

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.10.1>

УДК: 538.935, 538.975, 539.216.2, 537.874

РАСЧЁТ ТОЛЩИНЫ ВИСМУТОВЫХ НАНОСЛОЁВ, СОГЛАСОВАННЫХ С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ИМПЕДАНСОМ ПОЛЯ ДВУХ ВСТРЕЧНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

И. И. Пятайкин

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
125009, г. Москва, ул. Моховая, д. 11, стр. 7

Статья поступила в редакцию 12 октября 2021 г.

Аннотация. На основе современных данных о поверхности Ферми висмута и процессах электронной и дырочной релаксации в нём проведена оценка длины свободного пробега l_0 в объёмном Bi при комнатной температуре. Обоснована ненулевая величина коэффициента зеркальности отражения носителей заряда от поверхности p в данном материале. В качестве значения этого параметра при комнатной температуре предложено использовать аналогичную величину, найденную при исследовании классического размерного эффекта в плёнках висмута в работе Хоффмана и Фрэнкла [21]. Используя полученные значения l_0 и p , вычислена толщина d_{pk} висмутового слоя, при которой его импеданс сравнивается с характеристическим импедансом поля двух электромагнитных волн, распространяющихся навстречу друг другу в вакууме. Установлено, что полученное значение d_{pk} почти в пять раз меньше величины, найденной ранее в работе Каплана [6]. Показано, что полученная Капланом довольно большая толщина d_{pk} в висмуте вызвана использованием сильно завышенного значения длины свободного пробега l_0 , заимствованного из работы Пиппарда и Чемберса [7], и заниженной величиной коэффициента p , принятой им при расчёте. Исходя из полученных в настоящей статье данных о величине параметра d_{pk} и влиянии

на него поверхностного электрического заряда, обсуждаются перспективы получения и практического использования висмутовых слоёв толщины d_{pk} в спектроскопических устройствах, предложенных Капланом и Зельдовичем [5].

Ключевые слова: висмут, длина свободного пробега при комнатной температуре, классический размерный эффект, теория Фукса-Зондгеймера, СВЧ коэффициент отражения, СВЧ коэффициент поглощения, согласование импедансов.

Abstract. This article determines the thickness d_{pk} of the bismuth layer at which its impedance becomes equal to the characteristic impedance of the field of two electromagnetic waves propagating towards each other in a vacuum. For the first time such a calculation was performed by Kaplan in his article [6]. The impetus for re-examining this problem was the 29-fold discrepancy between the value of the mean free path l_0 in the bulk bismuth at room temperature, obtained in the work of Pippard and Chambers [7] and used by Kaplan for his calculation, and the estimate of l_0 given in the paper by Cronin et al. [12]. To resolve this contradiction, in the second section of the present article, the mean free path l_0 in bismuth has been re-estimated, taking into account the strongly anisotropic energy spectrum of quasiparticles in this material from the very beginning. The set of values of the effective masses and Fermi energies of electrons ϵ_e and holes ϵ_h that had been measured in the work of Brandt et al. [15] at liquid helium temperatures was the basis for calculating l_0 . To determine the Fermi velocities at room temperature, the values of energies ϵ_e and ϵ_h were corrected in accordance with the change in the concentration of charge carriers with an increase in temperature from 4.2 K to 300 K. The characteristic electron and hole relaxation times were calculated on the basis of the values of mobilities of charge carriers, measured in the work of Michenaud and Issi [16], and their effective masses, taken from the referred above article by Brandt with coworkers. The values of the Fermi velocities and characteristic relaxation times obtained in this way made it possible to estimate the mean free paths along the main directions of the electron and hole ellipsoids in bismuth. It turned out that at room temperature the characteristic mean free path l_0 is about 1800 Å, which is 1.8 times greater than the estimate of l_0 given in the article by Cronin et

al., and 16 times less than the value of l_0 used by Kaplan for calculation of the thickness d_{pk} in his work above. It is clear that such a significant discrepancy is a sufficient basis for re-calculating d_{pk} using the new value of l_0 found in the present paper. In the third section of this article, it is discussed how justified the choice of a zero value for the specular coefficient p , made in Kaplan's work, is. Based on the analysis of the available literature on that issue, a nonzero value of this parameter was substantiated and arguments were given in favor of choosing the specular coefficient p equal to 0.56, in accordance with the results of the work by Hoffman and Frankl [21]. Calculating the d_{pk} thickness for a given specular coefficient value and the new mean free path l_0 which was obtained in the second section of this article yields d_{pk} equal to 177 Å, that is almost five times less than the value of d_{pk} found by Kaplan. It is clear that such a small value of the thickness of the bismuth layer will seriously complicate its separation from the supporting substrate. This makes the prospects for using such layers in the spectroscopic systems mentioned in the Introduction of the present paper rather vague. Unfortunately, this is not the only problem standing in the way of using the unique electrodynamic properties of bismuth layers of the d_{pk} thickness. As mentioned in the fourth section, an uncontrolled change in the specular coefficient p due to the appearance of a surface electric charge on the layer can also make it difficult to work with this object. Since the problem of producing free-standing bismuth layers of the d_{pk} thickness has not yet been solved, it is difficult to say how serious the problems associated with their uncontrolled electrification will be. As noted in the fourth section of the present paper, much of the significant discrepancy between Kaplan's estimates of the d_{pk} thickness in bismuth and those made in this work is due to the greatly overestimated value of the mean free path l_0 borrowed by Kaplan from the Pippard and Chambers article. Therefore, in the final section of the current paper, it is discussed the reasons why these authors obtained such a huge value of l_0 in bismuth at room temperature. It is suggested that the large value of l_0 obtained in their work is a consequence of the application of the Reuter and Sondheimer theory, which is valid in the case of a spherical Fermi surface, for the analysis of experimental data

on the anomalous skin effect in strongly anisotropic bismuth. The final section also discusses one controversial thesis from Kaplan's article concerning the magnitude of d_{pk} in nickel. It is shown that the value of this parameter given in his paper is caused by the use of an erroneous value of the mean free path in this metal.

Key words: bismuth, mean free path at room temperature, size effect, Fuchs-Sondheimer theory, microwave reflection coefficient, microwave absorption coefficient, impedance matching.

Введение.

Антиотражающие покрытия широко используются в технике СВЧ и субмиллиметрового диапазона. Особенно велико их значение при создании устройств молекулярной спектроскопии и спектроскопии излучений биологических объектов. Дело в том, что интенсивность терагерцового излучения источников, исследуемых в этих областях спектроскопии, зачастую столь мала, что даже для простого переноса излучения через элементы спектрометра к приёмнику требуется нанесение на эти элементы покрытия, обеспечивающего коэффициент пропускания близкий к единице. В последнее время был достигнут существенный прогресс в деле получения такого рода антиотражающих покрытий (см., например, работу [1]).

Тонкие металлические плёнки с толщиной d много меньшей толщины скин слоя δ – неотъемлемый элемент таких покрытий [2]. Их использование, например, позволяет согласовывать импеданс покрытия с волновым импедансом окружающей среды.

Детальный анализ отражательных свойств плёнок толщины $d \ll \delta$ был проведён А.Е. Капланом в середине 60-х годов прошлого века [3]. Он рассмотрел случай нормального падения СВЧ излучения на слой металла с удельной проводимостью σ_0 и обнаружил, что в данной задаче существует фундаментальный, не зависящий от частоты, характерный масштаб

$$d_{pk}^0 = c/(2\pi\sigma_0), \quad (1)^1$$

на котором заметным образом изменяются коэффициенты отражения, прохождения и поглощения излучения слоем. Результаты этого анализа справедливы вплоть до частот диапазона ближнего инфракрасного излучения и, таким образом, перекрывают СВЧ и субмиллиметровую область.

Используя уравнение (1), легко показать, что импеданс² Z_{pk} слоя толщины d_{pk}^0 в точности равен половине волнового импеданса свободного пространства Z_0 .³ Эта особенность позволяет создавать на основе данных слоёв устройства с необычными электродинамическими свойствами, которые по своим характеристикам близки к идеальным.

Чтобы лучше понять идею, лежащую в основе конструирования таких систем, следует принять во внимание, что электромагнитная волна, падающая на металлический слой толщины $d \ll \delta$ под прямым углом, на языке теории цепей может быть представлена параллельным соединением импеданса слоя и Z_0 .⁴ Именно по этой причине слой толщины d_{pk}^0 оказывается согласованным с характеристическим импедансом поля двух встречных электромагнитных волн, представляемым парой параллельно включенных импедансов Z_0 .⁵

Такое идеальное согласование импедансов приводит к тому, что слой толщины d_{pk}^0 , внесённый во встречные электромагнитные пучки, ведёт себя как

¹ Здесь используется гауссова система единиц, размерность удельной электрической проводимости в которой $[\sigma_0] = \text{с}^{-1}$.

² В соответствии с работой [4], импеданс металлического слоя толщины d совпадает с сопротивлением его квадратного участка $R_{\square} = \rho_0/d$. Здесь ρ_0 – объёмное удельное электрическое сопротивление металла. Поэтому $Z_{pk} = 1/(\sigma_0 d_{pk}^0)$.

³ $Z_0 = 4\pi/c$. Численное значение этой величины в системе СИ составляет $Z_0 \approx \frac{4\pi}{3 \cdot 10^{10}} \cdot 9 \cdot 10^{11} = 120\pi \approx 377 \text{ Ом}$.

⁴ См. уравнение (7) из статьи [4].

⁵ Подразумевается, что слой ориентирован перпендикулярно направлению распространения волн.

абсолютно чёрное тело, полностью поглощая падающее на него излучение [5].⁶ Размещая данный объект в стандартном кольцевом интерферометре, можно получить совершенно новый прибор со свойствами весьма ценными для спектроскопии. Обсуждению открывающихся при этом возможностей посвящена значительная часть статей [5] и [6].

Существует, однако, одно обстоятельство, серьёзно препятствующее практическому использованию полезных свойств слоёв толщины d_{pk}^0 . Дело в том, что в металлах величина d_{pk}^0 , рассчитанная по формуле (1), порядка одного ангстрема.

Разумеется, классический размерный эффект приводит к уменьшению проводимости слоя σ по сравнению с величиной объёмной проводимости σ_0 , а следовательно, и к некоторому увеличению толщины $d_{pk} = c/(2\pi\sigma)$. Расчёты показывают, что d_{pk} увеличивается примерно на порядок по сравнению с d_{pk}^0 и достигает значений $10 \div 15 \text{ \AA}$ (см. таблицу 1 в статье [6]). Однако получить свободные⁷ металлические слои даже такой увеличенной толщины пока не представляется возможным.

Выход из данного затруднения был предложен Капланом в работе [6]: использовать вместо металлов в качестве материала для слоёв полуметалл висмут. Выгоды от такого выбора очевидны. Концентрация носителей заряда в висмуте на три порядка меньше, чем в благородных металлах, а проводимость почти в 75 раз меньше, чем, например, в серебре. Уже только за счёт этого d_{pk}^0 в висмуте составляет 63 \AA .⁸ Помимо этого висмут характеризуется довольно значительной длиной свободного пробега l_0 при комнатной температуре. Со ссылкой на работу [7] Каплан приводит для неё значение 29430 \AA . Столь большая

⁶ Данный вывод справедлив для электромагнитных волн частот вплоть до диапазона ближнего инфракрасного излучения, пока сохраняют силу результаты анализа, проведённого в работе [3]. Слой предполагается ориентированным нормально оси пучков.

⁷ То есть без поддерживающей подложки.

⁸ См., например, таблицу 1 в статье [6].

величина l_0 приводит к очень сильному классическому размерному эффекту в плёнках висмута толщиной несколько сот ангстрем, что очень сильно уменьшает их проводимость и тем самым увеличивает d_{pk} ещё более чем на порядок по сравнению с d_{pk}^0 . Расчёты Каплана дают $d_{pk} = 828 \text{ \AA}$ [6].

Такая величина d_{pk} уже довольно значительна, чтобы оптимистически оценивать перспективы использования свободных V_i слоёв в практических устройствах. Действительно, сплошные висмутовые плёнки данной толщины могут быть без труда напылены на кристаллические подложки термическим или магнетронным распылением. Дальнейшее отделение полученных таким образом плёнок от поддерживающих подложек может быть осуществлено, например, по технологии, описанной в работе [8], с последующим растворением вспомогательного слоя фоторезиста. Можно, наконец, просто напылить висмут требуемой толщины на подложки хлоридов калия или натрия, а затем удалить подложку растворением в воде или спирте. Иными словами, предложенная Капланом стратегия получения слоёв толщины d_{pk} представляется весьма перспективной.

Совершенно ясно, что правильное определение величины d_{pk} критически важно для всей дальнейшей работы с висмутом. И тут следует сказать о некоторых сомнениях, которые вызывает, во-первых, величина параметра l_0 , использованная Капланом в работе [6], и, во-вторых, принятое им при расчётах d_{pk} предположение об абсолютной диффузности рассеяния носителей заряда на границах слоя.

Выше было показано, что лишь 8% величины d_{pk} обязано низкой проводимости висмута. Основной же вклад в d_{pk} обусловлен классическим размерным эффектом, величина которого в модели Фукса-Зондгеймера (ФЗ) [9, 10] определяется длиной свободного пробега в объёмном висмуте l_0 и коэффициентом зеркальности отражения носителей заряда от границ слоя p .

Хотя литература, посвященная исследованиям электронной структуры и транспортных свойств висмута при гелиевых температурах, весьма обширна,

выполненная в начале 50-х годов прошлого века работа [7] – едва ли не единственная, в которой измерялось значение l_0 при комнатной температуре.

Появление в начале 2000-х годов технологии получения свободных висмутовых нанопроводов вновь привлекло внимание исследователей к значению параметра l_0 . Этот интерес вполне понятен, поскольку транспорт в нанопроводах в значительной степени обусловлен классическим размерным эффектом (см., например, обзор [11] и цитированную в нём литературу). Анализ работ в этой области показывает, что в качестве основного источника информации о величине l_0 в висмуте при комнатной температуре современными авторами используется статья [12]. В ней приводится значение l_0 , которое в 29 (!) раз меньше величины, использованной Капланом при расчётах d_{pk} . Следует отметить, что работа [12] не содержит ни каких-либо рассуждений, подкрепляющих такую величину l_0 , ни литературных ссылок на публикации, в которых была получена приведённая в ней величина длины свободного пробега. Вероятно, это объясняется тем, что статья [12] посвящена не исследованию транспортных свойств висмута, а выяснению довольно частного, хотя и весьма практически важного, вопроса о приготовлении контактов к висмутовым нанопроводам.

В контексте сказанного ясно, что определение длины свободного пробега при комнатной температуре l_0 и величины коэффициента зеркальности p , которые необходимы для вычисления правильного значения d_{pk} в висмуте, является весьма актуальной задачей. Её решению и посвящена данная статья.

В следующем разделе будет проведена оценка l_0 , основанная на современной информации об электронной структуре висмута и процессах электронной и дырочной релаксации в нём. В третьем разделе на основе анализа имеющейся литературы выбирается значение коэффициента зеркальности p в плёнках висмута. В четвёртом разделе полученные значения l_0 и p используются для расчётов толщины d_{pk} , которая сопоставляется с аналогичной величиной, вычисленной Капланом в работе [6], после чего анализируются причины расхождения между этими толщинами. В этом разделе также обсуждается

влияние на d_{pk} электрического заряда висмутовых слоёв и перспективы их практического использования в спектроскопических устройствах в свете полученных данных о величине d_{pk} и её изменении при накоплении заряда. И наконец, в заключительном разделе резюмируется проведённая в настоящей статье работа, формулируются выводы, и обсуждается один спорный тезис из статьи [6], касающийся величины d_{pk} в никеле.

1. Оценка l_0 при комнатной температуре.

В начале данного раздела следует пояснить, откуда взялась величина 2,943 мкм, приведённая в таблице 1 работы [6], ведь в статье Пиппарда и Чемберса [7], на которую ссылается Каплан, присутствует цифра 3,4 мкм. Эта величина была получена ими на основании подгонки экспериментальных данных по аномальному скин-эффекту в висмуте теоретической зависимостью из работы Рёйтера и Зондгеймера [13], выведенной для изотропной модели ферми-поверхности в предположении зеркального отражения электронов границами образца. Поскольку работа [7] была выполнена в докомпьютерную эру, то качество подгонки контролировалось «на глаз». По-видимому, Каплан применил к экспериментальным точкам рисунка 1 статьи [7] современные методы подгонки, основанные на нелинейном алгоритме Левенберга-Маркара⁹, и получил более точное значение l_0 , которое и привел в таблице 1 своей статьи.

Следует отметить, что уже сами авторы работы [7] указывают, что влияние состояния поверхности образца и использование изотропной модели энергетического спектра квазичастиц может служить источником ошибок в определении l_0 , хотя и склоняются к мнению, что даже с учётом всех этих оговорок длина свободного пробега в висмуте при комнатной температуре составляет более 2 мкм.

Как сейчас хорошо известно, поверхность Ферми висмута ни в каком приближении не является сферической (см., например, рис. 1с в работе [14]).

⁹ Levenberg-Marquardt.

Ясно, что необходим другой подход к оценке величины l_0 , результаты которого не были бы в такой степени подвержены серьёзному влиянию состояния поверхности образца и который не был бы связан с нереалистическими предположениями о форме ферми-поверхности висмута, как это свойственно методу, применённому в работе [7].

В настоящей статье предлагается использовать в качестве такого подхода метод оценки, опирающийся на современные данные о значениях скоростей Ферми на анизотропной изоэнергетической поверхности V_i и временах, характеризующих процессы электронной и дырочной релаксации в нём.

Известно, что поверхность Ферми висмута состоит из одного дырочного эллипсоида вращения вытянутого вдоль тригональной оси C_3 и трёх электронных эллипсоидов, лежащих примерно в плоскости перпендикулярной C_3 , так что их большие полуоси образуют между собой углы в 120° [14]. Скорости Ферми электронов $v_{F,e}$ и дырок $v_{F,h}$ могут быть вычислены исходя из значений их эффективных масс (m_e, m_h) и энергий Ферми (ϵ_e, ϵ_h), измеренных при гелиевых температурах на основе изучения осцилляций магнитной восприимчивости. В работе [15] приводятся следующие значения этих параметров: $\epsilon_e = 2,8 \cdot 10^{-14}$ эрг (17,5 meV), $m_{e1} = 5,2 \cdot 10^{-3} m_0$, $m_{e2} = 1,5 m_0$, $m_{e3} = 1,3 \cdot 10^{-2} m_0$; $\epsilon_h = 1,8 \cdot 10^{-14}$ эрг (11,2 meV), $m_{h1} = m_{h2} = 6,6 \cdot 10^{-2} m_0$, $m_{h3} = 0,62 m_0$. Полагая, что закон дисперсии квазичастиц в висмуте эллипсоидальный,

$\sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{2\epsilon m_i} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{p_i}{p_{0i}} \right)^2 = 1$, получим следующую формулу для расчёта скоростей Ферми вдоль i -ой полуоси электронного или дырочного эллипсоида:

$v_{F,e(h),i} = p_{0,e(h),i} / m_{e(h),i} = \sqrt{2\epsilon_{e(h)} / m_{e(h),i}}$. Вычисленные с её помощью значения $v_{F,e(h),i}(4.2 K)$ приведены в Таблице 1.

Для расчёта величины l_0 при комнатной температуре эти значения необходимо скорректировать. Дело тут в том, что в отличие от металлов типа

¹⁰ Приведённое здесь значение энергии Ферми соответствует случаю пренебрежения непараболичностью закона дисперсии электронов; $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-28}$ г – электронная масса.

золота или меди, на внешней электронной оболочке которых по одному s электрону, концентрация носителей заряда в поливалентных металлах (и висмуте в их числе) изменяется при понижении температуры от комнатной до гелиевой, а вместе с ней изменяется значение энергии и скорости Ферми. Чтобы учесть влияние изменения концентрации n на величину v_F , примем во внимание, что

$$v_F \propto \sqrt{\epsilon_F} \propto \sqrt[3]{n},$$

поэтому

$$v_{F,e(h),i}(300\text{ K}) = v_{F,e(h),i}(4.2\text{ K}) \sqrt[3]{n_{e(h)}(300\text{ K})/n_{e(h)}(4.2\text{ K})}.^{11}$$

Рассчитанные по этой формуле значения фермиевских скоростей электронов и дырок в висмуте при комнатной температуре представлены в четвёртом столбце Таблицы 1. Видно, что они примерно в два раза больше значений скоростей при гелиевых температурах.

Таблица 1. Параметры, характеризующие электронный и дырочный транспорт в висмуте.

Тип носителей	Номер полуоси эллипсоида, i	$v_{F,e(h),i}(4.2\text{ K}),$ 10^7 см/с	$v_{F,e(h),i}(300\text{ K}),$ 10^7 см/с	$\tau_{e(h),i},$ 10^{-13} с	$l_{0,e(h),i},$ Å
Электроны	1	10,9	21,9	0,95	2100
	2	0,64	1,29	3,8	480
	3	6,9	13,9	1,3	1800
Дырки	1 или 2	2,5	4,9	2,3	1100
	3	0,8	1,6	2,3 ¹²	360

Оценку времён релаксации электронной и дырочной подсистем в висмуте при комнатной температуре можно провести исходя из значений подвижностей

¹¹ В висмуте $n_e = n_h = n$. Значение n при гелиевых температурах приведено в работе [15]: $n(4.2\text{ K}) = 3,0 \cdot 10^{17}\text{ см}^{-3}$. Концентрация носителей при комнатной температуре определена на основе гальваномагнитных измерений в статье [16]: $n(300\text{ K}) = 2,45 \cdot 10^{18}\text{ см}^{-3}$.

¹² Авторам работы [16] не удалось получить надёжного значения для подвижности тяжёлых дырок. Поэтому для $\tau_{h,3}$ взято время релаксации лёгких дырок $\tau_{h,1} = \tau_{h,2} = 2,3 \cdot 10^{-13}\text{ с}$.

по формуле $\tau_{e(h),i} = \mu_{e(h),i} m_{e(h),i} / e$, где e – заряд электрона, а $\mu_{e(h),i}$ – подвижность носителей вдоль i -ой полуоси электронного или дырочного эллипсоида. Результаты расчёта по этой формуле с использованием значений $\mu_{e(h),i}$, приведённых в работе [16], представлены в пятом столбце Таблицы 1.

Располагая значениями скоростей Ферми и характерными временами релаксации, легко определить длины свободного пробега вдоль основных направлений эллипсоидов электронов и дырок при комнатной температуре по формуле $l_{0,e(h),i} = v_{F,e(h),i}(300\text{ K})\tau_{e(h),i}$. Эти значения приведены в последнем столбце Таблицы 1. Хорошо видно, что все они много меньше тех значений, которые получены в работах [6] и [7].

Для проведения дальнейших оценок выберем в качестве типичной длины свободного пробега при комнатной температуре значение l_0 вдоль третьей полуоси электронного эллипсоида, то есть $l_{0,e,3}$. Такой выбор объясняется тем, что эта полуось примерно параллельна тригональной оси V_i , вдоль которой очень часто идёт рост плёнок при термическом испарении или магнетронном распылении висмута. Использование только электронной длины оправдано, поскольку, как видно из Таблицы 1, длина свободного пробега дырок вдоль этого направления значительно меньше $l_{0,e,3}$.

2. Коэффициент зеркальности в висмуте.

Теперь обсудим, какую величину зеркальности p следует взять при расчётах толщины d_{pk} . В работе [6] Каплан положил параметр p равным нулю, считая, что поверхности висмутового слоя рассеивают носители заряда абсолютно диффузно. Разумеется, всякая реальная поверхность неидеальна, на ней присутствуют ступени роста, выходы дислокаций и другие изъяны. Однако висмут, в некотором смысле, обладает исключительными свойствами, которые существенно нивелируют влияние этих несовершенств на транспорт носителей вблизи поверхности. Речь здесь идёт о довольно значительной дебройлевской

длине волны электронов в нём, превышающей на пару порядков аналогичное значение в типичных металлах.¹³

Действительно, дебройлевская длина волны электрона, распространяющегося вдоль тригональной оси висмута, составляет $\lambda = h/p_{0,e,z} = h/\sqrt{2m_{e,z}\epsilon_e}$. Подставляя в эту формулу параметры из предыдущего раздела, получим при гелиевых температурах значение λ около 800 Å. При комнатной температуре величина λ в $\sqrt[3]{n_e(300\text{ K})/n_e(4.2\text{ K})} \approx 2$ раза меньше приведённого значения и составляет примерно 400 Å. При такой большой дебройлевской длине волны налетающие на поверхность носители будут взаимодействовать с настолько сглаженным потенциалом неидеальностей поверхности, что выбор нулевого значения для коэффициента зеркальности не представляется очевидным.

В такой ситуации естественно обратиться к экспериментальным работам, в которых рассматривается вопрос о величине этого параметра. И здесь следует сказать, что впервые экспериментально обоснованное предположение о ненулевой величине коэффициента зеркальности отражения электронов от поверхности висмута было высказано Смитом [17] более 60 лет тому назад.

Смит анализировал результаты своих экспериментов по аномальному скин-эффекту в пластинах монокристаллического висмута при гелиевых температурах, но в отличие от Пиппарда и Чемберса [7] использовал теорию, учитывающую реальный анизотропный закон дисперсии квазичастиц в этом материале. Оказалось, что обработка данных по аномальному скину с использованием предположения о зеркальном отражении электронов от поверхности пластины приводит к таким значениям параметров энергетического спектра и концентрации носителей заряда, которые лучше согласуются с результатами известных на тот момент опытов по эффекту де Гааза-ван Альфена и циклотронному резонансу, чем в случае предположения о чисто диффузном

¹³ В золоте, меди и серебре дебройлевская длина волны электрона $\lambda = h/\sqrt{2m_0\epsilon_F}$ составляет величину около 5 Å. Здесь h - постоянная Планка.

рассеянии электронов на границе.¹⁴ Это обстоятельство и позволило Смигу предположить наличие зеркального отражения электронов от поверхности пластины.

Значительно позже работы Смита [17], в середине 70-х годов, высказанное им предположение получило прямое экспериментальное подтверждение в опытах по фокусировке электронов поперечным магнитным полем [18], в которых было обнаружено, что линия фокусировки¹⁵ в висмуте имеет осцилляционный характер по полю. Сам факт наличия осцилляций свидетельствует о том, что коэффициент зеркальности отражения носителей, подлетающих к поверхности под углами близкими к 90 градусам, ненулевой.

Позднее, в работах [19] и [20] из линий фокусировки были восстановлены угловые зависимости коэффициента зеркальности при отражении электронов от тригональной и бинарной плоскостей кристалла висмута. Оказалось, что в области углов падения меньших $50^\circ \div 60^\circ$, вне зависимости от кристаллографической ориентации поверхности, $p > 0,9$, а при углах близких к 90° имеет место значительная кристаллическая анизотропия, выражающаяся в том, что при отражении от тригональной плоскости этот коэффициент достигает значения равного 0,8 [19], а при отражении от бинарной плоскости – всего 0,13 [20]. Высокий коэффициент отражения от плоскостей перпендикулярных тригональной оси имеет важное практическое значение, поскольку, как отмечалось выше, вдоль этой оси часто идёт рост плёнок при их получении методом термического испарения или магнетронного распыления висмута.

Хотя ненулевой коэффициент зеркальности отражения носителей от поверхности монокристаллических пластин висмута при гелиевых температурах – надёжно установленный экспериментальный факт, для точного определения

¹⁴ Полученная Смигом (в предположении зеркального отражения носителей от границы) концентрация электронов в висмуте отличается на 83% от значения, которое следует из эффекта де Гааза-ван Альфена и которое является теперь общепринятым ($3,0 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$), в то время как предположение чисто диффузного рассеяния на границе приводит к концентрации, которая отличается от правильной более чем в три раза (см. таблицу III в [17]).

¹⁵ Зависимость напряжения на коллекторном зонде от магнитного поля.

толщины d_{pk} висмутовых нанослоёв, согласованных с характеристическим импедансом поля двух встречных электромагнитных волн, важно знать значение коэффициента p в тонкоплёночных образцах при комнатной температуре. Для выяснения данного вопроса следует обратиться к работам, посвящённым исследованиям классического размерного эффекта в этих условиях.

Одной из таких работ является статья [21], в которой зависимость проводимости висмутовых плёнок от толщины анализируется с позиций теории Фукса и Зондгеймера [9, 10]. Последнее обстоятельство роднит эту работу со статьёй Каплана [6], учитывающего размерный эффект в рамках той же теории. Подгонка экспериментальных данных из работы [21] зависимостями теории ФЗ позволила авторам рассматриваемой статьи определить величину коэффициента зеркальности в плёнках висмута при комнатной температуре: $p = 0,56$. Данное значение зеркальности и будет использоваться в дальнейших расчётах d_{pk} .

3. Расчёт d_{pk} в висмуте и обсуждение полученных результатов.

В работе [6] величина d_{pk} вычислялась с помощью уравнения, полученного в предположении нулевой зеркальности отражения носителей заряда от поверхностей висмутового слоя. Поскольку теперь расчёт будет вестись при ненулевом значении этого параметра, для определения d_{pk} необходимо решать следующее уравнение:

$$d_{pk} = d_{pk}^0 / \theta(d_{pk}), \quad (2)$$

где

$$\theta(d_{pk}) = 1 - \frac{3}{2d_{pk}/l_0} (1-p) \int_1^\infty dt \left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^5} \right) \frac{1 - e^{-d_{pk}t/l_0}}{1 - pe^{-d_{pk}t/l_0}}. \quad (3)^{16}$$

Как видно, уравнение (2) – трансцендентное, и его корень может быть найден лишь численными методами. Для решения этого уравнения в среде Matlab можно воспользоваться программой, текст которой приведён в работе [22], положив в ней параметр R равным нулю, n_1 и n_2 равными единице, а

¹⁶ См. уравнения (7) и (2) из работы [22].

$\Lambda_0 = 71 \text{ \AA}$.¹⁷ Расчёт по данной программе при $l_0 = l_{0,e,3} = 1800 \text{ \AA}$ и $p = 0,56$ даёт $d_{pk} = 177 \text{ \AA}$, что в 4,7 раза меньше значения d_{pk} , полученного Капланом (828 \AA) [6]. С помощью программы можно показать, что 2/3 указанного расхождения обусловлены использованием сильно завышенного значения длины свободного пробега ($l_0 = 29430 \text{ \AA}$), взятого Капланом из работы [7]. Остальная треть вызвана заниженной величиной зеркальности, принятой им.

Обсудим теперь, к каким практическим последствиям приводит обнаруженное значительное расхождение между значением толщины d_{pk} , вычисленным в работе [6], и величиной d_{pk} , полученной на основе более реалистичной оценки l_0 и p в настоящей статье.

Ясно, что уменьшение толщины d_{pk} почти в пять раз по сравнению с оценкой, полученной Капланом, делает менее радужными перспективы получения свободных висмутовых нанослоёв, согласованных с характеристическим импедансом поля двух электромагнитных волн, распространяющихся навстречу друг другу. Скорее всего, использование описанной в работе [8] технологии отделения напылённых плёнок висмута от поддерживающих подложек невозможно по причине хрупкости слоёв толщины менее 200 \AA . Шансы на успех при использовании водорастворимых подложек кажутся более высокими.

Предположим, что все затруднения, связанные с получением свободных висмутовых слоёв, удалось преодолеть. Тогда следует упомянуть ещё об одной проблеме, которая может существенно усложнить использование слоёв толщины d_{pk} в спектроскопических системах, о которых говорилось во Введении.

Речь идёт о хорошо заметной из уравнения (3) чувствительности толщины d_{pk} к величине параметра зеркальности висмута p . В этом можно убедиться с помощью программы из работы [22], используя которую, легко показать, что

¹⁷ $\Lambda_0 \equiv d_{pk}^0$. При расчёте d_{pk}^0 по формуле (1) необходимо принять во внимание, что удельное электрическое сопротивление висмута вдоль тригональной оси при комнатной температуре составляет $13,4 \cdot 10^{-5} \text{ Ом}\cdot\text{см}$ [16]. Поэтому $\sigma_0 = 9 \cdot 10^{11} / 13,4 \cdot 10^{-5} = 6,7 \cdot 10^{15} \text{ ед. СГС} = 6,7 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$.

вариация p на $20 \div 30$ % приводит к изменению величины d_{pk} на $10 \div 15$ %. Проблема состоит в том, что появление у плёнки полуметалла электрического заряда способно очень сильно изменить коэффициент зеркальности. По-видимому, впервые на это обратили внимание Кравченко и Рашба в работе [23].

Причина данного эффекта состоит в том, что из-за малой концентрации свободных носителей в полуметаллах может образовываться заметный приповерхностный изгиб зон V_{surf} при появлении поверхностного заряда. Оценки, проведённые в работе [24], показывают, что в висмуте вполне возможно формирование $V_{surf} \cong 10$ мэВ, что по порядку величины близко к значениям энергий Ферми электронов или дырок, приведённым в разделе 1. По этой причине приповерхностный слой объёмного заряда может частично отражать носители одного знака, не допуская их к поверхности, что в свою очередь влечёт изменение их коэффициента зеркальности по сравнению с аналогичной величиной в незаряженном слое висмута. Описанный механизм влияния приповерхностного изгиба зон на зеркальность нашёл экспериментальное подтверждение в работе [25]. В ней было обнаружено, что коэффициенты зеркальности электронов и дырок при отражении от одной и той же поверхности в сурьме кардинально отличаются по величине ($p = 0,8$ для электронов и $p = 0,1$ для дырок).

Ясно, что чувствительность коэффициента зеркальности к величине поверхностного заряда способна создать серьёзные проблемы при попытке использовать на практике уникальные электродинамические свойства слоёв толщины d_{pk} из висмута.

Действительно, как видно из Таблицы 1, доминирующее влияние на транспорт вдоль тригональной оси висмута оказывают электроны. Поэтому неконтролируемое накопление отрицательного заряда на поверхности слоя толщины d_{pk} приведёт к увеличению зеркальности отражения электронов, по сравнению с величиной этого коэффициента, принятой при расчёте d_{pk} . Это, в свою очередь, нарушит согласование импеданса слоя с характеристическим

импедансом поля двух встречных электромагнитных волн, поскольку новому значению зеркальности соответствует совершенно другая толщина d_{pk} . Рассогласование же импедансов нарушит работу спектроскопических приборов, о которых речь шла во Введении.

Причиной появления заряда может быть взаимодействие слоя с окружающей средой, адсорбция на нём заряженных ионов или просто банальная электризация трением. В настоящее время существуют технологии нейтрализации отрицательных поверхностных зарядов, основанные на использовании альфа-радиоактивных препаратов. Проблема, однако, состоит в том, что применение данных технологий требует создания следящей системы, контролирующей текущий заряд на рабочей поверхности и регулирующей в зависимости от его величины поток компенсирующих альфа-частиц. Понятно, что использование такой системы увеличит громоздкость и снизит надёжность приборов, использующих электродинамические свойства слоёв толщины d_{pk} из висмута.

Заключение.

В настоящей статье была определена толщина висмутового слоя d_{pk} , при которой его импеданс сравнивается с характеристическим импедансом поля двух электромагнитных волн, распространяющихся навстречу друг другу в вакууме. Впервые подобный расчёт был выполнен Капланом в работе [6]. Стимулом к повторному рассмотрению этой задачи было 29-кратное расхождение между величиной длины свободного пробега l_0 в объёмном висмуте при комнатной температуре, полученной в работе [7] и использованной Капланом для расчёта, и оценкой l_0 , приведённой в статье [12].

Для разрешения данного противоречия в настоящей работе была заново проведена оценка l_0 в висмуте, причём с самого начала во внимание был принят сильно анизотропный энергетический спектр квазичастиц в этом материале. Основой для расчёта l_0 послужил набор значений эффективных масс и энергий Ферми электронов ϵ_e и дырок ϵ_h , измеренный в классической работе [15] и

справедливый в области гелиевых температур. Для расчёта скоростей Ферми при комнатной температуре значения энергий ϵ_e и ϵ_h были скорректированы в соответствии с изменением концентрации носителей заряда при повышении температуры от 4,2 К до комнатной. Характерные времена электронной и дырочной релаксации вычислялись на основании значений подвижностей носителей заряда, измеренных в работе [16], и их эффективных масс, взятых из указанной выше работы Брандта с сотрудниками.

Полученные значения скоростей Ферми и характерных времён релаксации позволили оценить величины l_0 вдоль основных направлений электронных и дырочных эллипсоидов в висмуте. Оказалось, что при комнатной температуре характерное значение l_0 составляет величину около 1800 Å, что в 1,8 раза больше оценки, приведённой в статье [12], и в 16 раз меньше значения l_0 , использованного Капланом для расчёта d_{pk} в работе [6]. Ясно, что столь значительное расхождение является достаточным основанием для проведения повторного расчёта d_{pk} по новому значению l_0 .

В разделе 2 настоящей статьи обсуждается, насколько оправдан выбор нулевого значения для коэффициента зеркальности p , сделанный в работе Каплана. На основании анализа имеющейся литературы по данному вопросу обосновано ненулевое значение этого параметра, и приведены аргументы в пользу выбора $p = 0,56$, в соответствии с результатами работы [21].

Расчёт d_{pk} для данного значения зеркальности и с использованием нового значения l_0 , полученного в разделе 1 настоящей статьи, даёт $d_{pk} = 177$ Å, что почти в пять раз меньше значения, вычисленного Капланом [6]. Ясно, что столь малое значение толщины висмутового слоя серьёзно затруднит его отделение от поддерживающей подложки, что делает весьма туманными перспективы использования таких слоёв в спектроскопических системах, упомянутых во Введении.

К сожалению, это не единственная проблема, стоящая на пути практического использования уникальных электродинамических свойств слоёв

толщины d_{pk} из висмута. Как было указано в предыдущем разделе, неконтролируемое изменение коэффициента зеркальности, обусловленное появлением поверхностного заряда, также способно затруднить работу с этими объектами. Поскольку задача получения свободных висмутовых слоёв толщины d_{pk} пока не решена, трудно сказать, насколько серьёзными будут проблемы, связанные с их неконтролируемой электризацией.

Как отмечалось выше, бóльшая часть значительного расхождения между оценками толщины d_{pk} в висмуте, полученными Капланом и сделанными в настоящей статье, обусловлена сильно завышенной величиной l_0 , заимствованной Капланом из работы [7]. Поэтому совершенно естественно обсудить причины получения авторами этой работы столь огромного значения длины свободного пробега в висмуте при комнатной температуре.

По всей видимости, большая длина свободного пробега, полученная в работе [7], является следствием применения для обработки экспериментальных данных по аномальному скин-эффекту в висмуте теории [13] справедливой в случае сферической поверхности Ферми. Следует в этой связи отметить, что применение изотропной модели к висмуту довольно часто приводит к ошибочным результатам. Здесь уместно процитировать Шёнберга, который в своей книге ([26], стр. 27), имея в виду одну из первых работ по висмуту, пишет: «Теоретические кривые Пайерлса действительно очень похожи на экспериментальные, если выбрать подходящие значения энергии Ферми и эффективной массы, но значения намагниченности оказались почти в 70 раз меньше, чем следовало. Как позднее выяснилось, это расхождение возникло потому, что не была учтена очень сильная анизотропия параметров».

Высокий научный авторитет авторов статьи [7], по-видимому, является причиной того, что сделанный ими ошибочный вывод о рекордной величине длины свободного пробега в висмуте при комнатной температуре и по сей день довольно часто цитируется и приводит к ошибкам в работах других авторов, полагающихся на эту величину. Свидетельством этого, к сожалению, является работа Каплана [6], в той своей части, которая касается расчёта d_{pk} в висмуте.

В контексте сказанного ясна важность как можно более быстрого выявления и исправления ошибок в научных статьях, с тем чтобы они не могли вызвать дальнейших ошибок у цитирующих авторов. В этой связи хотелось бы обсудить в заключение ещё один момент в работе [6], который вызывает серьёзные сомнения.

Речь идёт о том месте в разделе 8 статьи [6], в котором автор обсуждает, в каких материалах можно ожидать большое значение d_{pk} , и в плёнках которых, тем самым, можно было бы наблюдать на толщине d_{pk} пик коэффициента поглощения. Со ссылкой на таблицу 1 в работе [6] делается вывод, что таким материалом мог бы быть никель с $d_{pk} = 31 \text{ \AA}$.

При рассмотрении параметров этого металла, приведённых в указанной таблице, бросается в глаза довольно большое значение длины свободного пробега в нём (587 \AA), превышающее аналогичную величину в серебре (533 \AA). Это обстоятельство кажется парадоксальным, поскольку теплопроводность κ никеля примерно в 4,7 раза меньше теплопроводности серебра,¹⁸ а концентрация носителей заряда n в нём в 1,6 раза больше, чем в серебре.¹⁹ Поэтому, исходя из того, что $\kappa \propto nl_0$, следовало бы ожидать, что длина свободного пробега в никеле в $1,6 \cdot 4,7 \approx 7,5$ раз меньше, чем в серебре, то есть составляет величину около 70 \AA .

Парадокс разрешается при обращении к статье [28], из которой и брались значения l_0 для всех металлов кроме висмута, представленные в таблице 1 работы [6]. Оказывается, что приведённое в [28] значение l_0 для никеля ($5,87 \text{ нм}$) ровно на порядок меньше значения из таблицы 1 в [6]. Таким образом, при переносе данных из работы [28] в свою статью Каплан допустил оплошность, а потом использовал завышенное на порядок значение l_0 для вычисления d_{pk} .

¹⁸ При комнатной температуре $\kappa_{Ni} = 91 \text{ Вт/(м·К)}$, а $\kappa_{Ag} = 429 \text{ Вт/(м·К)}$ [27].

¹⁹ $n_{Ni}/n_{Ag} = R_{Ag}/R_{Ni}$. Здесь $R_{Ag} = -8,98 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{А·с})$ – коэффициент Холла в серебре, $R_{Ni} = -5,6 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{А·с})$ – нормальная часть коэффициента Холла в никеле [27]. Значения обоих коэффициентов даны при комнатной температуре.

Расчёт этой толщины с помощью программы из статьи [22] с использованием правильного значения длины свободного пробега $l_0 = 58,7 \text{ \AA}$ и нулевой зеркальности даёт $d_{pk} = 11,5 \text{ \AA}$, что почти в три раза меньше величины, полученной Капланом. Если сравнить новое значение d_{pk} с аналогичными характерными толщинами других элементов, представленных в рассматриваемой таблице, то видно, что d_{pk} никеля практически ничем не отличается от d_{pk} металлов подгруппы меди (Cu, Ag, Au) или алюминия. Таким образом, сделанный в работе [6] вывод о перспективности использования никеля для поиска пика коэффициента поглощения на характерной толщине d_{pk} является ошибочным.

В Таблице 2 приведены правильные значения параметров для никеля, которыми следует заменить девятую строку таблицы 1 в работе [6].

Таблица 2. Исправленные параметры для никеля, которые следует использовать вместо аналогичных величин, приведённых в таблице 1 статьи [6].

Metal	$\sigma_0, 10^{17} \text{ s}^{-1}$	$l_0, \text{ \AA}$	$\Lambda_0, \text{ \AA}$	$\Lambda_N, \text{ \AA}$	η	$d_{pk}, \text{ \AA}$
Nickel (Ni)	1.3	58.7	3.673	14.68	4.0	11.5

Финансирование.

Работа выполнена в рамках темы государственного задания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

Литература

- Zhang B.L., Liu Y., Luo Y., Kusmartsev F.V., Kusmartseva A. Perfect impedance matching with meta-surfaces made of ultra-thin metal films: a phenomenological approach to the ideal THz sensors. *Materials*. 2020. V.13. №23. P.5417. <https://doi.org/10.3390/ma13235417>

2. Глазунов П.С., Андреев В.Г., Вдовин В.А. Перспективы использования ультратонких металлических плёнок в задачах микроволновой электроники и оптики ТГц диапазона. *Труды XVII Всероссийской школы-семинара «Волновые явления в неоднородных средах» имени А.П. Сухорукова («Волны-2020»)*. Москва. 2020. Т.6. С.7-8.
3. Каплан А.Е. Об отражательной способности металлических плёнок в СВЧ- и радиодиапазоне. *Радиотехника и электроника*. 1964. Т.9. №10. С.1781-1787.
4. Hansen R.C., Pawlewicz W.T. Effective conductivity and microwave reflectivity of thin metallic films. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 1982. V.30. №11. P.2064-2066. <https://doi.org/10.1109/TMTT.1982.1131380>
5. Kaplan A.E., Zeldovich B.Ya. Free-space terminator and coherent broadband blackbody interferometry. *Optics Letters*. 2006. V.31. №3. P.335-337. <https://doi.org/10.1364/OL.31.000335>
6. Kaplan A.E. Metallic nanolayers: a sub-visible wonderland of optical properties. *Journal of the Optical Society of America B*. 2018. V.35. №6. P.1328-1340. <https://doi.org/10.1364/JOSAB.35.001328>
7. Pippard A.B., Chambers R.G. The mean free path of conduction electrons in bismuth. *Proceedings of the Physical Society. Section A*. 1952. V.65. №11. P.955-956. <https://doi.org/10.1088/0370-1298/65/11/117>
8. Kokorian J., Engelen J.B.C., de Vries J., Nazeer H., Woldering L.A., Abelmann L. Ultra-flat bismuth films for diamagnetic levitation by template-stripping. *Thin Solid Films*. 2014. V.550. P.298-304. <https://doi.org/10.1016/j.tsf.2013.11.074>
9. Fuchs K. The conductivity of thin metallic films according to the electron theory of metals. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1938. V.34. №1. P.100-108. <https://doi.org/10.1017/S0305004100019952>
10. Sondheimer E.H. The mean free path of electrons in metals. *Advances in Physics*. 1952. V.1. №1. P.1-42. <https://doi.org/10.1080/00018735200101151>
11. Cornelius T.W., Toimil-Molares M.E. Finite- and quantum-size effects of bismuth nanowires, в кн.: *Nanowires*, под ред. Paola Prete. Vukovar. Croatia, Intech. 2010. P.273-296. <http://doi.org/10.5772/39516>

12. Cronin S.B., Lin Y.M., Rabin O., Black M.R., Ying J.Y., Dresselhaus M.S., Gai P.L., Minet J.P., Issi J.P. Making electrical contacts to nanowires with a thick oxide coating. *Nanotechnology*. 2002. V.13. №5. P.653-658.
<https://doi.org/10.1088/0957-4484/13/5/322>
13. Reuter G.E.H., Sondheimer E.H. The theory of the anomalous skin effect in metals. *Proceedings of the Royal Society of London A*. 1948. V.195. №1042. P.336-364.
<https://doi.org/10.1098/rspa.1948.0123>
14. Shim W., Ham J., Kim J., Lee W. Shubnikov-de Haas oscillations in an individual single-crystalline bismuth nanowire grown by on-film formation of nanowires. *Applied Physics Letters*. 2009. V.95. №23. P.232107.
<https://doi.org/10.1063/1.3267143>
15. Брандт Н.Б., Долголенко Т.Ф., Ступоченко Н.Н. Исследование эффекта де Гааза-ван Альфена в висмуте при сверхнизких температурах. *ЖЭТФ*. 1963. Т.45. №5. С.1319-1335.
16. Michenaud J.P., Issi J.P. Electron and hole transport in bismuth. *Journal of Physics C: Solid State Physics*. 1972. V.5. №21. P.3061-3072.
<https://doi.org/10.1088/0022-3719/5/21/011>
17. Smith G.E. Anomalous skin effect in bismuth. *Physical Review*. 1959. V.115. №6. P.1561-1568. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.115.1561>
18. Цой В.С. Фокусировка электронов в металле поперечным магнитным полем. *Письма в ЖЭТФ*. 1974. Т.19. №2. С.114-116.
19. Цой В.С. Исследование взаимодействия электронов с границей при помощи поперечной фокусировки. *ЖЭТФ*. 1975. Т.68. №5. С.1849-1858.
20. Цой В.С., Цой Н.П. Угловая зависимость коэффициента зеркального отражения электронов висмута от бинарной плоскости. *ЖЭТФ*. 1977. Т.73. №1. С.289-298.
21. Hoffman R.A., Frankl D.R. Electrical transport properties of thin bismuth films. *Physical Review B* 1971. V.3. №6. P.1825-1833.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.3.1825>

22. Пятайкин И.И. Влияние внутреннего размерного эффекта в поликристаллических плёнках металлов на коэффициенты отражения, прохождения и поглощения в них электромагнитных волн СВЧ диапазона. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2020. №10. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.10.5>
23. Кравченко В.Я., Рашба Э.И. Теория классического размерного эффекта в электропроводности полуметаллов. *ЖЭТФ*. 1969. Т.56. №5. С.1713-1727.
24. Рашба Э.И., Грибников З.С., Кравченко В.Я. Анизотропные размерные эффекты в полуметаллах, в кн.: *Электроны проводимости*, под ред. М.И. Каганова и В.С. Эдельмана. Москва, Наука. 1985. С.300-328.
25. Цой В.С., Разгонов И.И. Отражение электронов и дырок сурьмы от границы образца. *Письма в ЖЭТФ*. 1976. Т.23. №2. С.107-109
26. Шёнберг Д. *Магнитные осцилляции в металлах*. Москва, Мир. 1986. 680 с.
27. Бабичев А.П., Бабушкина Н.А., Братковский А.М. и др. *Физические величины: Справочник*. Москва, Энергоатомиздат. 1991. 1232 с.
28. Gall D. Electron mean free path in elemental metals. *Journal of Applied Physics*. 2016. V.119. №8. P.085101. <https://doi.org/10.1063/1.4942216>

Для цитирования:

Пятайкин И.И. Расчёт толщины висмутовых нанослоёв, согласованных с характеристическим импедансом поля двух встречных электромагнитных волн. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2021. №10. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.10.1>