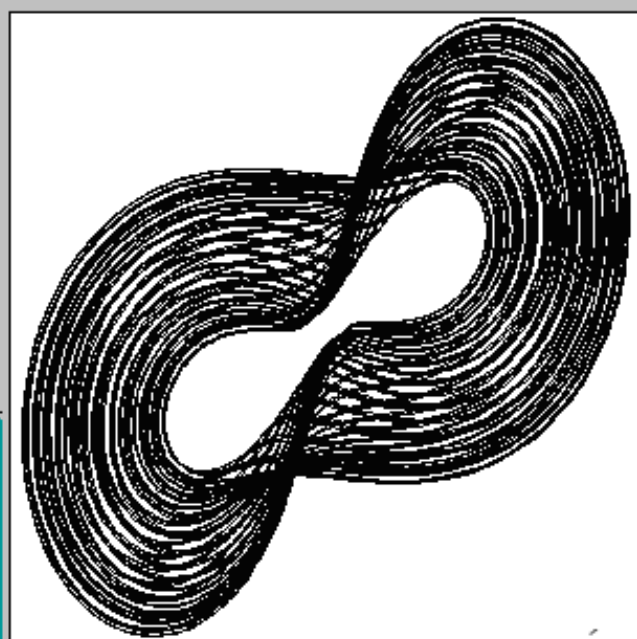
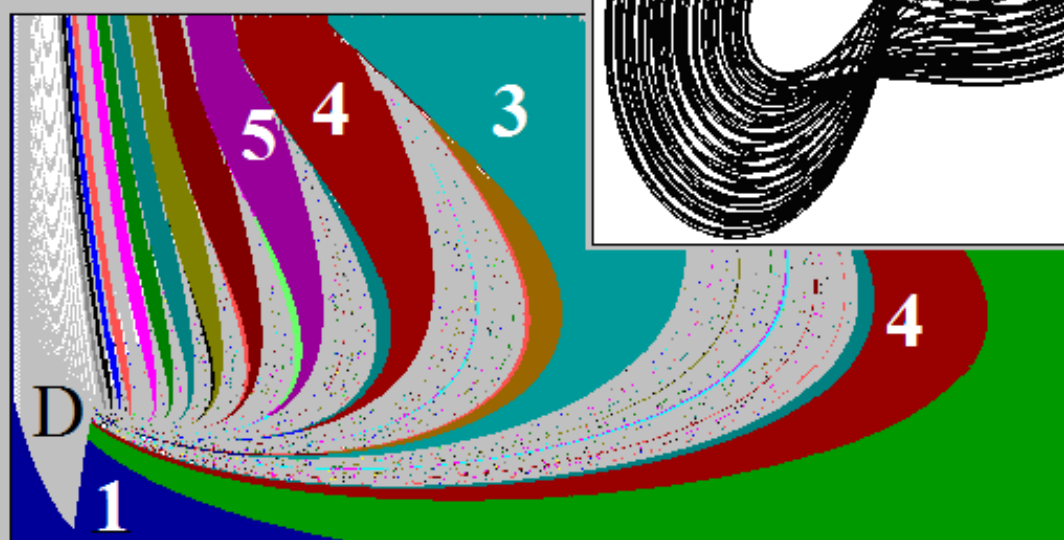
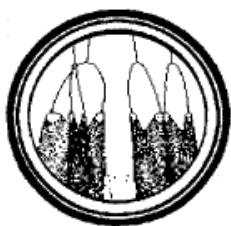


А.П. Кузнецов

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И БИФУРКАЦИИ





Серия: «След вдохновений и трудов упорных...»
Приложение к журналу
«Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика»

А.П.Кузнецов

**Динамические
системы и бифуркации**

ООО Издательский центр «Наука»

Саратов

2015

УДК 517.91, 517.938, 51.73, 534.01

Кузнецов А.П.,

Динамические системы и бифуркации – Саратов: ООО Издательский центр «Наука», 2015, 168 с.

Учебно-научное издание

Представлено введение в теорию динамических систем и бифуркаций. Обсуждаются свойства основных бифуркаций. Даны различные примеры. Изложение ведется с «физических» позиций, так что выбираются простейшие модели, для которых проводится комплексное рассмотрение, включая аналитический поиск бифуркаций, иллюстрации в виде карт динамических режимов и карт ляпуновских показателей и т.д. Будет полезна студентам, аспирантам и преподавателям как пособие в области нелинейной динамики и теории динамических систем.

Использованы материалы, полученные при выполнении гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ России НШ-1726.2014.2 и РФФИ проект 14-02-00085.

ISBN 978-5-9999-2335-6

Рекомендуют к печати:

Базовая кафедра динамических систем Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского.

Рецензенты:

д.ф.-м.н., проф. Кузнецов С.П.

к.ф.-м.н. Сатаев И.Р.

Оригинал-макет подготовлен автором

© Кузнецов А.П.

ISBN 978-5-9999-2335-6

Оглавление

Предисловие.....	4
Часть I. Динамические системы.....	5
Динамические системы. Примеры и простейшие свойства.....	6
Конструирование отображений.....	13
От потоков к отображениям: метод медленно меняющихся амплитуд...31	
Часть II. Бифуркации потоков	43
Бифуркации одномерных потоков.....	44
Бифуркации двумерных потоков.....	49
Бифуркации трехмерных потоков.....	79
Компьютерное исследование трехмерных потоков.....	95
Размерность четыре.....	101
Часть III. Бифуркации отображений.....	103
Бифуркации одномерных отображений коразмерности один.....	104
Бифуркации двухпараметрических одномерных отображений.....	118
Двумерные отображения и их бифуркации.....	124
Трехмерные отображения и их бифуркации.....	142
Бифуркации инвариантных кривых (торов).....	151
Задачи для компьютерного практикума.....	159

Предисловие

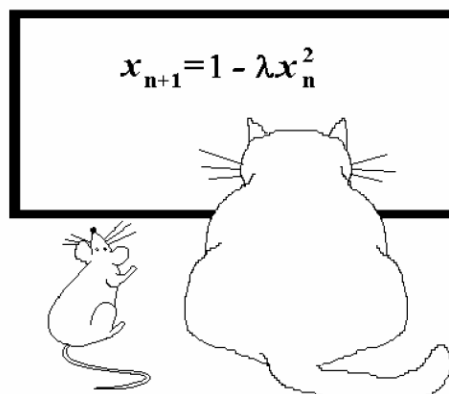
Мир динамических систем очень разнообразен. К ним относятся механические, радиофизические, электронные, оптические, химические и другие системы. Такая общность возникает благодаря единству математического аппарата, представляющего собой теорию динамических систем и теорию бифуркаций. Следствием этого междисциплинарного взаимодействия явилось возникновение соответствующих разделов математики. С другой стороны, важными являются приложения в различных областях науки. В настоящей книге излагается взгляд физика на соответствующие вопросы. По этой причине мы отталкиваемся не от математических теорем, а от физических постановок задач, например, о разнообразных осцилляторах. Это своего рода индуктивное построение изложения материала, однако, оно более удобно для практических целей.

Отметим, что для динамических систем и бифуркаций характерна, по выражению В.И.Арнольда, «тонкая игра дискретного и непрерывного», что мы старались отразить в настоящем пособии.

В качестве формы изложения материала выбраны задачи. Это удобно по следующим причинам. Во-первых, дает возможность читателю самостоятельно попробовать разобраться в соответствующих вопросах. Кроме того, возникает возможность, поэтапно решая задачи, продвигаться вперед «шаг за шагом», четко фиксируя результаты каждого такого шага.

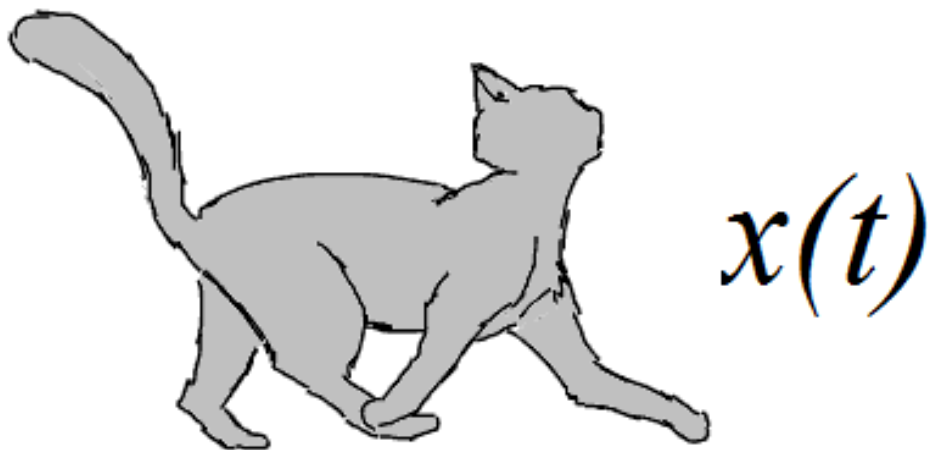
В основу книги положен курс лекций «Динамические системы и бифуркации», разработанный автором для Факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Со временем курс развивался и дополнялся.

Автор выражает благодарность С.П.Кузнецову и И.Р.Сатаеву за полезное обсуждение и Ю.В.Седовой, Н.В.Станкевич, А.В.Савину и Л.В.Тюрюкиной за помощь.



Часть I.

Динамические системы



Динамические системы. Примеры и простейшие свойства

1. Продемонстрируйте свойства гармонического осциллятора $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ как динамической системы. Для этого найдите матрицу эволюции, позволяющую определить вектор-столбец, составленный из величин $x(t)$ и $\dot{x}(t)$, в любой момент времени по его начальному значению. Вычислите определитель этой матрицы и прокомментируйте полученный результат. Здесь ω_0 – собственная частота осциллятора.

Решение 1. Решая дифференциальное уравнение гармонического осциллятора с начальными условиями x_0, \dot{x}_0 , получим зависимости координаты и скорости от времени

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t,$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 x_0 \sin \omega_0 t + \dot{x}_0 \cos \omega_0 t.$$

В матричной форме эти соотношения можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t & \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \\ -\omega_0 \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица и задает оператор эволюции, позволяющий определять состояния системы в любой момент времени по начальному состоянию. Вычисляя определитель этой матрицы, получаем $J = 1$. Поскольку определитель отвечает за сжатие (расширение) элементарных площадок на фазовой плоскости, то получаем, что рассматриваемая система является *консервативной*. Для нее элементарные площадки не меняют своей площади.

2. Решите аналогичную задачу для осциллятора с затуханием $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, где параметр затухания $\alpha < \omega_0$. Найдите якобиан соответствующей матрицы и обсудите свойства сжимаемости на фазовой плоскости.

Решение 2. Решая соответствующее дифференциальное уравнение для осциллятора с затуханием при $\alpha < \omega_0$ с начальными условиями x_0, \dot{x}_0 можно получить следующие зависимости координаты и скорости от времени:

$$x(t) = \left(x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + \alpha x_0}{\omega} \sin \omega t \right) e^{-\alpha t},$$

$$\dot{x}(t) = \left(-\frac{(\alpha^2 + \omega^2)x_0 + \alpha\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + \dot{x}_0 \cos \omega t \right) e^{-\alpha t},$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$. В матричном виде эти соотношения можно переписать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = e^{-\alpha t} \cdot \begin{pmatrix} \cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ -\frac{\alpha^2 + \omega^2}{\omega} \sin \omega t & \cos \omega t - \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получили оператор эволюции системы в явном виде. Вычисляя якобиан этой матрицы, получаем $J = e^{-\alpha t}$. Поскольку параметр диссипации $\alpha > 0$, то якобиан меньше единицы. Это означает, что система *диссипативна*, и небольшая площадка на фазовой плоскости с течением времени сжимается. Скорость сжатия управляется параметром затухания осциллятора.

3. Простейший генератор электромагнитных колебаний, содержащий активный элемент в виде электронной лампы или транзистора, описывается *уравнением Ван дер Поля*

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Представьте это уравнение в «стандартной» для динамической системы форме. Рассмотрите также случай *неавтономной системы* с внешним воздействием:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = A \sin \omega t.$$

Решение 3. Уравнение двумерной и трехмерной динамической системы в стандартной форме имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, z), & \dot{x} &= f(x, y, z), \\ \dot{y} &= g(x, y, z), & \dot{y} &= g(x, y, z), \\ \dot{z} &= v(x, y, z). & \dot{z} &= v(x, y, z). \end{aligned}$$

Выполним в исходном уравнении Ван дер Поля $\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0$ замену переменной $y = \dot{x}$. Тогда оно приводится к стандартному виду:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\lambda - x^2)y - x. \end{aligned}$$

В случае неавтономной системы необходимо ввести третью переменную $z = \omega t$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\lambda - x^2)y - x + A \sin z, \\ \dot{z} &= \omega. \end{aligned}$$

Таким образом, систему Ван дер Поля с внешним сигналом можно рассматривать как трехмерную динамическую систему.

Отметим, что значение уравнения Ван дер Поля выходит за рамки описания электронных генераторов – оно является универсальной моделью автоколебаний для систем различной физической природы.

4. Одной из первых систем, для которой был обнаружен динамический хаос, являлась простая модель тепловой конвекции в атмосфере – *система Лоренца*:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}$$

Здесь σ , r , b — параметры. Установите значения параметров, при которых модель Лоренца является диссипативной.

Решение 4. Уравнения трехмерной потоковой системы задают в фазовом пространстве (x, y, z) некоторое векторное поле:

$$V(f(x, y, z), g(x, y, z), v(x, y, z)).$$

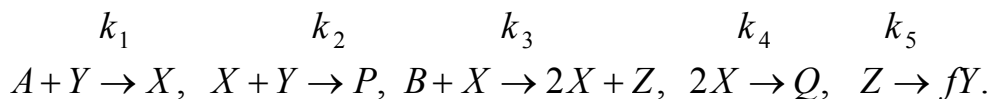
Вычисляя дивергенцию этого поля $div V = f'_x + g'_y + v'_z$, можно судить о его сжимаемости. Вычисляя соответствующие частные производные для системы Лоренца, получаем

$$div V = -\sigma - 1 - b.$$

Таким образом, поток является сжимающим, если $div V < 0$, так что система диссипативна, если

$$\sigma + 1 + b > 0.$$

5. Белоусовым и Жаботинским была открыта *колебательная химическая реакция*, в ходе которой раствор периодическим образом меняет цвет. Филд и Нойес предложили упрощенную схему этой реакции, модель, которую называют *орегонатором*:



Здесь k_i – коэффициенты, отвечающие за скорость соответствующего процесса, A и B – исходные реагенты, P и Q – продукты реакции, X , Y , Z – промежуточные соединения. Получите динамическую систему для переменных X , Y , Z , описывающую эту реакцию.

Решение 5. Необходимо написать соответствующие *кинетические уравнения*¹. Они определяют скорости изменения переменных в соответствии со схемой реакции. В данном случае имеем:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= k_1Ay - k_2xy + k_3Bx - 2k_4x^2, \\ \dot{y} &= -k_1Ay - k_2xy + fk_5z, \\ \dot{z} &= k_3Bx - k_5z.\end{aligned}$$

В безразмерной форме нетрудно получить

$$\begin{aligned}\dot{x} &= s(y - xy + x - qx^2), \\ \dot{y} &= \frac{1}{s}(-y - xy + fz), \\ \dot{z} &= w(x - z).\end{aligned}$$

Приведем типичные значения параметров: $s=77.27$, $q = 8.375 \cdot 10^{-6}$, $w = 0.161 \cdot k_5$, $0 < k_5 < 1$, $0 < f < 2$.

Замечательная особенность кинетических уравнений состоит в том, что получаются соотношения, отвечающие стандартной форме для динамической системы. В частности, это явилось одним из мотивов построения Ресслером целой «коллекции» модельных уравнений.

6. Найдите матрицу возмущений, описывающую эволюцию малых элементов на фазовой плоскости, для *отображения типа Эно*

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) - by_n, \\ y_{n+1} &= x_n.\end{aligned}$$

Из ее вида установите, когда это отображение консервативно, а когда диссипативно. Зависит ли это от вида функции $f(x)$? Покажите, что данное отображение *обратимо*.

Решение 6. Если динамическая система на плоскости задана в общем виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y),\end{aligned}$$

то эволюция малых элементов dx и dy происходит в соответствии с *матрицей возмущений* (матрицей Якоби)

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix}.$$

¹ При этом используется так называемый «закон действующих масс». Подробнее см. Колебания и бегущие волны в химических системах. М.: Мир, 1988, с. 168-169.

Для отображения типа Эно, вычисляя соответствующие частные производные, получаем

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} f'(x) & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Якобиан матрицы \hat{M} равен $J = b$ и не зависит от фазовых переменных. Таким образом, это отображение относится к классу *отображений с постоянным якобианом*. Оно диссипативно при $b < 1$ и консервативно при $b = 1$. Эти свойства не зависят от вида функции $f(x)$.

Уравнения, задающие отображение типа Эно, можно переписать в виде

$$\begin{aligned} x_n &= y_{n+1}, \\ y_n &= \frac{f(y_{n+1}) - x_{n+1}}{b}. \end{aligned}$$

Таким образом, получено выражение для значений переменных от их значений на последующем шаге. Это означает обратимость такого отображения.

7. Предлагается следующая классификационная схема построения эталонных модельных отображений:

- линейное отображение $x_{n+1} = \lambda + x_n$;
- логистическое отображение $x_{n+1} = \lambda - x_n^2$;
- кубическое отображение $x_{n+1} = a + bx_n \pm x_n^3$;
- ...

Продолжите этот ряд, минимизируя на каждом шаге число существенных параметров с помощью замен в виде сдвига динамической переменной и перенормировки переменной и параметров. Сравните такой анализ с подходом *теории катастроф*.

Решение 7. Пусть имеется отображение общего вида $x_{n+1} = f(x_n)$. Для построения системы моделей можно использовать разложение в ряд Тейлора функции $y = f(x)$ в окрестности некоторой точки². Для простоты поместим систему координат в эту точку. Тогда

$$y = f_0 + f'_0 \cdot x + \frac{1}{2} f''_0 \cdot x^2 + \frac{1}{6} f'''_0 \cdot x^3 + \frac{1}{24} f^{IV}_0 \cdot x^4 + \dots + \frac{1}{n!} f_0^{(n)} x^n + \dots$$

Здесь f_0 – значение функции в начале координат, а f'_0, f''_0, f'''_0 и т.д. – производные, вычисленные в этой точке.

² При этом функция должна, строго говоря, удовлетворять некоторым условиям, например, не иметь разрывов. Для нас здесь достаточно интуитивного представления о «гладкости» функции.

Чем больше членов ряда Тейлора сохранить, тем более точно описывается функция в окрестности начала координат. Этот факт имеет простой геометрический смысл. Если сохранить только линейный член, т.е. $y = f_0 + f'_0 \cdot x + \dots$, то мы заменяем функцию касательной. Если удержать члены до квадратичного включительно, то функция аппроксимируется более точно – квадратичной параболой. Если удержать кубический член, то аппроксимация станет еще более точной. Одновременно расширяется область, в которой аппроксимация эффективна.

Оставим сначала только линейный член:

$$x_{n+1} = f_0 + f'_0 \cdot x_n.$$

Изменяя масштаб переменной в f'_0 раз и вводя обозначение $\lambda = f_0 / f'_0$, получаем *линейное отображение*:

$$x_{n+1} = \lambda + x_n.$$

Учтем следующий член ряда Тейлора:

$$x_{n+1} = f_0 + f'_0 \cdot x_n + \frac{1}{2} f''_0 \cdot x_n^2.$$

Мы получили *квадратичное отображение*, в которое входит уже три коэффициента, которые удобно обозначить через A, B, C :

$$x_{n+1} = A + Bx_n + Cx_n^2.$$

Заменой переменной типа сдвига $x \rightarrow x - \frac{B}{2C}$ можно устранить линейный член. В результате получаем:

$$x_{n+1} = D + Cx_n^2,$$

где $D = A + \frac{B}{2C} - \frac{B^2}{4C}$. Теперь изменим масштаб переменной, так что $x \rightarrow \alpha x$:

$$x_{n+1} = \frac{D}{\alpha} + C\alpha x_n^2.$$

Подбором параметра $\alpha = -1/C$ это отображение приводится к виду

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2,$$

где $\lambda = -CD$. Таким образом, мы получили *логистическое отображение*³.

Такой анализ можно продолжить, и удержать кубический член ряда:

$$x_{n+1} = f_0 + f'_0 \cdot x_n + \frac{1}{2} f''_0 \cdot x_n^2 + \frac{1}{6} f'''_0 \cdot x_n^3,$$

³ Иногда используют другую нормировку, так что $x_{n+1} = \lambda - x_n^2$.

или

$$x_{n+1} = A + Bx_n + Cx_n^2 + Dx_n^3.$$

Заменой типа сдвига $x \rightarrow x - \frac{C}{3D}$ устраним квадратичный член:

$$x_{n+1} = E + Gx_n + Dx_n^3.$$

Здесь $E = A - \frac{BC}{3D} + \frac{2C^3}{27D^2}$, $G = B - \frac{C^2}{3D}$. Затем изменяем масштаб переменной

$x \rightarrow \alpha x$:

$$x_{n+1} = \frac{E}{\alpha} + Gx_n + D\alpha^2 x_n^3.$$

Если выбрать $\alpha = \frac{1}{\sqrt{|D|}}$ и ввести обозначения $a = E\sqrt{D}$, $b = G$, то приходим

к *кубическому отображению*

$$x_{n+1} = a + bx_n \pm x_n^3.$$

Отметим, что «спрятать» знак перед кубическим членом нельзя, потому что переменная x нормируется на величину $\alpha = \frac{1}{\sqrt{|D|}}$, которая всегда положительна. При этом знак выбирается в соответствии со знаком D .

Теперь нетрудно уже просто «угадать» вид *квартичного* трехпараметрического отображения:

$$x_{n+1} = a + bx_n + cx_n^2 + x_n^4.$$

Здесь следует сделать одно существенное замечание. Если исходная функция $f(x)$ задана, то коэффициенты ряда Тейлора – это некоторые числа. Если она зависит от параметра (параметров), то эти коэффициенты сами будут некоторыми функциями этих параметров. Представленный здесь подход интересен в том плане, что можно рассматривать λ или a , b и т.д. как *новые параметры*. При этом, если мы изучим поведение полученных отображений при всех их значениях, то мы, в определенной мере, получим полную картину явлений в одно-, двух-, трех и более параметрических отображениях. Такой подход замечателен тем, что позволяет понять *универсальность* получаемых результатов. В его рамках в рассмотрение вводится система универсальных моделей со все более сложным поведением, при этом возрастет число существенных параметров, от которого это поведение зависит. Это важный принцип теории бифуркаций. Минимальное для данного типа поведения число существенных параметров носит специальное название – *корузмерность*.

Нетрудно видеть, что описанная схема аналогична конструированию канонических одномерных моделей в *теории катастроф*. Приведем построенную систему моделей. В скобках указана терминология в соответствии с теорией катастроф.

- $x_{n+1} = \lambda + x_n$ – линейное отображение,
- $x_{n+1} = \lambda - x_n^2$ – логистическое отображение (складка),
- $x_{n+1} = a + bx_n \pm x_n^3$ – кубическое отображение (сборка),
- $x_{n+1} = a + bx_n + cx_n^2 - x_n^4$ – четвертичное отображение (ласточкин хвост),
- $x_{n+1} = a + bx_n + cx_n^2 + dx_n^3 \pm x_n^5$ – отображение пятой степени (бабочка) и т.д.

8. Постройте аналогичный ряд для двумерных отображений с постоянным якобианом.

Решение 8. Используя формулу

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) - \varepsilon y_n, \\ y_{n+1} &= x_n,\end{aligned}$$

можно получить соответствующий ряд многопараметрических двумерных отображений. Первую строчку в такой классификации для нелинейного случая будет занимать *отображение Эно*

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 - \varepsilon y_n, \\ y_{n+1} &= x_n.\end{aligned}$$

Следующую строку занимает двумерное кубическое отображение

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= a + bx_n \pm x_n^3 - \varepsilon y_n, \\ y_{n+1} &= x_n,\end{aligned}$$

которое иногда называют *отображением Холмса* и т.д.

Конструирование отображений

9. Покажите, что отображение

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right),$$

можно использовать для вычисления квадратного корня из числа a . (Такой способ применяли еще в древнем Вавилоне). Для $a=2$ найдите первые пять членов последовательности x_n , порождаемых этим отображением, и сравните ре-

зультат с точным. Величину x_1 положите равной единице. Можно ли использовать для вычисления квадратного корня отображение $x_{n+1} = \frac{a}{x_n}$?

Решение 9. Проверим сначала эффективность алгоритма. Полагая $a = 2$ и $x_1 = 1$, получаем:

$$x_2 = 1.5, x_3 = 1.41666\dots, x_4 = 1.41421\dots$$

Точное значение $\sqrt{2} = 1.41421\dots$ Таким образом, алгоритм работает, и сходимость достаточно быстрая.

Обоснуем этот результат. Итерационная процедура будет сходиться к *неподвижной точке* отображения, которую ищем из уравнения $x_0 = f(x_0)$:

$$x_0 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right).$$

Таким образом $x_0 = \sqrt{a}$. Этого, однако, недостаточно – необходимо также, чтобы точка была *устойчивой*. Для исследования на устойчивость вычисляем *мультипликатор* в неподвижной точке:

$$\mu = f'(x_0) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2x_0^2} = 0.$$

Использованный итерационный алгоритм устойчив. Более того, поскольку мультипликатор равен нулю, то он характеризуется максимальной скоростью сходимости (*сверхсходимостью*).

Отображение $x_{n+1} = \frac{a}{x_n}$, хотя и имеет такую же неподвижную точку

$x_0 = \sqrt{a}$, но характеризуется мультипликатором $\mu = f'(x_0) = -\frac{a}{x_0^2} = -1$, т.е. не

подходит для реализации итерационного метода.

10. Имеется бесконечная цепочка сопротивлений, показанная на рис.1. Получите дискретное отображение, позволяющее определить величину сопротивления x_{n+1} цепочки, составленной из $n+1$ звеньев, по величине сопротивления x_n цепочки из n звеньев. Сопротивления всех резисторов одинаковы и равны 1 Ом. Определите сопротивление бесконечной цепочки x_0 , найдя неподвижную точку полученного отображения. Исследуйте ее устойчивость. Проиллюстрируйте решение с помощью *итерационной диаграммы* в виде зависимости $x_{n+1} = f(x_n)$. Сколько элементов должна содержать цепочка, чтобы ее сопро-

тивление равнялось величине x_0 с точностью до 1%? Что измениться, если крайнее правое сопротивление равно 100 Ом?

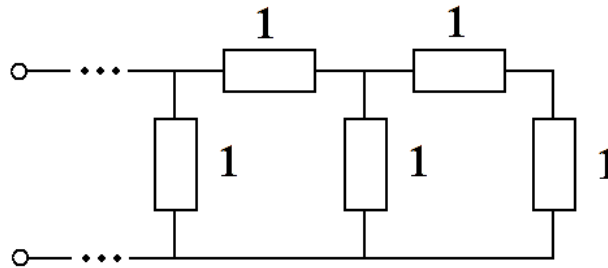


Рис.1. Цепочка сопротивлений.

Решение 10. Эквивалентная схема для построения отображения приведена на рис.2.

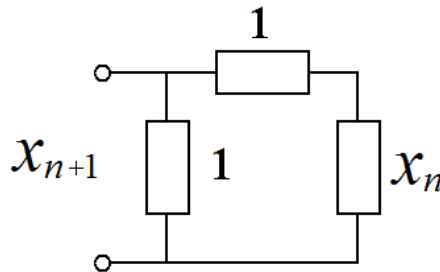


Рис.2. Эквивалентная схема цепочки сопротивлений.

По правилам расчета параллельного и последовательного соединения резисторов получаем

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{x_n + 1}{x_n + 2}.$$

Это и есть искомое отображение. Итерационная диаграмма, иллюстрирующая построение последовательности x_n с помощью графика $f(x)$, дана на рис.3.

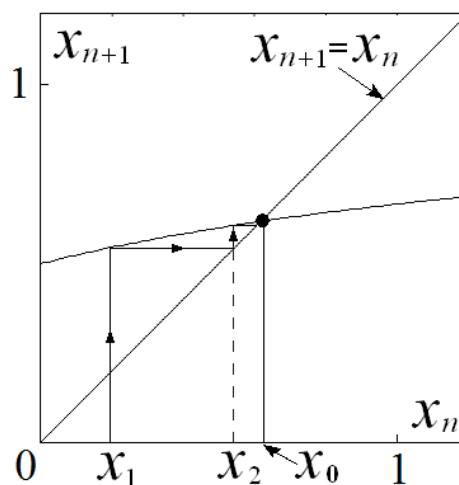


Рис.3. Итерационная диаграмма отображения для цепочки сопротивлений.

Как видно из рисунка, отображение имеет неподвижную точку $x_0 = f(x_0)$, отвечающую пересечению биссектрисы и графика функции. Отсюда следует ответ к задаче об определении сопротивления бесконечной цепочки:

$$x_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618034\dots$$

Необходимо еще проверить, является ли это решение устойчивым. Для этого вычисляем мультипликатор в неподвижной точке:

$$\mu = f'(x_0) = \frac{1}{(2+x_0)^2} = \frac{4}{(\sqrt{5}+3)^2} \approx 0.145900\dots$$

Таким образом, $0 < \mu < 1$. Это означает, что итерации сходятся, причем весьма быстро, поскольку мультипликатор $\mu = f'(x_0)$ мал. В этом несложно убедиться, итерируя отображение.

Число звеньев в цепочке, n	x_n	Отклонение от неподвижной точки, %
1	$x_1=1$	
2	$x_2=2/3 \approx 0.666667$	7.86
3	$x_3=5/8 \approx 0.625000$	1.12
4	$x_4=13/21 \approx 0.619048$	0.16
5	$x_5=34/55 \approx 0.618182$	0.02
...
∞	$x_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618034$	0

Из таблицы видно, что, цепочку всего из трех звеньев можно считать «бесконечной» с точностью почти до 1%, а из пяти – уже с точностью до 0.02%.

Если начальное значение x_1 изменить, то все равно процесс будет сходиться к неподвижной точке в силу ее устойчивости, просто понадобится несколько большее число итераций. При этом сходимость очень быстрая, например, для $x_1=100$ получаем $x_2=0.9902\dots$, $x_3=0.6657\dots$, $x_4=0.6249$ и т.д.

Отметим, что неподвижная точка данного отображения отвечает так называемому *золотому сечению* $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, наиболее удобному для исследований иррациональному числу, а последовательность x_n во втором столбце таблицы отве-

чает его рациональным аппроксимантам с помощью чисел Фибоначчи F_n :

$x_n = \frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}$, которые сами получаются с помощью итерационной процедуры:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \text{ причем } F_0 = 0, F_1 = 1.$$

Таким образом,

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, \dots$$

Сравните приведенную последовательность с данными таблицы 1.

11. Тенисон, Либерман и Лихтенберг рассмотрели следующую систему: луч света может бежать между двумя зеркалами, одно из которых имеет «гофрировку» в виде гармонической функции $y(x) = h + a \cos kx$, рис.4. Здесь a – амплитуда гофрировки, h – среднее расстояние между зеркалами. Получите двумерное дискретное отображение, описывающее динамику этой системы, считая гофрировку слабой. В качестве переменных используйте угол падения луча на нижнее зеркало φ_n и координату x_n падения луча на верхнее зеркало.

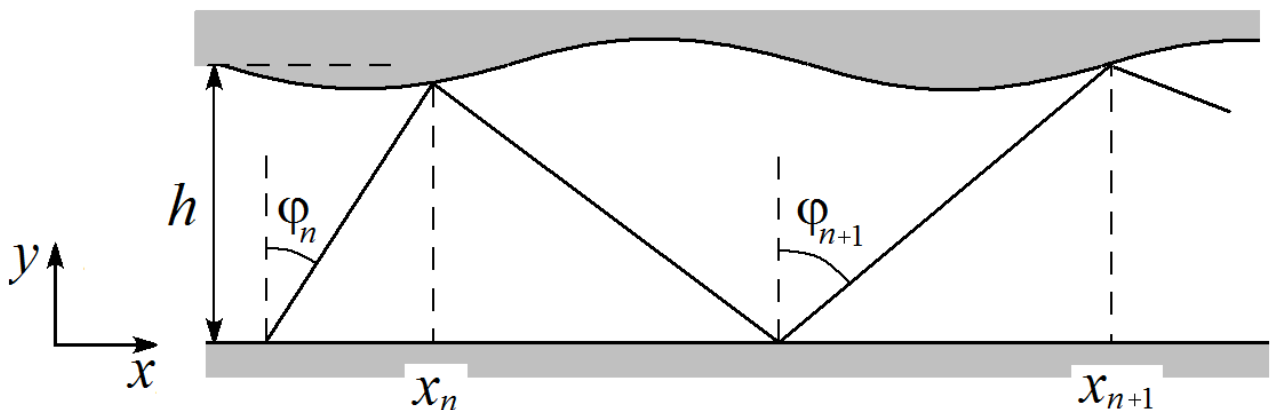


Рис.4. Луч света, распространяющийся между двух отражающих поверхностей и переменные для построения отображения.

Решение 11. Пусть луч падает на гофрированное зеркало в точке с координатой x_n . Считая гофрировку слабой, несложно найти угол α наклона зеркала в этой точке. Действительно, при малых углах $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$. В свою очередь, $\operatorname{tg} \alpha \approx y'(x) = -ak \sin kx$, и для точки x_n имеем $\alpha = -ak \sin kx_n$.

Пусть луч падает на верхнее зеркало в точке O, рис.5. Построим нормаль в этой точке ON. Угол между падающим на верхнее зеркало лучом и нормалью будет равен $\varphi_{n+1} = \varphi_n + \alpha$.

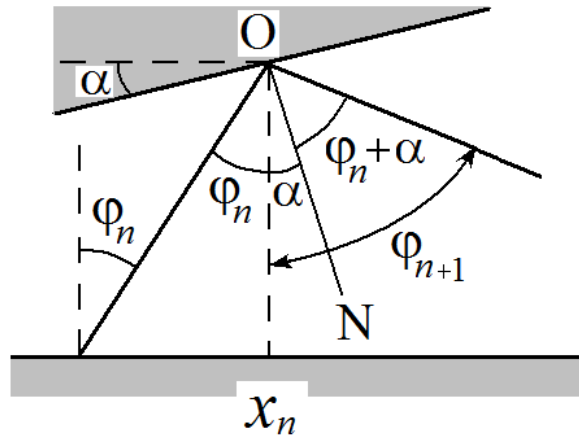


Рис.5. Отражение луча света от гофрированной поверхности.

Из геометрического построения на рис.5 и правила «угол падения равен углу отражения», получаем, что луч отражается от верхнего зеркала под углом $\varphi_n + 2\alpha$. Этот же угол отвечает следующему падению луча на нижнее зеркало, поэтому $\varphi_{n+1} = \varphi_n + 2\alpha$. Кроме того, из геометрических соображений и рис.5 ясно, что $(x_{n+1} - x_n) = 2htg\varphi_{n+1}$. Собирая результаты вместе, получаем двумерное отображение

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \varphi_n - 2ak \sin kx_n, \\ x_{n+1} &= x_n + 2htg\varphi_{n+1}.\end{aligned}$$

Вместо координаты x удобно ввести безразмерную фазовую переменную $\theta = kx$. Тогда получаем искомое *отображение Тенисона, Либермана и Лихтенберга*:

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \varphi_n - 2ak \sin \theta_n, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2hktg\varphi_{n+1}.\end{aligned}$$

Отметим, что обе фазовые переменные следует брать по модулю 2π . С точки зрения переменной θ это означает, что рассмотрение ведется в пределах одного периода синусоиды гофрировки. (Луч, переходя в следующий отрезок волновода, как бы попадает снова на тот же участок, но уже с противоположной стороны.)

Полученное отображение характеризуется двумя безразмерными параметрами, имеющими смысл амплитуды гофрировки ak и расстояния между зеркалами hk . Нетрудно показать, что якобиан отображения точно равен единице, так что оно является консервативным. Это понятно и из физических соображений. (При вычислении якобиана обратите внимание, что во второе уравнение входит член с φ_{n+1} .)

12. Получите *отображение Улама* для механической системы, являющейся моделью ускорения Ферми, рис.6. Стенка колеблется так, что ее скорость изменяется по гармоническому закону $V(t) = V_0 \sin \omega t$. Смещением стенки пренебечь, расстояние между стенками L . Все удары упругие.

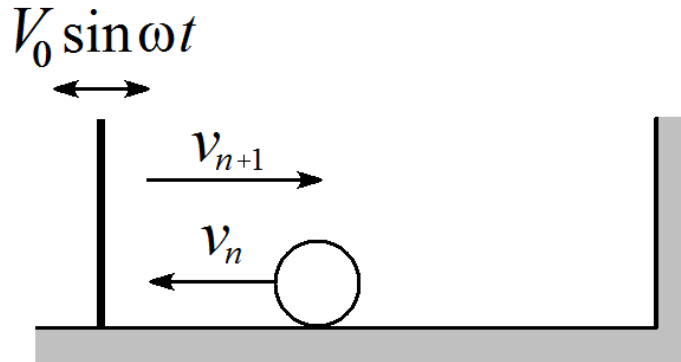


Рис.6. К построению модели Улама.

Решение 12. Поместим начало координат в точку положения вибрирующей стенки. (Ее смещениями пренебрегаем.) Пусть скорость шарика перед n -ым ударом об эту стенку равна v_n . Перейдем в систему отсчета, связанную со стенкой. В этой системе отсчета шарик налетает на стенку со скоростью $v_n + V_0 \sin \omega t$. При ударе по условию задачи шарик теряет долю скорости, пропорциональную величине ε . Тогда в этой системе отсчета скорость шарика после n -го удара будет равна $(1 - \varepsilon)(v_n + V_0 \sin \omega t_n)$ и изменит направление. Вернемся в исходную систему отсчета, и находим скорость шарика после удара $(1 - \varepsilon)(v_n + V_0 \sin \omega t_n) + V_0 \sin \omega t_n$. Нетрудно видеть, что это же значение отвечает скорости шарика перед $(n+1)$ -ым ударом, так что

$$v_{n+1} = (1 - \varepsilon)v_n + (2 - \varepsilon)V_0 \sin \omega t_n.$$

Мы пока не получили замкнутую систему уравнений, поскольку искомое отображение должно быть двумерным. В качестве второй переменной удобно выбрать момент времени t_n столкновения шарика со стенкой. После удара о подвижную стенку шарик движется равномерно со скоростью v_{n+1} . Очередное соударение с подвижной стенкой произойдет через время $2L/v_{n+1}$. Тогда $t_{n+1} = t_n + 2L/v_{n+1}$. Собирая результаты вместе, получаем двумерное отображение:

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= t_n + 2L/v_{n+1}, \\ v_{n+1} &= (1 - \varepsilon)v_n + (2 - \varepsilon)V_0 \sin \omega t_n. \end{aligned}$$

Обратите внимание, что в первое уравнение нужно подставлять проитерированное второе.

Отображение можно упростить, вводя безразмерные время (фазу) $\varphi = \omega t$ и скорость шарика $u = v/2L\omega$:

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \varphi_n + 1/v_{n+1} \pmod{2\pi}, \\ u_{n+1} &= bv_n + k \sin \omega t_n.\end{aligned}$$

Здесь $k = \frac{(2-\varepsilon)V_0}{2\omega L}$ – безразмерный параметр, характеризующий амплитуду колебаний стенки, $b = 1 - \varepsilon$ – параметр затухания. Символ $\text{mod } 2\pi$ означает снова, что полученное значение фазы нужно «вернуть» на интервал $0 < \varphi < 2\pi$, отбросив часть $2\pi m$, где m – целое число. Это вполне естественно, так как по физическому смыслу φ является фазой колебаний плиты, а отличающиеся на 2π значения фазы физически неразличимы⁴. Это отображение называют *отображением Улама*.

Рекомендуем самостоятельно вычислить якобиан этого отображения и показать, что при $0 < \varepsilon < 1$ оно диссипативно, а при $\varepsilon = 0$ – консервативно.

Заметим, что скорость v_n должна быть всегда положительной, поскольку только в этом случае происходит столкновение со стенкой, смещением которой можно пренебречь. Однако полученное отображение может демонстрировать и «нефизические» решения с отрицательной скоростью. Тем не менее, часто рассматривают и этот случай, считая такую модель отчасти формальной. Иногда ее «подправляют», беря значения скорости по абсолютной величине:

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \varphi_n + 1/v_{n+1} \pmod{2\pi}, \\ u_{n+1} &= |bv_n + k \sin \omega t_n|.\end{aligned}$$

13. Постройте «отображение прыгающего шарика» – решите аналогичную задачу в случае горизонтально расположенного вибрирующего стола, рис.7.

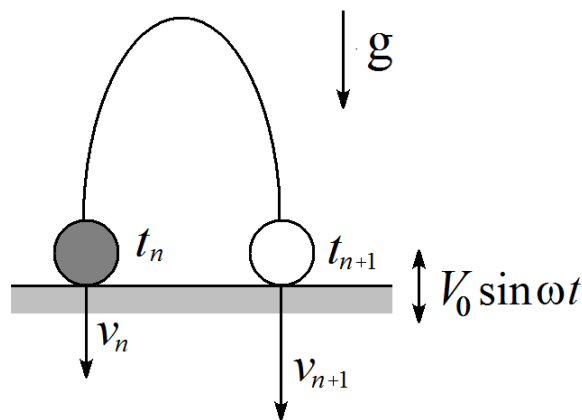


Рис.7. К построению отображения «прыгающего шарика».

⁴ Далее в целях сокращения записи соответствующий значок будем опускать.

Решение 13. Решение задачи аналогично предыдущей, отличие состоит лишь во времени, необходимого для возврата шарика: $2v_{n+1}/g$ вместо $2L/v_{n+1}$. В результате получаем отображение

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= t_n + 2v_{n+1}/g, \\ v_{n+1} &= (1-\varepsilon)v_n + (2-\varepsilon)V_0 \sin \omega t_n. \end{aligned}$$

Вводя безразмерные величины $\varphi = \omega t$, $u = 2\omega v/g$ и $k = \frac{2\omega(2-\varepsilon)V_0}{g}$, получаем:

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \varphi_n + v_{n+1}, \\ u_{n+1} &= bv_n + k \sin \varphi_n. \end{aligned}$$

Это *отображение прыгающего шарика*. В более общем контексте его называют диссипативной версией *стандартного отображения* (см. задачу 16).

14. Пусть имеется система, движущаяся в вязкой среде под действием периодической последовательности коротких импульсов большой амплитуды, которые можно заменить последовательностью дельта-функций. Величина импульса зависит от координаты тела в соответствии с некоторой функцией $f(x)$:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} = f(x) \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

Нарисуйте качественно траекторию на фазовой плоскости (x, \dot{x}) . Укажите точку x_n, \dot{x}_n сразу после n -го импульса, момент и результат действия очередного $(n+1)$ -го импульса и точку x_{n+1}, \dot{x}_{n+1} . Получите аналитически соответствующее отображение для данной системы. Обсудите частный случай постоянной амплитуды C . Имеет ли отображение неподвижные точки? Приведите его к безразмерному виду и покажите, что оно приводится к отображению типа Эно.

Указания. Если сила зависит от времени в соответствии с дельта-функцией $C\delta(t)$, то в результате импульса координата тела не меняется, а скорость возрастает на величину C . Для того, чтобы выполнить последнее задание, удобно представить отображение для координаты через скорость в $(n+1)$ -ый момент времени.

Решение 14. Сначала дадим качественную иллюстрацию динамики на фазовой плоскости. Фиксируем начальный момент времени непосредственно перед n -ым импульсом. Координата и скорость равны x_n, v_n . Иллюстрация динамики системы и выбора переменных дана на рис.8.

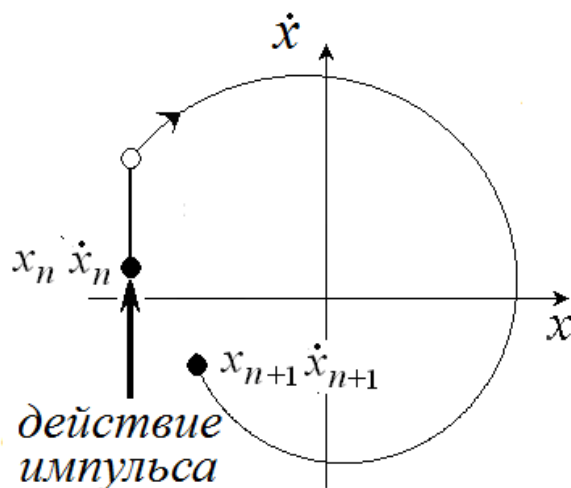


Рис.8. Эволюция системы двумерной динамической системы под действием импульса на фазовой плоскости. Белым кружочком показано «промежуточное» значение.

Действие дельта-образного импульса приводит к тому, что координата не меняется, а скорость получает добавку, равную амплитуде импульса $f(x_n)$. Таким образом, сразу после импульса координата будет равна x_n , а скорость станет равна $v_n + f(x_n)$. Полученное в результате положение изображающей точки показано на рис.8 белым кружочком.

Далее, в промежутке между импульсами, эволюция происходит в соответствии с автономным уравнением $\ddot{x} + \alpha\dot{x} = 0$. Решая его, получаем зависимость координаты и скорости от времени:

$$x(t) = x(0) + \frac{v(0)}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}), \quad v(t) = v(0)e^{-\alpha t},$$

где в качестве начальных значений следует использовать x_n и $v_n + f(x_n)$. Теперь можно найти координату и скорость к моменту $(n+1)$ -го импульса:

$$x_{n+1} = x_n + (v_n + f(x_n)) \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha},$$

$$v_{n+1} = (v_n + f(x_n)) e^{-\alpha T}.$$

Это и есть искомое отображение.

В частном случае импульсов постоянной амплитуды C получаем закон изменения координаты и скорости

$$x_{n+1} = x_n + (v_n + C) \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha},$$

$$v_{n+1} = (v_n + C) e^{-\alpha T}.$$

В этом случае получаем некоторую установившуюся среднюю скорость $v_0 = \frac{C}{e^{\alpha T} - 1}$. Координата же будет неограниченно нарастать, стремясь к асимптотическому закону $x_{n+1} = x_1 + \frac{nC}{\alpha}$. Таким образом, при $f(x) = C$ неподвижной точки нет.

В общем случае неподвижная точка отображения определяется из условий $v_0 = 0, f(x_0) = 0$. Физически это отвечает нулевой скорости в точке, для которой импульс внешней силы равен нулю.

Приведем отображение к безразмерному виду. Перенормируя скорость по правилу $y = \frac{v}{\alpha}(e^{\alpha T} - 1)$ и соответствующим образом функцию $f(x)$, получаем:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \varepsilon(y_n + f(x_n)), \\y_{n+1} &= \varepsilon(y_n + f(x_n)),\end{aligned}$$

где $\varepsilon = e^{-\varepsilon T}$ – параметр диссипации. Нетрудно показать, что якобиан этого отображения $J = \varepsilon$, так что оно является диссипативным при $\gamma > 0$ и консервативным при $\gamma = 0$, что ясно и из физических соображений.

Следуя условию задачи, замечаем, что отображение можно представить также в виде

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + y_{n+1}, \\y_{n+1} &= \varepsilon(y_n + f(x_n)).\end{aligned}$$

Из первого уравнения видно, что удобно ввести переменную $Y_n = x_n - y_n$. Тогда:

$$\begin{aligned}Y_{n+1} &= x_n, \\x_{n+1} &= F(x_n) - \varepsilon Y_n,\end{aligned}$$

где $F(x) = (1 + \varepsilon)x + \varepsilon f(x)$. Таким образом, система приводится к *отображению типа Эно*.

15. Рассмотрите *ротатор* – вращающийся маятник с затуханием с нулевой собственной частотой – под действием внешнего сигнала, представляющего собой постоянный вращательный момент M и импульсную силу, создающую дополнительный вращающий момент:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} = M + \varepsilon \sin x \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

Покажите, что такая система приводится к двумерному *отображению кольца*

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \Omega + k \sin x_n + br_n, \\r_{n+1} &= br_n + k \sin x_n.\end{aligned}$$

Укажите физический смысл безразмерных параметров в этом отображении. Рассмотрите частные случаи сильной и нулевой диссипации.

Решение 15. Решение задачи аналогично предыдущей. Отличие состоит в динамике системы в промежутке между импульсами. В этом случае уравнение $\ddot{x} + \alpha \dot{x} = M$ имеет решение

$$\begin{aligned}x(t) &= x(0) + \left(v(0) - \frac{M}{\alpha} \right) \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} + \frac{M}{\alpha} t, \\v(t) &= \left(v(0) - \frac{M}{\alpha} \right) e^{-\alpha t} + \frac{M}{\alpha}.\end{aligned}$$

Соответственно, отображение имеет вид:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \left(v_n + \varepsilon \sin x_n - \frac{M}{\alpha} \right) \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} + \frac{M}{\alpha} T, \\v_{n+1} &= \left(v_n + \varepsilon \sin x_n - \frac{M}{\alpha} \right) e^{-\alpha T} + \frac{M}{\alpha}.\end{aligned}$$

Удобно ввести переменную $y = v - \frac{M}{\alpha}$, характеризующую скорость во вращающейся системе отсчета. Тогда

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + (y_n + \varepsilon \sin x_n) \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} + \frac{M}{\alpha} T, \\y_{n+1} &= (y_n + \varepsilon \sin x_n) e^{-\alpha T}.\end{aligned}$$

Вводя переменные и параметры

$$r = \frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha} y, \quad b = e^{-\varepsilon T}, \quad k = \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} \varepsilon, \quad \Omega = \frac{M}{\alpha} T,$$

получаем *отображение кольца*

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \Omega + k \sin x_n + br_n, \\r_{n+1} &= br_n + k \sin x_n.\end{aligned}$$

Параметр Ω отвечает за постоянное «вращение» переменной в отсутствии импульсов, параметр b характеризует диссипацию, а k – амплитуду внешних импульсов.

В случае сильной диссипации $\alpha \rightarrow \infty$ и тогда $b \rightarrow 0$. В этом случае первое уравнение отображения кольца редуцируется к *синус-отображению окружности*:

$$x_{n+1} = x_n + \Omega + k \sin x_n.$$

В случае отсутствия диссипации $\alpha = 0$ и $b = 1$. Таким образом, в консервативном случае отображение кольца приводится к

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \Omega + k \sin x_n + r_n, \\r_{n+1} &= r + k \sin x_n.\end{aligned}$$

16. Получите отображение для подталкиваемого ротатора в случае отсутствия постоянного вращающегося момента – диссипативную и консервативную версии *стандартного отображения*.

Решение 16. В этом случае удобно выбрать запись первого уравнения, в которой использовано значение переменной r_{n+1} . Переписывая отображение кольца соответствующим образом, получаем:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \Omega + r_{n+1}, \\r_{n+1} &= br + k \sin x_n.\end{aligned}$$

В случае отсутствия постоянного вращающегося момента $\Omega = 0$, и тогда

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + r_{n+1}, \\r_{n+1} &= br + k \sin x_n.\end{aligned}$$

Это диссипативная версия *стандартного отображения*. Консервативное стандартное отображение имеет вид:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + r_{n+1}, \\r_{n+1} &= r + k \sin x_n.\end{aligned}$$

Его еще называют *отображением Чирикова-Тейлора*.

17. Систему из задачи 15 иногда приводят к виду *отображения Заславского*

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \frac{\Omega}{2\pi} + \frac{K}{\Gamma} (1 - e^{-\Gamma}) \sin(2\pi x_n) + \frac{1 - e^{-\Gamma}}{\Gamma} y_n, \\y_{n+1} &= e^{-\Gamma} (y_n + \varepsilon \sin 2\pi x_n).\end{aligned}$$

Найдите выражения для параметров отображения Заславского. Минимизируйте число параметров в отображении Заславского, и покажите, что оно приводится к отображению кольца.

Решение 17. Используем полученное в 15 размерное отображение

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + (y_n + \varepsilon \sin x_n) \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} + \frac{M}{\alpha} T, \\y_{n+1} &= (y_n + \varepsilon \sin x_n) e^{-\alpha T}.\end{aligned}$$

Если выполнить замену переменных и параметров

$$x \rightarrow 2\pi x, \quad y \rightarrow \frac{2\pi y}{T}, \quad \Gamma = \gamma T, \quad K = \frac{\varepsilon T}{2\pi}, \quad \Omega = \frac{MT}{\alpha},$$

то оно приводится к отображению кольца. Отображение Заславского содержит четыре параметра, т.е. является «переопределенным» по сравнению с отображением кольца.

18. Рассмотрите неавтономный генератор пилообразных колебаний⁵, для которого момент запуска каждого очередного импульса управляется сигналом, промодулированным по гармоническому закону $U(t) = U_0 + U_m \sin \omega t$ около некоторого среднего значения U_0 , рис.9. Получите дискретное отображение, дающее зависимость момента начала $(n+1)$ -го импульса t_{n+1} от момента начала n -го импульса t_n и покажите, что оно совпадает с синус-отображением окружности. Длительность импульсов в автономном режиме равна T .

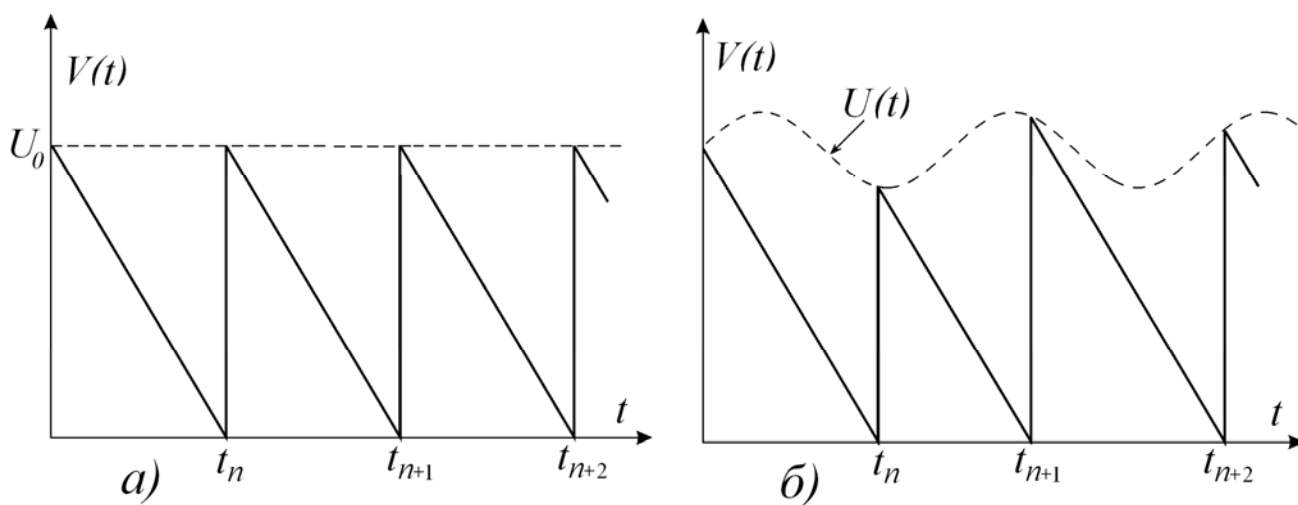


Рис.9. Сигнал автономного (а) и неавтономного (б) генератора пилообразных колебаний.

Решение 18. Для рассматриваемого генератора в автономном режиме в диапазоне $t_n < t < t_{n+1}$ выходной сигнал $V(t)$ убывает от значения U_0 до нуля по линейному закону:

$$V(t) = U_0 - \frac{U_0}{T}(t - t_n).$$

После этого напряжение скачком увеличивается до величины U_0 , и процесс повторяется. Колебания в этом случае будут периодическими во времени с периодом T .

Теперь введем внешнее воздействие, изменяющее верхний порог по гармоническому закону: $U(t) = U_0 + U_m \sin \omega t$. В этом случае «стартовое» значение напряжения равно $U(t_n)$, и напряжение от времени в пределах одного импульса зависит от времени в соответствии с соотношением

⁵ Простейший вариант физической модели такого генератора может быть реализован при помощи неоновой лампы.

$$V(t) = U(t_n) - \frac{U_0}{T}(t - t_n) = U_0 + U_m \sin \omega t_n - \frac{U_0}{T}(t - t_n).$$

Нетрудно получить соотношение, связывающее моменты времени t_{n+1} и t_n , в которые напряжение обращается в нуль:

$$U_0 + U_m \sin \omega t_n - \frac{U_0}{T}(t_{n+1} - t_n) = 0.$$

Разрешая это соотношение относительно t_{n+1} , получим:

$$t_{n+1} = t_n + T(1 + \frac{U_m}{U_0} \sin \omega t_n).$$

Это и есть искомое отображение. Его удобно записать в безразмерном виде, переходя к безразмерной переменной $\theta_n = \omega t_n$:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega + k \sin \theta_n.$$

В такой форме его называют *синус-отображением окружности*. Оно содержит два параметра. Один из них $\Omega = \omega T = 2\pi\omega / \omega_0$, где $\omega_0 = 2\pi/T$ – частота собственных колебаний генератора. Поэтому параметр Ω можно интерпретировать как расстройку по частоте внешнего сигнала и собственных колебаний системы. Второй параметр $k = \omega T U_m / U_0$ представляет собой безразмерную амплитуду внешнего воздействия.

Отметим, что из нашего рассмотрения можно получить общий вид отображения окружности

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega + k \cdot f(\theta_n),$$

где $f(\theta)$ – 2π -периодическая функция. В рамках изложенной физической интерпретации она задается законом модуляции внешнего сигнала. Она не обязательно является гладкой, а может представлять собой импульсы прямоугольной, треугольной или другой формы.

19. Пусть имеется автоколебательная система, установившемся режиму которой на фазовой плоскости отвечает движение по предельному циклу в виде окружности радиуса R , рис.10. В отсутствие внешнего воздействия за время t точка поворачивается на угол $\theta = \omega t$. Пусть на такую систему через определенные моменты времени T действуют внешние импульсы, которые приводят к изменению ординаты точки на постоянную величину – амплитуду импульса V . Такая модель была предложена канадским биофизиком Гласом для моделирования биофизических систем. Получите одномерное отображение для переменной θ_n . К кому типу оно относится? Для простоты положим частоту вращения $\omega = 1$.

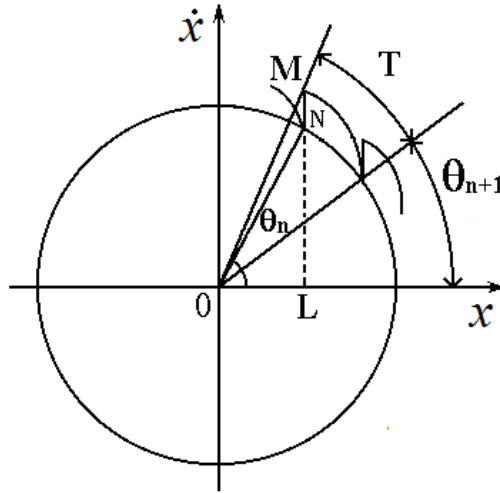


Рис.10. Иллюстрация построения отображения для системы с предельным циклом под импульсным воздействием.

Решение 19. Пусть изображающая точка непосредственно перед n -ым внешним импульсом находится в точке N и характеризуется углом θ_n , рис.10. В результате действия импульса изображающая точка на фазовой плоскости «поднимается» вверх на величину B , и попадает в точку M . Затем наступает период автономной эволюции в течение времени T , а изображающая точка успевает вернуться на предельный цикл. Теперь она характеризуется углом θ_{n+1} . Как видно из рис.10

$$\operatorname{tg}(\theta_{n+1} + T) = \frac{MN + NL}{OL}.$$

В свою очередь $OL = R \cos \theta_n$, $NL = R \sin \theta_n$, $MN = B$. Поэтому

$$\operatorname{tg}(\theta_{n+1} + T) = \frac{B + R \sin \theta_n}{2R \cos \theta_n}.$$

Разрешая это соотношение относительно θ_{n+1} , получаем одномерное отображение

$$\theta_{n+1} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin \theta_n + C}{\cos \theta_n}\right) - T.$$

Здесь $C = B/R$ – нормированная амплитуда воздействия.

Это и есть *отображение Гласа*. Оно представляет собой вариант отображения окружности.

20. Получите отображение, описывающее разгон релятивистской частицы в циклическом резонансном ускорителе заряженных частиц — циклотроне. Частица вращается в однородном магнитном поле B с циклотронной частотой $\omega_c = qB_0/m$ (q и m — заряд и масса частицы), периодически проходя через ускоряющий промежуток (зазор), к которому приложено высокочастотное напря-

жение $V(t) = V_0 \sin \omega t$, рис.11. Если частота изменения ускоряющего напряжения ω близка к циклотронной частоте, частица будет каждый раз попадать в ускоряющую фазу, увеличивая свою энергию. Что будет в нерелятивистском случае?

Указание. Используйте релятивистское выражение для энергии частицы и постройте отображение для релятивистского масс-фактора и момента времени пролета зазора ускорителя.

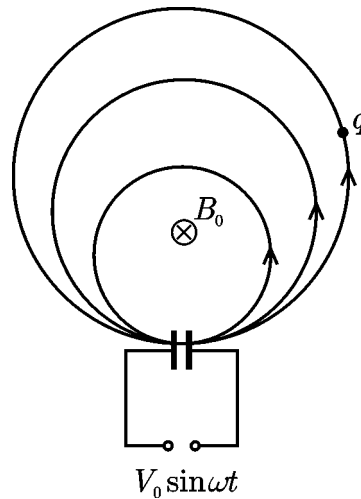


Рис.11. Разгон заряженной частицы в циклотроне.

Решение 20. Будем рассматривать динамику частицы в дискретные моменты времени, когда она проходит через ускоряющий промежуток. Считая этот промежуток достаточно узким, предполагаем, что частица проходит через него практически мгновенно (по сравнению с периодом высокочастотного напряжения $T = 2\pi/\omega$), так что изменением напряжения за это время можно пренебречь. Поскольку речь идет о релятивистской частице, необходимым моментом является учет релятивистской зависимости массы от скорости.

Энергия частицы после n -ого прохода через ускоряющий промежуток равна $E_n = m_n c^2 = \gamma_n m_0 c^2$, где m_0 – масса покоя частицы, $\gamma_n = 1/\sqrt{1-v_n^2/c^2}$ – релятивистский масс-фактор. Закон сохранения энергии при прохождении зазора запишется следующим образом:

$$\gamma_{n+1} m_0 c^2 = \gamma_n m_0 c^2 + qV_0 \sin \omega t_n,$$

где t_n – время n -ого попадания в зазор. Следующее попадание в зазор, очевидно, произойдет в момент времени

$$t_{n+1} = t_n + \frac{2\pi}{\omega_c(\gamma_{n+1})} = t_n + \frac{2\pi m_0 \gamma_{n+1}}{qB_0}.$$

Объединяя полученные уравнения и вводя обозначение для фазы частицы $\theta_n = \omega t_n$, приходим к двумерному отображению

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n + \Delta\gamma_{n+1}, \\ \gamma_{n+1} &= \gamma_n + k \sin \theta_n.\end{aligned}$$

Здесь $k = qV_0 / m_0c^2$, $\Delta = 2\pi\omega / \omega_0$, $\omega_0 = qB_0 / m_0$. Нетрудно видеть, что мы получили стандартное отображение (отображение Чирикова-Тейлора), если ввести переменную $\Gamma_n = \Delta\gamma_n$:

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n + \Gamma_{n+1}, \\ \Gamma_{n+1} &= \Gamma_n + (k\Delta) \sin \theta_n.\end{aligned}$$

Если бы не релятивистская зависимость циклотронной частоты от энергии, первое уравнение имело вид $\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta$, так что при совпадении частот ω и ω_0 частица после каждого оборота попадала бы в одну и ту же фазу поля и ускорялась неограниченно. В релятивистском случае с ростом энергии резонансное условие нарушается.

21. Получите двумерное отображение для диссипативного осциллятора с импульсным возбуждением, амплитуда которого зависит по гармоническому закону от координаты x :

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2x = C \sin x \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

Отдельно рассмотрите консервативный случай (*отображение-паутина*) и приведите отображение к безразмерному виду.

Решение 21. Переменные выбираем аналогично задаче 14, так что x_n и v_n – координата и скорость осциллятора перед n -ым импульсом. Тогда после импульса координата не изменится, а скорость станет равна $v_n + C \sin x_n$. Подставляя эти величины в качестве начальных значений в решение задачи 2, получаем координату и скорость осциллятора перед следующим импульсом:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= e^{-\alpha T} \left(\cos \omega T + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega T \right) \cdot x_n + e^{-\alpha T} \frac{1}{\omega} \sin \omega T \cdot (v_n + C \sin x_n), \\ v_{n+1} &= -e^{-\alpha T} \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\omega} \sin \omega T \cdot x_n + e^{-\alpha T} \left(\cos \omega T - \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega T \right) \cdot (v_n + C \sin x_n).\end{aligned}$$

В консервативном случае, когда $\alpha = 0$, получаем:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \cos \omega_0 T \cdot x_n + \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 T \cdot (v_n + C \sin x_n), \\ v_{n+1} &= -\omega_0 \sin \omega_0 T \cdot x_n + \cos \omega_0 T \cdot (v_n + C \sin x_n).\end{aligned}$$

Отнормируем теперь скорость и амплитуду воздействия на величину собственной частоты осциллятора ω_0 . Тогда в безразмерном виде получаем:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \cos\delta \cdot x_n + \sin\delta \cdot (v_n + C \sin x_n), \\v_{n+1} &= -\sin\delta \cdot x_n + \cos\delta \cdot (v_n + C \sin x_n).\end{aligned}$$

Безразмерный параметр $\delta = \omega_0 T$ характеризует соотношение собственной частоты осциллятора ω_0 и частоты сигнала $T/2\pi$.

Полученное отображение называют *отображение-паутина*. Название связано с тем, что в фазовом пространстве можно наблюдать ажурные структуры, напоминающие паутину. При этом выделяют частные случаи тех или иных резаносов, управляемых параметром α . Например, при $\alpha = \pi$

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= -x_n, \\v_{n+1} &= -v_n - C \sin x_n,\end{aligned}$$

и т.д. Соответственно, в диссипативном случае имеем диссипативную версию отображения-паутины.

От потоков к отображениям: метод медленно меняющихся амплитуд

22. С помощью *метода медленно меняющихся амплитуд* получите отображение для диссипативного осциллятора с кубической нелинейностью (*осциллятор Дуффинга*) с импульсным возбуждением:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + x + \beta x^3 = C \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

Здесь нормировка выбрана так, что собственная частота $\omega_0 = 1$. Покажите, что оно может быть приведено к *отображению Икеды*. В случае сильной диссипации получите соответствующее приближенное одномерное отображение.

Комментарий. В работе Икеды с соавторами была рассмотрена оптическая система в виде кольцевого резонатора, частично заполненного средой с фазовой нелинейностью, рис.12. Резонатор возбуждается лучом лазера через одно полупрозрачное зеркало, а выходной сигнал снимается через другое. При некоторых условиях такая система может быть приближенно описана с помощью отображения $z_{n+1} = A + Bz_n \exp(i|z_n|^2)$. Здесь z — комплексная амплитуда света, A — параметр, пропорциональный сигналу лазера, B — параметр диссипации поля в среде.

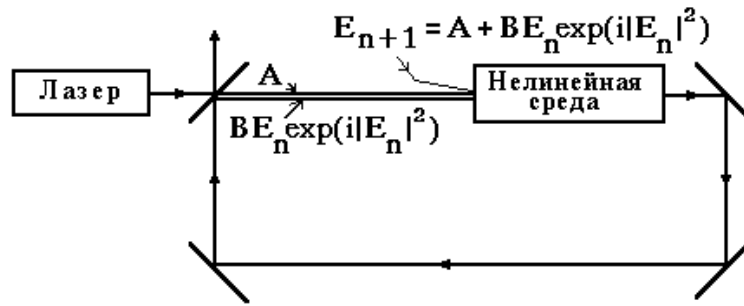


Рис.12. Система Икеды.

Решение 22. В рассматриваемом случае амплитуда внешних импульсов постоянна. Поэтому удобно следить за координатой и скоростью сразу *после* n -го импульса⁶. Тогда величины x_n, v_n будут играть роль начальных значений для динамики на автономной стадии, рис.13.

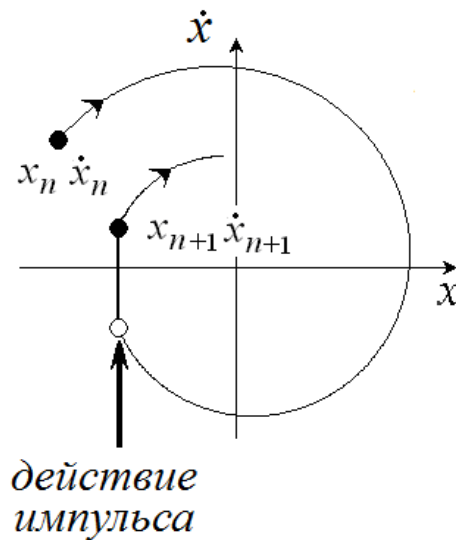


Рис.13. К построению отображения для двумерной системы с импульсным возбуждением.

В промежутке между импульсами уравнение нелинейного осциллятора аналитически не решается. Можно, однако, воспользоваться приближенным решением с помощью *метода медленно меняющихся амплитуд*⁷. Для этого представим координату в виде:

$$x(t) = \frac{1}{2} (a(t)e^{it} + a^*(t)e^{-it}).$$

⁶ В задачах 14 и 15 использовались переменные *перед* этим импульсом. Отличия этих подходов становятся существенными, если амплитуда импульса зависит от координаты осциллятора.

⁷ Различные его версии можно найти в литературе, мы рекомендуем [1,3,11].

Здесь $a(t)$ – комплексная медленная амплитуда, звездочка отвечает комплексному сопряжению. Поскольку мы ввели, фактически, две новых функции $a(t)$ и $a^*(t)$, то на них можно наложить дополнительное условие, которое выбирают в виде

$$\dot{a}(t)e^{it} + \dot{a}^*(t)e^{-it} = 0.$$

Дифференцируя выражение для координаты и используя дополнительное условие, получаем зависимость скорости от времени:

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{1}{2}(\dot{a}(t)e^{it} + \dot{a}^*(t)e^{-it}) + \frac{i}{2}(a(t)e^{it} - a^*(t)e^{-it}) = \frac{i}{2}(a(t)e^{it} - a^*(t)e^{-it}).$$

Она аналогична случаю постоянной амплитуды a , в чем и состоит удобство выбора дополнительного условия.

Теперь надо вычислить вторую производную от координаты:

$$\ddot{x}(t) = \frac{i}{2}(\dot{a}(t)e^{it} - \dot{a}^*(t)e^{-it}) - \frac{1}{2}(a(t)e^{it} + a^*(t)e^{-it}) = \dot{a}(t)e^{it} + x(t).$$

Подставляем полученные соотношения в автономное уравнение Дуффинга. Затем оставляем в полученном уравнении только члены, отвечающие колебаниям на собственной частоте осциллятора и пропорциональные e^{it} . Остальные на фоне колебаний с основной частотой являются быстро осциллирующими, так что при усреднении за большой промежуток времени их вкладом можно пренебречь.

Вклад кубической нелинейности определяется соотношением

$$x^3(t) = \frac{1}{8}(ae^{it} + a^*e^{-it})^3 = \frac{1}{8}(a^3e^{3it} + 3a^2a^*(t)e^{it} + 3a(a^*)^2e^{-it} + (a^*)^3e^{-3it}) = \frac{3}{8}a^2a^*e^{it} + \dots$$

В результате приходим к *укороченному уравнению* для осциллятора Дуффинга:

$$\dot{a} = -\frac{\alpha}{2}a + \frac{3}{8}i\beta|a|^2a.$$

Введем действительную амплитуду $R(t)$ и фазу $\varphi(t)$ с помощью соотношения $a(t) = R(t)e^{i\varphi(t)}$. Тогда из комплексного укороченного уравнения после разделения действительной и мнимой частей, получаем:

$$\dot{R} = -\frac{\alpha}{2}R, \quad \dot{\varphi} = \frac{3}{8}\beta R^2.$$

Эти уравнения можно проинтегрировать, так что

$$R(t) = R_n \exp\left(-\frac{\alpha t}{2}\right), \quad \varphi(t) = \frac{3}{8}\beta R_n^2 \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} + \varphi_n,$$

где R_n и φ_n - начальные амплитуда и фаза сразу после n -го импульса.

Из исходных соотношений нетрудно получить, что

$$\begin{aligned}x(t) &= R(t) \cos[t + \varphi(t)], \\v(t) &= -R(t) \sin[t + \varphi(t)].\end{aligned}$$

Теперь необходимо учесть действие импульса, так что

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= R(T) \cos[T + \varphi(T)], \\v_{n+1} &= -R(T) \sin[T + \varphi(T)] + C.\end{aligned}$$

Используя решения для амплитуды и фазы $R(t)$, $\varphi(t)$, получаем

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= R_n e^{-\alpha T/2} \cos\left(T + \frac{3}{8} \beta R_n^2 \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} + \varphi_n\right), \\v_{n+1} &= -R_n e^{-\alpha T/2} \sin\left(T + \frac{3}{8} \beta R_n^2 \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} + \varphi_n\right) + C.\end{aligned}$$

Далее удобно использовать комплексное представление, вводя новую переменную z :

$$z = (ix + v) \sqrt{\frac{3}{8} \beta \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha}}.$$

Используя, что $x_n = R_n \cos \varphi_n$, $v_n = -R_n \sin \varphi_n$, так что $(ix_n + v_n) = iR_n \exp(-i\varphi_n)$, получаем искомое отображение:

$$z_{n+1} = A + Bz_n \exp(i(|z_n|^2 + T)).$$

Параметры A , B определяются через параметры исходной системы следующим образом:

$$A = C \sqrt{\frac{3\beta}{8} \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha}}, \quad B = e^{-\alpha T/2}.$$

Это *отображение Икеды*. В рассматриваемом случае его параметры имеют следующий смысл: A – безразмерная амплитуда сигнала, а B – параметр диссипации.

Если диссипация сильная и $B \ll 1$ (сильное сжатие на аттрактор), то отображение Икеды можно привести к одномерному. Для этого представим переменную z следующим образом:

$$z = A(1 + B\tilde{z}).$$

Подставим это выражение в левую и правую части отображения и разрешим его относительно переменной \tilde{z}_{n+1} :

$$\tilde{z}_{n+1} = (1 + B\tilde{z}_n) \exp\left[i\left(\varphi + \lambda \operatorname{Re} \tilde{z}_n + \frac{1}{2} \lambda B |\tilde{z}_n|^2\right)\right].$$

Здесь введены новые параметры

$$\lambda = 2A^2B, \quad \varphi = A^2 + T.$$

Учтем малость B и оставив только слагаемые первого порядка малости. Тогда для действительной части $\xi_n = \operatorname{Re} \tilde{z}_n$ следует одномерное отображение

$$\xi_{n+1} = \cos(\lambda \xi_n + \varphi),$$

которое заменой $x = \lambda \xi + \varphi$ приводится к более удобному виду – «отображению косинуса»

$$x_{n+1} = \lambda \cos x_n + \varphi.$$

Заметим, что переход к одномерному отображению привел к уменьшению числа существенных параметров с трех до двух.

23. С помощью метода медленно меняющихся амплитуд получите двумерное отображение, описывающее осциллятор Ван дер Поля с импульсным возбуждением:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = C \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

Покажите, что если импульсы «редкие», то полученное отображение редуцируется к одномерному отображению Гласа для фазы изображающей точки.

Указание. Удобно строить отображение для комплексной переменной $z = x + iv$.

Решение 23. Решение задачи аналогично предыдущей. Отличие состоит в нелинейном члене $\dot{x}x^2$, для которого получаем:

$$x^2 \dot{x} = \frac{1}{8} [a^2 e^{2it} + 2|a|^2 + (a^*)^2 e^{-2it}] (i\omega a e^{it} - i\omega a^* e^{-it}) = \frac{1}{8} i\omega |a|^2 a e^{it} + \dots$$

Для автономной системы приходим к укороченному комплексному уравнению

$$\dot{a} = \frac{\lambda}{2} a - \frac{1}{8} |a|^2 a,$$

и уравнению для действительных амплитуды и фазы

$$\dot{R} = \frac{\lambda}{2} R - \frac{1}{8} R^3, \quad \dot{\varphi} = 0.$$

Они интегрируются с соответствующими начальными условиями R_n и φ_n :

$$R(t) = \frac{R_n}{\sqrt{1 + R_n^2 \frac{e^{\lambda t} - 1}{4\lambda}}} \exp\left(\frac{\lambda T}{2}\right), \quad \varphi(t) = \varphi_n.$$

Действуя аналогично предыдущей задаче, получаем отображение для координаты и скорости

$$x_{n+1} = \frac{R_n \cos(T + \varphi_n)}{\sqrt{1 + R_n^2 \frac{e^{\lambda T} - 1}{4\lambda}}} \exp\left(\frac{\lambda T}{2}\right),$$

$$v_{n+1} = \frac{-R_n \sin(T + \varphi_n)}{\sqrt{1 + R_n^2 \frac{e^{\lambda T} - 1}{4\lambda}}} \exp\left(\frac{\lambda T}{2}\right) + C.$$

Вводя комплексную переменную $z = x + iv$, находим

$$z_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1 + R_n^2 \frac{e^{\lambda T} - 1}{4\lambda}}} \exp\left(\frac{\lambda T}{2} - iT - i\varphi_n\right) + iC.$$

Начальные амплитуда и фаза связаны с координатой и скоростью соотношениями $x_n = R_n \cos \varphi_n$, $v_n = -R_n \sin \varphi_n$, так что $z_n = R_n \exp(-i\varphi_n)$. Тогда получаем искомое отображение:

$$z_{n+1} = \frac{z_n}{\sqrt{1 + |z_n|^2 \frac{e^{\lambda T} - 1}{4\lambda}}} \exp\left(\frac{\lambda T}{2} - iT\right) + iC.$$

Это двумерное отображение, описывающее динамику автоколебательной системы с внешним импульсным воздействием.

Пусть импульсы являются «редкими». Тогда в промежутке между ними изображающая точка успевает вернуться к предельному циклу автономной системы. С физической точки зрения теперь можно следить только за *фазой колебаний*, вычисляя ее значения непосредственно перед соответствующим импульсом. Проведем формальное рассмотрение, реализующее описанное поведение.

Пусть $\lambda T \gg 1$ (период внешнего воздействия большой по сравнению с характерным временем релаксации). Из полученных выражений для координаты и скорости при $e^{-\lambda T} \rightarrow 0$ получаем:

$$x_{n+1} = 2\sqrt{\lambda} \cos(T + \varphi_n), \quad v_{n+1} = -2\sqrt{\lambda} \sin(T + \varphi_n) + C.$$

Это решение отвечает выходу изображающей точки на автономную орбиту радиуса $R_0 = 2\sqrt{\lambda}$ с некоторой новой фазой. Для нее и необходимо построить отображение $\varphi_{n+1} = f(\varphi_n)$.

Из $x_{n+1} + iv_{n+1} = R_{n+1} \exp(-i\varphi_{n+1})$ и предыдущих соотношений, очевидно, что

$$\operatorname{tg} \varphi_{n+1} = -\frac{v_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{\sin(T + \varphi_n) - A}{\cos(T + \varphi_n)},$$

где $A = \frac{C}{2\sqrt{\lambda}}$ имеет смысл нормированной амплитуды внешнего воздействия.

Удобно ввести новую фазу $\theta_n = \varphi_n + T$. Физически – это фаза изображающей точке *перед* следующим импульсом. Тогда

$$\operatorname{tg}(\theta_{n+1} - T) = \frac{\sin \theta_n - A}{\cos \theta_n},$$

откуда получаем искомое одномерное отображение:

$$\theta_{n+1} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin \theta_n - A}{\cos \theta_n}\right) + T.$$

Оно представляет собой отображение Гласа (с точностью до несущественных знаков), полученное выше из чисто «геометрических» соображений в задаче 19.

24. С помощью метода медленно меняющихся амплитуд получите двумерное отображение, описывающее осциллятор Ван дер Поля-Дуффинга с импульсным возбуждением:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = C \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

В случае «редких» импульсов получите соответствующее отображение для фазы и обсудите, когда оно представляет собой синус-отображение окружности.

Решение 24. Решение задачи аналогично предыдущей, при этом необходимо использовать комбинированную нелинейность, отвечающую осцилляторам Ван дер Поля и Дуффинга. В результате получаем следующее комплексное укороченное уравнение:

$$\dot{a} = \frac{\lambda}{2} a - \frac{1}{8} |a|^2 a + \frac{3}{8} i\beta |a|^2 a.$$

Уравнение для действительных амплитуды и фазы:

$$\dot{R} = \frac{\lambda}{2} R - \frac{1}{8} R^3, \quad \dot{\phi} = \frac{3}{8} \beta R^2.$$

Можно видеть, что в рассматриваемом случае динамика фазы зависит от амплитуды, что определяет *неизохронность* системы, т.е. зависимость периода автономных колебаний от амплитуды.

Уравнение для амплитуды не изменилось, и можно использовать решение предыдущей задачи. Подставляя его в уравнение для фазы, и интегрируя с начальным условием φ_n , получаем

$$\varphi(t) = \varphi_n + \frac{3}{2} \beta \ln \left| \frac{R_n^2}{4\lambda} (e^{\lambda t} - 1) + 1 \right|.$$

Действуя аналогично предыдущей задаче, получаем:

$$z_{n+1} = \frac{z_n}{\sqrt{1 + |z_n|^2 \frac{e^{\lambda T} - 1}{4\lambda}}} \exp \left(\frac{\lambda T}{2} - iT - i \frac{3}{2} \beta \ln \left| \frac{|z_n|^2}{4\lambda} (e^{\lambda T} - 1) + 1 \right| \right) + iC.$$

Это и есть искомое двумерное отображение. Можно видеть, что введение дополнительной нелинейности по типу осциллятора Дуффинга привело к отличию в законе динамики фазы.

Получим теперь отображение в случае «редких» импульсов. Считая $\lambda T \gg 1$, и учитывая это как в амплитудном множителе, так и в фазе, получаем

$$x_{n+1} = 2\sqrt{\lambda} \cos \left(T + \varphi_n + \frac{3}{2} \beta \lambda T + \frac{3}{2} \beta \ln \left| \frac{R_n^2}{4\lambda} \right| \right) = 2\sqrt{\lambda} \cos \theta_n,$$

$$v_{n+1} = -2\sqrt{\lambda} \sin \left(T + \varphi_n + \frac{3}{2} \beta \lambda T + \frac{3}{2} \beta \ln \left| \frac{R_n^2}{4\lambda} \right| \right) + C = -2\sqrt{\lambda} \sin \theta_n + C.$$

Здесь по аналогии с предыдущей задачей введена новая фаза

$$\theta_n = \varphi_n + T + \frac{3}{2} \beta \lambda T + \frac{3}{2} \beta \ln \left| \frac{R_n^2}{4\lambda} \right|,$$

отвечающая моменту времени перед следующим импульсом.

Как и в предыдущем случае

$$\operatorname{tg} \varphi_{n+1} = -\frac{v_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{\sin \theta_n - A}{\cos \theta_n},$$

где $A = \frac{C}{2\sqrt{\lambda}}$. Поэтому осталось выразить φ_{n+1} через новую фазу θ_{n+1} . При этом

нужно вычислить

$$R_{n+1}^2 = x_{n+1}^2 + v_{n+1}^2 = (2\sqrt{\lambda} \cos \theta_n)^2 + (2\sqrt{\lambda} \sin \theta_n + A)^2 = 4\lambda(1 - 2A \sin \theta_n + A^2).$$

Окончательно

$$\theta_{n+1} = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \theta_n - A}{\cos \theta_n} \right) + \Omega + \frac{3}{2} \beta \ln(1 - 2A \sin \theta_n + A^2),$$

где $\Omega = T(1 + \frac{3}{2} \beta \lambda)$ имеет смысл нормированного периода воздействия.

Мы получили некоторую разновидность отображения окружности, которая при нулевой неизохронности $\beta = 0$ приводится к отображению Гласа.

Пусть амплитуда сигнала A мала. Тогда, разлагая в ряды по A , получаем:

$$\theta_{n+1} = \theta_n - A \cos \theta_n + \Omega - 3\beta A \sin \theta_n.$$

При этом использовали формулу $\arctg(\operatorname{tg}\varphi + \varepsilon) \approx \varphi + \varepsilon \cos \varphi$.

Возмущение отображения поворота $\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega$ будет сильным, если $\beta A \sim 1$. Оно может быть обеспечено даже при малых амплитудах воздействия A , если неизохронность β достаточно велика, и тогда:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - 3\beta A \sin \theta_n.$$

Мы получили стандартное *синус-отображение окружности*. Основные приближения, которые при этом были сделаны: возвращаемость траектории на предельный цикл, малые амплитуды воздействия и большая неизохронность.

25. Покажите, что если амплитуда внешних импульсов мала, так что динамика осциллятора из предыдущей задачи происходит вблизи автономного предельного цикла, то в случае большой неизохронности система может быть описана отображением кольца для фазы колебаний и отклонения действительной амплитуды от положения равновесия.

Решение 25. Отличие от двух предыдущих задач состоит в том, что мы теперь учтем динамику изображающей точки в небольшой окрестности предельного цикла. Далее удобнее использовать значения амплитуды и фазы R_n и φ_n перед импульсом. Поэтому сначала необходимо учесть действие импульса. Он приводит к значениям координаты и скорости

$$x = R_n \cos \varphi_n, \quad v = -R_n \sin \varphi_n + C,$$

Значения амплитуды и фазы после импульса $R(0)$ и $\varphi(0)$ можно найти из чисто «геометрических» соотношений, используемых в предыдущих задачах:

$$\operatorname{tg}\varphi(0) = \frac{R_n \sin \varphi_n - C}{R_n \cos \varphi_n}, \quad R(0) = \sqrt{(R_n \cos \varphi_n)^2 + (R_n \sin \varphi_n - C)^2}.$$

Учтем также, что движение происходит вблизи автономного предельного цикла $R_0 = 2\sqrt{\lambda}$, так что $R = 2\sqrt{\lambda} + r$, где r – малая величина. Тогда из приведенных соотношений при малой амплитуде импульсов C можно получить в первом порядке по C :

$$\varphi(0) = \varphi_n - \frac{C}{2\sqrt{\lambda}} \cos \varphi_n, \quad r(0) = r_n - C \sin \varphi_n.$$

(Также использовали формулу $\arctg(\operatorname{tg}\varphi + \varepsilon) \approx \varphi + \varepsilon \cos \varphi$.)

Уравнения для амплитуды и фазы в промежутке между импульсами имеют вид:

$$\dot{R} = \frac{\lambda}{2} R - \frac{1}{8} R^3, \quad \dot{\varphi} = \frac{3}{8} \beta R^2.$$

Из амплитудного уравнения, подставляя $R = 2\sqrt{\lambda} + r$, с учетом малости r получаем:

$$\dot{r} = -\lambda r.$$

Начальным условием для него является $r(0)$. Это уравнение легко интегрируется и приводит к выражению: $r(t) = r(0)e^{-\lambda t}$.

Подставим найденный закон изменения амплитуды $R = 2\sqrt{\lambda} + r(0)e^{-\lambda t}$ в фазовое уравнение и, считая добавку малой, получаем:

$$\dot{\varphi} = \frac{3}{8}\beta R^2 = \frac{3}{2}\beta\lambda + \frac{3}{2}\beta\sqrt{\lambda}r(0)e^{-\lambda t}.$$

Интегрируя его с начальным условием $\varphi(0)$, получаем закон изменения фазы, так что через время T :

$$\varphi_{n+1} = \varphi(T) = \varphi(0) + \frac{3}{2}\beta\lambda T + \frac{3\beta}{2\sqrt{\lambda}}(1 - e^{-\lambda T})r(0).$$

Сюда надо подставить найденные значения начальных амплитуды и фазы $r(0)$ и $\varphi(0)$ с учетом $r_{n+1} = r(0)e^{-\alpha T}$. Тогда

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \varphi_n - \frac{C}{2\sqrt{\lambda}}\cos\varphi_n + \frac{3}{2}\beta\lambda T + \frac{3\beta(1 - e^{-\lambda T})}{2\sqrt{\lambda}e^{-\lambda T}}r_{n+1}, \\ r_{n+1} &= (r_n - C\sin\varphi_n)e^{-\lambda T}.\end{aligned}$$

Далее нужно принять приближение большой неизохронности, так что

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \varphi_n + \frac{3}{2}\beta\lambda T + \frac{3\beta(1 - e^{-\lambda T})}{2\sqrt{\lambda}e^{-\lambda T}}r_{n+1}, \\ r_{n+1} &= r_n e^{-\lambda T} - C e^{-\lambda T} \sin\varphi_n.\end{aligned}$$

Убирая в первом уравнении множитель перед r_{n+1} перенормировкой, и нормируя величину C , получаем отображение кольца

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \varphi_n + \Omega + r_{n+1}, \\ r_{n+1} &= br - k \sin\varphi_n,\end{aligned}$$

где $\Omega = \frac{3}{2}\beta\lambda T$, $b = e^{-\lambda T}$, $k = \frac{3\beta(1 - e^{-\lambda T})C}{2\sqrt{\lambda}}$.

Нетрудно сформулировать физические требования к системе, чтобы получалось это отображение: наличие предельного цикла, экспоненциально быстрое приближение траектории к предельному циклу и сильная неизохронность системы. В этом плане отображение кольца является достаточно универсальным.

В приближении сильной диссипации отображение кольца редуцируется к отображению окружности $\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Omega - 3\beta C \sin \varphi_n$, что совпадает с результатом предыдущей задачи (с учетом $C = 2\sqrt{\lambda A}$).

26. Рассмотрите систему типа осциллятора Ван дер Поля с импульсным возбуждением

$$\ddot{x} - (\varepsilon - \mu x^2)\dot{x} + x = F(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT),$$

где $F(x) = 1 - \lambda x^2$. Получите соответствующее отображение при $T = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$.

Покажите, что оно сочетает свойства автоколебательной системы как с устойчивым, так и с неустойчивым предельными циклами, а также свойства систем с удвоениями периода (по типу отображения Эно).

Решение 26. Используем значения координаты и скорости x_n, v_n перед n -ым импульсом. Действуя аналогично предыдущим задачам, с помощью метода медленно меняющихся амплитуд нетрудно получить отображение

$$x_{n+1} = B \frac{x_n \cos T + (v_n + F(x_n)) \sin T}{\sqrt{1 + C[x_n^2 + (v_n + F(x_n))^2]}},$$

$$v_{n+1} = B \frac{-x_n \sin T + (v_n + F(x_n)) \cos T}{\sqrt{1 + C[x_n^2 + (v_n + F(x_n))^2]}},$$

где

$$B = \exp(\varepsilon T / 2), \quad C = \mu T (\exp \varepsilon T - 1) / 4\varepsilon T.$$

Положим для простоты $T = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$ и используем конкретный вид функции $F(x) = 1 - \lambda x^2$. Тогда отображение принимает вид⁸

$$x_{n+1} = B \frac{1 - \lambda x_n^2 + v_n}{\sqrt{1 + C[x_n^2 + (1 - \lambda x_n^2 + v_n)^2]}},$$

$$v_{n+1} = -B \frac{x_n}{\sqrt{1 + C[x_n^2 + (1 - \lambda x_n^2 + v_n)^2]}}.$$

Она характеризуется «внутренними» параметрами ε и μ и «внешним» параметром λ , определяющим вид функции $F(x)$. Параметр ε отвечает за величину линейной диссипации (отрицательного трения при $\varepsilon > 0$), параметр μ характери-

⁸ Такое отображение предложено Кузнецовым С.П.

зует нелинейную диссипацию в автономной системе. Соответственно, при положительных значениях этих параметров автономная система демонстрирует устойчивый предельный цикл, размер которого при небольшом превышении над порогом бифуркации Андронова-Хопфа можно оценить как $r \approx \sqrt{\varepsilon/\mu}$. Если эти параметры отрицательны, то в системе имеет место неустойчивый предельный цикл.

Если нелинейная диссипация отсутствует ($\mu=0$ в дифференциальной системе, $C=0$ в отображении), то отображение (2.10) переходит в диссипативное отображение Эно

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= B(1 - \lambda x_n^2 + y_n), \\y_{n+1} &= -Bx_n.\end{aligned}$$

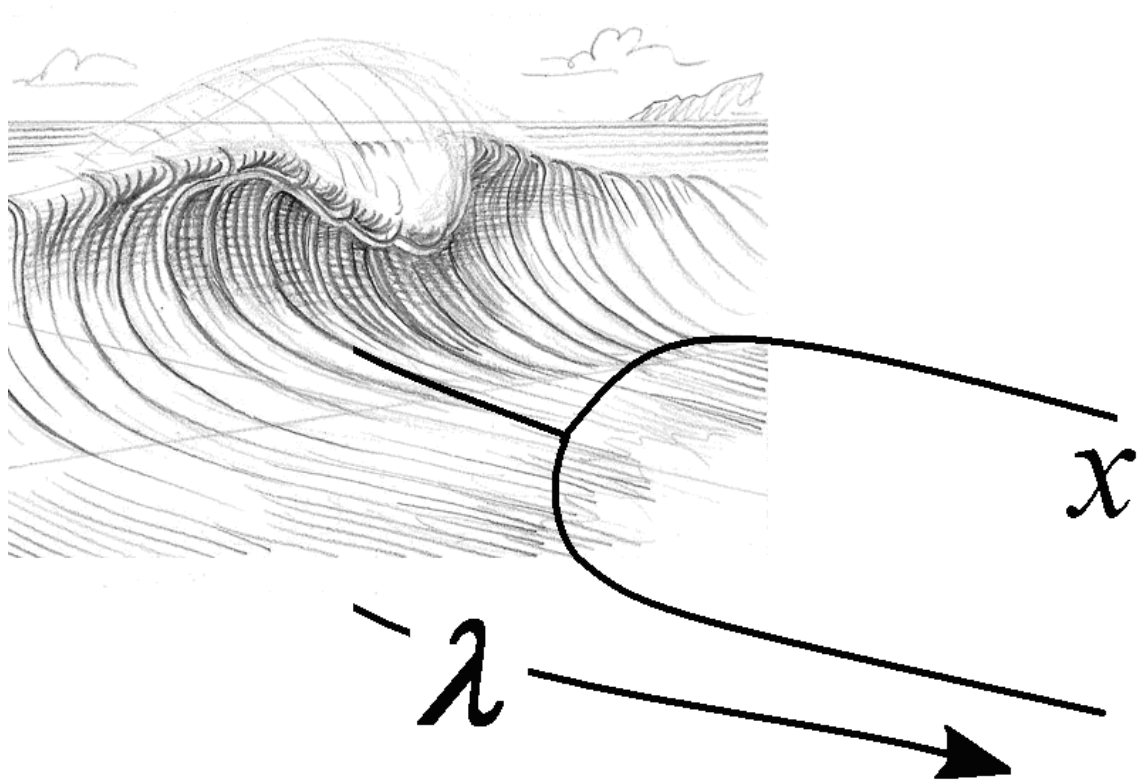
Если при этом отсутствует и линейная диссипация ($\varepsilon=0$, $B=1$), то оно переходит в консервативное отображение Эно

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 + y_n, \\y_{n+1} &= -x_n.\end{aligned}$$

Отметим, что требование возможности такого предельного перехода и определило выбор функции $F(x) = 1 - \lambda x^2$. Таким образом, отображение сочетает свойства автоколебательной системы и системы с удвоениями периода.

Часть II.

Бифуркации потоков



Бифуркации одномерных потоков

27. Покажите, что одномерная потоковая система всегда *градиентна*. Какую физическую интерпретацию можно дать в этом случае? Какие результаты теории катастроф по этой причине можно перенести в теорию бифуркаций?

Решение 27. Уравнение одномерной динамической системы в общем случае имеет вид $\dot{x} = f(x)$. Вводя функцию $U(x) = -\int f(x)dx$, получаем:

$$\dot{x} + \frac{\partial U(x)}{\partial x} = 0.$$

Таким образом, одномерная динамическая система является *градиентной*, т.е. описывается с помощью потенциала $U(x)$. В физическом плане это уравнение отвечает частице, движущейся в потенциальном поле в среде с очень сильной вязкостью.

Состояния равновесия такой системы, используя терминологию теории катастроф, отвечает *критическим точкам* функции $U(x)$. При этом минимумы отвечают устойчивым равновесиям, а максимумы – неустойчивым. Соответственно, классификация катастроф и бифуркаций в одномерной системе совпадает. Приведем таблицу соответствия терминов.

<i>теория катастроф</i>	<i>теория бифуркаций</i>
складка	седло-узел
сборка	трехкратное равновесие
ласточкин хвост	четырёхкратное равновесие

И так далее.

28. Найдите закон изменения во времени переменной $x(t)$ для бифуркаций седло–узел, заданной уравнением $\dot{x} = \lambda - x^2$, и вилка, заданной уравнением $\dot{x} = \lambda x - x^3$, при $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$. Обсудите асимптотическое поведение этих зависимостей при увеличении времени.

Решение 28. Бифуркация седло-узел в одномерной системе описывается соотношением

$$\dot{x} = \lambda - x^2.$$

Это уравнение можно проинтегрировать:

$$\int \frac{dx}{\lambda - x^2} = \int dt.$$

Интеграл является табличным, так что при $\lambda > 0$

$$x(t) = \begin{cases} \sqrt{\lambda} \cdot th(\sqrt{\lambda}(t-c)), & |x| < \sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} \cdot cth(\sqrt{\lambda}(t-c)), & |x| > \sqrt{\lambda}. \end{cases}$$

Здесь c – постоянная интегрирования, определяемая начальной точкой и задающая семейство траекторий. В частности, для первого соотношения при $x(0) = 0$ будет $c=0$.

Используя асимптотические выражения для гиперболических функций, получаем, что при $t \rightarrow \infty$ выполняется соотношение $x(t) \rightarrow \sqrt{\lambda}$. Это решение отвечает устойчивому равновесию системы. В свою очередь, значение $-\sqrt{\lambda}$ соответствует неустойчивому равновесию⁹. Таким образом, $\lambda = 0$ – это точка бифуркации седло-узел, в которой сливаются устойчивое и неустойчивое равновесия.

Рекомендуем самостоятельно построить семейство зависимостей $x(t)$, а также обсудить случай $\lambda < 0$.

Для бифуркации вилка уравнение имеет вид: $\dot{x} = \lambda x - x^3$. Это уравнение можно проинтегрировать при $\lambda > 0$:

$$\int \frac{dx}{\lambda x - x^3} = \int dt.$$

Интеграл является табличным, так что после интегрирования получаем

$$x(t) = \begin{cases} \pm \sqrt{\frac{\lambda}{1 + \exp(-2\lambda(t-c))}}, & |x| < \sqrt{\lambda}, \\ \pm \sqrt{\frac{\lambda}{1 - \exp(-2\lambda(t-c))}}, & |x| > \sqrt{\lambda}. \end{cases}$$

Здесь c – постоянная интегрирования.

Из полученных соотношений следует, что при $t \rightarrow \infty$, в зависимости от начальных условий, решение приходит или в точку $+\sqrt{\lambda}$, или в точку $-\sqrt{\lambda}$. Это устойчивые равновесия системы. От точки $x = 0$ траектории «отталкиваются», и она является неустойчивым равновесием. Все три равновесия сосуществуют при $\lambda > 0$ и сливаются в точке бифуркации $\lambda = 0$.

Рекомендуем построить графики семейства зависимостей $x(t)$ и обсудить случай $\lambda < 0$.

29. Изобразите бифуркационные диаграммы для бифуркаций седло–узел, транскритической бифуркации и вилки.

⁹ Траектории приходят в него, если в уравнении обратить время.

Решение 29. Бифуркационные диаграммы, дающие зависимость координат состояний равновесия от параметра λ , приведены в верхнем ряду на рис.14. Сплошной линией показаны устойчивые равновесия, пунктирной – неустойчивые. Стрелкой отмечено бифуркационное значение параметра.

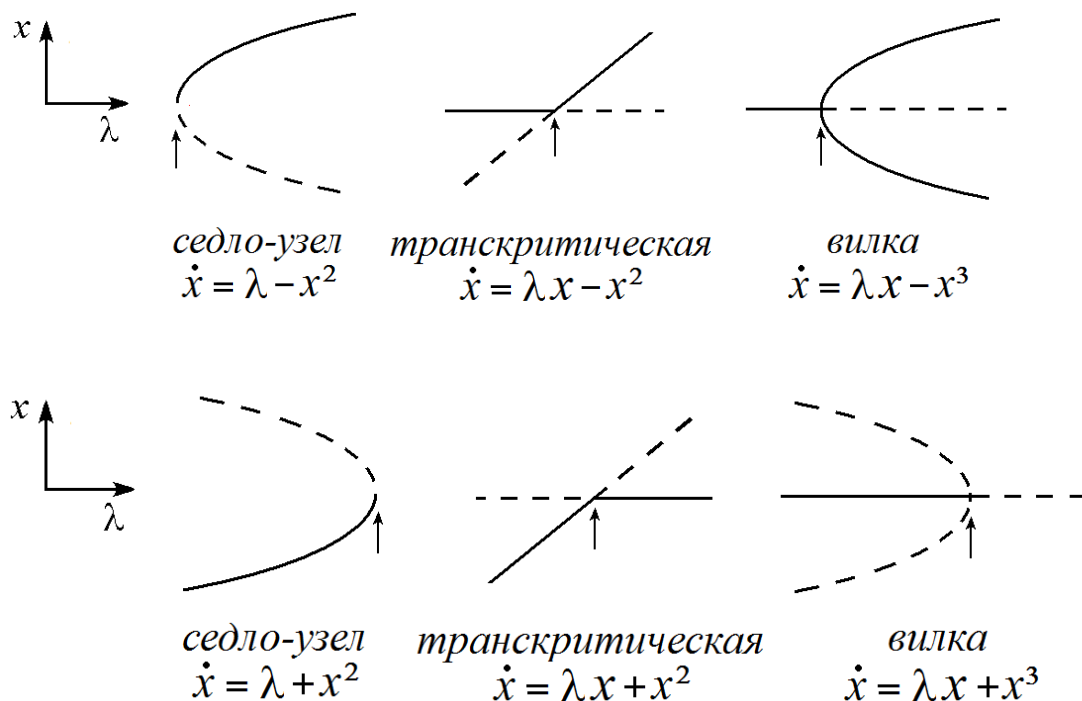


Рис.14 Бифуркационные диаграммы для суперкритических бифуркаций одномерных потоков (вверху) и субкритических (внизу).

30. Изобразите бифуркационные диаграммы для обратных (*субкритических*) форм этих бифуркаций.

Решение 30. Иллюстрации в предыдущей задаче отвечали прямым (*суперкритическим*) формам основных бифуркаций одномерных потоков. Для обратных (*субкритических*) форм бифуркационные диаграммы и уравнения приведены на рис.14 в нижнем ряду.

31. Для бифуркации трехкратное равновесие (сборка)

$$\dot{x} + x^3 + ax^2 + bx = 0,$$

изобразите линии седло-узловых бифуркаций на плоскости параметров (b, a) . Укажите вид потенциала в разных точках плоскости в соответствии с интерпретацией задачи 27.

Решение 31. Состояния равновесия системы ищем из уравнения $x^3 + ax^2 + bx = 0$. Поскольку это кубическое уравнение, то их число может быть

рано трем¹⁰ или одному. Седло-узловая бифуркация отвечает слиянию этих равновесий, так что ее условие получаем, дифференцируя полученное соотношение по x : $3x^2 + 2ax + b = 0$. Решая эти уравнения совместно, находим линии седло-узловых бифуркаций:

$$b = \pm 2 \left(-\frac{a}{3} \right)^{3/2}.$$

На плоскости параметров (b, a) они образуют полукубическое острие в точке *сборки* $b = a = 0$, имеющей коразмерность два, рис.15.

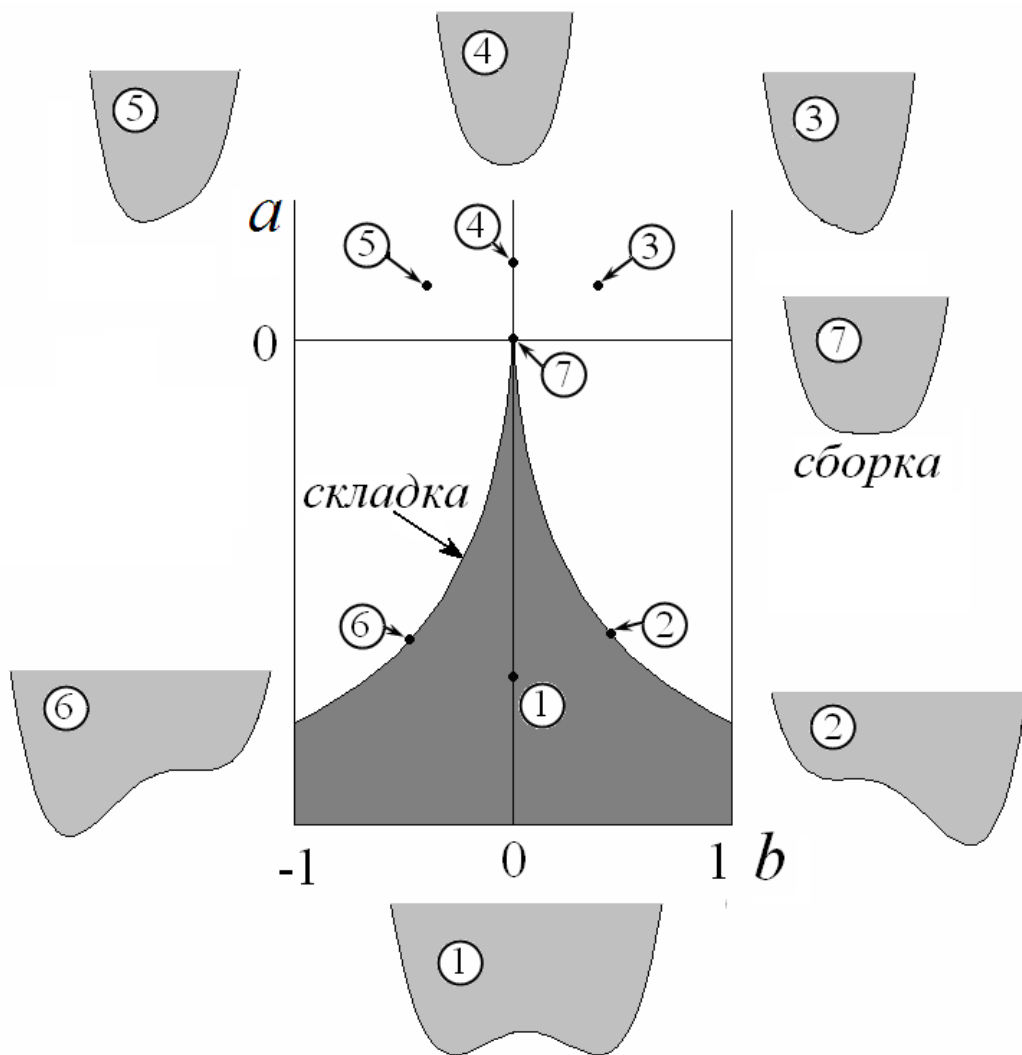


Рис.15. Трансформации потенциала для бифуркации трехкратное равновесие (сборка).

О характере равновесий в системе удобно следить с помощью потенциальной функции, которая в рассматриваемом случае $U(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + bx$. На

¹⁰ Отсюда и название бифуркации.

рис.15 показаны конфигурации потенциала в характерных точках плоскости параметров, позволяющие определить число состояний равновесия и их устойчивость. Внутри области, показанной серым цветом, система имеет два устойчивых и одно неустойчивое равновесия.

32. Обсудите связь с катастрофой сборки бифуркаций вилки и вилки в случае снятия вырождения. Используйте трехмерный рисунок многообразия катастрофы сборки и бифуркационные диаграммы, дающиеся его сечениями.

Решение 32. Пусть система описывается потенциалом, характерным для катастрофы сборки

$$U(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + bx.$$

Уравнение состояний равновесия такой системы $x^3 + ax^2 + bx = 0$ задает в трехмерном пространстве (b, a, x) поверхность, показанную на рис.16. Ее называют *многообразием катастрофы сборки*. Проекция этой поверхности на плоскость параметров (b, a) дает двухпараметрическую картину, соответствующую рис.15 из предыдущей задачи.

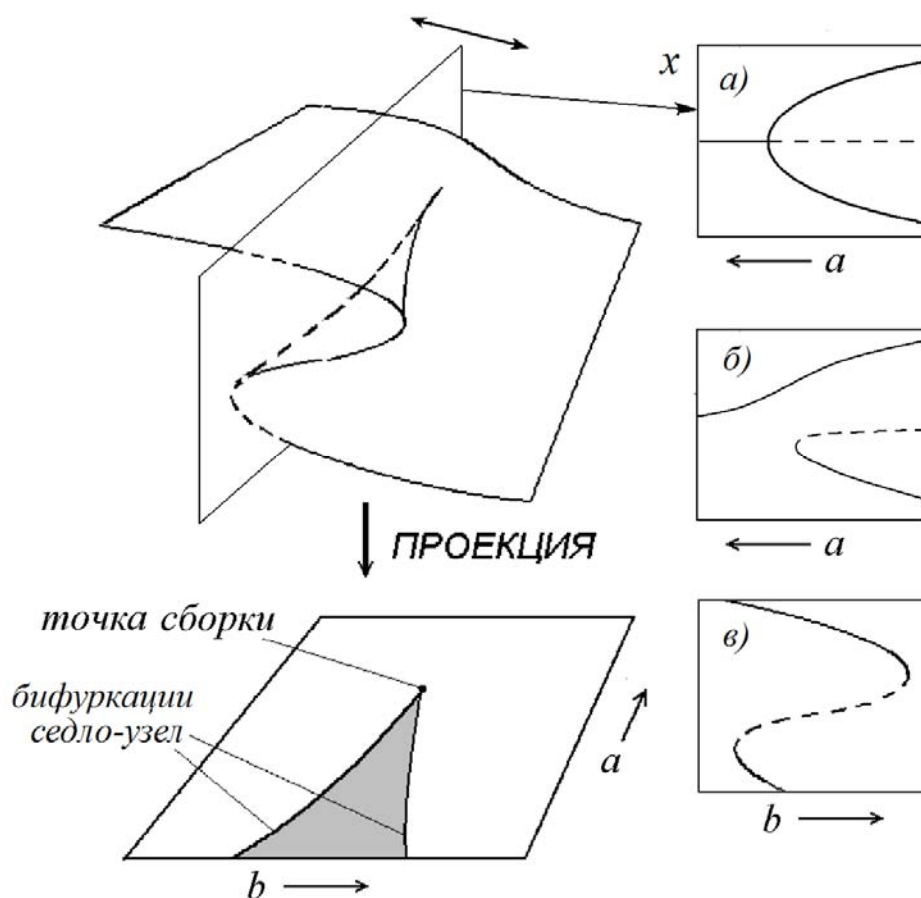


Рис.16. Связь многообразия катастрофы сборки и основных бифуркаций одномерных потоков: а) вилка, б) «вилка со снятым вырождением», в) седло-узел.

На рис.16а показано сечение поверхности, проходящее через точку сборки и отвечающее бифуркации вилка. Если немного «пошевелить» сечение, изменяя параметр b , как показано двусторонней стрелкой, то перейдем к ситуации «вилка со снятым вырождением» (рис.16б). Если построить перпендикулярную к этому сечению плоскость, то можно будет увидеть бифуркационные диаграммы двух объединенных седло-узловых бифуркаций (рис.16в). На общем рисунке они видны, как «торцевая» часть поверхности многообразия катастрофы.

Бифуркации двумерных потоков

33. Выпишите в общем виде уравнения, задающие двумерную потоковую динамическую систему, уравнения для определения состояний равновесия этой системы и матрицу возмущений. Укажите возможные варианты расположения собственных чисел этой матрицы на комплексной плоскости и постройте соответствующие типичные (грубые) фазовые портреты состояний равновесия.

Решение 33. Двумерная система в общем случае задается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y).\end{aligned}$$

Состояния равновесия (x_0, y_0) ищем, приравнявая нулю скорости изменения переменных:

$$\begin{aligned}f(x_0, y_0) &= 0, \\ g(x_0, y_0) &= 0.\end{aligned}$$

Динамика малых возмущений переменных в окрестности состояния равновесия будет определяться матрицей возмущений

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} f'_x(x_0, y_0) & f'_y(x_0, y_0) \\ g'_x(x_0, y_0) & g'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Здесь соответствующие частные производные вычислены в точке равновесия.

Для определения характера равновесия необходимо найти собственные значения γ этой матрицы. Поскольку она имеет порядок «два на два», то уравнение для поиска собственных чисел является квадратным уравнением с действительными коэффициентами. Поэтому имеется два собственных числа, которые могут быть либо действительными, либо комплексно-сопряженными. Конфигурация собственных чисел на комплексной плоскости и типичные фазовые портреты состояний равновесия с их названиями даны на рис.17.

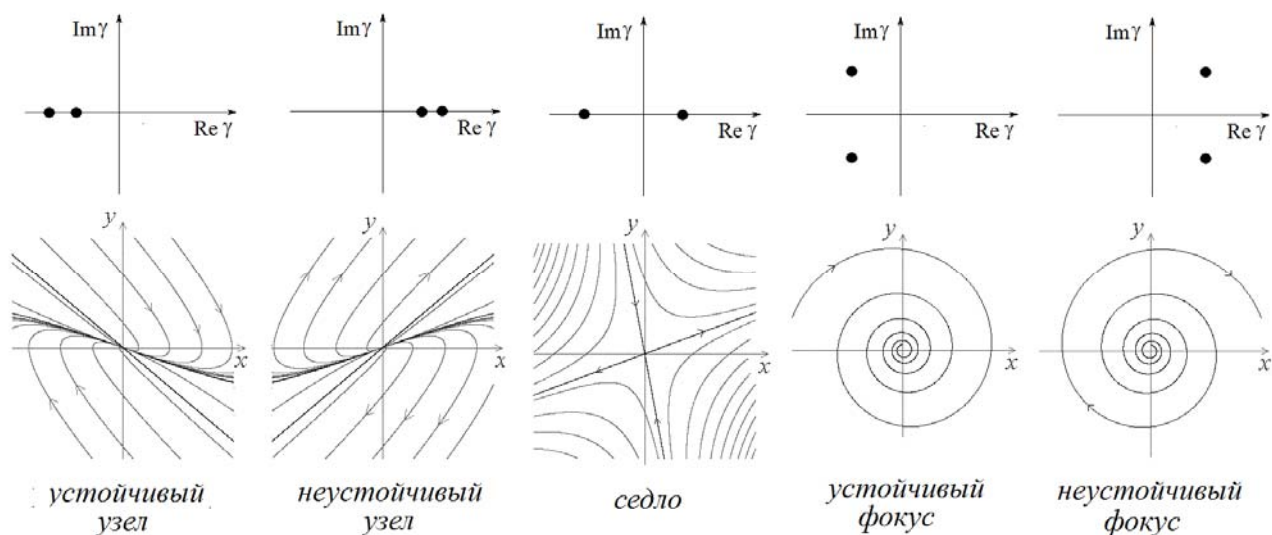


Рис.17. Положение собственных чисел матрицы возмущений двумерного потока на комплексной плоскости и типичные фазовые портреты состояний равновесия.

34. С помощью матрицы возмущений проведите анализ типов состояний равновесия двумерной динамической системы. Результат представьте на плоскости след S – якобиан J этой матрицы и проиллюстрируйте фазовыми портретами в тех или иных областях на плоскости параметров.

Решение 34. Пусть имеется двумерная потоковая система общего вида, которой отвечает матрица возмущений \hat{M} в точке равновесия. Как было отмечено при решении предыдущей задачи, уравнение для определения собственных чисел γ_1, γ_2 является квадратным. Поэтому, очевидно, справедливо соотношение

$$(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2) = 0,$$

или

$$\gamma^2 - (\gamma_1 + \gamma_2)\gamma + \gamma_1\gamma_2 = 0.$$

Входящие в это уравнение коэффициенты определяют два *инварианта* матрицы возмущений: ее след S и якобиан J :

$$S = \gamma_1 + \gamma_2, \quad J = \gamma_1\gamma_2.$$

Эти величины удобно использовать как параметры при исследовании характера равновесий. Собственные числа определяются через эти параметры с помощью соотношения $\gamma^2 - S\gamma + J = 0$, так что

$$\gamma_{1,2} = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - J}.$$

Они будут действительными, если $J < S^2/4$ и комплексными при $J > S^2/4$. При этом возможны пять вариантов, которым отвечает пять типов грубых состояний равновесия двумерных потоков.

1) $0 < J < S^2/4, S < 0$. Оба собственных числа действительные и отрицательные. Равновесие является *устойчивым узлом*.

2) $0 < J < S^2/4, S > 0$. Оба собственных числа действительные и положительные. Равновесие является *неустойчивым узлом*.

3) $J < 0$. Оба собственных числа действительные, одно из них положительное, а одно – отрицательные. Равновесие является *седлом*.

4) $J > S^2/4, S < 0$. Собственные числа комплексные (комплексно-сопряженные), причем $\text{Re} \gamma < 0$. Равновесие является *устойчивым фокусом*.

5) $J > S^2/4, S > 0$. Собственные числа комплексные (комплексно-сопряженные), причем $\text{Re} \gamma > 0$. Равновесие является *неустойчивым фокусом*.

Разбиение плоскости параметров след – якобиан на указанные области приведено на рис.18. Там же показаны характерные фазовые портреты соответствующих равновесий¹¹.

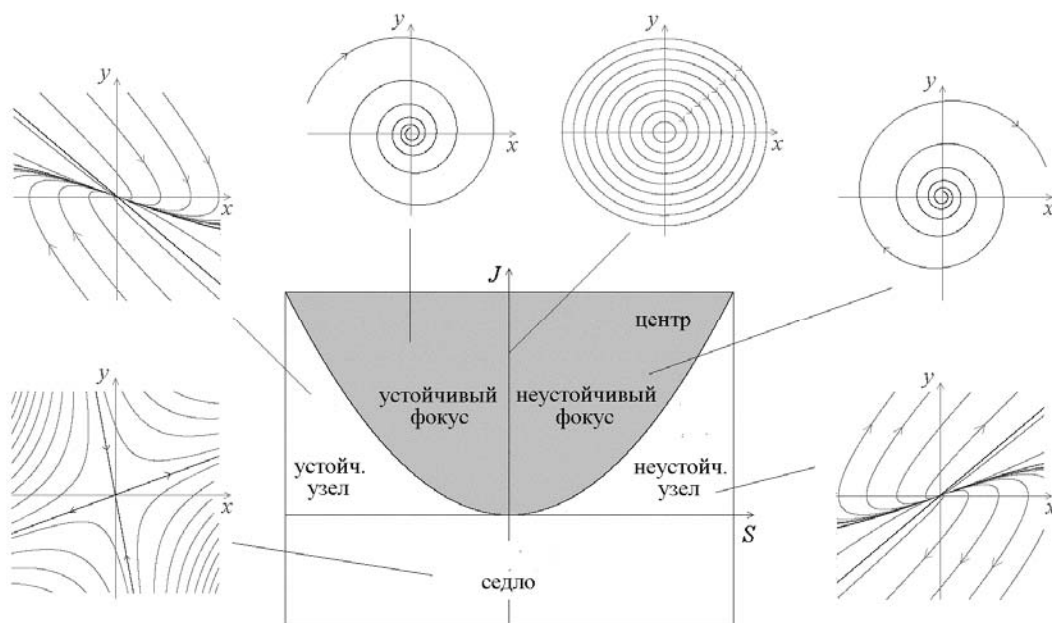


Рис.18. Различные типы неподвижных точек на плоскости след S - якобиан J матрицы линеаризации.

Представленные результаты обладают свойством *универсальности*, т.е. не зависят от вида динамической системы. При анализе конкретной системы, таким образом, достаточно найти выражения для следа и якобиана матрицы возмущения для данного равновесия через параметры отображения, и далее использовать готовые результаты рис.18.

¹¹ Отметим, что на линии $S=0, J>0$ реализуется вырожденная ситуация, когда состояние равновесие имеет тип *центр*. Эту ситуацию можно интерпретировать как консервативный случай.

35. Изобразите положение собственных чисел матрицы возмущений на комплексной плоскости, отвечающее бифуркациям *седло-узел*, *Андропова-Хопфа* и *Богданова-Такенса*. Продемонстрируйте с помощью этих иллюстраций, что точка Богданова-Такенса является общей для бифуркаций седло-узел и Андропова-Хопфа.

Решение 35. При вариации параметров, задающих двумерный поток, собственные числа будут перемещаться по комплексной плоскости. При этом будут возникать бифуркационные ситуации, отвечающие перестройке топологии фазового портрета. Используя картину расположения собственных чисел на комплексной плоскости на рис.18, нетрудно выявить основные типы возможных бифуркаций. В результате получаем четыре основных *негрубых* ситуации, представленные на рис.19. В подписи к рисунку даны условия на собственные числа $\gamma_{1,2}$, отвечающие каждой бифуркации.

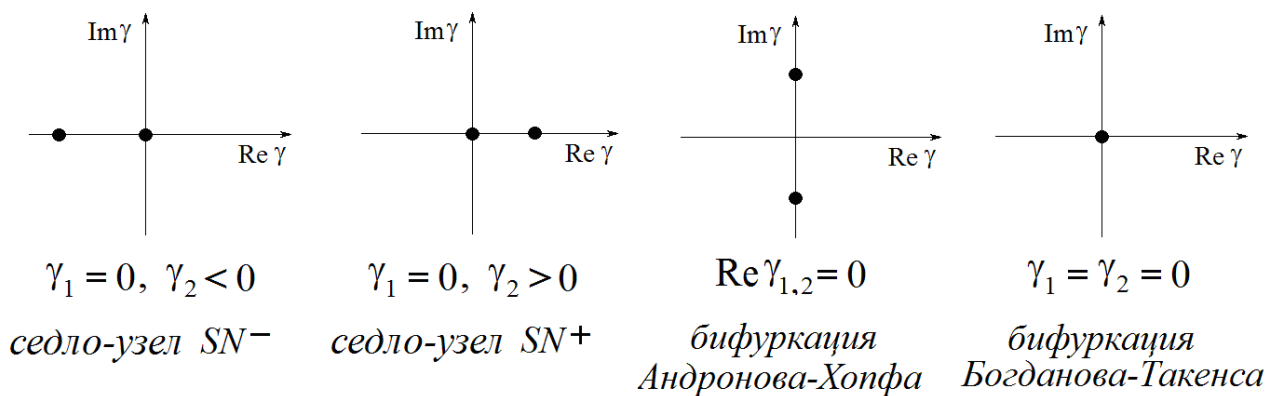


Рис.19. Конфигурация собственных чисел матрицы возмущений двумерного потока на комплексной плоскости, отвечающая типичным бифуркациям.

В первых двух случаях одно из собственных чисел проходит через ноль. Это условие отвечает *седло-узловой бифуркации*. Нетрудно видеть, что для двумерного потока возможны два варианта такой бифуркации. «Пошевелим» немного параметры. При этом в первом случае обозначенном SN^- , собственное число может уходить немного вправо или влево от начала координат¹². Тогда возникают седло или устойчивый узел. Поэтому в этом случае седло сливается с устойчивым узлом. Во втором случае, обозначенном SN^+ , седло сливается с неустойчивым узлом. В этом отличие от одномерного потока, где наблюдается единственный вариант седло-узловой бифуркации.

В третьем случае пара комплексно сопряженных собственных чисел пересекает мнимую ось. Это условие отвечает превращению устойчивого фокуса в

¹² Верхний индекс у обозначения SN отвечает знаку второго собственного значения.

неустойчивый (или наоборот). Такая ситуация отвечает *бифуркации Андронова-Хопфа*, когда фокус теряет устойчивость и от него отделяется неустойчивый предельный цикл. Отметим, что возможна и обратная (субкритическая) бифуркация Андронова-Хопфа, когда возникает неустойчивый предельный цикл

Фиксируем теперь параметр, отвечающий бифуркации Андронова-Хопфа. Если варьировать второй параметр, то собственные числа будут перемещаться вдоль мнимой оси, и при некотором значении этого параметра сливаются, что приводит к ситуации, показанной на четвертом рисунке. Это точка *бифуркации Богданова-Тakensа*. Таким образом, точка Богданова-Тakensа является конечной для бифуркации Андронова-Хопфа. Если фиксировать ситуацию, отвечающую седло-узловой бифуркации, то при вариации дополнительного параметра второе собственное число будет перемещаться вдоль действительной оси, и также можно добиться ситуации слияния. Поэтому точка Богданова-Тakensа является общей для бифуркации Андронова-Хопфа и седло-узла.

36. Изобразите качественно фазовые портреты, отвечающие бифуркации седло-узел двумерного потока.

Решение 36. Фазовые портреты показаны на рис.20. Для двумерного потока возможны два варианта седло-узловой бифуркации. В первом случае устойчивый узел сливается с седлом, а во втором – неустойчивый.

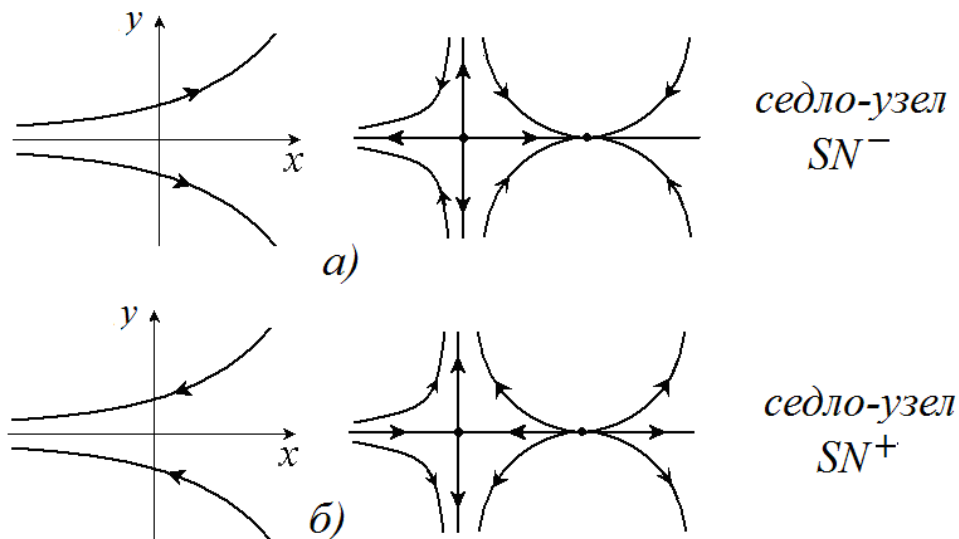


Рис.20. Седло-узловые бифуркации двумерного потока: а) слияние устойчивого узла и седла, б) слияние неустойчивого узла и седла.

37. Изобразите качественно фазовые портреты, отвечающие бифуркации Андронова-Хопфа двумерного потока. Рассмотрите случаи суперкритической и субкритической формы бифуркации.

Решение 37. Фазовые портреты для бифуркации Андронова-Хопфа показаны на рис.21. При этом рис.21а отвечает прямой (суперкритической), а

рис.21б – обратной (субкритической) форме. В первом случае при изменении управляющего параметра устойчивый фокус превращается в неустойчивый, и от него отделяется устойчивый предельный цикл. Во втором случае с ростом параметра неустойчивый предельный цикл «влипает» в устойчивый фокус, в результате чего возникает неустойчивый фокус. Используется обозначение, где нижний индекс «-» отвечает устойчивому фокусу, а «+» - неустойчивому¹³.

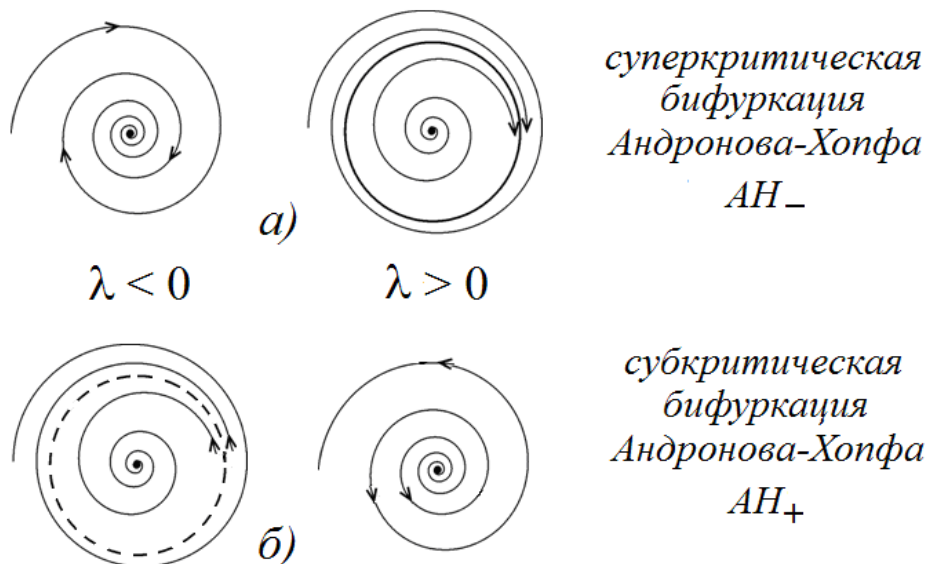


Рис.21. Суперкритическая и субкритическая бифуркация Андропова-Хопфа на фазовой плоскости.

38. Найдите условия бифуркаций седло-узел, Андропова-Хопфа и Богданова-Такенса, используя в качестве параметров след и якобиан матрицы возмущений.

Решение 38. След и якобиан связаны с собственными числами соотношениями $S = \gamma_1 + \gamma_2$, $J = \gamma_1 \gamma_2$.

Условием бифуркации седло-узел является обращение в ноль одного из собственных чисел $\gamma_{1,2}$. Поскольку $J = \gamma_1 \gamma_2$, то это означает обращение в ноль якобиана матрицы возмущений.

Бифуркация Андропова-Хопфа отвечает превращению устойчивого фокуса в неустойчивый. Это означает, что ее условием являются чисто мнимые собственные значения, т.е. $\gamma_1 = i\alpha$, $\gamma_2 = -i\alpha$. Подставляя эти соотношения в $S = \gamma_1 + \gamma_2$, $J = \gamma_1 \gamma_2$, получаем: $S = 0$, $J > 0$.

¹³ В случае, когда характер бифуркации очевиден, этот индекс будем опускать.

Перечисленные бифуркации являются однопараметрическими, или, как говорят, бифуркациями *коразмерности один*. Если варьировать два параметра, то могут встретиться бифуркации *коразмерности два*. Так общая точка бифуркации седло-узел и Андронова-Хопфа отвечает бифуркации Богданова-Такенса.

Таким образом, можно прийти к следующим результатам:

- бифуркация седло-узел: $J = 0$,
- бифуркация Андронова-Хопфа: $S = 0, J > 0$,
- бифуркация (точка) Богданова-Такенса: $S = 0, J = 0$.

На плоскости след – якобиан эти бифуркации задают конфигурацию, показанную на рис.22. Знаками «плюс» и «минус» обозначены две разновидности седло-узловой бифуркации, когда сливаются устойчивый узел и седло, или неустойчивый узел и седло. Эта картина является универсальной для двумерных потоков.

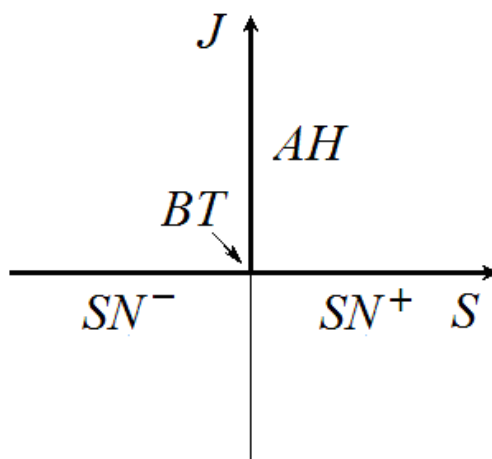


Рис.22. Линии бифуркаций Андронова-Хопфа AH , седло-узел SN и точка Богданова-Такенса BT двумерного потока на плоскости след – якобиан матрицы возмущений. Верхний индекс различает два типа седло-узловых бифуркаций, отвечающих рис.20.

39. Рассмотрите уравнение математического маятника с затуханием:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \sin x = 0.$$

Здесь нормировка выбрана так, что собственная частота осциллятора равна единице. Найдите состояния равновесия и определите их тип с помощью подхода, изложенного в задаче 34.

Решение 39. Представим уравнение осциллятора в стандартном для динамической системы второго порядка виде:

$$\dot{x} = v,$$

$$\dot{v} = -\alpha v - \sin x.$$

Состояния равновесия ищем, приравнивая нулю производные по времени, что дает

$$v_0 = 0, \sin x_0 = 0.$$

Таким образом, система имеет два состояния равновесия (с учетом 2π -периодичности), для которых $x_0 = 0$ и $x_0 = \pi$.

Матрица возмущений имеет вид:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_0 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Ее след ищем, складывая диагональные члены: $S = -\alpha$, а также вычисляем якобиан $J = \cos x_0$. Таким образом, след всегда отрицательный. В свою очередь, для равновесия $x_0 = 0$ якобиан $J = 1$ и положительный. В соответствии с рис. 18 это отвечает устойчивому равновесию. Используя условие превращения узла в фокус $J = S^2/4$, получаем, что равновесие будет фокусом при $\alpha/2 < 1$ и узлом при $\alpha/2 > 1$.

Для равновесия $x_0 = \pi$ якобиан $J = -1$ и отрицательный, так что эта точка неустойчива и всегда является седлом.

Физически проведенный анализ достаточно понятен: нижнее положение равновесия маятника является устойчивым. При малом затухании оно является фокусом (периодическое затухание), а при большом – узлом (апериодическое затухание). Верхнее положение равновесия всегда является неустойчивым и отвечает седлу.

40. Пусть маятник из предыдущей задачи прикреплен к спиральной пружине с коэффициентом жесткости k , так что

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx + \sin x = 0.$$

Маятник может совершать любое число полных оборотов вокруг точки прикрепления. Напишите уравнение для определения положений равновесия, дайте его графическое решение. Покажите, что число устойчивых равновесий уменьшается при увеличении жесткости пружины. Проведите физическое обсуждение полученных результатов. Найдите бифуркации в системе.

Решение 40. Запишем уравнения для определения состояний равновесия:

$$v_0 = 0, kx_0 + \sin x_0 = 0.$$

Физически это отвечает равенству нулю скорости и суммарного момента, создаваемого пружиной и силой тяжести. Полезно проанализировать это уравнение графически. Для этого на одном рисунке изображаем функции $y = \sin x$ и $y = -kx$. Точки их пересечения и определяют положения равновесия системы, как показано на рис.23.

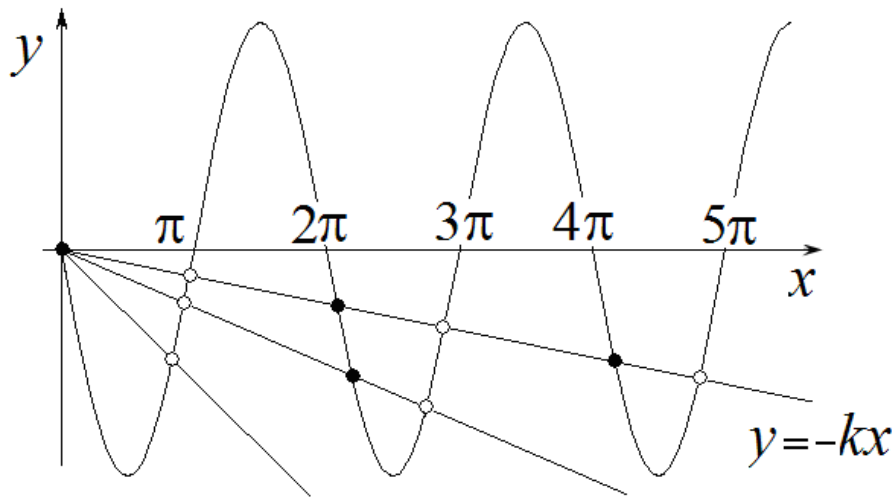


Рис.23. Графическое определение состояний равновесия маятника с пружиной.

Из рисунка можно видеть, что число состояний равновесия зависит от жесткости пружины k , и с ее уменьшением появляются все новые состояния равновесия, когда график прямой пересекает синусоиду во все более далеких точках.

Проанализируем возможные решения с использованием физических представлений. Пусть параметр k стремится к нулю, т.е. пружина очень «мягкая» и почти не оказывает влияния на систему. Как видно из рисунка, решения в этом случае стремятся к значениям угла $0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$ и т.д. Это положения равновесия свободного маятника. При этом углам $\pi, 3\pi, \dots$ отвечает неустойчивое равновесие, когда маятник вертикален, а груз находится в верхней точке. Углам $0, 2\pi, 4\pi, \dots$ отвечает нижнее положение маятника, т.е. устойчивое равновесие. На рис.23 устойчивые состояния равновесия отмечены жирными точками, а неустойчивые – кружочками. Если пружины нет, то эти равновесия сводятся к двум вариантам: нулевой угол и угол, равный π . Остальные неотличимы от них. (Они соответствуют поворотам маятника вокруг точки подвеса на угол, кратный 2π .) Однако наличие даже очень мягкой пружины снимает эту симметрию, и делает состояния равновесия различающимися.

Будем теперь медленно увеличивать жесткость пружины, что отвечает на графике увеличению наклона прямой. Устойчивые и неустойчивые состояния равновесия будут попарно двигаться навстречу друг другу. При бифуркационных значениях параметра они также попарно будут сливаться и исчезать. Рекомендуем обсудить с физической точки зрения, почему моменты бифуркаций близки к точкам $\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \dots$

Дадим теперь формальное решение задачи. Матрица возмущений

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k - \cos x_0 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

В точках равновесий ее след $S = -\alpha$, а якобиан $J = -k - \cos x_0$. Можно видеть, что в системе возможна бифуркация седло-узел, когда выполняется условие $J = 0$, так что $k + \cos x_0 = 0$. Совместно с уравнением для поиска состояний равновесия, это приводит к уравнению для бифуркационных значений:

$$k = -\cos x_0, \quad x_0 = \operatorname{tg} x_0.$$

Эти уравнения можно решить численно, например, методом Ньютона. Это дает последовательность бифуркаций:

$$k_1 = 0.21723\dots, \quad k_2 = 0.12837\dots, \quad k_3 = 0.09132\dots$$

41. Проведите анализ состояний равновесия и их бифуркаций для осциллятора Ван дер Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Решение 41. Используем представление динамической системы в стандартной форме

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= (\lambda - x^2)v - x. \end{aligned}$$

В данном случае состояние равновесия тривиальное: $v_0 = 0, x_0 = 0$. Матрица возмущений в этой точке

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ее след $S = \lambda$, а якобиан $J = 1$.

Таким образом, в системе возможна бифуркация Андронова-Хопфа при значении параметра $\lambda = 0$. Физически это понятно: при $\lambda < 0$ система представляет собой диссипативный осциллятор, а при $\lambda > 0$ трение становится отрицательным, и фокус становится неустойчивым.

Отметим также, что с ростом параметра λ устойчивый фокус в начале координат при $\lambda = 2$ (находим из условия $J = S^2 / 4$) превращается в устойчивый узел.

42. Запишите укороченные уравнения для действительной амплитуды осциллятора Ван дер Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0,$$

С его помощью определите тип бифуркации, соответствующий бифуркации Андронова-Хопфа в исходной системе. Оцените размер возникающего пре-

дельного цикла и покажите, что при увеличении управляющего параметр λ его размер растет по корневому закону. Получите закон, по которому изображающая точка стремится к предельному циклу. Покажите, что характерное время выхода изображающей точки на предельный цикл уменьшается с ростом параметра λ .

Решение 42. Для осциллятора Ван дер Поля укороченные уравнения получены в задаче 23:

$$\dot{R} = \frac{\lambda}{2} R - \frac{1}{8} R^3, \quad \dot{\phi} = 0.$$

Нетрудно видеть, что амплитудное уравнение отвечает бифуркации вилка. Действительно, при $\lambda < 0$ есть единственное устойчивое равновесие $R_0 = 0$. При $\lambda > 0$ состояние равновесие с нулевой амплитудой теряет устойчивость, и от него отделяются два устойчивых равновесия $R_0 = \pm 2\sqrt{\lambda}$. Однако, поскольку действительная амплитуда R определяет радиус на фазовой плоскости, то физический смысл имеет только положительный корень $R_0 = 2\sqrt{\lambda}$.

Отсюда следуют такие выводы для исходной системы. При $\lambda < 0$ устойчивым является равновесие в начале координат. Оно отвечает отсутствию автоколебаний в исходной системе.

При $\lambda > 0$, возвращаясь к исходным переменным (см. задачу 23), получаем:

$$x(t) = 2\sqrt{\lambda} \cos T, \quad v(t) = -2\sqrt{\lambda} \sin T.$$

Это решение отвечает вращению по окружности радиуса $2\sqrt{\lambda}$ с единичной частотой. Таким образом, в исходной системе Ван дер Поля в результате бифуркации Андронова-Хопфа возникает устойчивый предельный цикл, размер которого растет по корневому закону в зависимости от надкритичности.

Отметим, что в приближении медленных амплитуд колебания являются *изохронными* – их частота равна единице и не зависит от параметра и, соответственно, от радиуса предельного цикла.

Линеаризуем амплитудное уравнение в окрестности предельного цикла. Полагая $R = 2\sqrt{\lambda} + r$, для малой величины r получаем: $\dot{r} = -\lambda r$. Таким образом, $r(t) = r(0) \exp(-\lambda t)$. Поэтому параметр λ характеризует также скорость выхода изображающей точки на предельный цикл. Чем больше λ , тем быстрее точка выходит на предельный цикл.

43. Для осциллятора Ван дер Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0,$$

постройте реализации и фазовые портреты для нескольких значений параметра λ . Сравните с результатами, полученными с помощью метода медленно меняющихся амплитуд.

Решение 43. Фазовые портреты осциллятора Ван дер Поля и вид реализаций $x(t)$ при увеличении параметра λ показан на рис.24. Можно видеть, что в системе действительно происходит бифуркация Андронова-Хопфа, и возникает предельный цикл.

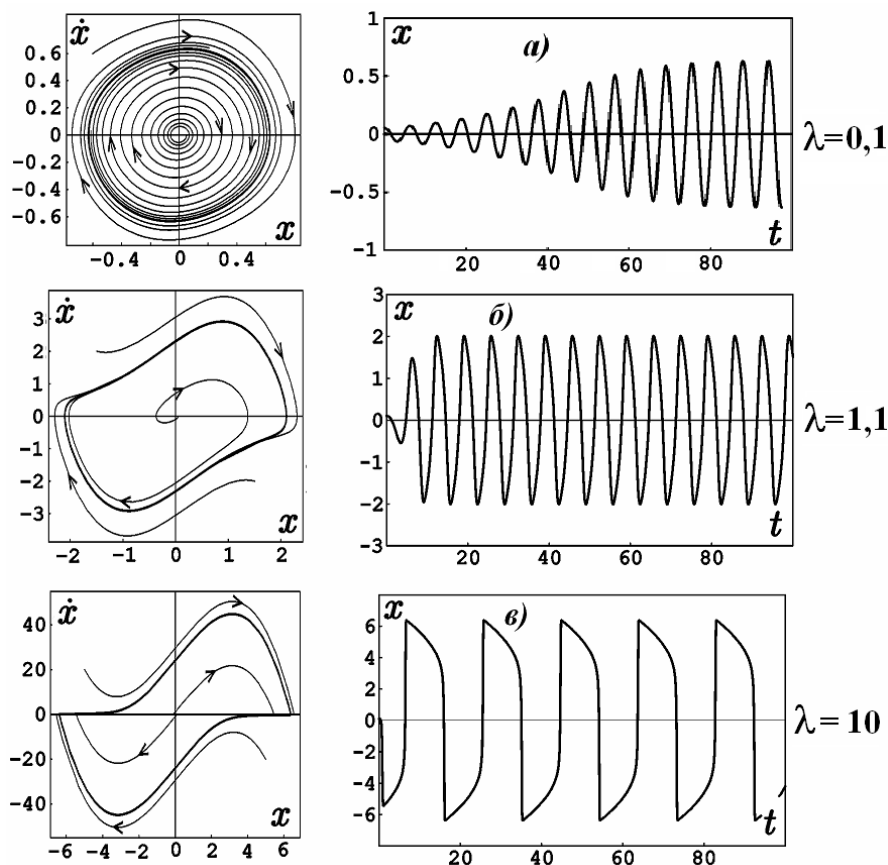


Рис.24. Фазовые портреты (слева) и временные реализации колебаний (справа) осциллятора Ван дер Поля; $\lambda = 0.1$ (а), $\lambda = 1.1$ (б); $\lambda = 10$ (в).

При $\lambda = 0.1$ форма предельного цикла близка к окружности, радиус которой хорошо оценивается из метода медленно меняющихся амплитуд, как $2\sqrt{\lambda}$ (см. предыдущую задачу). Можно видеть медленный характер установления стационарных колебаний и «локально» синусоидальный характер последних.

С ростом λ размер предельного цикла растет. При $\lambda \approx 1$ форма предельного цикла заметно искажается, и возрастает скорость установления стационарных колебаний. Таким образом, заметно уменьшается время выхода траектории на предельный цикл.

При больших λ колебания становятся релаксационными, и предельный цикл искажается очень сильно. Состояние равновесия в начале координат явля-

ется уже не фокусом, а неустойчивым узлом. При этом система теряет свойство изохронности: период колебаний растет, что хорошо видно из сравнения реализаций на рис.24б и рис.24в.

44. Получите уравнение по типу осциллятора Ван дер Поля, отвечающее субкритической форме бифуркации Андронова-Хопфа.

Решение 44. Такое уравнение имеет вид:

$$\ddot{x} - (\lambda + x^2)\dot{x} + x = 0.$$

В этом случае при $\lambda > 0$ в системе имеется устойчивый фокус, что физически отвечает отрицательному трению. При $\lambda < 0$ фокус становится устойчивым, и от него отделяется неустойчивый предельный цикл. Этот факт можно обосновать, выписав уравнение для медленной амплитуды:

$$\dot{R} = \frac{\lambda}{2}R + \frac{1}{8}R^3,$$

которое отвечает субкритической форме бифуркации вилка.

Однако проще всего это сделать, заметив, что приведенное уравнение получается из исходного уравнения Ван дер Поля обращением времени, т.е. заменой $t \rightarrow -t$ и изменением знака управляющего параметра. При этом устойчивые равновесия заменяются на неустойчивые и наоборот. Соответственно, устойчивый предельный цикл превращается в неустойчивый.

45. Найдите порог бифуркации Андронова-Хопфа в уравнениях химического автоколебательного осциллятора – *брюсселятора*:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a - (b+1)x + x^2y, \\ \dot{y} &= bx - x^2y.\end{aligned}$$

Решение 45. Приравнявая нулю производные по времени, находим состояние равновесия *брюсселятора*:

$$x_0 = a, \quad y_0 = \frac{b}{a}.$$

Вычисляя соответствующие частные производные от функций переменных x и y , задающих динамическую систему, находим матрицу возмущений в этой точке:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} -b-1+2x_0y_0 & x_0^2 \\ b-2x_0y_0 & -x_0^2 \end{pmatrix}.$$

Подставляя сюда координаты равновесий, получаем:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{pmatrix}.$$

След этой матрицы $S = b - a^2 - 1$. Условие бифуркации Андронова-Хопфа – обращение в нуль следа матрицы $S = 0$, что приводит к равенству $b - a^2 - 1 = 0$.

Вычислим также якобиан $J = a^2$. Таким образом, якобиан всегда положительный, и второе условие бифуркации Андронова-Хопфа выполнено. Отметим, что параметр a управляет степенью сжатия в фазовом пространстве.

46. Найдите пороговое значение параметра v , отвечающее бифуркации Андронова-Хопфа для системы, описывающей колебания в гликолизе

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 - xy^v, \\ \dot{y} &= \alpha(xy^v - y).\end{aligned}$$

Решение 46. Сначала ищем положения равновесия системы: $x = y = 1$. Затем находим матрицу возмущения в этой точке:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} -1 & -v \\ \alpha & \alpha(v-1) \end{pmatrix}.$$

Вычисляя ее след $S = \alpha v - \alpha - 1$ и якобиан $J = \alpha$, получаем условие бифуркации Андронова-Хопфа: $\alpha v = \alpha + 1$ и $\alpha > 0$.

47. Одна из разновидностей моделей «хищник–жертва» может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(x)x - xy, \\ \dot{y} &= xy - \mu y.\end{aligned}$$

Если положить $\alpha = \text{const}$, то мы получим классическую *модель Вольтера*¹⁴. Покажите, что если функция $\alpha(x)$, характеризующая мальтузианский рост «жертвы», монотонно убывает, то для случая сосуществования двух видов невозможна бифуркация Андронова–Хопфа, а если она имеет квадратичный максимум, то такая бифуркация возможна. Обсудите устойчивость равновесий в системе с функцией $\alpha(x)$, типа показанной на рис.25, рассмотрев ситуации: а) жертвы вымирают, б) хищники и жертвы сосуществуют, в) хищники вымирают. Обсудите возможные бифуркации в системе с ростом параметра μ . Укажите решения, имеющие биологический смысл.

Решение 47. Уравнения для состояний равновесия имеют вид:

$$(\alpha(x_0) - y_0)x_0 = 0, (x_0 - \mu)y_0 = 0.$$

¹⁴ Подробнее см. Ю.М.Свирижев. Нелинейные диссипативные структуры и катастрофы в экологии, 1983. М.: Наука, 368 с.

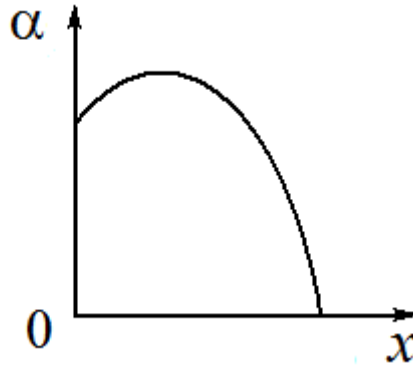


Рис.25. К модели «хищник-жертва».

Если жертвы вымирают и $x_0 = 0$, то из второго уравнения автоматически получаем и $y_0 = 0$. Таким образом, эта точка отвечает вымиранию обоих видов. Исследуем ее устойчивость. Вычисляем матрицу возмущений

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \alpha'(x_0)x + \alpha(x_0) - y_0 & -x_0 \\ y_0 & x_0 - \mu \end{pmatrix}.$$

Для тривиальной неподвижной точки $\hat{M} = \begin{pmatrix} \alpha(0) & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$. Таким образом, след матрицы $S = (\alpha(0) - \mu)$, а якобиан $J = -\mu\alpha(0)$. Поскольку $\alpha(0) > 0$ (рис.26), то якобиан отрицательный, и тривиальное равновесие является седлом. Таким образом, в данной системе оно всегда неустойчиво.

Исследуем теперь случай, когда хищники и жертвы сосуществуют. Тогда для состояния равновесия получаем: $x_0 = \mu$, $y_0 = \alpha(\mu)$. Находим матрицу возмущения в этой точке:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \mu\alpha'(\mu) & -\mu \\ \alpha(\mu) & 0 \end{pmatrix}.$$

След матрицы возмущений $S = \mu\alpha'(\mu)$, а якобиан $J = \mu\alpha(\mu)$.

Если функция $\alpha(\mu)$ монотонно убывает, то $\alpha'(\mu) \neq 0$, и бифуркация Андронова-Хопфа невозможна. Если же функция $\alpha(\mu)$ имеет квадратичный максимум, то след может обратиться в ноль, и бифуркация Андронова-Хопфа становится возможной.

Бифуркационное значение μ_1 находим из уравнения $\alpha'(\mu_1) = 0$. В окрестности этой точки всегда $\alpha(\mu) > 0$ (рис.26), и поэтому якобиан $J = \mu\alpha(\mu)$ положительный, так что и второе условие бифуркации Андронова-Хопфа выполнено.

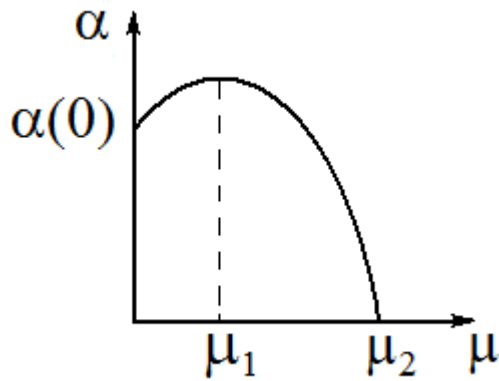


Рис.26. К определению бифуркационных параметров модели «хищник-жертва».

Будем теперь постепенно увеличивать параметр μ . При $\mu < \mu_1$ след матрицы возмущений отрицательный, и поэтому имеем неустойчивый фокус, окруженный устойчивым предельным циклом. При $\mu = \mu_1$ предельный цикл сливается с состоянием равновесия (бифуркация Андронова-Хопфа), и возникает устойчивый фокус, который затем переходит в устойчивый узел. Далее с ростом μ величина $\alpha(\mu)$ начинает уменьшаться. При $\mu = \mu_2$, когда $\alpha(\mu_2) = 0$ (рис.26), якобиан обращается в ноль. Нетрудно видеть, что это отвечает ситуации, когда исследуемое состояние равновесия отвечает вымиранию хищников: $y_0 = \alpha(\mu_2) = 0$. При этом, однако, состояние равновесия не исчезает, а превращается в седло, поскольку якобиан становится отрицательным. Значение переменной y тоже становится отрицательным, и такое решение не является биологически мотивированным.

В системе возможно еще одно равновесие, когда $y_0 = 0$ (хищники вымирают), а $x_0 \neq 0$ (жертвы выживают). В этом случае $y_0 = 0$, а x_0 в неявной форме задается уравнением $\alpha(x_0) = 0$, где x_0 – установившаяся численность жертв. Матрица возмущений в этом случае

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} x_0 \alpha'(x_0) & -x_0 \\ 0 & x_0 - \mu \end{pmatrix}.$$

Ее след $S = x_0 \alpha'(x_0) + x_0 - \mu$, а якобиан $J = x_0 \alpha'(x_0)(x_0 - \mu)$. Поскольку в точке $x = x_0$ функция всегда убывающая (см. рис.25), то $\alpha'(x_0) < 0$. Поэтому при больших значениях параметра μ якобиан отрицательный, и равновесие является седлом. При условии $\mu = x_0 = \mu_2$ якобиан обращается в ноль. Это точка бифуркации: седло сливается с равновесием второго типа. При этом, однако, равновесие не исчезает, а из седла превращается в узел. Поскольку след $S = \mu_2 \alpha'(\mu_2)$ отрицательный, то этот узел устойчивый.

Таким образом, в системе, благодаря ее симметрии, при прохождении через значение $\mu = \mu_2$ происходит *транскритическая бифуркация*: устойчивый узел сливается с седлом, после чего узел превращается в седло, и наоборот. Отметим, однако, что возникшее седло не имеет биологического смысла.

48. Для *осциллятора Богданова*

$$\ddot{x} - (\mu - x)\dot{x} + a - x^2 = 0,$$

введите потенциальную функцию $U(x)$. Найдите состояния равновесия и обсудите их устойчивость с физической точки зрения. Затем выполните формальный анализ и получите условия бифуркаций седло-узел, Андронова-Хопфа и Богданова-Тakensa. Укажите линии и точки бифуркаций на плоскости параметров и постройте характерные фазовые портреты. Обсудите возможность нелокальной бифуркации предельного цикла.

Решение 48. *Осциллятор Богданова* – это каноническая модель, демонстрирующая *бифуркацию Богданова-Тakensa*. Осциллятор Богданова можно представить в форме

$$\ddot{x} - (\mu - x)\dot{x} + \frac{dU(x)}{dx} = 0,$$

где потенциальная функция $U(x)$ задана кубическим полиномом:

$U(x) = ax - \frac{x^3}{3}$. Этот потенциал при $a < 0$ не имеет экстремумов, а при $a > 0$ характеризуется наличием максимума и минимума, рис.27.

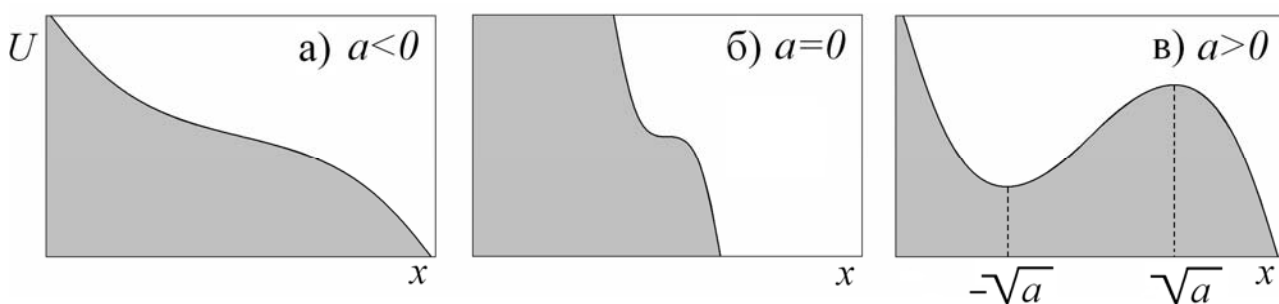


Рис.27. Потенциальная функция осциллятора Богданова в зависимости от параметра a .

Таким образом, в системе возможны устойчивое и неустойчивое равновесия x_0 , которым отвечает равенство нулю действующей силы $f(x) = a - x_0^2 = 0$. Поэтому получаем $x_0 = \pm\sqrt{a}$. Из вида потенциальной функции очевидно, что верхний знак соответствует неустойчивой точке, а нижний – устойчивой. Таким образом, параметр a управляет взаимным положением экстремумов и отвечает

за бифуркацию слияния и исчезновения состояний равновесия, которая имеет место при условии $a = 0$.

Член $(\mu - x)\dot{x}$ в уравнении осциллятора может характеризовать как положительную, так и отрицательную диссипацию. При этом параметр μ отвечает за возможность возникновения автоколебаний, а значит – за бифуркацию Андронова-Хопфа. Ее условие легко найти из физических соображений. Действительно, диссипация меняет знак с положительного на отрицательный при условии $\mu - x_0 = 0$, где для устойчивой неподвижной точки $x_0 = -\sqrt{a}$. Следовательно, бифуркация Андронова-Хопфа имеет место при $\mu = -\sqrt{a}$.

Таким образом, осциллятор имеет все «предпосылки» для реализации точки бифуркации Богданова-Тakensа при вариации двух существенных параметров, один из которых, a , отвечает за бифуркацию седло-узел, а второй, μ , за бифуркацию Андронова-Хопфа.

Получим условия бифуркаций формальным образом. Для этого переписываем уравнение осциллятора в стандартной форме

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= (\mu - x)v - a + x^2,\end{aligned}$$

и находим матрицу возмущений в точках равновесий:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm 2\sqrt{a} & \mu \mp \sqrt{a} \end{pmatrix}.$$

Теперь находим след и якобиан матрицы возмущений

$$S = \mp\sqrt{a} + \mu, \quad J = \mp 2\sqrt{a}.$$

Нетрудно видеть, что верхний знак («правое» равновесие) отвечает отрицательному якобиану, так что эта точка всегда является седлом. Нижний знак отвечает точке, которая может быть устойчивой. Приравнивая нулю след, получаем условие бифуркации Андронова-Хопфа $\mu = -\sqrt{a}$, а приравнивая нулю якобиан, находим условие седло-узловой бифуркации $a = 0$. Точка Богданова-Тakensа отвечает одновременному выполнению этих условий, так что $\mu = a = 0$. Естественно, мы получили те же результаты, что и из физических соображений.

На рис.28 показаны линии основных бифуркаций коразмерности один в окрестности точки бифуркации Богданова-Тakensа и фазовые портреты системы в избранных точках плоскости параметров (μ, a) ¹⁵. Точка Богданова-

¹⁵ Представлена наиболее интересная четверть плоскости параметров. Рекомендуем самостоятельно изобразить фазовые портреты в остальных случаях.

Такенса находится в начале координат. Можно видеть характерные метаморфозы фазового портрета системы. В точке 1 в системе есть устойчивый фокус и седло. При переходе через линию бифуркации Андронова-Хопфа фокус теряет устойчивость и от него отделяется устойчивый предельный цикл, который увеличивается в размере, точка 2.

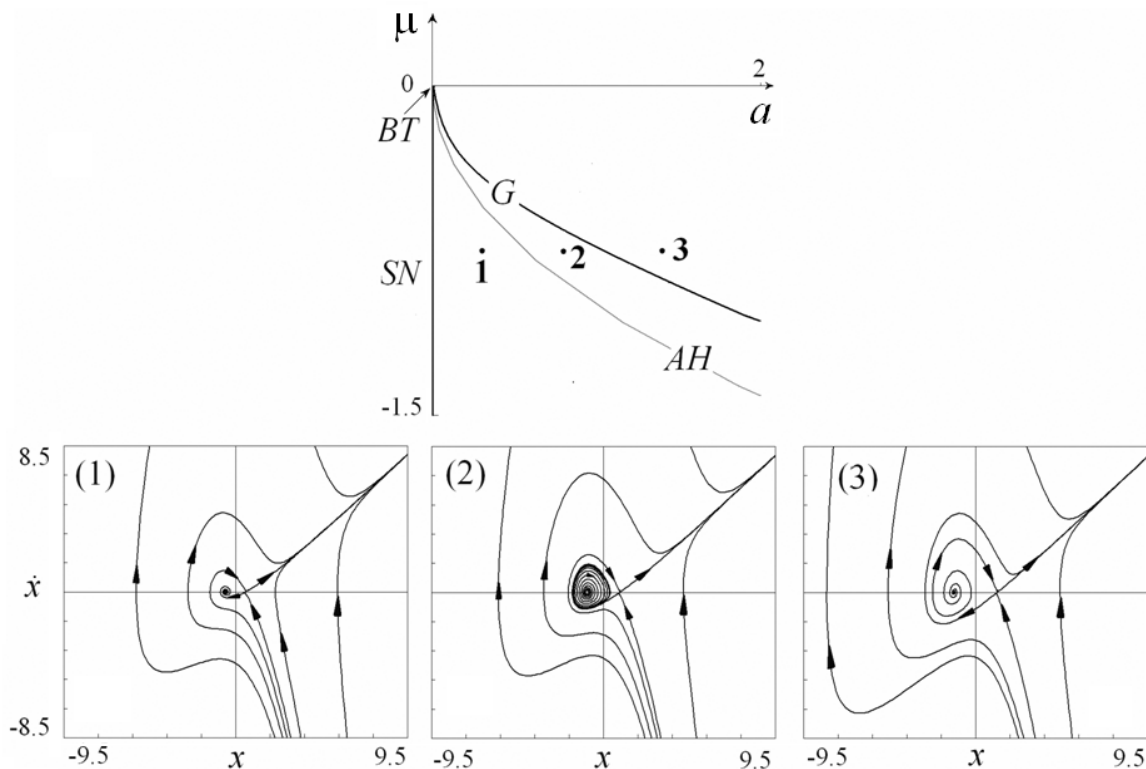


Рис. 28. Бифуркационные линии осциллятора Богданова в окрестности точки Богданова-Такенса BT на плоскости параметров и фазовые портреты в характерных точках. AH – линия бифуркации Андронова-Хопфа, SN – линия бифуркации седло-узел, G – линия влипания предельного цикла в петлю сепаратрисы.

Затем наблюдается еще одна бифуркация – бифуркация *влипания предельного цикла* в петлю сепаратрисы седла, в результате которой предельный цикл исчезает, точка 3. Появление такой бифуркации также понятно из качественных соображений. Действительно, в системе имеется седло, так что при увеличении предельного цикла в размере он сближается с седлом и, в конечном итоге, должен «столкнуться» с ним. Линия влипания предельного цикла в петлю сепаратрисы G не может быть найдена аналитически: ее приходится искать численно. Эта линия также подходит к точке Богданова-Такенса.

Заметим, что влипание предельного цикла в петлю сепаратрисы относится к *нелокальным бифуркациям*, для которых перестройка фазового портрета происходит в некоторой исчезающе малой области фазового пространства.

49. Найдите условия основных бифуркаций состояний равновесия осциллятора с произвольной диссипативной функцией $g(x)$ под действием произвольной силы $f(x)$:

$$\ddot{x} - g(x)\dot{x} + f(x) = 0.$$

Решение 49. Представим уравнения в стандартной для динамических систем второго порядка форме:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= g(x)y - f(x).\end{aligned}$$

Приравнявая нулю левые части, находим состояния равновесия

$$y_0 = 0, f(x_0) = 0.$$

Матрица линеаризации имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(x_0) & g(x_0) \end{pmatrix}.$$

Ее след и якобиан $S = g(x_0)$, $J = f'(x_0)$.

Таким образом, получаем для бифуркаций коразмерности один.

- *Бифуркация седло-узел.* Этой бифуркации отвечает равенство нулю якобиана $J = 0$:

$$f(x_0) = 0, f'(x_0) = 0.$$

- *Бифуркация Андронова-Хопфа.* Для этой бифуркации след $S = 0$ при дополнительном условии $J > 0$, так что

$$f(x_0) = 0, g(x_0) = 0, f'(x_0) > 0.$$

Для бифуркаций коразмерности два получаем следующие условия.

- *Бифуркация Богданова-Тakensа.* Эта бифуркация представляет собой общую точку бифуркаций седло-узел и Андронова-Хопфа, так что одновременно $S = 0$, $J = 0$. Тогда получаем

$$f(x_0) = 0, g(x_0) = 0, f'(x_0) = 0.$$

- *Бифуркация трехкратное равновесие (точка сборки).* Эта бифуркация отвечает слиянию двух ветвей седло-узловой бифуркации, так что для нее

$$f(x_0) = 0, f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0.$$

В принципе, могут наблюдаться и бифуркации более высокой коразмерности, например, четырехкратное равновесие («ласточкин хвост») и т.д.

Заметим, что осциллятор Богданова принадлежит к рассматриваемому классу, и для него $g(x) = \mu - x$ и $f(x) = a - x^2$.

50. Для автогенератора с жестким возбуждением, описываемого уравнением

$$\ddot{x} - (\lambda + \mu x^2 - x^4)\dot{x} + x = 0,$$

получите укороченное уравнение. С его помощью обсудите бифуркации в системе, включая бифуркации предельных циклов. Результат представьте на плоскости параметров (μ, λ) . Параметр λ , отвечающий за трение, и параметр μ , отвечающий за нелинейное насыщение, могут быть как отрицательными, так и положительными.

Решение 50. Прежде всего, получим укороченное уравнение для автогенератора с жестким возбуждением. По сравнению с задачей 23 надо учесть влияние члена $x^4\dot{x}$. Действуя аналогично задаче 23, получаем

$$x^4\dot{x} = \frac{i}{32} [a^4 e^{4it} + 4|a|^2 a^2 e^{2it} + 6a^2 (a^*)^2 + 4a(a^*)^3 e^{-2it} + (a^*)^4 e^{-4it}] \times \\ \times (ae^{it} - a^* e^{-it}) = \frac{i}{16} |a|^4 a e^{it} + \dots$$

Тогда приходим к следующему укороченному уравнению

$$\dot{a} = \frac{\lambda}{2} a + \frac{\mu}{8} |a|^2 a - \frac{1}{16} |a|^4 a.$$

Состояния равновесия укороченного уравнения ищем, приравнявая скорость изменения амплитуды нулю. Одно из них располагается в начале координат. Для нетривиального равновесия получаем:

$$\xi^2 - 2\mu\xi - 8\lambda = 0,$$

где $\xi = |a|^2$. Решаем это уравнение:

$$\xi_{1,2} = \mu \pm \sqrt{\mu^2 + 8\lambda}.$$

При этом важно учесть, что должно быть $\xi = |a|^2 > 0$. Тогда в зависимости от комбинации знаков получаем следующие результаты:

$$\lambda > 0, \xi = \mu + \sqrt{\mu^2 + 8\lambda},$$

$$\lambda < 0, \mu < 0, \text{ решения нет,}$$

$$\lambda < 0, \mu > 0, \xi_{1,2} = \mu \pm \sqrt{\mu^2 + 8\lambda}.$$

Поскольку амплитуда a задает предельные циклы в исходной системе, то заключаем, что при $\lambda > 0$ будет единственный предельный цикл, а при $\lambda < 0, \mu < 0$ предельных циклов нет. При $\lambda < 0, \mu > 0$ реализуется два предельных цикла, если только $\mu^2 > -8\lambda$. Рекомендуем самостоятельно показать, что

орбита меньшего радиуса (знак минус) отвечает неустойчивому режиму, а орбита большего (знак плюс) – устойчивому.

С помощью решения задачи 40 и 42 с учетом выбранных знаков в уравнении заключаем, что линия $\lambda = 0$ отвечает бифуркации Андронова-Хопфа. При этом она будет суперкритической (прямой) AH_- при $\mu < 0$ и субкритической (обратной) AH_+ при $\mu > 0$.

Суммарное устройство плоскости параметров (μ, λ) показана на рис.29. Линия $\lambda = 0$ отвечает бифуркации Андронова-Хопфа. При $\lambda = \mu = 0$ расположена точка коразмерности два, в которой меняется характер бифуркации Андронова-Хопфа. Такую точку называют *вырожденной бифуркацией Андронова-Хопфа* (*degenerate Andronov-Hopf bifurcation*). Мы будем обозначать ее DAH ¹⁶.

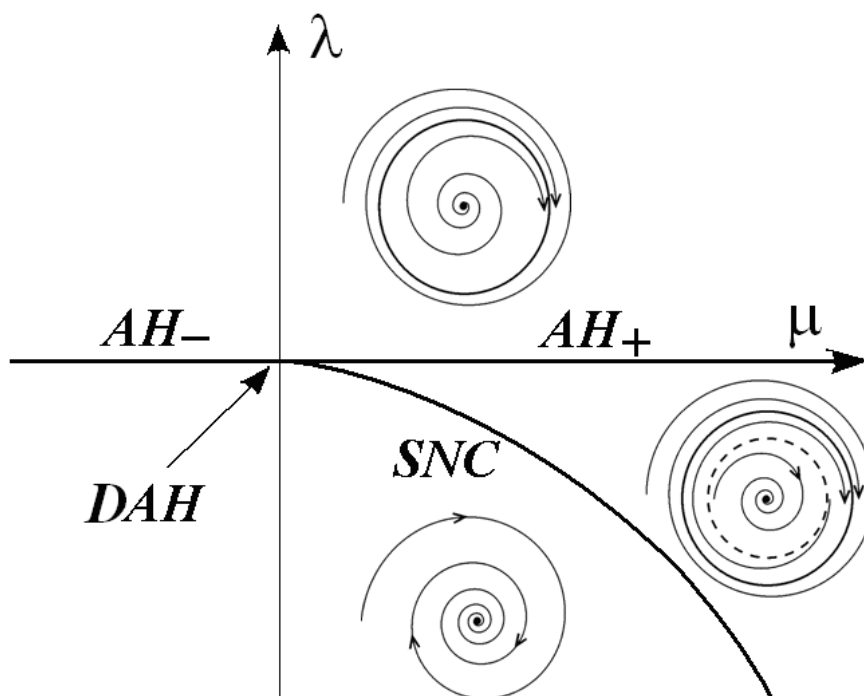


Рис.29. Окрестность точки вырожденной бифуркации Андронова-Хопфа DAH . На рисунке показаны: AH_- – суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа, AH_+ – субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа, SNC – линия слияния устойчивого и неустойчивого предельных циклов. Пунктиром показан неустойчивый предельный цикл.

Если на плоскости параметров рис.29 обойти точку DAH по часовой стрелке, начиная с третьей четверти, то можно наблюдать такие метаморфозы фазового портрета. Сначала имеется единственное состояние равновесия – устойчивый фокус в начале координат. При пересечении линии AH_- происходит суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа, равновесие становится неус-

¹⁶ Иногда говорят об обобщенной бифуркации Андронова-Хопфа.

тойчивым и от него отделяется устойчивый предельный цикл. При пересечении линии AH_+ происходит субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа, так что равновесие превращается в устойчивый фокус и от него отделяется неустойчивый предельный цикл. В области между линиями AH_+ и SNC в системе сосуществуют устойчивый и неустойчивый предельные циклы, а также устойчивое равновесие в начале координат. При уменьшении параметра λ предельные циклы сближаются и на линии SNC $\mu^2 = -8\lambda$ сливаются и исчезают. Такую бифуркацию можно назвать *седло-узловой бифуркацией предельных циклов*.

51. Рассмотрите автоколебательный осциллятор с потенциалом

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x^3 + ax + b = 0,$$

управляемым двумя параметрами a и b . Выпишите потенциальную функцию. Найдите условия локальных бифуркаций коразмерности один и два, и укажите их на плоскости параметров (b, a) . Постройте примеры фазовых портретов и укажите на возможность нелокальных бифуркаций.

Решение 51. Уравнение осциллятора может быть представлено в форме

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \frac{dU(x)}{dx} = 0,$$

где потенциал задан полиномом $U(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$. Такой потенциал отвечает катастрофе сборки. Поэтому данную систему можно назвать *автоколебательным осциллятором с катастрофой сборки*.

Метаморфозы потенциала при вариации параметров иллюстрирует рис.15 из задачи 31. Отметим, что вдоль линии $b = 0$ потенциальная функция симметрична. Таким образом, в частном случае $b = 0$, $a > 0$ исследуемая система превращается в осциллятор Ван дер Поля-Дуффинга (с точностью до нормировки).

Состояния равновесия системы отвечают уравнению

$$x_0^3 + ax_0 + b = 0.$$

Укажем основные локальные бифуркации автоколебательного осциллятора с катастрофой сборки, для чего можно использовать результаты предыдущей задачи. В этом случае $f(x) = x^3 + ax + b$, $g(x) = \lambda - x^2$. Опуская достаточно простые выкладки, приведем соответствующие результаты.

- *Бифуркация седло-узел:*

$$b = \pm 2 \left(-\frac{a}{3} \right)^{3/2}.$$

- *Бифуркация Андронова-Хопфа:*

$$b = \pm\sqrt{\lambda} (\lambda + a),$$

$$a > -3\lambda.$$

Эти уравнения задают две полупрямые линии на плоскости (a, b) .

- Точки Богданова-Тakensа:

$$a = -3\lambda, \quad b = \mp 2\lambda^{3/2}.$$

Общая картина локальных бифуркаций представлена на рис.30. На него нанесены линии седло-узловой бифуркации SN , точка сборки CP , линии бифуркаций Андронова-Хопфа AH и точки Богданова-Тakensа BT .

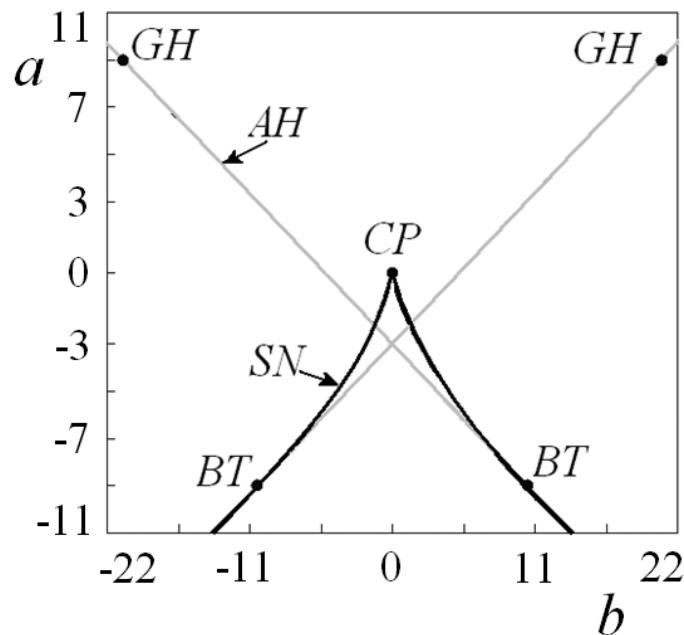


Рис.30. Картина локальных бифуркаций автоколебательного осциллятора с катастрофой сборки для $\lambda = 3$. SN – линии седло-узловых бифуркаций, AH – линии бифуркаций Андронова-Хопфа, CP – точка сборки, BT – точка Богданова-Тakensа, GH – точка вырожденной бифуркации Андронова-Хопфа.

Пример метаморфоз фазового портрета с уменьшением параметра a при фиксированном $b = -5.5$ дан на рис.31. При этом пересекаем линию бифуркации Андронова-Хопфа на рис.30 сверху вниз достаточно далеко от точки сборки. Вначале сосуществуют устойчивый предельный цикл и неустойчивый фокус. На линии бифуркации Андронова-Хопфа рождается неустойчивый предельный цикл, а неподвижная точка обретает устойчивость. Дальнейшее уменьшение параметра a приводит к тому, что устойчивый и неустойчивый циклы сталкиваются и исчезают: происходит нелокальная *седло-узловая бифуркация предельного цикла*. Эта бифуркация аналогична той, которая наблюдается в автогенераторе с жестким возбуждением, см. задачу 48. Соответствующая ли-

ния лежит ниже линии бифуркации Андронова-Хопфа и заканчивается в точке контакта с последней: в точке *вырожденной бифуркации Андронова-Хопфа GH*.

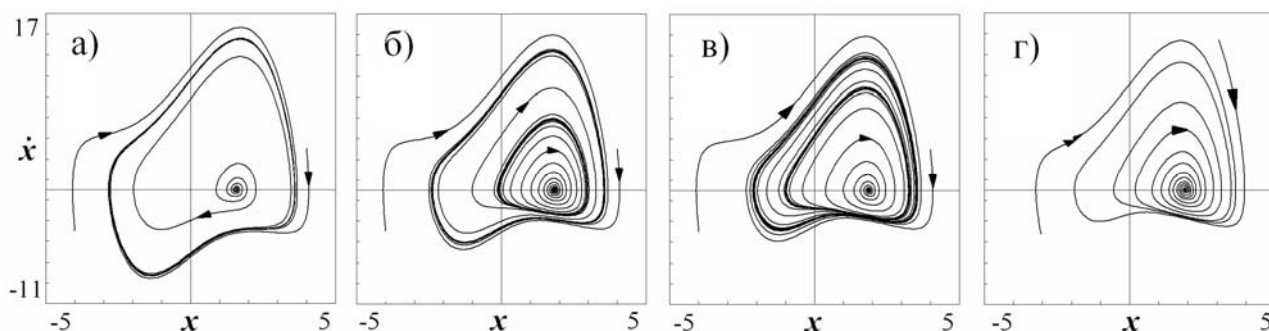
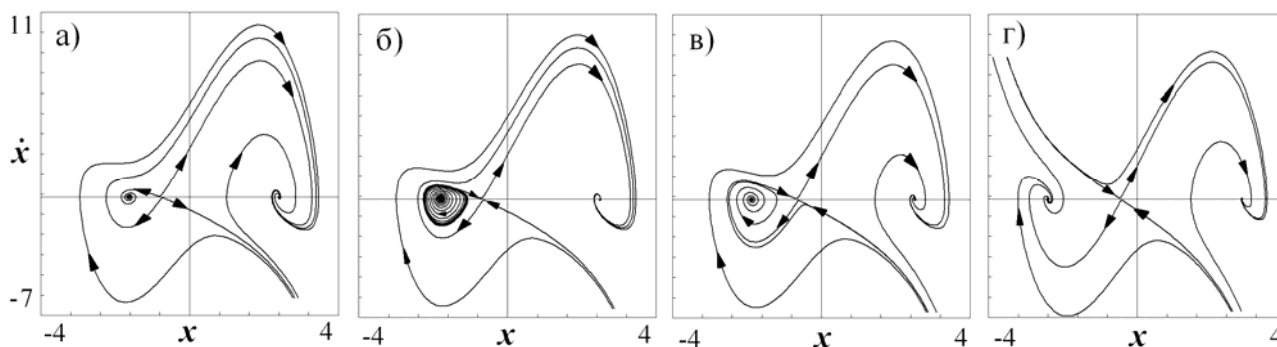


Рис.31. Фазовые портреты осциллятора с катастрофой сборки, построенные вдоль маршрута $b = -5.5$. Значения второго параметра: $a = 1$ (а), $a = -0.4$ (б), $a = -0.6$ (в), $a = -0.8$ (г).

Выберем теперь значение $b = -3$ и пересечем линию седло-узловых бифуркаций, а затем линию бифуркации Андронова-Хопфа в окрестности точки Богданова-Такенса (правее нее). Фазовые портреты показаны на рис.32. Сначала рождается пара седло и неустойчивый узел, который затем превращается в неустойчивый фокус (рис.32а). Затем происходит бифуркация Андронова-Хопфа и рождается неустойчивый предельный цикл, а фокус становится устойчивым (рис.32б). При дальнейшем уменьшении a происходит нелокальная бифуркация: предельный цикл влипает в сепаратрису седла и исчезает (рис.32в). В результате остаются два устойчивых фокуса и седло (рис.32г).

Полный анализ нелокальных бифуркаций можно провести, например, при помощи пакета программ MatCont¹⁷. Это позволяет нанести на плоскость параметров (a, b) линию влипания предельного цикла в петлю сепаратрисы, которая заканчивается в точках Богданова-Такенса, а также точки обобщенной бифуркации Андронова-Хопфа *GH*.



¹⁷ Пакет MatCont доступен в сети Интернет по адресу: <http://www.matcont.ugent.be> и включает в себя много полезных возможностей для исследования бифуркаций режимов динамики нелинейных систем, а именно: нахождение точек бифуркаций, определение их принадлежности к какому-либо известному классу, способность наблюдать за динамикой бифуркационных точек при вариации параметров.

Рис.32. Фазовые портреты осциллятора с катастрофой сборки, построенные вдоль маршрута $b = -3$. Значения второго параметра: $a = -4.5$ (а), $a = -4.9$ (б), $a = -5.1$ (в), $a = -7$ (г).

Мы рассмотрели осциллятор с катастрофой сборки в случае, когда потенциал может иметь два минимума и максимум. Возможна, однако, ситуация, когда потенциал задается полиномом четвертой степени, но может иметь два максимума и минимум между ними. Она возникает при смене знака перед старшим членом, так что

$$U(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx + c.$$

В теории катастроф в этом случае используют термин *двойственная сборка*. Для такого потенциала уравнение автоколебательного осциллятора имеет вид

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} - x^3 + ax + b = 0.$$

Оно может быть исследовано по аналогии с приведенным выше рассмотрением.

52. Покажите, что осциллятор с катастрофой сборки в случае $b = 0$ описывает бифуркацию коразмерности два – *точку Арнольда-Такенса*. Опираясь на модель в форме осциллятора, обсудите возможные режимы и бифуркации в такой системе.

Решение 52. Осциллятор с катастрофой сборки при $b = 0$ принимает вид

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} \pm x^3 + ax = 0.$$

При этом потенциал описывается выражением

$$U(x) = \pm \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2,$$

и является симметричным относительно нулевого положения равновесия. Перейдем к стандартной форме уравнений:

$$\dot{x} = v,$$

$$\dot{v} = \lambda v - ax \mp x^3 - x^2v.$$

Это соотношение является канонической моделью для точки *бифуркации Арнольда-Такенса*¹⁸, причем возможны два варианта этой бифуркации, которые в соответствии со знаками обозначим AT^+ и AT^- .

Таким образом, «физическая природа» точек Арнольда-Такенса – это автоколебательные явления в системе с симметричным двухямным (двугорбым) по-

¹⁸ Это одно из возможных названий, в литературе по теории бифуркаций используются и другие варианты. Например, в математической литературе можно встретить несколько громоздкий вариант: «два нулевых собственных значения с симметрией порядка два» [15].

тенциалом. Для систем с такой симметрией точки Арнольда-Тakens имеют координату два и, тем самым, оказываются типичными на плоскости параметров. Несмотря на требование симметрии, точки такого типа оказываются существенными, например, для описания картины синхронизации в резонансном случае с соотношением частот 1:2.

Обсудим сначала ситуацию, отвечающую симметричному двугорбому потенциалу (знак минус в выражении для потенциала). Перестройка такого потенциала при вариации параметра a иллюстрирует рис.33 и отвечает субкритической бифуркации вилка. Бифуркационные линии и фазовые портреты системы в окрестности точки AT^- представлены на рис.34.

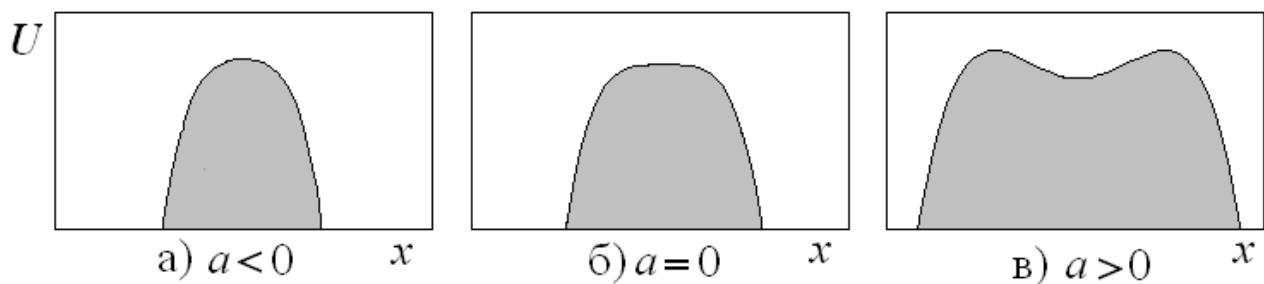


Рис.33. Метаморфозы «двугорбого» потенциала, отвечающего за субкритическую бифуркацию вилка.

Характерные режимы и бифуркации этой системы можно понять из физических соображений, опираясь на условие возникновения автоколебаний $\lambda > 0$ и вид потенциала. Если $a < 0$, то при любых λ в силу вида потенциала на рис.33а, возможно одно неустойчивое равновесие – седло в начале координат. Если $a > 0$ и $\lambda < 0$, то осциллятор оказывается диссипативным, и в результате бифуркации вилка седло становится устойчивым узлом (затем фокусом), от которого отделяются два новых седла. Наиболее интересен случай $\lambda > 0$ и $a > 0$. При малых λ возникают автоколебания, так что фокус в начале координат становится неустойчивым и от него отделяется устойчивый предельный цикл. С ростом λ предельный цикл растет в размере, так что неизбежно наступит момент, когда он столкнется с сепаратрисами симметрично расположенных седел и исчезнет в результате соответствующей нелокальной бифуркации.

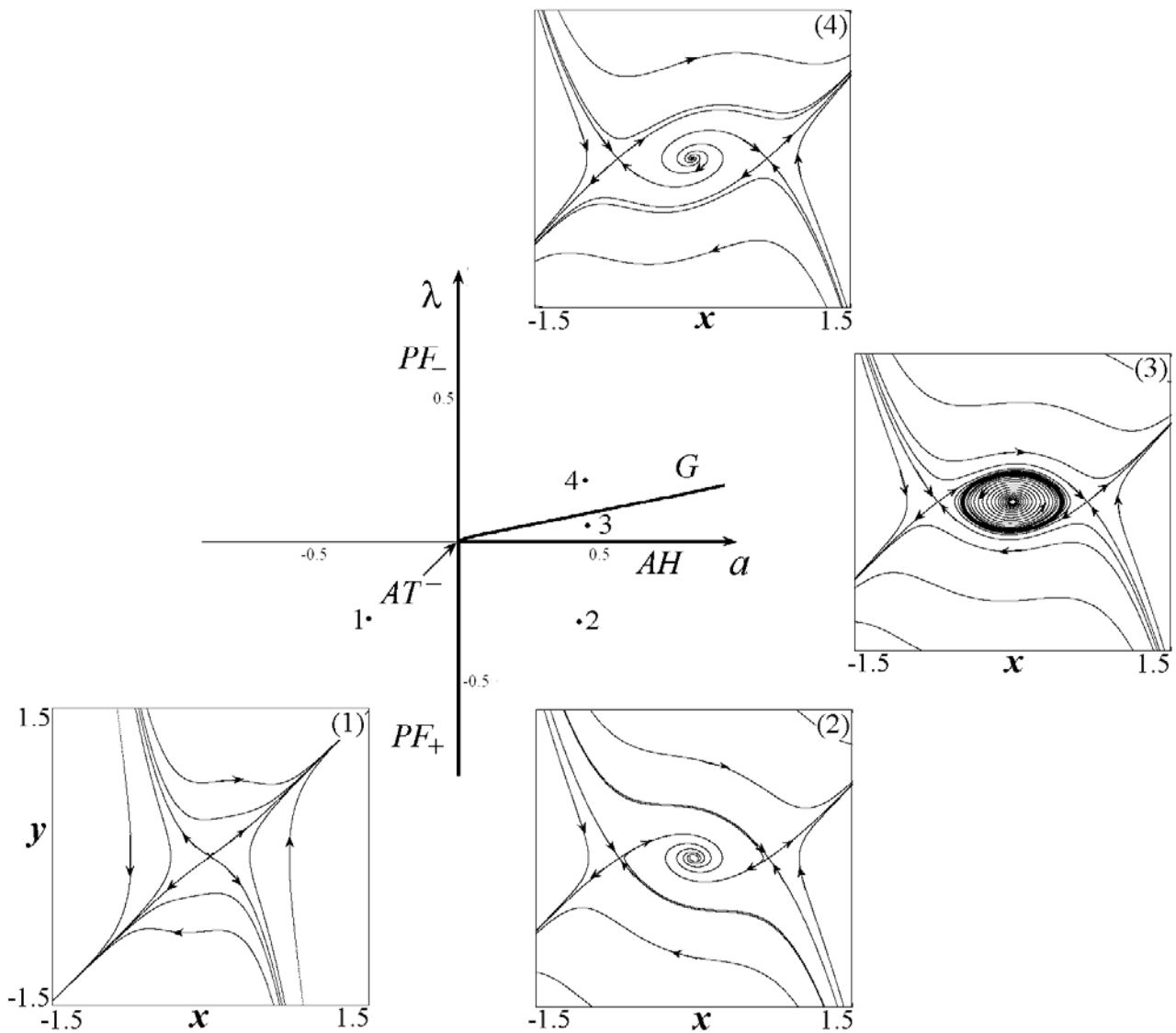


Рис.34. Бифуркационные линии и характерные фазовые портреты в окрестности точки Арнольда-Такенса AT^- . AH – линии бифуркаций Андронова-Хопфа, PF^- линия бифуркации вилка, G – нелокальная бифуркация столкновения предельного цикла с сепаратрисами седла.

После нелокальной бифуркации остается неустойчивый фокус и два седла. Если теперь вновь уменьшать параметр a , то фокус станет неустойчивым узлом, и на линии $a = 0$ в результате бифуркации вилка он сольется с двумя седлами. В результате, приходим к начальной ситуации, когда существует одно седло.

Таким образом, характерный «признак» точки Арнольда-Такенса AT^- состоит в том, что на плоскости параметров сходятся линии бифуркации Андронова-Хопфа и бифуркации вилка. В эту же точку приходит линия нелокальной бифуркации.

Обсудим теперь ситуацию, отвечающую симметричному двухмному потенциалу. Его перестройку иллюстрирует рис.35. Бифуркационные линии и характерные фазовые портреты в этом случае показаны на рис.36.

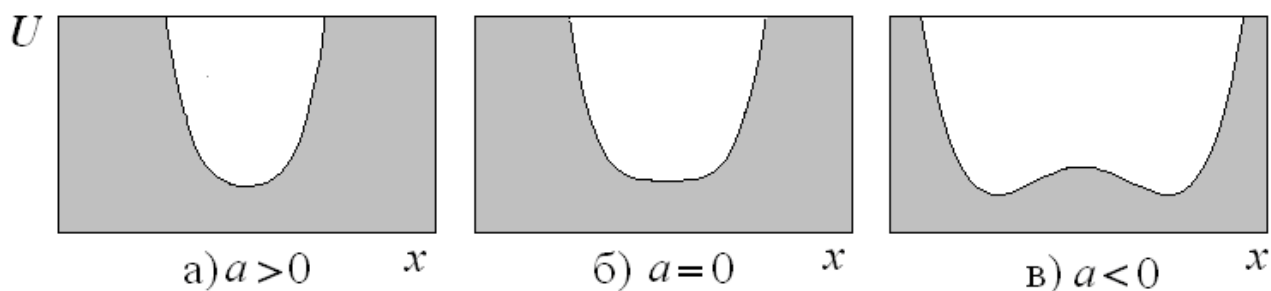


Рис.35. Метаморфозы симметричного двухямного потенциала, отвечающего за суперкритическую бифуркацию вилка.

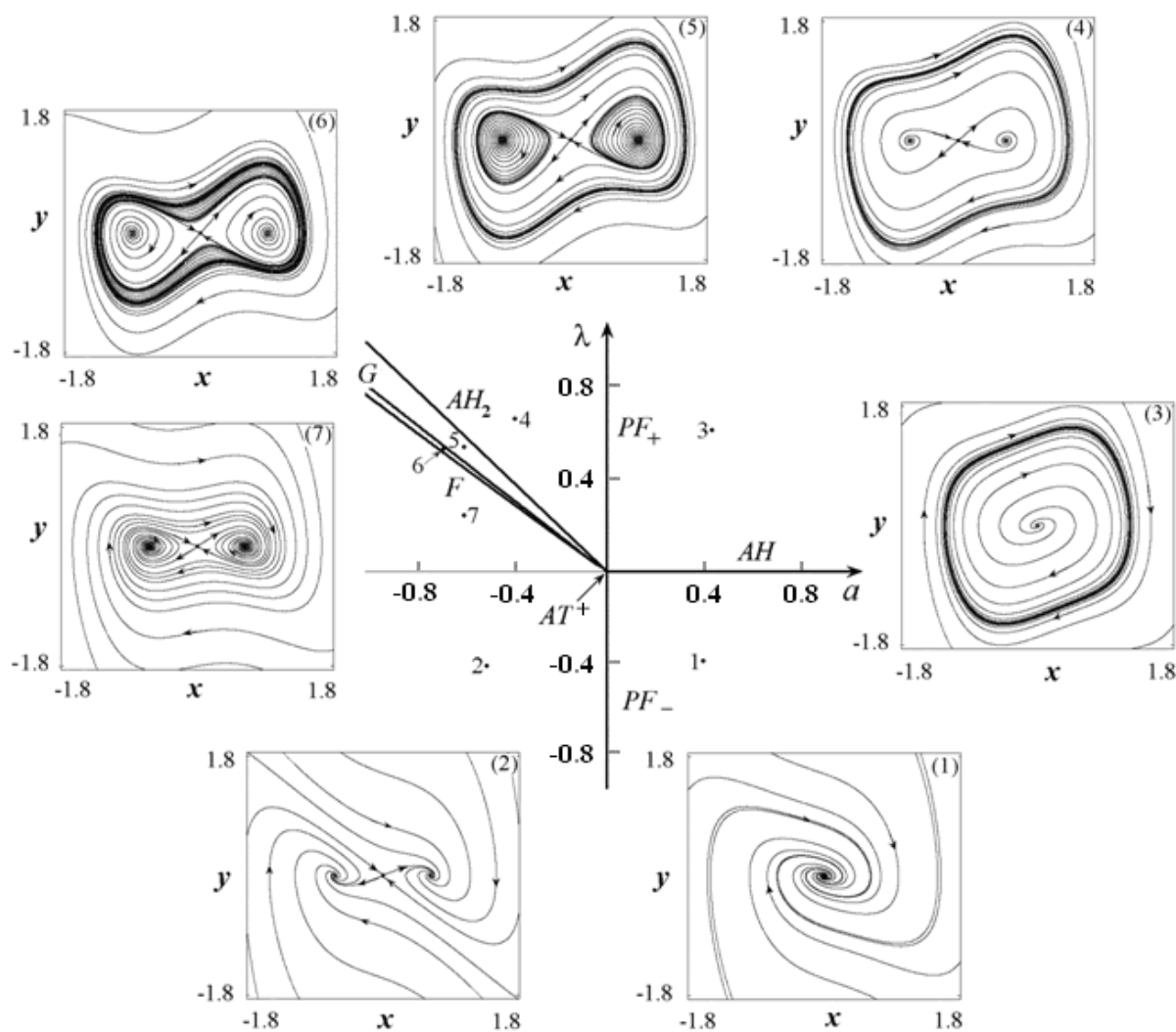


Рис.36. Бифуркационные линии и характерные фазовые портреты в окрестности точки Арнольда-Такенса AT^+ . AH – линии бифуркаций Андронова-Хопфа, PF_- – суперкритическая бифуркация вилка, PF_+ – субкритическая бифуркация вилка, AH_2 – «симметричная» бифуркация Андронова-Хопфа, F – касательная бифуркация предельных циклов, G – нелокальная бифуркация.

Бифуркации в этом случае также могут быть описаны с привлечением физических соображений. В области $\lambda < 0$ система представляет собой диссипа-

тивный осциллятор, и характер динамики целиком определяется перестройкой потенциала. При $a > 0$ в соответствии с рис.35а имеется устойчивое равновесие в начале координат $x_1 = 0$. Если уменьшать параметр a , то при $a = 0$ устройство потенциальной ямы изменится, равновесие в начале координат x_1 станет неустойчивым (седлом) и от нее отделятся два новых устойчивых равновесия. Им отвечает минимум потенциала, так что координаты равновесий $x_{2,3} = \pm\sqrt{-a}$. Это тоже бифуркация вилка, но суперкритическая ее форма.

Пусть теперь в системе возможны автоколебания и $\lambda > 0$. Если конфигурация потенциала отвечает рис.35а, то в системе имеет место классическая для автоколебаний ситуация – устойчивый предельный цикл охватывает неустойчивый фокус в начале координат. Если теперь уменьшать параметр a , то переход к двухямному потенциалу приведет к бифуркации вилка этого равновесия. Поскольку оно неустойчиво, то будет наблюдаться субкритическая бифуркация рождения двух неустойчивых равновесий $x_{2,3} = \pm\sqrt{-a}$.

Эти равновесия могут претерпевать бифуркацию Андронова-Хопфа рождения неустойчивого предельного цикла. Покажем это. Запишем матрицу линеаризации системы в случае верхнего знака:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a - 3x^2 - 2xy & \lambda - x^2 \end{pmatrix},$$

так что для неподвижных точек $x_{2,3} = \pm\sqrt{-a}$ получаем

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2a & \lambda + a \end{pmatrix}.$$

Условие бифуркации рождения предельного цикла – обращение в ноль следа матрицы $S = \lambda + a$, так что $\lambda = -a$. Якобиан $J = -2a$ и положителен при $a < 0$, как и необходимо для бифуркации Андронова-Хопфа. При этом предельные циклы рождаются одновременно из обеих точек $x_{2,3}$. Это определенное вырождение, связанное с симметрией системы.

С уменьшением управляющего параметра λ неустойчивые циклы сталкиваются с ветвями сепаратрисы седла, но не исчезают, а «проходят» сквозь них, объединяясь, так что в результате этой нелокальной бифуркации возникает один неустойчивый предельный цикл, охватывающий три равновесия – седло в начале координат и две точки $x_{2,3}$, которые стали устойчивыми в результате произошедшей ранее бифуркации Андронова-Хопфа.

Если и далее увеличивать параметр a или уменьшать λ , то неустойчивый и устойчивый предельные циклы сближаются, сливаются и исчезают в результате fold-бифуркации. Возникает случай общего положения – два устойчивых и одно неустойчивое равновесия, – уже обсуждавшийся выше.

Таким образом, «признак» бифуркации Арнольда-Тakensа AT^+ – наличие общей точки бифуркации Андронова-Хопфа и бифуркации вилки, которая состоит из двух ветвей, субкритической и суперкритической. В эту же точку приходит линия бифуркации Андронова-Хопфа рождения пары неустойчивых предельных циклов и линия нелокальной бифуркации.

Бифуркации трехмерных потоков

53. Выпишите в общем виде уравнения, задающие трехмерную потоковую динамическую систему, уравнения для состояний равновесия этой системы и матрицу возмущений. Найдите уравнение для определения ее собственных значений через инварианты этой матрицы.

Решение 53. Трехмерная система в общем случае задается уравнениями

$$\dot{x} = f(x, y, z),$$

$$\dot{y} = g(x, y, z),$$

$$\dot{z} = v(x, y, z).$$

Состояния равновесия (x_0, y_0, z_0) ищем, приравняв нулю скорости изменения переменных:

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

$$g(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

$$v(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Динамика малых возмущений в окрестности состояния равновесия будет определяться матрицей возмущений

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \end{pmatrix},$$

где соответствующие частные производные вычислены в точке равновесия (x_0, y_0, z_0) .

Характеристическое уравнение этой матрицы будет кубическим, и, соответственно, будет иметь три корня.

Очевидно, можно записать¹⁹:

$$(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2)(\gamma - \gamma_3) = 0.$$

Отсюда получаем:

$$\gamma^3 - (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)\gamma^2 + (\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_3)\gamma - \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = 0,$$

или

$$\gamma^3 - S\gamma^2 + H\gamma - J = 0.$$

Входящие в это уравнение коэффициенты определяют три *инварианта матрицы возмущений*: ее след S , якобиан J и третий инвариант H :

$$S = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, H = \gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_3, J = \gamma_1\gamma_2\gamma_3.$$

Анализ характера равновесий удобно проводить, используя инварианты матрицы в качестве параметров.

54. Укажите возможные типичные варианты расположения собственных чисел в случае трехмерной динамической системы на комплексной плоскости и постройте качественно соответствующие фазовые портреты.

Решение 54. Три корня $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ соответствующего кубического уравнения могут быть либо все действительными, либо два корня γ_1, γ_2 будут комплексно сопряженными, а третий γ_3 — действительным. Таким образом, по сравнению с двумерным потоком добавляется один корень γ_3 , который всегда можно считать действительным. Это позволяет сразу дать классификацию состояний равновесия трехмерного потока. Для этого отмечаем, что конфигурация двух корней γ_1, γ_2 на комплексной плоскости дается рис.18. Добавление третьего действительного корня γ_3 увеличивает число вариантов в два раза, поскольку этот корень может быть (в типичных случаях) отрицательным или положительным.

Конфигурации трех собственных чисел на комплексной плоскости и соответствующие качественные фазовые портреты даны, соответственно, на рис.37 и рис.38.

¹⁹ В математике это соотношение называется теоремой Безу.

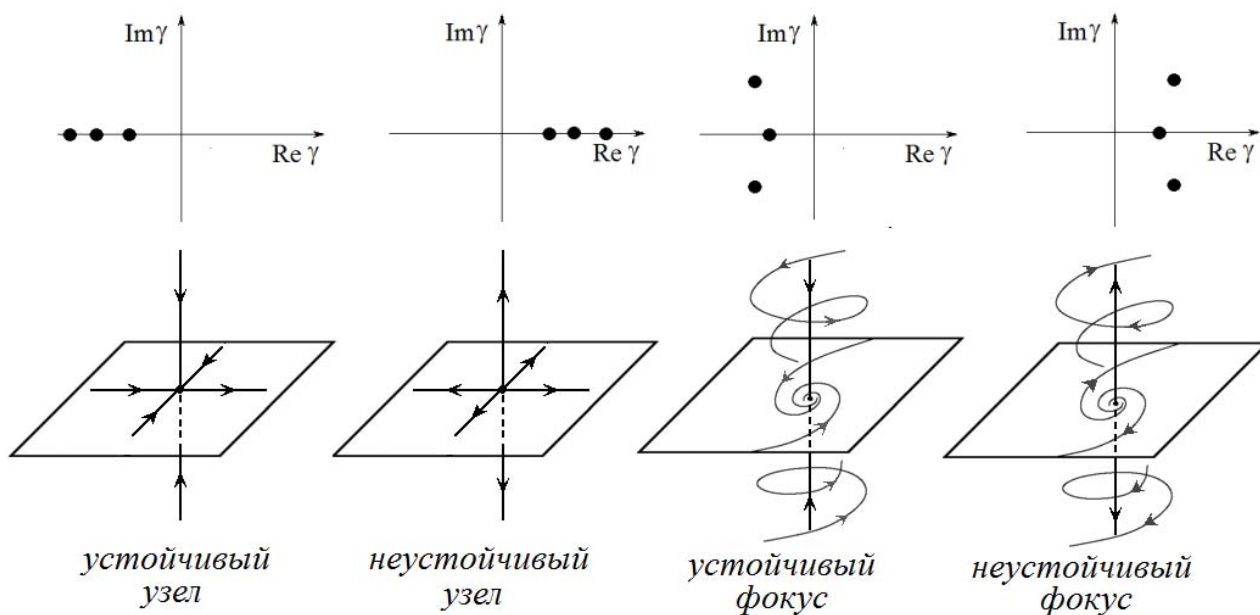


Рис.37. Трехмерные узлы и фокусы и положение собственных чисел на комплексной плоскости.

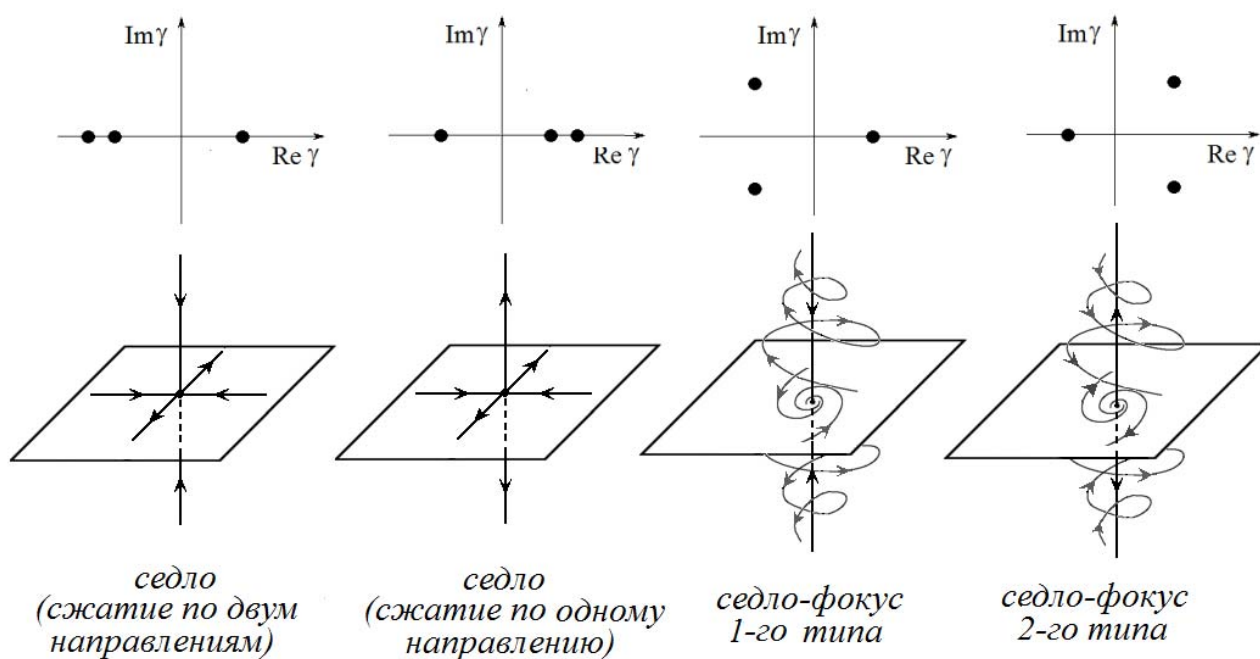


Рис.38. Трехмерные седла и седло-фокусы и положение собственных чисел на комплексной плоскости.

Последовательно опишем возможные равновесия.

1) *Устойчивый узел.* Все собственные значения действительные и отрицательные, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0$. Изображающие точки приближаются к равновесию по всем трем направлениям.

2) *Неустойчивый узел*. Все собственные значения действительные и положительные, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 < 0$. Изображающие точки убегают от равновесия по всем трем направлениям.

3) *Устойчивый фокус*. Два собственных значения комплексно-сопряженные, и их действительная часть отрицательна, третье собственное число отрицательное, $\operatorname{Re} \gamma_{1,2} < 0, \gamma_3 < 0$.

4) *Неустойчивый фокус*. Два собственных значения комплексно-сопряженные, и их действительная часть положительна, третье собственное число положительное, $\operatorname{Re} \gamma_{1,2} > 0, \gamma_3 > 0$.

5) *Седло*. Все собственные значения действительные, два из них отрицательные, а одно – положительное, $\gamma_1, \gamma_2 < 0, \gamma_3 > 0$. Сжатие идет по двум направлениям (вдоль поверхности), а по одному – растяжение.

6) *Седло*. Все собственные значения действительные, одно из них отрицательное, а два – положительные, $\gamma_1, \gamma_2 > 0, \gamma_3 < 0$. Сжатие идет по одному направлению, а растяжение по двум направлениям.

7) *Седло-фокус*. Два собственных значения комплексно-сопряженные, и их действительная часть отрицательна, третье собственное число положительное, $\operatorname{Re} \gamma_{1,2} < 0, \gamma_3 > 0$. Как говорят, седло-фокус имеет двумерное устойчивое и одномерное неустойчивое многообразия. Будем называть его седло-фокусом 1-го типа.

8) *Седло-фокус*. Два собственных значения комплексно-сопряженные, и их действительная часть положительная, третье собственное число отрицательное, $\operatorname{Re} \gamma_{1,2} > 0, \gamma_3 < 0$. Седло-фокус имеет одномерные устойчивое и двумерное неустойчивое многообразия. Будем называть его седло-фокусом 2-го типа.

Устойчивый и неустойчивый узел отвечают сжатию (растяжению) сразу по всем трем направлениям. Отметим, что они переходят друг в друга при обращении времени.

Устойчивый фокус отвечает ситуации, когда изображающая точка приближается к равновесию по одному направлению, одновременно «скручиваясь», как показано на рисунке. Неустойчивый фокус получается обращением времени.

Отметим, что при комплексных собственных числах сжатие может протекать по-разному. Если $\gamma_3 < \operatorname{Re} \gamma_{1,2} < 0$, то сначала происходит быстрое сжатие на некоторую поверхность, а затем траектории «скручиваются» к равновесию, двигаясь по этой поверхности. В этом случае говорят, что равновесие имеет два

ведущих направления. Если же $\text{Re} \gamma_{1,2} < \gamma_3 < 0$, то сжатие по двум направлениям идет очень быстро. И через некоторое время точка стремится к равновесию, фактически, вдоль линии устойчивого многообразия. В этом случае говорят, что равновесие имеет одно *ведущее направление.*

Седло отвечает ситуации, когда по одним направлением идет сжатие, а по другим – уход траекторий от равновесия. При этом выделяются два типа седла, в зависимости от того, по одному или по двум направлениям точки сжимаются к седлу.

Седло-фокус – состояние равновесия, не имеющее аналога в двумерной системе. В этом случае траектория может «скручиваться» к равновесию вдоль поверхности, но одновременно убежать по некоторому направлению. Вторым вариантом седло-фокуса получается обращением времени.

55. Найдите условие в пространстве инвариантов матрицы возмущений, отвечающее возникновению (исчезновению) комплексных собственных значений. Обсудите характер возникающих равновесий.

Решение 55. Комплексные корни уравнения $\gamma^3 - S\gamma^2 + H\gamma - J = 0$ появляются, когда у функции $y(\gamma) = \gamma^3 - S\gamma^2 + H\gamma - J$ экстремум лежит на оси γ , рис.39. Когда экстремум «отрывается» от этой оси, действительные решения исчезают.

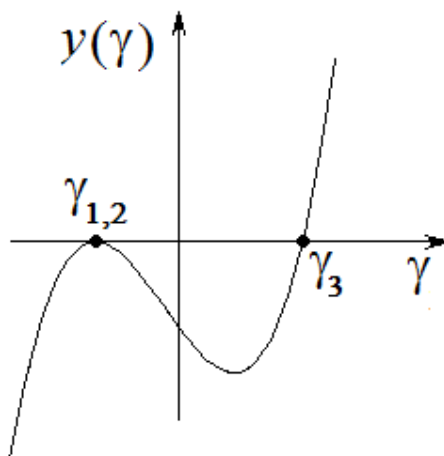


Рис.39. К определению условия появления комплексных корней характеристического уравнения.

Поэтому условие появления комплексных корней имеет вид:

$$f(\gamma) = \gamma^3 - S\gamma^2 + H\gamma - J = 0,$$

$$f'(\gamma) = 3\gamma^2 - 2S\gamma + H = 0.$$

Второе уравнение можно решить, и решение подставить в первое, так что получаем следующее уравнение поверхности

$$J = \gamma^3 - S\gamma^2 + H\gamma, \quad \gamma = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 3H}}{3}.$$

Его можно преобразовать к виду²⁰:

$$J = \frac{1}{3}HS - \frac{2}{27}S^3 \pm \frac{2}{27}(S^2 - 3H)^{3/2}.$$

Можно отметить характерный закон «трех вторых» и возможность точки сборки при условии $S^2 = 3H$. Решения с комплексными собственными числами могут быть фокусами или седло-фокусами.

56. Постройте разбиение пространства параметров инвариантов матрицы возмущений на характерные области, отвечающие восьми грубым состояниям равновесия, показанным на рис.37,38.

Решение 56. Пространство параметров (S, H, J) является трехмерным. Построим его сечения плоскостями $S = const$. В первую очередь на плоскость (H, J) надо нанести линию

$$J = \frac{1}{3}HS - \frac{2}{27}S^3 \pm \frac{2}{27}(S^2 - 3H)^{3/2},$$

которая разделяет области действительных и комплексных корней.

Вторая бифуркационная линия соответствует переходу пары комплексных корней из правой полуплоскости в левую (и наоборот). Чтобы ее найти, полагаем $\gamma = \pm i\alpha$ в соотношении $\gamma^3 - S\gamma^2 + H\gamma - J = 0$. Тогда получаем

$$J = HS, \quad H > 0.$$

Еще одна характерная линия отвечает прохождению одного из собственных чисел через ноль и условию $J = 0$. Ее части отвечают нескольким возможным перестройкам.

В результате приходим к следующей картине разбиения плоскости параметров, показанной на рис.40. (Чтобы не загромождать рисунок типы седел и седло-фокусов не указаны – они легко идентифицируются с помощью рис.37,38.) На рис.40 хорошо видны области действительных и комплексных корней. Можно видеть также, что конфигурация бифуркационных линий при смене знака параметра S получается зеркальным отражением.

Рекомендуем самостоятельно разобраться, как в деталях соотносятся эти две диаграммы друг с другом.

²⁰ Это уравнение отвечает равенству нулю дискриминанта кубического уравнения.

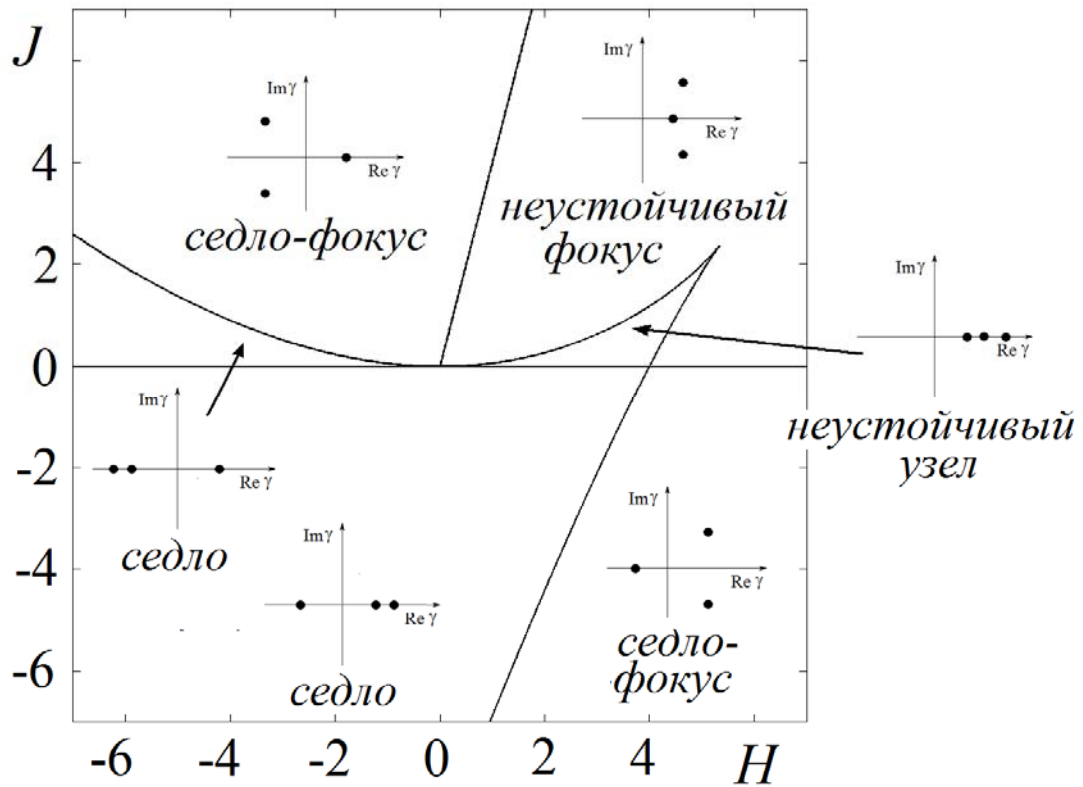


Рис.40. Конфигурации собственных чисел для трехмерного потока в комплексной плоскости. Случай $S=4$.

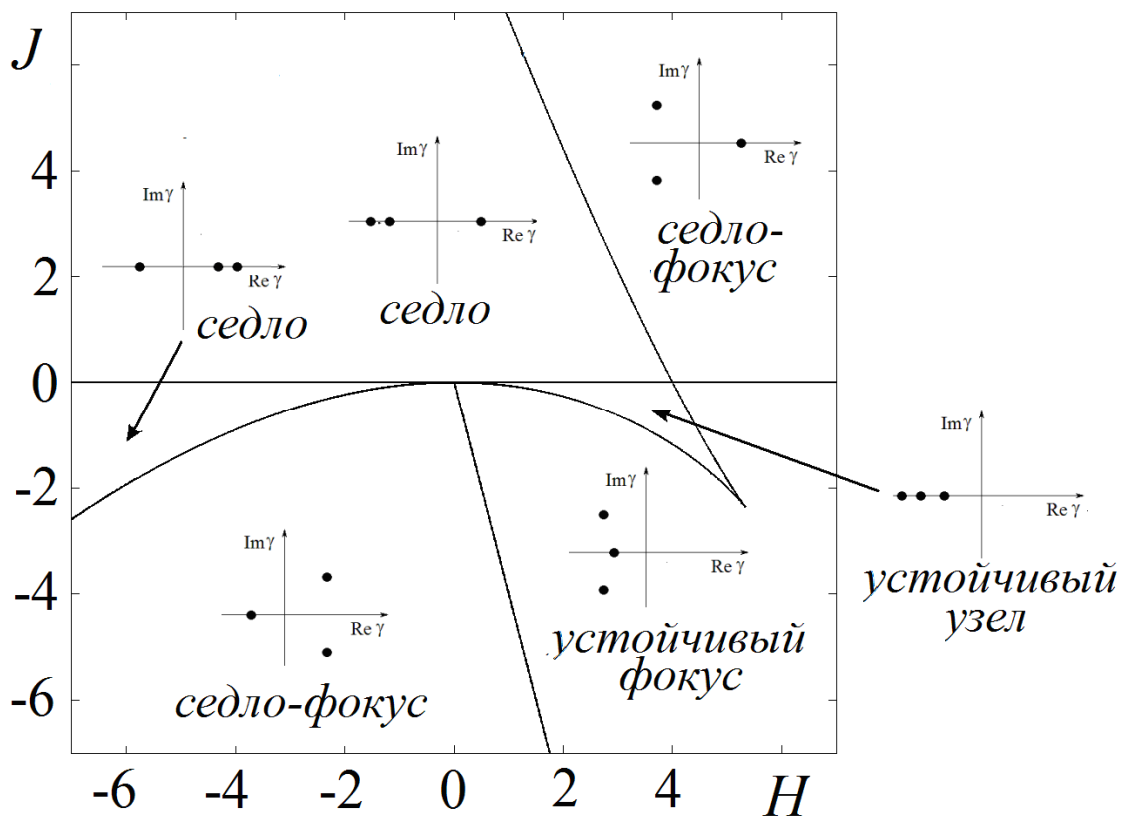


Рис.40 (продолжение). Конфигурации собственных чисел для трехмерного потока в комплексной плоскости. Случай $S = -4$.

57. Фиксируем параметр $J = 0$, что отвечает ситуации седло-узловой бифуркации и определяет соответствующую плоскость в пространстве параметров инвариантов матрицы возмущений. Укажите конфигурацию собственных чисел в комплексной плоскости в разных точках плоскости двух оставшихся параметров (H, S) . Перечислите пять ситуаций, характерных для такой ситуации. Какие варианты бифуркации седло-узел возможны в трехмерной системе?

Решение 57. Условие $J = 0$ означает, что одно из собственных чисел, например, γ_3 обращается в ноль. Тогда для двух оставшихся из $\gamma^3 - S\gamma^2 + H\gamma - J = 0$ получаем квадратное уравнение:

$$\gamma^2 - S\gamma + H = 0.$$

Таким образом, классификация собственных чисел γ_1, γ_2 в этом случае полностью аналогична рис.18 из задачи для двумерных потоков. В результате приходим к разбиению плоскости двух оставшихся параметров, показанной на рис.41, на которой изображены положения собственных чисел в характерных точках. Одно из них, в соответствии с условием, всегда находится в начале координат.

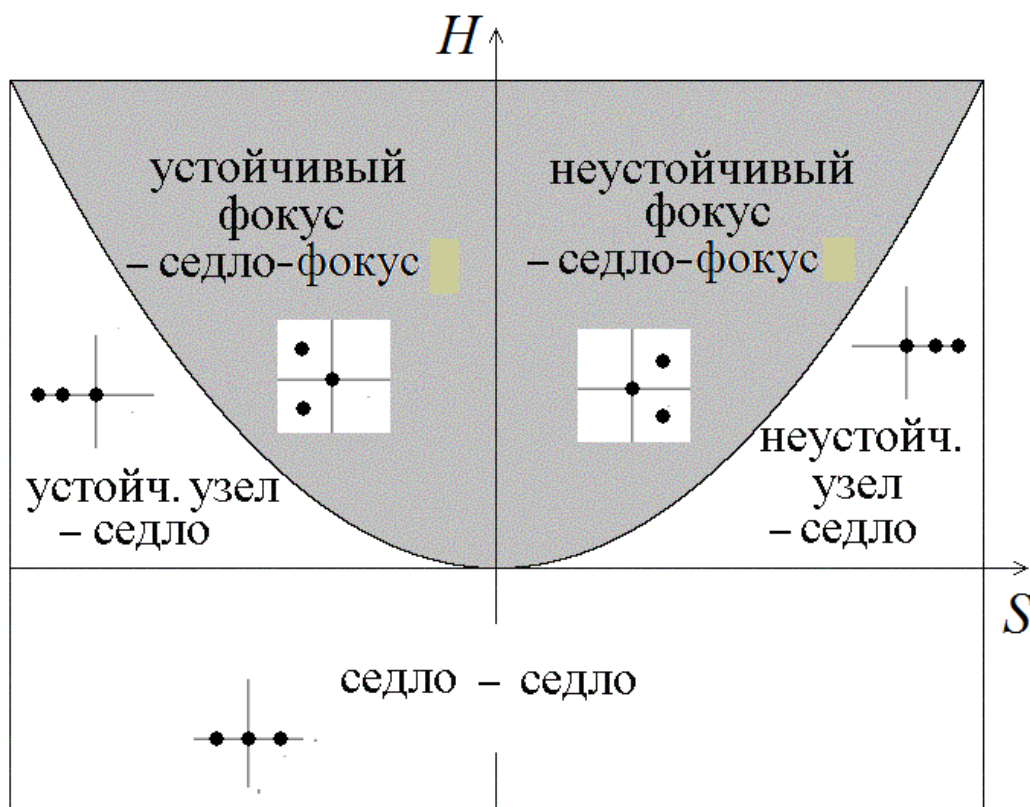


Рис.41. Конфигурация собственных чисел линеаризованной матрицы в случае $J=0$.

Обсудим теперь возможные бифуркации. Ситуации, показанные на рис.41 являются *негрубыми* – при малом шевелении параметра J конфигурации меня-

ются. Нетрудно понять, что при таком шевелении нулевое собственное число смещается немного влево или вправо от начала координат. Привлекая рис.37,38 получаем пять возможных вариантов.

1) Устойчивый узел сливается с седлом с двумя сжимающими направлениями (седло 1-го типа).

2) Неустойчивый узел сливается с седлом с одним сжимающим направлением (седло 2-го типа).

3) Устойчивый фокус сливается с седло-фокусом 1-го типа (двумерное устойчивое многообразие).

4) Неустойчивый фокус сливается с седло-фокусом 2-го типа (одномерное устойчивое многообразие).

5) Седло с одним сжимающим направлением сливается с седлом с двумя сжимающими направлениями.

Эти бифуркации отвечают обращению якобиана в ноль и, в определенном смысле, могут быть отнесены к седло-узловым. (Хотя, отчасти, это вопрос терминологии.)

58. Какие варианты бифуркации Андронова-Хопфа возможны в трехмерной системе?

Решение 58. Бифуркация Андронова-Хопфа происходит при пересечении парой комплексно-сопряженных собственных чисел мнимой оси. Как видно из рис.37,38, возможны следующие варианты:

а) $АН_-$. Устойчивый фокус превращается в седло-фокус с одним сжимающим направлением. В этом случае от него отделяется устойчивый предельный цикл²¹.

б) $АН_+$. Седло-фокус с двумерным устойчивым многообразием превращается в неустойчивый фокус. От него отделяется *седловой предельный цикл*.

Отметим, что *седловые предельные циклы* не имеют аналога в двумерных системах. В сечении Пуанкаре такой цикл отвечает двумерному отображению с неподвижной точкой седлового типа с одним устойчивым и одним неустойчивым многообразиями.

Качественные фазовые портреты для этих случаев показаны на рис.42а,б.

²¹ В обозначении типа бифуркации $АН$ верхний знак «плюс-минус» обозначает устойчивость или неустойчивость по новому, третьему направлению. Нижний знак отвечает супер- (минус) или субкритической (плюс) бифуркации на двумерной поверхности.

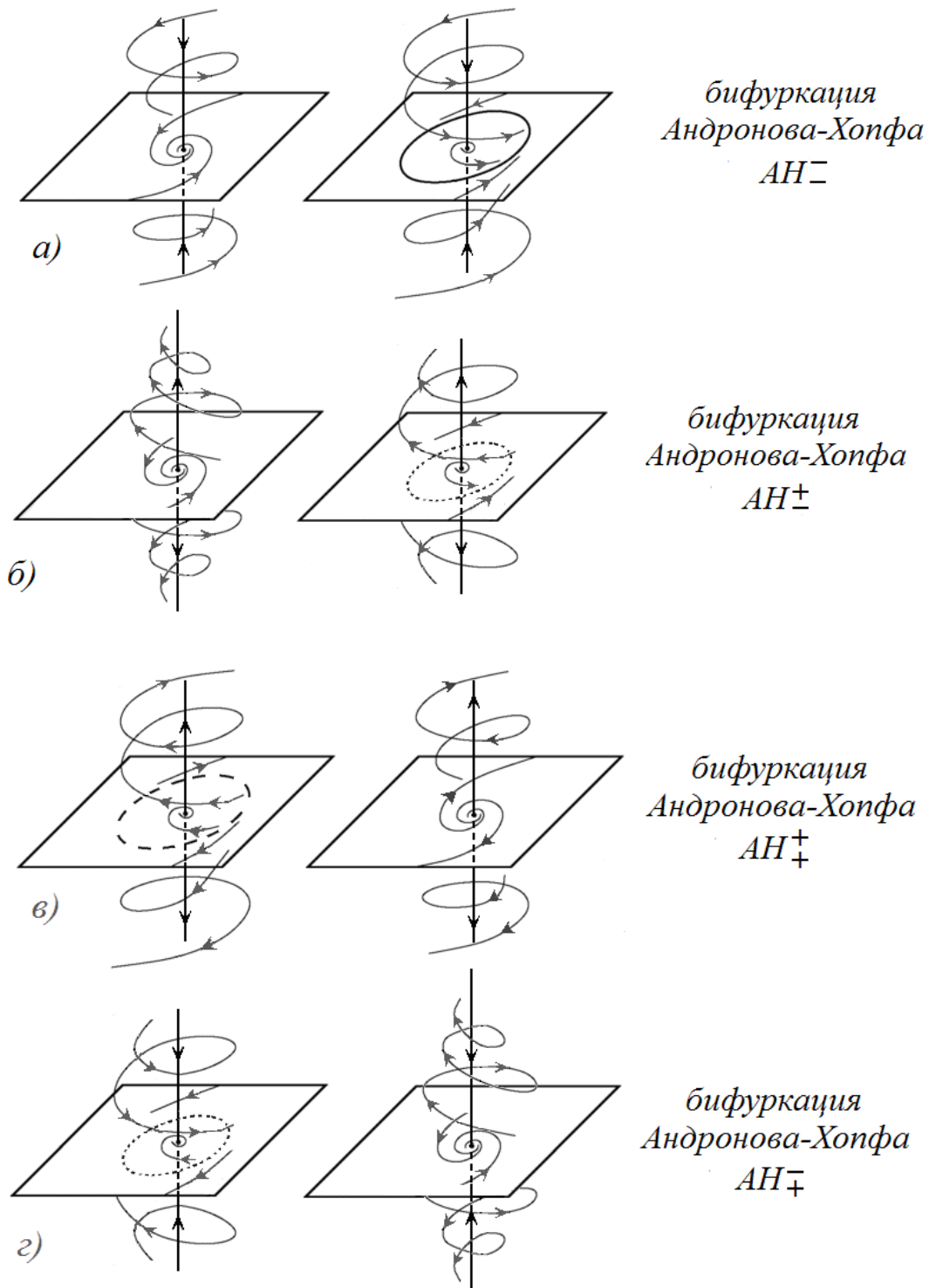


Рис.42. Разновидности бифуркации Андропова-Хопфа трехмерных потоков. Точками показан седловой предельный цикл, пунктиром – неустойчивый.

Нетрудно видеть, что на двумерном многообразии динамика соответствует двумерной бифуркации Андропова-Хопфа рис.21. В обоих случаях рождается устойчивый «в пределах» этой поверхности предельный цикл. Таким образом, на двумерном многообразии в этих случаях имеет место суперкритическая бифуркация Андропова-Хопфа. Отличие заключается в динамике по третьему

направлению. В первом случае она сжимающая, во втором – растягивающая²². Возможны еще два варианта.

в) AH_+^+ . В седло-фокус с двумерным устойчивым многообразием «влипают» неустойчивый предельный цикл. В результате возникает неустойчивый фокус. Ситуация получается обращением времени для случая рис.42а.

г) AH_+^- . В устойчивый фокус «влипают» седловой предельный цикл. В результате остается седло-фокус с одним сжимающим направлением. Ситуация получается обращением времени для случая рис.42б.

Качественные фазовые портреты для этих случаев показаны на рис.42в,г. Теперь на двумерном многообразии имеем картину суперкритической двумерной бифуркации Андронова-Хопфа.

59. Проведите анализ бифуркаций состояний равновесия трехмерной динамической системы, используя в качестве параметров три инварианта матрицы возмущений.

Решение 59. Уравнение для собственных значений имеет вид

$$\gamma^3 - S\gamma^2 + H\gamma - J = 0,$$

где инварианты матрицы возмущений, ее след S , якобиан J и третий инвариант H выражаются через собственные значения следующим образом:

$$S = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, H = \gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_3, J = \gamma_1\gamma_2\gamma_3.$$

Инварианты матрицы возмущений, подобно тому, как это было сделано для двумерных потоков, удобно использовать как параметры при анализе бифуркаций. Перечислим основные бифуркации трехмерных потоков, повышая их коразмерность.

Седло-узловая бифуркация имеет коразмерность один, и поэтому ей будет отвечать некоторая поверхность в пространстве (S, H, J) . В этом случае одно из собственных чисел обращается в ноль. Это означает, что ее условие $J = 0$.

Для бифуркации Андронова-Хопфа два собственных числа являются чисто мнимыми: $\gamma_1 = i\alpha$, $\gamma_2 = -i\alpha$. Подставляя эти соотношения в выражения для инвариантов, получаем:

$$S = \gamma_3, H = \alpha^2, J = \alpha^2\gamma_3.$$

Таким образом, условие бифуркации Андронова-Хопфа имеет вид:

²² В использованных обозначениях нижний индекс отвечает супер- и субкритическим формам бифуркации Андронова-Хопфа на двумерном многообразии. Верхний индекс отвечает за знак нового, третьего направления.

$$J = HS, H > 0.$$

Это тоже бифуркация коразмерности один, и ей будет отвечать соответствующая поверхность в пространстве параметров.

Третье собственное число для бифуркации Андронова-Хопфа совпадает со следом матрицы. Поэтому при $S < 0$ третье направление оказывается устойчивым, а при $S > 0$ - неустойчивым. Таким образом, при $S < 0$ будет рождаться устойчивый предельный цикл²³. При $S > 0$ предельный цикл будет *седловым*: траектории приближаются к нему по некоторой поверхности, но уходят от него по третьему направлению.

Бифуркация Богданова-Тakensа имеет коразмерность два, и ей будет отвечать некоторая линия в пространстве параметров. Ее уравнение находим из условия, что два собственных числа сливаются и обращаются в ноль: $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Тогда из выражений для инвариантов получаем

$$J = 0, H = 0.$$

При этом третье собственное число совпадает со следом матрицы.

Для трехмерной системы появляется новая бифуркация коразмерности два. Действительно, для нее может выполняться как условие бифуркации Андронова-Хопфа, так и седло-узловой бифуркации, но за счет обращения в ноль дополнительного третьего собственного числа. Такую бифуркацию называют «*седло-узел-Хопф*»²⁴. Для нее $\gamma_1 = i\alpha$, $\gamma_2 = -i\alpha$, $\gamma_3 = 0$, и поэтому $S = 0$, $H = \alpha^2$:

$$J = 0, S = 0, H > 0.$$

Наконец, при условии $J = S = H = 0$ все три собственных числа обращаются в ноль, что дает точку коразмерности три.

Конфигурацию бифуркаций удобно проследить в сечении $H = const$, причем при $H > 0$. Такое сечение показано на рис.43.

Картина в трехмерном пространстве параметров (S, H, J) дана на рис.44. В этом случае седло-узловая бифуркация дается плоскостью $J = 0$. Ее пересечение с плоскостью бифуркации Андронова-Хопфа AH дает линию «*седло-узел-Хопф*» SNH и линию Богданова-Тakensа BT . В свою очередь, эти линии пересекаются в точке коразмерности три – начале координат. Причем, линия SNH заканчивается в этой точке. На рисунке показана только часть поверхности би-

²³ Здесь рассматриваем вариант прямой бифуркации Андронова-Хопфа. Возможна, однако, и суперкритическая форма, которой отвечает возникновение неустойчивого предельного цикла.

²⁴ Другой вариант названия: «*фолд-Хопф*».

фуркации Андронова-Хопфа AH^+ . Вторая ее часть AH^- располагается под плоскостью седло-узловой бифуркации симметричным образом в области отрицательных S , см. рис.43.

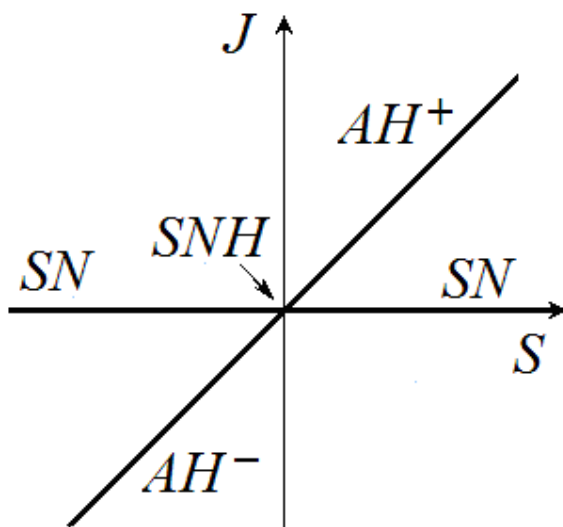


Рис.43. Линии и точки основных бифуркаций равновесия трехмерного потока на плоскости (S, J) при $H=1$; бифуркация Андронова-Хопфа AH , седло-узел SN , точка седло-узел-Хопф SNH .

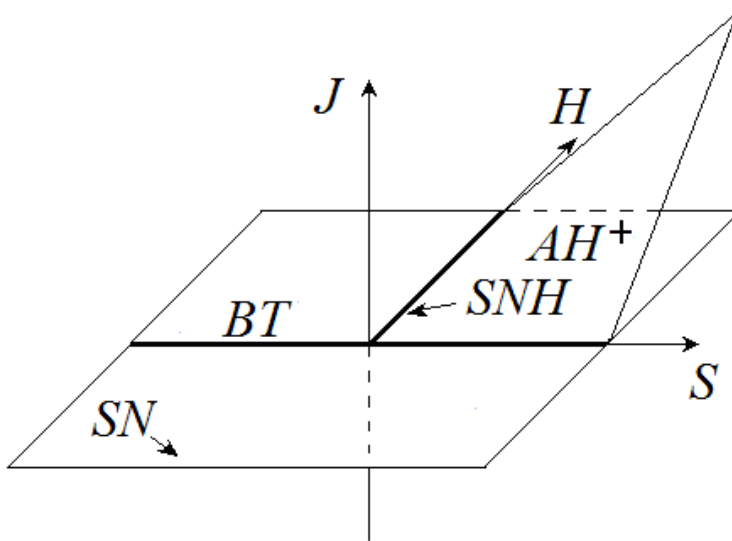


Рис.44. Поверхности и линии основных бифуркаций равновесия трехмерного потока в пространстве инвариантов матрицы возмущений (S, J, H) .

60. Для одной из базовых моделей нелинейной динамики – системы Ресслера

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + py, \\ \dot{z} &= q + (x - r)z,\end{aligned}$$

найдите два возможных состояния равновесия и укажите условие, когда они сливаются в результате седло-узловой бифуркации. Установите, при каком условии в этом случае рождается устойчивое равновесие. (Для определенности считаем, что $p > 0$.)

Решение 60. Состояния равновесия системы Ресслера даются соотношениями:

$$x_0 = pz_0, y_0 = -z_0, z_0 = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4pq}}{2p}.$$

Таким образом, возможны два состояния равновесия, причем из аналитического выражения очевидно, что они сливаются и исчезают при условии $r^2 - 4pq = 0$. При этом в точке бифуркации $z_0 = \frac{r}{2p}$.

Фиксируем это бифуркационное условие, и записываем матрицу возмущений для состояния равновесия с учетом $z_0 = \frac{r}{2p}$:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & p & 0 \\ z_0 & 0 & -pz_0 \end{pmatrix}.$$

Выписываем характеристическое уравнение $\det(\hat{M} - \gamma \hat{E}) = 0$, где \hat{E} – единичная матрица. Тогда получаем

$$\gamma^3 - p(1 - z_0)\gamma^2 + (z_0 - p^2 z_0 + 1)\gamma = 0.$$

Как и следовало ожидать, якобиан равен нулю, поскольку мы фиксировали условие слияния двух корней. Оставшиеся инварианты:

$$S = p(1 - z_0) = p - \frac{r}{2}, \quad H = z_0 - p^2 z_0 + 1 = \frac{r}{2p} - \frac{rp}{2} + 1.$$

Теперь можно применить результаты решения задачи 57.

Возникающее равновесие будет устойчивым, если $S < 0, H > 0$. Подставляя сюда выражения для следа и якобиана, получаем:

$$r > 2p, \quad \frac{r(p^2 - 1)}{p} < 2.$$

По условию $p > 0$. Поэтому второе неравенство при $p < 1$ выполняется автоматически. При $p > 1$ его можно переписать, как $r < r_0 = \frac{2p}{p^2 - 1}$. При этом оба неравенства одновременно имеют решения, если $2p < r_0$, что приводит к

$p < \sqrt{2}$. Таким образом, устойчивое равновесие рождается при следующих условиях:

$$0 < p \leq 1, r > 2p,$$

$$1 < p < \sqrt{2}, 2p < r < \frac{2p}{p^2 - 1},$$

$$p > \sqrt{2}, \text{ решений нет.}$$

Пусть, например, $0 < p \leq 1$. Вспоминая, что мы наложили условие бифуркации седло-узел $r^2 = 4pq$, получаем, что при фиксированном q условие устойчивости решения $r > 2p$ означает $p < q$.

Рекомендуем самостоятельно отличить случаи устойчивого узла и фокуса.

61. Найдите порог бифуркации Андронова–Хопфа в трехмерном потоке, описывающем генератор Кислова–Дмитриева. Этот генератор состоит из трех замкнутых в кольцо элементов: нелинейного усилителя НУ, инерционного элемента ИЭ и фильтра Ф в виде колебательного контура, рис. 45. Для усилителя предполагается, что сигналы на входе и выходе связаны через функцию $F(z) = Mze^{-z^2}$. Такая система описывается трехмерным потоком

$$\dot{x} = -x/T + F(z)/T,$$

$$\dot{y} = x - z,$$

$$\dot{z} = y - z/Q.$$

Здесь M — коэффициент усиления, Q — добротность контура, T — характерное время инерционного элемента. Покажите, что порог бифуркации Андронова–Хопфа дается соотношением

$$2 \ln M = \left(1 + \frac{T}{Q}\right) \left(1 + \frac{1}{QT}\right).$$

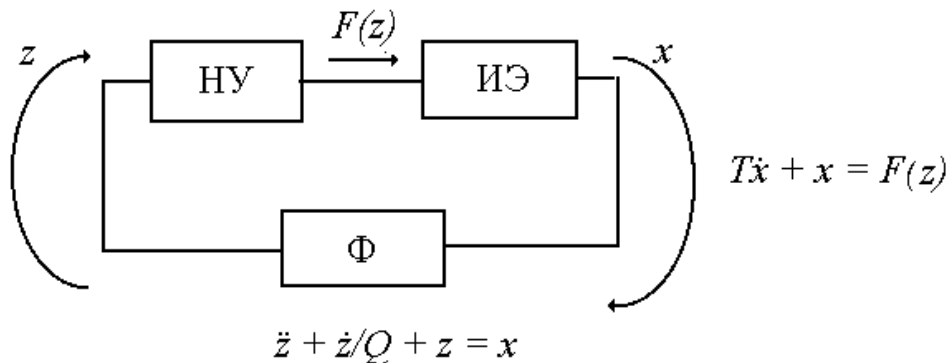


Рис.45. Функциональная схема генератора Кислова-Дмитриева.

Решение 61. В системе есть тривиальное равновесие, которое при $M = 1$ в результате бифуркации вилка становится неустойчивым, и от него отделяется пара устойчивых равновесий, так что

$$x_0 = z_0, y_0 = z_0/Q, z_0 = \sqrt{\ln M}.$$

(Мы оставили решение с положительным z , имеющее физический смысл.) Находим матрицу возмущения в этой точке:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T} & 0 & \frac{F'(z_0)}{T} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{Q} \end{pmatrix},$$

где $F'(z_0) = 1 - 2z_0^2 = 1 - 2\ln M$. Выписываем характеристическое уравнение $\det(\hat{M} - \gamma\hat{E}) = 0$, где \hat{E} – единичная матрица. Тогда получаем:

$$\gamma^3 - \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{Q}\right)\gamma^2 + \left(1 + \frac{1}{Q}\right)\gamma + \frac{2\ln M}{T} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$S = -\frac{1}{T} - \frac{1}{Q}, H = 1 + \frac{1}{TQ}, J = -\frac{2\ln M}{T}.$$

Мы нашли связь параметров системы с инвариантами матрицы. Теперь можно воспользоваться готовым соотношением для бифуркации Андронова-Хопфа $J = HS$, так что получаем

$$2\ln M = \left(1 + \frac{T}{Q}\right)\left(1 + \frac{1}{QT}\right).$$

Отметим, что $H > 0$, так что второе условие бифуркации Андронова-Хопфа выполнено. Из полученного соотношения можно получить значение коэффициента усиления M для заданных добротности и времени задержки, отвечающее возникновению автоколебаний в результате бифуркации Андронова-Хопфа.

62. Для модели Рёсслера следующего вида²⁵

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= bx + (x - c)z, \end{aligned}$$

²⁵ Такой вариант модели Рёсслера рассмотрен в книге Г. Николис, И. Пригожин. Познание сложного, 1990. М.: Мир, 345 с.

найдите связь между параметрами, соответствующую бифуркации Андронова–Хопфа неподвижной точки $x=y=z=0$. Найдите условие бифуркации «седло-узел-Хопф».

Решение 62. Действуем аналогично предыдущей задаче, и получаем характеристическое уравнение

$$\gamma^3 - (a - c)\gamma^2 + (1 + b - ac)\gamma + c - ba = 0.$$

Это означает, что

$$S = a - c, \quad H = 1 + b - ac, \quad J = ba - c.$$

Таким образом, условия бифуркации Андронова-Хопфа $J = HS$, $H > 0$ приводят к $b = \frac{a}{c} + ac - a^2$, $a^2 - \frac{a}{c} < 1$.

Отметим, что якобиан может обратиться в ноль, если $c = ab$. В этой точке тривиальное равновесие сливается с другим равновесием: $x_0 = -ab$, $y_0 = b$, $z_0 = \frac{c}{a} - b$, но ни то, ни другое не исчезают, так что это не седло-узловая бифуркация, а вырожденная ситуация.

Компьютерное исследование трехмерных потоков

63. Для системы Ресслера

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + py, \\ \dot{z} &= q + (x - r)z, \end{aligned}$$

на плоскости параметров (p, r) постройте численно карту динамических режимов, на которой разными цветами покажите области периодических режимов, которым отвечает определенный период цикла в сечении Пуанкаре. Выберите $q = 0.2$. Постройте также характерные фазовые портреты в избранных точках плоскости параметров.

Решение 63. Полученные численно карта режимов и фазовые портреты показаны на рис.46.

На примере системы Ресслера можно наблюдать каскад бифуркаций удвоения периода. Первоначально существует однооборотный предельный цикл (правый нижний угол рисунка), которому отвечает неподвижная точка в сечении Пуанкаре. Затем цикл превращается в «двухоборотный», и в сечении Пуанкаре наблюдается 2-цикл, и т.д. с возникновением хаоса. В области хаоса наблюдаются окна устойчивости, для которых характерны разные типы предель-

ных циклов. Отметим, что здесь и в следующей задаче области хаоса показаны белым цветом – в этом случае лучше видны окна регулярных режимов в хаосе. Наиболее широкому окну отвечает период 3 в сечении Пуанкаре. Характерным на плоскости параметров является также наличие областей типа *crossroad-area*.

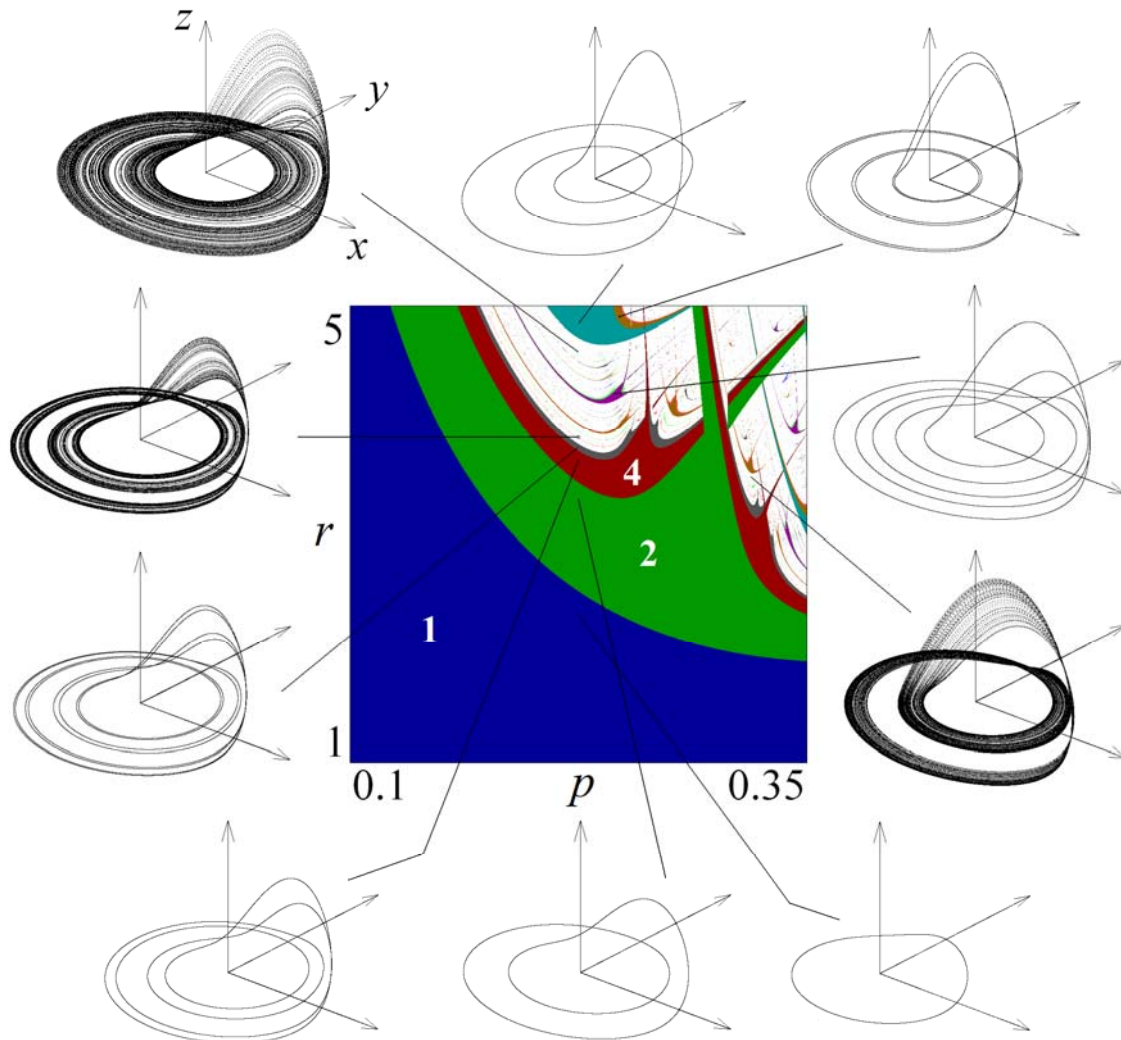


Рис.46. Карта динамических режимов и фазовые портреты для системы Ресслера, $q=0.2$.

64. Используя сечение Пуанкаре, постройте для системы Ресслера зависимость одной из переменных x в этом сечении от управляющего параметра p – *бифуркационное дерево*. Значения $q = 0.1, r = 8.5$.

Решение 64. Полученное бифуркационное дерево дано на рис.47. Можно видеть интервалы, в которых существуют циклы различных периодов: 1, 2, 4, 8 и т.д., 3, 6, 12 и т.д. Можно видеть, что имеет место переход к хаосу по Фейгенбаумовскому сценарию через каскад бифуркаций удвоения периода.

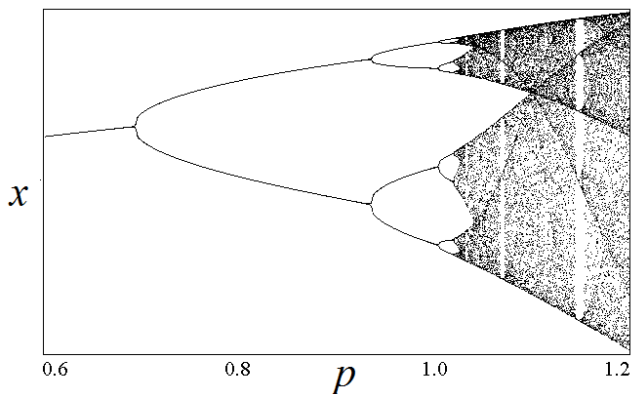


Рис.47. Бифуркационное дерево системы Рёсслера для значений параметров $q = 0.1$, $r = 8.5$.

65. Генератор Анищенко-Астахова описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x} &= mx + y - xz, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= -gz + 1(x)x^2.\end{aligned}$$

Постройте карту динамических режимов этого генератора.

Решение 65. Решение иллюстрирует рис.48. Можно видеть характерные элементы плоскости параметров.

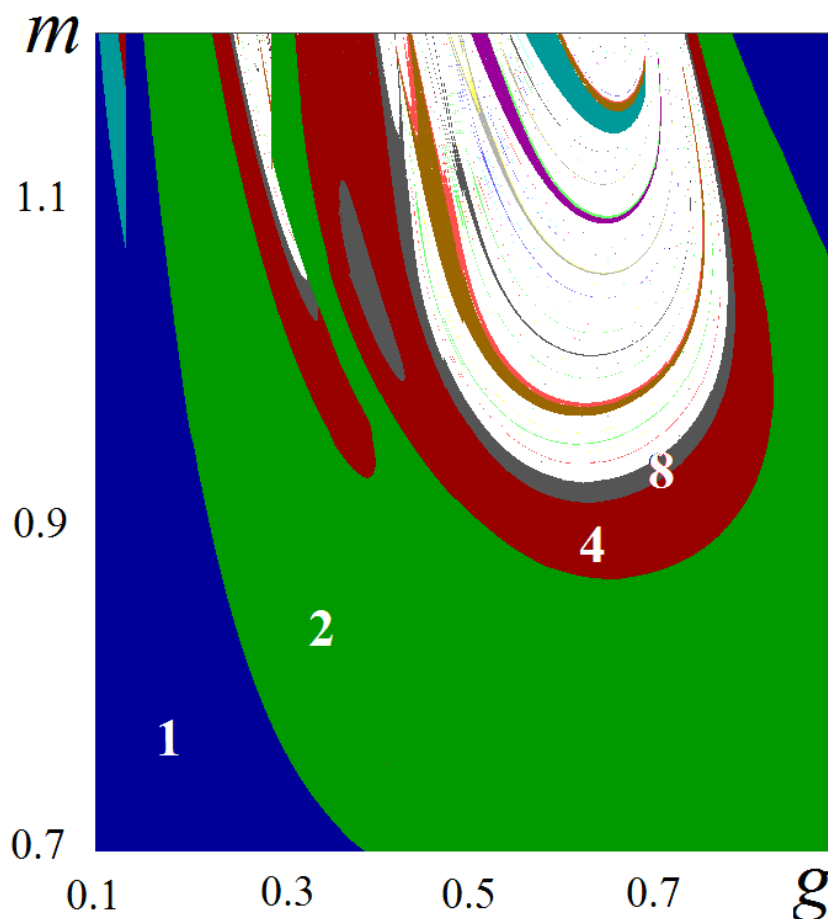


Рис.48. Карта режимов генератора Анищенко-Астахова.

66. Одна из моделей динамики нейрона известна как *система Хиндмарш-Розе (Hindmarsh-Rose)*:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - z - x^3 + 3x^2 + I, \\ \dot{y} &= 1 - y - 5x^2, \\ \dot{z} &= r(4(x + 1.6) - z).\end{aligned}$$

Здесь x описывает мембранный потенциал нейрона, y и z определяют динамику ионных токов, I – внешний ток, r – параметр. Для нейронной динамики следует считать $r \ll 1$. (Типичное значение порядка 0.003.) Постройте карту динамических режимов на плоскости (I, r) . Приведите примеры реализаций.

Решение 66. Решение иллюстрирует рис.49. Можно видеть, что в некоторых областях параметров система демонстрирует нейроподобную динамику – реализации содержат *спайки* и *берсты*. С ростом параметра r эта особенность реализаций исчезает.

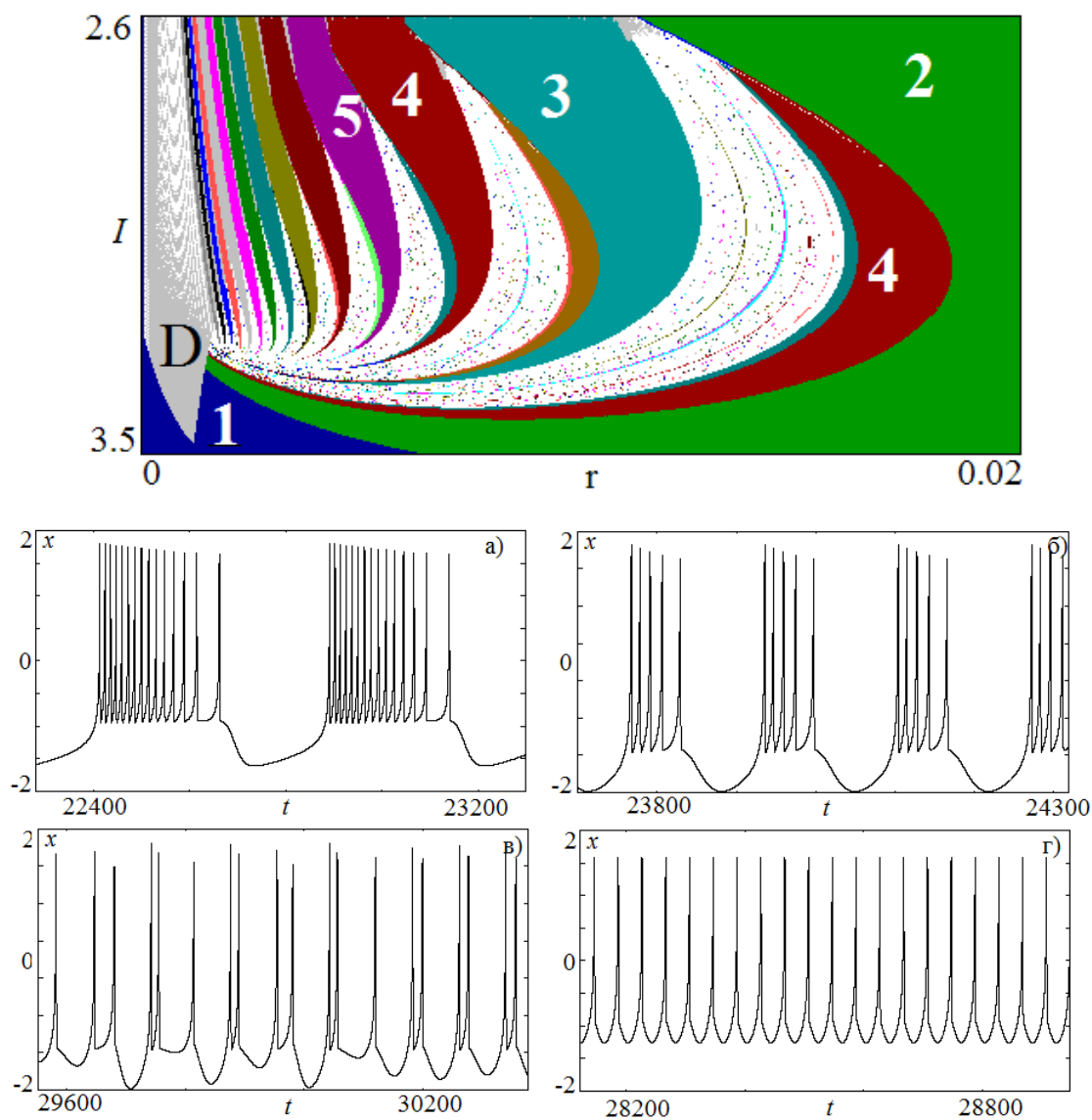


Рис.49. Карта динамических режимов системы Хиндмарш-Розе и примеры реализаций. Параметры: $a = 3, b = 1, c = 1, d = 5, s = 4, x_0 = -1.6, I = 2.7$, а) $r = 0.001$, б) $r = 0.004$, в) $r = 0.012$, г) $r = 0.033$

67. Дайте качественную иллюстрацию связи картины инвариантного тора и его сечения Пуанкаре. Как будут выглядеть ситуации резонансного предельного цикла, возникшего на этом торе? Что будет в случае разрушающегося тора?

Решение 67. Соответствующие иллюстрации получается при построении сечения Пуанкаре, рис.50.

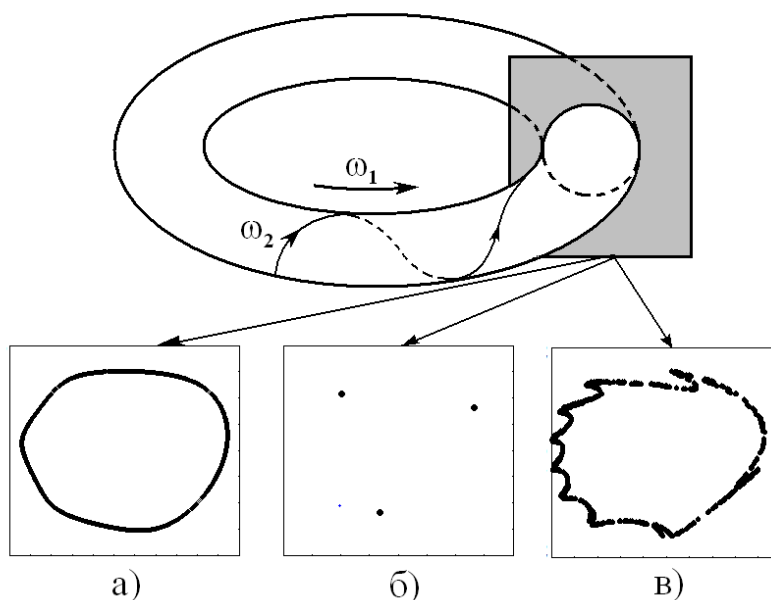


Рис.50. Инвариантный тор и его сечение Пуанкаре (а), резонансный предельный цикл на торе в сечении Пуанкаре (б), разрушающаяся инвариантная кривая (в). ω_1 и ω_2 – частоты.

68. Рассмотрите модель генератора квазипериодических колебаний, представляющего собой «гибрид» автогенератора с жестким возбуждением и релаксационного генератора²⁶:

$$\ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \frac{1}{2}x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

$$\dot{z} = \mu - x^2.$$

Здесь ω_0 – собственная частота генератора, λ характеризует отрицательное трение, член четвертой степени отвечает за насыщение колебаний при больших амплитудах. Параметр λ входит в уравнение вместе с аддитивной добавкой z , которая характеризует состояние накопительного релаксационного элемента, а эволюция этой переменной во времени задается вторым уравнением. Система характеризуется двумя временными масштабами: основным периодом колебаний автогенератора $T = 2\pi/\omega_0$ и характерное время восстановления состояния на-

²⁶ Предложен в А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.В. Станкевич. Известия вузов – Прикладная нелинейная динамика, 2010, №2, с. 51.

копительного элемента $\tau \sim \mu^{-1}$. Постройте реализацию для динамических переменных x и z , фазовый портрет в трехмерном фазовом пространстве и фурье-спектр для $\lambda = 0$, $\omega_0 = 2\pi$, $\mu = 0.5$.

Решение 68. При выбранных значениях параметров система демонстрирует автономные квазипериодические колебания. Эти особенности хорошо видны на реализации $x(t)$ в виде характерных *биений*, рис.51а. Реализация $z(t)$ демонстрирует динамику типа накопление-сброс. Фазовый портрет в трехмерном пространстве представляет собой инвариантный тор, рис.51б. Фурье-спектр дает набор линий, характерный для квазипериодических колебаний, рис.51в. Он содержит дискретное множество равноудаленных друг от друга частотных компонент. Амплитуда компонент уменьшается вправо и влево от главной спектральной составляющей, которая соответствует основной частоте автоколебательного элемента; в рассматриваемом случае $f_0 = \omega_0 / 2\pi = 1$.

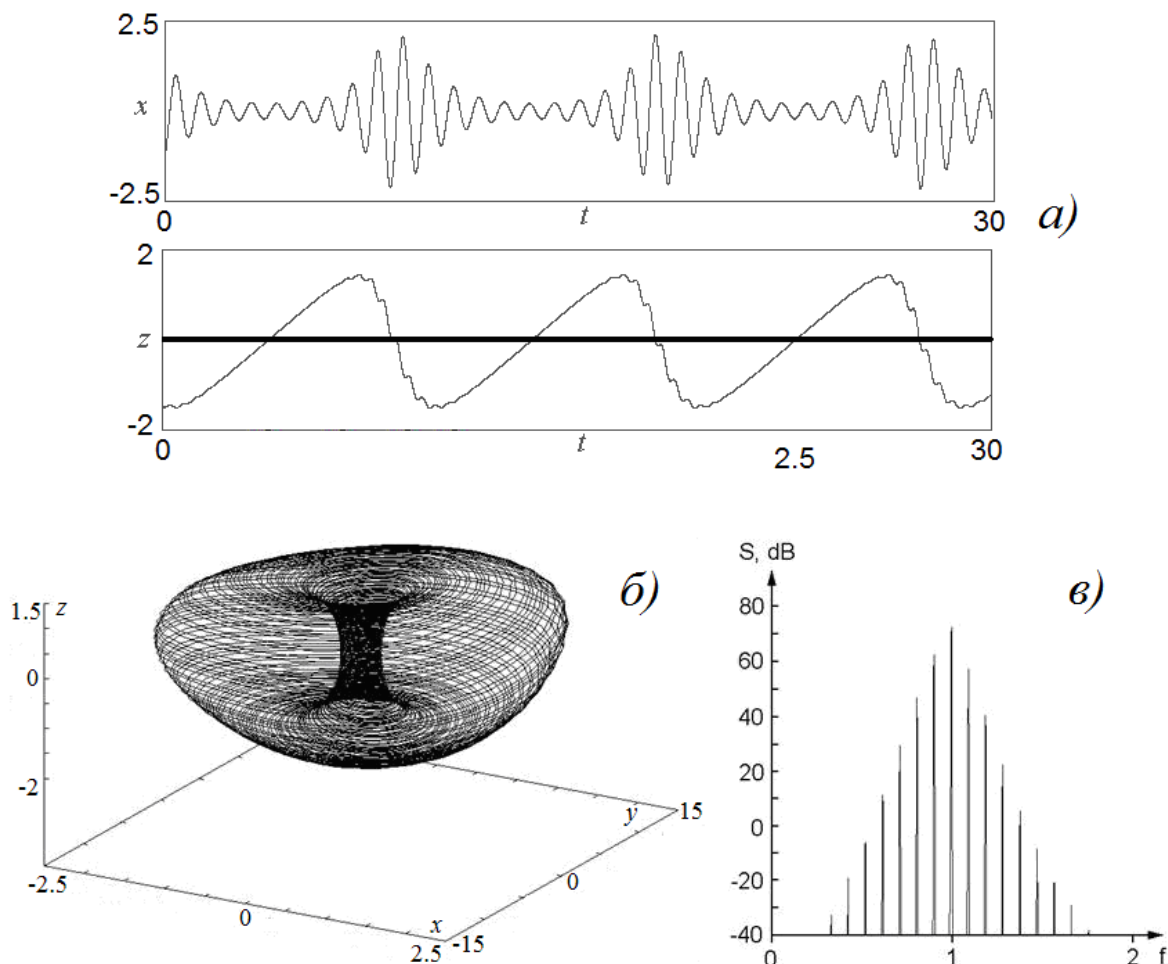


Рис.51. Реализации (а), фазовый портрет (б) и фурье-спектр (в) квазипериодических колебаний при $\lambda = 0$, $\omega_0 = 2\pi$, $\mu = 0.5$.

Размерность четыре

69. Для модифицированной четырехмерной системы Лоренца²⁷

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) + eyz, \\ \dot{y} &= cx - dxz + y + u, \\ \dot{z} &= xy - bz, \\ \dot{u} &= -ky,\end{aligned}$$

с помощью расчета спектра показателей Ляпунова продемонстрируйте возможность гиперхаоса с двумя положительными показателями. Значения параметров $a = 35, c = 25, d = 5, e = 35, k = 100$. Какие еще режимы возможны в системе?

Решение 69. На рис.52 показаны графики ляпуновских показателей и характерные примеры аттракторов. Можно видеть, что в системе возможен как хаос, так и гиперхаос. Интересная особенность системы состоит в том, что в ней возможны автономные квазипериодические колебания.

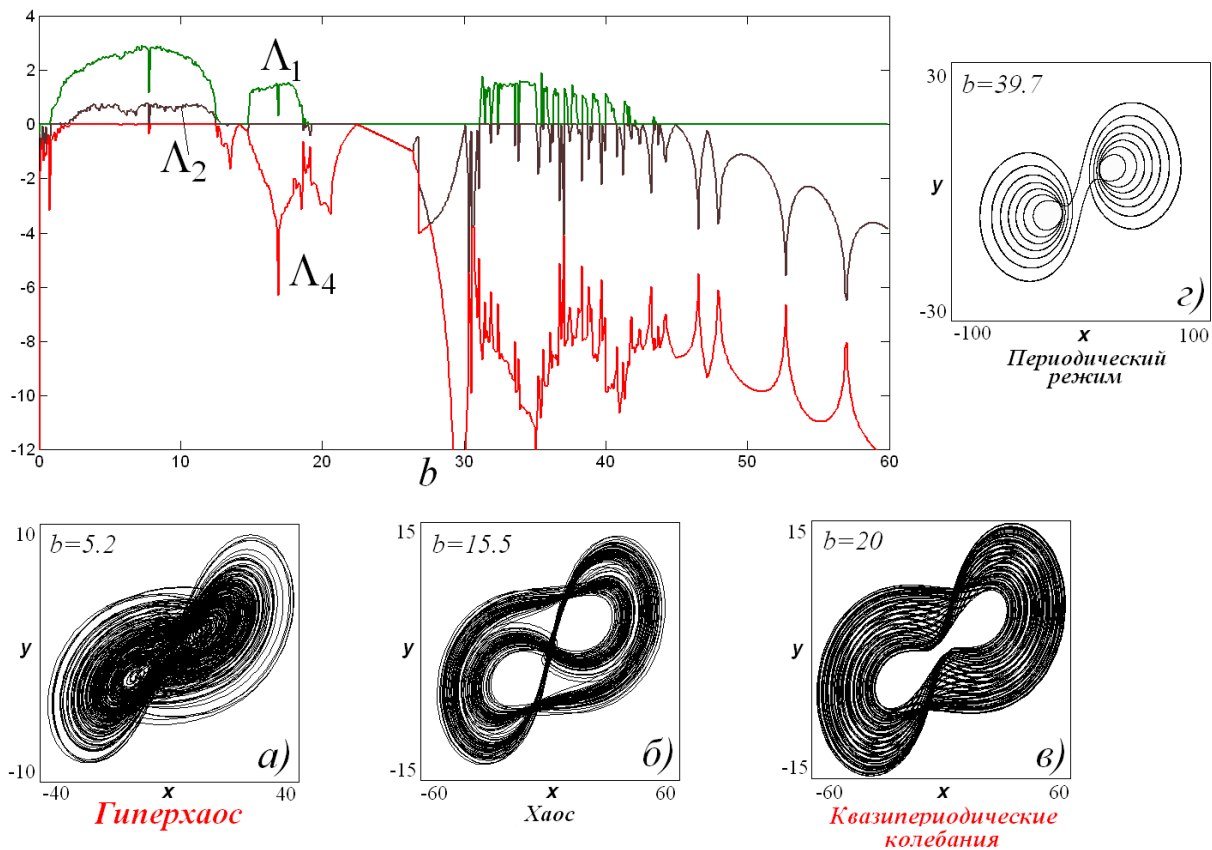


Рис.52. Ляпуновские показатели системы с гиперхаосом и квазипериодичностью (ляпуновский показатель $\Lambda_3 \approx 0$ на графике не указан).

²⁷ Z.Chen, Y.Yang, G.Qi, Z.Yuan. Physics Letters A. 2007. Vol.360. P. 696.

70. Для модифицированного генератора Анищенко-Астахова, описываемого уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x} &= mx + y - x\varphi - dx^3, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\gamma\varphi + \gamma l(x)x^2 - gz,\end{aligned}$$

продемонстрируйте возможность бифуркации удвоения инвариантного тора. Здесь m – параметр возбуждения, d – параметр нелинейной диссипации, γ – параметр затухания и g – параметр инерционности фильтра.

Решение 70. Зафиксируем параметры следующим образом: $\gamma = 0.2$, $d = 0.001$, $g = 0.5$. На рис.53 представлены проекции аттракторов в сечении Пуанкаре на плоскость (y, z) при постепенном увеличении параметра m . Как видно из рисунка, при $m = 0.067$ (рис.53б) инвариантная кривая становится двухоборотной – данная перестройка соответствует бифуркации удвоения тора. При дальнейшем увеличении параметра m можно наблюдать еще две бифуркации удвоения тора. Далее инвариантная кривая теряет гладкость, и реализуется переход к хаосу через ее разрушение.

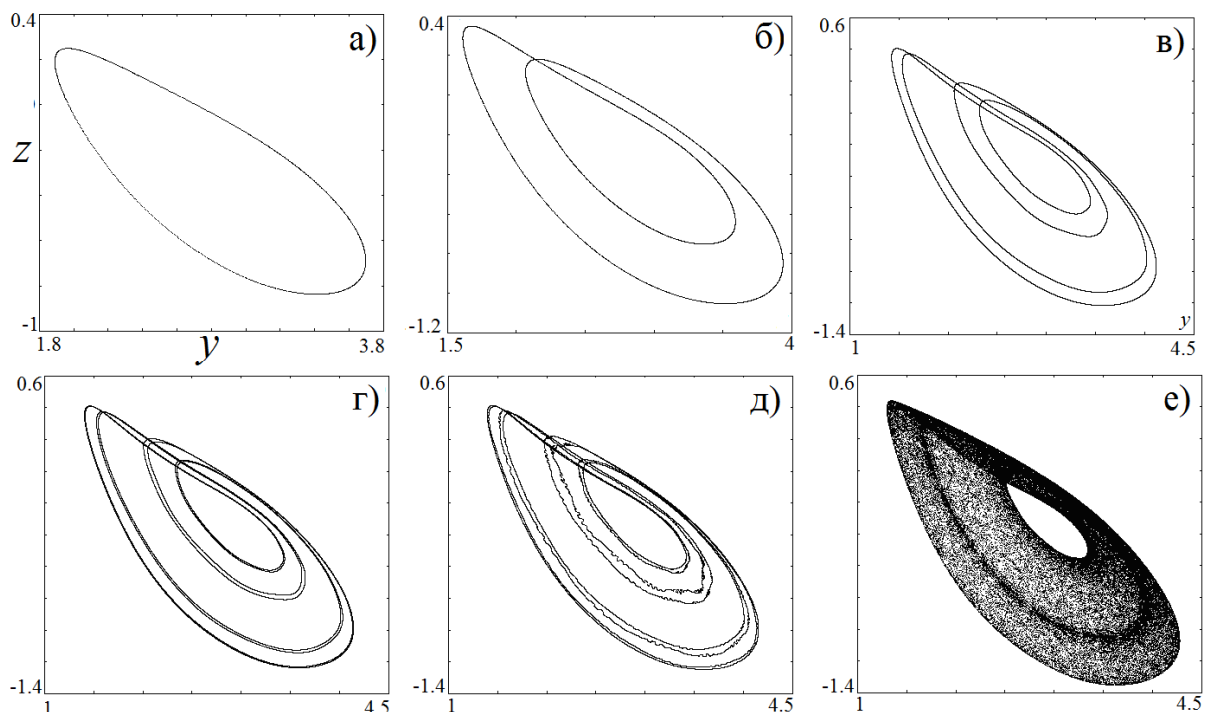
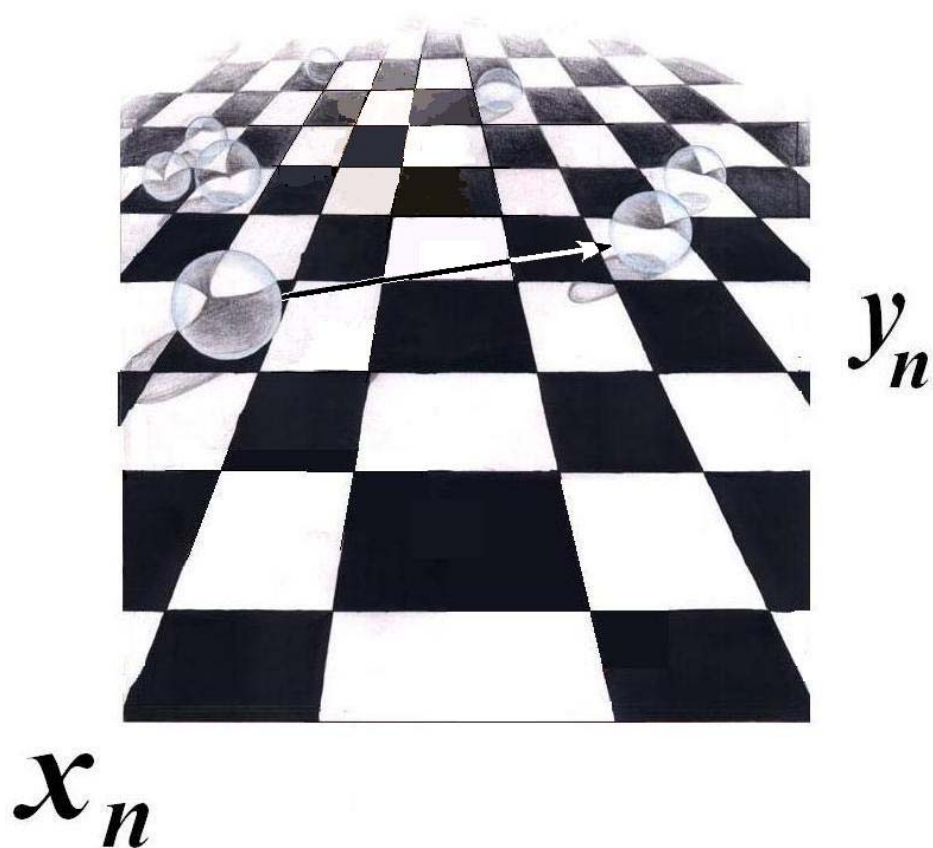


Рис.53. Двумерные проекции сечения Пуанкаре модифицированного генератора Анищенко-Астахова для параметров $\gamma = 0.2$, $d = 0.001$, $g = 0.5$: а) $m = 0.065$; б) $m = 0.067$; в) $m = 0.068$; г) $m = 0.0689$; д) $m = 0.069$; е) $m = 0.073$.

Часть III.

Бифуркации отображений



Бифуркации одномерных отображений коразмерности один

71. Простейшей моделью в виде одномерного отображения со сложной динамикой является *логистическое отображение* $x_{n+1} = f(x_n) = 1 - \lambda x_n^2$. Найдите его неподвижную точку и область ее устойчивости.

Решение 71. Для неподвижной точки $x_0 = 1 - \lambda x_0^2$, откуда следует $x_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda}}{2\lambda}$. Вычисляем мультипликатор: $\mu = f'(x_0) = -2\lambda x_0 = 1 \mp \sqrt{1 + 4\lambda}$. Область устойчивости отвечает условию $-1 < \mu < +1$, причем нижняя граница соответствует касательной бифуркации, а верхняя – бифуркации удвоения периода. Отсюда для случая верхнего знака следует $-\frac{1}{4} < \lambda < \frac{3}{4}$. Нижний знак отвечает всегда неустойчивой точке.

72. Для отображения $x_{n+1} = f(x_n) = \frac{\lambda}{x_n} + x_n - 1$ найдите неподвижную точку, зависимость ее мультипликатора от параметра $\mu(\lambda)$ и значение параметра λ_1 , отвечающее первой бифуркации удвоения. Найдите элементы 2-цикла. Найдите мультипликатор 2-цикла в зависимости от параметра $\mu_2(\lambda)$. Найдите точку λ_2 бифуркации удвоения 2-цикла.

Решение 72. Неподвижную точку ищем из уравнения $x_0 = f(x_0)$: $x_0 = \frac{\lambda}{x_0} + x_0 - 1$, откуда следует $x_0 = \lambda$. Мультипликатор в неподвижной точке

$$\mu = f'(x_0) = -\frac{\lambda}{x_0^2} + 1 = 1 - \frac{1}{\lambda}.$$

Таким образом, первая бифуркация удвоения периода отвечает значению $\mu = -1$, откуда следует $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, причем $x_0 = \frac{1}{2}$.

Элементы два-цикла отображения ищем из уравнений

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{\lambda}{x_1} + x_1 - 1, \\x_1 &= \frac{\lambda}{x_2} + x_2 - 1.\end{aligned}$$

Вычитая эти уравнения друг из друга с учетом $x_2 \neq x_1$, получаем $x_1 x_2 = \frac{\lambda}{2}$.

Складывая их, находим $x_2 + x_1 = \frac{\lambda}{x_2 x_1} (x_2 + x_1) + (x_2 + x_1) - 2$. Отсюда следует, что

$x_2 + x_1 = 1$. Элементы 2-цикла ищем по теореме Виета из уравнения

$$x^2 - x + \frac{\lambda}{2} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\lambda}{2}}.$$

В момент рождения 2-цикла $\lambda_1 = \frac{1}{2}, x_{1,2} = \frac{1}{2}$, что согласуется с предыдущими результатами.

Мультипликатор 2-цикла

$$\mu_2 = f'(x_1)f'(x_2) = \left(1 - \frac{\lambda}{x_1^2}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{x_2^2}\right) = 1 - \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - \lambda}{(x_1x_2)^2} \lambda.$$

С учетом полученных выражений для элементов цикла, находим:

$$\mu_2 = \frac{9\lambda - 4}{\lambda}.$$

В точке рождения 2-цикла $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ получаем $\mu_2 = +1$, как и должно быть.

Бифуркацию удвоения 2-цикла ищем, полагая $\mu_2 = -1$. Отсюда находим:

$$\lambda_2 = \frac{2}{5}.$$

73. Постройте численно бифуркационное дерево для логистического отображения $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$. Постройте график ляпуновского показателя в зависимости от управляющего параметра.

Решение 73. Решение иллюстрирует рис.54а, на котором виден каскад бифуркаций удвоения периода и области хаоса с окнами регулярной динамики.

График ляпуновского показателя представлен на рис.54б. Можно видеть области регулярных режимов с отрицательным показателем Ляпунова, а также области хаоса, где значения показателя положительны. Указана критическая точка

$$\lambda_c = 1.401155189092\dots,$$

выше которой становится возможен хаос.

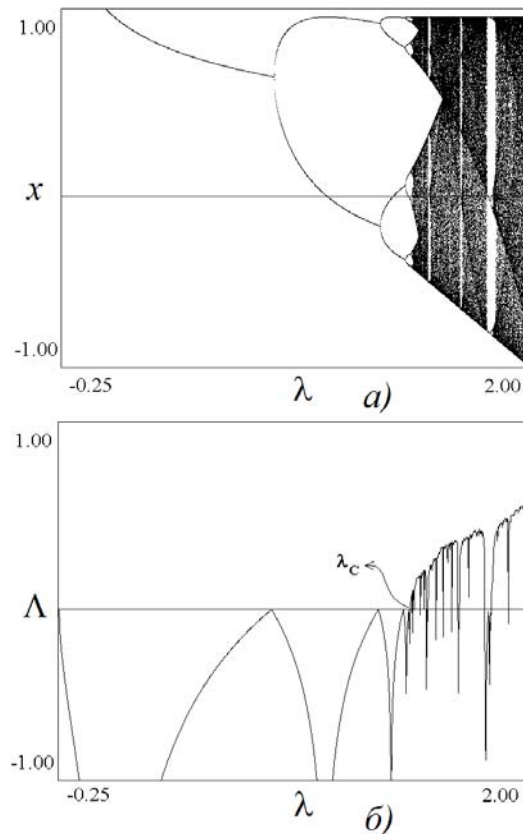


Рис.54. Бифуркационное дерево логистического отображения и график ляпуновского показателя в зависимости от параметра.

74. Получите уравнения, определяющие значения переменной x и бифуркационные значения параметра λ для касательной бифуркации неподвижных точек отображения $x_{n+1} = \lambda \cos x_n$. Покажите, что существует множество таких бифуркаций. Приблизительно оцените соответствующие значения параметра λ . Прodelайте то же самое для бифуркации удвоения периода.

Решение 74. Уравнение для поиска неподвижных точек $x_0 = \lambda \cos x_0$.
Мультипликатор

$$\mu = f'(x_0) = -\lambda \sin x_0.$$

Условие касательной бифуркации $\mu = -\lambda \sin x_0 = +1$. Таким образом, $\text{ctg}x_0 = -x_0$. Рекомендуем дать графическую иллюстрацию решения этого уравнения. Асимптотически решения стремятся к $x_0 = \pi + n\pi$. Соответственно, $\lambda_1 = \pm x_0$. Для бифуркации удвоения решение аналогично.

75. Для отображения $x_{n+1} = \lambda + x_n - x_n^2$, описывающего касательную бифуркацию, оцените число итераций, необходимое для прохождения «коридора» вблизи порога бифуркации $\lambda = -0.0001$. Начальное значение переменной $x_0 = -1$, а конечное $-x_0 = 1$.

Решение 75. В представленном случае динамика в дискретном времени замедляется, значения переменной на разных итерациях близки друг к другу, рис.55.

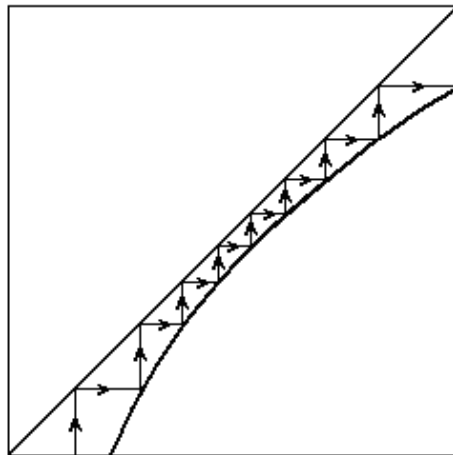


Рис.55. Движение изображающей точки вблизи порога касательной бифуркации

Поэтому можно положить $x_{n+1} - x_n = \frac{dx}{d\tau}$, где τ – непрерывная переменная, своего рода медленное время. В результате получаем

$$\frac{dx}{d\tau} = \lambda - x^2.$$

Решая это уравнение при $\lambda < 0$, находим

$$\tau = \frac{2}{\sqrt{-\lambda}} \operatorname{arctg} \frac{x_0}{\sqrt{-\lambda}}.$$

При $\lambda = -0.001$ тригонометрическая функция стремится к значению $\frac{\pi}{2}$ и перестает зависеть от начального значения переменной: основной вклад вносит движение по «коридору». Таким образом,

$$\tau \approx \frac{\pi}{\sqrt{-\lambda}}.$$

В нашем случае $\tau \approx \frac{\pi}{\sqrt{-\lambda}} \approx 314$.

76. Покажите, что для отображения $x_{n+1} = \lambda x_n / \sqrt{1 + x_n^2}$ имеет место бифуркация типа «вилка». Найдите бифуркационное значение параметра и изобразите итерационные диаграммы для ситуаций до и после бифуркации.

Решение 76. Уравнение для поиска неподвижных точек $x_0 = \lambda x_0 / \sqrt{1 + x_0^2}$. Отсюда следует, что есть решения:

$$x_0 = 0 \text{ и } x_0 = \pm \lambda / \sqrt{\lambda^2 - 1}.$$

Таким образом, при $\lambda > 1$ возникает новая пара решений. Нетрудно вычислить мультипликатор, для которого $\mu = \frac{1}{\lambda^2}$. При $\lambda = 1$ мультипликатор обращается в $+1$. С учетом появления пары новых решений, это отвечает бифуркации вилка.

77. Для логистического отображения изобразите итерационные диаграммы, иллюстрирующие основные возможные режимы.

Решение 77. Итерационные диаграммы приведены на рис.56. Показаны 2-цикл и 4-цикл максимальной устойчивости, аттрактор в критической точке, два вида хаотических режимов и цикл период 3 в закритической области.

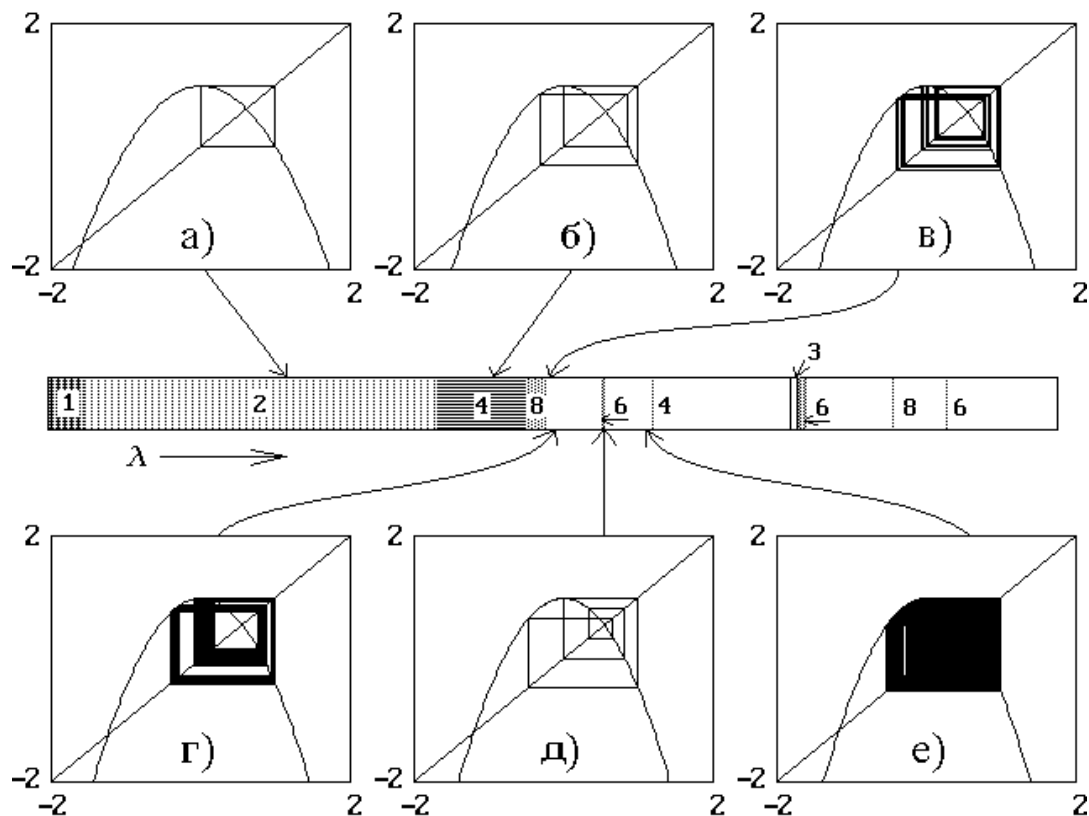


Рис.56. Расположение некоторых характерных режимов на итерационной диаграмме в разных точках на оси управляющего параметра λ .

78. Получите уравнение, с помощью которого можно найти 3-цикл максимальной устойчивости логистического отображения.

Решение 78. Один из элементов цикла опирается на экстремум $x = 0$ (условие максимальной устойчивости). Поэтому

$$x_1 = 0, x_2 = f(x_1) = 1, x_3 = 1 - \lambda, x_4 = 1 - \lambda(1 - \lambda)^2.$$

Условие цикла периода 3 – это $x_1 = x_4$, так что $1 - \lambda(1 - \lambda)^2 = 0$. Таким образом, получилось кубическое уравнение относительно параметра отображения.

79. Для логистического отображения постройте итерационные диаграммы для всех возможных типов 3-циклов, 4-циклов и 5-циклов в закритической области.

Решение 79. Итерационные диаграммы приведены на рис.57. Используются значения параметра, отвечающие сверхустойчивым циклам – все они опираются на квадратичный экстремум. Такие циклы наиболее удобны при построении итерационной диаграммы на компьютере.

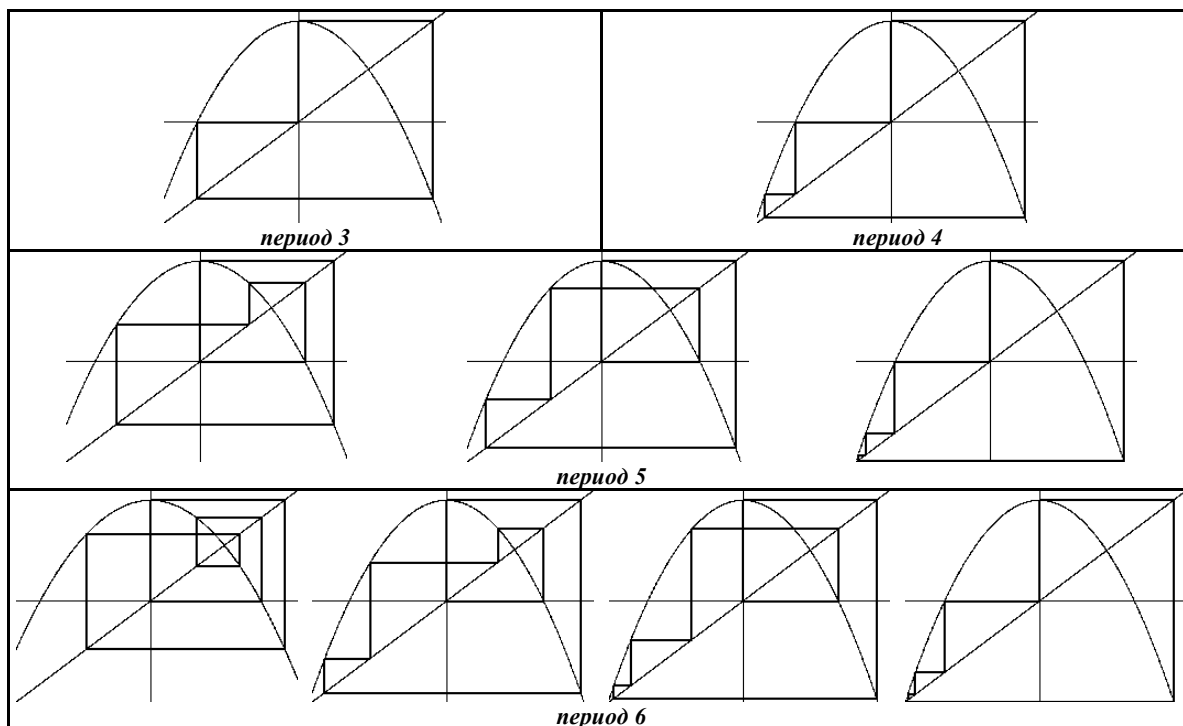


Рис.57. Циклы разных периодов логистического отображения в закритической области.

80. Постройте функцию $F(x) = f(f(x))$, где $f(x) = 1 - \lambda x^2$. Изобразите её график при различных λ и обсудите его трансформации у порога бифуркации рождения 2-цикла логистического отображения. Укажите элементы 2-цикла на этом рисунке.

Решение 80. Двукратно проитерированное логистическое отображение характеризуется функцией

$$F(x) = 1 - \lambda(1 - \lambda x^2)^2 = 1 - \lambda + 2\lambda^2 x^2 - \lambda^3 x^4,$$

являющейся полиномом четвертой степени. Трансформации функции $F(x)$, происходящие вблизи точки удвоения периода $\lambda = 0.75$, показаны на рис.58.

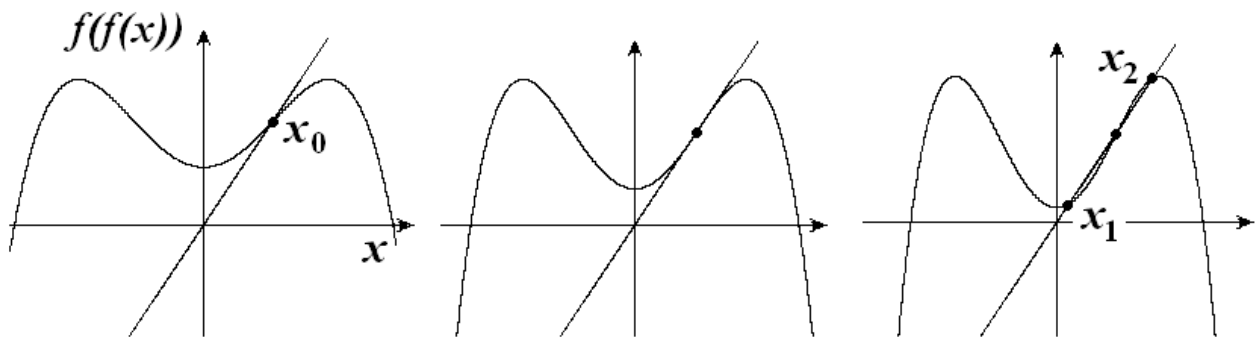


Рис.58. Функция, задающая двукратно проитерированное логистическое отображение при бифуркации удвоения периода; x_0 – устойчивая неподвижная точка исходного отображения, x_1 и x_2 – элементы 2-цикла исходного отображения.

Эволюция функции на рис.58 отвечает бифуркации «вилка»: одна из неподвижных точек теряет устойчивость, и от нее отделяются две устойчивые. Для них

$$F(x) = f(f(x)) = x.$$

Они представляют собой элементы 2-цикла исходного отображения: $x_2 = f(x_1)$ и $x_1 = f(x_2)$.

81. Покажите, что если отображение $x_{n+1} = f(x_n)$ имеет неподвижную точку x_0 , в которой мультипликатор обращается в минус единицу: $\mu = f'(x_0) = -1$, то двукратно проитерированное отображение $F(x_0) = f(f(x_0))$ обладает следующими свойствами:

1. $F'(x_0) = +1$;

2. $F''(x_0) = 0$;

3. $F'''(x_0) = 2Sf(x_0)$, где $Sf = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2$ — так называемая *производная Шварца* функции f .

Шварца функции f .

Решение 81. Во-первых, по правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$F'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x) = [f'(x)]^2 = (-1)^2 = +1,$$

поскольку $f'(x) = -1$. (Для сокращения записи опускаем индекс у неподвижной точки.)

Во-вторых, вычисляя $F''(x)$, получаем

$$F''(x) = f''(f(x)) \cdot [f'(x)]^2 + f'(f(x)) \cdot f''(x) = f''(x) - f''(x) = 0,$$

поскольку

$$f(x) = x \text{ и } f'(x) = -1.$$

Наконец, вычисляем третью производную $F'''(x)$. Опять используем правила дифференцирования сложной функции, и получаем

$$F'''(x) = f'''(f(x)) \cdot [f'(x)]^3 + 3f'(x) \cdot f''(f(x)) \cdot f''(x) + f'(f(x))f'''(x).$$

Используя полученные выше соотношения, приходим к уравнению

$$F'''(x) = -2f'''(x) - 3 \cdot [f''(x)]^2.$$

В свою очередь, для производной Шварца в анализируемой точке имеем

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2 = -f'''(x) - \frac{3}{2} [f''(x)]^2.$$

Таким образом,

$$F'''(x) = 2Sf(x).$$

82. Используя результат предыдущей задачи, покажите, что бифуркация $\mu = -1$ на «языке» двукратно проитерированной функции $F(x) = f(f(x))$ отвечает бифуркации вилки. Изобразите трансформации функции $F(x)$ для прямой и обратной такой бифуркации. Когда происходит бифуркация удвоения периода, а когда *жесткий переход* через -1 ? Что можно сказать о знаке производной Шварца в этих ситуациях?

Решение 82. Полученные выше соотношения позволяют утверждать, что на «языке» двукратно проитерированного отображения $F(x) = f(f(x))$ наблюдается бифуркация «вилка» в том случае, когда в исходном отображении происходит бифуркация $\mu = -1$. Действительно, пусть $x_n = x + \tilde{x}_n$, где \tilde{x}_n – малая величина. Тогда в окрестности неподвижной точки, используя разложение в ряд Тейлора, имеем

$$\tilde{x}_{n+1} = F'(x) \cdot \tilde{x}_n + \frac{1}{2} F''(x) \cdot \tilde{x}_n^2 + \frac{1}{6} F'''(x) \cdot \tilde{x}_n^3 + \dots$$

Но, используя установленные свойства производных функции $F(x)$, без труда получаем:

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + \frac{1}{6} F'''(x) \cdot \tilde{x}_n^3 + \dots$$

Таким образом, мы действительно имеем ситуацию, отвечающую бифуркации «вилка». Ее появление говорит о наличии некоторой «скрытой» симметрии для двукратно проитерированной функции. (Мы говорим о скрытой симметрии, поскольку по виду исходной функции ее было бы трудно предположить.)

Бифуркация «вилка» для двукратно проитерированной функции может быть прямой или обратной, в зависимости от знака производной Шварца. Если

производная Шварца отрицательна $Sf < 0$, то имеет место прямая бифуркация. В этом случае в терминах исходного отображения наблюдается бифуркация удвоения периода. Если же производная Шварца положительна $Sf > 0$, то для двукратно проитерированной функции имеем обратную бифуркацию «вилка». Эту бифуркацию можно назвать обратной (субкритической) бифуркацией удвоения периода. Ее еще называют *жестким переходом через мультипликатор* $\mu = -1$. Такое название связано с тем, что при потере устойчивости неподвижной точкой по этому «сценарию», изображающая точка обычно перебрасывается на другой аттрактор системы или убегает на бесконечность.

83. Возможен ли жесткий переход через мультипликатор $\mu = -1$ для неподвижной точки в логистическом отображении?

Решение 83. Для логистического отображения производная Шварца отрицательна, и поэтому такая бифуркация неподвижной точки невозможна.

84. Найдите производную Шварца для функции $f(x) = a + bx \pm x^3$, соответствующей кубическому отображению, в точке $\mu = -1$. О чем говорят результаты вычислений?

Решение 84. В этом случае

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2 = -f'''(x) - \frac{3}{2} [f''(x)]^2.$$

Для третьей производной в анализируемом случае $f'''(x) = \pm 6$. Таким образом, в случае нижнего знака возможен жесткий переход через мультипликатор -1 . Для верхнего знака производная Шварца отрицательна, и будет наблюдаться только удвоение периода.

85. Для логистического отображения $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$ нарисуйте зависимость мультипликаторов неподвижной точки и 2-цикла от параметра на одном графике. Изобразите качественно полный график, с учетом мультипликаторов 4-цикла, 8-цикла и т.д. Обсудите поведение картины при приближении к критической точке. На графике укажите линию $\mu = +1$, а также критическую точку λ_c и критическое значение мультипликатора μ_c .

Решение 85. Для логистического отображения $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$ мультипликаторы неподвижной точки и 2-цикла есть

$$\mu_1 = 1 - \sqrt{1 + 4\lambda}, \quad \mu_2 = 4 - 4\lambda.$$

Точки удвоений, в которых мультипликаторы обращаются в -1 : $\lambda_1 = \frac{3}{4}$ и $\lambda_2 = \frac{5}{4} = 1.25$. График $\mu_2(\lambda)$ представляет собой прямую линию с отрицательным наклоном, рис.59. В пределах окна устойчивости мультипликатор меняется от $+1$ до -1 . В других окнах график будет вести себя качественно аналогично, но с учетом уменьшения размеров окон при приближении к критической точке, наклон будет возрастать. При этом графики будут пересекаться примерно в одной точке, тем лучше, чем выше период цикла. В пределе точка пересечения отвечает критической точке $\lambda_c = 1.4011552\dots$ и критическому значению мультипликатора $\mu_c \approx -1.60119\dots$

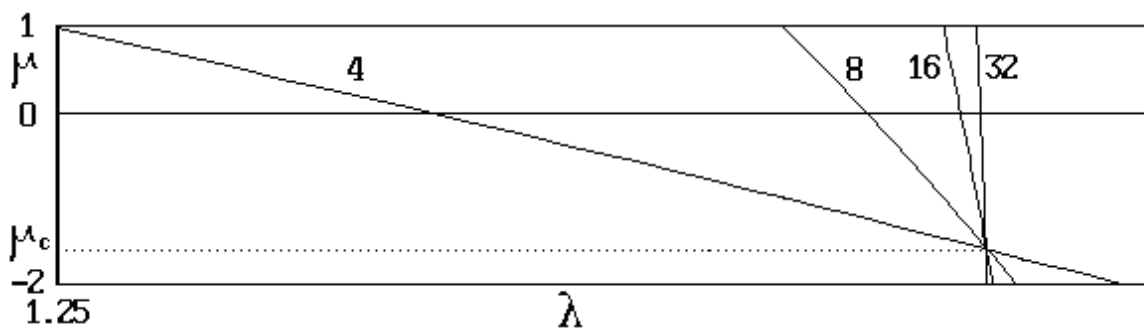


Рис.59. Зависимость мультипликаторов циклов (период указан цифрами) от параметра λ вблизи критической точки

86. Приравняв мультипликатор неподвижной точки и 2-цикла логистического отображения, оцените для него критическую точку и критический мультипликатор.

Решение 86. Воспользуемся тем свойством, что в критической точке мультипликаторы всех циклов совпадают. Тогда, приравнявая $\mu_1(\lambda) = \mu_2(\lambda)$, получаем искомые оценки:

$$\lambda_c \approx \frac{7 + \sqrt{17}}{8} \approx 1.39, \quad \mu_c \approx \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \approx -1.562.$$

Они достаточно близки к точным.

87. В таблице представлены бифуркационные значения параметра, отвечающие удвоениям периода логистического отображения. Оцените по этим данным константу δ_F в законе Фейгенбаума. Оцените наилучшим образом критическую точку λ_c .

$\lambda_n = 0.75$
1.25
1.36809894
1.39404616
1.39963724
1.40082874

Решение 87. По закону Фейгенбаума асимптотически (тем лучше, чем больше период цикла) выполняется соотношение:

$$\frac{\lambda_n - \lambda_c}{\lambda_{n+1} - \lambda_c} = \delta_F.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}} = \delta_F.$$

Лучшее приближение получается, если взять точки трех последних указанных бифуркаций: $\delta_F = 4.6692477$. Точное значение $\delta_F = 4.669201609\dots$

Из первого соотношения можно получить следующее выражение для критической точки:

$$\lambda_c = \frac{\delta_F \lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}}{\delta_F - 1}.$$

Подставляя сюда выражение для константы Фейгенбаума, получаем

$$\lambda_c = \frac{\lambda_{n+2} \lambda_n - \lambda_{n+1}^2}{\lambda_{n+2} + \lambda_n - 2\lambda_{n+1}} = 1.40115346.$$

Точное значение $\lambda_c = 1.401155189\dots$

88. Для качественного понимания теории Фейгенбаума можно использовать приближенный *ренормгрупповой анализ*. Для этого выполним отображение $x_{n+1} = f(x_n) = 1 - \lambda x_n^2$ дважды: $f(f(x_n))$, и отбросим члены более высокого порядка, чем квадратичный. Тогда заменой переменной и параметра $f(f(x_n))$ его можно привести к виду логистического отображения: $X_{n+1} = 1 - \lambda' X_n^2 + \dots$, где X – перенормированная переменная, а λ' – новый параметр. Найдите связь новой переменной с x , а также нового значения параметра с величиной λ .

Найденная функция $\lambda' = \varphi(\lambda)$ дает возможность описать каскад бифуркаций удвоения и свойства критической точки. Для этого используем, что неподвижная точка исходного отображения теряет устойчивость при $\lambda_1 = 0.75$. Тогда

в точке λ_2 , где $\lambda_1 = \varphi(\lambda_2)$, будет происходить удвоение неподвижной точки отображения $f(f(x_n))$, т.е. бифуркация удвоения 2-цикла исходного отображения. Решая уравнение $\lambda_3 = \varphi(\lambda_2)$, получим точку бифуркации 4-цикла и т.д. Проиллюстрируйте эту процедуру на итерационной диаграмме с помощью графика $\lambda' = \varphi(\lambda)$. Продемонстрируйте, что найденная последовательность λ_n сходится к критической точке λ_c , и найдите ее приближенное значение. Оцените масштабный фактор Фейгенбаума a_F , отвечающий за перенормировку динамической переменной.

Аппроксимируйте функцию $\lambda' = \varphi(\lambda)$ касательной вблизи критической точки, и покажите, что в этом случае точки бифуркаций сходятся к критической по закону геометрической прогрессии и оцените константу Фейгенбаума δ_F .

Решение 88. Итерируя логистическое отображение дважды, получаем:

$$x_{n+2} = 1 - \lambda(1 - \lambda x_n^2)^2 = 1 - \lambda + 2\lambda x_n^2 - \lambda x_n^4 = 1 - \lambda + 2\lambda x_n^2 + \dots$$

Заменой переменной $x = (1 - \lambda)X$ и параметра $\lambda' = 2\lambda^2(1 - \lambda)$ оно приводится к виду $X_{n+1} = 1 - \lambda'X_n^2$. Таким образом, вид функции ренормпреобразования параметра $\lambda' = \varphi(\lambda) = 2\lambda^2(1 - \lambda)$.

Решая уравнения $\lambda_1 = \varphi(\lambda_2)$ и $\lambda_3 = \varphi(\lambda_2)$ для $\lambda_1 = 0.75$ находим приближенно бифуркационные значения параметра $\lambda_2 = 1.24279$, $\lambda_3 = 1.34400$ и т.д. Процедуру решения иллюстрирует итерационная диаграмма на рис.60.

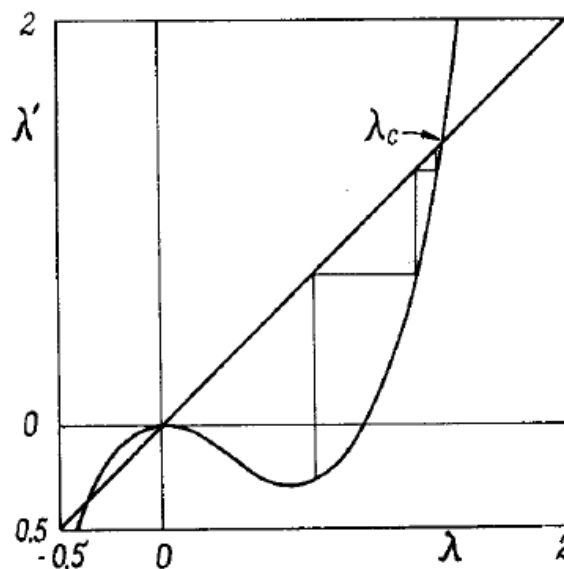


Рис.60. Одномерное отображение, иллюстрирующее ренормдинамику.

Каскад удвоений сходится к критической точке, для которой $\lambda_c = \varphi(\lambda_c)$. Решая это уравнение, находим приближенное значение критической точки

$$\lambda_c = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = 1.36603.$$

Теперь находим мультипликатор в критической точке

$$\mu_c = 1 - \sqrt{1 + 4\lambda_c} = -1.54246..$$

Масштабный фактор Фейгенбаума находим из закона перенормировки динамической переменной:

$$a_F = \frac{1}{1 - \lambda_c} = -2.73205.$$

При приближении к критической точке график функции $\varphi(\lambda)$ становится линейным, так что

$$\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda_c) + \varphi'(\lambda_c)(\lambda - \lambda_c) = \lambda_c + \varphi'(\lambda_c)(\lambda - \lambda_c).$$

Тогда из уравнения для поиска бифуркационных точек $\lambda_n = \varphi(\lambda_{n+1})$ получаем:

$$\lambda_n = \lambda_c + \varphi'(\lambda_c)(\lambda_{n+1} - \lambda_c).$$

Таким образом, накопление точек идет по закону геометрической прогрессии, причем

$$\frac{\lambda_n - \lambda_c}{\lambda_{n+1} - \lambda_c} = \varphi'(\lambda_c).$$

Отсюда следует оценка для константы Фейгенбаума

$$\delta_F = \varphi'(\lambda_c) = 4 + \sqrt{3} = 5.732.$$

89: Придумайте, как можно уточнить вид функции $\lambda' = \varphi(\lambda)$.

Решение 89. Для этого можно проитерировать отображение четыре раза и отбросить все члены выше квадратичного:

$$x_{n+4} = 1 - \lambda[(1 - \lambda(1 - \lambda)^2)^2 + 8\lambda^4(1 - \lambda)[1 - \lambda(1 - \lambda)^2]x_n^2 + \dots$$

Теперь необходимо пересчитать масштабы так, чтобы это выражение стало эквивалентным двукратно выполненному отображению с параметром λ' . (Ясно, что в этом случае мы получим лучшую точность, поскольку начальное приближение находится ближе к критической точке). В результате получим:

$$8\lambda^4(1 - \lambda)[1 - \lambda(1 - \lambda)^2] \{1 - [1 - \lambda(1 - \lambda)^2]^2\} = 2(\lambda')^2(1 - \lambda').$$

Это выражение задает в неявном виде уточненную функцию $\lambda' = \varphi(\lambda)$. Можно найти критическую точку $\lambda_c = \varphi(\lambda_c)$ и константу Фейгнебаума $\delta_F = \varphi'(\lambda_c)$ в этом приближении:

$$\lambda_c = 1.4034, \delta_F = 5.129.$$

Мы получили значения, заметно более близкие к точным. Отметим, что эту процедуру можно продолжить, т.е. использовать отображение, проитерированное восемь и четыре раза и т.д. В результате будет получаться все более точная функция $\lambda' = \varphi(\lambda)$ и критические константы.

90. Предложите версию приближенного РГ анализа, использующего свойство равенства всех мультипликаторов в критической точке. Используйте выражения для мультипликаторов неподвижной точки и 2-цикла логистического отображения.

Решение 90. Условием подобия можно считать равенство соответствующих мультипликаторов неподвижной точки и 2-цикла для разных значений параметра:

$$\mu_1(\lambda') = \mu_2(\lambda).$$

С учетом выражений для мультипликаторов из задачи 85, получаем связь параметров:

$$\lambda' = \frac{(3 - 4\lambda)^2 - 1}{4}.$$

Далее можно полностью следовать логике задачи 88, только с другим видом функции $\lambda' = \varphi(\lambda)$. В частности, для критической точки и константы Фейгенбаума получаем:

$$\lambda_c \approx \frac{7 + \sqrt{17}}{8} \approx 1.39, \quad \delta_F = \varphi'(\lambda_c) = 1 + \sqrt{17} = 5.123.$$

91. Проиллюстрируйте скейлинг по Фейгенбауму на бифуркационном дереве для логистического отображения.

Решение 91. Для иллюстрации скейлинга на рис.61 показана окрестность точки $\lambda_c = 1.401152\dots$ во все большем масштабе – каждый выделенный прямоугольник дан в увеличенном виде.

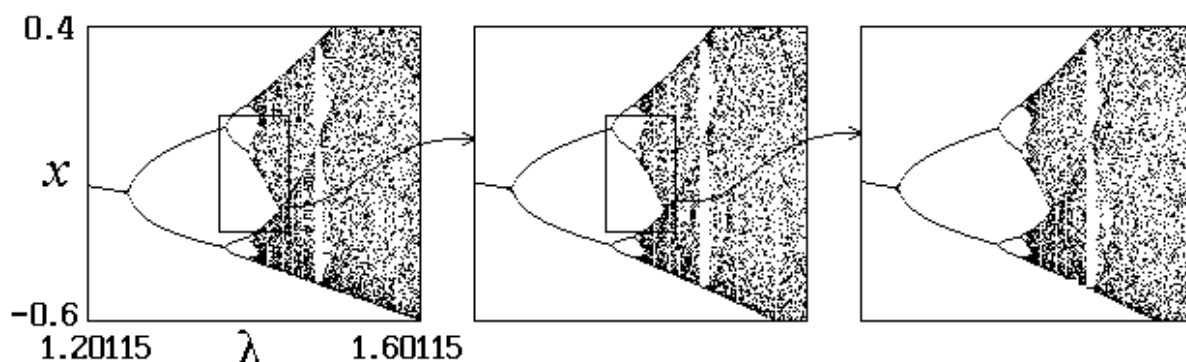


Рис.61. Скейлинг на бифуркационном дереве в окрестности критической точки.

При этом масштаб по горизонтальной оси пересчитывается в $\delta=4.6692\dots$ раз относительно критической точки $\lambda=\lambda_c$, а по вертикальной оси x – в $\alpha = -2.5029\dots$ раз (вторая универсальная константа Фейгенбаума) относительно точки $x=0$. (Знак минус означает изменение ориентации – картинка переворачивается.) В результате получается самоподобная картина.

Бифуркации двухпараметрических одномерных отображений

92. Для кубического отображения вида $x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3$ найдите область устойчивости 2-цикла на плоскости параметров a, b , ограниченную линией касательной бифуркации и линией удвоения периода неподвижной точки. Покажите, что первая имеет точку сборки. Постройте карту динамических режимов для данного отображения.

Решение 92. Используя выражение для неподвижной точки отображения $x = a - bx + x^3$ и приравняв мультипликатор $\mu = -b + 3x^2 = -1$, без труда получаем выражение для условия удвоения неподвижной точки:

$$a = \pm \frac{2}{3}(2+b)\sqrt{\frac{b-1}{3}}.$$

Обсудим бифуркации 2-цикла. Уравнения для поиска элементов 2-цикла имеют вид:

$$\begin{aligned} x_2 &= a - bx_1 + x_1^3, \\ x_1 &= a - bx_2 + x_2^3. \end{aligned}$$

Их следует дополнить условием на мультипликатор

$$\mu = (-b + 3x_1^2)(-b + 3x_2^2) = \pm 1.$$

В этом случае следует выбирать знак «+» для поиска касательной бифуркации 2-цикла и знак «-» – для бифуркации удвоения.

Полученные соотношения задают в неявной форме на плоскости (a, b) систему линий, также показанную на рис.62. На этом рисунке можно видеть, что область устойчивости 2-цикла снизу ограничена линией «предыдущего» удвоения периода. В центре этой области располагается точка сборки, от которой отходят две ветви линии касательной бифуркации. По их «берегам», в свою очередь, идут линии удвоения 2-цикла (рождения 4-цикла), которые проходят мимо точки сборки, приближаясь затем к линии предыдущего удвоения. На рисунке серым цветом выделена область *бистабильности*, внутри которой сосуществуют два устойчивых 2-цикла, и изображающая точка может притянуться к какому-то одному из них в зависимости от начальных условий.

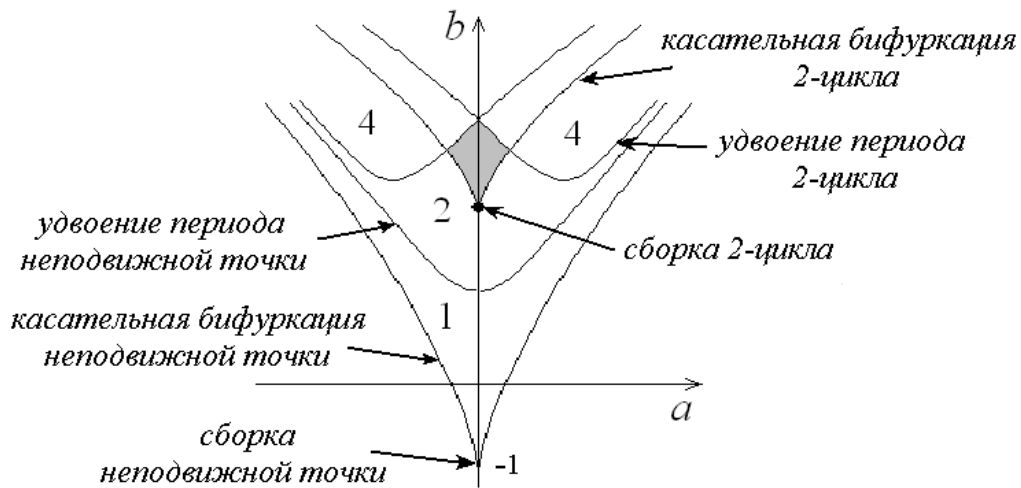


Рис.62. Бифуркации неподвижной точки и 2-цикла на плоскости параметров; цифрами указан период цикла. «Crossroad area» – область существования 2-циклов.

Из рис.62 видно, что область существования 2-цикла имеет на плоскости параметров некоторую характерную форму. Французский математик К. Мира предложил для такой структуры специальное название *crossroad area*. (В переводе с английского – перекресток. Некоторые исследователи называли такие образования «ласточками» из-за их характерной формы.) Эти структуры хорошо видны на карте динамических режимов данного отображения на рис.63. На карте разными цветами показаны режимы с разными периодами, белым цветом показаны области хаоса C , а серым – область D убегания траекторий.

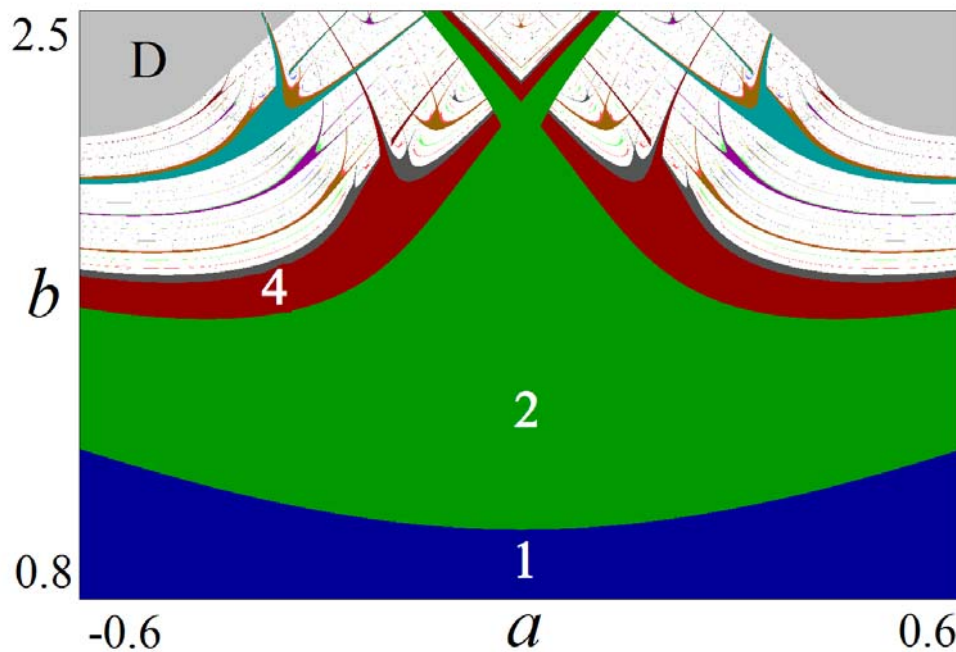


Рис.63. Карта динамических режимов кубического отображения $x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3$.

Компьютерное моделирование выявляет *типичность* таких структур на плоскости параметров для самых разных отображений. Более того, они могут

возникать на базе циклов всевозможных периодов и образовывать своего рода «элементы» в устройстве плоскости параметров.

93. Для кубического отображения $x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3$ на плоскости параметров найдите линии, отвечающие отображению максимума в минимум и минимума в максимум. Укажите точку на плоскости параметров, отвечающую 2-циклу, опирающемуся одновременно на два квадратичных экстремума.

Решение 93. Для этого отображения максимум и минимум имеют координаты $x_{1,2} = \mp \sqrt{\frac{b}{3}}$. Условие отображения максимума в минимум имеет вид

$$x_2 = f(x_1):$$

$$\sqrt{\frac{b}{3}} = f\left(-\sqrt{\frac{b}{3}}\right),$$

откуда получаем $a = \sqrt{\frac{b}{3}}\left(1 - \frac{2}{3}b\right)$.

Условие отображения минимума в максимум приводит к такому же соотношению, но со сменой знака.

Найденные линии пересекаются в точке

$$a = 0, b = \frac{3}{2},$$

для которой реализуется 2-цикл, опирающийся одновременно на максимум и минимум функции, задающей отображение. Рекомендуем самостоятельно изобразить все рассмотренные ситуации на итерационной диаграмме.

94. Покажите, что двукратно проитерированное отображение $x_{n+1} = f(x_n)$ вдоль линий, отвечающих отображению квадратичного максимума в минимум, характеризуется экстремумом четвертой степени. Что изменит это свойство в характере динамики?

Решение 94. Пусть x_1 – максимум функции, а x_2 – минимум. По условию $x_2 = f(x_1)$. Разложим функцию в ряд в окрестности точки x_1 :

$$f(x) = f(x_1) + \frac{1}{2}f''(x_1)\Delta x^2 + \dots = x_2 + \frac{1}{2}f''(x_1)\Delta x^2 + \dots$$

В свою очередь

$$f(f(x)) = f\left(x_2 + \frac{1}{2}f''(x_1)\Delta x^2 + \dots\right) = f(x_2) + \frac{1}{2}f''(x_2)\left(\frac{1}{2}f''(x_1)\Delta x^2 + \dots\right)^2 + \dots = f(x_2) + \frac{1}{8}f''(x_2)(f''(x_1))^2\Delta x^4 + \dots$$

В результате вдоль этих линий наблюдаются «нетипичные» удвоения периода, которые не являются Фейгенбаумовскими.

95. Для неподвижной точки кубического отображения $x_{n+1} = a + bx_n - x_n^3$:

а) Найдите линию мультипликатора $\mu = +1$ (касательной бифуркации) на плоскости a, b . Покажите, что эта линия имеет точку сборки, и укажите её координаты.

б) Найдите линию мультипликатора $\mu = -1$ и нанесите её на плоскость a, b . Вычислите производную Шварца вдоль этой линии и укажите, какие её части отвечают бифуркации удвоения, а какие — жесткому переходу. Укажите на плоскости a, b точку коразмерности два, в которой производная Шварца обращается в нуль.

в) Найдите уравнение для линий касательной бифуркации 2-цикла и покажите, что они выходят из найденной выше точки с нулевой производной Шварца и пересекают ось a в точках $a = \pm\sqrt{2/3}$.

г) Постройте карту динамических режимов.

Решение 95. Обращение мультипликатора в +1 приводит к уравнениям

$$x = a + bx + x^3, \quad \mu = b - 3x^2 = 1.$$

Откуда следует, что

$$a = \pm \frac{2}{3} \sqrt{\frac{(b-1)^3}{3}}.$$

Линии касательной бифуркации, таким образом, сходятся в точке сборки с координатами $a = 0, b = 1$.

Условие обращение мультипликатора в минус единицу $\mu = b - 3x^2 = -1$ приводит к уравнению

$$a = \pm \frac{2}{3} (2-b) \sqrt{\frac{b+1}{3}}.$$

Эта линия имеет сложную форму, показанную на рис.64. В частности, она имеет самопересечение в точке $a = 0, b = 2$ и охватывает точку сборки, пересекая вертикальную ось в точке $a = 0, b = -1$.

Вычислим производную Шварца в этом случае. Поскольку $f'''(x) = -6$ и $f''(x) = -6x$, то

$$Sf(x) = -f'''(x) - \frac{3}{2} [f''(x)]^2 = 6(1 - 9x^2).$$

Таким образом, для анализируемого отображения производная Шварца может быть как отрицательной, так и положительной. При этом производная Шварца может изменить знак.

Точки смена знака производной Шварца на плоскости параметров находим из совместного решения уравнений $1 - 9x^2 = 0$, $\mu = b - 3x^2 = -1$ и соотношения

$a = \pm \frac{2}{3}(2-b)\sqrt{\frac{b+1}{3}}$. Решая их, получаем:

$$b = -\frac{2}{3}, a = \pm \frac{16}{27}.$$

На рис.64 эти точки (так же, как и точка сборки) отмечены жирными кружками. Нетрудно показать, что линиям, уходящим от них вверх, отвечает отрицательная производная Шварца, т.е. это линии бифуркации удвоения периода. Отрезок, уходящий вниз и соединяющий эти точки, характеризуется положительной производной Шварца и отвечает жесткому переходу через мультипликатор $\mu = -1$.

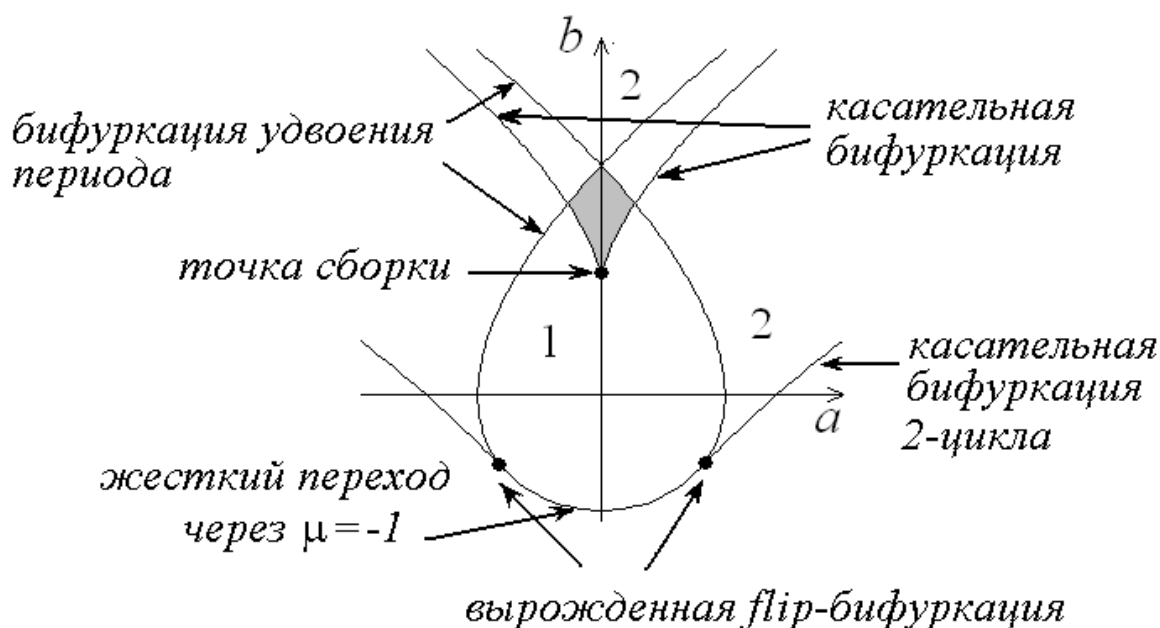


Рис.64. Бифуркации неподвижной точки на плоскости параметров; цифрами указан период цикла. «Spring area» – область существования неподвижной точки.

Таким образом, наш анализ выявил новую бифуркацию *коразмерности два*: точку на линии $\mu = -1$, в которой линия удвоения превращается в линию жесткого переход через мультипликатор $\mu = -1$. Можно показать, что мы установили не все бифуркационные линии, которые подходят к данной точке. Область существования устойчивого 2-цикла ограничена снизу линией касательной бифуркации, которая также подходит к исследуемой точке. В па-

раметрической форме она ищется из условия реализации 2-цикла и обращения его мультипликатора в +1:

$$\begin{aligned}x_2 &= a + bx_1 - x_1^3, \\x_1 &= a + bx_2 - x_2^3, \\ \mu &= (b - 3x_1^2)(b - 3x_2^2) = 1.\end{aligned}$$

Соответствующая линия также показана на рис.63. Заметим, что линия жесткого перехода через мультипликатор $\mu = -1$ и линия касательной бифуркации 2-цикла подходят к обсуждаемой точке с одинаковым наклоном. Обсуждаемая бифуркация не имеет в научной литературе строго определенного названия. Один из часто используемых вариантов: *вырожденная флип-бифуркация* (*degenerate flip*).

Представленная на рис.64 конфигурация также оказывается типичной при двухпараметрическом анализе различных отображений в случае знакопеременной производной Шварца. Для такой структуры Мира предложил название «*spring area*». Ее вид на карте динамических режимов иллюстрирует рис.65.

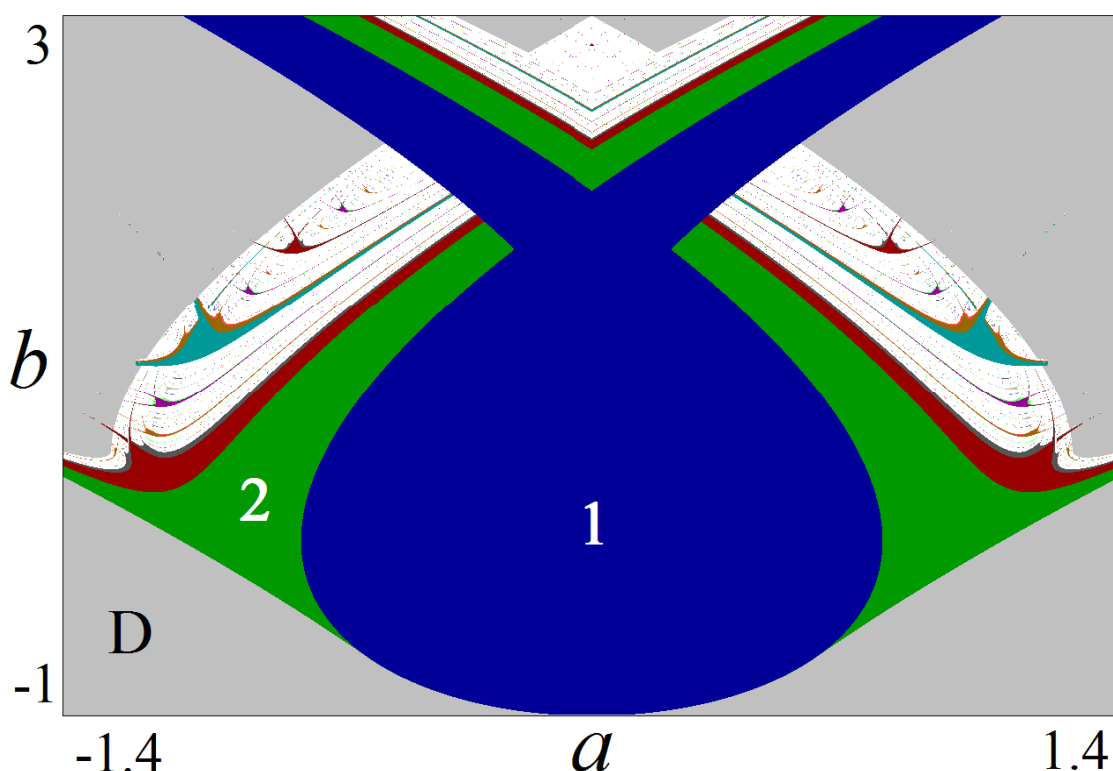


Рис.65. Карта динамических режимов кубического отображения $x_{n+1} = a + bx_n - x_n^3$.

96. Найдите условие, отвечающее существованию кубической точки перегиба для отображения $x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - bx_n^4 - cx_n$. Какой объект задает это условие в пространстве трех параметров a, b, c ?

Решение 96. Приравнивая нулю первую и вторые производные, получаем

$$\text{соответствующее условие: } c = -\frac{4}{3}a\sqrt{-\frac{a}{6b}}.$$

Это ситуация коразмерности один, ей отвечает поверхность в пространстве трех параметров отображения.

97. Покажите, что если квадратичный экстремум отображается в кубическую точку перегиба, то эта ситуация отвечает «нетипичному» экстремуму функции, задающей отображение, и найдите его порядок.

Решение 97. Решение аналогично задаче 94, реализуется экстремум шестой степени. Это ситуация коразмерности два и ей отвечает линия в пространстве трех параметров. То же самое будет для ситуации, когда кубическая точка перегиба отображается в квадратичный экстремум.

98. Каковы свойства функции, задающей отображение, при условии, что квадратичный экстремум отображается в другой квадратичный экстремум, который отображается в третий такой экстремум?

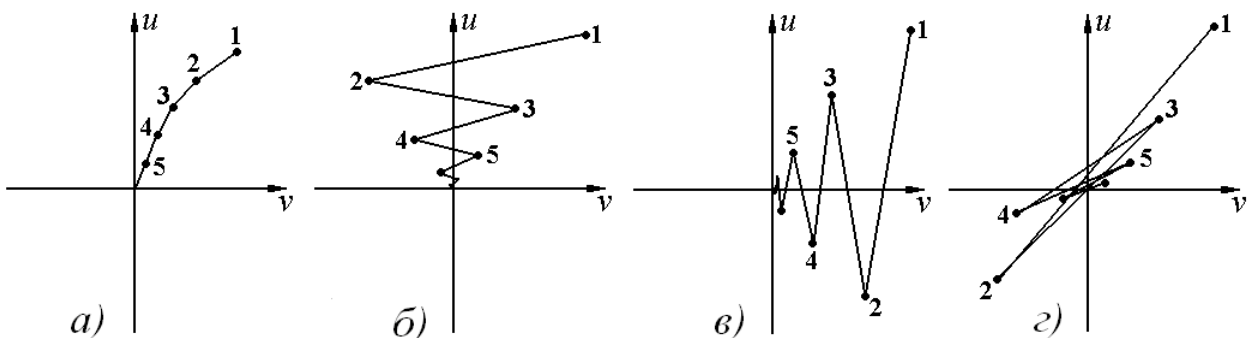
Решение 98. Функция будет иметь экстремум восьмой степени. Рекомендуем самостоятельно изобразить на итерационной диаграмме ситуации из этой и предыдущей задач.

Двумерные отображения и их бифуркации

99. Изобразите качественно динамику изображающей точки на фазовой плоскости двумерного отображения непосредственно в окрестности неподвижной точки в случаях, когда

- оба мультипликатора μ_1 и μ_2 действительны и а) $0 < \mu_1 < 1, 0 < \mu_2 < 1$; б) $-1 < \mu_1 < 0, 0 < \mu_2 < 1$; в) $0 < \mu_1 < 1, -1 < \mu_2 < 0$; г) $-1 < \mu_1 < 0, -1 < \mu_2 < 0$;
- мультипликаторы комплексные, причем модуль близок к единице, а фаза – к д) нулю; е) $\pi/2$; ж) π .

Решение 99. Качественные иллюстрации даны на рис.66.



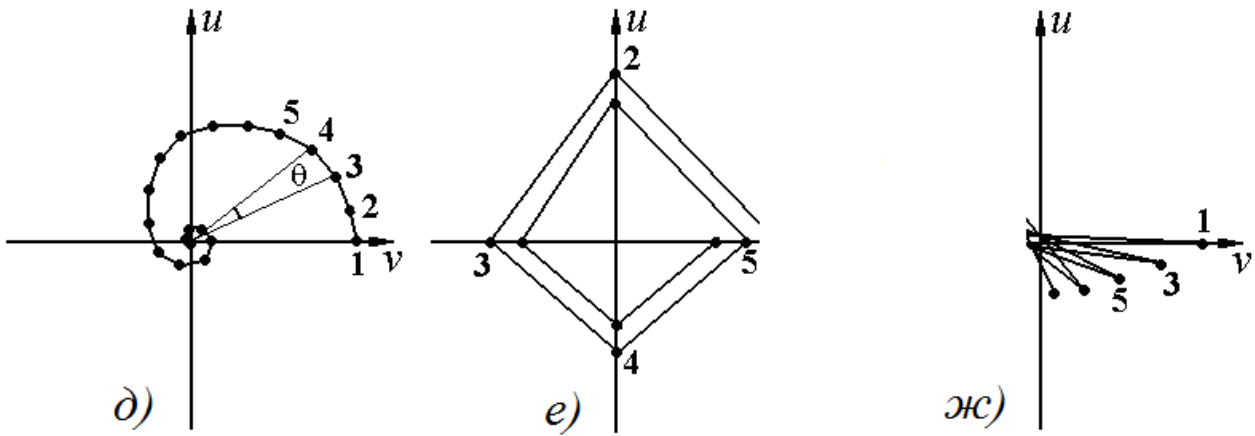


Рис.66. Динамика в окрестности устойчивой неподвижной точки двумерного отображения. Цифры означают номер итерации. Верхний ряд отвечает случаю, когда мультипликаторы действительные, нижний – когда мультипликаторы комплексные.

100. Выпишите условия для неподвижной точки произвольного двумерного отображения. Получите в общем виде матрицу, описывающую динамику в окрестности неподвижной точки. Найдите связь между ее инвариантами – следом и якобианом – с мультипликаторами отображения.

Решение 100. В общем виде двумерное отображение задается с помощью соотношений

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n). \end{aligned}$$

Оно может иметь неподвижные точки, которые переходят сами в себя при его однократной итерации. Соответственно, неподвижные точки являются решением следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} x_0 &= f(x_0, y_0), \\ y_0 &= g(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Исследуем динамику системы вблизи неподвижной точки, для чего положим $x_n = x_0 + \tilde{x}_n$ и $y_n = y_0 + \tilde{y}_n$, где \tilde{x}_n и \tilde{y}_n – малые возмущения. Тогда, линеаризуя отображение вблизи неподвижной точки, получаем уравнения, описывающие динамику возмущений \tilde{x}_n и \tilde{y}_n :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{n+1} &= f'_x \cdot \tilde{x}_n + f'_y \cdot \tilde{y}_n, \\ \tilde{y}_{n+1} &= g'_x \cdot \tilde{x}_n + g'_y \cdot \tilde{y}_n. \end{aligned}$$

Здесь производные вычислены в неподвижной точке. Последние соотношения удобно переписать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{y}_{n+1} \end{pmatrix} = \hat{M} \begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix}, \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix}.$$

Матрица \hat{M} , составленная из частных производных функций, задающих отображение и вычисленных в неподвижной точке, представляет собой *матрицу Якоби*.

Отметим, что для консервативных систем якобиан матрицы \hat{M} равен единице: $J = 1$. В соответствии со свойствами матриц, условие $J = 1$ означает, что при эволюции любого малого элемента на фазовой плоскости его площадь сохраняется. Для диссипативных систем это не так – они обладают (по крайней мере, локально) свойством сжатия фазового пространства.

Характер устойчивости неподвижной точки определяется свойствами матрицы Якоби \hat{M} . В рассматриваемом случае она является матрицей «два на два». Такая матрица имеет два собственных числа μ_1 и μ_2 , которые по определению и являются *мультипликаторами* неподвижной точки двумерного отображения. Именно мультипликаторы определяют, устойчива неподвижная точка или нет.

Из свойств матриц следует, что мультипликаторы удовлетворяют следующим соотношениям

$$\begin{aligned}\mu_1 + \mu_2 &= S, \\ \mu_1 \cdot \mu_2 &= J,\end{aligned}$$

где S и J – два *инварианта* матрицы, ее *след* и *якобиан* соответственно. Происхождение этих двух инвариантов легко понять, если матрица приведена к диагональному виду, так что

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}.$$

По определению след – это сумма диагональных элементов такой матрицы, а якобиан для диагональной матрицы равен их произведению.

Далее, по теореме Виета получаем, что мультипликаторы удовлетворяют уравнению:

$$\mu^2 - S\mu + J = 0.$$

Это квадратное уравнение, решение которого имеет следующий вид:

$$\mu_{1,2} = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - J}.$$

Таким образом, мультипликаторы неподвижной точки двумерного отображения могут быть либо действительными, если $S^2 > 4J$, либо комплексно-сопряженными, если $S^2 < 4J$. Это новый момент, связанный с существованием двух измерений.

101. Опишите возможные бифуркации двумерных отображений на плоскости след S — якобиан J матрицы возмущений. Укажите область устойчивости неподвижной точки, области, где мультипликаторы действительные и комплексные, а также линии бифуркаций коразмерности один и точки коразмерности два.

Решение 101. Граница области устойчивости задается условиями $\mu = +1$ и $\mu = -1$ для действительных мультипликаторов, и $|\mu| = 1$ — для комплексных. В первом случае из соотношения $\mu^2 - S\mu + J = 0$ получаем $1 - S + J = 0$.

Во втором случае, полагая $\mu = -1$, получаем $1 + S + J = 0$.

Наконец, третий тип границы отвечает тому, что мультипликаторы неподвижной точки принимают комплексные значения, а их модуль равен единице. Мультипликаторы являются комплексными, если $J > S^2/4$, и тогда $\mu = S/2 \pm i\sqrt{J - S^2/4}$. Отсюда легко находим, что $\mu \cdot \mu^* = J$. Таким образом, условие $|\mu| = 1$ означает, что $J = 1$.

Все три найденные линии изображены на плоскости параметров (S, J) на рис.67. Пересекаясь, они образуют на плоскости параметров *треугольник устойчивости* неподвижной точки, внутренняя область которого соответствует устойчивой неподвижной точке и показана серым цветом, а внешняя область — неустойчивой. Более темным серым оттенком обозначена область, в которой мультипликаторы принимают комплексные значения. Эта область ограничена снизу параболой $J = S^2/4$.

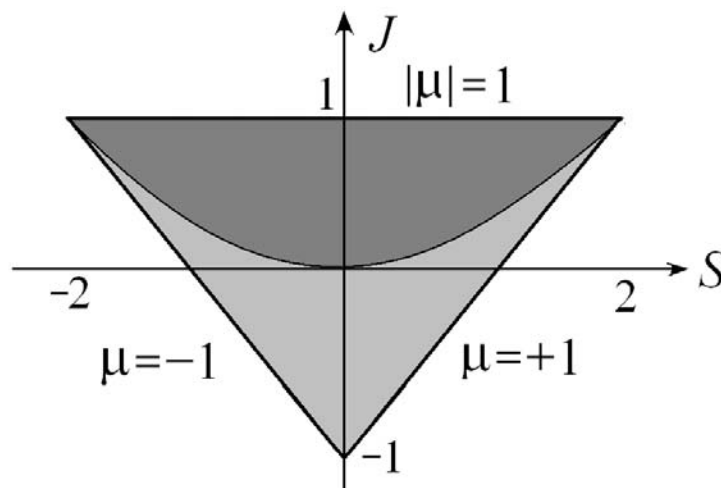


Рис.67. Треугольник устойчивости неподвижной точки двумерного отображения на плоскости след S - якобиан J матрицы Якоби.

Отметим, что в наших рассуждениях мы фиксировали один из мультипликаторов, однако, легко найти и второй. Сделаем это, и обсудим поведение мультипликаторов на границах треугольника. Пусть сначала мультипликаторы действительные. Рассмотрим линию $1 - S + J = 0$. Тогда легко получаем, что $\mu_1 = +1$, а $\mu_2 = S - 1$. Таким образом, при движении по плоскости след - якобиан от нижней вершины треугольника к правой вершине вдоль его правой границы первый мультипликатор остается постоянным и равным $+1$, а второй изменяется от -1 до $+1$.

Аналогично для левой границы треугольника $1 + S + J = 0$, получаем, что $\mu_1 = S + 1$, а $\mu_2 = -1$. Следовательно, при движении от нижней вершины треугольника к левой вершине вдоль его левой границы второй мультипликатор остается постоянным и равным -1 , а первый изменяется от $+1$ до -1 .

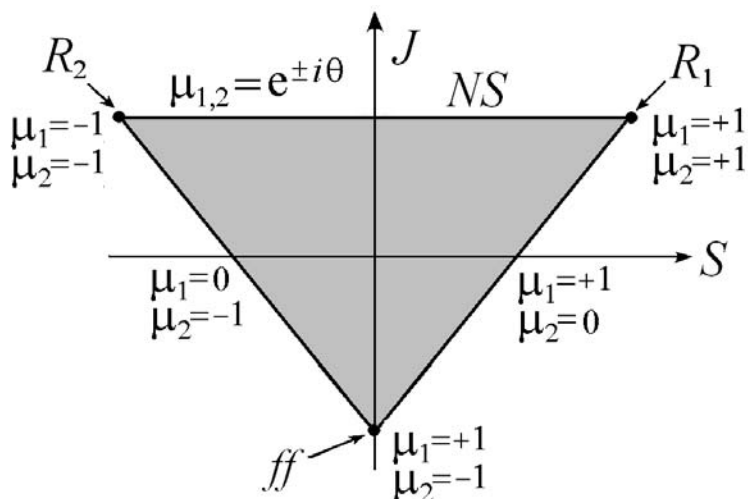


Рис.68. Треугольник устойчивости на плоскости (S, J) . Обозначены линия бифуркации Неймарка-Сакера NS , а также точки коразмерности два: резонанс 1:1 R_1 , резонанс 1:2 R_2 , точка *fold-flip* ff . Указаны значения обоих мультипликаторов в характерных точках.

Проведенное выше рассмотрение позволяет легко классифицировать простейшие бифуркации неподвижных точек двумерного отображения. Границы треугольника устойчивости отвечают бифуркациям *коразмерности один*, а его вершины – бифуркациям *коразмерности два*.

Перечислим сначала бифуркации коразмерности один. Две из них известны из анализа одномерных отображений, а третья является новой²⁸.

²⁸ В скобках даны другие названия бифуркаций, встречающиеся в литературе.

- *Касательная бифуркация (fold)*, $\mu = +1$. (Еще один вариант названия – *бифуркация седло-узел*.) Ей отвечает правая граница треугольника на рис.68:

$$1 - S + J = 0.$$

- *Бифуркация удвоения периода (flip)*, $\mu = -1$. Ей отвечает левая граница треугольника на рис.68²⁹:

$$1 + S + J = 0.$$

- *Бифуркация Неймарка-Сакера*, $J = 1$. Это новая бифуркация, характерная для систем с размерностью фазового пространства два и более. Ей отвечает верхняя граница треугольника:

$$J = 1.$$

Теперь перечислим бифуркации коразмерности два, которым отвечают точки на границе треугольника устойчивости. Они все являются новыми, и не имеют аналогов в теории одномерных отображений. Соответственно, они имеют свои специальные названия.

- *Резонанс 1:1*, R_1 . При такой бифуркации оба мультипликатора обращаются в единицу, $\mu_1 = \mu_2 = +1$. Условием этой бифуркации является:

$$S = 2, J = 1.$$

- *Резонанс 1:2*, R_2 . Оба мультипликатора обращаются в минус единицу, $\mu_1 = \mu_2 = -1$. Условие бифуркации имеет вид:

$$S = -2, J = 1.$$

- *Бифуркация fold-flip, ff*. Для этой бифуркации $\mu_1 = +1$, $\mu_2 = -1$ и

$$S = 0, J = -1.$$

На плоскости инвариантов матрицы Якоби эти бифуркационные точки являются соответствующими вершинами треугольника, рис.68.

102. Найдите связь фазы мультипликатора и следа матрицы линеаризации вдоль линии бифуркации Неймарка-Сакера.

Решение 102. На этой линии мультипликаторы неподвижной точки являются комплексно-сопряженными. В этом случае их удобно записать в виде $\mu = \rho \cdot \exp(i\theta)$, где ρ – модуль мультипликатора, а θ – его фаза. На этой границе $\rho = 1$, а фаза θ будет меняться в зависимости от параметра S . Эту зависимость легко найти из соотношения $\mu = S/2 \pm i\sqrt{J - S^2/4}$, учитывая, что $J = 1$. Тогда для фазы мультипликаторов имеем:

²⁹ Может наблюдаться и жесткий переход через мультипликатор минус единица.

$$\operatorname{tg}\theta = \pm \frac{\sqrt{1 - S^2/4}}{S/2}.$$

Отсюда следует, что

$$S = 2 \cos \theta.$$

В результате при движении вдоль верхней границы треугольника, от его правой вершины $S = +2$ к левой $S = -2$, фаза одного из мультипликаторов будет меняться от $\theta = 0$ до $\theta = \pi$. Причем, при $S = 0$ фаза будет точно равна $\theta = \pi/2$. Отметим, что изменение фазы второго мультипликатора будет происходить в обратном направлении, т.е. от π до 0 .

103. Изобразите качественно картину языков Арнольда, примыкающих к этой линии. Где расположены острия резонансных языков с числами вращения $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$?

Решение 103. Картина языков качественно показана на рис.69. Число вращения w связано с фазой соотношением $\theta = 2\pi w$. Таким образом, $S = 2 \cos 2\pi w$. Тогда для представленной последовательности получаем значения инварианта $S = -1, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

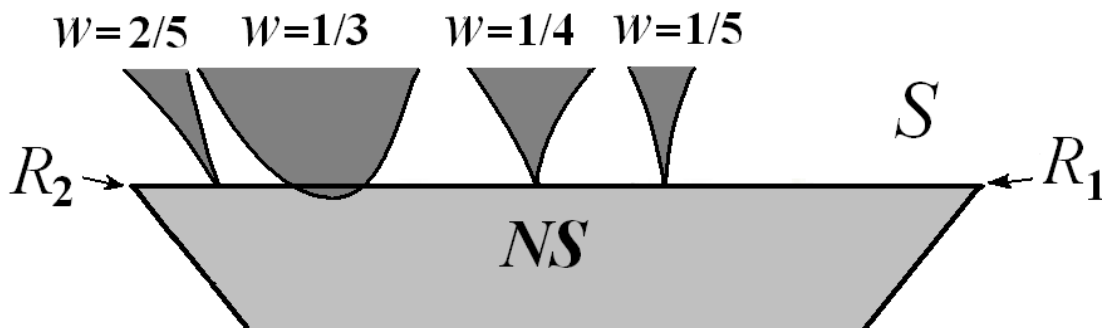


Рис.69. Качественное расположение основных языков Арнольда вдоль линии бифуркации Неймарка-Сакера (верхней границы треугольника устойчивости); NS – линия бифуркации Неймарка-Сакера, R_1 – резонанс 1:1, R_2 – резонанс 1:2, w – число вращения.

104. Выпишите все числа вращения, отвечающие резонансному циклу периода 5. Изобразите качественно все соответствующие правила обхода элементов цикла.

Решение 104. Для резонансного цикла периода 5 возможны числа вращения $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$. В первом случае траектория «образует» пятиугольник, во втором – пятиконечную звезду. Третий и четвертый случаи дают такие же две конфи-

гурации, но с другим правилом обхода элементов, для четвертого случая – вращение в противоположном направлении.

105. Есть ли бифуркация Неймарка-Сакера в отображении Заславского?

Решение 105. Нет, это отображение с постоянным якобианом.

106. Найдите диапазон значений параметра α , в котором является устойчивой нетривиальная неподвижная точка отображения Гукенхаймера и Холмса

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= y_n, \\ y_{n+1} &= \alpha y_n(1 - x_n).\end{aligned}$$

Определите фазовый угол θ (аргумент мультипликатора), отвечающий обращению якобиана отображения в единицу.

Решение 106. Для нетривиальной неподвижной точки легко находим $y_0 = x_0 = 1 - \frac{1}{\alpha}$. Вычисляем теперь матрицу возмущений в этой точке:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha y_0 & \alpha(1 - x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, след и якобиан $S = 1$, $J = \alpha$. Из «треугольника устойчивости» легко находим диапазон устойчивости неподвижной точки $0 < \alpha < 1$. Причем, нижняя граница области отвечает касательной бифуркации, а верхняя – бифуркации Неймарка-Сакера. В точке этой бифуркации, как известно, $S = 2 \cos \theta$. Таким образом, в нашем случае аргумент мультипликатора $\theta = \frac{\pi}{3}$.

107. Для отображения Эно

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - b y_n, \\ y_{n+1} &= x_n,\end{aligned}$$

найдите неподвижные точки, матрицу возмущений, а также её след и якобиан как функции параметров b и λ . Найдите линии касательной бифуркации, бифуркации удвоения периода и нанесите их на плоскость b, λ . Укажите также области действительных и комплексных мультипликаторов. Опишите эволюцию мультипликаторов неподвижной точки отображения Эно на комплексной плоскости при фиксированном $b > 0$ при увеличении λ .

Решение 107. Неподвижные точки отображения Эно определяются соотношением:

$$x_0 = y_0 = \frac{-(1+b) \pm \sqrt{(1+b)^2 + 4\lambda}}{2\lambda}.$$

Запишем матрицу Якоби. Для этого надо найти соответствующие частные производные, так что в результате получаем:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} -2\lambda x_0 & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перейдем к параметрам след S и якобиан J матрицы Якоби. Для этого след вычисляем как сумму диагональных элементов матрицы, а якобиан – по известному правилу вычисления определителя. Тогда $S = -2\lambda x_0$, $J = b$. Используя выражение для неподвижной точки, получаем связь следа и якобиана с исходными параметрами отображения:

$$S = (1+b) \mp \sqrt{(1+b)^2 + 4\lambda},$$

$$J = b.$$

Таким образом, отображение Эно характеризуется *постоянным якобианом*. Это означает, что оно будет демонстрировать не все описанные выше бифуркации, поскольку условие диссипативности отображения $|b| < 1$ в этом случае означает $|J| < 1$ и бифуркация Неймарка-Сакера невозможна. В отображении Эно будут наблюдаться только касательная бифуркация и бифуркация удвоения периода. То есть отображение Эно лишь обобщает уже известные для одномерных отображений бифуркации на случай двух измерений. Тем не менее, его бифуркационный анализ представляет интерес, как пример приложения представленного выше подхода.

Начнем анализ с касательной бифуркации, условие которой задается соотношением $1 - S + J = 0$, так что

$$1 - b - 1 \pm \sqrt{(b+1)^2 + 4\lambda} + b = 0,$$

и после некоторых преобразований приводит к условию

$$\lambda = -\frac{(1+b)^2}{4}.$$

Будем постепенно увеличивать λ , двигаясь по плоскости (b, λ) вдоль линии $b = \text{const}$ снизу вверх, рис.70.

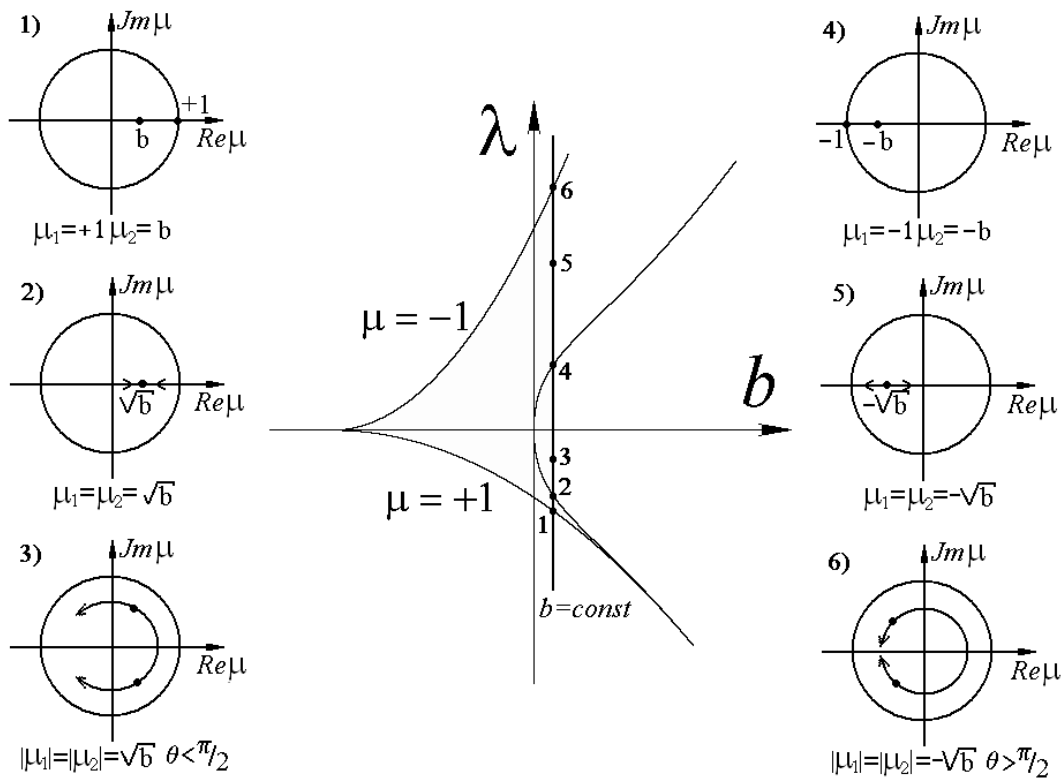


Рис.70. Качественная эволюция положения мультипликаторов неподвижной точки отображения Эно на комплексной плоскости при движении по плоскости параметров (b, λ) вдоль линии $b = const$. Цифры отвечают соответствующим точкам на плоскости параметров.

При $\lambda < -\frac{(1+b)^2}{4}$ в отображении Эно нет неподвижных точек. Устойчивая

и неустойчивая точки появляются в результате касательной бифуркации. Мультипликаторы при этом сначала будут оставаться действительными, но при условии $S^2 = 4J$ сольются на комплексной плоскости и станут комплексно-сопряженными. Для параметра λ этот момент отвечает условию $\lambda = b - \sqrt{b}(1+b)$. Затем мультипликаторы движутся по окружности радиуса \sqrt{b} , обходят начало координат, и снова сливаются при условии $\lambda = -b + \sqrt{b}(1+b)$. После чего они опять расходятся вдоль действительной оси. Наконец, при выполнении условия $1 + S + J = 0$, которому отвечает:

$$\lambda = \frac{3(1+b)^2}{4},$$

один из мультипликаторов обратится в -1 и произойдет бифуркация удвоения периода.

Заметим, что для отображений с постоянным якобианом мультипликаторы никогда не обращаются в ноль в силу соотношения $\mu_1 \mu_2 = J$. Это существенное

отличие от случая одномерных отображений. Соответственно, у двумерных отображений не бывает сверхустойчивых циклов. «Наиболее устойчивая» ситуация занимает некоторый диапазон по параметру, отвечающий движению мультипликаторов в комплексной плоскости.

108. Найдите элементы 2-цикла отображения Эно как функции параметров λ и b . Исследуйте устойчивость этого цикла, для чего найдите матрицу возмущений, вычислите след S и якобиан J этой матрицы. Найдите аналитическое выражение для линии удвоения периода 2-цикла и нанесите ее на b, λ плоскость.

Решение 108. Элементы 2-цикла отображения Эно несложно найти из исходного уравнения

$$x_{1,2} = \frac{(1+b) \pm 2\sqrt{\lambda - 3(1+b)^2/4}}{2\lambda},$$

$$y_{1,2} = x_{2,1}.$$

Вычислим матрицу Якоби:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} -2\lambda x_2 & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\lambda x_1 & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\lambda^2 x_1 x_2 - b & 2\lambda x_2 \\ -2\lambda x_1 & -b \end{pmatrix}.$$

Откуда получаем выражение для следа и якобиана:

$$S = 4\lambda^2 x_1 x_2 - 2b,$$

$$J = b^2.$$

Если теперь воспользоваться соотношением $x_2 x_1 = \frac{(1+b)^2 - \lambda}{\lambda^2}$, то имеем

$$S = 4(1+b)^2 - 4\lambda - 2b,$$

$$J = b^2.$$

(Отметим, что якобиан можно вычислить и непосредственно из свойств матрицы, используя что для произведения матриц $J = J_1 J_2$.)

Определим теперь бифуркации 2-цикла. Очевидно, что касательной бифуркации 2-цикла отвечает линия удвоения неподвижной точки. Поэтому нам осталось найти линии удвоения периода 2-цикла. Используя соотношение $1 + S + J = 0$, после некоторых преобразований получаем условие удвоения периода для 2-цикла:

$$\lambda = (1+b)^2 + (1-b)^2 / 4.$$

Соответствующие бифуркационные линии на плоскости (b, λ) показаны на рис.71. При движении по плоскости этих параметров вдоль линии $b = 0$ можно наблюдать каскад удвоений, отвечающий логистическому отображению.

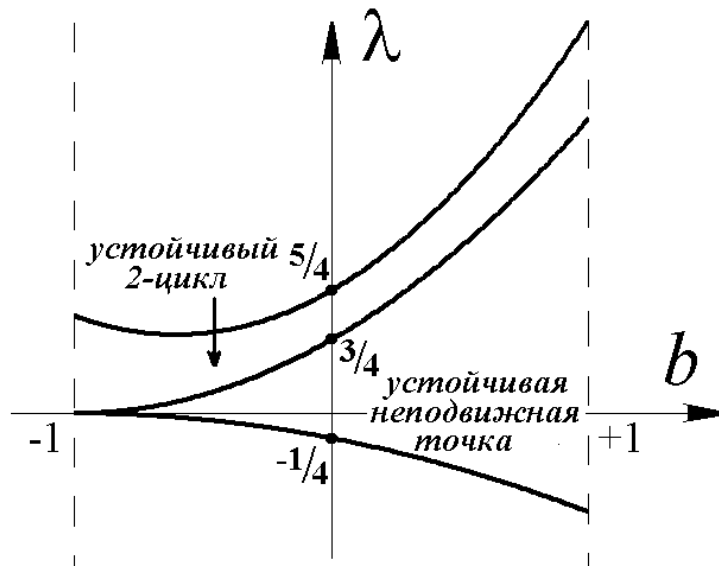


Рис.71. Плоскость (b, λ) отображения Эно и линии простейших бифуркаций.

На рис.72 показана карта динамических режимов отображения Эно, которая дополняет проведенный бифуркационный анализ. На карте можно видеть линии рождения 2- и 4-циклов, подтверждающие аналитическое рассмотрение в рамках бифуркационного анализа, а также области долгопериодических циклов. Внутри области хаоса обнаруживаются структуры типа «*crossroad area*», которые подробно рассмотрены при анализе одномерных отображений. Две такие структуры, образованные на базе режимов периода 5 и 7, показаны на увеличенном фрагменте карты.

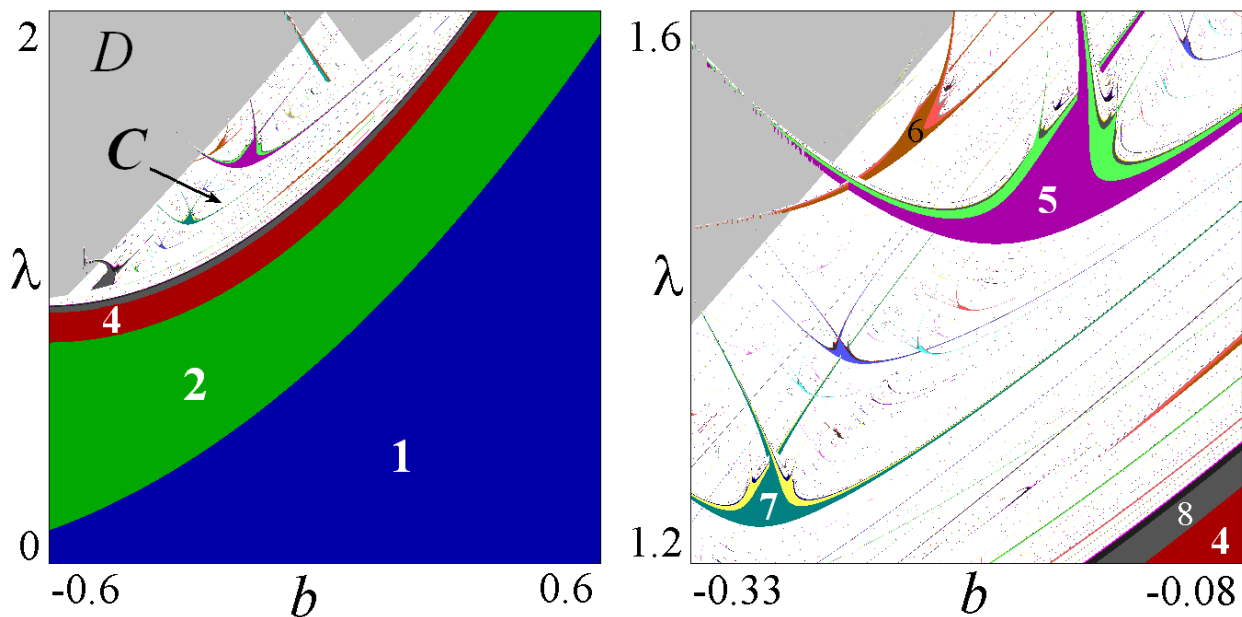


Рис.72. Карта динамических режимов и ее увеличенный фрагмент для отображения Эно. Цифрами обозначены периоды режимов, D – область разбегания траекторий, C – хаос.

109. Чему равен якобиан N -цикла отображения Эно? Уменьшается или увеличивается радиус окружности, по которой движутся в комплексной плоскости мультипликаторы циклов отображения Эно при удвоениях периода?

Решение 109. Якобиан двумерного отображения отвечает за сжатие элементарной площадки на плоскости динамических переменных. Якобиан неподвижной точки равен b , а 2-цикла – b^2 . В силу свойства якобиана матрицы Якоби ясно, что якобиан 4-цикла будет равняться b^4 и т.д. Таким образом, с ростом периода циклов якобиан очень быстро стремится к нулю, что на геометрическом языке означает сильное сжатие в фазовом пространстве и, фактически, эффективность некоторого одномерного отображения. Соответственно, стремится к нулю размер окружности, по которой движутся мультипликаторы в комплексной плоскости.

110. Для консервативного отображения Эно опишите эволюцию мультипликаторов на комплексной плоскости при удвоениях периода.

Решение 110. На линиях $b = \pm 1$ наблюдается особое поведение, отвечающее консервативному случаю. В этом случае в отображении нет аттракторов, вместо них в фазовом пространстве наблюдается особый объект – неподвижная точка эллиптического типа, которая с ростом параметра λ теряет устойчивость и становится точкой гиперболического типа. При этом в ее окрестности появляется 2-цикл эллиптического типа. Если и дальше увеличивать λ , то он теряет устойчивость и становится 2-циклом гиперболического типа, а в его окрестности появляется 4-цикл эллиптического типа и т.д. Таким образом, при движении вдоль линий $b = \pm 1$ имеют место специфические консервативные удвоения периода. Теория таких систем представляет собой отдельную ветвь нелинейной динамики, поэтому мы не будем здесь подробно останавливаться на этих вопросах.

111. Дж. Спротт (J. Sprott) предложил простую модификацию отображения Эно, чтобы бифуркация Неймарка-Сакера стала возможной³⁰. Для этого следует просто поменять местами переменные в первом уравнении:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda y_n^2 + b x_n, \\ y_{n+1} &= x_n.\end{aligned}$$

Спротт называет отображение «минимальным» (*minimal 2-D quadratic map*), поскольку это практически простейшее по своему виду квадратичное

³⁰ Elhadj Z., Sprott J.C. // ИВС. 2008, № 5, p. 1567-1577.

отображение с бифуркацией Неймарка-Сакера. Проведите бифуркационный анализ неподвижной точки этого отображения.

Решение 111. Неподвижные точки отображения Спротта определяются теми же соотношениями, что и для отображения Эно

$$x_0 = y_0 = \frac{-(1+b) \pm \sqrt{(1+b)^2 + 4\lambda}}{2\lambda}.$$

Матрица Якоби имеет вид:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} b & -2\lambda y_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда легко находим след и якобиан матрицы Якоби, и получаем связь следа и якобиана с исходными параметрами отображения:

$$S = b,$$

$$J = 2\lambda y_0 = -(1-b) \mp \sqrt{(1-b)^2 + 4\lambda}.$$

Бифуркацию Неймарка-Сакера находим, приравнявая якобиан единице.

После простых преобразований получаем: $\lambda = \frac{3-2b}{4}$.

Концевыми точками для линии бифуркации Неймарка-Сакера являются точки резонанса 1:1 и 1:2. Их находим с помощью соотношений из задачи 101:

- резонанс 1:1, $b = 2$, $\lambda = -0.25$,
- резонанс 1:2, $b = -2$, $\lambda = 1.75$.

112. Для универсального двумерного отображения³¹

$$x_{n+1} = Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2),$$

$$y_{n+1} = Jx_n - (x_n^2 + y_n^2)/5$$

покажите, что область устойчивости тривиальной неподвижной точки имеет вид треугольника из задачи 101. Постройте карту динамических режимов этого отображения.

Решение 112. Матрица возмущений для тривиальной неподвижной точки имеет вид

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} S & -1 \\ J & 0 \end{pmatrix}.$$

³¹ А.П. Кузнецов и др. Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003, №1, с. 12–18.

Таким образом, параметры отображения являются одновременно следом и якобианом матрицы возмущений. Область устойчивости неподвижной точки поэтому дается непосредственно рис.68.

На рис.73 показана построенная численно карта динамических режимов и ее увеличенный фрагмент в окрестности линии бифуркации Неймарка-Сакера.

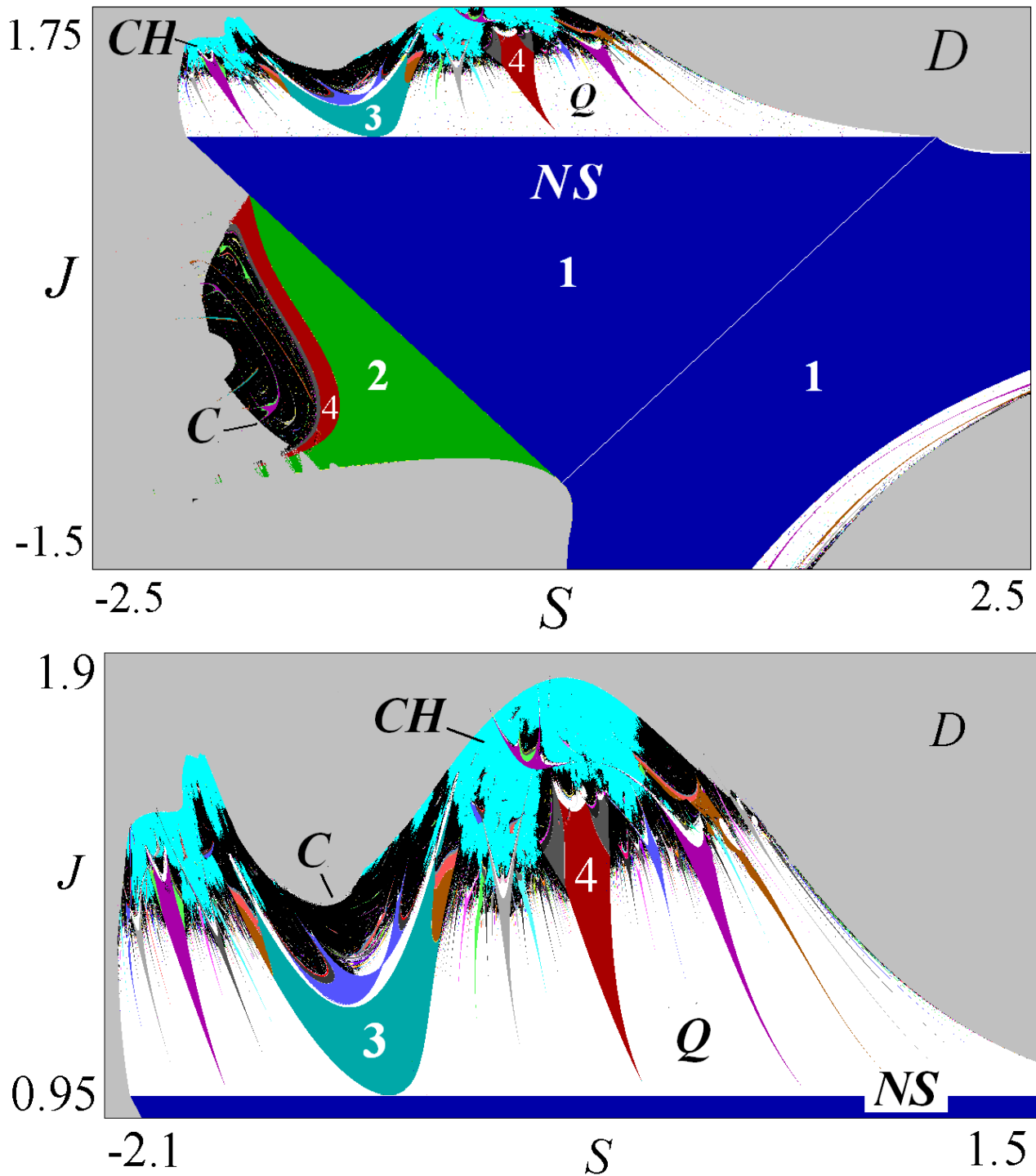


Рис.73. Карта динамических режимов двумерного универсального отображения и ее увеличенный фрагмент в окрестности линии бифуркации Неймарка-Сакера.

Для этого отображения становятся возможными квазипериодические колебания, наблюдающиеся выше линии бифуркации Неймарка-Сакера. Для «традиционной» карты квазипериодические колебания и хаос неразличимы. Поэтому рис.73 представляет собой своего рода комбинированную карту режимов и ляпуновских показателей. Здесь, кроме областей с разными периодами циклов, дополнительно хаос C показан черным цветом, а квазипериодические колебания Q – белым. Кроме того, отмечены гиперхаотические режимы CH с двумя положительными показателями Ляпунова, а также D – область разбегания траекторий.

Отметим, что линия $\mu = -1$ содержит отрезок, отвечающий удвоению периода, а также отрезок, отвечающий жесткому переходу через мультипликатор $\mu = -1$. Можно видеть также сложное внутреннее устройство языков синхронизации – внутри языков могут иметь место удвоения периода, а также вторичные бифуркации Неймарка-Сакера. При этом «сильные» резонансы имеют свое, характерное устройство. В этом плане интересно сопоставить языки периода три, четыре и пять.

113. Рассмотрите два идентичных связанных одномерных отображения

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + \varepsilon(y_n - x_n), \\y_{n+1} &= f(y_n) + \varepsilon(x_n - y_n).\end{aligned}$$

Исследуйте симметричные режимы, т.е. такие, для которых $x_n = y_n$. Покажите, что мультипликаторы неподвижной точки связанных систем даются выражениями $\mu_1 = f'(x)$ и $\mu_2 = \mu_1 - 2\varepsilon$. Исходя из этих результатов, найдите линии касательной бифуркации и бифуркации удвоения периода неподвижной точки на плоскости λ, ε в случае двух связанных логистических отображений.

Решение 113. Для симметричного режима система редуцируется к одномерной $x_{n+1} = f(x_n), y_n = x_n$. Найдем матрицу возмущений для анализируемой системы с учетом симметрии решения:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} f'(x) - \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & f'(x) - \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu - \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \mu - \varepsilon \end{pmatrix},$$

где $\mu = f'(x)$ – мультипликатор индивидуальной системы. Отсюда следует, что $S = 2(\mu - \varepsilon), J = (\mu - \varepsilon)^2 - \varepsilon^2$. Тогда для двумерного отображения из соотношения $\mu_{1,2} = S/2 \pm i\sqrt{J - S^2/4}$ следует $\mu_1 = \mu, \mu_2 = \mu - 2\varepsilon$. Теперь легко находим условия касательной бифуркации и бифуркации удвоения периода, приравни-

вая $\mu_{1,2} = \pm 1$. Для логистического отображения $f(x) = \lambda - x^2$ следует использовать $\mu = 1 - \sqrt{1 + 4\lambda}$, что дает соответствующие линии на плоскости λ, ε .

114. Проведите бифуркационный анализ неподвижных точек *отображения Богданова*³²

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \varepsilon y_{n+1}, \\y_{n+1} &= y_n + \varepsilon((\mu - x_n)y_n - a + x_n^2).\end{aligned}$$

Решение 114. Неподвижные точки задаются соотношениями

$$x_0 = \pm\sqrt{a}, y = 0.$$

Верхний знак соответствует всегда неустойчивой точке, так что положим $x_0 = -\sqrt{a}$. Вычисляя матрицу возмущений (что рекомендуем проделать самостоятельно), получаем:

- бифуркация Неймарка-Сакера: $\mu = -\sqrt{a}$,
- касательная бифуркация: $a = 0$,
- бифуркация удвоения периода: $2 + \varepsilon(\sqrt{a} + \mu) - \varepsilon^2\sqrt{a} = 0$,
- резонанс 1:1: $\mu = 0, a = 0$,
- резонанс 1:2: $\mu = -2/\varepsilon^2, a = 4/\varepsilon^4$,
- fold-flip: $\mu = -2/\varepsilon, a = 0$.

115. Рассмотрим цепочку из емкостей C и индуктивностей L , показанную на рис.74. Как известно из радиотехники, она представляет собой фильтр низких частот. А именно, при условии $\omega < \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}$ цепочка пропускает сигнал, а при условии $\omega > \omega_0$ – нет. Получите рекуррентное выражение для комплексного импеданса цепочки. Представьте его как двумерное отображение для действительной и мнимой части соответствующих выражений. Найдите инварианты матрицы возмущений и обсудите вопрос устойчивости неподвижных точек в полосе пропускания фильтра $\omega < \omega_0$.

Решение 115. По правилам параллельного и последовательного соединения получаем рекуррентное соотношение для импеданса цепочки из конечного числа звеньев:

$$z_{n+1} = i\omega L + \frac{z_n / i\omega C}{z_n + 1 / i\omega C}.$$

³² Arrowsmith D., Cartwright J., Lansbury A., Place C. // I JBC, 1993, № 4, p. 803.

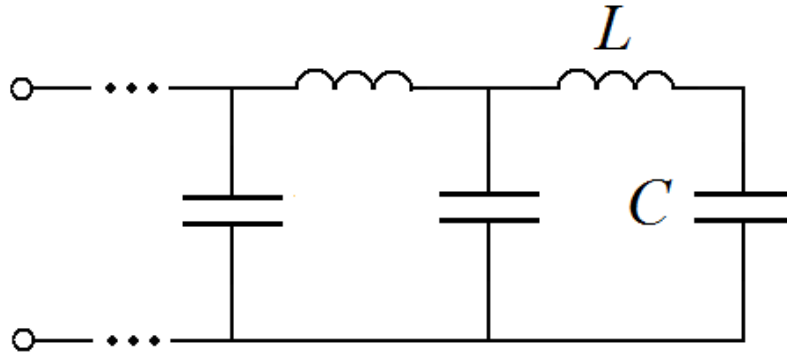


Рис.74. Цепочка из емкостей и индуктивностей.

Далее удобно ввести переменную $\xi_n = 1 + i\omega Cz_n$. Тогда после простых преобразований получаем:

$$\xi_{n+1} = \delta - \frac{1}{\xi_n},$$

где $\delta = 2 - \omega^2 LC = 2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ – отстройка частоты от критической. Вводя действительную и мнимую части переменной, так что $\xi = x + iy$, получаем:

$$x_{n+1} = \delta - \frac{x_n}{x_n^2 + y_n^2},$$

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{x_n^2 + y_n^2}.$$

Это и есть искомое отображение. Найдем его неподвижные точки. В первом случае $y_0 = 0$ и $x_0 = \frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{4} - 1}$. Заметим, что по своему определению $\delta < 2$. Поэтому найденное решение существует при $\delta < -2$. В терминах исходной системы это отвечает $\omega > \omega_0$, то есть частота больше критической³³.

Поэтому обратимся ко второму случаю, когда $y_0 \neq 0$. Тогда $x_0^2 + y_0^2 = 1$, так что $x_0 = \frac{\delta}{2}, y_0 = \pm \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4}}$. Это решение имеет место при

³³ В этом случае импеданс цепочки чисто мнимый и стремится к некоторому предельному для бесконечной цепочки значению.

$-2 < \delta < 2$. В терминах исходной системы $\omega < \omega_0$, что отвечает области пропускания.

Вычислим теперь матрицу возмущений. Обращаем внимание, что поскольку рассматривается аналитическая функция комплексного переменного, то для уменьшения выкладок можно использовать условия Коши-Римана:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{x_0^2 - y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2} & \frac{2x_0y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2} \\ -\frac{2x_0y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2} & \frac{x_0^2 - y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Тогда для следа и якобиана получаем:

$$S = \frac{2(x_0^2 - y_0^2)}{(x_0^2 + y_0^2)^2}, \quad J = \frac{1}{(x_0^2 + y_0^2)^2}.$$

В области пропускания $x_0^2 + y_0^2 = 1$ и якобиан точно равен единице. Мы имеем консервативную ситуацию. Об импедансе бесконечной цепочки в этом случае говорить нельзя – устойчивой неподвижной точки у отображения нет. Рекомендуем самостоятельно построить фазовые портреты для полученного отображения.

Трехмерные отображения и их бифуркации

116. Для трехмерного отображения в общем виде укажите условия основных бифуркаций в пространстве инвариантов матрицы возмущений.

Решение 116. В общем виде трехмерное отображение задается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n, z_n), \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n, z_n), \\ z_{n+1} &= v(x_n, y_n, z_n). \end{aligned}$$

Оно может иметь неподвижную точку (x_0, y_0, z_0) , так что

$$\begin{aligned} x_0 &= f(x_0, y_0, z_0), \\ y_0 &= g(x_0, y_0, z_0), \\ z_0 &= v(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Малые возмущения в окрестности неподвижной точки эволюционируют в соответствии с матрицей Якоби, вычисленной в этой точке:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы \hat{M} являются мультипликаторами отображения, которые определяют характер устойчивости неподвижной точки и отвечают за бифуркации. Для трехмерных отображений матрица \hat{M} – это матрица 3×3 , поэтому уравнение для определения собственных чисел

$$\det(\hat{M} - \mu \hat{E}) = 0,$$

где \hat{E} – единичная матрица, имеет третий порядок.

Матрица \hat{M} имеет три собственных числа, и, соответственно, три мультипликатора. Поскольку уравнение для определения собственных чисел действительное, то все три мультипликатора могут быть либо действительными числами, либо один из них является действительным, а два оставшихся – комплексно-сопряженными. Таким образом, можно сформулировать критерий устойчивости: неподвижная точка будет устойчивой, если все мультипликаторы по модулю меньше единицы.

Как и в случае двух измерений, для анализа картины бифуркаций используем в качестве параметров *инварианты матрицы возмущений*. Для этого надо найти связь этих параметров с мультипликаторами. Обозначим мультипликаторы через μ_1, μ_2, μ_3 . Тогда уравнение третьего порядка может быть записано в форме

$$(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)(\mu - \mu_3) = 0.$$

Раскрывая скобки, приходим к соотношению

$$\mu^3 - S\mu^2 + H\mu - J = 0, \quad (1)$$

в котором введены обозначения

$$\begin{aligned} S &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \\ H &= \mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3, \\ J &= \mu_1\mu_2\mu_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Величины S , H , J и есть три инварианта матрицы возмущений (матрицы Якоби).

Прежде всего, выясним, как в случае трехмерных отображений представлены классические бифуркации, характерные для случаев одного и двух измерений. Обсудим их по возрастающей коразмерности.

Сначала найдем условия реализации в трехмерных отображениях известных бифуркаций коразмерности один.

- *Касательная бифуркация* $\mu = +1$. Подставляя $\mu = +1$ в (1), получаем условие этой бифуркации:

$$H = J - 1 + S. \quad (3)$$

- *Бифуркация* $\mu = -1$. Подставляя $\mu = -1$ в (1), получаем:

$$H = -J - 1 - S. \quad (4)$$

- *Бифуркация Неймарка-Сакера*. Условием бифуркации является обращение в единицу модуля двух комплексных мультипликаторов, так что $\mu_1 = e^{i\theta}$, $\mu_2 = e^{-i\theta}$. Подставим эти значения в соотношения (2). Тогда получим уравнения, содержащие только третий мультипликатор и фазу θ :

$$S = 2 \cos \theta + \mu_3, \quad H = 2\mu_3 \cos \theta + 1, \quad J = \mu_3. \quad (5)$$

Исключая их, получаем условие бифуркации Неймарка-Сакера:

$$H = SJ - J^2 + 1. \quad (6)$$

Обсудим теперь бифуркации коразмерности два. Сначала представим бифуркации, уже известные для двумерных отображений.

- *Резонанс 1:1* R_1 . Для этой бифуркации два мультипликатора обращаются в единицу: $\mu_1 = +1$, $\mu_2 = +1$. Подставляя эти соотношения в (2) и исключая третий мультипликатор, получаем:

$$S = J + 2, \quad H = 2J + 1. \quad (7)$$

- *Резонанс 1:2* R_2 . Условием бифуркации являются равенства $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = -1$. Действуя аналогично предыдущему случаю, получаем:

$$S = J - 2, \quad H = -2J + 1. \quad (8)$$

- *Бифуркация fold-flip ff*. Для этой бифуркации $\mu_1 = +1$, $\mu_2 = -1$, так что из (2) следует

$$S = -J, \quad H = -1. \quad (9)$$

В трехмерной системе появляются также *новые бифуркации коразмерности два*, обусловленные наличием трех измерений и трех мультипликаторов. Действительно, бифуркация Неймарка-Сакера связана с комплексно-сопряженными мультипликаторами, лежащими на единичной окружности: $\mu_1 = e^{i\theta}$, $\mu_2 = e^{-i\theta}$. В трехмерной системе появляется дополнительное условие устойчивости, связанное с третьим мультипликатором: $-1 < \mu_3 < 1$. Таким образом, возможны новые бифуркации коразмерности два, когда одновременно выполняются условие бифуркации Неймарка-Сакера и условие обращения в $+1$ или -1 третьего мультипликатора. В соответствии с этими условиями, новые бифуркации носят названия *фолд-Неймарк-Сакер (fold-Neimark-Saker)* и *флип-Неймарк-Сакер (flip-Neimark-Saker)*.

Найдем условия реализации таких бифуркаций. Поскольку, в соответствии с третьим уравнением (5) $\mu_3 = J$, то равенство $\mu_3 = \pm 1$ приводит к условию $J = \pm 1$. Таким образом, с учетом (6) для новых бифуркаций имеем:

- *Fold-NS*: $H = S, J = 1.$ (10)

- *Flip-NS*: $H = -S, J = -1.$ (11)

117. Изобразите границы области устойчивости неподвижной точки в пространстве инвариантов матрицы возмущений.

Решение 117. Чтобы наблюдалась полная картина описанных бифуркаций, система должна характеризоваться тремя существенными параметрами. Рассмотрим вложение этой картины в пространство инвариантов матрицы возмущений (J, S, H) . Удобство и важность использования такого пространства обусловлена тем, что получаемая картина будет, во-первых, *полной*, а, во-вторых, *универсальной* для трехмерных отображений.

В пространстве (J, S, H) бифуркациям коразмерности один будут отвечать некоторые *поверхности*, а бифуркациям коразмерности два – *линии*. Для выяснения структуры пространства (J, S, H) построим сначала его сечения плоскостями $S = const$. Соответствующие иллюстрации для $S = 0$, $S = 2$ и $S = -2$ представлены на рис.75. Обсудим их более подробно.

Сечение $S = 0$. В этом сечении на рис.75а можно видеть линию бифуркации Неймарка-Сакера *NS*, которая в соответствии с (6) представляет собой отрезок параболы $H = 1 - J^2$. Эта линия ограничена двумя новыми точками, характерными для трехмерных отображений: *fold-NS* ($J = 1, H = 0$) и *flip-NS* ($J = -1, H = 0$).

Через эти точки проходят также ограничивающие область устойчивости линии бифуркаций $\mu = +1: H = J - 1$ и $\mu = -1: H = -J - 1$. Они, в свою очередь, пересекаются в точке *fold-flip* с координатами $(J = 0, H = -1)$. Заметим, что резонансы R_1 и R_2 не попадают в область устойчивости – для них третий мультипликатор оказывается по модулю больше единицы.

Сечение $S = 2$. Сечение $S = 2$ показано на рис.75б. В этом случае область устойчивости ограничена линией бифуркации Неймарка-Сакера, концевыми точками которой являются точки *fold-NS* и резонанса R_1 . Второй границей области устойчивости является линия $\mu = +1$.

Сечение $S = -2$. На рис.75в показано сечение $S = -2$. В этом случае отрезок линии Неймарка-Сакера ограничен точками *flip-NS* и резонанса R_2 . Второй границей области устойчивости является линия мультипликатора $\mu = -1$.

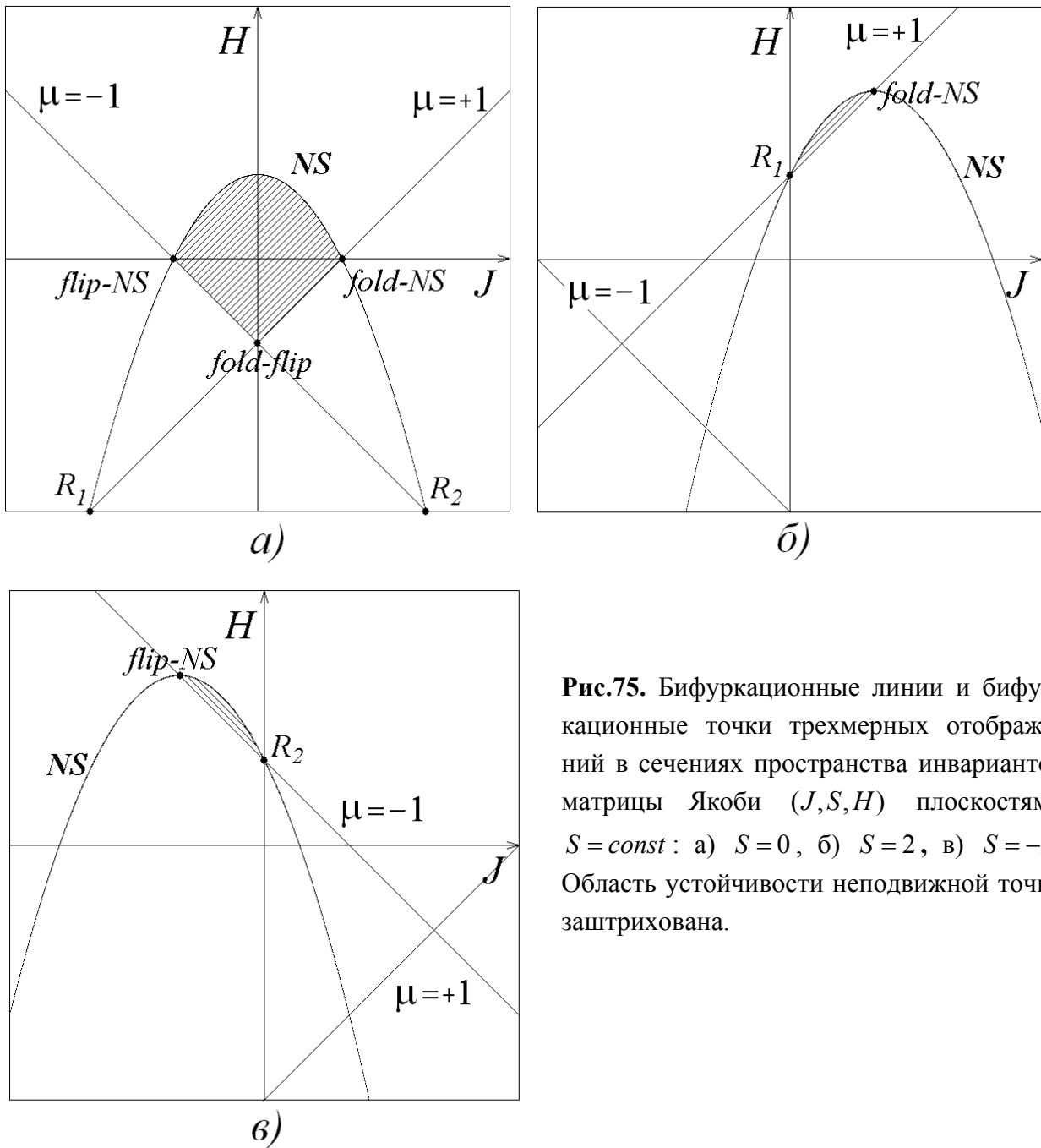


Рис.75. Бифуркационные линии и бифуркационные точки трехмерных отображений в сечениях пространства инвариантов матрицы Якоби (J, S, H) плоскостями $S = const$: а) $S = 0$, б) $S = 2$, в) $S = -2$. Область устойчивости неподвижной точки заштрихована.

Таким образом, представленные рисунки иллюстрируют разнообразные возможные и типичные варианты устройства границы области устойчивости неподвижной точки трехмерных отображений. Используя рис.75, можно построить картину вложения бифуркаций в трехмерное пространство инвариантов матрицы возмущений (S, J, H) , которая показана на рис.76. Как мы уже отмечали, в пространстве параметров бифуркациям коразмерности один отвечают некоторые поверхности, а бифуркациям коразмерности два – линии. Возникают и бифуркации коразмерности три, которым соответствуют некоторые точки в пространстве параметров.

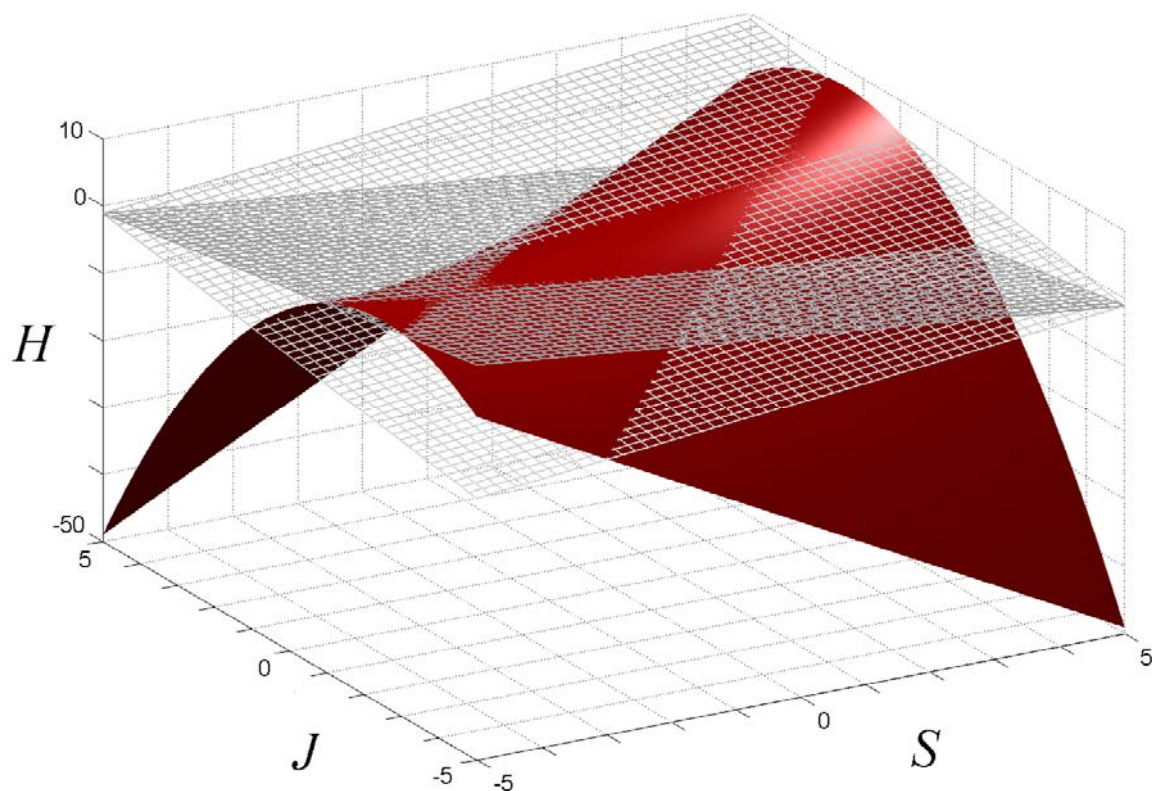


Рис.76. Поверхности бифуркации Неймарка-Сакера, плоскости мультипликаторов $\mu = +1$ и $\mu = -1$ трехмерных отображений в пространстве инвариантов матрицы возмущений (J, S, H) .

На рисунке 76 можно видеть следующие поверхности.

- Поверхность $H = SJ - J^2 + 1$, которая показана в цветной графике. Она отвечает условию обращения в единицу модуля двух комплексно-сопряженных мультипликаторов.

- Поверхности $H = J - 1 + S$ и $H = -J - 1 - S$, которые показаны на рисунке в черно-белой графике с нанесенной сеткой координат. Они являются плоскостями в трехмерном пространстве параметров и отвечают условиям обращения одного из мультипликаторов в $+1$ и -1 .

Можно видеть, что за бифуркацию Неймарка-Сакера отвечает лишь часть поверхности $H = SJ - J^2 + 1$. Ее устройство удобно исследовать, обратившись к показанной на рис.77 проекции поверхности бифуркации Неймарка-Сакера на плоскость (J, S) .

В соответствии с этим рисунком, в пространстве инвариантов матрицы возмущений бифуркации Неймарка-Сакера отвечает поверхность, ограниченная линиями *fold-NS*, *flip-NS*, резонансов R_1 и R_2 . Из рис.76 и рис.77 можно видеть, что имеются также точки новых бифуркаций коразмерности три. Они обозначены буквами A и бывают четырех типов.

- A_1 : $\mu_1 = +1, \mu_2 = +1, \mu_3 = -1$, общая точка бифуркаций *flip-NS* и R_1 .
 A_2 : $\mu_1 = +1, \mu_2 = +1, \mu_3 = +1$, общая точка бифуркаций *fold-NS* и R_1 .
 A_3 : $\mu_1 = +1, \mu_2 = -1, \mu_3 = -1$, общая точка бифуркаций *fold-NS* и R_2 .
 A_4 : $\mu_1 = -1, \mu_2 = -1, \mu_3 = -1$, общая точка бифуркаций *flip-NS* и R_2 .

Координаты точек таких бифуркаций в пространстве параметров (J, S, H) даются соотношениями

$$A_1 (-1, 1, -1); A_2 (1, 3, 3); A_3 (1, -1, -1); A_4 (-1, -3, 3).$$

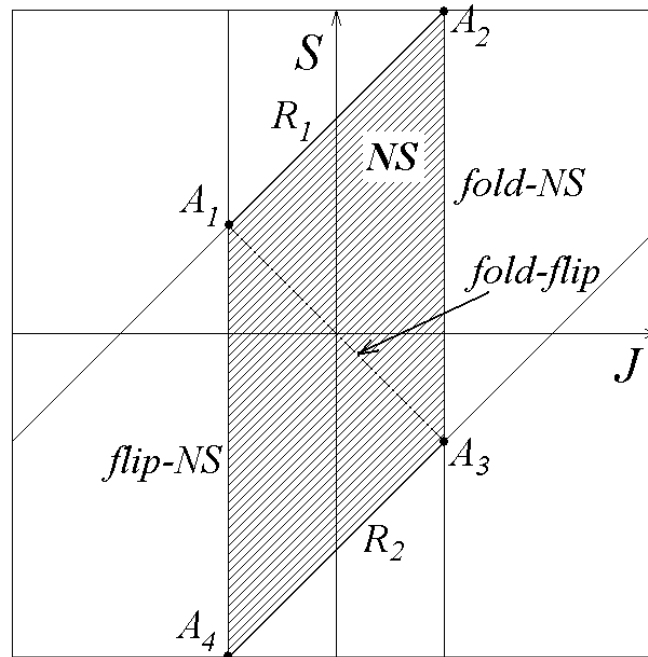


Рис.77. Проекция поверхности Неймарка-Сакера *NS* и ограничивающих ее линий *flip-NS*, *fold-NS*, R_1 и R_2 на плоскость (S, J) . Пунктир – проекция линии *fold-flip*.

В соответствии со свойствами матрицы возмущения, ее якобиан J отвечает за величину диссипации в системе. С ростом якобиана диссипация уменьшается, так что случай $J = 1$ отвечает *консервативной* системе. Поэтому с физической точки зрения важно построить также и сечения пространства параметров плоскостью $J = const$.

Случай $J = 0$. Это очень сильная диссипация, система редуцируется к двумерному отображению. Из уравнений для мультипликаторов (1) получаем, что $\mu^2 - S\mu + H = 0$. Таким образом, картине бифуркаций отвечает классический треугольник устойчивости на плоскости (S, H) . Интересно, что при переходе к двумерному отображению роль якобиана играет третий инвариант матрицы возмущений H .

Случай $J = 0.5$. Картине бифуркационных линий и точек отвечает искаженный по форме «треугольник устойчивости», показанный на рис.78. При

этом линии и точки бифуркаций качественно отвечают случаю двумерных отображений.

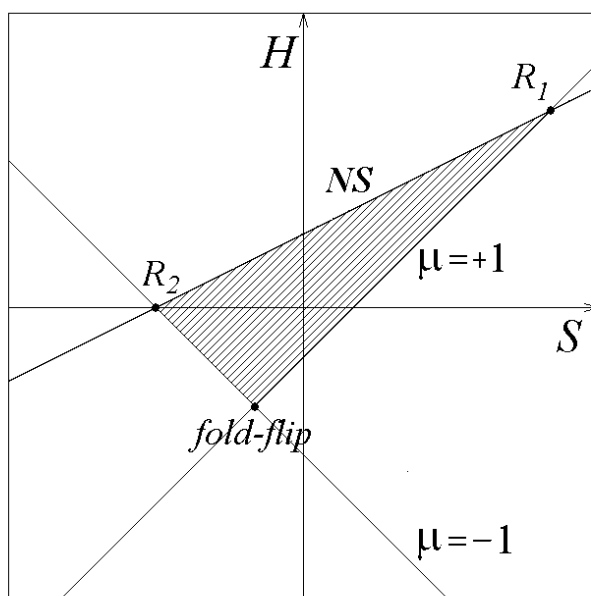


Рис.78. Бифуркационные линии и точки трехмерных отображений в сечении пространства инвариантов матрицы возмущений (J, S, H) плоскостью $J = 0.5$.

Случай $J = 1$. Это случай нулевой диссипации, отвечающий переходу к консервативному пределу. При этом линия Неймарка-Сакера и линия $\mu = +1$ в соответствии с (3) и (6) даются одним и тем же соотношением $H = S$. Таким образом, эти линии сливаются, и область устойчивости неподвижной точки исчезает. Это интересная особенность трехмерных отображений. В двумерных отображениях это не так: при приближении якобиана к единице, область устойчивости не стремится к нулю, а заключена в интервале $-1 < S < 1$.

Сечение $H = const$. Для полноты картины построим сечение пространства параметров плоскостью $H = 0$. В этом случае бифуркация Неймарка-Сакера (6) дается отрезками линии $S = \frac{J^2 - 1}{J}$. Бифуркации $\mu = +1$ отвечает условие $S = 1 - J$, а бифуркации $\mu = -1$ – условие $S = -1 - J$. Суммарная картина показана на рис.79. Можно видеть, что одна ветвь линии бифуркации Неймарка-Сакера ограничена точкой резонанса 1:1 R_1 ($J = -1/2, S = 3/2$) и точкой *flip-NS* ($J = -1, S = 0$). Вторая ветвь ограничена точкой резонанса 1:2 R_2 ($J = 1/2, S = -3/2$) и точкой *fold-NS* ($J = 1, S = 0$).

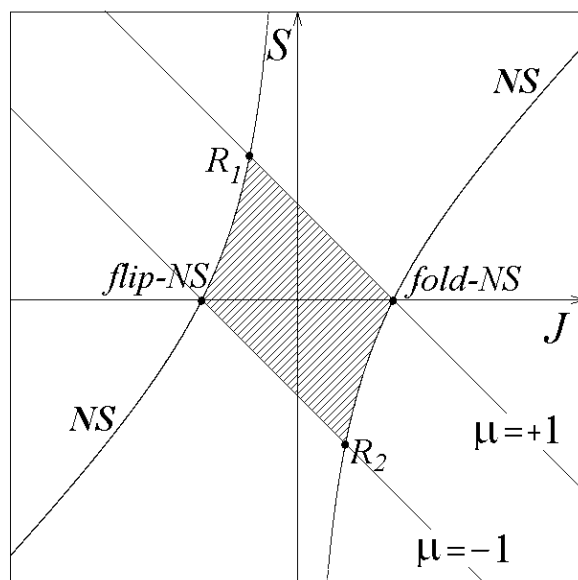


Рис.79. Бифуркационные линии и точки трехмерных отображений в сечении пространства инвариантов матрицы возмущений (J, S, H) плоскостью $H = 0$.

118. Найдите бифуркации неподвижных точек трехмерного отображения Эно:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= a + by_n + cz_n - x_n^2, \\y_{n+1} &= x_n, \\z_{n+1} &= y_n.\end{aligned}$$

Решение 118. Отображение имеет две неподвижные точки

$$x_0 = y_0 = z_0 = \frac{b + c - 1 \pm \sqrt{(b + c - 1)^2 + 4a}}{2}.$$

Им отвечают разные знаки. Нетрудно показать, что знак минус отвечает всегда неустойчивой точке. Поэтому в дальнейшем оставляем только знак «+».

Матрица возмущений трехмерного отображения Эно выглядит следующим образом:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} -2x_0 & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответственно, получаем уравнение для поиска мультипликаторов:

$$\det \begin{pmatrix} -2x_0 - \mu & b & c \\ 1 & -\mu & 0 \\ 0 & 1 & -\mu \end{pmatrix} = 0.$$

Откуда следует характеристическое уравнение

$$\mu^3 + 2x_0\mu^2 - b\mu - c = 0.$$

С помощью (1) и с учетом выражения для неподвижной точки, находим связь инвариантов матрицы возмущений с параметрами отображения:

$$S = 1 - b - c - \sqrt{(1 - b - c)^2 + 4a}, \quad H = -b, \quad J = c.$$

Теперь из (3), (4), (5) получаем условия бифуркаций коразмерности один:

- бифуркация Неймарка-Сакера: $4a = \frac{1+b}{c} \left[\frac{1+b}{c} + 1 - 2(b+c) \right]$,
- бифуркация $\mu = +1$: $4a = -(b+c-1)^2$,
- бифуркация $\mu = -1$: $4a = 4(1-b)^2 - (b+c-1)^2$, $b < 1$.

Для бифуркаций коразмерности два из (10), (11) имеем:

- резонанс 1:1: $4a = -(2+c)^2$, $b = -2c - 1$,
- резонанс 1:2: $4a = (6-7c)(2-c)$, $b = 2c - 1$,
- fold-flip: $4a = -c^2$, $b = 1$,
- fold-NS: $4a = -b^2$, $c = 1$,
- flip-NS: $4a = b(3b-4)$, $c = -1$, $b < 1$.

Бифуркации инвариантных кривых (торов)

119. Используя систему Ресслера

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + py, \\ \dot{z} &= q + (x-r)z, \end{aligned}$$

получите трехмерное отображение, заменив соответствующие производные конечными разностями. Покажите, что в полученном отображении возможна бифуркация удвоения инвариантной кривой (тора).

Решение 119. Выполним в уравнениях замену

$$\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{x_{n+1} - x_n}{h}, \quad \frac{dy}{dt} \rightarrow \frac{y_{n+1} - y_n}{h}, \quad \frac{dz}{dt} \rightarrow \frac{z_{n+1} - z_n}{h},$$

где h – параметр дискретизации. Получаем трехмерное отображение, которое логично назвать *дискретным осциллятором Ресслера*³⁴:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - h(y_n + z_n), \\ y_{n+1} &= y_n + h(x_n + py_n), \\ z_{n+1} &= z_n + hq + h(x_n - r)z_n. \end{aligned}$$

³⁴ А.Б. Адилова, А.П. Кузнецов, А.В. Савин. Изв.вузов - Прикладная нелинейная динамика, 2013, №5, с.108.

Обсудим его свойства. На рис.80 приведены примеры портретов аттракторов дискретного осциллятора Ресслера в трехмерном пространстве (x, y, z) для значения параметра дискретизации $h = 0.1$. Из рис.80 можно видеть, что на смену предельному циклу потоковой системы-прототипа в трехмерном отображении приходит инвариантная кривая. С ростом параметра a эта кривая претерпевает новую бифуркацию, которую называют *бифуркацией удвоения инвариантной кривой*³⁵. Ее иллюстрирует переход от рис.80а к рис.80б. Это новый тип бифуркаций, который возможен только в трехмерных отображениях (или отображениях более высокой размерности). Соответственно, в потоках, для которых отображение выступает как сечение Пуанкаре, размерность фазового пространства должна быть не менее четырех. При дальнейшем увеличении управляющего параметра происходит эффект *потери гладкости* удвоенной инвариантной кривой, что иллюстрируют рис.80в,г.

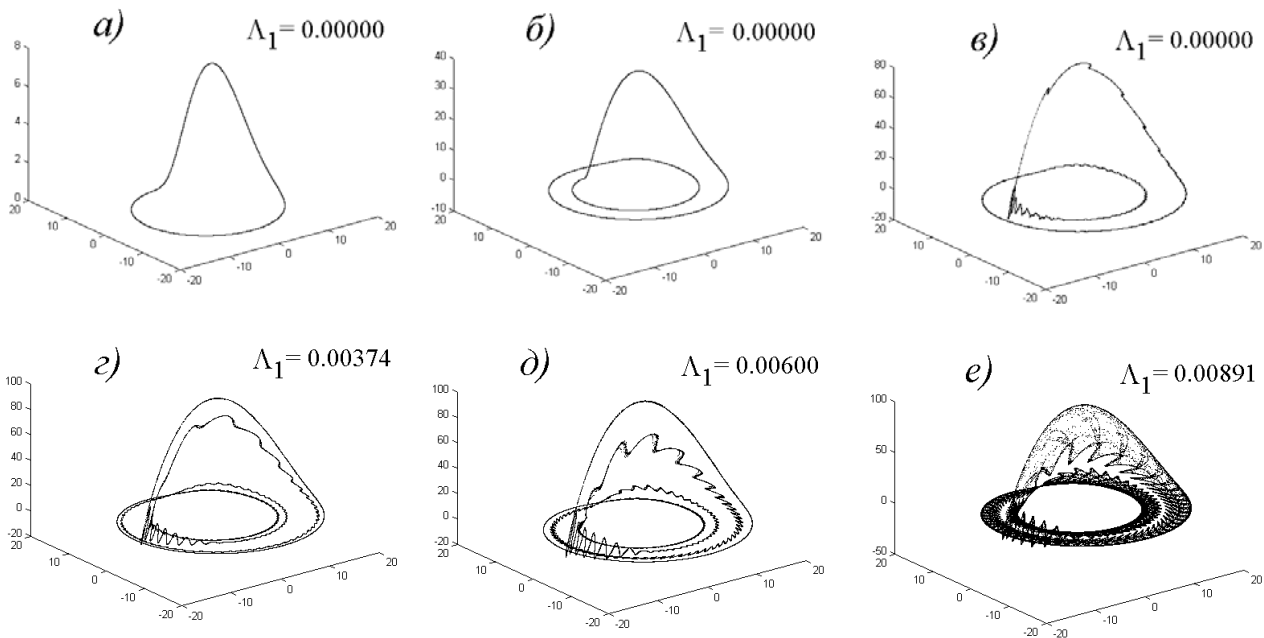


Рис.80. Аттракторы дискретного осциллятора Ресслера в трехмерном пространстве (x, y, z) ; $h = 0.1$, $q=0.2$, $r = 9$. Указано значение старшего показателя Ляпунова. Значения оставшегося параметра p : а) -0.02 , б) 0.04 , в) 0.0946 , г) 0.0976 , д) 0.1017 , е) 0.1042 .

Для более детальной характеристики наблюдаемых режимов на всех фрагментах рис.80 приведены численные значения старшего ляпуновского показателя. Для рис.80а-в он равен нулю, так что наблюдающиеся режимы отвечают квазипериодическим колебаниям. При переходе к рис.80г возникает слабый хаос с положительным старшим ляпуновским показателем.

³⁵ Если дискретное отображение выступает в роли сечения Пуанкаре некоторой потоковой системы, то удвоение инвариантной кривой отвечает *удвоению тора* в такой системе.

Построим график зависимости двух старших показателей Ляпунова от параметра a . Такой график представлен на рис.81, причем буквами указаны значения, отвечающие соответствующим фазовым портретам на рис.80. Можно видеть, что случаям а) и б) отвечает нулевой старший показатель. В свою очередь, поведение второго показателя дает критерий поиска точки удвоения инвариантной кривой. А именно, второй ляпуновский показатель в этой точке DT обращается в ноль, оставаясь при других значениях параметра отрицательным.

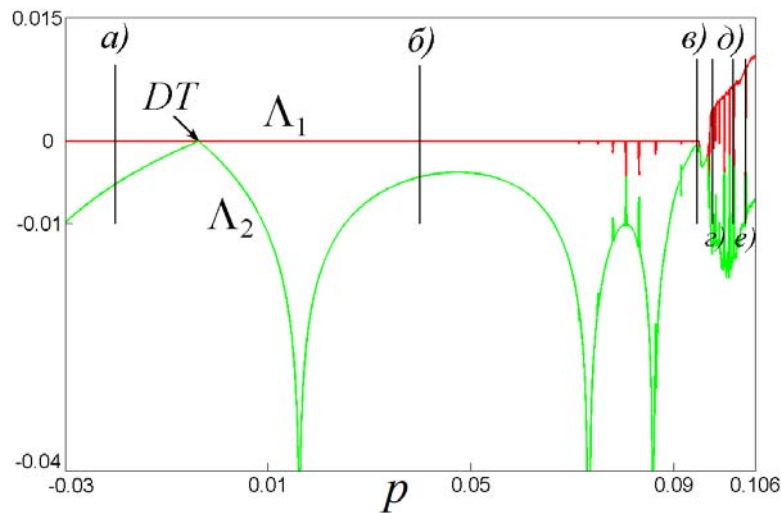


Рис.81. График зависимости двух старших показателей Ляпунова Λ_1 и Λ_2 для дискретного осциллятора Ресслера от параметра p ; $\varepsilon = 0.1$, $q=0.2$, $r = 9$. Стрелками и буквами отмечены значения, отвечающие рис.79, DT – точка удвоения инвариантной кривой.

120. Получите дискретное отображение, соответствующее генератору квазипериодических колебаний в форме

$$\ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\dot{z} = b(\varepsilon - z) - ky^2.$$

Постройте карту ляпуновских показателей на плоскости (β, λ) . Покажите, что инвариантный тор в системе-прототипе превращается в трехчастотный тор в полученном отображении. С помощью графиков ляпуновских показателей обсудите тип квазипериодических бифуркаций в системе.

Решение 120. Перепишем уравнение в стандартной для динамических систем форме третьего порядка. Заменяя производные конечными разностями, получим трехмерное дискретное отображение (*тор-отображение*)

$$x_{n+1} = x_n + hy_{n+1},$$

$$y_{n+1} = y_n + h[(\lambda + z_n + x_n^2 - \beta x_n^4)y_n - \omega_0^2 x_n],$$

$$z_{n+1} = z_n + h[b(\varepsilon - z_n) - ky_n^2].$$

Для первого уравнения, отвечающего скорости изменения переменной x , использована дискретизация по полуявной схеме Эйлера. Карта ляпуновских показателей показана на рис.82. На ней разными цветами показаны: области периодических режимов P (все три показателя отрицательные), область двухчастотных торов T_2 (один показатель нулевой), трехчастотных торов T_3 (два показателя нулевые). Таким образом, для трехмерных отображений (и, соответственно, четырехмерных потоков) возможны инвариантные торы разной размерности.

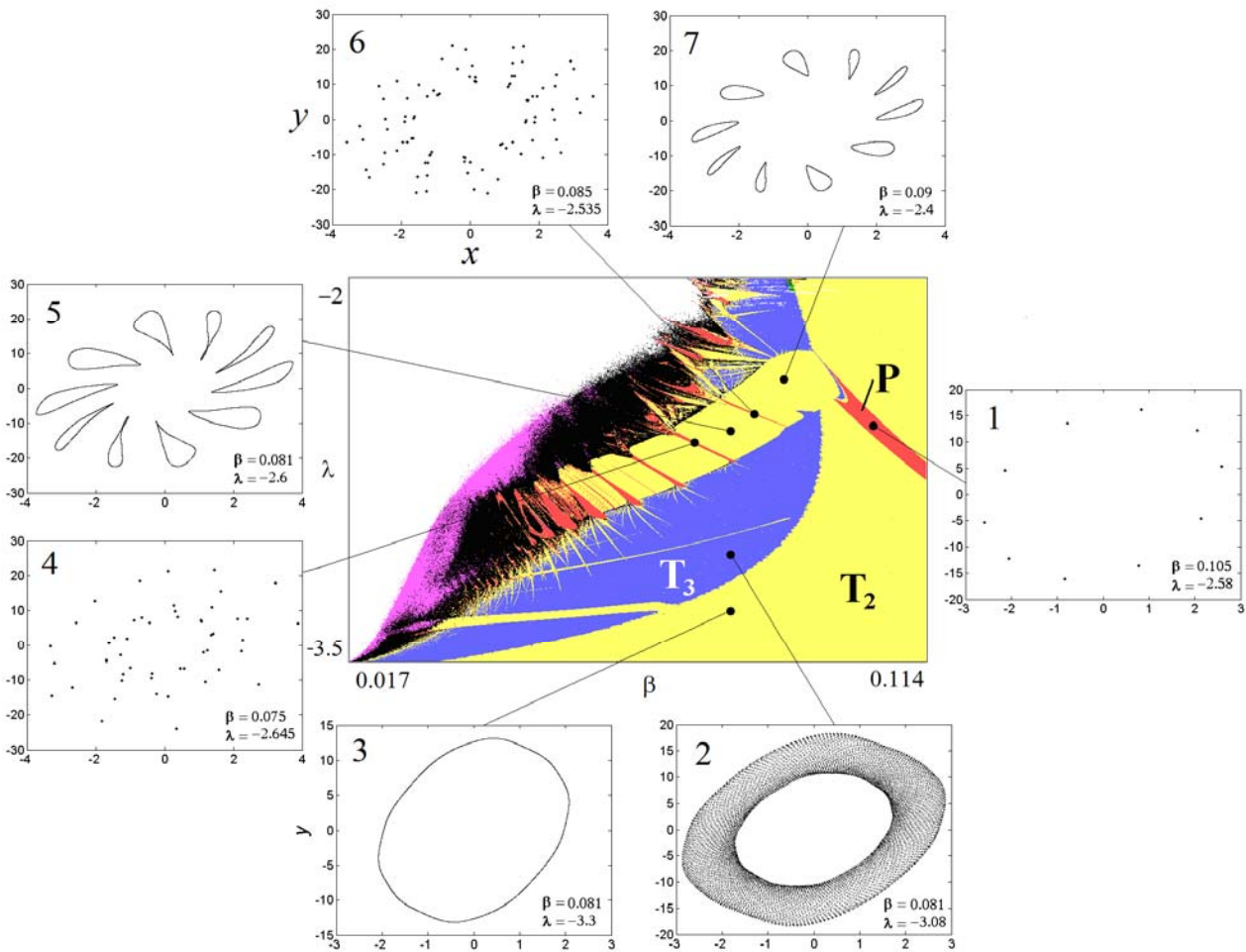


Рис.82. Карта ляпуновских показателей тор-отображения и характерные фазовые портреты.

По периметру рисунка показаны фазовые портреты в характерных точках. Внутри области P в точке 1 наблюдается резонансный периодический режим с периодом 10. При выходе из этой области в область T_2 в точку 3 возникает простейшая инвариантная кривая. Если немного увеличить управляющий параметр λ , то инвариантная кривая «размывается» и возникает трехчастотный тор в точке 2. Если же выйти из области P сразу в двухчастотную область в форме характерной полосы, то возникает резонансный двухчастотный режим в виде десяти изолированных инвариантных кривых, точка 7. Внутри этой полосы, в

свою очередь возникают резонансные режимы с очень высокими периодами, точки 4 и 6.

Графики ляпуновских показателей вдоль линии $\beta=0.0465$ показаны на рис.83. Они позволяют идентифицировать *квазипериодические бифуркации* – бифуркации инвариантных кривых (торов). Обсудим их подробнее.

С ростом параметра λ в точке QH происходит *квазипериодическая бифуркация Хопфа* мягкого рождения трехчастотного тора³⁶. В этом случае имеет место характерное поведение ляпуновских показателей. Первый показатель все время остается нулевым: $\Lambda_1 = 0$, что до порога бифуркации отвечает двухчастотному тору. До порога бифуркации два других показателя совпадают: $\Lambda_2 = \Lambda_3$ (аналог условия комплексно-сопряженных мультипликаторов). В бифуркационной точке показатели Λ_2, Λ_3 обращаются в ноль. При дальнейшем увеличении λ показатель Λ_2 остается нулевым, а Λ_3 уходит в отрицательную область.

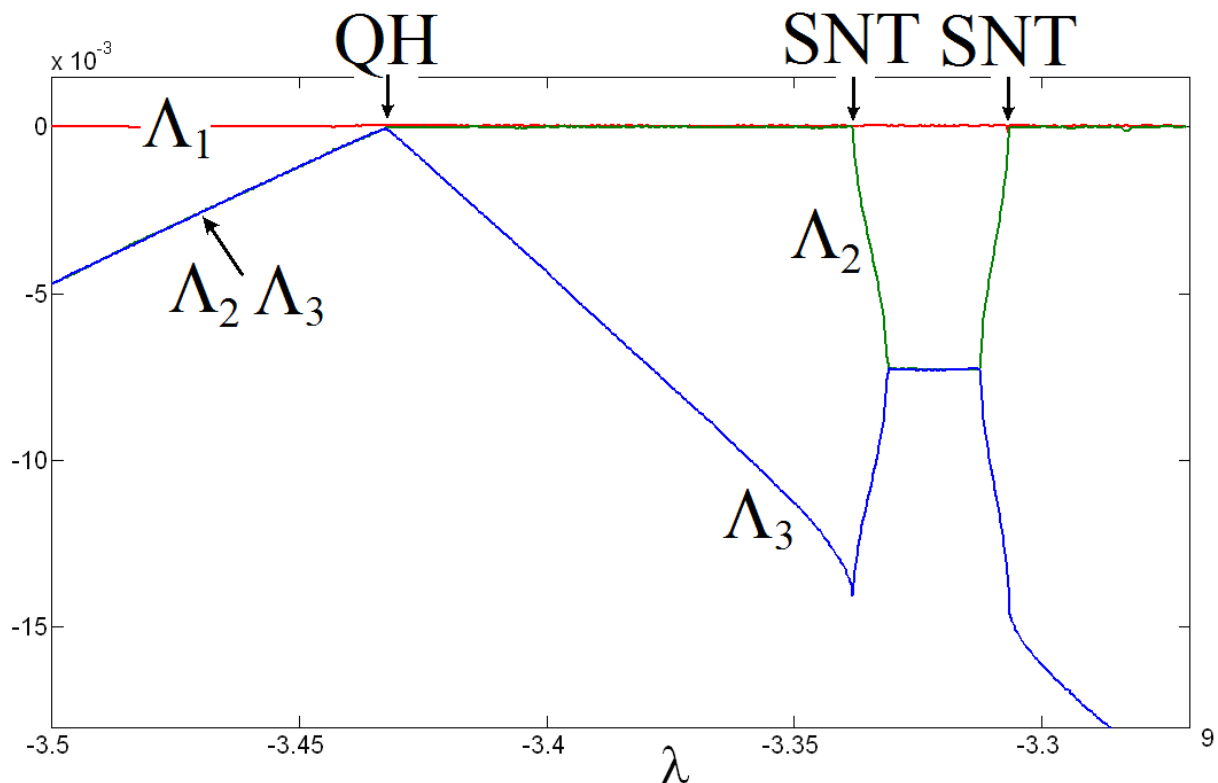


Рис.83. Графики ляпуновских показателей для тор-отображения при $\beta=0.0465$.

В точках SNT наблюдается бифуркация другого типа – *седло-узловая бифуркация торов*. На графике можно видеть окно резонансных двухчастотных

³⁶ Vitolo R., Broer H., Simó C. // Regular and Chaotic Dynamics, 2011, № 1–2, p. 154.

торов, ограниченное двумя такими бифуркациями. При выходе через правую границу показатель Λ_2 увеличивается до нуля, а потом остается нулевым. Третий же показатель Λ_3 все время отрицательный. В ходе этой бифуркации устойчивый двухчастотный тор сталкивается с седловым тором и исчезает, а из общего многообразия возникает аттрактор в виде трехчастотного тора. Левая граница окна образована такой же бифуркацией, но проходимой в обратном порядке. Интересно, что в центре окна $\Lambda_2 = \Lambda_3$.

121. Рассмотрите три связанных логистических отображения в виде кольца из трех элементов, когда связь содержит как взаимную, так и одностороннюю компоненты:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 + \varepsilon(2x_n - y_n - z_n) - \delta(x_n - y_n), \\y_{n+1} &= 1 - \lambda y_n^2 + \varepsilon(2y_n - x_n - z_n) - \delta(y_n - z_n), \\z_{n+1} &= 1 - \lambda z_n^2 + \varepsilon(2z_n - x_n - y_n) - \delta(z_n - x_n).\end{aligned}$$

Здесь ε – регулируемый параметр двусторонней связи, δ – постоянная компонента односторонней связи. Постройте карты ляпуновских показателей системы на плоскости (ε, λ) , демонстрирующие возможность трехчастотных торов в системе. Постройте фазовые портреты резонансных двухчастотных торов.

Решение 121. Соответствующие карты представлены на рис.84 для трех значений параметра односторонней связи. Можно видеть характерную систему языков резонансных двухчастотных торов, погруженных в область трехчастотных режимов. При этом увеличение параметра удвоений λ приводит к расширению языков и к возможности хаоса.

На рис.84б показан случай $\delta = 0.2$. Теперь в левой части рисунка визуализируется *характерная резонансная паутина Арнольда*: система тонких двухчастотных полос, погруженных в трехчастотную область. На пересечении этих полос наблюдаются периодические режимы – точные резонансы. При увеличении параметра до значения $\delta = 0.3$ картина также модифицируется, рис.84в.

Отметим, что серия рисунков 84 в определенной мере иллюстрирует важное свойство квазипериодической бифуркации Хопфа рождения трехчастотного тора: характерная картина режимов зависит не от двух параметров, как для бифуркации Неймарка-Сакера, а от трех.

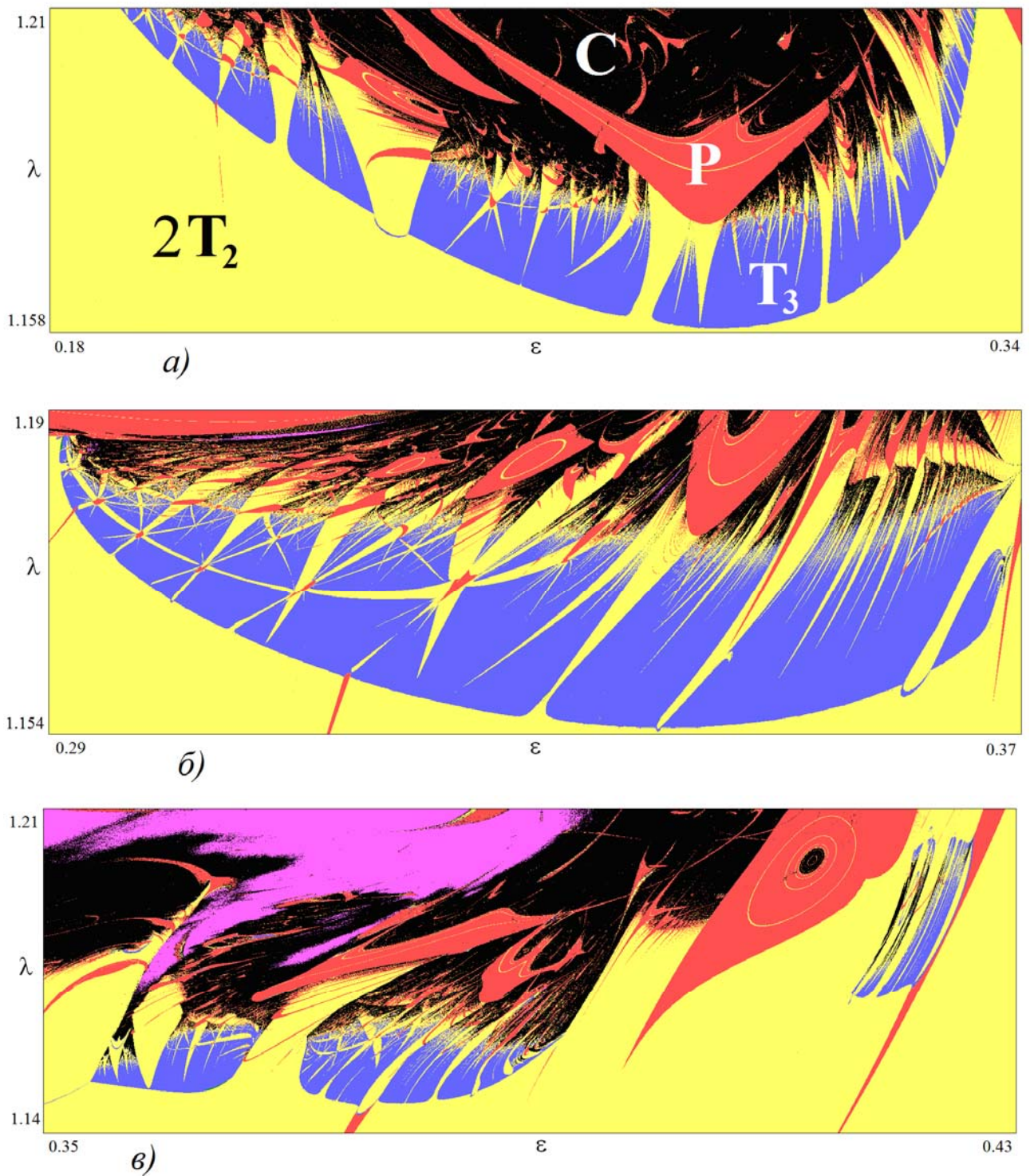


Рис. 84. Карты ляпуновских показателей трех связанных логистических отображений, а) $\delta = 0.1$, б) $\delta = 0.2$, в) $\delta = 0.3$.

На рис.85 приведены фазовые портреты торов для двух языков двухчастотных режимов рис.84а. Можно видеть, что это сложные инвариантные кривые разной формы, возникшие на базе двухкомпонентной инвариантной кривой. При этом рис.85а состоит из множества изолированных замкнутых кривых, лежащих на поверхности тора. Рис.85б отвечает двум замкнутым линиям сложной формы, также лежащим на поверхности тора.

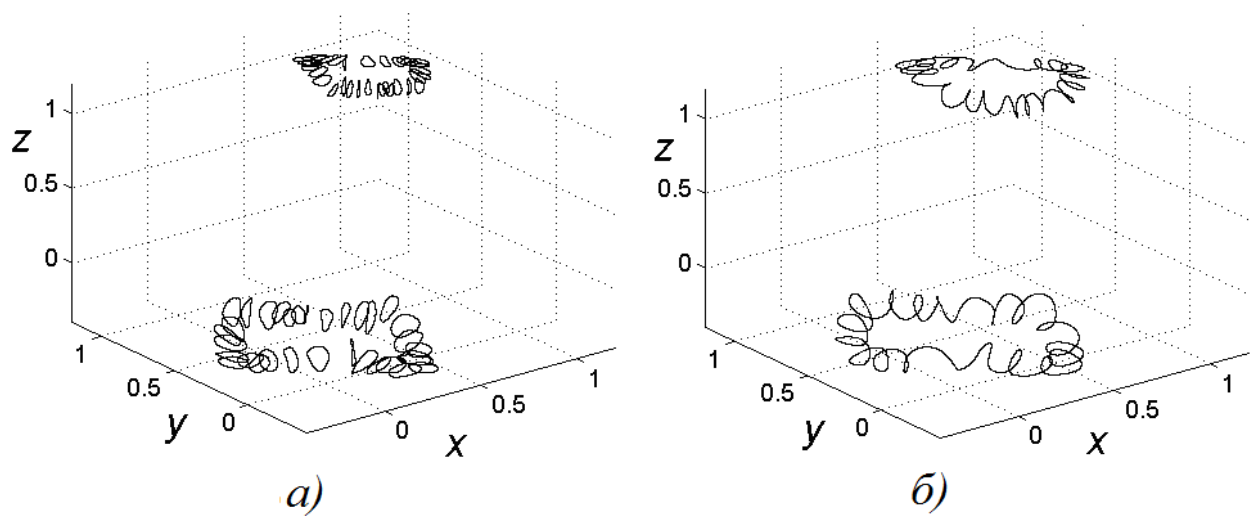


Рис.85. Фазовые портреты резонансных двухчастотных торов трех связанных логистических отображений; $\delta = 0.1$, а) $\varepsilon = 0.209$, $\lambda = 1.2$, б) $\varepsilon = 0.279$, $\lambda = 1.165$.

Задачи для компьютерного практикума



1. Эволюция облака изображающих точек в фазовом пространстве для потоковых систем. Задайте облако изображающих точек в фазовом пространстве в виде прямоугольной «решетки» из набора точек. Напишите программу, позволяющую наблюдать за эволюцией этого облака во времени для представленных ниже потоковых систем. Проследите за эволюцией облака. Ответьте на вопросы: консервативна или диссипативна система? Есть ли в ней аттракторы? Какого типа эти аттракторы? Проведите компьютерное моделирование для различных значений параметров. Изменяется ли при этом характер эволюции облака? Что происходит с аттракторами? Попробуйте изменить форму облака и его начальное положение.

Динамические системы для исследования.

- Нелинейный осциллятор вблизи катастрофы сборки

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + ax + b + x^3 = 0.$$

- Уравнение Ван дер Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

- Уравнение Рэлея

$$\ddot{x} - (\lambda - \dot{x}^2)\dot{x} + x = 0.$$

- Уравнение автогенератора с жестким возбуждением

$$\ddot{x} - (\lambda + kx^2 - x^4)\dot{x} + x = 0.$$

- Брюсселятор

$$\dot{x} = a - (b+1)x + x^2y,$$

$$\dot{y} = bx - x^2y.$$

- Система Ресслера

$$\dot{x} = -y - z,$$

$$\dot{y} = x + py,$$

$$\dot{z} = q + (x - r)z.$$

2. Эволюция облака изображающих точек в фазовом пространстве для отображений. Проведите исследование, аналогичное описанному в предыдущей задаче, для представленных ниже дискретных отображений.

Динамические системы для исследования.

- Отображение Эно

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 - by_n,$$

$$y_{n+1} = x_n.$$

- Шарик на вибрирующем столе

$$v_{n+1} = (1 - \varepsilon)v_n + K \sin \varphi_n,$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + v_{n+1} \pmod{2\pi}.$$

- Система Икеды

$$z_{n+1} = A + Bz_n \exp(i|z_n|^2).$$

- Отображение Теннисона, Либермана и Лихтенберга, описывающее отражение света от гофрированного зеркала

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - a \sin kx_n,$$

$$x_{n+1} = x_n + htg\varphi_{n+1}.$$

Если система может быть консервативной, особо рассмотрите соответствующие значения параметров.

3. Однопараметрический анализ потоковых систем. Бифуркация Андронова–Хопфа. Создайте программу, строящую портреты для представленных ниже динамических систем. Пронаблюдайте бифуркацию Андронова–Хопфа рождения предельного цикла, его эволюцию при дальнейшем увеличении параметра. Определите порог бифуркации Андронова–Хопфа из линейного анализа и сравните с результатами компьютерного моделирования.

Динамические системы для исследования.

- Брюсселятор

$$\dot{x} = a - (b+1)x + x^2y,$$

$$\dot{y} = bx - x^2y.$$

- Система, описывающая колебания в гликолизе

$$\dot{x} = 1 - xy^\gamma,$$

$$\dot{y} = \alpha(xy^\gamma - y).$$

- Уравнения колебаний самолета

$$\dot{\varphi} = \rho - \cos \varphi,$$

$$\dot{\rho} = 2\rho(\lambda - \mu\rho - \sin \varphi).$$

- Модель «хищник–жертва» вида

$$\dot{x} = (a + bx - x^2)x - xy,$$

$$\dot{y} = xy - my,$$

- Система Рёсслера

$$\dot{x} = -y - z,$$

$$\dot{y} = x + py,$$

$$\dot{z} = q + (x - r)z,$$

при $q=2$, $r=4$ и различных p . Для системы Рёсслера постройте как проекции аттракторов на какую-либо координатную плоскость, так и аттракторы в трехмерном пространстве.

- Генератор Кислова–Дмитриева

$$T\dot{x} + x = F(z),$$

$$\dot{y} = x - z,$$

$$\dot{z} = y - z/Q,$$

где $F(z) = Mz \exp(-z^2)$ для $Q=10$ и $T=1$.

4. Двухпараметрическое исследование двумерных потоковых систем.

Постройте плоскость параметров системы, содержащую аналитически определенные линии и точки бифуркаций – свои для каждой динамической системы. Постройте портреты аттракторов (или фазовые портреты) в выбранных вами точках на плоскости параметров. Проведите компьютерные эксперименты, иллюстрирующие динамику системы вблизи линий и точек бифуркаций, а также внутри характерных областей на плоскости параметров. Не демонстрирует ли ваша система каких-либо иных бифуркаций, не представленных на плоскости параметров?

Динамические системы для исследования.

- Модель «хищник–жертва»

$$\dot{x} = (a + bx - x^2)x - xy,$$

$$\dot{y} = xy - my,$$

- Уравнение типа Ван дер Поля с нелинейностью, характерной для осциллятора с катастрофой складки

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + a + (x + 1)^2 = 0.$$

5. Двухпараметрическое исследование одномерных отображений.

Постройте карту динамических режимов одного из предложенных отображений. Линии каких бифуркаций коразмерности один можно обнаружить на вашей карте? Какие точки бифуркаций коразмерности два? Укажите ситуации типа “*crossroad area*” и “*spring area*”. Создайте дополнительную программу, которая строит итерационные диаграммы в задаваемых вами точках карты. С помощью этой программы проведите следующее исследование:

а) выберите маршрут, пересекающий несколько линий удвоения, и наблюдайте каскад удвоений периода на итерационной диаграмме,

в) получите циклы с небольшими периодами, например 3 или 5, в островках устойчивости в области хаоса,

в) выберите точку вблизи линии касательной бифуркации (до ее порога) и пронаблюдайте соответствующую эволюцию изображающей точки,

г) пронаблюдайте хаотические режимы,

д) исследуйте эволюцию аттракторов в окрестности точки сборки,

е) исследуйте эволюцию аттракторов в окрестности flip-бифуркации коразмерности два.

Просмотрите увеличенные фрагменты карты, внутри которых можно наблюдать интересную динамику.

Динамические системы для исследования.

- Кубическое отображение вида

$$x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3.$$

- Кубическое отображение вида

$$x_{n+1} = a + bx_n - x_n^3.$$

- «Квартичное» отображение

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - bx_n^4.$$

- Любое другое двух- (и более) параметрическое отображение.

6. Двухпараметрическое исследование двумерных отображений. Постройте карты динамических режимов двумерного двухпараметрического отображения. Идентифицируйте бифуркационные линии коразмерности один и точки коразмерности два, а также характерные композиции бифуркаций на карте. «Просмотрите» увеличенные фрагменты карты, внутри которых можно наблюдать интересную динамику. Создайте программу, которая демонстрирует аттракторы отображения. С ее помощью пронаблюдайте эволюцию аттракторов при вариации параметров, в частности, каскады удвоений периода, а также хаотические аттракторы и их эволюцию. Особое внимание уделите фейгенбаумовским критическим аттракторам. Просмотрите увеличенные фрагменты критических и хаотических аттракторов. С помощью программы, демонстрирующей эволюцию изображающей точки на фазовой плоскости, пронаблюдайте последовательные «прыжки» этой точки, приближающейся к неподвижной точке, а также последовательные «прыжки» изображающей точки, приближающейся к циклу.

Динамические системы для исследования.

- Отображение Эно

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 - by_n,$$

$$y_{n+1} = x_n.$$

- Шарик на вибрирующем столе

$$v_{n+1} = (1 - \varepsilon)v_n + K \sin \varphi_n,$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + v_{n+1} \pmod{2\pi}.$$

- Система Икеды

$$z_{n+1} = A + Bz_n \exp(i|z_n|^2).$$

- Отображения «катастроф», отвечающие гиперболической и эллиптической омбиликам

$$x_{n+1} = x_n + U'_x(x, y),$$

$$y_{n+1} = y_n + U'_y(x, y).$$

Здесь потенциальная функция³⁷

$$U(x, y) = x^2 y + y^3 / 3 + a(y^2 - x^2) + bx + cy$$

$$U(x, y) = x^2 y - y^3 / 3 + a(y^2 + x^2) + bx + cy.$$

Исследуйте характерные сечения пространства параметров при вариации третьего параметра.

7. Квазипериодические движения и бифуркация Неймарка-Сакера. Получите карты динамических режимов для представленных ниже систем. Идентифицируйте на картах линию бифуркации Неймарка-Сакера и языки Арнольда. Постройте портреты аттракторов в окрестности какого-либо языка. Варьируя параметры, пронаблюдайте инвариантную кривую и резонансный цикл на этой кривой. Пронаблюдайте «прыжки» изображающей точки, приближающейся к инвариантной кривой. Идентифицируйте точки бифуркации коразмерности два, характерные для двумерных отображений, если они имеются в вашей системе.

Динамические системы для исследования.

- Универсальное двумерное отображение

$$x_{n+1} = Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2),$$

$$y_{n+1} = Jx_n - (x_n^2 + y_n^2)/5.$$

- Два идентичных логистических отображения с линейной связью

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon(y_n - x_n),$$

$$y_{n+1} = \lambda - y_n^2 + \varepsilon(x_n - y_n).$$

³⁷ Это искусственно сконструированные отображения, которые получаются из уравнения градиентной системы при замене соответствующих производных на разности типа $x_{n+1} - x_n$.

- Неидентичные связанные логистические отображения с квадратичной связью

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - C y_n^2, \\y_{n+1} &= 1 - A y_n^2 - B x_n^2,\end{aligned}$$

для фиксированных B и C .

8. Неустойчивое и устойчивое многообразия. Создайте программу, которая строит устойчивое и неустойчивое многообразия неподвижной точки. Алгоритм может выглядеть следующим образом. В очень малой (за пределами разрешения экрана) окрестности неподвижной точки выбирается случайным образом стартовая точка, которая подвергается последовательным итерациям. Затем процедура повторяется для другой стартовой точки и т.д. В результате на экране компьютера прорисовывается неустойчивое многообразие. Чтобы построить устойчивое многообразие, необходимо реализовать ту же процедуру, итерируя отображение в обратном времени. Для реализации этого метода необходимо очень точно знать координаты неподвижной точки. Если она не ищется аналитически, то предварительно необходимо организовать соответствующий численный поиск с помощью метода Ньютона. Пронаблюдайте трансформацию многообразий при вариации параметров. Зафиксируйте момент образования гомоклинической структуры и наблюдайте ее эволюцию. Исследуйте две системы: дискретное отображение и поток, причем в последнем случае используйте результаты решения предыдущей задачи.

Дискретные отображения:

- Отображение Эно

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - b y_n, \\y_{n+1} &= x_n.\end{aligned}$$

- Кубическое отображение типа Эно – отображение Холмса

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= a - b x_n + x_n^3 - c y_n, \\y_{n+1} &= x_n,\end{aligned}$$

- Отображение кольца

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n + \Omega - k \sin \theta_n + b r_n, \\r_{n+1} &= b r_n - k \sin \theta_n.\end{aligned}$$

9. Бифуркации трехмерных потоков. Напишите программу, которая вычисляет корни кубического уравнения $\gamma^3 - S\gamma^2 + H\gamma - J = 0$, коэффициенты которого являются инвариантами матрицы возмущений. Затем определяется тип состояния равновесия по характеру положения корней в комплексной плоскости и

окрашивается плоскость параметров в разные цвета, в соответствии с классификацией равновесий. Постройте разные сечения пространства параметров

10. Бифуркации в Интернете. Используя Интернет, создайте обзор ресурсов, дающих возможности для численного исследования бифуркаций.

11. Численное исследование бифуркаций. Используя какую-либо программу для численного исследования бифуркаций, проведите бифуркационный анализ универсального двумерного отображения

$$x_{n+1} = Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2),$$

$$y_{n+1} = Jx_n - (x_n^2 + y_n^2)/5.$$

Обратите внимание на особенности внутреннего устройства языков Арнольда. Особенно тщательно изучите языки, отвечающие основным резонансам. Используйте предварительную информацию, полученную методом карт динамических режимов при решении соответствующей задачи.

Литература

1. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2006, 292 с.
2. *Кузнецов А.П., Савин А.В., Тюрюкина Л.В.* Введение в физику нелинейных отображений. Саратов: Научная книга, 2010, 134 с.
3. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980, 360 с.
4. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах: Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах. М.: ЛИБРОКОМ, 2009, 320 с.
5. *Постнов Д.Э.* Введение в динамику итерированных отображений. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2007, 160 с.
6. *Гукенхаймер Дж., Холмс П.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Ижевск: РХД, 2002, 560 с.
7. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006, 356 с.
8. *Meijer H.G.E.* Codimension 2 bifurcations of iterated maps // Doctoral thesis Utrecht University. Адрес в Интернете:
<http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2006-1204-200716/index.htm>.
9. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Москва-Ижевск: ИКИ, . 2003, 442 с.
10. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Л. Чуа.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. Москва-Ижевск: ИКИ, 2009, 548 с.
11. *Некоркин В.И.* Лекции по основам теории колебаний. Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2012, 311 с.

Учебно-научное издание

Кузнецов Александр Петрович

Динамические системы и бифуркации

Пособие издано в авторской редакции
Ответственный за выпуск А.П.Кузнецов

Подписано в печать 19.03.2015 г.

Формат 60x84 1/16. Бумага Снегурочка. Гарнитура Times New Roman.

Усл. печ. л. 9,6. Тираж 100 экз.

ООО Издательский центр «Наука»
410600, г. Саратов, ул. Пугачевская, д.117, кв. 50.