

УДК 517.958

**ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ И НОВЫЕ ФОРМЫ  
ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ АНАЛИЗА  
ПРОХОЖДЕНИЯ СИГНАЛОВ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С ДИСПЕРСИЕЙ**

**А. Г. Павельев, А. А. Павельев\***

Представлено академиком РАН Ю.В. Гуляевым 27.03.2018 г.

Поступило 12.04.2019 г.

Получены новые уравнения обращения преобразования Лапласа. Уравнения удовлетворяют принципу причинности (каузальности). Определена импульсная переходная характеристика канала для анализа дисперсионных искажений в неоднородных средах. Импульсная характеристика исключает возможность превышения сигналом скорости света в среде. Даны расчёты ширины полосы пропускания, углового спектра и доплеровского сдвига сигнала в ионосфере.

*Ключевые слова:* преобразование Лапласа, дисперсионные искажения, волновой пакет, распространение радиоволн, принцип причинности, полоса пропускания, угловой спектр, доплеровский сдвиг, принцип локальности, радиозатменный метод, радиоголография, ионосфера.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524896558-563>

1. Решение фундаментальных задач радиотехники, радиофизики, электродинамики, дистанционного зондирования, информатики, электротехники и др. основано на преобразовании Лапласа [1]. В теории обычно находится частотный отклик на прохождение монохроматического сигнала [2]. Перспективно применение импульсной функции для анализа временных искажений сигнала [3].

Цель работы — применение принципа двойственности [4–6] и параметрического метода аналитического продолжения для получения нового уравнения преобразования Лапласа и определения импульсной характеристики, удовлетворяющей принципу причинности, исключающей возможность превышения скорости света в вакууме. Изображением импульсной характеристики является частотный отклик дисперсионной среды на монохроматический сигнал.

Преобразование Лапласа  $V(s)$  вещественной функции времени  $f(t)$  имеет вид

$$V(s) = \int_0^{\infty} \exp(-st)f(t)dt; \quad f(t) = 0, \quad t < 0. \quad (1)$$

Ранее были получены соотношения, выполняющиеся при  $t > 0$  [4–6]:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{i[V_c(it) - V_c(-it)]}{\pi}, \\ f_2(t) &= \frac{[V_s(it) + V_s(-it)]}{\pi}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $i$  — мнимая единица,  $V_c(x)$ ,  $V_s(x)$  — косинус- и синус-преобразования Фурье функции-изображения  $V(s)$  на действительной оси переменной  $s$ :

$$\begin{aligned} V_c(x) &= \int_0^{\infty} V(s) \cos sx ds, \\ V_s(x) &= \int_0^{\infty} V(s) \sin sx ds. \end{aligned} \quad (3)$$

Оригинал  $f(t)$  изображения  $V(s)$  существует при  $t > 0$ , если функции  $f_{1,2}(t)$ , определённые из уравнений (2), совпадают:

$$f(t) = f_1(t) = f_2(t), \quad t > 0. \quad (4)$$

Введём в (3) вещественный параметр  $l$  заменой  $x = lt, \quad s = \frac{\omega}{l}$ :

$$\begin{aligned} V_c(lt) &= l^{-1} \int_0^{\infty} V(l^{-1}\omega) \cos t\omega d\omega, \\ V_s(lt) &= l^{-1} \int_0^{\infty} V(l^{-1}\omega) \sin t\omega d\omega. \end{aligned} \quad (5)$$

Фрязинский филиал  
Института радиотехники и электроники  
им. В.А. Котельникова  
Российской Академии наук,  
Фрязино Московской обл.  
\*E-mail: [alxndr38@gmail.com](mailto:alxndr38@gmail.com)

Вставим в (5) мнимые значения параметра  $l = \pm i$ . При условии существования и корректности аналитического продолжения  $V(\pm i\omega)$  получим из (2) и (5):

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \pi^{-1} \int_0^{\infty} V_+ \cos t\omega d\omega, \\ f_2(t) &= i\pi^{-1} \int_0^{\infty} V_- \sin t\omega d\omega, \end{aligned} \quad (6)$$

$$V_{\pm} = V(i\omega) \pm V(-i\omega).$$

Оригинал  $f(t)$  в (6) представлен косинус/синус-преобразованиями Фурье соответственно чётной  $V_+ = V(i\omega) + V(-i\omega)$  и нечётной функции  $V_- = V(i\omega) - V(-i\omega)$  частоты  $\omega$ .

Подставим  $V(\pm i\omega)$  из (1) в (6) и при допустимости перестановки порядка интегрирования получим

$$\begin{aligned} f_{1,2}(t) &= \pi^{-1} \int_0^{\infty} f(x) dx \times \\ &\times \int_0^{\infty} \{\cos[\omega(t-x)] \pm \cos[\omega(t+x)]\} d\omega = \\ &= \int_0^{\infty} f(x) [\delta(t-x) \pm \delta(t+x)] dx, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\delta(x)$  — дельта-функция, верхний и нижний знак перед вторым слагаемым в правой части (7) соответствует функциям  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  из (2). Согласно (4), (7) при  $t \geq 0$  функции  $V(s)$  соответствует единственный оригинал  $f(t)$ .

Из-за влияния слагаемых  $\pm \delta(t+x)$  при  $t < 0$  функции  $f_{1,2}(t)$  в уравнении (7) не равны нулю, что противоречит принципу причинности (каузальности). Принцип двойственности (2) позволяет удовлетворить условию причинности (каузальности)  $f(t) \equiv 0, t < 0$ , путём выбора  $f(t)$  в виде  $f(t) = \frac{f_1(t) + f_2(t)}{2}$ . Из (2), (6), (7) получаются соотношения для обратного преобразования Лапласа:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{f_1(t) + f_2(t)}{2} = \\ &= (2\pi)^{-1} [V_s(it) + V_s(-it) + iV_c(it) - iV_c(-it)], \end{aligned} \quad (8)$$

$t > 0, f(t) \equiv 0, t < 0,$

$$\begin{aligned} f(t) &= (2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} (V_+ \cos t\omega + iV_- \sin t\omega) d\omega = \\ &= (4\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (V_+ \cos t\omega + iV_- \sin t\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (9)$$

где функции  $V_{\pm}$  определены в (6). В нижнем пределе интеграла (9) ноль заменён на  $-\infty$  ввиду чётности подынтегральной функции.

Из (9) получается формула обращения с помощью двустороннего преобразования Фурье (при условии, что  $V_+$  является чётной, а  $V_-$  — нечётной функцией  $\omega$ ):

$$\begin{aligned} f(t) &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} V(\pm i\omega) \exp(\pm it\omega) d\omega, \\ f(t) &= 0, \quad t < 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Изображение  $V(\pm i\omega)$  восстанавливается из (10) интегрированием левой и правой частей в бесконечных пределах с ядром  $\exp(\mp itx)$  с учётом равенства  $f(t) = 0, t < 0$ :

$$\begin{aligned} V(\pm ix) &= \int_0^{\infty} f(t) \exp(\mp itx) dt = \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} V(\pm i\omega) \exp(\pm it\omega \mp itx) d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} V(\pm i\omega) \delta(\omega - x) d\omega. \end{aligned} \quad (11)$$

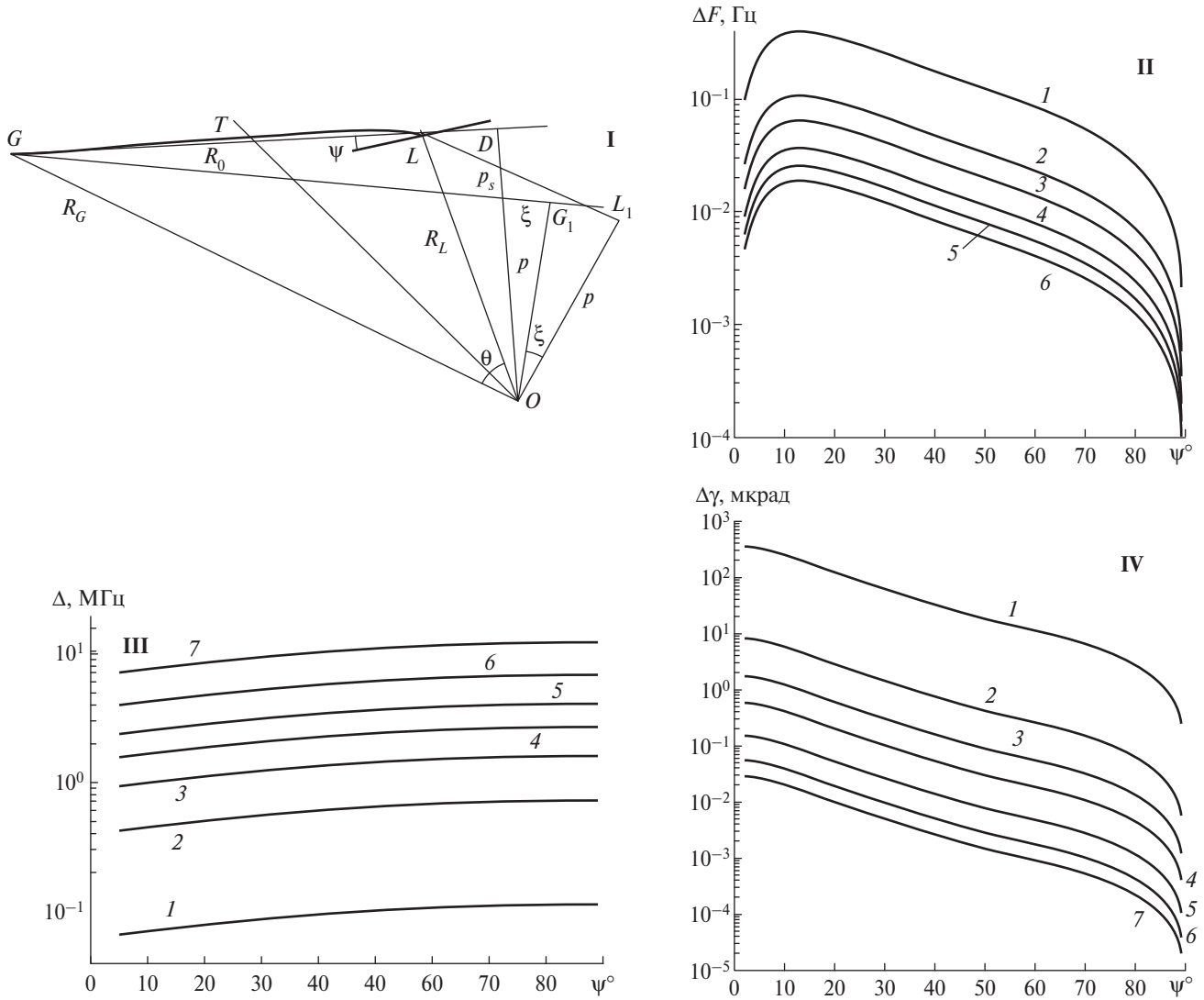
Уравнения (1), (9) и (1), (10) являются парами преобразований оригинал—изображение и, наоборот, изображение—оригинал.

2. Частотная передаточная характеристика радиоканала определяется для монохроматического сигнала при зависимости от времени в форме [5]

$$\begin{aligned} V_{GL}(\pm i\omega) &= A(n) \exp(\mp i\omega c^{-1} \Phi), \\ \Phi(n) &= \int_G^L n[\omega, l(\omega)] dl, \\ A(n) &= A_0 [X(n) \Gamma(n)]^{1/2}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $n[\omega, l(\omega)]$  — показатель преломления,  $dl$  — элемент лучевой траектории  $GL$ ,  $\Phi(n)$  — фазовое запаздывание на луче  $FL$ ,  $A_0$  — амплитуда радиоволн в точке  $L$  при отсутствии неоднородностей среды,  $A(n)$  — амплитуда, учитывающая эффекты ослабления радиоволн из-за рефракции  $X(n)$  и поглощения  $\Gamma(n)$ ,  $c$  — скорость распространения электромагнитных волн в свободном пространстве. Интегрирование в (12) проводится вдоль луча  $GTL$  (рис. 1, I). Положение луча  $GTL$  в среде зависит от частоты радиоволн  $\omega$ . Показатель преломления  $n(\omega)$  и, следовательно,  $\Phi$  являются чётными функциями  $\omega$ . Ниже будет найден оригинал  $h(t, L)$  частотной функции передачи канала  $\exp(\pm i\omega\Phi)$ .

Предположим, что среда сферически симметрична с центром в точке  $O$ . Прицельный параметр  $p$  постоянен вдоль траектории  $GTL$  в плоскости  $GOL$  ( $p$  — длина перпендикуляра, проведённого



**Рис. 1.** I — схема прохождения радиоволн через дисперсную сферически-симметричную слоисто-неоднородную среду на примере трассы связи навигационный спутник  $G$  — приёмник  $L$  на Земле. Центр симметрии находится в точке  $O$ . Отрезок прямой указывает положение горизонтальной линии вблизи приёмника  $L$ . II–IV — результаты расчёта зависимости параметров  $\Delta F$  (Гц),  $\Delta$  (МГц) и  $\Delta\gamma$  (мкрад) от угла места  $\psi$  и частоты  $f$  при приёме излучения спутника, движущегося по круговой орбите на высоте 20000 км. Кривые 1–7 соответствуют значениям частоты  $f$ , равным 60; 210; 360; 660; 810; 1110; 1410 МГц соответственно.

из центра  $O$  к касательной в текущей точке кривой  $GTL$ ). Величина  $\Phi(n)$  удовлетворяет следующим соотношениям при фиксированных  $\theta, R_L, R_G$ :

$$\Phi(n) = \int_{R_L}^{R_G} \frac{(n^2 r^2 - p^2)^{1/2} dr}{r} + p\theta, \quad (13)$$

$$\theta = p \int_{R_L}^{R_G} \frac{dr}{r(n^2 r^2 - p^2)^{1/2}}, \quad \Phi'_\omega(n) = \int_G^L n'_\omega dl,$$

где  $\theta$  — центральный угол с вершиной в точке  $O$  между направлениями  $OG$  и  $OL$ ,  $R_L, R_G, r$  — расстояния  $OG, OL$  и  $OT$ . Производная  $p'_\omega$  в (13) не входит, поскольку после дифференцирования первого

уравнения (13) получим  $\Phi'_p(n) = 0$  при фиксированных  $\theta, R_L, R_G$ . Найдём импульсную функцию  $h(t, L)$ , связывающую в интеграле Дюамеля отклик  $f(t, L)$  выхода  $L$  с сигналом  $f(t)$  на входе канала  $G$ :

$$f(t, L) = \int_0^t f(\tau) h(t - \tau, L) d\tau. \quad (14)$$

Представим  $h(t, L)$  в виде

$$h(t, L) = \kappa \int_{-\infty}^{\infty} \cos[\omega(t - \Phi)] d\omega, \quad (15)$$

где  $\kappa = \pi^{-1}$  и  $\kappa = 0,5\pi^{-1}$  при наличии и отсутствии дисперсии соответственно. При отсутствии дис-

персии  $n$ ,  $A(n)$  и  $\Phi$  в (12), (15) не зависят от частоты, и  $h(t, L)$  является дельта-функцией:  $h(t, L) = \delta(t - \Phi)$ . Среда не вносит искажений, сигнал  $f(t, L)$  (14) на входе приёмного устройства  $L$  сохраняет излучаемую форму  $f(t)$  с запаздыванием, равным  $\Phi$ .

При дисперсии низкие частоты отсутствуют из-за воздействия ионосферы. Подстановка  $h(t, L)$  из (15) в (1) при  $s \rightarrow is$ ,  $f(t) \rightarrow h(t, L)$  после смены порядка интегрирования по  $t$ ,  $\omega$  и замен  $\omega = s - y$ ,  $\omega = y - s$  даёт два преобразования Гильберта с особой точкой  $y = 0$ :

$$\begin{aligned} V_{GL}(is) &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dy y^{-1} \exp(-is\Phi) \times \\ &\times \exp[iy(\Phi + \omega\Phi'_{\omega})] i^{-1} = \\ &= \pi^{-1} \exp(-is\Phi) \int_{-\infty}^{\infty} dy y^{-1} \sin[y(\Phi + s\Phi'_s)] = \\ &= \exp(-is\Phi), \end{aligned} \quad (16)$$

т.е. из (1) следует, что частотная функция передачи (12)  $\exp(-is\Phi)$  является изображением оригинала (15)  $h(t, L)$ . Подставляя в интеграл Дюамеля  $h(t, L)$  из (15), предполагая, что на входе в ионосферу функция имеет форму затухающей синусоиды,  $f(\tau) = \exp(-\alpha\tau)\cos(\omega_0\tau)$ , после перестановки порядка интегрирования аналогичным способом найдём сигнал в ионосфере:

$$f(t) = \exp[-\alpha t - (\Phi + \omega\Phi'_{\omega})] \cos[\omega_0(t - \Phi)].$$

Сигнал в ионосфере распространяется с фазовой скоростью по фазовому пути и групповой скоростью по огибающей. Первая производная  $h(t, L)$  определяет расстояние до положения данной точки в ионосфере, остальные производные определяют форму линии дисперсии в этой точке. Это можно показать, используя уравнение дисперсии радиоволн в ионосфере:  $n^2(\omega) = 1 - \omega_p^2 \omega^{-2}$ , где  $\omega_p = \alpha_0 N_e^{1/2}$  — плазменная частота, выраженная в радианах,  $\alpha_0$  — размерный коэффициент,  $N_e$  — концентрация электронов. В стационарной точке  $\omega_s$  интеграла (16) выполняется уравнение

$$\varphi'_{\omega}(\omega, t) = [\omega(t - c^{-1})\Phi]_{\omega} = 0,$$

которое имеет вид

$$\begin{aligned} t - c^{-1}R_0 &= c^{-1}(d_g - R_0), \quad d_g = \Phi + \omega\Phi'_{\omega}, \\ \varphi''_{\omega^2}(\omega, t) &= c^{-1}d'_{g\omega}, \quad d'_{g\omega} = 2\Phi'_{\omega} + \omega\Phi''_{\omega^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $R_0, d_g$  — соответственно длина отрезка  $GL$  и пространственное запаздывание радиоволн вдоль трассы  $GTL$  при частоте  $\omega_s$ . Величина  $d_g$  зависит от фазового пути  $\Phi$  и его производной по частоте  $\Phi'_{\omega}$ . Суще-

ственно, что при избранном законе дисперсии величина  $\beta(\omega)$ , определяемая из соотношений

$$\begin{aligned} d_g - R_0 &= \omega^{-2}\beta(\omega), \\ \beta &= \int_G^L \omega_p^2 n^{-1} (n+1)^{-1} dl + \left( \int_G^L dl - R_0 \right) \omega^2, \\ \omega^2 &= \beta(\omega) c^{-1} (t - c^{-1}R_0)^{-1}, \end{aligned} \quad (18)$$

положительна. Поэтому первое уравнение в (17) при  $t \leq c^{-1}R_0$  не имеет решений. Время прохождения сигнала по трассе  $GTL$  всегда больше времени распространения в вакууме вдоль прямой  $GL$ .

Первое уравнение (17) определяет аргумент  $t$  функции  $h(t, L)$  в зависимости от частоты в стационарной точке  $\omega_s$ . Спектральные составляющие сигнала с разными частотами приходят в точку наблюдения  $L$  в разное время. Производная аргумента  $t$  по частоте определяется соотношением  $t'_{\omega} = c^{-1}d'_{g\omega}$ . Согласно (17) производная от запаздывания  $d'_{g\omega}$  зависит от первой и второй производных фазового пути по частоте. Фаза частотной функции передачи  $\varphi(\omega, t) = \omega(t - c^{-1}\Phi)$  вблизи стационарной точки  $\omega_s$  интеграла (16) согласно (17) равна

$$\begin{aligned} \varphi(\omega, t) &= \omega_s(t - c^{-1}\Phi_s) + \frac{(\omega - \omega_s)^2}{2\Delta^2}, \\ \Delta^2 &= \frac{c}{d'_{g\omega}(\omega_s, t)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Величина  $\Delta = [c^{-1}d'_{g\omega}(\omega_s, t)]^{-1/2}$  в (19) имеет физический смысл полосы пропускания ионосферы на заданной частоте  $\omega_s$ . Если полоса модулированных радиоволн  $\Delta_W = |\omega - \omega_0|$  удовлетворяет условию  $\Delta_W \geq \Delta$ , то ионосфера существенно искажает сигнал. При выполнении обратного неравенства  $\Delta_W \leq \Delta$  согласно [2] можно пренебречь всеми производными фазы  $\varphi(\omega, t)$  в (17), кроме первой, и представить  $\varphi(\omega, t)$  в виде  $\varphi(\omega_0, t) + \varphi'_{\omega}(\omega_0, t)(\omega - \omega_0)$ , где  $\omega_0$  — значение несущей частоты узкополосного сигнала. В этом случае сигнал проходит практически без искажений, интегрирование по частоте в (17) даёт зависимость  $h(t, L)$  от времени в виде дельта-функции

$$\begin{aligned} h(t, L) &= A(n)\delta(t - t_g), \quad t_g = v_g^{-1}d_g(\omega_0), \\ v_g(\omega_0) &= \frac{cR_0}{d_g(\omega_0)} = cR_0(\Phi + \omega_0\Phi'_{\omega})^{-1}, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $t_g, v_g$  — групповые время запаздывания и скорость узкополосного импульса на частоте  $\omega_0$ . Параметры  $t_g, v_g$  зависят от частоты  $\omega_0$ .

Для строгого анализа вносимых в сигнал ионосферных искажений необходимо подставлять в интеграл Дюамеля (14) функцию  $h(t, L)$  в интегральной форме (16).

3. Эйконал  $\Phi(p, \omega)$  в (12) зависит от прицельного параметра  $p = R_{nL}R_{nG}D^{-1}\sin(\theta - \xi)$ , постоянного на траектории распространения радиоволн — луче  $GTL$  в плоскости  $GOL$ , и определяется из соотношений [5]

$$\begin{aligned} \Phi(p, \omega) &= L(p) + \kappa(p), \quad L(p) = D + p\xi(p), \\ \xi(p) &= \sin^{-1} \frac{p_s}{R_L} - \sin^{-1} \frac{p}{R_{nL}} + \sin^{-1} \frac{p}{R_{nG}} - \sin^{-1} \frac{p_s}{R_G}, \\ \xi &= -\kappa'_p, \quad \kappa(p) = - \int_{R_L}^{R_G} n'_r(r, \omega) \frac{(n^2 r^2 - p^2)^{1/2} dr}{n}, \quad (21) \\ D &= \sqrt{R_{nG}^2 - p^2} - \sqrt{R_{nL}^2 - p^2}, \\ R_{nL,G} &= n(R_{L,G})R_{L,G}, \end{aligned}$$

где  $n(R_L), n(R_G)$  — показатели преломления в точках  $G$  и  $L$ ,  $\xi(p)$  — угол рефракции радиоволн на трассе  $GTL$ ,  $R_L, R_G, r_T$  — расстояния  $OL, OG, OT$ ,  $p_s$  — прицельный параметр прямой  $GL$  относительно центра симметрии  $O$  (рис. 1, I). В уравнении (21) величина  $L(p)$  равна сумме длины  $p\xi(p)$  дуги окружности  $L_1G_1$  радиуса  $p$  и разности отрезков касательных  $LL_1, GG_1$  к лучу  $GTL$ , проведённых в точках  $L, G$ . Рефракционный параметр  $\kappa(p, \omega)$  в (21) зависит от вертикального градиента показателя преломления  $n'_r(r, \omega)$  и описывает отличие фазового пути  $\Phi(p, \omega)$  от длины  $L(p)$ . При фиксированных значениях частоты  $\omega$  и параметров  $R_L, R_G, \theta, p_s$  фазовый путь  $\Phi(p, \omega)$  в (13) удовлетворяет уравнению  $\frac{\partial \Phi(p, \omega)}{\partial p} = 0$ , что соответствует принципу Ферма.

Гармонические составляющие сигнала проходят в среде по различным траекториям, которым соответствуют различные значения прицельного параметра  $p$ , что вызывает уширение углового спектра радиоволн  $\Delta\gamma_L(\omega)$  и вносит искажения в сигнал. Величина уширения  $\Delta\gamma_L(\omega)$  в плоскости  $GOL$  в месте приёма (передачи)  $L(G)$  определяется при  $n(R_G) = n(R_L) = 1$  и полосе частот  $\Delta\omega$ :

$$\begin{aligned} \Delta\gamma_{L,G}(\omega) &= \gamma'_{\omega L,G}(\omega)\Delta\omega = \\ &= (R_{L,G}^2 - p^2)^{-1/2} p'_\omega(\omega)\Delta\omega, \quad (22) \\ p'_\omega(\omega) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left[ (R_G^2 - p^2)^{-1/2} - (R_L^2 - p^2)^{-1/2} - \frac{\partial \xi(p, \omega)}{\partial p} \right]^{-1} \times \\ &\times \frac{\partial \xi(p, \omega)}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial \xi(p, \omega)}{\partial \omega} = - \frac{\partial^2 \kappa(p, \omega)}{\partial p \partial \omega}. \quad (23) \end{aligned}$$

В (22), (23)  $\gamma_{L,G}(\omega)$  — угол с вершиной в точке  $L(G)$  между направлением на центр сферической симметрии  $O$  и касательной к траектории в точке  $L(G)$  (рис. 1, I). Ширина углового спектра уменьшается при удалении от центра симметрии.

На рис. 1 II–IV даны результаты расчёта характеристик радиоволн в ионосфере на трассе спутник на круговой орбите (высота 20 000 км) — Земля в зависимости от угла места  $\psi$  и частоты  $f$ . Расчёты электронной плотности  $N_e(h)$  проведены по формуле Чэпмена

$$N_e(h) = N_0 \times \exp \left\{ 0,5 \left[ 1 - \frac{2(h-h_1)}{d_1} - \sec \chi \exp \left( \frac{-2(h-h_1)}{d_1} \right) \right] \right\}$$

при  $N_0 = 10^6$  эл/см<sup>3</sup>,  $h_1 = 300$  км,  $d_1 = 100$  км,  $\chi = 0$ , где  $N_0, h_1, d_1, \chi$  — электронная плотность в максимуме слоя, высота и толщина слоя, а также зенитный угол Солнца соответственно.

На рис. 1, II дана максимальная величина поправки к доплеровской частоте  $\Delta F = \frac{\lambda^{-1}(p-p_s)d\theta}{dt}$ , выраженной в Гц, в дневной ионосфере. На частоте 400 МГц указанная величина не превышает 0,6 Гц. На рис. 1, III дана ширина полосы пропускания ионосферы  $\Delta$  в МГц. Полоса  $\Delta$  увеличивается в два раза при изменении угла  $\psi$  от 1° до 89°. При увеличении частоты полоса  $\Delta$  возрастает по формуле  $\Delta \approx C_\Delta \omega^{3/2}$ , где параметр  $C_\Delta$  обратно пропорционален интегральной электронной плотности на трассе  $GTL$ .

На рис. 1, IV приведена ширина углового спектра радиоволн  $\Delta\gamma$ , выраженная в микрорадианах, при полосе сигнала 1 МГц. Величина  $\Delta\gamma$  имеет ярко выраженную зависимость от  $\psi$ . На частоте 400 МГц  $\Delta\gamma$  достигает значения 10 мкрад при  $\psi = 1^\circ$  и затем уменьшается на три порядка при  $\psi = 89^\circ$ .

4. Полученные результаты имеют важное научно-практическое значение, позволяя применять импульсную передаточную функцию для расчёта прохождения сигналов в средах с дисперсией, линиях радиосвязи, радионавигации и радиоуправления и в других информационных каналах. Даны зависимости ширины полосы пропускания, доплеровского сдвига и ширины спектра радиоволн при связи на трассе навигационный спутник — Земля. С помощью принципа двойственности и параметрического метода аналитического продолжения получены две новые формы обращения преобразования Лапласа. Обратное преобразование удовлетворяет принципу каузальности. Импульсная характеристика

дисперсионной среды чётко показывает существование светового барьера, за пределы которого сигнал не проходит.

Исследование особенностей полученных преобразований применительно к решению прохождения модулированных сигналов через неоднородные среды с различными типами дисперсии является предметом дальнейшей работы.

**Благодарности.** Авторы признательны зав. лабораторией № 117 ФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН С.С. Матюгову за обсуждение и ценные замечания.

**Источники финансирования.** Работа выполнена в рамках государственного задания и при частичной

поддержке программы № 12 Президиума РАН и гранта РФФИ № 190200083А.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стрэттон Дж.А. Теория электромагнетизма. М.: ГИТТЛ, 1948.
2. Колосов М.А., Арманд Н.А., Яковлев О.И. Распространение радиоволн при космической радиосвязи. М.: Связь, 1969. 158 с.
3. Гуляев Ю.В., Стрелков Г.М. // ДАН. 2006. Т. 408. № 6. С. 754–757.
4. Павельев А.Г. // ДАН СССР. 1990. Т. 311. № 3. С. 601–606.
5. Павельев А.Г. // ДАН. 2013. Т. 452. № 3. С. 271–274.
6. Павельев А.Г. // ДАН. 2016. Т. 467. № 6. С. 656–659.

## THE DUALITY PRINCIPLE AND NEW FORMS OF THE INVERSE LAPLACE TRANSFORM FOR THE ANALYSIS OF SIGNAL PROPAGATION IN INHOMOGENEOUS MEDIA WITH DISPERSION

**A. G. Pavelyev**, A. A. Pavelyev

*Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics, Russian Academy of Sciences,  
Fryazino, Moscow Region, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS Yu.V. Gulyaev March 27, 2018

Received April 12, 2019

New equations for Laplace transform inversion are obtained. The equations satisfy the causality principle. The impulse response of a channel is determined in order to analyze dispersion distortions in inhomogeneous media. The impulse response excludes the possibility that the signal exceeds the speed of light in the medium. The transmission bandwidth, the angular spectrum, and the Doppler shift in the ionosphere are computed.

**Keywords:** Laplace transform, dispersion distortion, wave packet, propagation of radio waves, causality principle, passband, angular spectrum, Doppler shift, locality principle, radio occultation method, radio holography, ionosphere.