphi) = b_0 + a_1 \sin \varphi + b_1 \cos \varphi + \dots \quad (5.6)$$

Как известно из тригонометрии, сумму $a \sin \varphi + b \cos \varphi$ можно представить в виде единственного гармонического члена с новой амплитудой и фазой:

$$a \sin \varphi + b \cos \varphi = c \sin(\varphi + \alpha). \quad (5.7)$$

Здесь $a = c \cos \alpha$, $b = c \sin \alpha$, так что $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ и $\alpha = \text{arctg}(b/a)$. Таким образом, исходное отображение теперь можно переписать в виде

$$\varphi_{n+1} = \Omega + b_0 + \varphi_n + c \sin(\varphi_n + \alpha). \quad (5.8)$$

Далее, сделав замены $\varphi \rightarrow \varphi + \alpha$, $\Omega \rightarrow \Omega + b_0$, получаем следующее одномерное отображение:

$$\varphi_{n+1} = \Omega + \varphi_n + c \sin \varphi_n. \quad (5.9)$$

Полученное отображение (5.9) и носит название *синус-отображение окружности*.

5.2. Уравнение Адлера и его дискретизация

Представленный выше вывод является достаточно формальным и не дает возможности понять физическую мотивацию построения отображения окружности. Поэтому используем другой подход, который позволяет учесть связь этого отображения с задачами синхронизации. Предварительно, однако, нам надо получить уравнение, описывающее динамику фазы системы в задачах синхронизации. Детальный вывод можно найти в [6,37-39]; мы воспроизведем основную канву рассуждений, поскольку это полезно для дальнейшего изложения.

Базовой моделью теории колебаний, описывающей явление *вынужденной синхронизации*, является возбуждаемый гармоническим сигналом осциллятор Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = B \sin \omega t. \quad (5.10)$$

Здесь λ – параметр отрицательного трения, отвечающий за возможность автоколебаний в автономной системе при $\lambda > 0$, B и ω – амплитуда и частота внешнего сигнала. Частота малых собственных колебаний принята за единицу.

Явление синхронизации состоит в том, что фаза возбуждаемой системы подстраивается под ритм внешнего воздействия [37-40]. Для описания этого эффекта достаточно следить за относительной фазой осциллятора и внешнего сигнала. Это можно сделать в рамках *квазигармонического приближения*, когда частота сигнала ω была близка к собственной частоте осциллятора. Кроме того, необходимо, чтобы осциллятор был слабо возбужденным, т.е. параметр λ был мал по сравнению с единицей.

Тогда можно применить метод медленно меняющихся амплитуд. При этом полагают, что

$$x(t) = \frac{1}{2} a(t) e^{i\omega t} + \text{к.с.} \quad (5.11)$$

Здесь $a(t)$ – комплексная амплитуда, медленно меняющаяся по сравнению с осциллирующим на частоте сигнала множителем $\exp(i\omega t)$. Поскольку вместо одной функции введены, фактически, две ($a(t)$ – комплексная величина, имеющая действительную и мнимую части), то можно наложить одно дополнительное условие, которое выбирают в форме

$$\dot{a} e^{i\omega t} + \text{к.с.} = 0. \quad (5.12)$$

Дифференцируя (5.11) с учетом (5.12), получаем

$$\dot{x} = \frac{1}{2} (i\omega a e^{i\omega t} + \text{к.с.}) \quad \text{и} \quad \ddot{x} = -\omega^2 x + i\omega \dot{a} e^{i\omega t}. \quad (5.13)$$

Подставим теперь (5.11), (5.13) в исходное уравнение (5.10) и оставим только резонансные слагаемые вида $\exp(i\omega t)$ – все остальные являются быстро осциллирующими на этом фоне и не вносят заметного вклада. В результате получаем:

$$\dot{a} + i \frac{\omega^2 - 1}{2\omega} a = \frac{\lambda}{2} a - \frac{1}{8} |a|^2 a - \frac{B}{2\omega}. \quad (5.14)$$

С использованием безразмерных переменных и параметров

$$\tau = \frac{\lambda t}{2}, \quad z = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} a, \quad \Delta = \frac{\omega^2 - 1}{\lambda\omega}, \quad \mu = \frac{B}{2\omega\lambda^{3/2}}, \quad (5.15)$$

уравнение (5.14) принимает следующий вид:

$$\dot{z} + i\Delta z = z - |z|^2 z - \mu. \quad (5.16)$$

Введем теперь действительные амплитуду $R(\tau)$ и фазу осциллятора $\varphi(\tau)$, так что $z = R \exp(i\varphi)$. Тогда из (5.16) получаем:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R - R^3 - \mu \cos \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\Delta + \frac{\mu}{R} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Амплитудное уравнение (5.17) в отсутствие внешнего сигнала $\mu = 0$ имеет стационарное решение $R = 1$, чему в терминах исходной системы отвечает устойчивый предельный цикл. Если амплитуда воздействия невелика, то система совершает движение в окрестности этого предельного цикла. Тогда, подставляя $R = 1$ во второе соотношение (5.17), получаем *фазовое уравнение*:

$$\dot{\varphi} = -\Delta + \mu \sin \varphi. \quad (5.18)$$

Его называют также *уравнением Адлера* [6,37-39]. Оно зависит от двух параметров: безразмерной частоты сигнала Δ и его безразмерной амплитуды μ .

Уравнение Адлера описывает основной эффект в возбуждаемой автоколебательной системе, а именно, *захват фазы* колебаний внешним сигналом. Действительно, если $\mu > |\Delta|$, то для уравнения (5.18) возможно устойчивое стационарное решение $\varphi = \text{const}$, которое и отвечает захвату фазы. В этом случае колебания осциллятора происходят синхронно с внешним сигналом.

Если же выполняется противоположное условие $\mu < |\Delta|$, то стационарное решение (5.18) невозможно, и относительная фаза φ осциллятора и внешнего сигнала неограниченно нарастает. В результате в системе возникают *квазипериодические колебания*. На плоскости параметров захвату фазы отвечает область внутри языка синхронизации (языка Арнольда), а квазипериодическим режимам – область вне его, рис.5.2. Границы языка Арнольда даются соотношением $\mu = \pm\Delta$ и отвечают седло-узловой бифуркации SN , когда сливаются ус-

тойчивое и неустойчивое состояния равновесия уравнения Адлера.

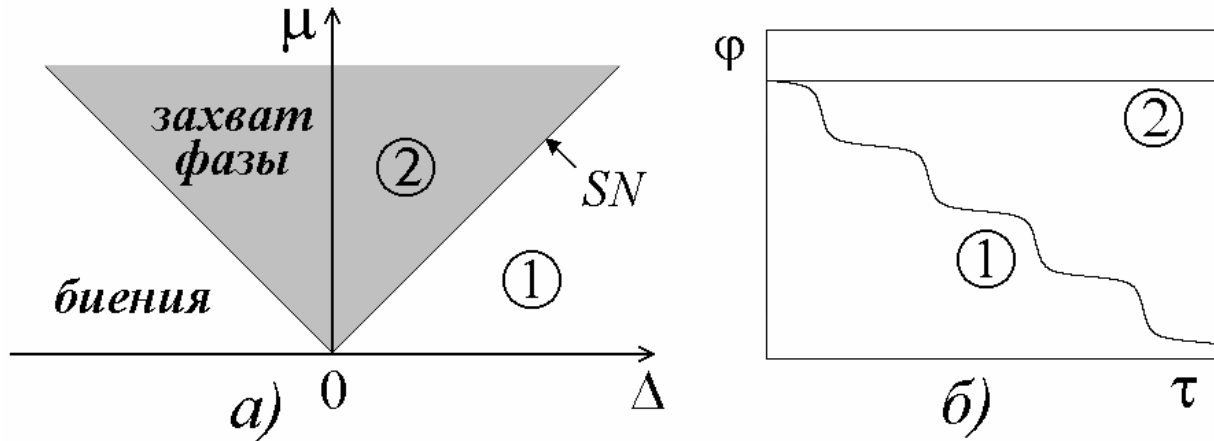


Рис.5.2. а) Язык Арнольда для уравнения Адлера: область синхронизации (захвата фазы) и квазипериодических режимов (биений) на плоскости (расстройка частот Δ – амплитуда воздействия μ), SN – граница языка Арнольда; б) динамика фазы внутри и вне языка Арнольда.

Как мы видели в разделе 2.7, переход от дифференциальных уравнений к дискретным отображениям оказывается продуктивным подходом, который позволяет сформулировать простые модели для анализа новых нелинейных эффектов. Применим процедуру дискретизации к уравнению Адлера, что позволяет перейти к дискретному фазовому осциллятору. С этой целью выполним замену

$$\dot{\phi} \rightarrow (\phi_{n+1} - \phi_n) / \varepsilon, \quad (5.19)$$

где ε – параметр дискретизации. В результате получим:

$$\phi_{n+1} = \phi_n - \Delta \varepsilon + \varepsilon \mu \sin \phi_n. \quad (5.20)$$

Отметим, что параметр дискретизации в полученном отображении может быть убран перенормировкой

$$\Delta \rightarrow \Delta / \varepsilon, \quad \mu \rightarrow \mu / \varepsilon. \quad (5.21)$$

В результате приходим к следующей дискретной модели – одномерному отображению для фазы:

$$\phi_{n+1} = \phi_n - \Delta + \mu \sin \phi_n. \quad (5.22)$$

При этом с точностью до обозначений получилось синус-отображение окружности (5.9). Таким образом, это отображение можно рассматривать как *дискретный фазовый осциллятор*, моделирующий синхронизацию автоколебательной системы внешним сигналом.

Следует отметить, что к уравнению Адлера приводится и задача о *взаимной синхронизации* двух диссипативно связанных автоколебательных осцилляторов. В этом случае исходные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + (1 - \Delta/2)x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta/2)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0.\end{aligned}\tag{5.23}$$

Здесь Δ – параметр частотной расстройки осцилляторов друг относительно друга, μ – величина связи. Подчеркнем, что *диссипативный* характер связи в (5.23) обусловлен членом в виде разности скоростей осцилляторов $(\dot{x} - \dot{y})$. Из (5.23) видно, что в этом случае при $\mu > 0$ связь действительно диссипативная – она вносит дополнительное затухание.

Действуя аналогично логике случая вынужденной синхронизации¹⁹, для системы (5.23) можно получить уравнение Адлера для *относительной фазы* осцилляторов θ :

$$\dot{\theta} = -\Delta/2 - \mu \sin \theta.\tag{5.24}$$

Таким образом, синус-отображение окружности можно рассматривать и как дискретную модель двух диссипативно связанных осцилляторов.

5.3. Возбуждаемый осциллятор Ван-дер-Поля-Дуффинга

В ряде случаев стандартное синус-отображение окружности может быть получено аналитически непосредственно из формулировки исходной задачи. Например, оно описывает генератор типа «накопление-сброс» в случае, если порог срыва колебаний управляется синусоидальным сигналом [37,39]. Еще одну привлекательную модель представляет собой возбуждаемый импульсами осциллятор Ван-дер-Поля-Дуффинга:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = B \sum \delta(t - nT).\tag{5.25}$$

Здесь основные обозначения те же, что и в (5.10), кроме того: β – параметр дополнительной нелинейности, введенной по типу осциллятора Дуффинга и отвечающий за *неизохронность* малых колебаний, B и T – амплитуда и период внешнего воздействия.

Внешнее воздействие, в отличие от (5.10), выбрано в виде очень коротких, но больших по амплитуде импульсов, которые математически можно записать в виде последовательности δ -функций Дирака. В этом случае в промежутке между импульсами динамика системы описывается автономным уравнением

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = 0,\tag{5.26}$$

¹⁹ В этом случае в формуле, аналогичной (5.11), «быстрые» колебания следует выбирать не на частоте сигнала, а на центральной, единичной частоте, детали см. в [36-39].

которое можно приближенно решить аналитически с помощью метода медленно меняющихся амплитуд. Дополнительное требование состоит в том, чтобы импульсы следовали достаточно редко, так что в промежутке между ними изображающая точка успеваала вернуться на предельный цикл автономной системы. В этом случае можно прийти к одномерному отображению для фазы φ_n , определенной непосредственно перед очередным импульсом:

$$\varphi_{n+1} = \Omega + \arctg\left(\frac{\sin \varphi_n - C}{\cos \varphi_n}\right) + \frac{3}{2}\beta \ln|1 - 2C \sin \varphi_n + C^2|, \quad (5.27)$$

где $\Omega = T(1 + 3\beta\lambda/2)$ – нормированный период воздействия, $C = B/(2\lambda^{1/2})$ – его нормированная амплитуда²⁰.

Полезно рассмотреть частные случаи. Случай $\beta = 0$ отвечает возбуждению импульсами осциллятора Ван-дер-Поля и приводит к *отображению Гласса*:

$$\theta_{n+1} = \Omega + \arctg\left(\frac{\sin \theta_n - C}{\cos \theta_n}\right). \quad (5.28)$$

Пусть теперь амплитуда возбуждения мала $C \ll 1$, а влияние неизохронности, наоборот, велико, так что параметр βC не мал. Тогда во втором слагаемом в (5.27) можно вообще пренебречь возмущением, а в третьем использовать приближенную формулу $\ln(1 - x) \approx -x$. В результате имеем

$$\theta_{n+1} = \Omega + \theta_n - 3\beta C \sin \theta_n. \quad (5.29)$$

Таким образом, можно прийти к стандартному синус-отображению окружности, непосредственно решая исходные уравнения. При этом в конкретной физической задаче могут появляться дополнительные физические требования (например, большая неизохронность), иначе такое приближение может не работать или приводить к другой форме отображения окружности.

5.4. Простейшие свойства синус-отображения окружности

Обсудим простейшие свойства синус-отображения окружности (5.22). При этом будем опираться на интерпретацию в виде дискретного фазового осциллятора и свойства осциллятора-прототипа в виде уравнения Адлера. Режиму захвата фазы в терминах отображения отвечают неподвижные точки, когда фаза является постоянной величиной. Для них из (5.22) получаем $\Delta - \mu \sin \varphi_0 = 0$.

²⁰ Подробный вывод можно найти, например, в [52].

Мультипликатор в неподвижной точке $\mu = f'(\varphi_0) = 1 - \mu \cos \varphi_0$. Приравнивая мультипликатор $+1$, находим условие седло-узловой (касательной) бифуркации: $\cos \varphi_0 = \pm \pi/2$ и, соответственно, $\mu = \pm \Delta$. При такой бифуркации устойчивая неподвижная точка сливается с неустойчивой, и обе они исчезают. В результате *синхронизация разрушается*. Таким образом, отображение окружности «наследует» основное свойство системы-прототипа – наличие языка синхронизации, граница которого как для уравнения Адлера, так и для отображения окружности, задается одинаковым условием $\mu = \pm \Delta$.

Впрочем, как и характерно для процедуры дискретизации, происходит расширение круга описываемых феноменов, которые обнаруживают новые особенности явления синхронизации. Обратимся к карте динамических режимов синус-отображения окружности (5.22), показанной на рис.5.3.

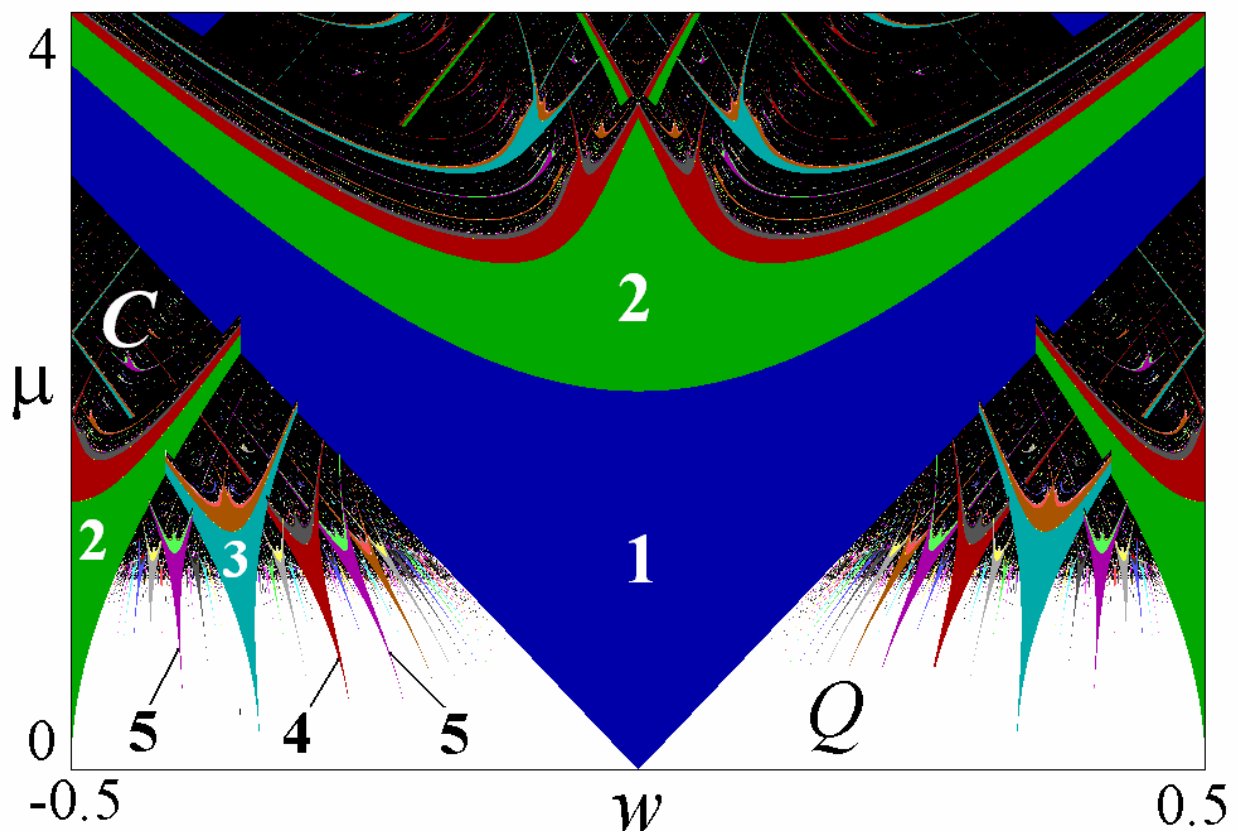


Рис.5.3. Карта динамических режимов синус-отображения окружности.

Здесь по оси абсцисс отложена величина числа вращения невозмущенной системы $w = \Delta/2\pi$. Можно видеть, во-первых, усложнение картины в основной области синхронизации. Внутри языка периода 1 теперь наблюдаются удвоения периода, а также структуры «crossroad area» и переход к хаосу. Во-вторых, возникают языки синхронизации *высшего порядка*, которые фиксируются на карте как режимы периода 2, 3, 4 и т.д. Это означает, что частота колебаний и частота

сигнала оказываются в некотором кратном отношении.

Отметим, что на рис.5.3 представлена *комбинированная карта*, на которой дополнительными цветами (с помощью расчета ляпуновского показателя) показаны квазипериодические Q и хаотические S режимы. Можно видеть, что при $\mu < 1$ языки Арнольда погружены в область квазипериодических режимов. С ростом параметра μ языки расширяются, при $\mu > 1$ создается ситуация *перекрывания языков* и возникает хаос.

5.5. Отображения на торе

Если динамика фаз описывается *двумерным отображением*, то в общем случае его можно представить в виде

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \Omega_1 + \varphi_n + f(\varphi_n, \psi_n), \\ \psi_{n+1} &= \Omega_2 + \psi_n + g(\varphi_n, \psi_n),\end{aligned}\tag{5.30}$$

где функции являются 2π -периодическими по обоим аргументам: $f(\varphi + 2\pi n, \psi + 2\pi m) = f(\varphi, \psi)$ и $g(\varphi + 2\pi n, \psi + 2\pi m) = g(\varphi, \psi)$.

Благодаря свойствам периодичности, динамика двумерного отображения для фаз может рассматриваться на квадрате $0 < \varphi < 2\pi, 0 < \psi < 2\pi$. При этом правую и левую стороны квадрата, а также верхнюю и нижнюю его стороны необходимо отождествить. Геометрически эту процедуру можно осуществить, «склеивая» соответствующие стороны квадрата, как показано на рис.5.4. В результате такой процедуры мы приходим к тому, что динамика фаз происходит на поверхности тора. И поэтому отображение (5.30) еще называют *отображением на торе*.

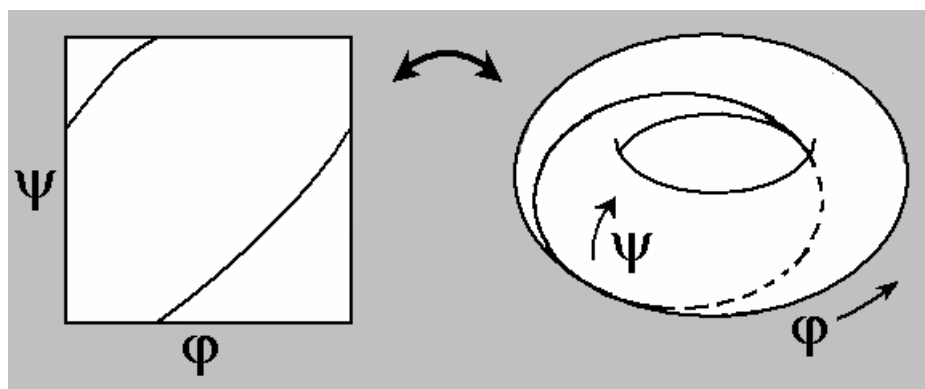


Рис.5.4. Представление фазовой динамики на торе. Показана одна траектория, которая выглядит как разрывная на квадрате (φ, ψ) и как непрерывная - на торе.

В отсутствии возмущений система (5.30) распадается на два несвязанных отображения поворота:

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \Omega_1 + \varphi_n, \\ \psi_{n+1} &= \Omega_2 + \psi_n.\end{aligned}\tag{5.31}$$

Таким образом, первая фаза вращается с угловой скоростью Ω_1 , а вторая – с угловой скоростью Ω_2 . Таким образом, систему нужно характеризовать уже двумя числами вращения $w_{1,2} = \Omega_{1,2} / 2\pi$.

Функции $f(\varphi, \psi)$ и $g(\varphi, \psi)$ задают возмущения отображений поворота (5.31). При этом возмущения могут отвечать как за внутреннее состояние индивидуальной подсистемы (по типу отображения окружности), так и за связь между подсистемами.

Для двумерных отображений на торе не удастся построить простую и достаточно универсальную единую модель, как в случае одной фазовой переменной. Действительно, разложение функций в *двумерный ряд Фурье* с учетом только первых членов приводит к отображению

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \Omega_1 + \varphi_n + a_1 \sin \varphi_n + b_1 \sin \psi_n + c_1 \sin \varphi_n + d_1 \cos \psi_n, \\ \psi_{n+1} &= \Omega_2 + \psi_n + a_2 \sin \psi_n + b_2 \sin \varphi_n + c_2 \sin \varphi_n + d_2 \cos \varphi_n.\end{aligned}\tag{5.32}$$

С помощью процедуры сдвига для переменных и частотных параметров, аналогичной описанной выше, можно прийти к системе

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \Omega_1 + \varphi_n + a_1 \sin \varphi_n + c_1 \sin \psi_n + d_1 \cos \psi_n, \\ \psi_{n+1} &= \Omega_2 + \psi_n + a_2 \sin \psi_n + c_2 \sin \varphi_n + d_2 \cos \varphi_n.\end{aligned}\tag{5.33}$$

Эти уравнения могут быть переписаны в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \Omega_1 + \varphi_n + a_1 \sin \varphi_n + \mu_1 \sin(\psi_n - \alpha), \\ \psi_{n+1} &= \Omega_2 + \psi_n + a_2 \sin \psi_n + \mu_2 \sin(\varphi_n - \beta).\end{aligned}\tag{5.34}$$

Полученная модель содержит восемь существенных параметров. Столь большое их число обусловлено также и тем, что подсистемы могут быть неидентичными *по своим внутренним параметрам*, а, кроме того, *несимметрично связанными*. Такой проблемы нет в случае единственной фазовой переменной.

Постараемся уменьшить число параметров. Пусть индивидуальные подсистемы идентичны, за исключением собственных частот $\Omega_{1,2}$, а связь симметрична. Тогда приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \Omega_1 + \varphi_n + a \sin \varphi_n + \mu \sin(\psi_n - \alpha), \\ \psi_{n+1} &= \Omega_2 + \psi_n + a \sin \psi_n + \mu \sin(\varphi_n - \alpha).\end{aligned}\tag{5.35}$$

В этом случае параметр a отвечает за возмущение динамики каждой подсистемы, μ есть величина связи, а α отвечает за фазовый сдвиг при действии связи.

Тем не менее, полученная модель (5.35), хотя и обладает высокой степенью общности, оказывается все же не столь универсальной, как синус-отображение

окружности. Одна из причин состоит в том, что в случае двух взаимодействующих подсистем связь может быть организована также через разность фаз переменных, что приводит, например, к такой форме отображения на торе:

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \Omega_1 + \varphi_n + a \sin \varphi_n + \mu \sin(\varphi_n - \psi_n), \\ \psi_{n+1} &= \Omega_2 + \psi_n + a \sin \psi_n + \mu \sin(\psi_n - \varphi_n).\end{aligned}\tag{5.36}$$

Используя соответствующие тригонометрические формулы, нетрудно показать, что в этом случае функции возмущений содержат члены типа $\sin \varphi_n \cos \psi_n$, то есть члены второго порядка в разложении в двумерный ряд Фурье.

Определенное значение может иметь и *геометрия связи*. Действительно, три осциллятора можно соединить в цепочку, а можно – в кольцо, что будет приводить к разным моделям.

Оказывается также, что если связь между осцилляторами не содержит *диссипативной* компоненты, то член, отвечающий за *реактивное* взаимодействие, может содержать функции удвоенного угла, т.е. члены типа $\sin 2\varphi_n$. (Подробнее см. раздел 5.10 и соответствующие ссылки.)

Таким образом, в случае динамики на торе не удастся построить простую и столь универсальную модель, как в случае динамики на окружности. Поэтому можно идти двумя путями. Во-первых, можно выбирать те или иные комбинации коэффициентов в модели (5.33) или (5.34), руководствуясь чисто формальными соображениями простоты. Во-вторых, можно прибегать к дополнительной физической мотивации в постановке задачи. Мы рассмотрим оба этих подхода.

5.6. Отображение Кима-Остлунда

В работах [44,45] была предложена и достаточно детально исследована модель в виде *отображения Кима-Остлунда (Kim-Ostlund)*, которое представляет собой два связанных простейшим образом отображения поворота:

$$\begin{aligned}\psi_{n+1} &= \Omega_1 + \psi_n - \mu \sin \varphi_n, \\ \varphi_{n+1} &= \Omega_2 + \varphi_n - \mu \sin \psi_n.\end{aligned}\tag{5.37}$$

Его особенность состоит в том, что возмущение данной переменной содержит только члены, относящиеся к другой.

Далее будем использовать нормированные частотные параметры, так что $\Omega_{1,2} = 2\pi w_{1,2}$. Величины $w_{1,2}$ имеют смысл чисел вращения для фазовых переменных при выключенной связи. Соответственно, интересно изучить устройство плоскости параметров (w_1, w_2) .

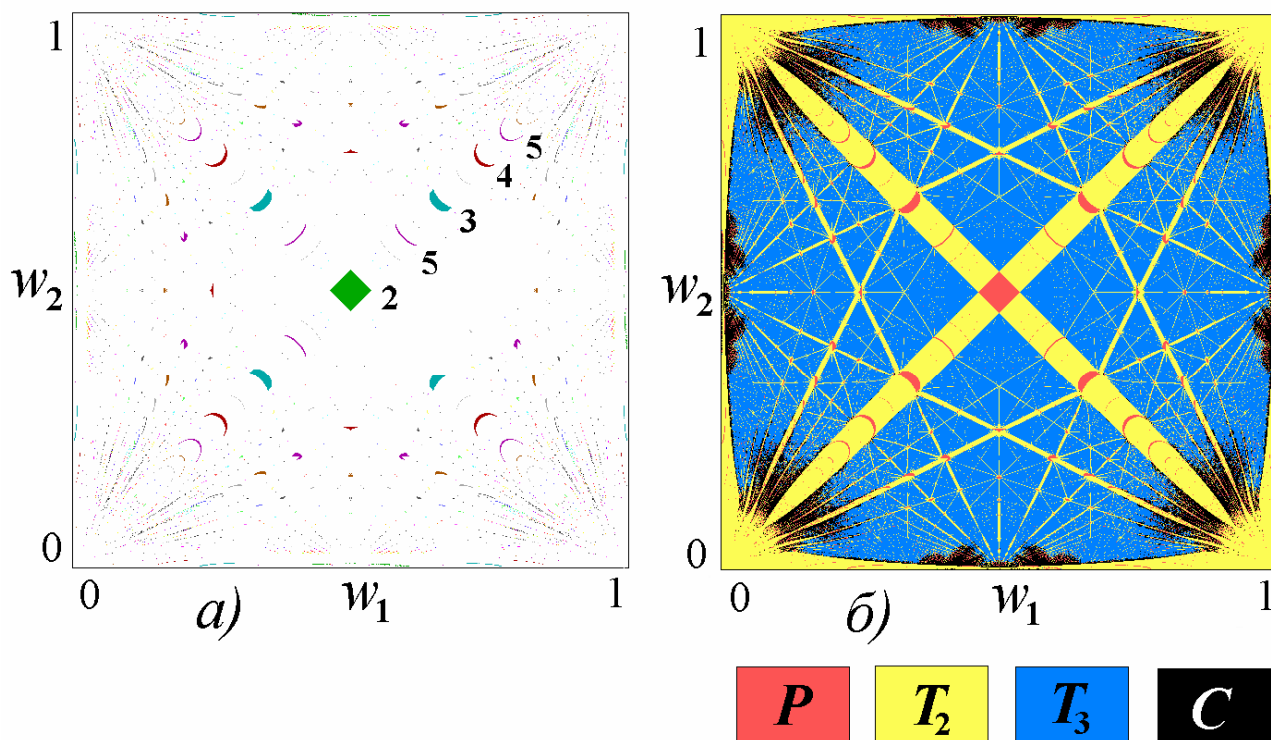


Рис.5.5. Карта динамических режимов (а) и карта ляпуновских показателей (б) отображения Кима-Остлунда, $\mu = 0.7$. Цифрами указаны периоды некоторых резонансов.

Карты динамических режимов и ляпуновских показателей отображения (5.37) на плоскости (w_1, w_2) для уровня связи $\mu = 0.7$ показаны на рис.5.5. В этом случае могут наблюдаться периодические режимы P , которым отвечают все отрицательные ляпуновские показатели, двухчастотные режимы T_2 с одним нулевым показателем, трехчастотные квазипериодические режимы T_3 с двумя нулевыми показателями, а также хаос C – при наличии хотя бы одного положительного показателя.

При малой связи в системе (5.37) доминируют режимы трехчастотной квазипериодичности, поскольку вращения каждой переменной «почти» независимы. С ростом связи, при ее «умеренном» значении, чему отвечает рис.5.5, возникают достаточно выраженные области как двухчастотных, так и периодических режимов, а также небольшие области хаоса.

Возникновение двухчастотных T_2 и периодических P режимов связано с определенными *резонансами* в системе. При этом при выполнении *одного* резонансного условия может возникнуть двухчастотная квазипериодичность, а при выполнении *двух* резонансных условий – периодический режим. Обсудим этот вопрос подробнее.

Двумерная фазовая система имеет характерные частоты, определяемые числами вращения w_1 и w_2 . Они могут находиться в некотором *резонансом со-*

отношении:

$$nw_1 + mw_2 = p. \quad (5.38)$$

Резонанс будет возникать, если n , m и p – целые числа.

Если собственные частоты w_1 и w_2 фиксированы, то соотношение (5.38) представляет собой *Диофантово уравнение*, т.е. уравнение, которое надо разрешить в целых числах относительно n , m и p . Эти величины и определяют тип резонанса. При этом, чем меньше величины n , m и p , тем более *сильным* является резонанс.

На соотношение (5.38) можно посмотреть и несколько иначе. Фиксируем набор резонансных чисел (n, m, p) . Тогда уравнение (5.38) на плоскости чисел вращения задает прямую линию. Вдоль этой линии выполняется резонансное условие, а значит, возникают резонансные колебания. Поскольку это условие одно, то вдоль линии (5.38) будут возникать полосы двухчастотных резонансных режимов, которым на карте ляпуновских показателей будут отвечать области с одним нулевым показателем. Чем сильнее резонанс, тем более широкими будут эти полосы.

Для примера на рис.5.6 показано несколько линий, заданных уравнением (5.38) с небольшими (n, m, p) , в частности:

$$w_1 - w_2 = 0, \quad w_1 + w_2 = 1, \quad 2w_1 - w_2 = 0, \quad w_1 - 2w_2 = 0, \\ w_1 + 2w_2 = 1, \quad w_1 - 2w_2 = -1, \dots$$

На пересечении этих линий лежат основные резонансы, которым на плоскости (w_1, w_2) отвечают области периодических режимов. В результате возникает структура *резонансной паутины Арнольда (Arnold web)*²¹, которая качественно представлена на рис.5.6. Можно видеть, что эта картина хорошо согласуется с устройством ляпуновской карты на рис.5.5б.

В случае отображения Кима-Остлунда в соответствии с картой на рис.5.5а самый сильный резонанс отвечает области периода 2 и имеет числа вращения $w_1 = w_2 = 1/2$. Такой резонанс характеризуется комбинированным числом вращения $(1,1)/2$. Этот резонанс лежит на пересечении резонансных линий $w_1 - w_2 = 0$ и $w_1 + w_2 = 1$. На ляпуновской карте (рис.5.5б) в окрестности этих линий возникают две самые широкие полосы двухчастотных режимов. Внутри этих полос, в свою очередь, наблюдается семейство наиболее выраженных периодических резонансов с совпадающими числами вращения $w_1 = w_2$, отмечен-

²¹ По поводу использования этого термина см. обсуждение в конце раздела 4.6.

ных на карте цифрами 2, 3, 4, ... в соответствии с их периодами. Это, своего рода, «главная последовательность» резонансов отображения Кима-Остлунда.

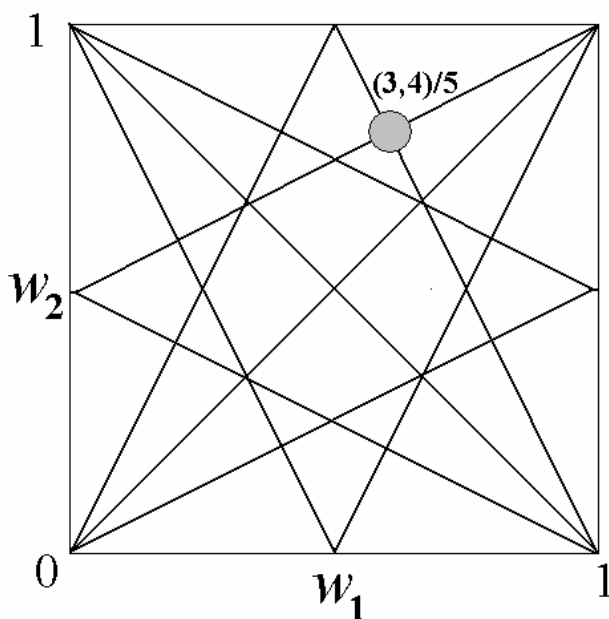


Рис.5.6. Схематическая иллюстрация построения резонансной паутины Арнольда. Кружочком показана область локализации резонанса $(3,4)/5$.

Пример более слабого периодического резонанса другого типа в структуре резонансной паутины показан кружочком на рис.5.6. Ему отвечает комбинационное число вращения $(3,4)/5$. Резонанс лежит на пересечении линий

$$w_1 - 2w_2 = -1, \quad 2w_1 + w_2 = 2. \quad (5.39)$$

Нетрудно проверить, что значения $w_1 = 3/5$ и $w_2 = 4/5$ удовлетворяют уравнениям (5.39), т.е. пересечение линий (5.39) действительно дает резонанс $(3,4)/5$.

Следует отметить, что периодические режимы занимают некоторые конечные области на плоскости чисел вращения. Поэтому через каждую такую область проходят не только две линии $nw_1 + mw_2 = p$, порождающие данный резонанс, а и другие линии двухчастотных резонансов. В результате вокруг периодических областей возникают характерные «звезды» из лучей двухчастотных режимов. Пример такой структуры представлен на рис.5.8а.

Более детально картина резонансов показана на рис.5.7 для увеличенного значения параметра связи $\mu = 0.9$. Используются три варианта представления: карта динамических режимов (а), карта ляпуновских показателей (б), а также картина линий седло-узловых бифуркаций для нескольких основных резонансов (в). Рост связи привел к некоторому увеличению размеров точных резонансов и вытеснению областей трехчастотной квазипериодичности хаосом.

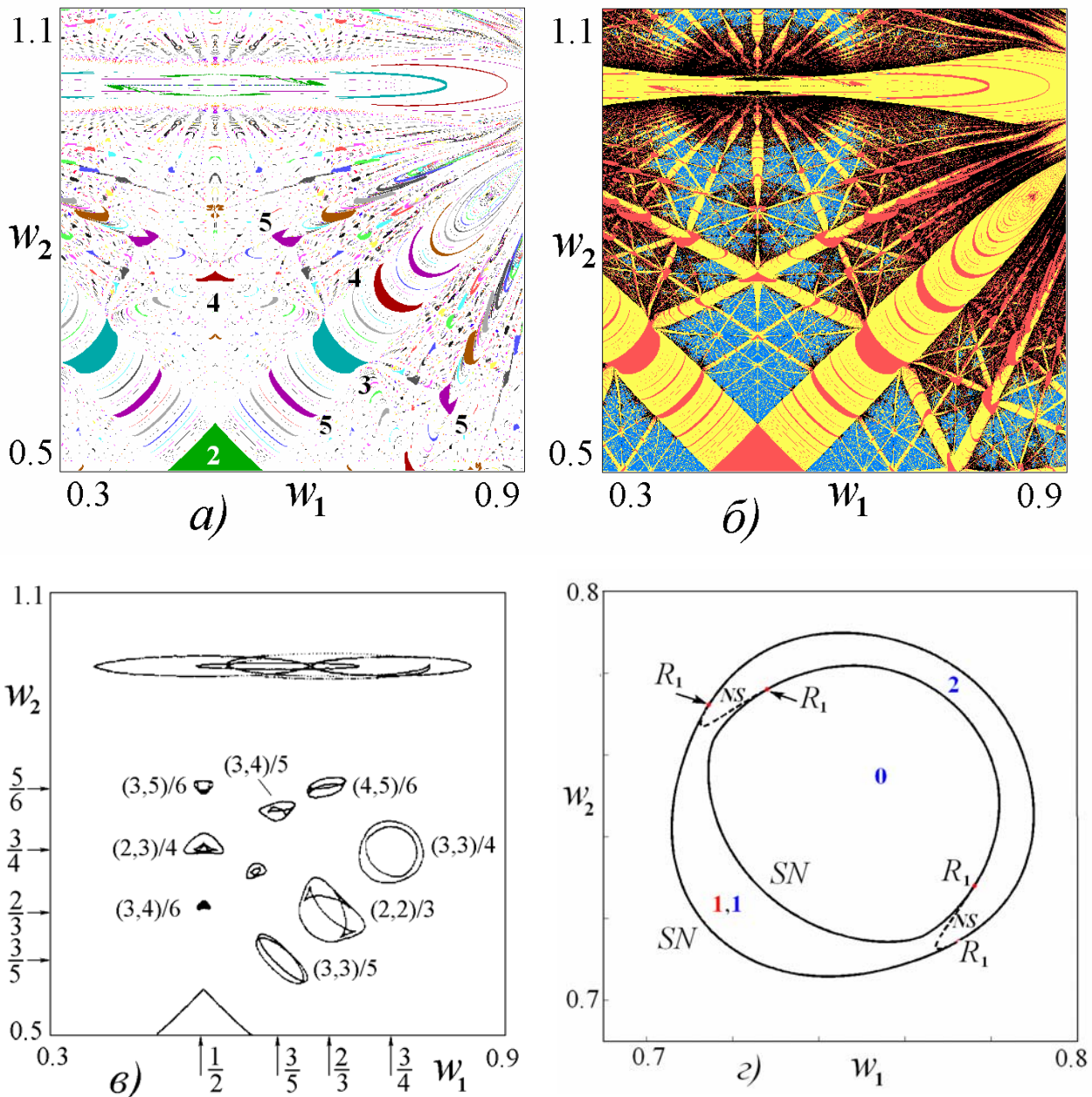


Рис.5.7. Карта динамических режимов (а), карта ляпуновских показателей (б), бифуркационные портреты некоторых резонансов (в), бифуркационный портрет простейшего резонанса (г) для отображения Кима-Остлунда, $\mu = 0.9$. Фрагмент (в) построен с учетом материалов [45].

На «бифуркационной карте» (рис.5.7в) можно видеть семейство периодических резонансов с совпадающими числами вращения: $(3,3)/5$, $(2,2)/3$ и т.д., а также более слабые резонансы, включая и $(3,4)/5$. Картина этих резонансов становится более понятной, если отложить по осям координат значения чисел вращения $1/2$, $2/3$, $3/4$, $3/5 \dots$ в соответствии с *последовательностью Фарея*²²,

²² Ряд Фарея позволяет упорядочить резонансы в соответствии с их «силой» [8].

как показано на рис.5.7в.

Резонансы на рис.5.7в устроены по-разному. *Простейший резонанс* выглядит так, как показано на рис.5.7г на примере резонанса (3,3)/4. На этом рисунке даны только линии локальных бифуркаций, ограничивающие область существования устойчивого периодического режима. Они представляют собой две линии седло-узловых бифуркаций SN , «вложенных» друг в друга. Эти линии, в свою очередь, соединяются линиями бифуркации Неймарка-Сакера NS . Линии бифуркаций Неймарка-Сакера примыкают к линиям седло-узловых бифуркаций в точках резонанса 1:1 R_1 . Числа на рис.5.7г отвечают числу неподвижных точек, причем красным цветом показано количество устойчивых, а синим – неустойчивых точек. Таким образом, область полной синхронизации представляет собой половину «бублика», образованного линиями седло-узловых бифуркаций. Внутри этой области сосуществуют устойчивая и неустойчивая неподвижные точки. Верхняя граница этой области дается линиями бифуркаций Неймарка-Сакера, на которых одна неподвижная точка теряет устойчивость, и от него отделяется устойчивая инвариантная кривая. Поэтому вторая часть «бублика» ограничивает область сосуществования двух неустойчивых неподвижных точек. На карте динамических режимов такие простейшие резонансы отображаются в виде небольших «полумесяцев». Они хорошо просматриваются на «главной последовательности» на рис.5.7а и 5.7б.

Картина основных бифуркаций для более сложно устроенного резонанса (3,4)/5 показана на рис.5.8 вместе с соответствующей ляпуновской картой. В этом случае на линиях седло-узловых бифуркаций дополнительно располагаются четыре точки сборки, в которых эти линии сходятся, образуя острия по закону «трех вторых». Три линии бифуркаций Неймарка-Сакера соединяют линии седло-узловых бифуркаций и имеют контакт с ними в точках типа R_1 . Такая бифуркационная структура разбивает плоскость параметров на области с разным числом устойчивых и неустойчивых циклов, которые показаны на рис.5.8б цифрами красного и синего цвета. В результате формируется область устойчивого периодического режима, которая фиксируется на карте ляпуновских показателей рис.5.8а. На этой карте выявляется и возможность мультистабильности вблизи нижней границы области периодического режима. Здесь этот режим сосуществует с квазипериодическими, что выражается в изрезанности границы на карте²³. Рис.5.8а демонстрирует также характерную «звезду» из

²³ Карты строятся с фиксированными начальными условиями. При наличии мультистабиль-

большого числа полос двухчастотных режимов, отвечающих различным резонансам (5.38), которые могут классифицироваться набором целых чисел (m, n, p) .

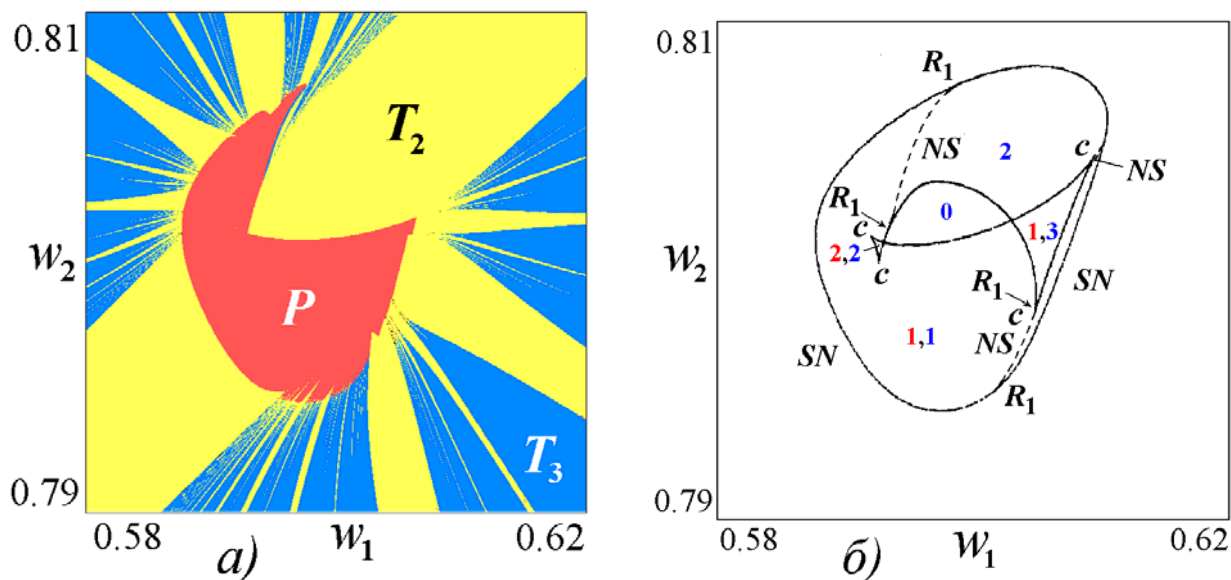


Рис.5.8. Карта ляпуновских показателей (а) и бифуркационный портрет (б) резонанса $(3,4)/5$ отображения Кима-Остлунда, $\mu = 0.7$; рис. (б) построен по результатам работы [45]. Цифры означают число равновесий: красные – устойчивых, синие – неустойчивых.

Следует отметить, что мы представили только основные черты бифуркационной картины двух типов резонансов. Более полная картина очень сложна и включает в себя большое количество нелокальных бифуркаций, бифуркаций инвариантных кривых различных типов и связанных с ними бифуркаций ко-размерности два. Детали и подробный анализ можно найти в [44-47].

Бифуркационные портреты резонансов на рис.5.7в, на первый взгляд, кажутся достаточно разнообразными. Однако, как обосновывается в [44,45], в случае небольшой связи картина линий седло-узловых бифуркаций представляет собой *проекцию торов* на плоскость параметров. Действительно, рис.5.7г дает простейшую проекцию тора, «лежащего» плашмя. В свою очередь, рис.5.8б отвечает проекции немного развернутого в пространстве тора, что приводит к появлению точек сборки. (Появление точек сборки при проектировании тора обсуждается в книге В.И. Арнольда «Теория катастроф» [48].) Интересно, что к аналогичной картине может приводить и увеличение связи. Так, в [47] представлены иллюстрации для резонанса $(1,1)/3$, когда с ростом связи на простом резонансе в форме овалов возникают четыре характерные сборки.

При дальнейшем росте связи такая картина нарушается. На бифуркацион-

ности при вариации параметров изображающая точка может попадать на тот или иной режим, в результате чего и возникает изрезанность границы области периодического режима.

ных линиях возникают дополнительные пары сборок, а также возникают бифуркации удвоения периода и далее хаос.

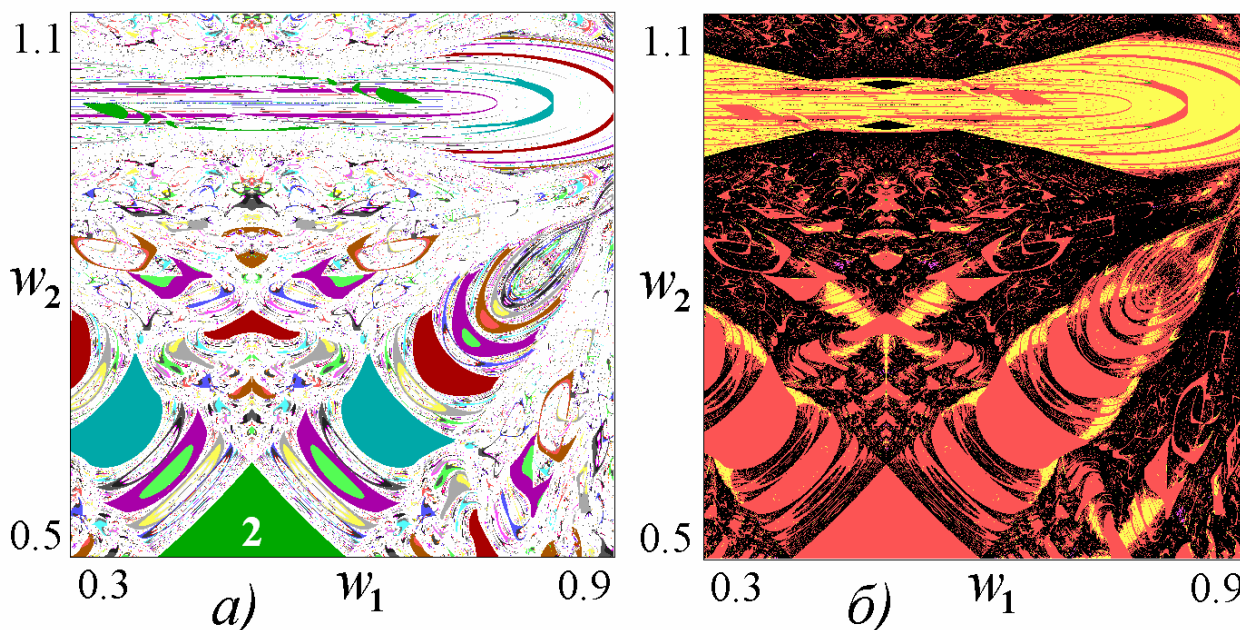


Рис.5.9. Карта динамических режимов и карта ляпуновских показателей отображения Кима-Остлунда, $\mu = 1.18$.

Рис.5.9 как раз иллюстрирует картину для достаточно большой связи $\mu = 1.18$. Можно отметить следующие изменения. Области трехчастотных режимов исчезают и вытесняются хаосом. Более того, почти полностью разрушены области двухчастотных торов, за исключением режимов, лежащих вблизи значения $w_2 = 1$. Области периодических режимов увеличились в размере. Внутри многих точных резонансов возникли области удвоенных периодов. На карте ляпуновских показателей рис.5.9б можно видеть, что внутри некоторых резонансов возникают области хаоса, и что на «главной последовательности», фактически, создается ситуация перекрытия резонансов.

5.7. Отображение на торе: три диссипативно связанных фазовых осциллятора

Как мы отмечали, для динамики на торе нет столь универсальной модели, как в случае динамики на окружности. Поэтому целесообразно развить подход, основанный на конструировании моделей в виде дискретных осцилляторов, отталкивающийся от физической постановки задачи. Это, во-первых, позволит конкретизировать вид отображений и, в какой-то мере, классифицировать их, а, во-вторых, – придать четкий физический смысл используемым параметрам.

Обратимся поэтому к простейшей физической задаче, в которой возникает

ситуация трехчастотного взаимодействия, – цепочке из трех *диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля*. Исходные уравнения в этом случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \omega_1^2 x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + \omega_2^2 y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + \omega_3^2 z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) &= 0.\end{aligned}\tag{5.40}$$

Здесь λ – параметр возбуждения автономных осцилляторов, ω_i – собственная частота i –го осциллятора, μ – коэффициент диссипативной связи. Нормировку уравнений всегда можно выбрать так, чтобы частота первого осциллятора равнялась единице. Кроме того, введем удобные для дальнейшего обозначения

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2^2 = 1 + \Delta_{21}, \quad \omega_3^2 = 1 + \Delta_{31}.\tag{5.41}$$

Здесь параметры Δ_{21} и Δ_{31} характеризуют отстройку собственных частот второго и третьего осцилляторов от собственной частоты первого осциллятора. По своему смыслу эти параметры могут быть как положительными, так и отрицательными.

Действуя стандартным образом в рамках метода медленно меняющихся амплитуд, можно получить следующие уравнения для относительных фаз осцилляторов²⁴

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\frac{\Delta_{21}}{2} - \mu \sin \theta + \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{\Delta_{32}}{2} - \mu \sin \varphi + \frac{\mu}{2} \sin \theta,\end{aligned}\tag{5.42}$$

где θ – разность фаз первого и второго, φ – разность фаз второго и третьего осцилляторов соответственно; параметр $\Delta_{32} = \Delta_{31} - \Delta_{21}$ характеризует частотную расстройку третьего осциллятора относительно второго. Как всегда при использовании метода медленно меняющихся амплитуд, параметр λ считается малым, а все параметры в (5.42) нормированы на его величину.

Выполняя дискретизацию системы (5.42) и используя перенормировку (5.21), получаем *дискретную фазовую модель* трех диссипативно связанных осцилляторов:

²⁴ В случае диссипативной связи осцилляторов этот вывод можно найти в [39,43], см. также Приложение 2.

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= 2\pi w_1 + \theta_n - \mu \sin \theta_n + \frac{\mu}{2} \sin \varphi_n, \\ \varphi_{n+1} &= 2\pi w_2 + \varphi_n - \mu \sin \varphi_n + \frac{\mu}{2} \sin \theta_n.\end{aligned}\tag{5.43}$$

Здесь параметр w_1 имеет смысл числа вращения, характеризующего собственную частоту второго осциллятора (частота первого фиксирована), а w_2 – относительную частоту второго и третьего осцилляторов.

Уравнение (5.43) дает пример отображения на торе. Карты динамических режимов и ляпуновских показателей этого отображения на плоскости чисел вращения (w_1, w_2) показаны на рис.5.10а,б для значения параметра связи $\mu = 0.6$. На рис.5.10в представлены примеры фазовых портретов, иллюстрирующие некоторые возможные колебательные режимы. Портреты построены для точек, отмеченных соответствующими цифрами на ляпуновской карте.

Обсудим представленные иллюстрации. В области P отображение имеет устойчивую неподвижную точку (период 1 на рис.5.10а). В этом случае значения относительных фаз осцилляторов θ_n и φ_n не меняются во времени, и наблюдается *полная синхронизация* всех трех осцилляторов. На физическом языке это означает, что произошел взаимный захват осцилляторов с соотношением частот 1:1:1.

Фазовый портрет (1) на рис.5.10в соответствует выходу из области полной синхронизации через ее нижнюю границу. В этом случае возникает *устойчивая инвариантная кривая*, которой отвечает решение со слабо осциллирующей фазой θ . Это означает, что происходит *частичный захват* первого и второго осцилляторов: их относительная фаза не постоянна, но ее колебания носят характер осцилляций с небольшой амплитудой. Отметим, что фаза θ на вставке (1) колеблется около значения $\theta = 0$, так что наблюдается *синфазная синхронизация* осцилляторов.

Фазовый портрет (2) соответствует выходу через левую границу области полной синхронизации. В результате возникает устойчивая инвариантная кривая, отвечающая частичному захвату второго и третьего осцилляторов, когда небольшие колебания совершает уже фаза φ . Здесь тоже наблюдается синфазная синхронизация.

При удалении от области полной синхронизации инвариантная кривая меняется незначительно (фазовый портрет (3)), а затем на ней могут возникать полные резонансы «главной» последовательности более высокого порядка, например, периода 3, см. вставку (4). Физически это отвечает полному захвату

осцилляторов, но с кратным соотношением частот.

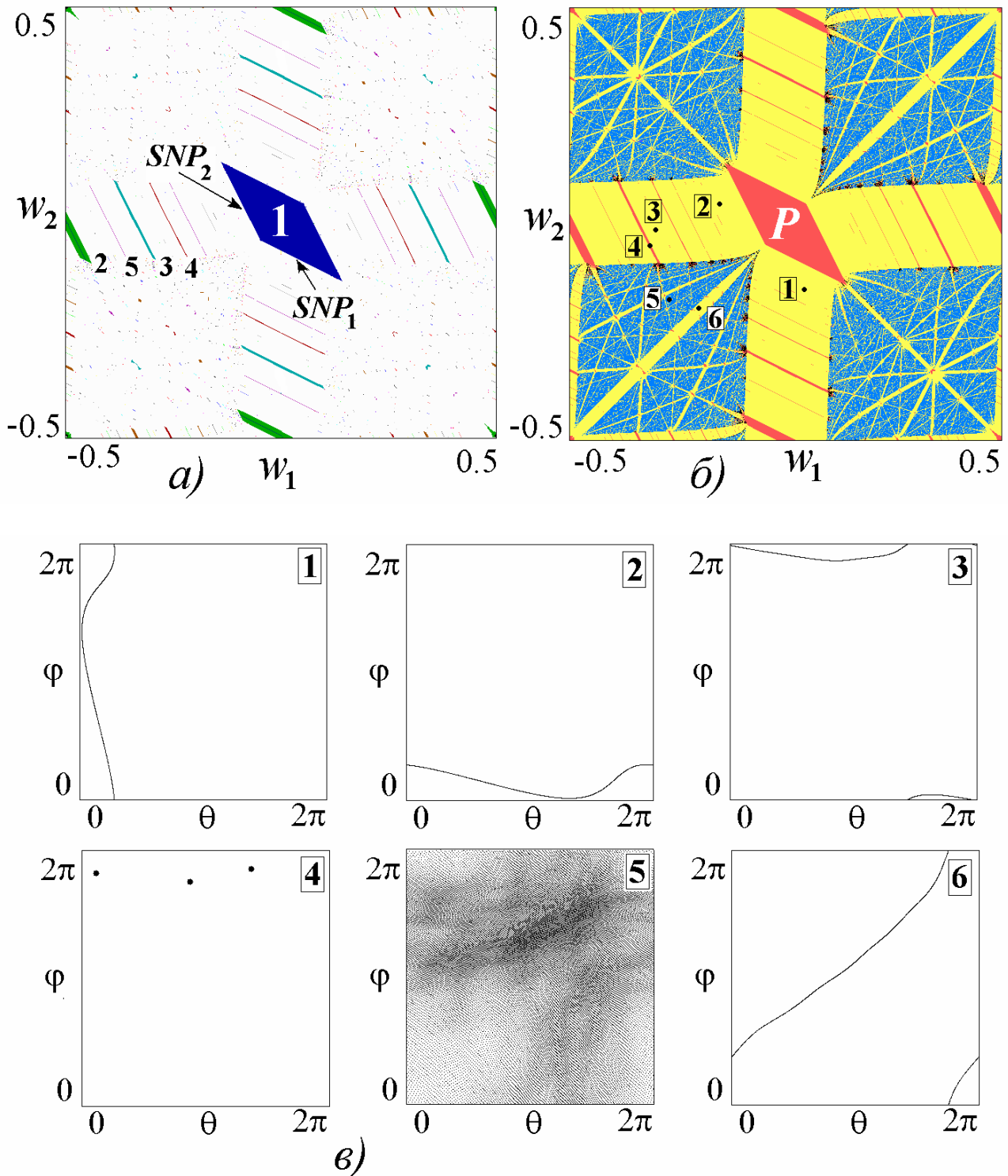


Рис.5.10. Карта динамических режимов (а), карта ляпуновских показателей (б) и фазовые портреты (в) для трех диссипативно связанных дискретных фазовых осцилляторов на плоскости чисел вращения; $\mu = 0.6$; SNP – вырожденные седло-узловые бифуркации неподвижных точек, отвечающие за возникновение устойчивых инвариантных кривых.

Если уменьшить второе число вращения, то устойчивая инвариантная кривая сталкивается с *неустойчивой инвариантной кривой* и исчезает в результате соответствующей *квазипериодической седло-узловой бифуркации*. В результате

рождается трехчастотный режим, вставка (5). Теперь тор является эргодическим – траектории всюду плотно покрывают его поверхность. Наконец, внутри области трехчастотных режимов возникают различные резонансные двухчастотные режимы, один из простейших примеров дан на вставке (6).

Интересно сопоставить полученную картину режимов с динамикой отображения Кима-Остлунда (5.37). При этом обнаруживаем определенные аналогии и, в то же время, некоторые отличия. На рис.5.10 также можно видеть характерную *резонансную паутину Арнольда*. Однако, для трех диссипативно связанных осцилляторов определяющую роль в организации плоскости параметров играет режим неподвижной точки (периода один), отсутствующий в системе (5.37). Если перевести последнее утверждение на “физический язык”, то это означает, что полная взаимная синхронизация, когда относительные фазы осцилляторов постоянны, в отображении Кима-Остлунда невозможна.

Второе существенное отличие – появление двух очень широких полос двухчастотных режимов, на пересечении которых и лежит область периода один. Эти полосы возникают около нулевых значений чисел вращения:

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0. \quad (5.44)$$

В соответствии с их определением, первое резонансное условие (5.44) означает равенство собственных частот первого и второго осцилляторов $\omega_1 = \omega_2$, а второе – равенство собственных частот второго и третьего осцилляторов $\omega_2 = \omega_3$. Таким образом, две эти полосы отвечают колебательным режимам частичного попарного захвата осцилляторов: первый-второй и второй-третий, что согласуется с представленными выше портретами на рис.5.10в. В эти полосы встроена система полных резонансов высшего порядка. Периоды наиболее сильных резонансов такого типа указаны на рис.5.10а. Отметим, что они не выглядят «традиционными» серпами, а имеют вид узких вытянутых полос.

Сама область периода 1 имеет своеобразное бифуркационное устройство, не совпадающее с резонансами типа рис.5.7г и рис.5.8б. На картах эта область представлена параллелограммом. В силу простоты отображения (5.43), ее границы легко найти аналитически. Действительно, для неподвижных точек (θ_0, φ_0) из (5.43) можно получить выражения для синусов относительных фаз:

$$\begin{aligned} 2w_1 + w_2 &= \frac{3\mu}{4\pi} \sin \theta_0, \\ w_1 + 2w_2 &= \frac{3\mu}{4\pi} \sin \varphi_0. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Условие обращения хотя бы одного из синусов в единицу отвечает седло-

узловой бифуркации. Таким образом, параллелограмм на рис.5.10 образован линиями

$$\begin{aligned} 2w_1 + w_2 &= \pm \frac{3\mu}{4\pi}, \\ w_1 + 2w_2 &= \pm \frac{3\mu}{4\pi}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Внутри этого параллелограмма уравнения (5.45) решаются аналитически:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \arcsin\left(\frac{4\pi}{3\mu}(2w_1 + w_2)\right), \quad \theta_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{4\pi}{3\mu}(2w_1 + w_2)\right), \\ \varphi_1 &= \arcsin\left(\frac{4\pi}{3\mu}(w_1 + 2w_2)\right), \quad \varphi_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{4\pi}{3\mu}(w_1 + 2w_2)\right). \end{aligned} \quad (5.47)$$

Таким образом, на фазовой плоскости неподвижные точки всегда лежат в вершинах прямоугольника (θ_1, φ_1) , (θ_1, φ_2) , (θ_2, φ_1) , (θ_2, φ_2) , рис.5.11. При этом одна из неподвижных точек устойчива, а три – нет (две из них являются седловыми). При вариации параметров w_1, w_2 левые части (5.45) меняются, и неподвижные точки сближаются в соответствии с одним из двух сценариев, показанных на рис.5.11. При выполнении условий (5.46) неподвижные точки *одновременно* попарно сливаются и исчезают. Таким образом, особенность данной задачи в том, что область полной синхронизации ограничена линиями своего рода *вырожденных* седло-узловых бифуркаций.

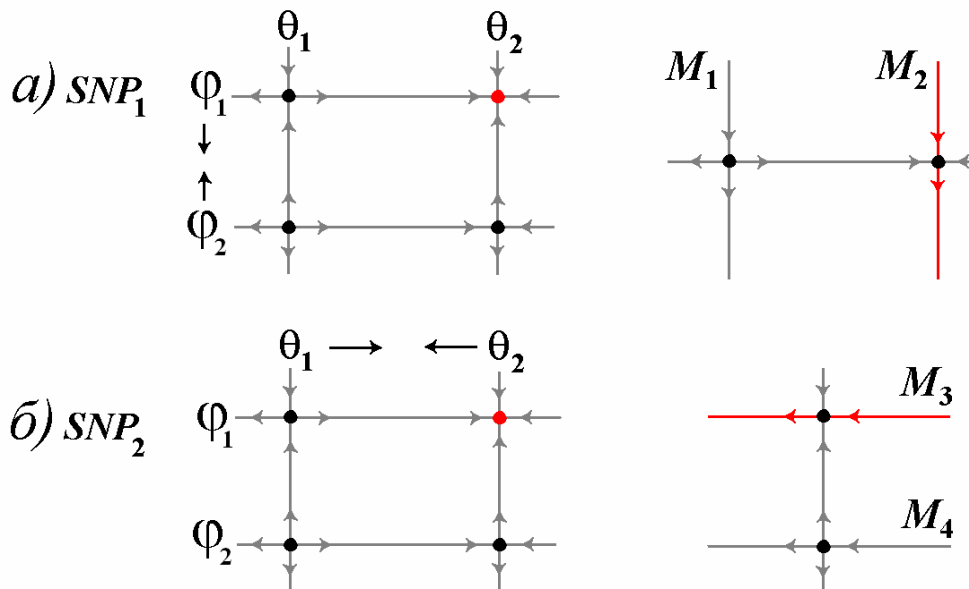


Рис.5.11. Качественная иллюстрация расположения неподвижных точек отображения (5.43) и их эволюция при переходе через линии вырожденных седло-узловых бифуркаций.

Важная особенность отображения на торе (5.43) состоит в том, что в результате седло-узловых бифуркации неподвижных точек из их многообразий возникают устойчивая и неустойчивая инвариантные кривые, что качественно иллюстрирует рис.5.11. При этом сценарий рис.5.11а отвечает режиму на вставке (1) рис.5.10в, а сценарий рис.5.11б соответствует режиму на вставке (2).

Как вытекает из (5.47), размер резонансной области для основного резонанса пропорционален параметру связи μ . Это хорошо видно из рис.5.12, отвечающего увеличенному значению $\mu = 0.9$. Рост параметра связи приводит к увеличению зоны основного резонанса. Соответственно, увеличиваются полосы частичного захвата осцилляторов и размеры встроенных в них областей полных резонансов высшего порядка. Как видно из рис.5.12б, трехчастотные режимы разрушаются, и их вытесняет хаос. В то же время вдоль линии $w_2 = -w_1$ выявляются резонансы характерной «серповидной» формы.

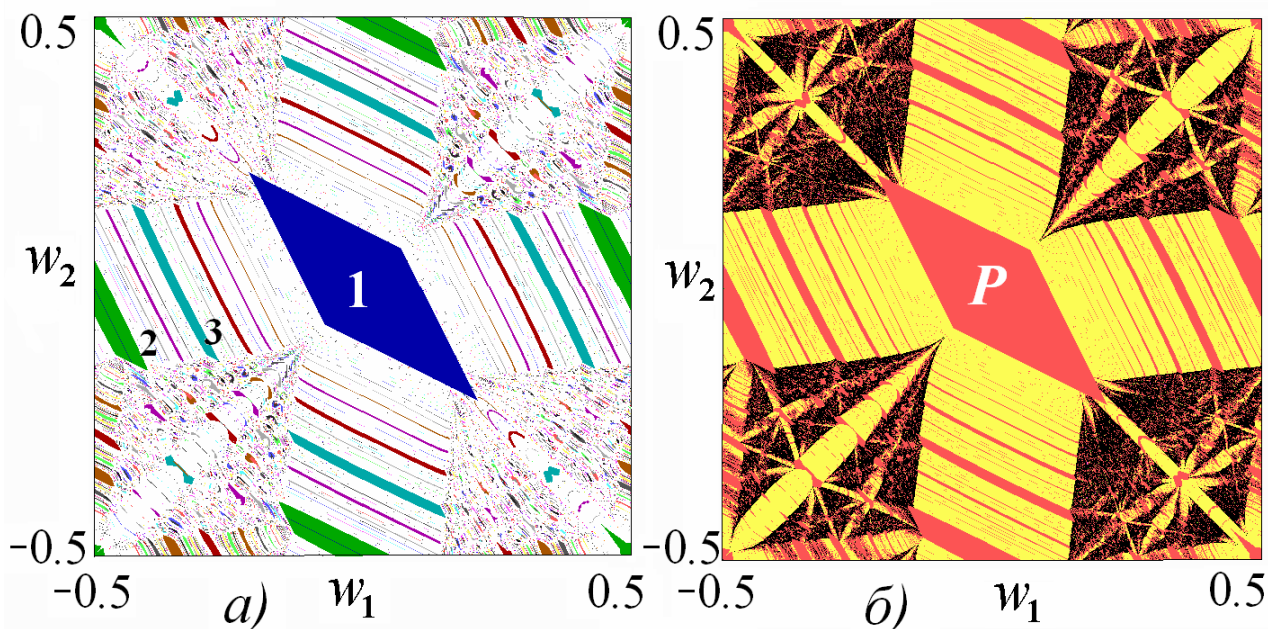


Рис.5.12. Карты динамических режимов (а) и ляпуновских показателей (б) для трех диссипативно связанных дискретных фазовых осцилляторов на плоскости чисел вращения; параметр связи $\mu = 0.9$.

При исследовании взаимодействующих осцилляторов традиционный интерес представляет также устройство плоскости параметров собственная частота – величина связи. Для двух осцилляторов именно на такой плоскости наблюдается язык Арнольда.

В случае трех осцилляторов с физической точки зрения удобно зафиксировать две собственные частоты, например, частоту первого и третьего осцилляторов, и менять частоту центрального. Это требует некоторого изменения используемого набора параметров. Напомним, что числа вращения w_1 и w_2 харак-

теризуют расстройки частот первого-второго и второго-третьего осцилляторов. Поскольку частота первого осциллятора фиксирована, то w_1 , фактически, дает частоту второго осциллятора. Чтобы одновременно зафиксировать собственную частоту третьего осциллятора, введем $w_3 = w_1 + w_2$. Тогда w_3 и будет представлять собой частоту автономного третьего осциллятора. Отображение (5.43) в этих параметрах примет вид:

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= 2\pi w_1 + \theta_n - \mu \sin \theta_n + \frac{\mu}{2} \sin \varphi_n, \\ \varphi_{n+1} &= 2\pi(w_3 - w_1) + \varphi_n - \mu \sin \varphi_n + \frac{\mu}{2} \sin \theta_n.\end{aligned}\tag{5.48}$$

На рис.5.13 представлены карты режимов на плоскости (w_1, μ) при фиксированных значениях частоты третьего осциллятора.

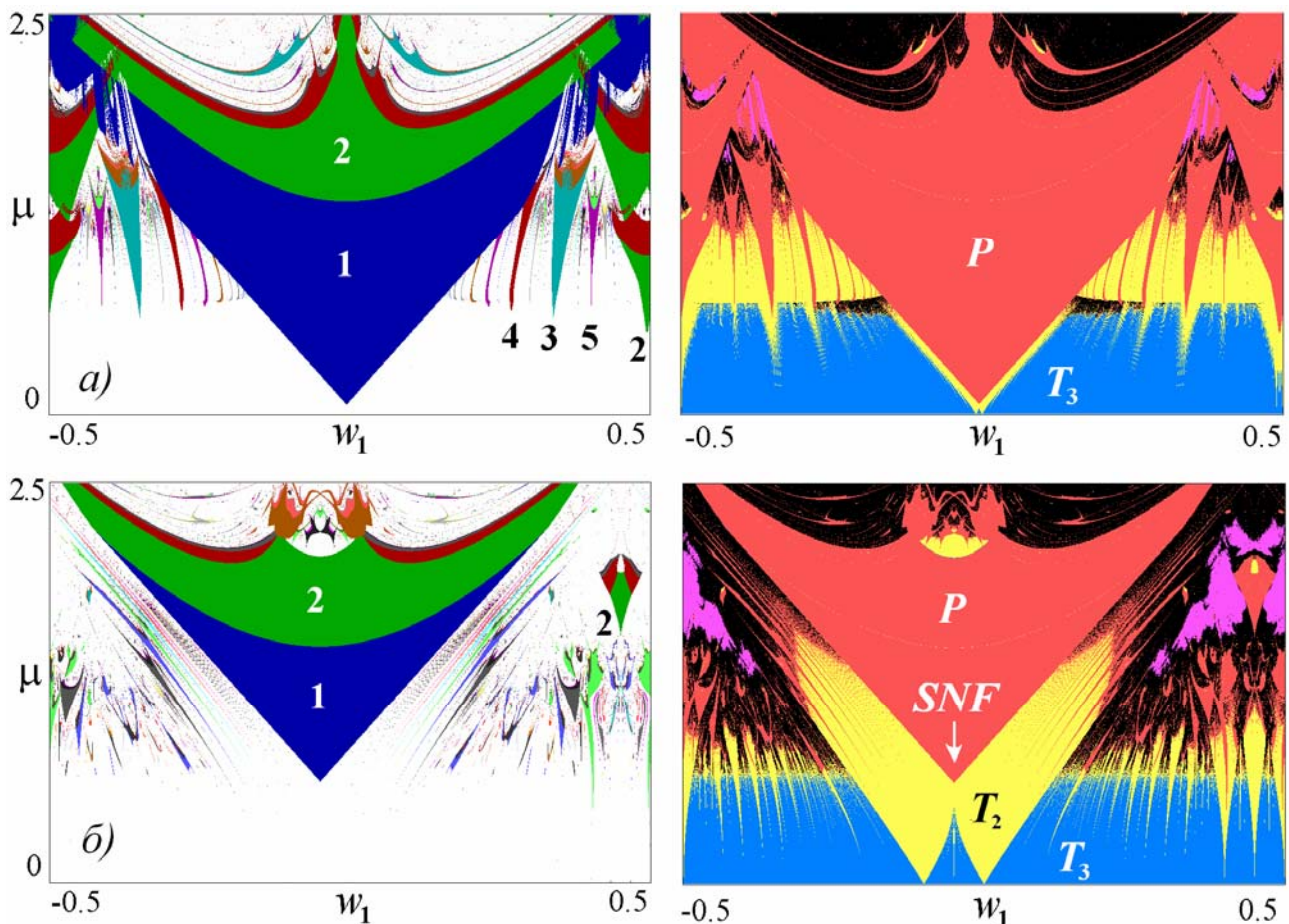


Рис.5.13. Карты динамических режимов (левая колонка) и карты ляпуновских показателей (правая колонка) трех диссипативно связанных дискретных фазовых осцилляторов на плоскости «частота центрального осциллятора – величина связи»; частота третьего осциллятора а) $w_3 = -0.01$, б) $w_3 = -0.1$. *SNF* – точка *saddle node fan*.

При этом первый рисунок относится к случаю, когда собственные частоты первого и третьего осцилляторов близки: $w_3 = -0.01$, а второй – когда они уже

заметно отличаются, $w_3 = -0.1$. Эти карты полезно сравнить с картой отображения окружности (рис.5.3), моделирующего два связанных осциллятора.

В центре рисунка располагается область полной синхронизации всех трех осцилляторов – область периода 1. Границы этой области даются соотношениями (5.46), которые теперь нужно разрешить относительно параметра связи, используя выражение для частоты третьего осциллятора $w_3 = w_1 + w_2$:

$$\begin{aligned} \mu &= \pm \frac{4\pi}{3}(w_1 + w_3), \\ \mu &= \pm \frac{4\pi}{3}(-w_1 + 2w_3). \end{aligned} \quad (5.49)$$

В отличие от случая двух осцилляторов, на рис.5.13 имеет место *порог полной синхронизации*, который легко находим из (5.49):

$$\mu = 2\pi|w|, \quad w_1 = w/2. \quad (5.50)$$

С точки зрения теории бифуркаций, (5.50) – это точка коразмерности два, в которую на фазовой плоскости в соответствии с рис.5.11 стягиваются в одну точку одновременно все четыре неподвижные точки отображения. В [44] аналогичные точки получили название «*saddle node fan*» – «седло-узловой веер», в соответствии с характерной картиной расходящихся от них подобно вееру областей двухчастотных режимов на плоскости параметров. Такие точки можно видеть также и на плоскости чисел вращения рис.5.10б на диагонали $w_2 = w_1$.

При малой частоте третьего осциллятора w_3 (на рис.5.13а) можно видеть модифицированную по сравнению с рис.5.3 картину. Нижняя часть карты теперь представлена режимами трехчастотной квазипериодичности. Они лежат, в основном, в области $\mu \leq 0.6$. Языки полной синхронизации разных периодов «отрываются» от оси абсцисс. Теперь все типы режимов полной синхронизации имеют порог по величине связи. Вблизи их оснований формируются области двухчастотных режимов, которые «вторгаются» в область трехчастотной квазипериодичности в виде некоторых локальных областей. При больших значениях связи картина режимов полной синхронизации, тем не менее, аналогична случаю синус-отображения окружности.

Увеличим расстройку частот третьего и первого осцилляторов, рис.5.13б. При этом граница трехчастотных режимов по величине связи почти не меняется. Внутри нее формируется выраженная система языков двухчастотных режимов. Особо заметными являются две области, граничащие с языком периода 1 и отвечающие ситуации попарного захвата первого-второго и второго-третьего осцилляторов. Внутри таких областей возникает новая система узких языков

полных резонансов, перекрытие которых при $\mu \approx 1.5$ приводит к хаосу.

Увеличение расстройки третьего и первого осцилляторов приводит к тому, что структура областей полной синхронизации высокого порядка, характерная для отображения окружности, разрушается. На рис.5.13б, кроме языка периода один, можно видеть еще только одну такую область на базе периода 2. Существенно модифицируется и внутреннее устройство основного языка полной синхронизации по сравнению со случаем синус-отображения окружности. Обращает на себя внимание факт возникновения *вторичной бифуркации Неймарка-Сакера* и связанной с ней новой области квазипериодичности на базе цикла периода 2 внутри основного языка.

5.8. Отображение на торе: два связанных возбуждаемых осциллятора

Перейдем теперь к постановке другой задачи, имеющей физическую значимость, – задаче о вынужденной синхронизации квазипериодических колебаний. Исходная система представляет собой два диссипативно связанных осциллятора Ван-дер-Поля, возбуждаемых внешним сигналом:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + (1 - \Delta/2)x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= B \sin \omega t, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta/2)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Здесь центральная частота осцилляторов принята за единицу, Δ – их частотная расстройка, $\omega = 1 + \Omega$ – частота воздействия, при этом Ω представляет собой отстройку частоты сигнала от центральной.

Действуя стандартным образом²⁵, для системы (5.51) можно получить следующие уравнения, описывающие динамику фаз осцилляторов

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\frac{\Delta}{2} - \mu \sin \theta + b \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\Omega - \frac{\Delta}{4} - \frac{\mu}{2} \sin \theta + b \sin \varphi, \end{aligned} \quad (5.52)$$

где θ – относительная фаза осцилляторов, φ – фаза непосредственно возбуждаемого (первого) осциллятора относительно внешнего сигнала.

Нетрудно видеть, что в отсутствии внешнего сигнала, т.е. при $b = 0$, первое уравнение превращается в уравнение Адлера для двух связанных осцилляторов. А в отсутствие связи (при $\mu = 0$) второе уравнение превращается в уравнение

²⁵ Подробное обсуждение и детали можно найти в [39,41-42].

Адлера для уединенного возбуждаемого осциллятора.

Выполнив процедуру дискретизации и перенормировки на параметр дискретизации, получаем отображение на торе следующего вида:

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n - \frac{\Delta}{2} - \mu \sin \theta_n + b \sin \varphi_n, \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n - \Omega - \frac{\Delta}{4} - \frac{\mu}{2} \sin \theta_n + b \sin \varphi_n.\end{aligned}\tag{5.53}$$

Здесь удобно не переходить к числам вращения, а сохранить исходные параметры Ω и Δ , имеющие ясный физический смысл – частоты внешнего сигнала и частотной расстройки осцилляторов.

В задачах вынужденной синхронизации традиционным является представление результатов на плоскости частота – амплитуда воздействия. Поэтому обратимся к плоскости параметров (Ω, b) . Соответствующие карты ляпуновских показателей показаны на рис.5.14 и 5.15. Центральные позиции в обоих случаях занимает область P , отвечающая неподвижной точке отображения, т.е. полному захвату обоих осцилляторов внешним воздействием.

Ее границы легко найти аналитически. Уравнения (5.53) для неподвижных точек могут быть разрешены относительно синусов фаз θ и φ . Условие обращения синусов в ± 1 приводит к уравнениям линий, ограничивающих область полной синхронизации P :

$$\begin{aligned}\mu &= \pm \left(2\Omega - \frac{\Delta}{2} \right), \\ b &= \pm \frac{\Delta}{2}.\end{aligned}\tag{5.54}$$

При этом возникает два типа конфигураций области полной синхронизации. Первая конфигурация отвечает случаю $|\Delta| < 2\mu$, рис.5.14. Физически это условие соответствует *режиму захвата* двух автономных осцилляторов²⁶. Нетрудно понять, что в этом случае наблюдаются вырожденные седло-узловые бифуркации неподвижных точек SNP , типа описанных выше для случая взаимодействия трех осцилляторов.

Пусть теперь $|\Delta| > 2\mu$, так что расстройка автономных осцилляторов достаточно велика, и возникает *режим биений* этих двух осцилляторов. Карта динамических режимов неавтономной системы в этом случае показана на рис.5.15.

²⁶ Действительно, в отсутствии внешней силы осцилляторы описываются уравнением (5.24), которое имеет стационарное решение в виде захвата фазы при условии $|\Delta| < 2\mu$.

Ее нижняя часть теперь заполнена областью трехчастотной квазипериодичности, в которую погружены языки резонансных двухчастотных режимов.

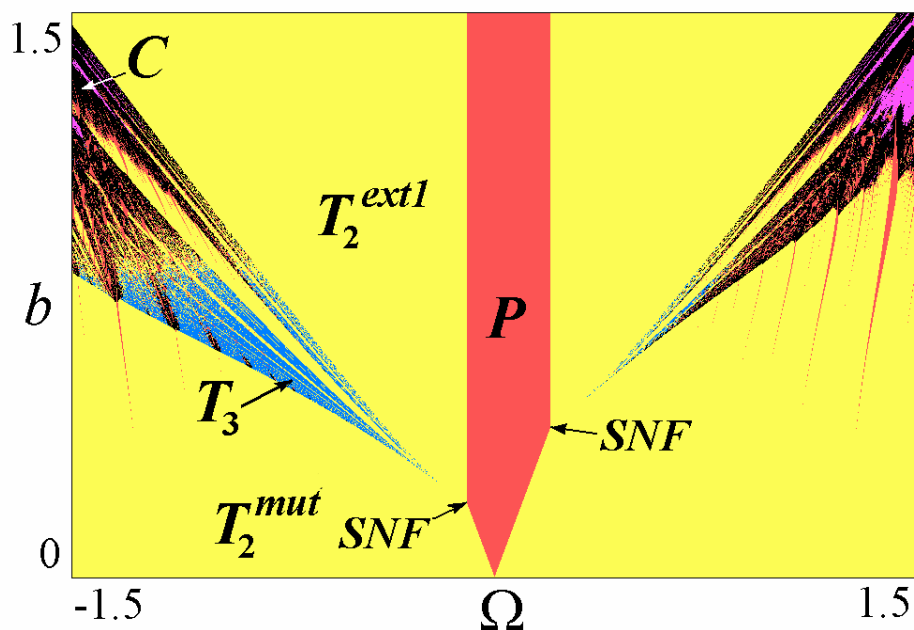


Рис.5.14. Карта ляпуновских показателей возбуждаемой двухчастотной системы осцилляторов. Режим захвата автономных осцилляторов, $\mu = 0.3$, $\Delta = 0.2$.

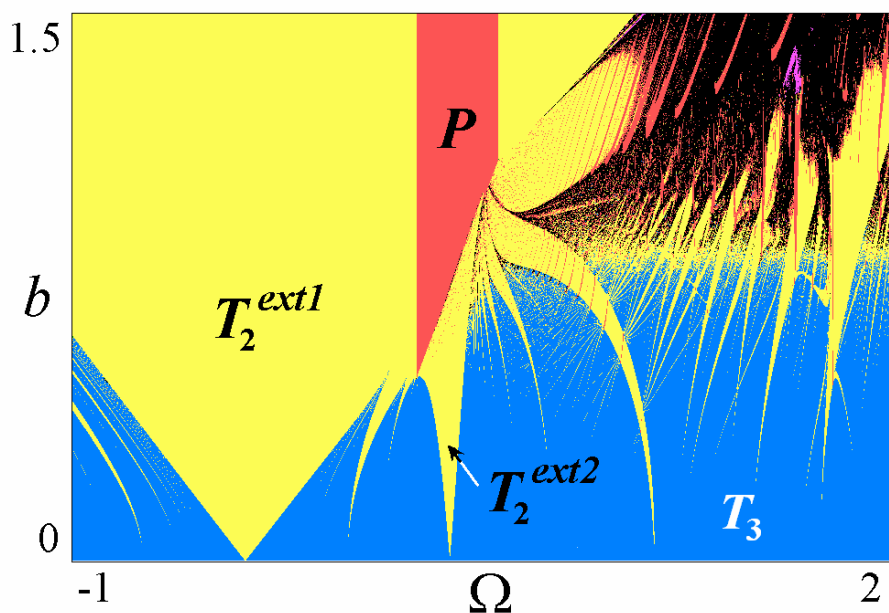


Рис.5.15. Карта ляпуновских показателей возбуждаемой двухчастотной системы осцилляторов. Режим биений автономных осцилляторов, $\mu = 0.3$, $\Delta = 1.6$.

Область полной синхронизации теперь имеет порог по величине внешней силы. Таким образом, чтобы разрушить квазипериодические колебания, необходима достаточно большая амплитуда внешнего сигнала. Интересно, что область полной синхронизации продолжает язык двухчастотного режима, отмеченный символом T_2^{ext2} , причем, этому языку отвечает условие примерного по-

стоянства фазы уже не первого, а второго осциллятора, непосредственно не возбуждаемого внешним сигналом.

На рис.5.15 можно видеть также обширную область хаотических колебаний, которые возникают при перекрытии языков двухчастотных режимов. Отметим, что при выбранных значениях параметров доминирует только один основной резонанс. Остальные полные резонансы имеют вид очень узких языков периодических режимов.

5.9. Дискретные модели осцилляторов.

Общее обсуждение

Мы рассмотрели две системы, моделирующие осцилляторы с диссипативной связью и приводящие к отображениям на торе. Они дают понимание эталонных ситуаций для задач трехчастотной синхронизации. Для трехчастотных режимов задачи о взаимной и вынужденной синхронизации целесообразно рассматривать отдельно. Причем в последнем случае возникают еще два варианта: когда автономные осцилляторы захвачены и когда они находятся в режиме биеений. Таким образом, возникают три характерные ситуации, обобщающие понятие о языках Арнольда и представленные рисунками 5.13, 5.14 и 5.15.

Наличие трех частот позволяет ввести в рассмотрение еще одну важную иллюстрацию: плоскость чисел вращения, на которой возникает новый феномен – резонансная паутина Арнольда. При этом резонанс 1:1:1 является самым сильным и значительно влияет на общую картину, в частности, порождает «главную последовательность» резонансов.

Если говорить об отображении Кима-Остлунда (5.37) в контексте описания связанных осцилляторов, то его недостаток – отсутствие основного резонанса 1:1:1. Действительно, неподвижные точки (5.37) удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \mu \sin \varphi_0, \\ \Omega_2 &= \mu \sin \psi_0.\end{aligned}\tag{5.55}$$

На первый взгляд задача представляется аналогичной модели (5.43), поскольку имеются четыре неподвижных точки, которые испытывают седло-узловые бифуркации при пересечении сторон квадрата, образованного линиями $\Omega_1 = \pm\mu, \Omega_2 = \pm\mu$. Но особенность отображения Кима-Остлунда состоит в том, что все его неподвижные точки неустойчивы. Действительно, матрица Якоби отображения (5.37) имеет вид

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & -\mu \cos \varphi_0 \\ -\mu \cos \psi_0 & 1 \end{pmatrix}.\tag{5.56}$$

Таким образом, ее след $S = 2$. Как можно видеть из треугольника устойчивости на рис.2.4, такие точки всегда неустойчивы. В результате самый сильный резонанс и «главная последовательность» связаны с колебаниями другого типа – периода 2.

Развитый подход в виде построения дискретных моделей можно применить, чтобы «восстановить» исходную систему, которая может порождать отображение (5.37). Поточковая система-прототип, очевидно, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \Omega_1 - \varepsilon \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \Omega_2 - \varepsilon \sin \psi.\end{aligned}\tag{5.57}$$

Нетрудно показать, что ей отвечает следующая форма связанных осцилляторов Ван-дер-Поля:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y - \mu(\dot{y} - \dot{x}) - \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) &= 0.\end{aligned}\tag{5.58}$$

В этом можно убедиться, применив к набору уравнений (5.58) метод медленно меняющихся амплитуд. Отличие от системы (5.40) состоит в изменении знака связи во втором уравнении. Таким образом, для второго осциллятора связь не диссипативная, а *активная*. Это предполагает наличие в цепи связи некоторого активного элемента (например, операционного усилителя). Таким образом, наличие активной компоненты в связи и разрушает основной резонанс. Еще одна особенность – асимметрия связи, поскольку для первого осциллятора член связи имеет диссипативную форму.

В то же время следует отметить, что отображение (5.37) описывает важные детали картины: возможность резонансной паутины Арнольда, систему нелокальных бифуркаций, которые демонстрируют очень сложную и емкую картину [44-46]. При помощи такого отображения описываются несколько бифуркаций коразмерности два, включая точки SNF , которые, как мы видели, оказываются важными и для описания основного резонанса.

Заметим также, что возможна другая геометрия связи: три осциллятора могут быть соединены в кольцо. Особенность такой задачи – возможность фазовой мультистабильности для основного резонанса, отвечающей колебаниям осцилляторов с разными фазовыми сдвигами [38]. В остальном картина во многом аналогична случаю цепочки, за исключением возникновения двух частично перекрывающихся языков основного резонанса. Некоторые детали можно найти в [50].

5.10. Отображение на торе: три реактивно связанных осциллятора

Рассмотрим теперь другой тип связи осцилляторов, которому отвечают уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \varepsilon(x - y) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_{21})y + \varepsilon(y - x) + \varepsilon(y - z) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_{31})z + \varepsilon(z - y) &= 0. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Здесь ε – параметр *реактивной* связи. Отличие от системы (5.40) состоит в том, что связь осуществляется не через скорости изменения переменных, а непосредственно через их значения. С физической точки зрения связь в случае (5.40) дает добавку к параметру диссипации, а в случае (5.59) – к собственной частоте колебаний. При радиофизической реализации генератора Ван-дер-Поля диссипативная связь осуществляется через резистор (сопротивление), а реактивная – через конденсатор (емкость) [38].

Реактивная связь – явление физически более тонкое, чем диссипативная. В частности, для описания синхронизации даже двух осцилляторов необходимо учитывать эффекты второго порядка по величине связи.

Фазовые уравнения для случая реактивной связи трех осцилляторов с учетом этой особенности получены в Приложении 3 и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} 2\dot{\theta} &= -\varepsilon - \Delta_{21} + \varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2 \left(\sin \varphi \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi - \sin 2\theta \right), \\ 2\dot{\varphi} &= \varepsilon - \Delta_{32} - \varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 \left(\sin \theta \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta - \sin 2\varphi \right). \end{aligned} \quad (5.60)$$

Здесь θ и φ – фазы второго осциллятора относительно первого и третьего относительно второго соответственно, $\Delta_{32} = \Delta_{31} - \Delta_{21}$.

Уравнения для случая двух осцилляторов можно получить, просто отбросив в (5.60) члены, содержащие вторую фазу:

$$2\dot{\theta} = -\Delta - \varepsilon^2 \sin 2\theta. \quad (5.61)$$

Это тоже уравнение Адлера, но в другой форме, которая и определяет особенности реактивной связи. Во-первых, из (5.61) видно, что синхронизация в системе с такой связью – эффект второго порядка по ε . Соответственно, язык синхронизации на плоскости «частотная расстройка – величина связи» имеет «острие» в виде корневой особенности $\varepsilon \propto \sqrt{|\Delta|}$. Во-вторых, уравнение (5.61) характеризуется *фазовой бистабильностью*: оно имеет не одно, а два устойчи-

вых равновесия. Осцилляторы в этом случае могут захватиться как *в фазе*, так и *в противофазе*. Соответственно, относительная фаза θ осцилляторов равна (примерно) нулю или π .

Перейдем теперь к дискретной модели, аналогично тому, как это было сделано для случая диссипативной связи:

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= 2\pi w_1 - \frac{\varepsilon}{2} + \theta_n + \frac{\varepsilon}{2} \cos \varphi_n + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\sin \varphi_n \cos \theta_n - \frac{1}{2} \sin \theta_n \cos \varphi_n + \frac{1}{2} \sin 2\varphi_n - \sin 2\theta_n \right), \\ \varphi_{n+1} &= 2\pi w_2 + \frac{\varepsilon}{2} + \varphi_n - \frac{\varepsilon}{2} \cos \theta_n + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\sin \theta_n \cos \varphi_n - \frac{1}{2} \sin \varphi_n \cos \theta_n + \frac{1}{2} \sin 2\theta_n - \sin 2\varphi_n \right). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Карты динамических режимов и ляпуновских показателей этого отображения на плоскости чисел вращения (w_1, w_2) показаны на рис.5.16 для уровня связи $\varepsilon = 0.6$. На этих картах можно видеть резонансную паутину Арнольда, но для нее, по сравнению со случаем диссипативной связи, характерна некоторая асимметрия. Она связана с воздействием реактивной связи на частоту (члены в виде добавок $\pm \varepsilon/2$ к числам вращения.)

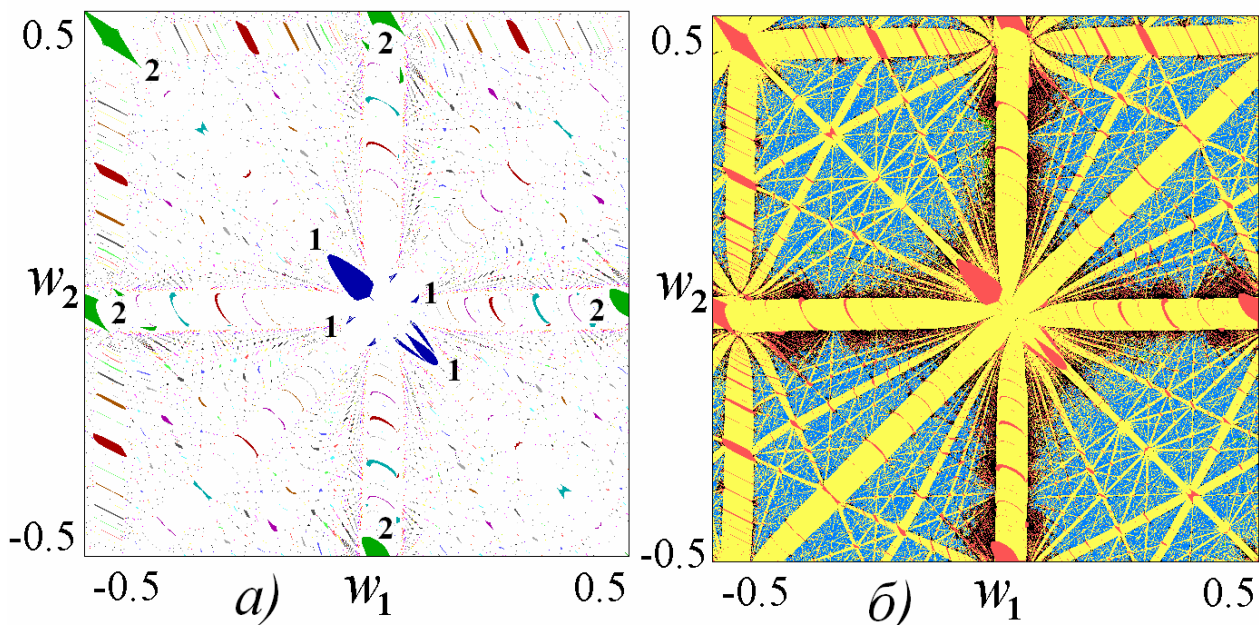


Рис.5.16. Карта динамических режимов (а) и ляпуновских показателей (б) на плоскости чисел вращения трех реактивно связанных осцилляторов. Цифры на карте означают периоды циклов, параметр связи $\varepsilon = 0.6$.

Если отбросить члены второго порядка, то отображение (5.62) превращается, фактически, в отображение Кима-Остлунда. Таким образом, это отображе-

ние более близко к случаю реактивной связи. При этом, однако, исчезает и основной эффект – синхронизация всех трех осцилляторов с соотношением частот 1:1:1. Более строгое отображение (5.62) описывает этот эффект и приводит к картине, подобной рис.5.16, включая возможность полной синхронизации всех трех осцилляторов.

Как мы отмечали, два реактивно связанных осциллятора могут захватиться как в фазе, так и в противофазе. Для трех осцилляторов число возможных конфигураций точного захвата увеличивается, и все они могут реализоваться в модели (5.62). Этот факт иллюстрируют фазовые портреты на рис.5.17б. Они построены в точках, отмеченных соответствующими цифрами на увеличенном фрагменте карты. Для удобства интерпретации все четыре портрета даны на одном рисунке 5.17б.

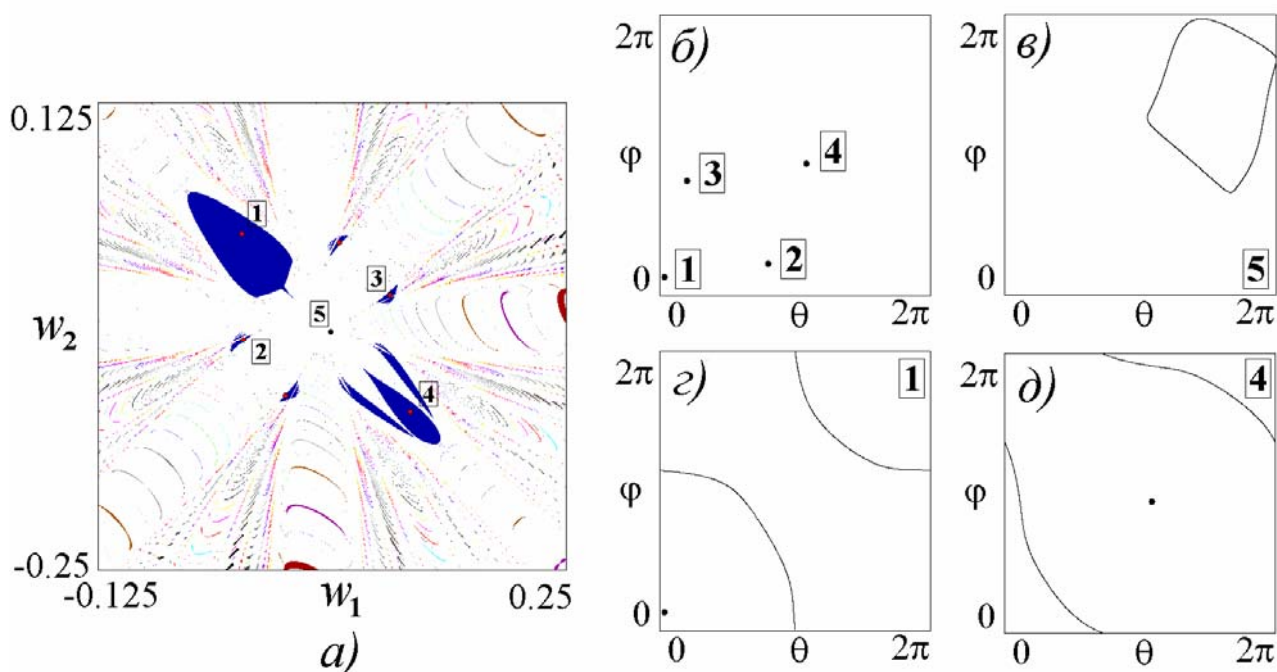


Рис.5.17. Увеличенный фрагмент карты динамических режимов трех реактивно связанных осцилляторов (а), четыре типа захвата осцилляторов в режиме полной синхронизации (б), инвариантная кривая (в), сосуществование неподвижных точек и инвариантной кривой (г,д).

Как видно из рис.5.17б, для точки 1 выполняется: $(\theta \approx 0, \phi \approx 0)$. Напомним, что θ – это относительная фаза первого и второго осциллятора, а ϕ – второго и третьего. Таким образом, в данном случае все три осциллятора захватываются синфазным образом, и их фазы примерно равны друг другу. Для точки 2 справедливо: $(\theta \approx \pi, \phi \approx 0)$. Это означает, что в фазе колеблются второй и третий осцилляторы, а первый движется относительно них в противофазе. В точке 3: $(\theta \approx 0, \phi \approx \pi)$, так что первый и второй осцилляторы захватились в фазе, а третий колеблется относительно них в противофазе. И, наконец, в точке 4:

($\theta \approx \pi, \varphi \approx \pi$). Такой тип колебаний соответствует тому, что крайние осцилляторы колеблются в фазе, а центральный – в противофазе.

В случае реактивной связи существенной оказывается мультистабильность такого типа, когда режимы полной синхронизации могут сосуществовать с квазипериодическими. Так, на рис.5.17г,д показаны сосуществующие неподвижные точки и инвариантные кривые в точках 1 и 4. В то же время в точках 2, 3 и 5 мультистабильности не наблюдается.

Интересный режим реализуется в точке 5. В этом случае инвариантная кривая представляет собой замкнутую линию в виде овала. Это означает, что обе относительные фазы осциллируют около некоторых равновесных значений. Соответственно, основные наблюдаемые частоты совпадают, но захват не точный: фазы не равны строго константам. Это будет приводить к некоторой модуляции на фоне колебаний с основной частотой.

Отметим, что инвариантные кривые типа рис.5.17г,д и 5.15в отличаются топологически – последняя может быть стянута в точку, а две первые нет. Соответственно, в [44] кривые первого типа называются *вращательными (rotational)*, а второго - «*стягиваемыми*» (*contractible*).

Задачи

1. Постройте карту динамических режимов отображения Гласса и обсудите ее отличия от случая стандартного синус-отображения окружности.

2. Постройте бифуркационные портреты резонанса (1,1)/3 для отображения Кима-Остлунда и изучите их эволюцию при изменении величины связи.

3. Постройте карты динамических режимов и карты ляпуновских показателей для отображения

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \Omega + \delta + \varphi_n - a \sin \varphi_n + \mu \sin(\varphi_n - \psi_n), \\ \psi_{n+1} &= \Omega - \delta + \psi_n - a \sin \psi_n + \mu \sin(\psi_n - \varphi_n).\end{aligned}$$

Его можно рассматривать как дискретную модель, использующую в качестве системы-прототипа фазовые уравнения динамики трех взаимодействующих лазеров (модель Хибника-Брайманка-Кеннедида-Вейнсфелда [51]). Исследуйте плоскость (Ω, a) при фиксированном значении $\delta = 1.5$.

4. Изучите более детально устройство окрестности точки SNF для дискретной модели диссипативно связанных осцилляторов.

5. Получите фазовые уравнения и дискретную модель для трех осцилляторов, диссипативно связанных в кольцо. Найдите аналитически все неподвижные точки в случае, когда частоты осцилляторов совпадают. Постройте карты

динамических режимов на плоскости чисел вращения и на плоскости «частота одного осциллятора – величина связи».

6. Получите фазовые уравнения и дискретную модель для четырех диссипативно связанных осцилляторов. Постройте карты режимов.

7. Постройте карты динамических режимов для реактивно связанных осцилляторов на плоскости «частота второго осциллятора – величина связи». Обсудите проявление мультистабильности в системе.

Литература

Общие проблемы нелинейной динамики и теории бифуркаций

1. Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Ижевск: РХД, 2002. 560 с.
2. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
3. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах: Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах. М.: ЛИБРОКОМ, 2009. 320 с.
4. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 253с.
5. Thompson J.M.T., Stewart H.B. Nonlinear dynamics and chaos: Geometrical methods for engineers and scientists. Chichester: Wiley, 1986. 376 p.
6. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002. 292 с.
7. Интернет-ресурс «Encyclopedia of dynamical systems»:
http://www.scholarpedia.org/article/Encyclopedia_of_dynamical_systems.

Теория отображений

8. Кузнецов А.П., Савин А.В, Тюрюкина Л.В. Введение в физику нелинейных отображений. Саратов: Научная книга, 2010. 134 с.
9. Постнов Д.Э. Введение в динамику итерируемых отображений. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2007. 160 с.

Бифуркации отображений

10. Kuznetsov Yu.A. Elements of applied bifurcation theory. New York: Springer-Verlag, 1998, 591 p.
11. Meijer H.G.E. Codimension 2 bifurcations of iterated maps // Doctoral thesis Utrecht University. Адрес в Интернете: <http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2006-1204-200716/index.htm>.
12. Wiggins S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. New York: Springer-Verlag, 2003, 843 p.
13. Интернет-страница Ю.А.Кузнецова: www.math.uu.nl/people/kuznet.

Метод карт динамических режимов и ляпуновских показателей

14. Интернет-ресурс «Карты динамических режимов»:
<http://sgtnd.narod.ru/science/atlas/rus/index.htm>.
15. Интернет-ресурс «Карты ляпуновских показателей»:
<http://sgtnd.narod.ru/chair/rus/index.htm>.

Структуры «crossroad area» и «spring area»

16. *Carcasses J., Mira C., Bosch M., Simo C., Tatjer J.C.* «Crossroad area - spring area» transition (I) Parameter plane representation // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1991. Vol.1, № 1. P. 183-196.
17. *Carcasses J., Mira C., Bosch M., Simo C., Tatjer J.C.* «Crossroad area - spring area transition» (II) foliated parametric representation // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1991. Vol.1, № 2. P. 339-348.

Минимальное отображение Спротта

18. *Elhadj Z., Sprott J.C.* A minimal 2-D quadratic map with quasi-periodic route to chaos // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2008. № 5. P. 1567-1577.

Бифуркации на границе области синхронизации

19. *Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Гибрид удвоений периода и касательной бифуркации: количественная универсальность и двухпараметрический скейлинг // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1995. Т. 3, № 4. С. 3-11.

Универсальное двумерное отображение

20. *Кузнецов А.П., Кузнецова А.Ю., Сатаев И.Р.* О критическом поведении отображения с бифуркацией Неймарка - Сакера при разрушении фазовой синхронизации в предельной точке фейгенбаумовского каскада // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2003. Т.11, № 1. С. 12-18.

Отображение Богданова

21. *Arrowsmith D.K., Cartwright J.H.E., Lansbury A.N., Place C.M.* The Bogdanov map: bifurcations, mode locking, and chaos in a dissipative system // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1993. Vol.3, № 4. P. 803-842.

Дискретный осциллятор Богданова-Такенса

22. *Кузнецов А.П., Савин А.В., Седова Ю.В.* Бифуркация Богданова – Такенса: от непрерывной к дискретной модели // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2009. Т.17, № 6. С. 139-158.

Дискретный осциллятор Ресслера

23. *Адилова А.Б., Савин А.В.* Удвоение и разрушение торов в дискретном аналоге системы Ресслера. // В сб.: *Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика. Тезисы докладов VI конференции молодых ученых.* – Издательство Саратовского университета, Саратов. 2011. С. 82-83.

Трех- и более высокоразмерные отображения Рихтера

24. *Richter H.* The generalized Henon maps: Examples for higher-dimensional chaos // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2002. Vol. 12, № 6. P. 1371-1384.
25. *Richter H.* On a family of maps with multiple chaotic attractors // Chaos, Solitons & Fractals. Vol. 36, № 3. 2008. P. 559-571.

Трехмерные отображения Спротта

26. *Elhadj Z., Sprott J.C.* Classification of three-dimensional quadratic diffeomorphisms with constant Jacobian // Frontiers of Physics in China. 2009. Vol. 4, № 1. P. 111–121.

Удвоения торов

27. *Kaneko K.* Doubling of torus // Progress of theoretical physics. 1983. Vol.69, № 6. P. 1806-1810.
28. *Stagliano J., Wersingera Jr., Slaminkab E.* Doubling bifurcations of destroyed T^2 tori // Physica D. 1996. Vol. 92, № 3-4. P. 164-177.

Консервативные трехмерные отображения

29. *Dullin H. R., Meiss J. D.* Quadratic Volume-Preserving Maps: Invariant Circles and Bifurcations // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. 2009. Vol.8. P.76-128.

Трехмерное отображение Эно

30. *Gonchenko S. V., Ovsyannikov I. I., Simó C., Turaev D.V.* Three-Dimensional Hénon-like Maps and Wild Lorenz-like Attractors // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15, № 11. P. 3493-3508.

Дискретная двумерная модель Лотки-Вольтерра

31. *Ghaziani R.K., Govaerts W., Sonck C.* Codimension-Two Bifurcations of Fixed Points in a Class of Discrete Prey-Predator Systems // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2011. 24 pages, DOI 10.1155/2011/862494.

Четырехмерная дискретная модель Лотки-Вольтерра с запаздыванием

32. *Han W., Liu M.* Stability and bifurcation analysis for a discrete-time model of Lotka–Volterra type with delay // Applied Mathematics and Computation. 2011. Vol. 217, № 12. P. 5449-5457.

Квазипериодические бифуркации инвариантных кривых (торов)

33. *Vitolo R., Broer H., Simó C.* Quasi-periodic Bifurcations of Invariant Circles in Low-dimensional Dissipative Dynamical Systems // Regular and Chaotic Dynamics. 2011. Vol. 16, № 1–2. P. 154–184.

Генераторы квазипериодических колебаний

34. Анищенко В.С., Николаев С.М. Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора // Письма в ЖТФ. 2005. Т.31, вып.19. С. 88-94.
35. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Станкевич Н.В. Автономный генератор квазипериодических колебаний // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т.18, № 2. С.51-61.

О характере связи в отображениях

36. Кузнецов С.П. Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // Известия вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28, №8. С.991-1007.

Общие вопросы теории синхронизации

37. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
38. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука. 1980. 360 с.
39. Кузнецов А.П., Емельянова Ю.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. Синхронизация в задачах. Саратов: ООО Издательский центр «Наука». 2010. 256 с.
40. Balanov A.G., Janson N.B., Postnov D.E., Sosnovtseva O. Synchronization: from simple to complex. Springer. 2009. 426 p.

Фазовые осцилляторы

41. Анищенко В.С., Астахов С.В., Вадивасова Т.Е., Феокистов А.В. Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 2. С. 237-252.
42. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. Вынужденная синхронизация двух связанных автоколебательных осцилляторов Ван дер Поля // Нелинейная динамика. 2011. Т.7, № 3. С. 411-425.
43. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. Синхронизация и многочастотные колебания в цепочке фазовых осцилляторов // Нелинейная динамика. 2010. Т.6, № 4. С. 693-717.

Отображения на торе. Отображение Кима-Остлунда

44. Baesens C, Guckenheimer J, Kim S, MacKay R.S. Three coupled oscillators: mode locking, global bifurcations and toroidal chaos // Physica D. 1991. Vol. 49, №3. P. 387-475.
45. Kim S., MacKay R.S., Guckenheimer J. Resonance regions for families of to-

rus maps // *Nonlinearity*. 1989. Vol. 2, № 3. P. 391-404.

46. *Baesens C, Guckenheimer J., Kim S., MacKay R.S.* Simple resonance regions of torus diffeomorphisms // *Patterns and Dynamics in Reactive Media Proc. IMA (Minneapolis, 1989) (IMA Vol. in Maths. and its Applications)*. Vol.37, ed. R.Aris et al. Berlin: Springer. P. 1-9.

47. *Галкин О.Г.* Фазовый захват для отображений тора типа Матье // *Функциональный анализ и его приложения*. 1993. Т. 27, вып. 1. С.1-11.

Появление сборок при проектировании тора

48. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М.: Наука. 1990. 128с.

Резонансная паутина Арнольда

49. *Broer H., Simó C., Vitolo R.* The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: the Arnol'd resonance web // *Bulletin of the Belgian Mathematical Society – Simon Stevin*. 2008. Vol. 15, № 5. P. 769-787.

Отображение для кольца из трех диссипативно связанных осцилляторов

50. *Vasylenko A., Maistrenko Yu., Hasler M.* Modeling the phase synchronization in systems of two and three coupled oscillators // *Nonlinear Oscillations*. 2004. Vol.7, №3. С. 301-317.

Фазовая модель связанных лазеров

51. *Khibnik A.I., Braiman Y., Kennedy T.A.B., Wiesenfeld K.* Phase model analysis of two lasers with injected field // *Physica D*. 1998. Vol.111, № 1-4. P. 295.

Отображение окружности для возбуждаемого импульсами осциллятора Ван-дер-Поля–Дуффинга

52. *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация автоколебательной системы Ван-дер-Поля–Дуффинга короткими импульсами // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2004. Т.12, № 5. С. 16-31.

Резонансная паутина Арнольда в консервативных системах

53. *Froeschlé C., Lega E., Guzzo M.* Analysis of the chaotic behaviour of orbits diffusing along the Arnold web // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2006. Vol.95, № 1-4. P. 141-153.

54. *Guzzo M., Lega E., Froeschlé C.* First numerical evidence of global Arnold diffusion in quasi-integrable systems // *Discrete and Continuous Dynamical Systems–Series B*. 2005. Vol.5, №3. P.687-698.

Моделирование радиотехнических схем с помощью пакета Multisim

55. *Иванцов В.В, Варзарев Ю.Н.* Моделирование электронных схем в системе Multisim. Таганрог. Изд-во ТТИ ЮФУ. 2008. 81 с.

Приложение 1. Радиофизическая реализация универсального двумерного отображения

Отображение (2.40) фактически представляет собой, хотя и удобный для анализа, но абстрактный, искусственно сконструированный объект. Было бы интересно представить примеры физических систем, которые при соответствующей интерпретации динамических переменных описываются отображением такого типа. Отметим, что отображение необратимое, и поэтому для потоковых систем оно может соответствовать только лишь приближенному описанию в терминах сечения Пуанкаре (размерности больше 2). При этом динамика в двух измерениях, ассоциирующаяся с переменными x , y , должна сопровождаться сильным сжатием фазового объема по остальным направлениям пространства состояний. Ниже рассмотрен пример неавтономной системы в виде электронной схемы с периодическим внешним воздействием, для которой отображение (2.40) возникает при стробоскопическом описании преобразования мгновенного состояния за период.

Имея в виду разработку электронного устройства, естественно обратиться к средствам схемотехнического моделирования, среди которых удобным и популярным является программный продукт Multisim [55].

При построении схем возможны два методически разных подхода, хотя грань между ними несколько условная. Один состоит в конструировании физической системы, обладающей интересующим типом динамического поведения, на основе радиотехнических элементов – колебательных контуров, активных элементов типа транзисторов, источников напряжения, элементов обратной связи и т.п. Второй опирается на идеологию по возможности точного воспроизведения исходных уравнений на базе элементов, применяемых в технике аналогового моделирования, таких как интеграторы, умножители, сумматоры и пр. При построении схемы, которая описывалась бы уравнениями (2.40), естественно взять за основу второй подход.

Обратимся к схеме, показанной на рис.П.1. Она содержит источник синусоидального напряжения $V4$ (частота 5 кГц), под действием которого периодически открываются и закрываются четыре электронных ключа J1-J4. Время, соответствующее одной полной итерации отображения, будет равно периоду изменения напряжения $V4$. Параметры S и J задаются с помощью потенциометров R1 и R2 и отвечают величинам напряжения, контроль которых осуществляется с помощью вольтметров ХММ1 и ХММ2.

В течение одного полупериода, когда замкнуты ключи J2 и J3, напряжение

на конденсаторе $C1$ через повторитель на операционном усилителе $U6$ и резистор $R13$ передается (копируется) на конденсатор $C2$. Аналогичным образом, напряжение на конденсаторе $C3$ через повторитель $U5$ и резистор $R14$ копируется на конденсатор $C4$. (Резисторы $R13$, $R14$ служат для ограничения тока зарядки конденсаторов $C2$ и $C4$.) Результирующие напряжения, установившиеся к концу данного полупериода на конденсаторах $C2$ и $C4$, полагаем задающими динамические переменные x_n и y_n . (Соответствующие точки на схеме помечены X и Y .)

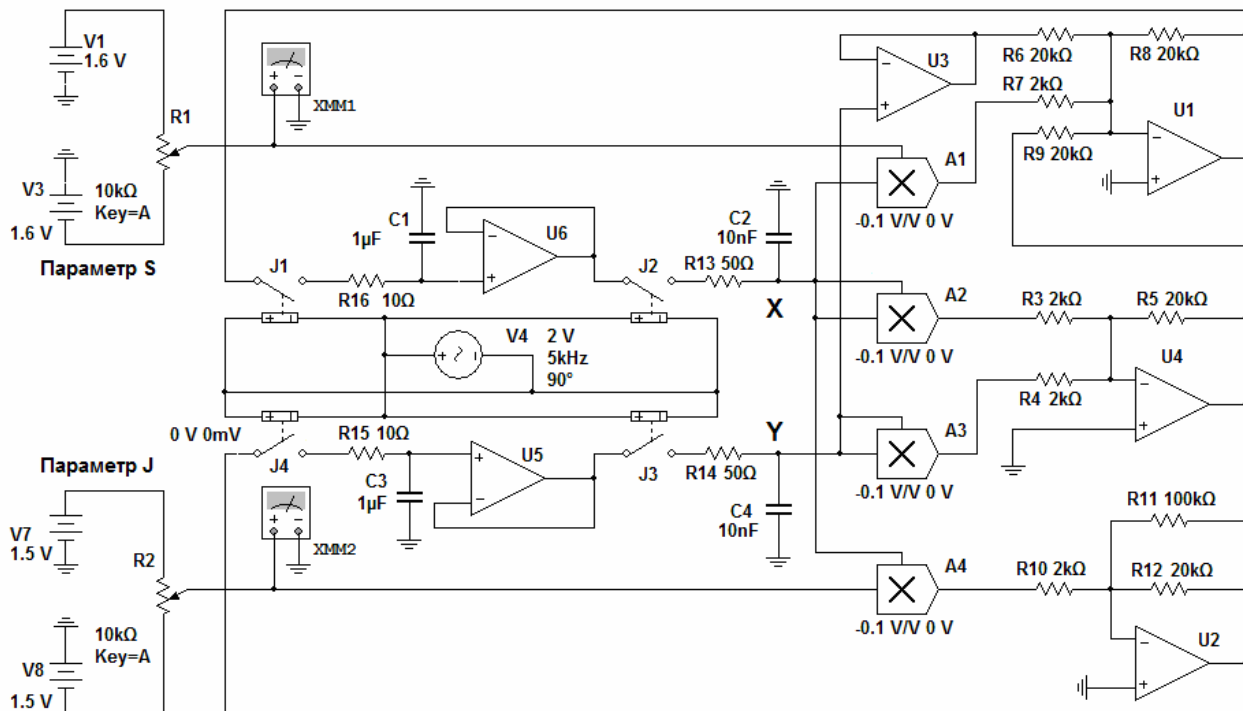


Рис.П.1. Принципиальная схема электронного устройства, динамика которого описывается отображением (2.40).

На втором полупериоде ключи $J2$ и $J3$ разомкнуты, а $J1$ и $J4$ замкнуты. При этом происходит заряд конденсаторов $C1$ и $C3$ до напряжений, отвечающих значениям переменных на следующем шаге согласно формулам (2.40). Умножители напряжения $A2$ и $A3$ формируют напряжения, равные $-0.1x_n^2$ и $-0.1y_n^2$, которые поступают на вход суммирующего инвертора на операционном усилителе $U4$. Выходное напряжение, определяющееся выражением

$$U_{U4} = -\frac{R_5}{R_3}(-0.1x_n^2) - \frac{R_5}{R_4}(-0.1y_n^2) = x_n^2 + y_n^2, \quad (\text{П.1.1})$$

подается на вход двух суммирующих инверторов на операционных усилителях $U1$ и $U2$. На другие два входа инвертора $U1$ подано напряжение $-0.1Sx_n$ с выхода умножителя $A1$ и напряжение y_n через повторитель $U3$. В результате на

выходе U1 при указанных на схеме номиналах резисторов получается напряжение

$$U_{U1} = -\frac{R_8}{R_7}(-0.1Sx_n) - \frac{R_8}{R_6}y_n - \frac{R_8}{R_9}(x_n^2 + y_n^2) = Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2). \quad (\text{П.1.2})$$

Что касается инвертора U2, то к его второму входу приложено напряжение $-0.1Jy_n$ с выхода умножителя A4. В результате на выходе U2 получаем напряжение

$$U_{U2} = -\frac{R_{12}}{R_{10}}(-0.1Jy_n) - \frac{R_{12}}{R_{11}}(x_n^2 + y_n^2) = Jx_n - \frac{1}{5}(x_n^2 + y_n^2). \quad (\text{П.1.3})$$

Как можно видеть, формулы (П.1.2) и (П.1.3) соответствуют выражениям (2.40) для величин x_{n+1} и y_{n+1} . Эти напряжения обеспечивают заряд конденсаторов C1 и C3, причем для ограничения тока зарядки служат резисторы R15 и R16. После этого, на очередном периоде изменения напряжения источника V4, реализуется следующая итерация отображения (2.40), и так далее. Следует заметить, что при запуске схемы должны быть обеспечены ненулевые начальные условия; например, заданием начального напряжения на конденсаторе C1 и/или C2.

Обратимся к иллюстрациям динамики системы, полученным в результате схемотехнического моделирования. При его проведении использовались двухлучевой осциллограф и анализатор спектра программного продукта Multisim. Входное напряжение U_X для одного канала осциллографа снимается с точки X, а для второго U_Y – с точки Y. Вход анализатора спектра подключался к точке X.

На рис.П.2 в левой колонке показаны осциллограммы напряжений U_X и U_Y при различных значениях параметров J и S , иллюстрирующие различные режимы динамики системы: цикл периода 2 (а); цикл периода 4 (б); хаос, возникший в результате каскада удвоений периода (с). Также представлены квазипериодический режим (d), хаос (е) и гиперхаос (f), возникающие в области разрушения квазипериодической динамики. Следует подчеркнуть, что режимы динамики, наблюдаемые при схемотехническом моделировании, находятся в хорошем соответствии с отображением (2.40), что говорит об адекватности предложенной схемы. В правой колонке показаны соответствующие спектры. Видно, что периодическим и квазипериодическим режимам отвечают дискретные спектры, причем во втором случае количество спектральных составляющих больше – наряду с основными составляющими присутствуют всевозможные комбинационные частоты. В режимах хаоса и гиперхаоса наблюдается сплошной спектр. На рисунке не приведены из-за их тривиальности осциллограммы, которым на

плоскости параметров отвечает внутренность треугольника устойчивости: здесь система демонстрирует устойчивое состояние равновесия, и временные зависимости представлены горизонтальными линиями.

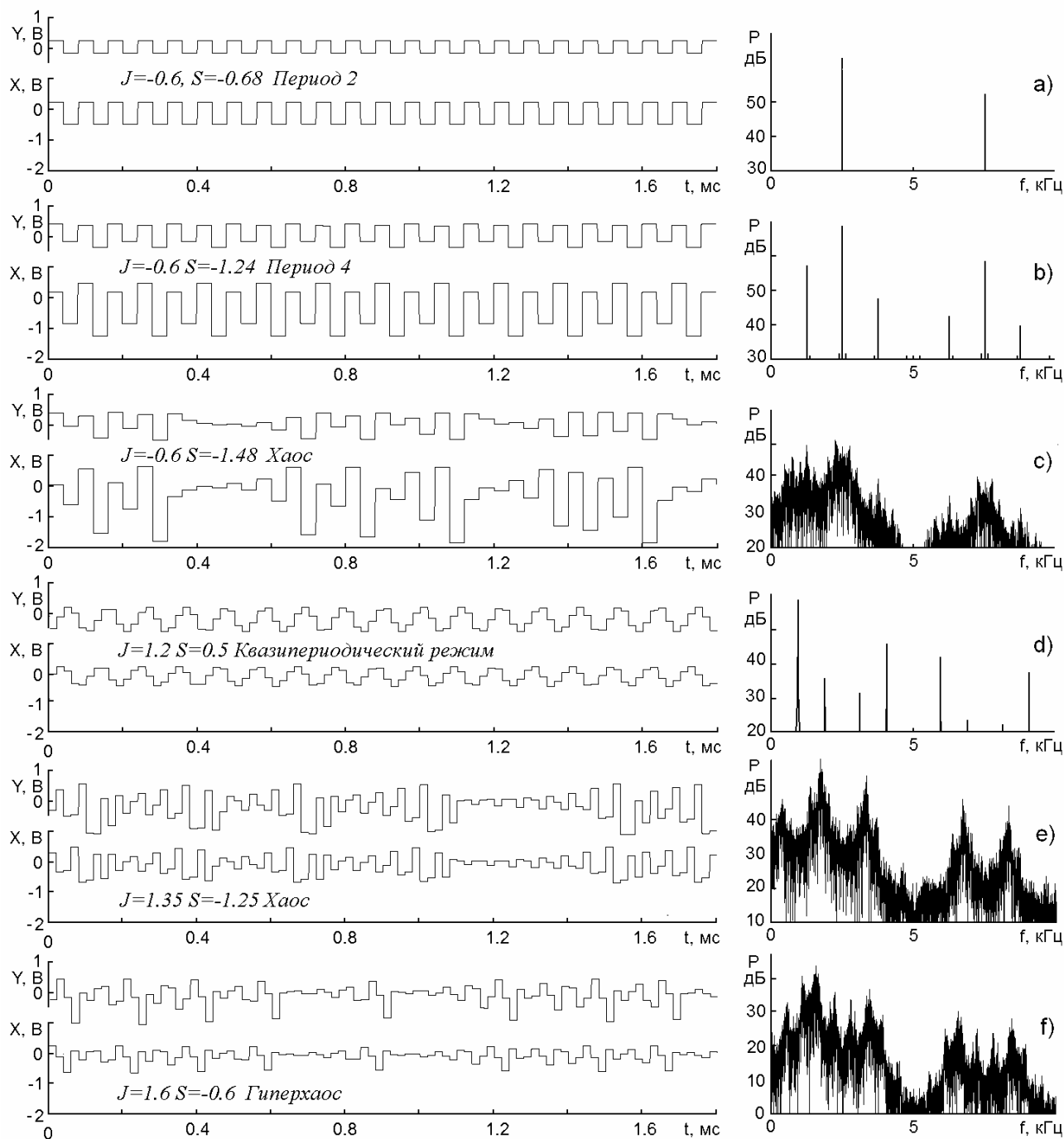


Рис.П.2. В левой колонке – осциллограммы напряжений в точках X и Y, полученные при моделировании динамики схемы, приведенной на рис.П.1, в программной среде Multisim. В правой колонке приводятся спектры сигнала в точке X в логарифмическом масштабе.

На рис.П.3 показаны фазовые портреты, которые получаются переключением осциллографа в режим без временной развертки, когда два подаваемых на вход напряжения соответствуют горизонтальному и вертикальному отклонению луча. Поскольку основной интересной особенностью системы является

присутствие бифуркации Неймарка-Сакера, здесь приводятся результаты для аттракторов, возникающих за порогом этой бифуркации. Параметр J принят равным 1.2, а параметр S изменяется от одной диаграммы к другой, что соответствует движению слева направо вдоль горизонтальной линии на плоскости параметров. На этой линии в зависимости от величины S реализуются квазипериодические (а, с, е, f) или периодические (b, d) режимы, поскольку соотношение основных частот изменяется в примерном соответствии с изменением аргумента комплексного мультипликатора на границе бифуркации Неймарка-Сакера. В языках синхронизации соотношение частот остается фиксированным. Самый широкий и легко наблюдаемый язык отвечает периоду 3 (см. панель (b)).

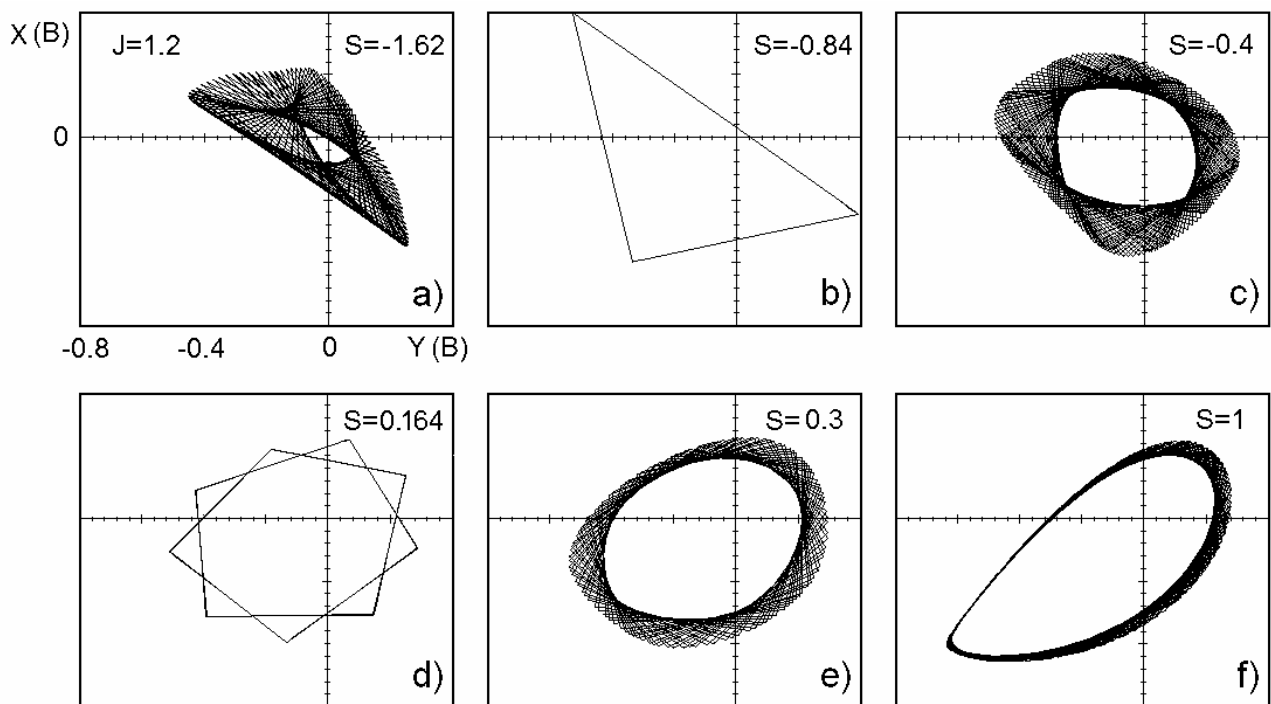


Рис.П.3. Фазовые портреты аттракторов, возникающих за порогом бифуркации Неймарка-Сакера, построенные по результатам моделирования схемы, приведенной на рис.П.1, в программной среде Multisim. Параметр J остается одним и тем же, а параметр S увеличивается от одной диаграммы к другой, начиная от некоторого отрицательного значения.

Приложение 2. Фазовые уравнения трех диссипативно связанных автоколебательных осцилляторов

Система дифференциальных уравнений, описывающая цепочку из трех диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля, имеет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_{21})y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_{31})z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П.2.1})$$

Здесь λ – параметр возбуждения автономных осцилляторов, Δ_{21} и Δ_{31} – частотные расстройки второго и третьего осцилляторов относительно первого, μ – коэффициент диссипативной связи. Частота первого осциллятора принята за единицу.

Если параметр возбуждения λ мал, а также малы частотные расстройки и величина связи, то для анализа уравнений (П.2.1) можно применить метод медленно меняющихся амплитуд [37-39]. С этой целью представим динамические переменные в виде

$$\begin{aligned} x &= a \exp(it) + a^* \exp(-it), \\ y &= b \exp(it) + b^* \exp(-it), \\ z &= c \exp(it) + c^* \exp(-it), \end{aligned} \quad (\text{П.2.2})$$

где $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ – комплексные амплитуды осцилляторов, которые являются медленно меняющимися на фоне колебаний с единичной частотой.

Наложим традиционные для этого метода дополнительные условия:

$$\begin{aligned} \dot{a} \exp(it) + \dot{a}^* \exp(-it) &= 0, \\ \dot{b} \exp(it) + \dot{b}^* \exp(-it) &= 0, \\ \dot{c} \exp(it) + \dot{c}^* \exp(-it) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П.2.3})$$

Тогда имеем следующие выражения для скоростей осцилляторов:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= i(a \exp(it) - a^* \exp(-it)), \\ \dot{y} &= i(b \exp(it) - b^* \exp(-it)), \\ \dot{z} &= i(c \exp(it) - c^* \exp(-it)). \end{aligned} \quad (\text{П.2.4})$$

Подставим соотношения (П.2.2)-(П.2.4) в уравнения (П.2.1) и отбросим члены, являющиеся быстро осциллирующими на фоне колебаний по закону $\exp(it)$. Тогда приходим к укороченным уравнениям:

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= \lambda a - |a|^2 a - \mu(a - b), \\ 2\dot{b} &= \lambda b - |b|^2 b + i\Delta_{21}b - \mu_1(b - a) - \mu(b - c), \\ 2\dot{c} &= \lambda c - |c|^2 c + i\Delta_{31}c - \mu(c - b). \end{aligned} \quad (\text{П.2.5})$$

В полученных уравнениях управляющий параметр λ можно убрать перенормировкой переменных и параметров

$$a = \sqrt{\lambda \bar{a}}, \quad b = \sqrt{\lambda \bar{b}}, \quad c = \sqrt{\lambda \bar{c}}, \quad t = \bar{t}/\lambda, \quad \mu = \lambda \bar{\mu}, \quad \Delta = \lambda \bar{\Delta}. \quad (\text{П.2.6})$$

Будем считать такую перенормировку выполненной, а для сокращения записи черту над нормированными величинами будем опускать. Теперь новые отнормированные параметры можно считать уже не малыми.

Положим далее $a = R \exp(i\psi_1)$, $b = r \exp(i\psi_2)$ и $c = v \exp(i\psi_3)$, где R, r, v – действительные амплитуды, а $\psi_{1,2,3}$ – фазы осцилляторов. Тогда получаем

$$\begin{aligned} 2\dot{R} &= R - R^3 + \mu(r \cos \theta - R), & \dot{\psi}_1 &= -\frac{r}{2R} \mu \sin \theta, \\ 2\dot{r} &= r - r^3 + \mu(R \cos \theta + v \cos \varphi - 2r), & \dot{\psi}_2 &= \frac{\Delta_{21}}{2} + \frac{R}{2r} \mu \sin \theta - \frac{v}{2r} \mu \sin \varphi, \\ 2\dot{v} &= v - v^3 + \mu(v \cos \varphi - r), & \dot{\psi}_3 &= \frac{\Delta_{31}}{2} + \frac{r}{2v} \mu \sin \varphi. \end{aligned} \quad (\text{П.2.17})$$

Здесь введены обозначения для относительных фаз осцилляторов

$$\theta = \psi_1 - \psi_2, \quad \varphi = \psi_2 - \psi_3. \quad (\text{П.2.8})$$

Вычитая фазовые уравнения (П.2.7) друг из друга, получаем уравнения для относительных фаз

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\frac{\Delta_{21}}{2} - \frac{\mu}{2} \left(\frac{r}{R} + \frac{R}{r} \right) \sin \theta + \frac{v}{2r} \mu \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{\Delta_{21} - \Delta_{31}}{2} - \frac{\mu}{2} \left(\frac{r}{R} + \frac{R}{r} \right) \sin \varphi + \frac{v}{2r} \mu \sin \theta. \end{aligned} \quad (\text{П.2.9})$$

Поскольку влияние связи предполагается малым, в этих уравнениях можно считать, что осцилляторы движутся в окрестностях стационарных невозмущенных орбит $R = r = v = 1$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\frac{\Delta_{21}}{2} - \mu \sin \theta + \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{\Delta_{32}}{2} - \mu \sin \varphi + \frac{\mu}{2} \sin \theta, \end{aligned} \quad (\text{П.2.10})$$

где $\Delta_{32} = \Delta_{31} - \Delta_{21}$. Это и есть фазовые уравнения, описывающие взаимодействие трех диссипативно связанных автоколебательных осцилляторов.

Приложение 3. Фазовые уравнения трех реактивно связанных осцилляторов

Исходные уравнения в случае реактивной связи трех осцилляторов имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \varepsilon(x - y) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_{21})y + \varepsilon(y - x) + \varepsilon(y - z) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_{31})z + \varepsilon(z - y) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П.3.1})$$

Здесь основные обозначения те же, что и в (П.2.1), ε – параметр реактивной связи. Действуя аналогично Приложению 2, можно получить соответствующие укороченные уравнения:

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= \lambda a - |a|^2 a + i\varepsilon(a - b), \\ 2\dot{b} &= \lambda b - |b|^2 b + i\Delta_{21}b + i\varepsilon(2b - a - c), \\ 2\dot{c} &= \lambda c - |c|^2 c + i\Delta_{31}c + i\varepsilon(c - b). \end{aligned} \quad (\text{П.3.2})$$

Параметр λ также может быть убран перенормировкой типа (П.2.6). Переходя далее к действительным амплитудам и фазам, получаем:

$$\begin{aligned} 2\dot{R} &= R - R^3 - \varepsilon r \sin \theta, & 2\dot{\psi}_1 &= \varepsilon - \frac{r}{R} \cos \theta, \\ 2\dot{r} &= r - r^3 + \varepsilon R \sin \theta - \varepsilon v \sin \varphi, & 2\dot{\psi}_2 &= 2\varepsilon + \Delta_{21} - \varepsilon \frac{R}{r} \cos \theta - \varepsilon \frac{v}{r} \cos \varphi, \\ 2\dot{v} &= v - v^3 + \varepsilon r \sin \varphi, & 2\dot{\psi}_3 &= \varepsilon + \Delta_{31} - \frac{r}{v} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (\text{П.3.3})$$

Вычитая фазовые уравнения друг из друга, получаем уравнения для относительных фаз:

$$\begin{aligned} 2\dot{\theta} &= -\varepsilon - \Delta_{21} + \varepsilon \left(\frac{R}{r} - \frac{r}{R} \right) \cos \theta + \varepsilon \frac{v}{r} \cos \varphi, \\ 2\dot{\phi} &= \varepsilon + \Delta_{21} - \Delta_{31} + \varepsilon \left(\frac{r}{v} - \frac{v}{r} \right) \cos \varphi - \varepsilon \frac{R}{r} \cos \theta. \end{aligned} \quad (\text{П.3.4})$$

Отличие этих уравнений от случая диссипативной связи (П.2.9) состоит в том, что эффективность действия связи, благодаря множителям типа $\left(\frac{R}{r} - \frac{r}{R} \right)$, пропорциональна разностям орбит осцилляторов. Поэтому эффект синхронизации в случае реактивной связи возникает только во втором порядке по возмущениям.

Чтобы провести рассмотрение с необходимой точностью, положим $R = 1 + \tilde{R}$, $r = 1 + \tilde{r}$ и $v = 1 + \tilde{v}$, где знаком «тильда» отмечены возмущения ста-

ционарных орбит. Из амплитудных уравнений для возмущений можно получить:

$$\begin{aligned} 2\tilde{R} &= -\varepsilon \sin \theta, \\ 2\tilde{r} &= \varepsilon \sin \theta - \varepsilon \sin \varphi, \\ 2\tilde{v} &= \varepsilon \sin \varphi. \end{aligned} \quad (\text{П.3.5})$$

Соответственно, из фазовых уравнений получаем:

$$\begin{aligned} 2\dot{\theta} &= -\varepsilon - \Delta_1 + 2\varepsilon(\tilde{R} - \tilde{r}) \cos \theta + \varepsilon(1 + \tilde{v} - \tilde{r}) \cos \varphi, \\ 2\dot{\varphi} &= \varepsilon + \Delta_1 - \Delta_2 + 2\varepsilon(\tilde{r} - \tilde{v}) \cos \varphi - \varepsilon(1 + \tilde{R} - \tilde{r}) \cos \theta. \end{aligned} \quad (\text{П.3.6})$$

Подставляя в (П.3.6) выражения для возмущений (П.3.5), получаем:

$$\begin{aligned} 2\dot{\theta} &= -\varepsilon - \Delta_{21} + \varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2 \left(\sin \varphi \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi - \sin 2\theta \right), \\ 2\dot{\varphi} &= \varepsilon - \Delta_{32} - \varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 \left(\sin \theta \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta - \sin 2\varphi \right), \end{aligned} \quad (\text{П.3.7})$$

где $\Delta_{32} = \Delta_{31} - \Delta_{21}$. Это и есть искомые уравнения. Если отбросить в первом уравнении члены, содержащие фазу φ , т.е. «отключить» третий осциллятор, то получаем

$$\dot{\theta} = -\Delta_{21} - \varepsilon^2 \sin 2\theta. \quad (\text{П.3.8})$$

Это уравнение описывает взаимную синхронизацию двух реактивно связанных осцилляторов [39].

Отметим, что в системе трех осцилляторов, в отличие от случая двух осцилляторов, все же присутствуют члены первого порядка по связи. Так, если в (П.3.7) отбросить члены второго порядка, то получаем:

$$\begin{aligned} 2\dot{\theta} &= \Omega_1 + \varepsilon \cos \varphi, \\ 2\dot{\varphi} &= \Omega_2 - \varepsilon \cos \theta, \end{aligned} \quad (\text{П.3.9})$$

где $\Omega_1 = -\varepsilon - \Delta_{21}$, $\Omega_2 = \varepsilon - \Delta_{32}$. Исследуем вопрос об устойчивости равновесий этой системы. Ее матрица Якоби имеет вид:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \sin \varphi \\ \varepsilon \sin \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{П.3.10})$$

След этой матрицы равен $S = 0$. Как известно, в этом случае равновесие является либо седлом, либо негрубым состоянием типа центр, лежащим на границе между устойчивым и неустойчивым фокусами [6]. Таким образом, для возникновения устойчивых режимов, отвечающих за синхронизацию, необходим учет членов более высокого порядка.

Учебно-научное издание

Кузнецов Александр Петрович

Савин Алексей Владимирович

Седова Юлия Викторовна

Тюрюкина Людмила Владимировна

БИФУРКАЦИИ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пособие издано в авторской редакции
Ответственный за выпуск Ю.В. Седова

Подписано в печать 11.03.2012 г.

Формат 60x84 1/16. Бумага Снегурочка. Гарнитура Times New Roman.

Усл. печ. л. 12,1. Тираж 100 экз.

ООО Издательский центр «Наука»
410012, г. Саратов, ул. Пугачевская, д.117, кв. 50.