



УДК 530.182, 517.9

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-20-31>

О влиянии нарушения симметрии на устройство фазового пространства обратимых систем со смешанной динамикой

А. П. Кузнецов^{1,2}, А. Ж. Рахманова¹, А. В. Савин¹

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83

²Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
Россия, 410019 Саратов, Зелёная, 38

E-mail: arkuz@yandex.ru, aliiiia.rakhmanova@mail.ru, AVSavin@rambler.ru

Автор для переписки Савин Алексей Владимирович, AVSavin@rambler.ru

Поступила в редакцию 13.07.2018, принята к публикации 30.10.2018

Тема – рассмотрение влияния нарушения симметрии на устройство фазового пространства обратимых систем. **Цель** – исследование трансформации устройства фазового пространства обратимых систем с симметрией при ее нарушении, в частности, типов возникающих и сосуществующих аттракторов и возможности проявления мультистабильности. Анализ отличия возникающих в этом случае близких к консервативным режимов от аналогичных режимов, возникающих в системах с постоянной слабой диссипацией. **Методы** – численное моделирование системы связанных фазовых уравнений, описывающих динамику четырех осцилляторов со слабым взаимодействием и с различными функциями связи, как удовлетворяющими условию симметрии, так и приводящими к нарушению этого условия. Для анализа динамики системы использованы методы построения фазовых портретов и аттракторов и расчета спектра ляпуновских показателей. Проведены поиск устойчивых и неустойчивых периодических режимов и построение многообразий седловых циклов. **Результаты.** Показано, что при нарушении симметрии в системе связанных фазовых осцилляторов консервативная динамика разрушается, и в фазовом пространстве возникают аттракторы. В отличие от систем с постоянной слабой диссипацией, количество сосуществующих аттракторов невелико, однако возможно возникновение не только периодических, но и хаотических аттракторов, а также гетероклинических структур в фазовом пространстве. **Обсуждение.** Вследствие того, что исследованная система достаточно проста и является модельной для широкого класса систем различной природы – слабо взаимодействующих цепочек связанных колебательных систем, – можно ожидать, что полученные результаты будут обладать достаточно большой степенью общности.

Ключевые слова: смешанная динамика, мультистабильность.

Образец цитирования: Кузнецов А.П., Рахманова А.Ж., Савин А.В. О влиянии нарушения симметрии на устройство фазового пространства обратимых систем со смешанной динамикой // Изв. вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 6. С. 20–31. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-20-31>

The effect of symmetry breaking on reversible systems with mixed dynamics

A. P. Kuznetsov^{1,2}, A. Zh. Rahmanova¹, A. V. Savin¹

¹Saratov State University

83, Astrakhanskaya str., 410012 Saratov, Russia

²Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch

38, Zelyonaya str., 410019 Saratov, Russia

E-mail: apkuz@yandex.ru, aliiia.rakhmanova@mail.ru, AVSavin@rambler.ru

Correspondence should be addressed to Savin Alexey V., AVSavin@rambler.ru

Received 13.07.2018, accepted for publication 30.10.2018

Theme – the effect of symmetry violation on the structure of the phase space of invertible systems. **Aim** – to study the changes in the phase space structure of invertible systems caused by the violation of symmetry, in particular, the possibility of multistability and the types of coexisting attractors. The peculiarities in comparison with the similar regimes in the systems with fixed constant dissipation also studied. **Methods** – the numerical simulation of the system of coupled phase equations for four oscillators with weak coupling with different coupling functions both with symmetry and without it. The methods of phase portraits and attractors plotting, the calculation of Lyapunov exponents spectra, the search for stable and unstable cycles and the manifolds of saddle cycles are used. **Results**. It was shown that the violation of symmetry results in the destruction of conservative dynamics and the attractors occur. Unlike the systems with constant weak dissipation the number of coexisting attractors is small but both periodic and chaotic attractors occur. The heteroclinic structures also are revealed. **Discussion** – the results are rather common because of the simple nature of used system which is the model system for the wide class of systems – the chains of oscillating systems with weak coupling.

Key words: mixed dynamics, multistability.

Reference: Kuznetsov A.P., Rahmanova A.Zh., Savin A.V. The effect of symmetry breaking on reversible systems with mixed dynamics. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 6, pp. 20–31.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-20-31>

1. Традиционно в нелинейной динамике принято различать два класса динамических систем: консервативные и диссипативные. Для консервативных систем характерно сохранение фазового объема в процессе временной эволюции. Фазовый объем диссипативных систем изменяется с течением времени, для таких систем характерно существование притягивающих инвариантных множеств – аттракторов [1, 2].

Сравнительно недавно [3] было указано, что обратимые системы с симметрией [3–10] фактически можно рассматривать как отдельный, третий класс систем со смешанной динамикой. Такие системы обладают определенной симметрией, заключающейся в инвариантности уравнений относительно одновременного применения обращения времени и некоторого преобразования координат. Очевидно, что в таких системах любому притягивающему множеству соответствует симметричное ему (то есть переходящее в него при этом преобразовании координат) отталкивающее множество. Если же некоторое предельное множество системы полностью лежит на многообразии, инвариантном относительно преобразования координат, то оно переходит в себя при обращении времени, что является характерным свойством консервативного режима. Таким образом, обратимые (в смысле [3]) системы допускают существование консервативных режимов на некотором многообразии в фазовом пространстве, в то время как система в целом остается диссипативной.

В связи с этим представляет интерес ситуация, при которой в систему вводится малое возмущение, нарушающее симметрию в фазовом пространстве. При этом вместо консервативных должны возникать в некотором смысле близкие к ним диссипативные режимы.

Следует отметить, что к настоящему времени существует значительное число работ [11–32], посвященных исследованию «обычных» почти консервативных систем, то есть систем с постоянной во всем фазовом пространстве, но весьма малой диссипацией. В ряде работ [11, 14, 16, 29, 32] было показано, что для таких систем типичным является, в частности, сосуществование большого (в некоторых случаях до сотен) числа аттракторов, как правило, схожей структуры. Представляется интересным исследовать, в какой мере возникающие при нарушении симметрии режимы будут схожи с режимами, возникающими в слабо диссипативных системах.

В настоящей работе проведено исследование изменений в устройстве фазового пространства систем с симметрией, вызванное нарушением симметрии связи и, соответственно, разрушением консервативной динамики, на примере предложенной в работе [33] цепочки связанных фазовых осцилляторов.

2. Известно [34], что если связь между осцилляторами мала, то для описания их динамики может быть достаточно фазовых уравнений. В этом случае цепочка четырех связанных осцилляторов может быть описана системой уравнений вида

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_k &= \omega_k + \varepsilon f(\varphi_{k-1} - \varphi_k) + \varepsilon f(\varphi_{k+1} - \varphi_k), \\ k &= 1, \dots, 4,\end{aligned}\tag{1}$$

где φ_k и ω_k – фаза и собственная частота k -го осциллятора; f – функция взаимодействия, которая должна быть 2π -периодична. Переходя к разностям фаз $\phi_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k$ и принимая частотные расстройки $\Delta_k = \omega_{k+1} - \omega_k$ соседних осцилляторов одинаковыми, после перенормировок получим систему [34]

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_k &= 1 + \varepsilon f(\psi_{k-1}) + \varepsilon f(\psi_{k+1}) - 2\varepsilon f(\psi_k), \\ k &= 1, \dots, 3,\end{aligned}\tag{2}$$

единственным параметром в которой является амплитуда связи ε .

В отсутствие связи фазовые уравнения соответствуют равномерному росту переменной, поэтому динамика переменной полностью определяется функцией связи $f(\phi)$. Если разложение функции связи в ряд Фурье содержит только нечетные гармоники, то в подпространстве $\phi_2 = \pi/2$ система (2) инвариантна относительно обращения времени и замены переменных

$$\phi_1 \rightarrow \pi - \phi_3, \quad \phi_3 \rightarrow \pi - \phi_1,\tag{3}$$

следовательно, в соответствии с [3], эта система является обратимой, при этом инвариантным множеством является прямая $\phi_1 + \phi_3 = \pi$, $\phi_2 = \pi/2$.

В простейшем случае, когда функция связи содержит только одну гармонику, система имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= 1 - 2\varepsilon \sin \psi_1 + \varepsilon \sin \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= 1 - 2\varepsilon \sin \psi_2 + \varepsilon \sin \psi_1 + \varepsilon \sin \psi_3, \\ \dot{\psi}_3 &= 1 - 2\varepsilon \sin \psi_3 + \varepsilon \sin \psi_2.\end{aligned}\tag{4}$$

На рис. 1 представлены фазовые портреты отображения Пуанкаре системы (4), построенного с использованием секущей плоскости $\phi_2 = \pi/2$. Начальные условия для построения траекторий выбирались на симметричном многообразии. Можно видеть, что фазовые портреты

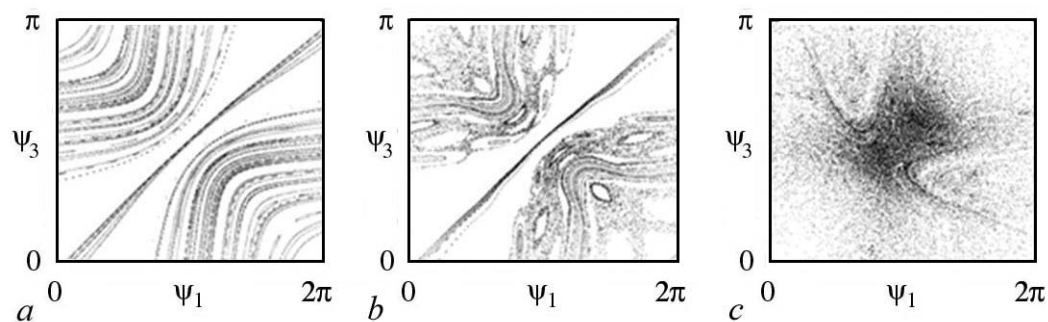


Рис. 1. Фазовые портреты системы (3): *a* – квазипериодическая динамика, $\varepsilon = 0.3$; *b* – сосуществование квазипериодических и хаотических режимов, $\varepsilon = 0.39$; *c* – хаотический режим, $\varepsilon = 0.49$

Fig. 1. Phase portraits of system (3): *a* – quasiperiodic regime, $\varepsilon = 0.3$; *b* – coexistence of quasiperiodic and chaotic regimes, $\varepsilon = 0.39$; *c* – chaotic regime, $\varepsilon = 0.49$

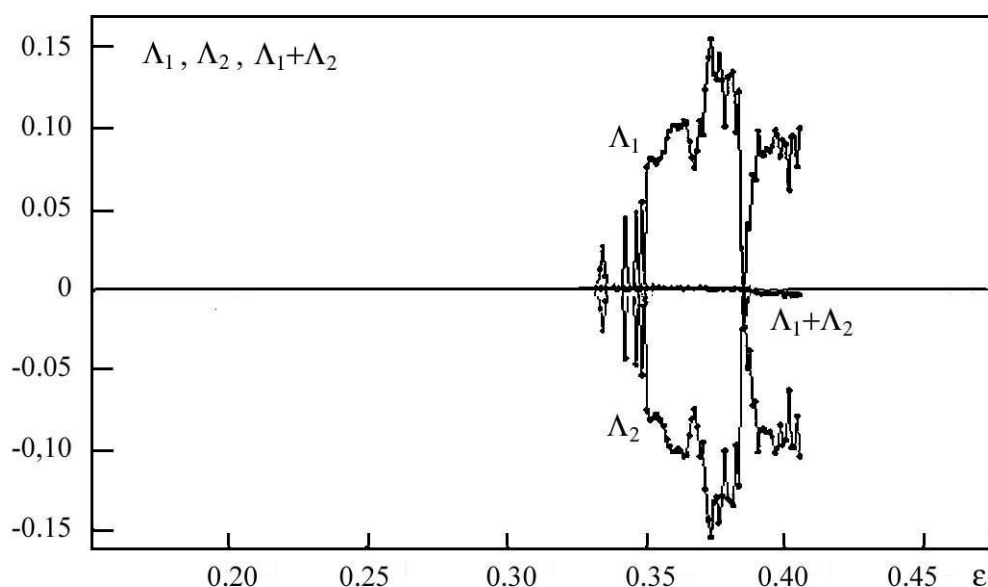


Рис. 2. График зависимости ляпуновских показателей и их суммы от значения амплитуды связи ε

Fig. 2. The plot of Lyapunov exponents and their sum on the coupling parameter ε

имеют типичный для консервативных систем вид. При малом значении управляющего параметра ε траектории регулярны (рис. 1, *a*); при его увеличении появляются области хаотической динамики и островки устойчивости (рис. 1, *b*); при относительно больших значениях ε динамика почти всюду хаотическая (рис. 1, *c*).

На рис. 2 приведен график зависимости от амплитуды связи ε двух показателей Ляпунова¹ и их суммы, рассчитанные для «типичной» траектории (начальные условия $\phi_1 = 4.00$, $\phi_3 = 6.00$). Видно, что значение суммы ляпуновских показателей с хорошей точностью (до 10^{-6}) равно нулю вплоть до достаточно больших значений ε , в том числе соответствующих хаотической динамике. Последнее свидетельствует о сохранении в среднем фазового объема, то есть реализации консервативной динамики.

¹Еще один показатель Ляпунова тождественно равен нулю.

3. В общем случае функция связи может быть представлена в виде суммы гармоник

$$f(\varphi) = \sum_m \sin m\psi. \quad (5)$$

Система вида (2) будет симметричной относительно замены (3), если функция связи содержит только нечетные гармоники. Если же функция связи будет содержать также и четные гармоники, то симметрия будет нарушена. Такими свойствами обладает следующая система:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 1 - 2\varepsilon(\sin \psi_1 + (A - d) \sin 3\psi_1 + d \sin 2\psi_1) + \varepsilon(\sin \psi_2 + (A - d) \sin 3\psi_2 + d \sin 2\psi_2), \\ \dot{\psi}_2 &= 1 - 2\varepsilon(\sin \psi_2 + (A - d) \sin 3\psi_2 + d \sin 2\psi_2) + \varepsilon(\sin \psi_1 + (A - d) \sin 3\psi_1 + d \sin 2\psi_1) + \\ &\quad + \varepsilon(\sin \psi_3 + (A - d) \sin 3\psi_3 + d \sin 2\psi_3), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\dot{\psi}_3 = 1 - 2\varepsilon(\sin \psi_3 + (A - d) \sin 3\psi_3 + d \sin 2\psi_3) + \varepsilon(\sin \psi_2 + (A - d) \sin 3\psi_2 + d \sin 2\psi_2).$$

Параметр d в этом случае характеризует степень нарушения симметрии.

На рис. 3 изображены фазовые портреты отображения Пуанкаре системы (6), полученные численно при плоскости сечения $\phi_2 = \pi/2$. Видно, что при отсутствии четной гармоники траек-

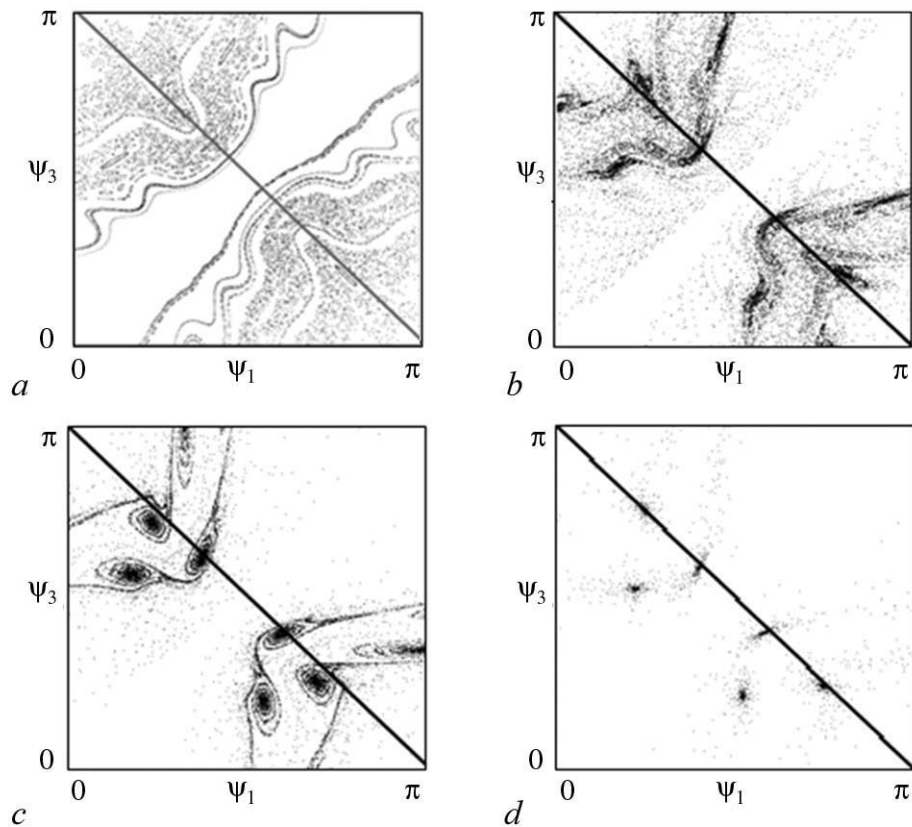


Рис. 3. Фазовые портреты системы (6) при $A=0.2$ и различных значениях параметра d : $a - 0$, $b - 0.05$, $c - 0.17$, $d - 0.2$
 Fig. 3. Phase portraits of (6) for $A = 0.2$ and different values of parameter d : $a - 0$, $b - 0.05$, $c - 0.17$, $d - 0.2$

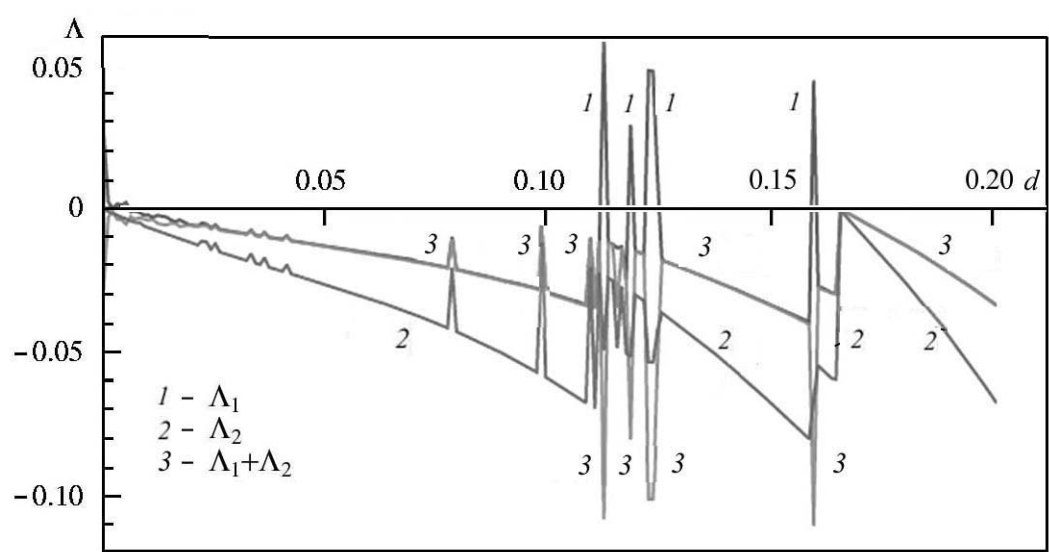


Рис. 4. График зависимости ляпуновских показателей и их суммы от значений параметра d при параметре связи $\varepsilon = 0.348$

Fig. 4. The plot of Lyapunov exponents and their sum on the parameter d for coupling parameter $\varepsilon = 0.348$

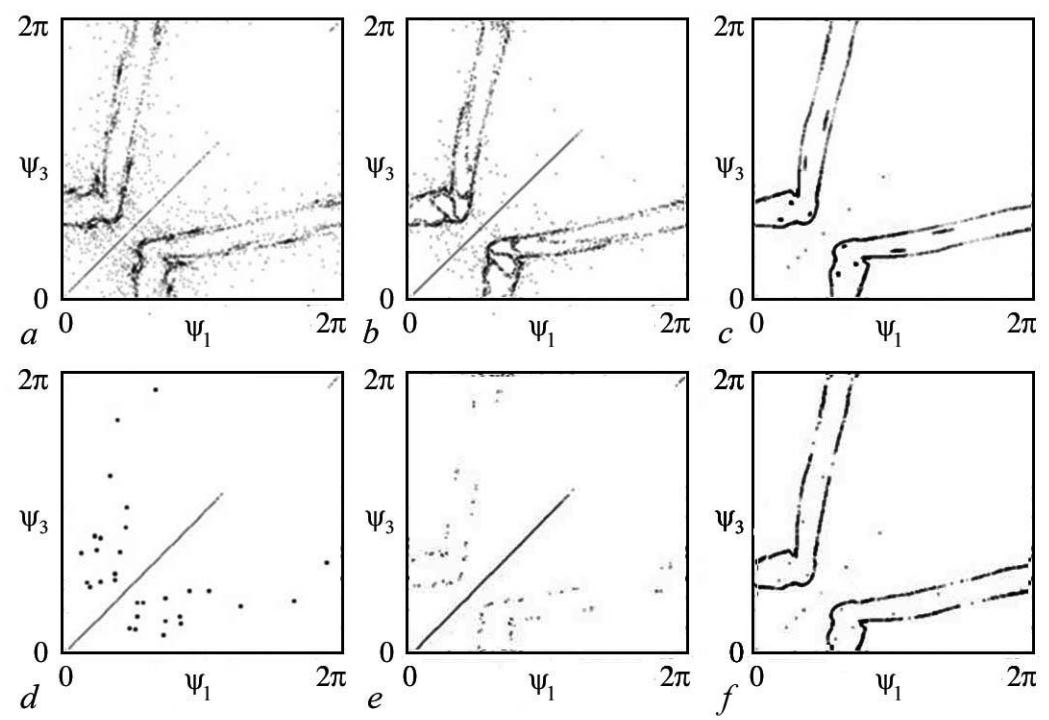


Рис. 5. Фазовые портреты с учетом переходного процесса (a)–(c) и аттракторы (d)–(f) системы (6) для различных d и ε : $d = 0.12$, $\varepsilon = 0.35$ (a), (d); $d = 0.148125$, $\varepsilon = 0.35$ (b), (e); $d = 0.16$, $\varepsilon = 0.348$ (c), (f)

Fig. 5. Phase portraits with transition process (a)–(c) and attractors (d)–(f) of (6) for different parameters d and ε : $d = 0.12$, $\varepsilon = 0.35$ (a), (d); $d = 0.148125$, $\varepsilon = 0.35$ (b), (e); $d = 0.16$, $\varepsilon = 0.348$ (c), (f)

тории на фазовой плоскости симметричны относительно прямой $\phi_1 + \phi_3 = \pi$ и соответствуют консервативной динамике (рис. 3, *a*). При наличии четной гармоники симметрия траекторий на фазовой плоскости нарушается и происходит образование структур, характерных для диссипативной динамики (рис. 3, *b-d*), например, на рис. 3, *c, d* хорошо заметны устойчивые фокусы.

График зависимости ляпуновских показателей от значения амплитуды четной гармоники d при фиксированном значении амплитуды связи $\varepsilon = 0.348$ (рис. 4) показывает, что сумма ляпуновских показателей монотонно убывает с ростом амплитуды четной гармоники, что соответствует увеличению диссипации в системе.

Поскольку в случае систем, близких к консервативным, весьма часто заметную роль играет переходной процесс, на рис. 5 приведены траектории для некоторого набора 25 начальных условий (верхний ряд) и соответствующие аттракторы (нижний ряд). Для построения аттракторов пропускалось 10^6 итераций. Видно, что в системе реализуются как периодические, так и непериодические (рис. 5, *f*) аттракторы, причем число сосуществующих аттракторов невелико.

4. Для дальнейшего исследования сосуществующих аттракторов был проведен поиск циклов различных периодов при помощи численного решения соответствующих алгебраических уравнений методом Ньютона с заданием некоторого достаточно большого набора начальных условий.

Результаты показывают, что, в отличие от ранее исследованных случаев систем со слабой диссипацией, наблюдается существование небольшого количества (как правило, двух симметричных) циклов различных периодов, причем каждый цикл существует в своем диапазоне значений параметра, и области перекрытия этих диапазонов невелики.

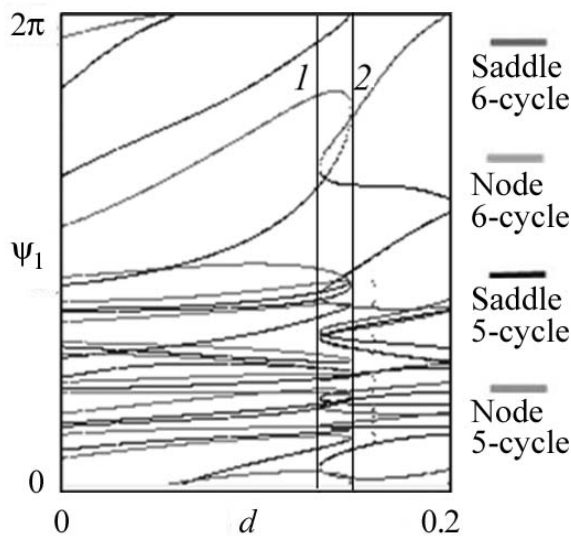


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма для 5- и 6-циклов при значении параметра амплитуды связи $\varepsilon = 0.35$. Линией 1 отмечено значение параметра $d = 0.13301435$, линией 2 – $d = 0.14882155$, использованных далее (см. ниже рис. 7)

Fig. 6. The bifurcation diagram for 5- and 6-cycles (coupling parameter $\varepsilon = 0.35$). Lines 1 marks the parameter $d = 0.13301435$, lines 2 – $d = 0.14882155$, values used for Fig. 7

В качестве примера на рис. 6 приведена бифуркационная диаграмма для 5- и 6-циклов, диапазон существования которых наибольший. Видно, что область сосуществования 5-циклов и 6-циклов достаточно мала.

Таким образом, большая часть возникающих при нарушении симметрии аттракторов является циклами сравнительно невысоких периодов, причем интервалы их существования перекрываются незначительно. Вместе с тем, как видно из рис. 5, *f*, в системе возможно существование и непериодического аттрактора.

На рис. 7 показаны устойчивые и неустойчивые многообразия и их увеличенные фрагменты сосуществующих 5- и 6-циклов. При данных значениях параметра обнаружены гетероклинические структуры. Это позволяет предположить, что хаотический аттрактор образуется в результате нелокальной бифуркации с участием этих структур.

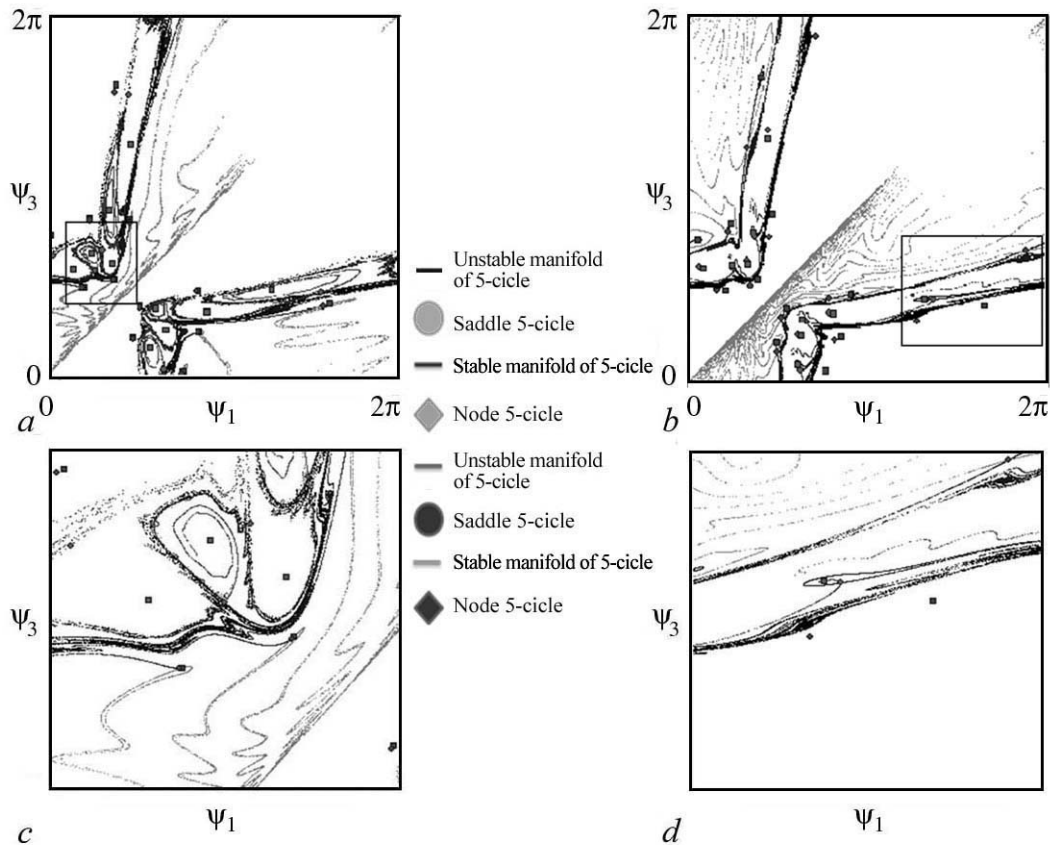


Рис. 7. Многообразия седловых точек и их увеличенные фрагменты для 5- и 6-циклов: $d = 0.13301435$ (a), (c) (линия 1 на рис. 6); $d = 0.14882155$ (b), (d) (линия 2 на рис. 6)

Fig. 7. Stable and unstable manifolds of saddle 5- and 6-cycles and its enlarged fragments for: $d = 0.13301435$ (a), (c) (line 1 of Fig. 6) and $d = 0.14882155$ (b), (d) (line 2 on Fig. 6)

Выводы. Таким образом, при нарушении симметрии в системе связанных фазовых осцилляторов консервативная динамика разрушается, и в фазовом пространстве возникают аттракторы. В отличие от систем с постоянной слабой диссипацией, количество сосуществующих аттракторов невелико. Тем не менее в фазовом пространстве возможно возникновение не только периодических, но и хаотических аттракторов, а также гетероклинических структур.

Вследствие того, что исследованная система достаточно проста и является модельной для широкого класса систем различной природы (слабо взаимодействующих цепочек связанных колебательных систем), можно ожидать, что полученные результаты будут обладать достаточно большой степенью общности.

Библиографический список

1. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
2. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
3. Гонченко С.В., Тураев Д.В. О трех типах динамики и понятии аттрактора // Тр. МИАН. 2017. Т. 297. С. 133–157.
4. Lamb J.S.W., Roberts J.A.G. Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey // Physica D. 1998. Vol. 112. Pp. 1–39.

5. *Lamb J.S.W., Sten'kin O.V.* Newhouse regions for reversible systems with infinitely many stable, unstable and elliptic periodic orbits // *Nonlinearity*. 2004. Vol. 17. Pp. 1217–1244.
6. *Delshams A., Gonchenko S. V., Gonchenko V. S., Lázaro J. T., Sten'kin O.* Abundance of attracting, repelling and elliptic periodic orbits in two-dimensional reversible maps // *Nonlinearity*. 2013. Vol. 26. Pp. 1–33.
7. *Гонченко С.В., Лэмб Й.С.В., Риос И., Тураев Д.* Аттракторы и репеллеры в окрестности эллиптических точек обратимых систем // *Доклады академии наук*. 2014. Т. 454, № 4. С. 375–378.
8. *Leviatan A., Whelan N.D.* Partial dynamical symmetry and mixed dynamics // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77, no. 26. Pp. 5202–5205
9. *Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Turaev D.V.* On the phenomenon of mixed dynamics in Pikovsky–Topaj system of coupled rotators // *Physica D*. 2017. Vol. 350. Pp. 45–57.
10. *Kazakov A.O.* Strange attractors and mixed dynamics in the problem of an unbalanced rubber ball rolling on a plane // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2013. Vol. 18, no. 5. Pp. 508–520.
11. *Feudel U., Grebog C., Hunt B.R., Yorke J.A.* Map with more than 100 coexisting low-period attractors // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 71. Pp. 71–81.
12. *Feudel U., Grebogi C.* Why are chaotic attractors rare in multistable systems? // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 91. no. 13. 134102.
13. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* О природе явления буферности в слабо диссипативных системах // *Теоретическая и математическая физика*. 2006. Т. 146, № 3. С. 447–466.
14. *Martins L.C., Gallas J.A.C.* Multistability, phase diagrams and statistical properties of the kicked rotor: A map with many coexisting attractors // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2008. Vol. 18, no. 6. Pp. 1705–1717.
15. *Feudel U.* Complex dynamics in multistable systems // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2008. Vol. 18, no. 6. Pp. 1607–1626.
16. *Blazejczyk-Okolewska B., Kapitaniak T.* Coexisting attractors of impact oscillator // *Chaos, Solitons & Fractals*. 1998. Vol. 9. Pp. 1439–1443.
17. *Feudel U., Grebogi C.* Multistability and the control of complexity // *Chaos*. 1997. Vol. 7, no. 4. Pp. 597–604.
18. *Rech P., Beims M., Gallas J.* Basin size evolution between dissipative and conservative limits // *Physical Review E*. 2005. Vol. 71, no. 1. 017202.
19. *Jousseph C.F., Kruger T.S., Manchein C., Lopes S.R., Beims M.W.* Weak dissipative effects on trajectories from the edge of basins of attraction // *Physica A*. 2016. Vol. 456. Pp. 68–74.
20. *Sabarathinam S., Thamilmaran K.* Transient chaos in a globally coupled system of nearly conservative Hamiltonian–Duffing oscillators // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2015. Vol. 73. Pp. 129–140.
21. *Erdogan M.B., Marzuola J.L., Newhall K., Tsirakis N.* The structure of global attractors for dissipative Zakharov systems with forcing on the torus // *SIAM J. Applied Dynamical Systems*. 2015. Vol. 14, no. 4. Pp. 1978–1990.
22. *Shrimali M.D., Prasad A., Ramaswami R., Feudel U.* The nature of attractor basins in multistable systems // *Int. J. Bif. & Chaos*. 2008. Vol. 18. Pp. 1675–1688.
23. *de Oliveira J.A., Leonel E.D.* The effect of weak dissipation in two-dimensional mapping // *Int. J. Bif. & Chaos*. 2012. Vol. 22, no.10. 1250248.
24. *Sendina-Nadal I., Letellier C.* Synchronizability of nonidentical weakly dissipative systems // *Chaos*. 2017. Vol. 27. 103118.

25. Kovaleva A. Energy localization in weakly dissipative resonant chains // *Phys. Rev. E*. 2016. Vol. 94. 022208.
26. Yamagishi T. Effect of weak dissipation on a drift orbit mapping // *J. of Physical Society of Japan*. 2000. Vol. 69, no. 9. Pp. 2889–2894.
27. Celletti A., Froeschle C., Lega E. Dissipative and weakly-dissipative regimes in nearly-integrable mappings // *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. 2006. Vol. 16, no. 4 Pp. 757–781.
28. Felk E.V., Savin A.V., Kuznetsov A.P. Transient chaos in multidimensional Hamiltonian system with weak dissipation // *European Physical Journal. Special Topics*. 2017. Vol. 226, no. 9. 1777–1784.
29. Kuznetsov A.P., Savin A.V., Savin D.V. On some properties of nearly conservative dynamics of Ikeda map and its relation with the conservative case // *Physica A*. 2008. Vol. 387, no. 7. Pp. 1464–1474.
30. Felk E.V., Savin A.V., Kuznetsov A.P. Effect of weak dissipation on the dynamics of multidimensional Hamiltonian systems // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2015. Vol. 18, no. 2. Pp. 259–265.
31. Felk E.V., Kuznetsov A.P., Savin A.V. Multistability and transition to chaos in the degenerate Hamiltonian system with weak nonlinear dissipative perturbation // *Physica A*. 2014. Vol. 410. Pp. 561–572.
32. Кузнецов А.П., Савин А.В., Савин Д.В. Особенности динамики почти консервативного отображения Икеды // *Письма в ЖТФ*. 2007. Т. 33, вып. 3. С. 57–63.
33. Pikovsky A., Topaj D. Reversibility vs. synchronization in oscillator lattices // *Physica D*. 2002. Vol. 170. Pp. 118–130.
34. Пиковский А., Розенблюм М., Куртц Ю. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.

References

1. Lichtenberg A., Lieberman M. *Regular and Chaotic Dynamics*. Springer-Verlag, 1983.
2. Schuster H.G. *Deterministic Chaos*. Physik-Verlag, Weinheim, 1984.
3. Gonchenko S.V., Turaev D.V. On three types of dynamics and the notion of attractor. *Proc. of Steklov Inst. of Math.*, 2017, vol. 297, iss. 1, pp. 116–137.
4. Lamb J.S.W., Roberts J.A.G. Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey. *Physica D*, 1998, vol. 112, pp. 1–39.
5. Lamb J.S.W., Sten'kin O.V. Newhouse regions for reversible systems with infinitely many stable, unstable and elliptic periodic orbits. *Nonlinearity*, 2004, vol. 17, pp. 1217–1244.
6. Delshams A., Gonchenko S.V., Gonchenko V. S., Lázaro J. T., Sten'kin O. Abundance of attracting, repelling and elliptic periodic orbits in two-dimensional reversible maps. *Nonlinearity*, 2013, vol. 26, pp. 1–33.
7. Gonchenko S.V., Lamb J.S.W., Rios I., Turaev D. Attractors and repellers near generic elliptic points of reversible systems. *Doklady Mathematics*, 2014, vol. 89, no. 1, p. 65.
8. Leviatan A., Whelan N.D. Partial dynamical symmetry and mixed dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 77, no. 26, pp. 5202–5205.
9. Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Turaev D.V. On the phenomenon of mixed dynamics in Pikovsky–Topaj system of coupled rotators. *Physica D*, 2017, vol. 350, pp. 45–57.

10. Kazakov A.O. Strange attractors and mixed dynamics in the problem of an unbalanced rubber ball rolling on a plane. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2013, vol. 18, no. 5, pp. 508–520.
11. Feudel U., Grebogi C., Hunt B.R., Yorke J.A.. Map with more than 100 coexisting low-period attractors. *Phys. Rev. E*, 1996, vol.71, pp. 71–81.
12. Feudel U., Grebogi C. Why are chaotic attractors rare in multistable systems? *Phys. Rev. Lett.*, 2003, vol. 91, no. 13, 134102.
13. Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. The nature of the bufferness phenomenon in weakly dissipative systems. *Theoretical and Mathematical systems*, 2006, vol. 146, no. 3, pp. 376–392.
14. Martins L.C., Gallas J.A.C. Multistability, phase diagrams and statistical properties of the kicked rotor: A map with many coexisting attractors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2008, vol. 18, no. 6, pp. 1705–1717.
15. Feudel U. Complex dynamics in multistable systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2008, vol. 18, no. 6, pp. 1607–1626.
16. Blazejczyk-Okolewska B., Kapitaniak T. Coexisting attractors of impact oscillator. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1998, vol. 9, pp. 1439–1443.
17. Feudel U., Grebogi C. Multistability and the control of complexity. *Chaos*, 1997, vol. 7, no. 4, pp. 597–604.
18. Rech P., Beims M., Gallas J. Basin size evolution between dissipative and conservative limits. *Physical Review E*, 2005, vol. 71, no. 1, 017202.
19. Jousseph C.F., Kruger T.S., Manchein C., Lopes S.R., Beims M.W. Weak dissipative effects on trajectories from the edge of basins of attraction. *Physica A*, 2016, vol. 456, pp. 68–74.
20. Sabarathinam S., Thamilmaran K. Transient chaos in a globally coupled system of nearly conservative Hamiltonian–Duffing oscillators. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2015, vol. 73, pp. 129–140.
21. Erdogan M.B., Marzuola J.L., Newhall K., Tsirakis N. The structure of global attractors for dissipative zakharov systems with forcing on the torus. *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, 2015, vol. 14, no. 4, pp. 1978–1990.
22. Shrimali M.D., Prasad A., Ramaswami R., Feudel U. The nature of attractor basins in multistable systems. *Int. J. of Bif. & Chaos*, 2008, vol. 18, pp. 1675–1688.
23. de Oliveira J.A., Leonel E.D. The effect of weak dissipation in two-dimensional mapping. *Int. J. of Bif. & Chaos*, 2012, vol. 22, no. 10, 1250248.
24. Sendina-Nadal I., Letellier C. Synchronizability of nonidentical weakly dissipative systems. *Chaos*, 2017, vol. 27, 103118.
25. Kovaleva A. Energy localization in weakly dissipative resonant chains. *Phys. Rev. E*, 2016, vol. 94, 022208.
26. Yamagishi T. Effect of weak dissipation on a drift orbit mapping. *J. of Physical Society of Japan*, 2000, vol. 69, no. 9, pp. 2889–2894.
27. Celletti A., Froeschle C., Lega E.. Dissipative and weakly-dissipative regimes in nearly-integrable mappings. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2006, vol. 16, no. 4, pp. 757–781.
28. Felk E.V., Savin A.V., Kuznetsov A.P. Transient chaos in multidimensional Hamiltonian system with weak dissipation. *European Physical Journal. Special Topics*, 2017, vol. 226, no. 9, pp. 1777–1784.
29. Kuznetsov A.P., Savin A.V., Savin D.V. On some properties of nearly conservative dynamics of Ikeda map and its relation with the conservative case. *Physica A*, 2008, vol. 387, no. 7, pp. 1464–1474.

30. Felk E.V., Savin A.V., Kuznetsov A.P. Effect of weak dissipation on the dynamics of multidimensional Hamiltonian systems. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2015, vol. 18, no. 2, pp. 259–265.
31. Felk E.V., Kuznetsov A.P., Savin A.V. Multistability and transition to chaos in the degenerate Hamiltonian system with weak nonlinear dissipative perturbation. *Physica A*, 2014, vol. 410, pp. 561–572.
32. Kuznetsov A.P., Savin A.V., Savin D.V. Features in the dynamics of an almost conservative Ikeda map. *Technical Physics Letters*, 2007, vol.33, no. 2, p. 122.
33. Pikovsky A., Topaj D. Reversibility vs. synchronization in oscillator lattices. *Physica D*, 2002, vol. 170, pp. 118–130.
34. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurts J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science. Cambridge University Press, 2001.

Кузнецов Александр Петрович родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук (1996), ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, заведующий кафедрой динамических систем Саратовского государственного университета в СФ ИРЭ РАН. Имеет звание профессора (2002). Область научных интересов: динамические системы, теория бифуркаций, синхронизация, квазипериодические колебания и их приложения. Лауреат гранта Президента Российской Федерации, Соросовский профессор (2000, 2001). Опубликовал более 150 статей в российских и международных научных журналах. Под его руководством защищено 8 кандидатских диссертаций. Автор оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ и Лицея прикладных наук. Автор и соавтор 12 монографий, учебников и задачников по нелинейной динамике, теории колебаний и физике. Среди них: «Физика квазипериодических колебаний» «Нелинейность: от колебаний к хаосу», «Нелинейные колебания», «Линейные колебания и волны (сборник задач)», «Задачи физических олимпиад» и др.



Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники
 и электроники им. В.А. Котельникова РАН
 Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский государственный университет
 E-mail: apkuz@rambler.ru

Рахманова Алия Жавдятовна родилась в Саратове (1993), окончила Саратовский государственный университет (2018). Защитила магистерскую работу по теме «Исследование трансформаций фазового пространства системы связанных фазовых осцилляторов при нарушении симметрии», аспирант СГУ. Автор публикаций в сборниках тезисов докладов «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика» и «Нелинейные дни в Саратове для молодых–2014».



Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский государственный университет
 E-mail: aliiia.rakhmanova@mail.ru

Савин Алексей Владимирович родился в Саратове (1980). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2002). Кандидат физико-математических наук (2005), доцент (2010). С 2002 года работает на факультете нелинейных процессов СГУ, доцент кафедры нелинейной физики. Область научных интересов – теоретическая нелинейная динамика, в том числе динамика систем, близких к консервативным.



Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский государственный университет
 E-mail: AVSavin@rambler.ru