



УДК 517.9:537.86:621.373

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-2-61-72>

## Электронное устройство, реализующее странный нехаотический аттрактор Ханта–Отта

*С. П. Кузнецов*

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН  
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
E-mail: spkuz@yandex.ru

*Поступила в редакцию 30.10.2018, принята к публикации 18.12.2018*

**Тема и цель исследования.** Цель работы – предложить схему электронного устройства, представляющего собой неавтономную динамическую систему со странным нехаотическим аттрактором, нечувствительным к вариации параметров (с тем существенным ограничением, что остается неизменным задаваемое иррациональным числом отношение частот компонент внешнего воздействия). **Исследуемые модели.** Рассматривается схема на основе двух автоколебательных элементов, возбуждающихся поочередно за счет модуляции параметров, причем фазы возбуждения передаются от одной подсистемы к другой так, что за период модуляции для них реализуется отображение с определенными топологическими свойствами, соответствующими формальной модели, предложенной Хантом и Оттом. **Результаты.** Проведено моделирование процесса функционирования схемы в программной среде Multisim, результаты которого позволили подтвердить правомерность отнесения аттрактора к классу Ханта–Отта. Представлены осциллограммы порождаемых системой сигналов, фазовый портрет аттрактора, диаграммы, иллюстрирующие топологическую природу отображения для фаз и характер инвариантного распределения плотности вероятности на аттракторе. **Обсуждение.** С точки зрения дискутируемых возможных применений странных нехаотических аттракторов (системы коммуникации, обработки информации, криптографические схемы) грубость рассмотренной системы составляет очевидное преимущество. В методическом плане предлагаемый материал может быть интересен для студентов и аспирантов, специализирующихся в области радиофизики и электроники, в плане обучения принципам построения и анализа систем со сложной динамикой. Хотя приведенная схема является низкочастотной (звуковые частоты), она, очевидно, допускает модификацию для использования в области частот радиодиапазона.

*Ключевые слова:* динамическая система, странный нехаотический аттрактор, генератор сложных сигналов, схемотехническое моделирование.

*Образец цитирования:* Кузнецов С.П. Электронное устройство, реализующее странный нехаотический аттрактор Ханта–Отта // Изв. вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 2. С. 61–72. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-2-61-72>

## An electronic device implementing a strange nonchaotic Hunt–Ott attractor

*S. P. Kuznetsov*

Kotelnikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch,  
38, Zelenaya st., 410019 Saratov, Russia  
E-mail: [spkuz@yandex.ru](mailto:spkuz@yandex.ru)

*Received 30.10.2018, accepted for publication 18.12.2018*

**Topic and aim.** The aim of the article is to propose an electronic device representing a non-autonomous dynamical system with a strange nonchaotic attractor insensitive to variation of parameters (with the only limitation that the ratio of the frequencies of the components of the external control driving remains unchanged being equal to a fixed irrational number). **Investigated model.** A scheme is composed of two self-oscillating elements excited alternately due to the external modulation of parameters, and the excitation phases are transferred from one subsystem to another in such way that on a period of the modulation they are transformed with fulfillment of certain topological properties corresponding to the formal model proposed by Hunt and Ott. **Results.** The simulation of the operation of the circuit in Multisim software has been carried out, the results of which allow to confirm validity of the attributing the attractor to the Hunt–Ott class. Oscilloscope traces of signals generated by the system, phase portrait of the attractor, diagrams illustrating the topological nature of the transformation for the phases and the nature of the invariant probability density distribution on the attractor are presented. **Discussion.** From the point of view of possible applications of strange nonchaotic attractors (communication systems, information processing, cryptographic schemes), the robustness of the considered system is an obvious advantage. In terms of methodology, the proposed material may be interesting for teaching undergraduate and graduate students specializing in radiophysics and electronics with principles of design and analyzing systems with complex dynamics. Although the scheme is demonstrated for a low-frequency band (sound frequencies), it obviously allows modification for use in the radio-frequency band.

*Key words:* dynamical system, strange nonchaotic attractor, complex signal generation, circuit simulation

*Reference:* Kuznetsov S.P. An electronic device implementing a strange nonchaotic Hunt–Ott attractor. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 2, pp. 61–72. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-2-61-72>

### Введение

Концепция странного нехаотического аттрактора введена в 1984 г. в работе Гребжи, Отта, Пеликана и Йорке [1]. Термин подчеркивает, с одной стороны, присущую аттрактору фрактальную структуру, в отличие от тора-аттрактора в виде гладкой поверхности (гиперповерхности) в фазовом пространстве («странный»), а с другой стороны – противопоставляет данный объект хаосу в смысле отсутствия экспоненциальной неустойчивости траекторий и положительных показателей Ляпунова («нехаотический»).

Странный нехаотический аттрактор – феномен, характерный для диссипативных нелинейных систем с квазипериодическим изменением коэффициентов уравнений во времени [1, 2]. Это могут быть системы с непрерывным временем, находящиеся под действием двух или более составляющих с иррациональным отношением частот, или системы с дискретным временем в виде отображений, где коэффициенты изменяются с периодом, отличным от такта отсчета дискретно-го времени на иррациональный коэффициент.

В связи с тем, что странные нехаотические аттракторы обычно встречаются в области параметров между регулярной динамикой и хаосом, кажется естественным думать, что для них характерно отсутствие грубости, то есть они чувствительны по отношению к малым изменениям оператора эволюции. Известен, однако, интересный пример, где странный нехаотический аттрактор оказывается грубым по отношению к вариациям параметров и функций в определяющих уравнениях, правда, при одном принципиальном ограничении, что заданное иррациональным числом соотношение частот воздействия фиксировано и не варьируется. Этот пример предложен

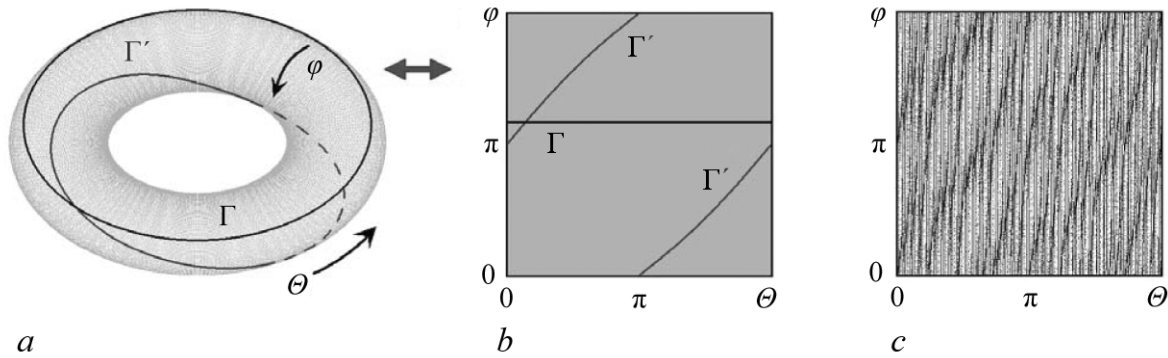


Рис. 1. Диаграммы, иллюстрирующие топологические свойства отображения Ханта и Отта на торе (а) и на развертке тора (b), где за одну итерацию линия  $\Gamma$  переводится в линию  $\Gamma'$ , и фазовый портрет аттрактора отображения (1) при  $K = 0.2$ ,  $F(\varphi, \theta) = \sin 2\varphi$ ,  $w = (\sqrt{5} - 1)/2$ , где показано  $10^6$  точек (с)

Fig. 1. Diagrams illustrating topological properties of the Hunt–Ott map on torus (a), and represented on the unit square (b), where in one iteration, the line  $\Gamma$  is transferred to the line  $\Gamma'$ , and phase portrait of the attractor of the map (1) with  $K = 0.2$ ,  $F(\varphi, \theta) = \sin 2\varphi$ ,  $w = (\sqrt{5} - 1)/2$ , where  $10^6$  points are shown (c)

в работе Ханта и Отта [3] и представляет собой отображение с квазипериодическим изменением одного из коэффициентов\*:

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \theta_n + KF(\varphi_n, \theta_n), \quad \theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi w \pmod{2\pi}. \quad (1)$$

Здесь  $F(\varphi_n, \theta_n)$  – непрерывная гладкая функция, имеющая период  $2\pi$  по обоим аргументам;  $K$  – параметр нелинейности;  $w$  – фиксированное иррациональное число. Как это часто делается при рассмотрении модельных систем с квазипериодической динамикой, примем для отношения частот величину золотого среднего, полагая  $w = (\sqrt{5} - 1)/2$ .

Согласно заключениям Ханта и Отта, в некоторой области параметра  $0 < K < K_c$  отображение (1) характеризуются присутствием странного нехаотического аттрактора, у которого один показатель Ляпунова отрицательный, а другой нулевой (последний ассоциируется с возмущениями переменной  $\theta$ ). Конкретная величина порогового параметра  $K_c$  зависит, разумеется, от задания функции  $F$ .

Причина, по которой аттрактор Ханта–Отта является грубым в указанном выше смысле, состоит в топологической природе отображения на торе (рис. 1, a, b). А именно, линия, обходящая тор по параллели (такая, как линия  $\varphi = \text{const}$ ), трансформируется при действии отображения в кривую, совершающую один оборот по меридиану и один оборот по параллели. При повторных итерациях отображения количество витков образа по меридиану увеличивается каждый раз на единицу, и в пределе стремится к бесконечности. В присутствии неоднородности, обусловленной наличием нелинейного члена в первом уравнении, данное свойство определяет фрактальную природу инвариантного распределения фазовой плотности на аттракторе. Представление об этом распределении дает фазовый портрет, показанный на рис. 1, c при определенном конкретном задании функции и параметров в отображении (1).

Отображение Ханта–Отта (1) представляет собой искусственную математическую конструкцию, и вопрос о возможности ее реализации как физической системы нетривиален [5].

\*По замечанию Д.В. Аносова [4], интересный и остающийся не изученным на математически строгом уровне вопрос состоит в анализе класса систем, представляющих собой возмущения ниль-поток, а также аналогичных систем с дискретным временем, в частности, отображений последования для ниль-поток. Как простейший пример такого рода, Аносов указывает задачу о возмущении отображения двумерного тора  $(x, y) \mapsto (x+w, x+y) \pmod{1}$ , которая, как легко видеть, как раз соответствует форме отображения Ханта–Отта.

В работе Жалнина и Кузнецова [6] был указан первый пример, где аттрактор Ханта–Отта имеет место в системе неавтономных дифференциальных уравнений как аттрактор построенного за определенный период стробоскопического отображения для пары связанных автоколебательных элементов с квазипериодическим внешним воздействием. Другой вариант системы со странным нехаотическим аттрактором Ханта–Отта рассмотрен в работе Дорошенко и Кузнецова [7]. Это кольцевое устройство с квазипериодической модуляцией параметров, которое содержит усилитель, нелинейный элемент и фильтры.

Цель настоящей статьи в том, чтобы указать схему электронного устройства, обеспечивающего реализацию аттрактора Ханта–Отта, и продемонстрировать ее функционирование посредством моделирования динамики в программной среде Multisim.

### Схема электронного устройства и ее функционирование

Обратимся к показанной на рис. 2 схеме, реализующей идею работы [6]. Схема составлена из двух автоколебательных подсистем – осцилляторов на основе колебательных контуров, один из которых образован катушкой индуктивности L1 и конденсатором C1, а второй, соответственно, L2 и C2. Поскольку индуктивности одинаковы, а емкость во втором контуре в четыре раза меньше, собственные частоты находятся в отношении 1 : 2, что при указанных на схеме номиналах составляет  $f_0 = 5$  кГц и  $2f_0 = 10$  кГц. Отрицательное сопротивление в каждый контур вносится элементом на основе операционного усилителя (на схеме, соответственно, OA1 и OA2). Нелинейная проводимость, обеспечивающая увеличение потерь энергии с ростом амплитуды колебаний, вводится элементами в виде параллельно соединенных диодов с противоположным

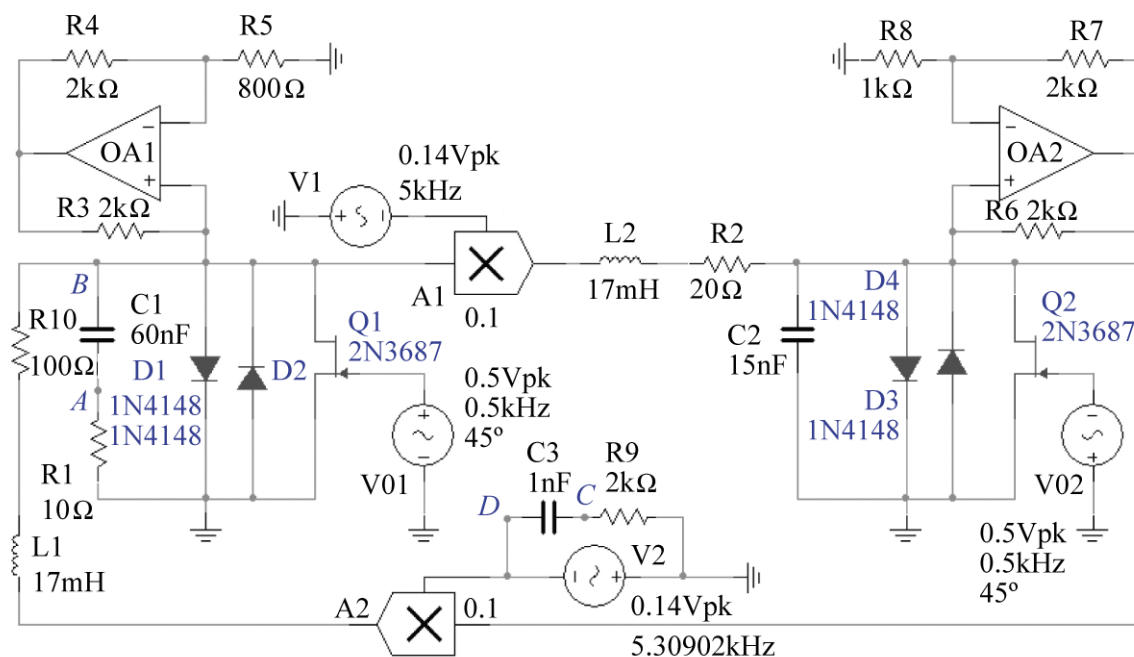


Рис. 2. Схема электронного устройства, где реализуется странный нехаотический аттрактор Ханта–Отта в стробоскопическом отображении (шаг по времени  $T = 2$  мс). Коэффициент передачи аналоговых умножителей A1 и A2 принят равным  $0.1 \text{ В}^{-1}$

Fig. 2. Circuit diagram of the electronic device, where a strange nonchaotic attractor of Hunt and Ott takes place in the stroboscopic map (time step  $T = 2$  ms). Transfer coefficients of the analog multipliers A1 and A2 are taken equal to  $0.1 \text{ V}^{-1}$

направлением пропускания тока (D1, D2 и D3, D4). Для модуляции параметра, ответственного за возникновение автоколебаний, в каждый контур включен полевой транзистор, проводимость которого в цепи сток–исток управляется подаваемым на затвор переменным напряжением на частоте 0.5 кГц (период  $T = 2$  мс) от источников V01 и V02, притом с противоположной полярностью мгновенного напряжения в одной и другой подсистеме. На одном полупериоде модуляции первый осциллятор находится в режиме генерации колебаний, а второй – под порогом генерации. На следующем полупериоде они меняются ролями. Первый осциллятор действует на второй через посредство умножителя A1, осуществляющего смещение поступающего сигнала и вспомогательного сигнала  $V_1$  частоты  $f_1 = f_0 = 5$  кГц. При этом появляется составляющая на суммарной частоте, стимулирующая начало генерации второго осциллятора в начале его стадии активности на частоте  $2f_0$  с передачей фазы от первого осциллятора. В свою очередь, второй генератор действует на первый через посредство умножителя A2, производящего смещение поступающего от него сигнала с вспомогательным сигналом  $V_2$  частоты  $f_2 = 5.30902$  кГц. На выходе умножителя появляется составляющая на разностной частоте, которая стимулирует начало генерации первого осциллятора при переходе к стадии активности. При этом фаза возникающих колебаний отвечает фазе второго осциллятора с добавкой, определяемой разностью частот  $f_1$  и  $f_2$ :  $\Delta\theta/2\pi = (f_2 - f_1)f_0^{-1} \approx (\sqrt{5} - 1)/2$ .

Рассмотрим, как за период модуляции параметра  $T$  преобразуются фазы колебаний осцилляторов. Подчеркнем, что период  $T$  содержит целое, притом достаточно большое, число периодов первого вспомогательного сигнала  $V_1$ . В нашем случае  $N = Tf_1^{-1} = 10$ .

Пусть на стадии активности первого осциллятора его колебания, аппроксимированные гармонической функцией, представляются в виде  $U_1 \sim \sin(\omega_0 t - \varphi)$ . Также представим вспомогательные сигналы как  $V_1 \sim \sin \omega_0 t$  и  $V_2 \sim \sin(2\omega_0 t + \theta)$ , где  $\theta = 2\pi(f_2 - f_1)t + \text{const}$ .

Смещение колебаний первого осциллятора с вспомогательным сигналом  $V_1$  дает  $\sin(\omega_0 t - \varphi) \sin \omega_0 t = -1/2 \cos(2\omega_0 t - \varphi) + \dots$ , где член, выписанный в правой части в явном виде, отвечает составляющей на суммарной частоте. Она действует на второй осциллятор резонансным образом и стимулирует его возбуждение при переходе к стадии активности, что дает  $U_2 \sim \sin(2\omega_0 t - \varphi + \text{const})$ .

Далее, смещение отклика второго осциллятора с вспомогательным сигналом  $V_2$  дает  $\sin(2\omega_0 t - \varphi + \text{const}) \sin(\omega_0 t + \theta) = 1/2 \cos(\omega_0 t - \varphi - \theta + \text{const}) + \dots$ , где выписанный член представляет составляющую на разностной частоте. Благодаря резонансной стимуляции, возбуждающиеся на следующей стадии активности колебания первого осциллятора будут определяться соотношением  $U_1 \sim \sin(\omega_0 t - \varphi - \theta + \text{const})$ .

Таким образом, преобразование фазы за период модуляции в рассматриваемом приближении дается выражением  $\varphi_{n+1} = \varphi_n + \theta_n + \text{const}$ . Кроме того, следует учесть, что  $\theta_{n+1} = \theta_n + (\omega_2 - \omega_1)T$ . При более аккуратном описании в первой формуле вместо константы будет присутствовать некоторая  $2\pi$ -периодическая по обоим аргументам функция  $F(\theta_n, \varphi_n)$ , что соответствует форме отображения Ханта и Отга.

Заметим, что цепочка C3, R9 не существенна с точки зрения функционирования схемы и добавлена с целью получения данных при моделировании динамики для их обработки, как описано ниже.

## Моделирование и иллюстрации динамики схемы в среде Multisim

Показанная на рис. 2 схема была реализована и исследовалась посредством моделирования в программной среде Multisim. Это популярное современное средство схемотехнического моделирования [8], при работе с которым пользователь, следуя стандартным обозначениям радиотех-

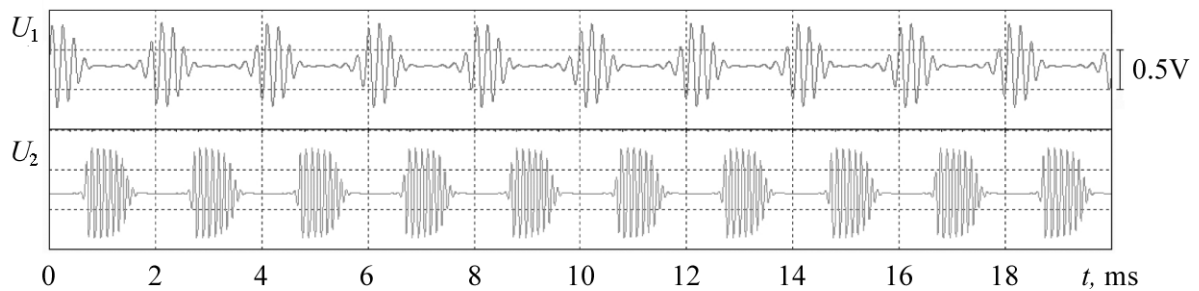


Рис. 3. Осциллограммы колебаний напряжения для двух осцилляторов, составляющих систему, полученные при моделировании функционирования схемы в среде Multisim;  $U_1$  – напряжение на цепочке R1C1, а  $U_2$  – на конденсаторе C2

Fig. 3. Oscilloscope traces of voltage oscillations for two subsystems constituting the electronic device as obtained by simulating the functioning of the circuit in Multisim;  $U_1$  is a voltage on the chain R1C1, and  $U_2$  is a voltage on the capacitor C2

ники и электроники, изображает на экране компьютера электронную схему, набирая детали из имеющейся в распоряжении библиотеки. Программа позволяет моделировать функционирование схемы с использованием обширного набора виртуальных приборов; в их числе осциллографы и анализатор спектра.

На рис. 3 показаны осциллограммы колебаний напряжения, производимых двумя составляющими систему осцилляторами, которые получены копированием с экрана виртуального осциллографа при моделировании функционирования схемы. На рис. 4 показан фазовый портрет аттрактора, полученный с помощью виртуального осциллографа, где по вертикальной оси отложено напряжение на сопротивлении R1, а по горизонтальной – на цепочке C1R1, то есть в узлах, обозначенных на схеме, соответственно, A и B.

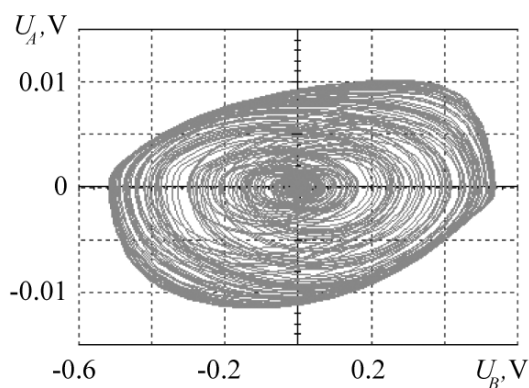


Рис. 4. Портрет аттрактора в проекции из расширенного фазового пространства на фазовую плоскость одного из осцилляторов (низкочастотного), полученный при моделировании функционирования схемы в среде Multisim. По вертикальной оси отложено напряжение на сопротивлении R1 (узел A), а по горизонтальной – напряжение на цепочке C1R1 (узел B)

Fig. 4. Portrait of the attractor in the projection from the extended phase space on the phase plane of one of the oscillators (the low-frequency one), obtained by simulating the circuit in Multisim; the vertical axis represents the voltage on the resistor R1 (node A), and the horizontal axis the voltage on the chain C1R1 (node B)

Убедимся, что эволюция фаз на последовательных стадиях возбуждения действительно следует отображению, принадлежащему тому же топологическому классу, что и модель Ханта–Отта. Для этого используем следующую методику. Подключим четырехлучевой виртуальный осциллограф так, чтобы один луч управлялся напряжением в узле A, второй – в узле B, третий и четвертый – соответственно, в узлах C и D, то есть напряжениями на резисторе R9 и на цепочке C3R9. В среде Multisim с помощью приложения Grapher предусмотрена запись в файл данных, получаемых в процессе моделирования, с возможностью дальнейшей цифровой обработки. Шаг выборки по времени естественно установить равным периоду модуляции ( $T=2$  мс) и при этом надо правильно подобрать моменты выборки, чтобы они отвечали стадиям активности первого осциллятора. Последнее обеспечивается подбором фазового параметра источников переменного напряжения V1 и V2. Конкретно, в рассматри-

ваемой схеме этот фазовый угол задан равным  $45^\circ$ , что оказывается приемлемым. Записанный файл, содержащий две пары временных рядов  $U_{C1R1}^n, U_{R1}^n$  и  $U_{C3R9}^n, U_{R9}^n$ , обрабатывается внешней программой. Сначала выполняется нормировка так, чтобы сумма квадратов элементов каждого временного ряда стала одинаковой. Затем, используя две пары нормированных величин  $\bar{U}_{C1R1}^n, \bar{U}_{R1}^n$  и  $\bar{U}_{C3R9}^n, \bar{U}_{R9}^n$ , относящихся к моменту времени  $nT$ , определяем две фазы, как  $\varphi_n = \arg(\bar{U}_{C1R1}^n + i, \bar{U}_{R1}^n)$  и  $\theta_n = \arg(\bar{U}_{C3R9}^n + i, \bar{U}_{R9}^n)$ , причем фазы приводятся к интервалу от 0 до  $2\pi$ .

На рис. 5, *a* представлены в графическом виде результаты анализа отображения для фаз, которые были получены по описанной методике при схемотехническом моделировании динамики устройства. В процессе обработки временных рядов, при попадании значения  $\varphi_n$  в определенный интервал (конкретно выбрана ширина  $\pi/10$ ) на график наносится точка  $(\theta_n, \varphi_n)$  серым цветом и точка  $(\theta_{n-1}, \varphi_{n-1})$  черным цветом. Кривая, вдоль которой располагаются черные точки, имеет образом кривую, вдоль которой лежат серые точки. Топология этих кривых, как показывает сравнение рис. 3, *a* и рис. 1, *b*, соответствует предположениям модели Ханта и Отта. Множество точек, расположенных вдоль кривой, огибающей тор по параллели, трансформируется при воздействии отображения так, что образ представляет собой множество точек, локализованных вблизи кривой, совершающей один оборот по меридиану и один по параллели.

На рис. 5, *b*, который построен путем обработки тех же самых временных рядов, представлено множество точек на плоскости фазовых переменных  $(\theta_n, \varphi_n)$ , дающее представление о распределении инвариантной меры на аттракторе. Эту диаграмму следует сравнить с рис. 1, *c* для отображения Ханта–Отта, что демонстрирует очевидное качественное сходство.

На рис. 6 показан график функции  $F(\varphi, \theta)$ , которая соответствует аппроксимации динамики рассматриваемой схемы отображением (1). Для построения использовались те же самые упомянутые выше временные ряды. Имея значения фаз в моменты времени  $nT$  и  $(n+1)T$ , а именно,  $(\varphi_n, \theta_n, \varphi_{n+1})$ , и полагая  $KF(\varphi_n, \theta_n) = \varphi_{n+1} - \varphi_n - \theta_n$ , имеем набор триплетов  $(\varphi, \theta, KF)$ . Этот массив триплетов использовался для построения графика в пакете Mathematica.

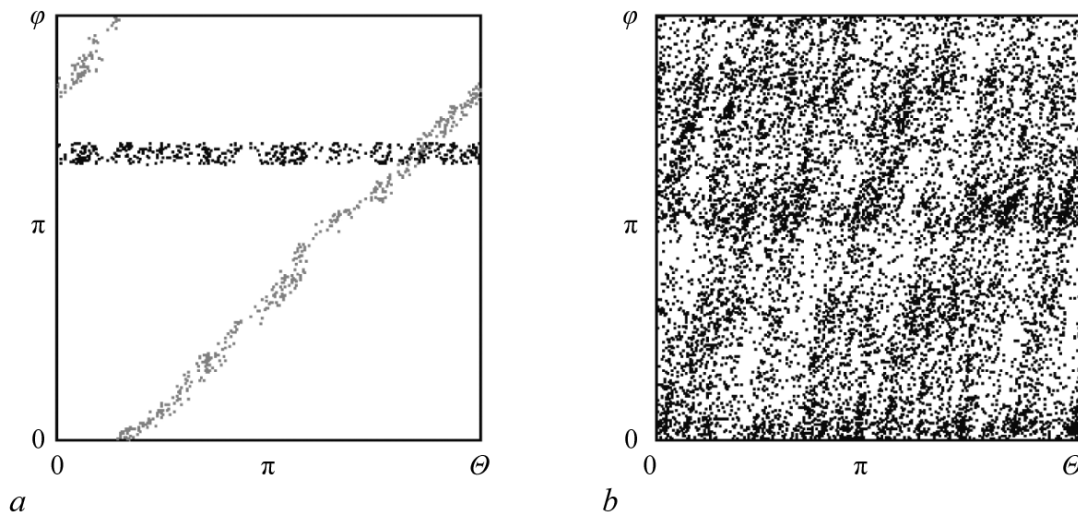


Рис. 5. Диаграмма, иллюстрирующая основное топологическое свойство стробоскопического отображения для фаз (*a*), и диаграмма, визуализирующая характерное для аттрактора Ханта–Отта распределение плотности вероятности на плоскости фазовых переменных (*b*). Диаграммы построены путем обработки временных рядов, полученных при моделировании динамики схемы в среде Multisim

Fig. 5. A diagram illustrating the main topological property of the stroboscopic map for phases (*a*) and a diagram visualizing the probability density distribution on the plane of phase variables (*b*) as obtained by processing time series from simulating the dynamics of the circuit in Multisim

Сначала производилась интерполяция функции  $KF$  с учетом ее периодичности по аргументам  $\varphi$ ,  $\theta$ , а затем построение графика с помощью команды Plot3D. Тот факт, что результатом построения является хорошо определенная функция двух аргументов, свидетельствует в пользу правомерности трактовки динамики системы в терминах отображения Ханта–Отта.

Поскольку в рамках данного исследования мы обходим использование уравнений динамики в явной форме, классический способ численного определения показателей Ляпунова [9–11] непригоден. Вместо этого поступим следующим образом. Используя Multisim, реализуем две копии схемы, показанной на рис. 2, и зададим слегка различающиеся начальные условия для одной и другой копии.

Сигнал, который будет анализироваться, получается как разность напряжений на выходе двух аналоговых умножителей, подключенных так, как показано на рис. 7. А именно, входы одного умножителя соединены с узлом  $A$  первой системы и узлом  $B$  второй системы (см. обозначения соответствующих точек на рис. 2), а входы другого – наоборот, с узлом  $A$  второй системы и узлом  $B$  первой системы.

Используя приложение Grapher, можно записать значения этой разности напряжений в виде временного ряда  $\Delta_n$  с шагом по времени, равным периоду модуляции, и моментами выборки, отвечающими стадиям активности осциллятора с рабочей частотой  $\omega_0$  в одной и другой системе. Можно показать, что эта разность напряжений пропорциональна разности фазовых переменных  $\varphi$  первой и второй системы, в предположении, что их состояния близки. На рис. 8 показан график зависимости величины  $\ln \Delta$  от дискретного времени  $n$ . Наклонная прямая получена как аппроксимация методом наименьших квадратов. Ясно, что угловой коэффициент этой прямой дает оценку показателя Ляпунова для аттрактора в отображении за период модуляции. Численно он составляет  $\Lambda \approx -0.026$  и является отрицательным, как это и должно быть для наибольшего ненулевого показателя странного нехаотического аттрактора.

На рис. 9 показаны спектры мощности первого и второго осциллятора в линейном и логарифмическом масштабе. Согласно теоретическим результатам [12, 13, 2], спектры, порождаемые

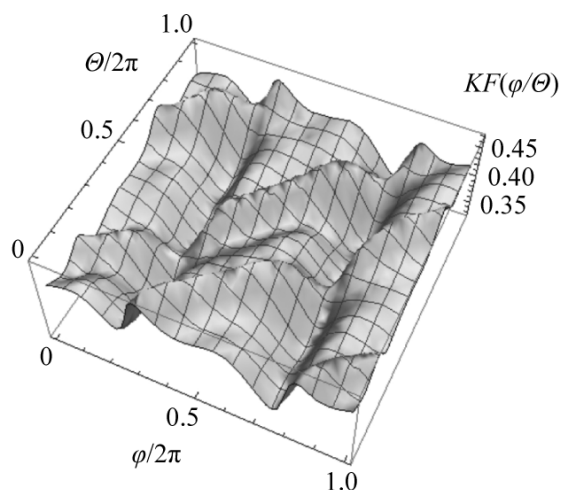


Рис. 6. График функции  $F(\varphi, \theta)$ , соответствующей аппроксимации динамики отображением (1), построенный путем обработки данных моделирования в среде Multisim, как описано в тексте

Fig. 6. Plot of the function  $F(\varphi, \theta)$  corresponding to approximation of the dynamics by the map (1), constructed by processing the simulation data in Multisim as described in the text

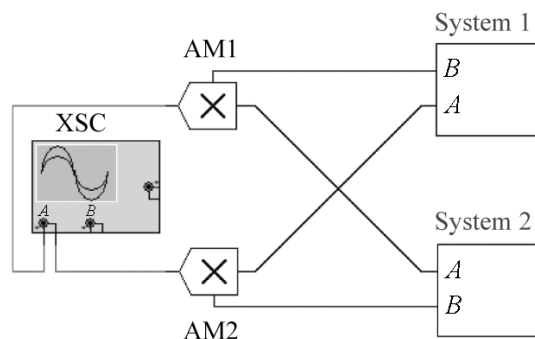


Рис. 7. Схема, используемая для получения данных с целью оценки показателя Ляпунова. Каждый из двух блоков, обозначенных как System 1 и System 2, представляет собой схему, приведенную на рис. 2, причем отвод напряжений, отвечающих выходным клеммам  $A$  и  $B$  каждого блока, осуществляется от точек, обозначенных на схеме рис. 2 буквами  $A$  и  $B$

Fig. 7. The scheme used to obtain data to evaluate the Lyapunov exponent. Each of the two blocks labeled System 1 and System 2 is a device shown in Fig. 2, with the output voltages being diverted from the terminals  $A$  and  $B$  of each block at the points indicated in the diagram of Fig. 2 as  $A$  and  $B$



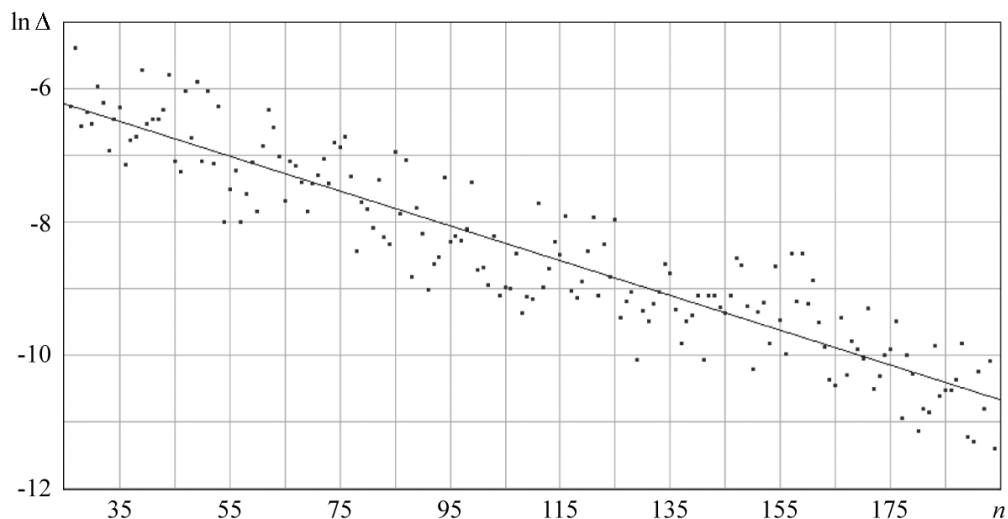


Рис. 8. Диаграмма, иллюстрирующая обработку данных моделирования для получения показателя Ляпунова, который оценивается как угловой коэффициент прямой, аппроксимирующей зависимость логарифма уровня разностного сигнала в схеме на рис. 5 от времени, с шагом выборки, равным периоду чередования стадий активности и подавления составляющих систему осцилляторов

Fig. 8. A diagram illustrating processing of the simulation data to obtain the Lyapunov exponent, which is estimated as a slope of the straight line approximating the dependence of the logarithm of the difference signal level in the circuit shown in Fig. 5 versus time, with a sampling step equal to the period of alternation of the stages of activity and suppression for the oscillators constituting the system

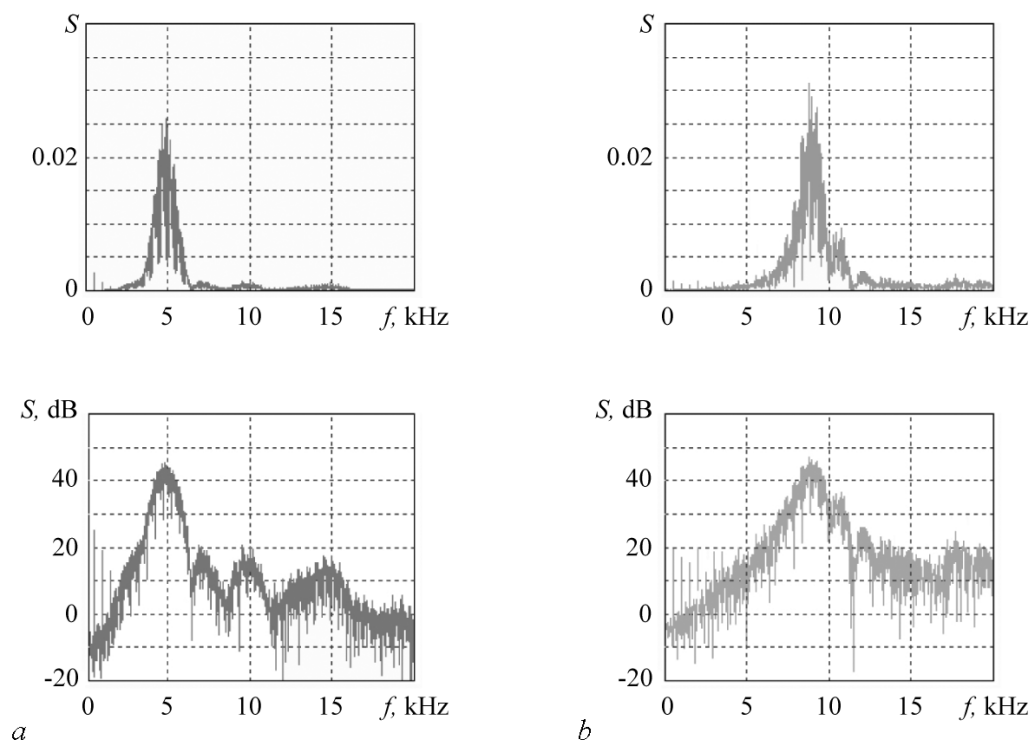


Рис. 9. Спектры мощности первого (а) и второго (b) осцилляторов, полученные при моделировании функционирования схемы в среде Multisim в линейном (верхний ряд) и логарифмическом (нижний ряд) масштабе копированием экрана виртуального анализатора спектра

Fig. 9. Power density spectra of the first (a) and second (b) oscillators, obtained by simulating the operation of the circuit in Multisim in linear (top row) and logarithmic (bottom row) scale as snapshots of the spectrum analyzer screen

странными нехаотическими аттракторами, относятся к классу так называемых сингулярно непрерывных спектров, занимая промежуточное положение между спектрами хаотических сигналов с одной стороны (сплошной спектр) и регулярных, периодических и квазипериодических сигналов с другой стороны (дискретный спектр). Поскольку в рассматриваемом здесь случае имеется обоснованная уверенность в странной нехаотической природе аттрактора, приведенные изображения, как снимки с виртуального анализатора спектра при моделировании в среде Multisim, служат иллюстрацией того, как может выглядеть сингулярно непрерывный спектр в реальном эксперименте.

### Заключение

В статье указана схема электронного устройства, представляющего собой неавтономную динамическую систему со странным нехаотическим аттрактором специального типа, который отвечает по своим свойствам аттрактору модельного отображения, предложенного в работе Ханта и Отта. Главная особенность этого аттрактора в его грубости, то есть нечувствительности к вариации параметров при том ограничении, что остается неизменным задаваемое иррациональным числом отношение частот компонент внешнего воздействия. Представлены результаты моделирования процесса функционирования системы в программной среде Multisim, подтверждающие соответствие аттрактора предположениям модели Ханта и Отта. Приводятся осциллограммы порождаемых системой сигналов, фазовый портрет аттрактора, диаграммы, иллюстрирующие топологическую природу отображения для фаз и характер инвариантного распределения меры, отвечающей аттрактору.

Если говорить о возможных применениях странных нехаотических аттракторов (системы коммуникации, обработки информации, криптографии) [14–17], грубость рассмотренной системы составляет ее очевидное преимущество.

В методическом плане предлагаемый материал может быть интересен для студентов и аспирантов, специализирующихся в области радиофизики и электроники, в плане обучения принципам построения и анализа систем со сложной динамикой.

*Автор выражает благодарность А.Г. Рожнёву за оказанную помощь. Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.*

### Библиографический список

1. Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A. Strange attractors that are not chaotic // Physica D. 1984. Vol. 13, № 1–2. P. 261–268.
2. Feudel U., Kuznetsov S., Pikovsky A. Strange Nonchaotic Attractors. Dynamics between Order and Chaos in Quasiperiodically Forced Systems. Singapore: World Scientific, 2006.
3. Hunt B.R., Ott E. Fractal properties of robust strange nonchaotic attractors // Physical Review Letters. 2001. Vol. 87, № 25. 254101.
4. Аносов Д.В. Динамические системы в 60-е годы: Гиперболическая революция // Математические события XX века. М.: Фазис, 2003. С. 1–18.
5. Kim J.W., Kim S.Y., Hunt B., Ott E. Fractal properties of robust strange nonchaotic attractors in maps of two or more dimensions // Physical Review E. 2003. Vol. 67, № 3. 036211.
6. Жалнин А.Ю., Кузнецов С.П. О возможности реализации в физической системе странного нехаотического аттрактора Ханта и Отта // ЖТФ. 2007. Т. 77, № 4. С. 10–18.
7. Doroshenko V.M., Kuznetsov S.P. A system governed by a set of nonautonomous differential

- equations with robust strange nonchaotic attractor of Hunt and Ott type // *European Physical Journal. Special Topics*. 2017. Vol. 226, № 9. С. 1765–1775.
8. Хернитер М.Е. Multisim. Современная система компьютерного моделирования и анализа схем электронных устройств. М: Издательский дом «ДМК-пресс», 2006.
  9. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them // *Meccanica*. 1980. Vol. 15. P. 9–30.
  10. Kuznetsov S.P. *Hyperbolic Chaos: A Physicist's View*. Beijing: Higher Education Press and Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2012.
  11. Pikovsky A., Politi A. *Lyapunov Exponents: A Tool to Explore Complex Dynamics*. Cambridge University Press, 2016.
  12. Pikovsky A.S., Feudel U. Correlations and spectra of strange nonchaotic attractors // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1994. Vol. 27. P. 5209–5219.
  13. Pikovsky A.S., Zaks M.A., Feudel U., Kurths J. Singular continuous spectra in dissipative dynamics // *Physical Review E*. 1995. Vol. 52, № 1. С. 285–296.
  14. Zhou C., Chen T. Robust communication via synchronization between nonchaotic strange attractors // *Europhysics Letters*. 1997. Vol. 38, № 4. С. 261–265.
  15. Ramaswamy R. Synchronization of strange nonchaotic attractors // *Physical Review E*. 1997. Vol. 56, № 6. P. 7294–7296.
  16. Aravindh M.S., Venkatesan A., Lakshmanan M. Strange nonchaotic attractors for computation // *Physical Review E*. 2018. Vol. 97, № 5. P. 052212.
  17. Rizwana R., Mohamed I.R. Applicability of strange nonchaotic Wien-bridge oscillators for secure communication // *Pramana*. 2018. Vol. 91, № 1. 10.

## References

1. Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A. Strange attractors that are not chaotic. *Physica D*, 1984, vol. 13, no. 1–2, pp. 261–268.
2. Feudel U., Kuznetsov S., Pikovsky A. *Strange Nonchaotic Attractors. Dynamics between Order and Chaos in Quasiperiodically Forced Systems*. Singapore: World Scientific, 2006.
3. Hunt B.R., Ott E. Fractal Properties of Robust Strange Nonchaotic Attractors. *Phys. Rev. Lett.*, 2001, vol. 87, no. 25, 254101.
4. Anosov D.V. Dynamical systems in the 1960s: The hyperbolic revolution. In book: *Mathematical Events of the Twentieth Century*. Berlin Heidelberg, Springer-Verlag and Moscow, PHASIS, 2006, pp. 1–18.
5. Kim J.W., Kim S.Y., Hunt B., Ott E. Fractal properties of robust strange nonchaotic attractors in maps of two or more dimensions. *Physical Review E*, 2003, vol. 67, no. 3, 036211.
6. Jalnine A.Yu., Kuznetsov S.P. On the realization of the Hunt–Ott strange nonchaotic attractor in a physical system. *Technical Physics*, 2007, vol. 52, no. 4, pp. 401–408.
7. Doroshenko V.M., Kuznetsov S.P. A system governed by a set of nonautonomous differential equations with robust strange nonchaotic attractor of Hunt and Ott type. *European Physical Journal. Special Topics*, 2017, vol. 226, no. 9, pp. 1765–1775.
8. Herniter M.E. *Schematic Capture with Multisim*. Prentice Hall, 2004.
9. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., and Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. *Meccanica*, 1980, vol. 15, pp. 9–30.

10. Kuznetsov S.P. *Hyperbolic Chaos: A Physicist's View*. Beijing, Higher Education Press and Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2012.
11. Pikovsky A., Politi A. *Lyapunov Exponents: A Tool to Explore Complex Dynamics*. Cambridge University Press, 2016.
12. Pikovsky A.S., Feudel U. Correlations and spectra of strange nonchaotic attractors. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1994, vol. 27, pp. 5209–5219.
13. Pikovsky A., Zaks M.A., Feudel U., Kurths J. Singular continuous spectra in dissipative dynamics. *Phys. Rev. E*, 1995, vol. 52, no. 1, 1995, pp. 285–296.
14. Zhou C., Chen T. Robust communication via synchronization between nonchaotic strange attractors. *Europhysics Letters*, 1997, vol. 38, no. 4, pp. 261–265.
15. Ramaswamy R. Synchronization of strange nonchaotic attractors. *Phys. Rev. E*, 1997, vol. 56, no. 6, pp. 7294–7296.
16. Aravindh M. S., Venkatesan A., Lakshmanan M. Strange nonchaotic attractors for computation. *Phys. Rev. E*, 2018, vol. 97, no. 5, 052212.
17. Rizwana R., Mohamed I. R. Applicability of strange nonchaotic Wien-bridge oscillators for secure communication. *Pramana*, 2018, vol. 91, no. 1, 10.



*Кузнецов Сергей Петрович* – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиопизика в СГУ. Главный научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН (с 1988), где руководит лабораторией теоретической нелинейной динамики. Главный научный сотрудник лаборатории нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения Удмуртского государственного университета. Автор монографий «Strange Nonchaotic Attractors» (совместно с А. Пиковским и У. Фойдель), «Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике» и «Hyperbolic Chaos: a Physicist's View». Автор учебно-научных монографий «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным) и «Динамический хаос». Опубликовал свыше 200 научных статей по нелинейной динамике, радиопизике и электронике. Под руководством С.П. Кузнецова защищены двенадцать кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996). Член редакционной коллегии журналов «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», «Regular and Chaotic Dynamics», «Russian Journal of Nonlinear Dynamics», «Известия Саратовского университета – Новая серия. Серия Физика».

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
 Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН  
 E-mail: spkuz@yandex.ru