



## Гиперболический хаос в осцилляторе Бонхоффера–ван дер Поля с дополнительной запаздывающей обратной связью и периодически модулируемым параметром возбуждения

С. П. Кузнецов, Ю. В. Седова

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН  
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38  
E-mail: spkuz@yandex.ru, sedovayv@yandex.ru

Автор для переписки Седова Юлия Викторовна, sedovayv@yandex.ru  
Поступила в редакцию 13.10.2018, принята к публикации 3.12.2018

**Тема и цель исследования.** Цель работы состоит в рассмотрении простой в реализации системы, демонстрирующей гиперболический аттрактор Смейла–Вильямса, на основе осциллятора Бонхоффера–ван дер Поля, поочередно пребывающего в состоянии возбуждения или подавления благодаря периодической модуляции параметра внешнего управляющим сигналом и дополненного цепью запаздывающей обратной связи. **Исследуемые модели.** Сформулирована математическая модель, описываемая неавтономным уравнением второго порядка с запаздывающим аргументом. Указана схема электронного устройства, реализующего данный тип хаотического поведения. **Результаты.** Представлены результаты численного моделирования динамики системы, включая реализации, спектры колебаний, графики показателей Ляпунова, карту режимов на плоскости параметров. Проведено схемотехническое моделирование электронного устройства с помощью программного продукта Multisim. **Обсуждение.** Присутствие аттрактора Смейла–Вильямса обусловлено тем, что преобразование фаз заполнения для генерируемой системой последовательности радиоимпульсов отвечает растягивающему в целом число раз отображению окружности. Особенность системы в том, что передача возбуждения от одной к следующей стадии активности с удвоением (или утроением) фазы осуществляется резонансным образом, на гармонике релаксационных колебаний, имеющих вдвое (или втрое) больший период, чем у малых колебаний. В силу гиперболической природы аттрактора генерируемый хаос грубый, то есть характеризуется малой чувствительностью к вариации параметров устройства и его компонентов. Приведенная схема отвечает низкочастотному устройству, но может быть адаптирована для генераторов хаоса также на высоких и сверхвысоких частотах.

**Ключевые слова:** динамическая система, запаздывание, генератор хаоса, аттрактор, показатель Ляпунова, схемотехническое моделирование.

**Образец цитирования:** Кузнецов С.П., Седова Ю.В. Гиперболический хаос в осцилляторе Бонхоффера–ван дер Поля с дополнительной запаздывающей обратной связью и периодически модулируемым параметром возбуждения // Изв. вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 1. С. 77–95. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-77-95>

**Финансовая поддержка.** Разработка принципа действия системы, построение математической модели, численные расчеты и обработка результатов выполнены при поддержке гранта РФФИ 17-12-01008 (разделы 1, 2). Разработка электронного устройства и схемотехническое моделирование в среде Multisim выполнены при поддержке гранта РФФИ 16-02-00135 (раздел 3).

## Hyperbolic chaos in the Bonhoeffer–van der Pol oscillator with additional delayed feedback and periodically modulated excitation parameter

S. P. Kuznetsov, Yu. V. Sedova

Kotel'nikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch  
38, Zelenaya str., 410019 Saratov, Russia

E-mail: spkuz@yandex.ru, sedovayv@yandex.ru

Correspondence should be addressed to Sedova Yuliya V., sedovayv@yandex.ru

Received 13.10.2018, accepted for publication 3.12.2018

**Topic and aim.** The aim of the work is to consider an easy-to-implement system demonstrating the Smale–Williams hyperbolic attractor based on the Bonhoeffer–van der Pol oscillator, alternately manifesting a state of activity or suppression due to periodic modulation of the parameter by an external control signal, and supplemented with a delayed feedback circuit. **Investigated models.** A mathematical model is formulated as a non-autonomous second-order equation with delay. The scheme of the electronic device that implements this type of chaotic behavior is proposed. **Results.** The results of numerical simulating of the system dynamics, including waveforms, oscillation spectra, plots of Lyapunov exponents, a chart of regimes on the parameters plane are presented. The circuit simulation of the electronic device using the software Multisim is carried out. **Discussion.** The Smale–Williams attractor in the system appears due to the fact that the transformation of the phases of the carrier for the sequence of radio-pulses generated by the system corresponds to a circle map expanding by an integer factor. The important feature of the system is that the transfer of excitation from one to the next stage of activity with doubling (or tripling) of the phase occurs due to the resonance mechanism involving a harmonic of the developed oscillations that have twice (or triple) longer period than that of small oscillations. Due to the hyperbolic nature of the attractor, the generated chaos is rough, that is, it is characterized by low sensitivity to variations in the parameters of the device and its components. Our scheme corresponds to a low-frequency device, but it can be adapted for chaos generators also at high and ultrahigh frequencies.

*Key words:* dynamical system, time-delay, chaos generator, attractor, Lyapunov exponent, circuit simulation.

*Reference:* Kuznetsov S.P., Sedova Yu.V. Hyperbolic chaos in the Bonhoeffer–van der Pol oscillator with additional delayed feedback and periodically modulated excitation parameter. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 1, pp. 77–95. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-77-95>

*Acknowledgements.* Development of the operating principle of the system, construction of a mathematical model, numerical calculations and processing of the results are supported by the grant of Russian Science Foundation № 17-12-01008 (sections 1, 2). The development of electronic devices and circuit simulation environment Multisim is executed with support of Russian Foundation for Basic Research grant № 16-02-00135 (section 3).

### Введение

Построение различных вариантов составных систем на основе автоколебательных элементов, описываемых уравнениями Бонхоффера–ван дер Поля, в том числе систем с запаздывающими обратными связями, представляет интерес по многим причинам. Во-первых, осциллятор Бонхоффера–ван дер Поля легко реализуем в виде электронной схемы и в вариантах комбинированных схем, демонстрирующих сложную динамику, может служить основой для построения генераторов сигналов с широкими функциональными возможностями. Во-вторых, поскольку уравнение Бонхоффера–ван дер Поля с точностью до замены переменных соответствует известной модели нейрона ФитцХью–Нагумо [1–5], можно говорить о применении такого рода систем для модельного описания феноменов, имеющих место в нейросистемах, и об аналоговом моделировании этих феноменов с помощью электронных схем. В-третьих, предлагаемое исследование способствует выработке примеров динамического поведения, которые на уровне абстрактных математических представлений известны в современной теории динамических систем, но еще ожидают обнаружения и применения в системах реального мира. Данное направление исследований может открыть возможности построения технических устройств, воспроизводящих свойства

естественных нейросистем, а также генераторов грубого хаоса, нечувствительного к вариации параметров устройства и его компонентов.

Равномерно гиперболические аттракторы, введенные в рассмотрение в рамках развитой в 1960–1970-х годах математической теории, выступают как строго обоснованный пример детерминированного хаоса в динамических системах [6–13]. Это аттракторы, составленные исключительно из фазовых траекторий седлового типа, характерным для которых является то, что у каждой траектории на аттракторе имеется множество соседних траекторий, приближающихся к ней, и множество траекторий, удаляющихся от нее (устойчивое и неустойчивое многообразие).

Фундаментальный математический факт состоит в том, что гиперболический хаос обладает свойством грубости, или структурной устойчивости. В теории колебаний принято постулировать, что реальный интерес с теоретической и практической точки зрения должны представлять именно грубые системы, которые демонстрируют движения, качественно не меняющиеся при малой вариации («шевелении») параметров [14–16]. Это свойство представляется исключительно важным для естественных систем и технических приложений, поскольку обеспечивает нечувствительность характеристик хаоса в системах с гиперболическими аттракторами к неточности задания параметров, погрешностям изготовления, различным помехам и возмущениям.

Один из примеров гиперболического аттрактора – соленоид Смейла–Вильямса [6–9]. Рассмотрим область в виде тора в трехмерном пространстве и отображение, которое за один шаг дискретного времени осуществляет растяжение этого тора вдвое с достаточно сильным поперечным сжатием и складывание двойной петлей, помещаемой внутрь исходного тора. На каждом следующем шаге преобразования полный объем объекта уменьшается (это означает, что отображение диссипативное), а число витков удваивается. В пределе бесконечного числа шагов оно стремится к бесконечности, и возникает образование, называемое *соленоидом*, который и выступает как гиперболический аттрактор. В поперечном направлении соленоид имеет структуру типа канторова множества. Аналогичное построение можно провести, используя продольное растяжение не в два, а в большее число раз  $M = 3, 4, \dots$  и складывание петлей из соответствующего числа витков  $M$ , что отвечает гиперболическим аттракторам в виде соленоидов иного топологического типа.

По мере развития теории динамических систем и ее приложений выяснилось, что многочисленные примеры хаотической динамики, известные в разных областях естествознания и техники, не удовлетворяют условиям гиперболической теории. Только в последнее время были предложены и реализованы физические примеры систем со структурно устойчивым гиперболическим хаосом [17]. Несколько таких примеров построено на основе систем, использующих запаздывающую обратную связь [18–22].

В настоящей статье рассматривается простая в реализации система, демонстрирующая гиперболический аттрактор Смейла–Вильямса, где в качестве основного элемента фигурирует осциллятор Бонхоффера–ван дер Поля, поочередно пребывающий в состоянии возбуждения или подавления благодаря периодической модуляции параметра внешним управляющим сигналом, и дополненный цепью запаздывающей обратной связи. Гиперболическость аттрактора обусловлена тем, что преобразование фаз заполнения для генерируемой последовательности радиоимпульсов отвечает растягивающему в целое число раз отображению окружности. Особенность данной системы в том, что передача возбуждения от одной стадии активности к следующей с удвоением фазы осуществляется резонансным образом на гармонике релаксационных колебаний, имеющих вдвое или втрое больший период, чем у малых колебаний. Сформулирована математическая модель, описываемая неавтономным уравнением второго порядка с запаздывающим аргументом, и представлены результаты численного моделирования динамики системы, включая реализации, спектры колебаний, графики показателей Ляпунова, карту режимов на плоскости параметров. Указана схема электронного устройства, реализующего данный тип хаотического поведения, и проведено моделирование ее динамики с помощью программного продукта Multisim.

# 1. Осциллятор Бонхоффера–ван дер Поля. Слабо нелинейные и релаксационные автоколебания

Осциллятор Бонхоффера–ван дер Поля – автоколебательная система, описываемая уравнением

$$\ddot{x} - (A - x^2)\dot{x} + x = K. \quad (1)$$

При малых положительных значениях параметра  $A$  в системе возникают приблизительно синусоидальные автоколебания с частотой близкой к  $\omega = 1$ . С увеличением  $A$  происходит переход к релаксационным колебаниям, форма которых существенно отличается от синусоиды, а основная частота при этом уменьшается. Если параметр  $K$  отличен от нуля, то в спектре колебаний представлены как нечетные, так и четные гармоники, тогда как для классического осциллятора ван дер Поля, которому отвечает случай  $K = 0$ , присутствуют только нечетные гармоники. На рис. 1 представлены портреты аттракторов на фазовой плоскости уравнения (1) в режимах малых, квазигармонических колебаний и больших, релаксационных колебаний для случая  $K = 0.5$ . Если параметр  $A$  мал, то безразмерная круговая частота колебаний близка к 1. При  $A = 5.5$  основная частота составляет примерно  $1/2$ , а частота второй гармоники, соответственно, близка к частоте малых колебаний. При  $A = 9.66$  основная частота примерно  $1/3$ , и к частоте малых колебаний близка частота третьей гармоники.

На рис. 2, *a* иллюстрируется резонансная раскачка колебаний линейного осциллятора  $\ddot{y} + y = \varepsilon x$  под действием второй гармоники автоколебательной системы (1) по результатам численного решения задачи с параметрами  $A = 5.5$ ,  $K = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.1$ . Визуально период колебаний линейного осциллятора вдвое больше периода автоколебаний системы (1), так что частота второй гармоники автоколебаний совпадает с собственной частотой линейного осциллятора. Аналогичная диаграмма на рис. 2, *b* демонстрирует резонансную раскачку колебаний под действием третьей гармоники при  $A = 9.66$ .

В работе [23] предложена идея использовать ситуации целочисленного отношения частот малых и больших колебаний с резонансным возбуждением колебаний посредством гармоник для построения системы с аттракторами типа Смейла–Вильямса на основе двух подсистем – слабо связанных осцилляторов Бонхоффера–ван дер Поля, пребывающих поочередно в режиме активности или подавления благодаря модуляции управляющего возбуждением параметра в

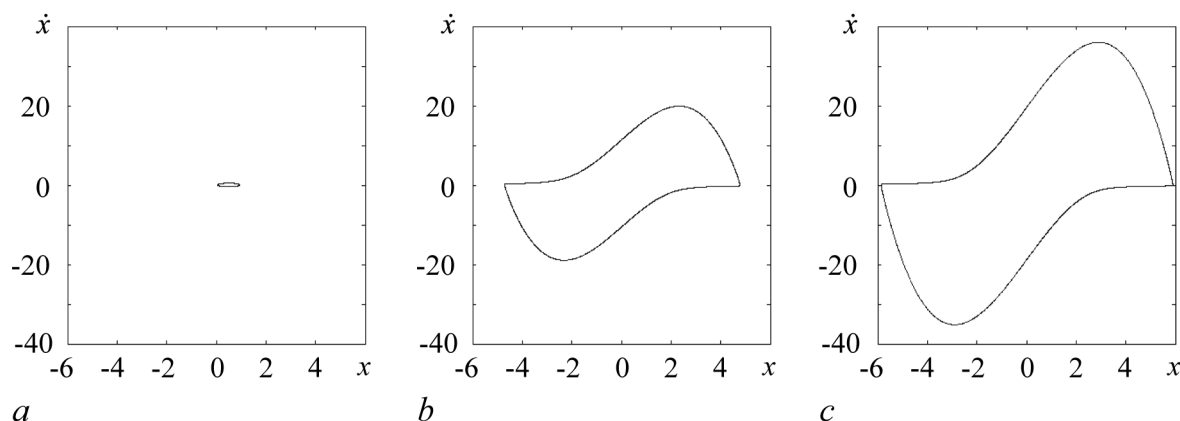


Рис. 1. Эволюция фазовых портретов модели (1) в случае  $K = 0.5$  для различных значений параметров: *a* –  $A = 0.3$ , частота колебаний  $\omega \approx 1$ ; *b* –  $A = 5.5$ , частота колебаний  $\omega \approx 1/2$ ; *c* –  $A = 8.5$ , частота колебаний  $\omega \approx 1/3$

Fig. 1. Evolution of phase portraits for the model (1) in the case  $K = 0.5$  for different values of the parameters: *a* –  $A = 0.3$ , oscillation frequency  $\omega \approx 1$ ; *b* –  $A = 5.5$ , oscillation frequency  $\omega \approx 1/2$ ; *c* –  $A = 8.5$ , oscillation frequency  $\omega \approx 1/3$

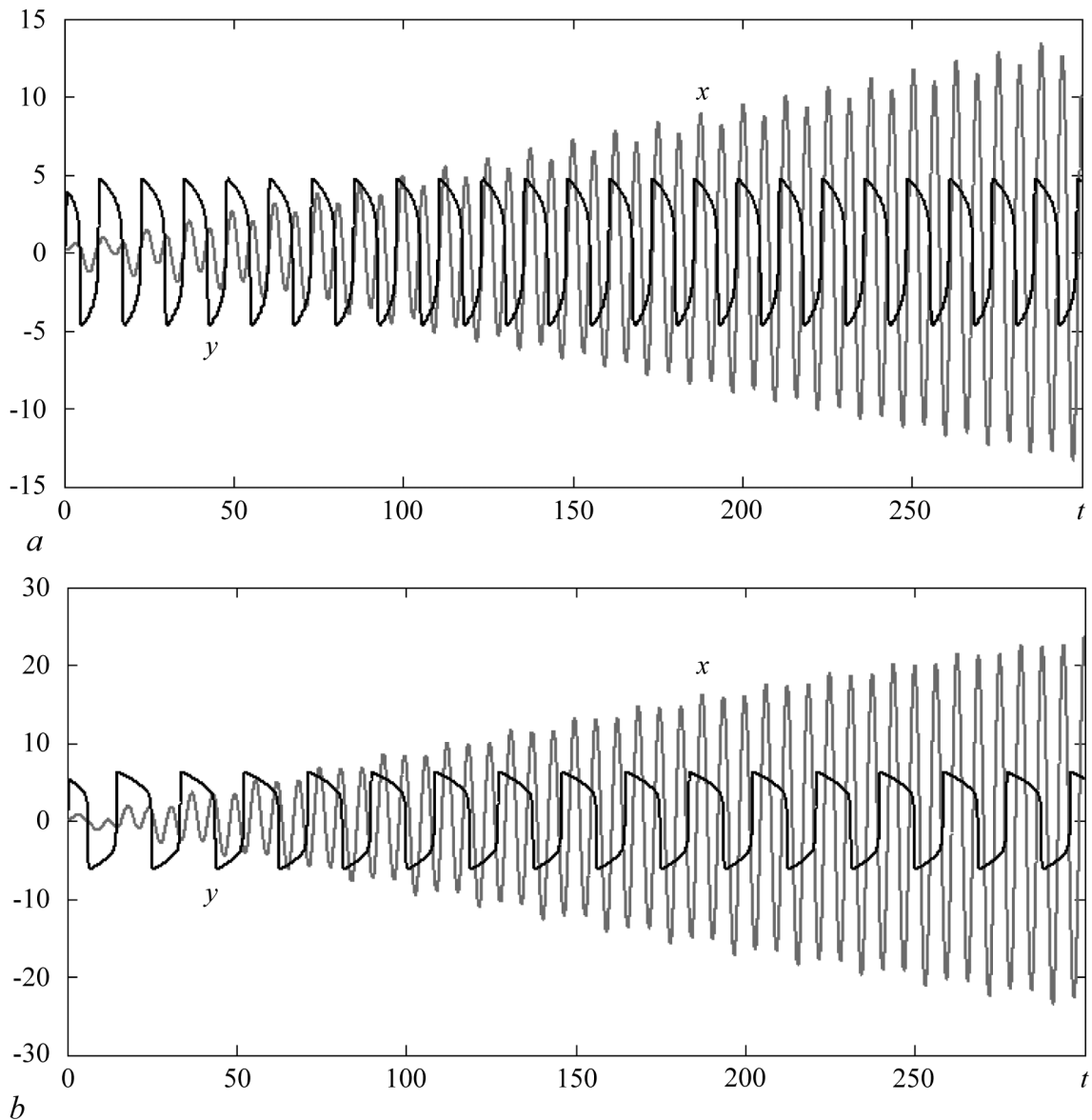


Рис. 2. Резонансная раскачка колебаний линейного осциллятора под действием второй (а) и третьей (б) гармоники автоколебательной системы. Графики построены по результатам численного решения системы уравнений  $\ddot{x} - (A - x^2)\dot{x} + x = K$ ,  $\ddot{y} + y = \varepsilon x$  при  $K = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.1$  и различных значениях параметра  $A$ : а - 5.5, б - 9.66

Fig. 2. Resonant excitation of a linear oscillator by the second (a) and the third (b) harmonics of the self-oscillating system as obtained from numerical solution of the set of equations  $\ddot{x} - (A - x^2)\dot{x} + x = K$ ,  $\ddot{y} + y = \varepsilon x$  at  $K = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $A = 5.5$  (a) and  $A = 9.66$  (b)

противофазе для одной и другой подсистемы. При этом параметры подбираются так, чтобы на стадии активности релаксационные колебания имели период в целое число раз больший, нежели период малых колебаний. Благодаря передаче возбуждения попеременно от одного осциллятора к другому, в фазовом пространстве отображения, описывающего изменение состояния системы за период модуляции, могут реализоваться аттракторы Смейла–Вильямса с различными значениями фактора растяжения угловой переменной, в качестве которой выступает фаза колебаний. Аналогичный принцип был использован в работе [24] для построения механической системы с гиперболическим аттрактором на основе маятников Фруда с попеременным торможением.

В настоящей работе мы покажем, что при введении дополнительной цепи запаздывающей обратной связи оказывается возможным реализовать аттрактор Смейла–Вильямса в системе на основе всего лишь одного осциллятора Бонхоффера–ван дер Поля с модуляцией параметра. Соответствующее электронное устройство оказывается проще и содержит меньше компонентов, чем система на основе двух осцилляторов. С точки зрения математического описания и теории динамических систем, она сложнее, поскольку из-за наличия запаздывания фазовое пространство оказывается бесконечномерным.

## 2. Осциллятор с дополнительной запаздывающей обратной связью и модуляцией параметра возбуждения

Рассмотрим осциллятор Бонхоффера–ван дер Поля, у которого управляющий параметр медленно изменяется во времени по периодическому закону, обеспечивая попеременное возбуждение и затухание колебаний, и введена дополнительная запаздывающая обратная связь. Пусть на стадии возбуждения в течение некоторого времени параметр остается постоянным и равным максимальному значению  $a$ , далее он убывает до отрицательной величины ( $-c$ ), и затем вновь нарастает, достигая максимального значения. Уравнения динамики запишем в следующем виде:

$$\ddot{x} - (f(t/T + 1/4) - x^2)\dot{x} + x = K + \varepsilon(x(t - \tau) - x), \quad (2)$$

где  $x$  – динамическая переменная,  $K$  – параметр,  $\varepsilon$  – коэффициент, характеризующий величину запаздывающей обратной связи,  $\tau$  – время запаздывания. Функция  $f$  определяет зависимость от времени управляющего параметра  $A$ , и на периоде своего аргумента, заданном равным единице, дается соотношениями

$$f(\xi) = \begin{cases} a, & 0 < \xi \leq \tau_1, \\ \frac{(a - c)\xi + c\tau_1 - a\tau_2}{\tau_1 - \tau_2}, & \tau_1 < \xi \leq \tau_2, \\ \frac{(c - a)\xi + a\tau_2 - c}{\tau_2 - 1}, & \tau_2 < \xi \leq 1. \end{cases} \quad (3)$$

Важно подчеркнуть, что система с запаздыванием характеризуется бесконечной размерностью фазового пространства [25–28]. В самом деле, чтобы указать состояние, позволяющее однозначно определить последующую динамику, нужно задать не только значения  $x$  и  $\dot{x}$  в начальный момент времени, но еще и функцию  $x(t - \tau)$  на предшествующем интервале времени длительности  $\tau$ .

Можно определить стробоскопическое отображение системы (2) (отображение Пуанкаре) за период модуляции  $T$ , записав его формально как

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{F}_T(\mathbf{X}_n), \quad (4)$$

однако вектор  $\mathbf{X}_n$ , задающий состояние системы в момент  $t_n = nT$ , в рассматриваемом случае должен интерпретироваться как элемент бесконечномерного пространства.

Поясним принцип функционирования системы в режиме с гиперболическим аттрактором. На стадии активности осциллятор совершает автоколебания релаксационного типа. При соответствующем подборе параметра  $a$  основная частота автоколебания в целое число раз  $M$  меньше, чем частота малых колебаний (конкретно мы будем рассматривать случаи  $M = 2$  и  $3$ ). В течение стадии затухания колебания практически исчезают, но, когда приходит время для новой стадии активности, возникновение колебаний стимулируется резонансным образом  $M$ -й гармоникой

сигнала, который пришел по цепи запаздывающей обратной связи, будучи испущен на стадии присутствия развитых релаксационных колебаний осциллятора. Поэтому фаза этих колебаний отвечает фазе основной составляющей колебаний, умноженной на фактор  $M$ . В результате, когда вновь возникшие колебания осциллятора приблизятся к установившемуся режиму релаксационных автоколебаний, их фаза будет отвечать умноженной на  $M$  фазе колебаний на предыдущей стадии активности. Далее процесс раз за разом повторяется. Поэтому для фаз колебательного процесса на последовательных стадиях активности реализуется растягивающее отображение окружности. При сжатии по остальным направлениям в фазовом пространстве это соответствует формированию соленоида Смейла–Вильямса в пространстве состояний для отображения Пуанкаре (4). В рассматриваемой задаче этот соленоид представляет собой объект, вложенный в бесконечномерное фазовое пространство отображения (4).

Обратимся к иллюстрациям функционирования системы, опираясь на результаты численного моделирования. Решение уравнений осуществлялось методом Рунге–Кутты 4 порядка, адаптированным для системы с запаздыванием. Для этого текущие значения переменных и функций на каждом шаге разностной схемы сохраняются в виде массива, содержащего данные на предыдущем интервале времени  $\tau$ , с тем, чтобы быть использованными в нужный момент выполнения вычислений, когда требуется подставить запаздывающие значения этих величин.

На рис. 3 и 4 показаны графики зависимости от времени для переменной  $x$  и ее производной на протяжении нескольких периодов модуляции, когда передача возбуждения от предыдущей стадии активности к следующей осуществляется на второй и третьей гармонике, соответственно, для  $a = 5.5$  и  $9.66$ . Остальные параметры

$$K = 0.5, \quad c = -2, \quad \tau_1 = 0.4, \quad \tau_2 = 0.5, \quad \varepsilon = 0.01, \quad T = 200, \quad \tau = T/2. \quad (5)$$

Чтобы на количественном уровне убедиться в наличии соответствия между динамикой системы за период модуляции и процедурой, определяющей формирование соленоидов Смейла–Вильямса, обратимся к построению диаграмм в виде зависимости фазы на очередной стадии активности от фазы на предыдущей стадии активности. Следует отметить, что в области развитых автоколебаний форма колебаний существенно отличается от синусоидальной, поэтому вычисление фазы через арктангенс отношения переменной и ее производной приводит к неудовлетворительным результатам. Альтернативой является использование величины, определяющей временной сдвиг относительно заданного начала отсчета, нормированный на характерный период колебаний. Пусть  $t$  – момент начала торможения осциллятора,  $t_1$  и  $t_2$  – предшествующие моменты прохода осциллятора через сечение  $x = 0$ , где  $t_2 > t_1$ . Тогда можно определить угловую (фазовую) переменную, принадлежащую интервалу  $[0, 1]$  согласно соотношению  $\varphi = (t - t_2)/(t_2 - t_1)$ . Вычисление этой величины легко программируется и выполняется в процессе численного моделирования динамики системы.

Диаграммы на рис. 5, построенные по результатам численного решения уравнений (2) на большом количестве периодов модуляции, иллюстрируют трансформацию фаз колебаний на последовательных стадиях активности в соответствии с двукратно растягивающим отображением окружности при  $a = 5.5$  (a) и трехкратно растягивающим отображением при  $a = 9.66$  (b).

На рис. 6 показаны портреты аттракторов стробоскопического отображения. Это двумерные проекции соленоидов Смейла–Вильямса для отображения Пуанкаре нашей системы с бесконечномерным фазовым пространством. Имеющая место фрактальная поперечная структура волокон неразличима из-за высокой степени поперечного сжатия на каждом шаге отображения.

Для системы с запаздыванием полное количество показателей Ляпунова бесконечно. Тем не менее, мы можем найти несколько первых показателей в порядке убывания их величин в рамках методики Бенеттина, адаптированной для системы с запаздыванием [27–30]. Для этого

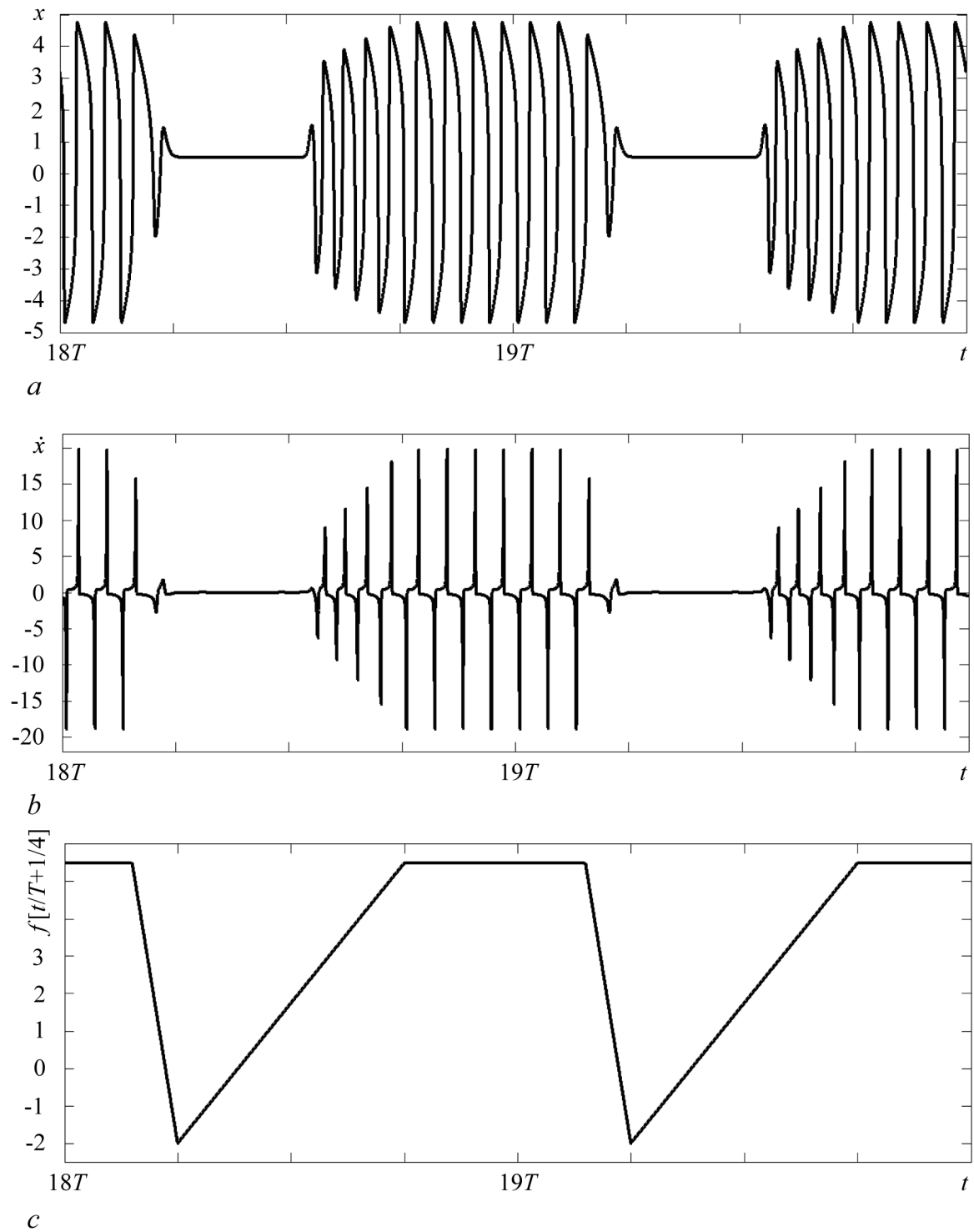


Рис. 3. *a, b* – реализации  $x(t)$  и  $\dot{x}(t)$  системы (2),  $a = 5.5$ ,  $K = 0.5$ ,  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$ ; *c* – вид функции  $f$ , отвечающей за модуляцию управляющего параметра

Fig. 3. *a, b* – waveforms  $x(t)$  and  $\dot{x}(t)$  of the system (2),  $a = 5.5$ ,  $K = 0.5$ ,  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$ ; *c* – the function  $f$  governing the modulation of the control parameter



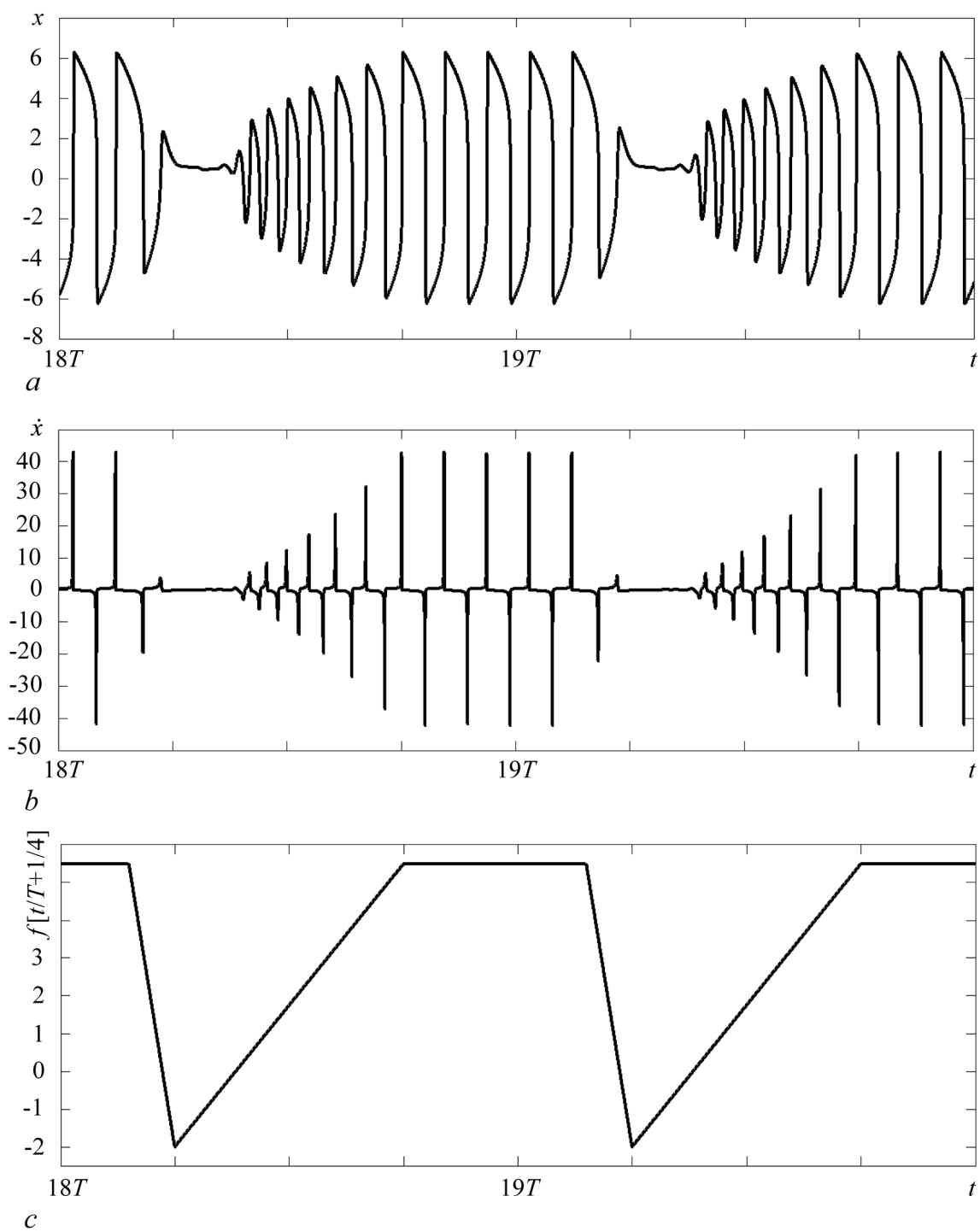


Рис. 4. *a, b* – реализации  $x(t)$  и  $\dot{x}(t)$  системы (2),  $a = 9.66$ ,  $K = 0.5$ ,  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$ ; *c* – вид функции  $f$ , отвечающей за модуляцию управляющего параметра

Fig. 4. *a, b* – waveforms  $x(t)$  and  $\dot{x}(t)$  of the system (2),  $a = 9.66$ ,  $K = 0.5$ ,  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$ ; *c* – the function  $f$  governing the modulation of the control parameter

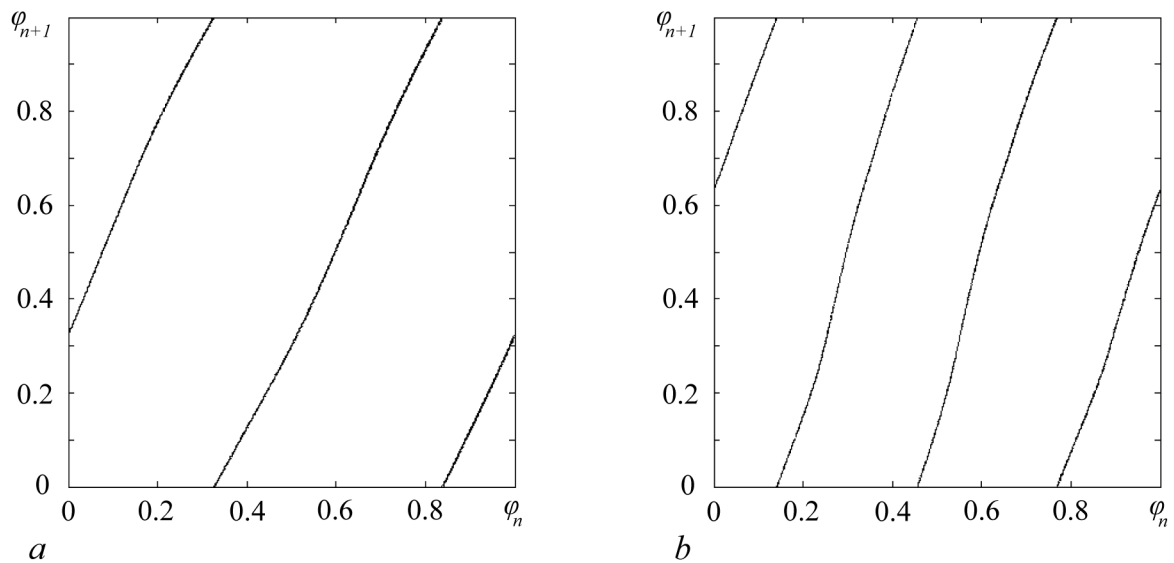


Рис. 5. Фазовые диаграммы системы (2), параметры  $a = 5.5$  (а) и  $a = 9.66$  (б). Остальные параметры:  $K = 0.5$ ,  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$

Fig. 5. Iteration diagrams for the oscillation phases of the system (2) at parameters  $a = 5.5$  (a) and  $a = 9.66$  (b). Other parameters are  $K = 0.5$ ,  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$

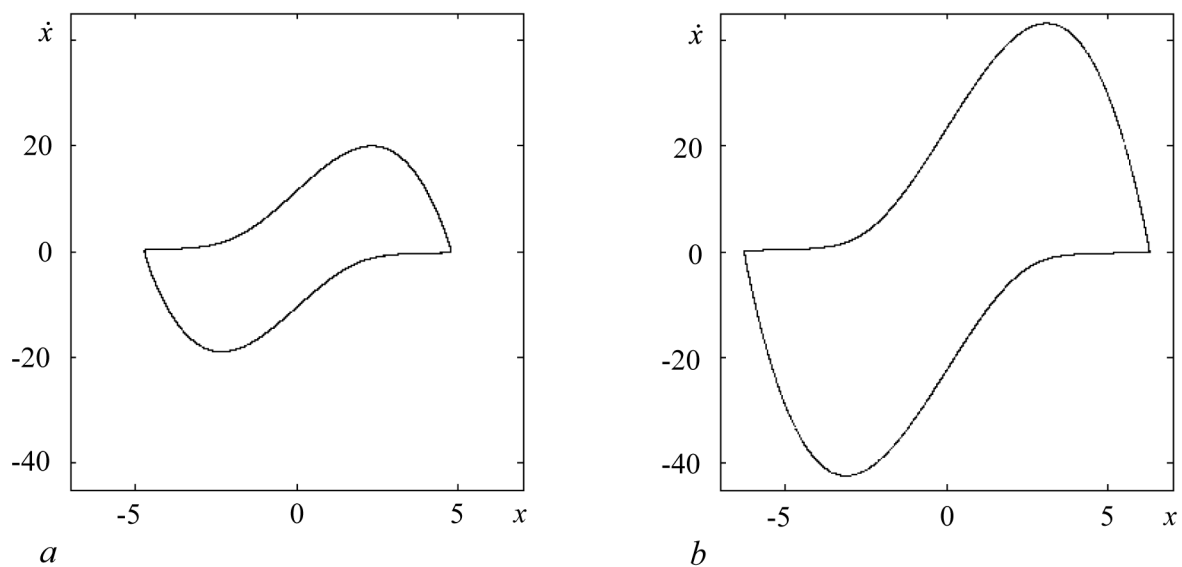


Рис. 6. Портрет аттрактора отображения Пуанкаре за период модуляции в проекции на плоскость переменных  $(x, \dot{x})$  при  $a = 5.5$  (а) и  $a = 9.66$  (б). Остальные параметры:  $K = 0.5$ ,  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$

Fig. 6. Portraits of attractors of the Poincaré map over the modulation period in the projection onto a plane of variables  $(x, \dot{x})$  at  $a = 5.5$  (a) and  $a = 9.66$  (b). Other parameters are  $K = 0.5$ ,  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$

выполняется одновременно численное решение уравнения (2) совместно с соответствующим числом уравнений в вариациях

$$\ddot{\tilde{x}} - (f(t/T + 1/4) - x^2)\dot{\tilde{x}} + 2x\dot{\tilde{x}} + \tilde{x} = \varepsilon(\tilde{x}(t - \tau) - \tilde{x}) \quad (6)$$

и с ортогонализацией векторов возмущения по Граму–Шмидту на каждом шаге интегрирования уравнений. (Заметим, что вектор возмущения задается функцией  $\tilde{x}(t)$  на конечном интервале, равном времени запаздывания.) Показатели Ляпунова аттрактора, показанного на рис. 6, а, для отображения за период составляют

$$\Lambda = \{0.690, -7.950, -8.750, \dots\}, \quad (7)$$

а размерность аттрактора в стробоскопическом сечении по Каплану–Йорке  $D_{KY} = 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2| \approx 1.09$ . Для аттрактора, показанного на рис. 6, б, показатели Ляпунова

$$\Lambda = \{1.081, -8.642, -9.270, \dots\}, \quad (8)$$

а размерность по Каплану–Йорке  $D_{KY} = 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2| \approx 1.13$ .

Обратим внимание, что положительный показатель Ляпунова в спектре показателей (7) близок к  $\ln 2$ , а в спектре (8) – к  $\ln 3$ . Это отвечает растягивающему отображению окружности для фаз на последовательных стадиях активности, соответственно, в два и три раза, что согласуется с описанным выше механизмом функционирования системы.

На рис. 7 представлена зависимость трех показателей Ляпунова от параметра  $a$  при фиксированных остальных параметрах. Видно, что в определенных интервалах по параметру наибольший показатель Ляпунова принимает значения, соответствующие растяжению угловой переменной в 2 и 3 раза. Это отвечает реализации в системе аттракторов в виде соленоидов типа Смейла–Вильямса с двойным или тройным складыванием петли на одном шаге построения с достаточно сильным поперечным сжатием, о чем говорит наличие отрицательных показателей достаточно больших по абсолютной величине. Эти интервалы отвечают структурно устойчивому гиперболическому хаосу, о чем свидетельствует плавный характер зависимости показателя Ляпунова от параметра. В областях переходов между плато на графике можно видеть характерные для негиперболического хаоса провалы, отвечающие окнам периодичности.

На рис. 8 показана карта режимов системы (2) на плоскости параметров  $(K, a)$ . Для ее построения проводилось сканирование выбранной области по двум координатным осям на сетке с малым шагом. Каждый пиксель отмечается цветом в соответствии с диагностированным в данной точке режимом, возникающим при численном интегрировании уравнений. Если все показатели отрицательные, то это отвечает регулярному периодическому режиму, а именно, притягивающей неподвижной точке или циклу отображения Пуанкаре. Близость наибольшего показателя к нулю свидетельствует о квазипериодической динамике, чему в фазовом пространстве отображения Пуанкаре отвечает притягивающая замкнутая инвариантная кривая. Наличие положительного показателя говорит о присутствии хаотического аттрактора отображения Пуанкаре, который может быть гиперболическим или негиперболическим.

При построении карты за признак гиперболического аттрактора Смейла–Вильямса принималась близость положительного показателя Ляпунова отображения за полпериода модуляции к величине  $\ln 2$  или  $\ln 3$ , отвечающей двукратно или трехкратно растягивающему отображению окружности. Контрольные расчеты подтверждают, что область гиперболичности определяется этим методом достаточно аккуратно: вид отображения, если его строить в точках найденной области, качественно соответствует рис. 5 (графики в виде, соответственно, двух или трех ветвей, близких к прямым линиям с угловым коэффициентом 2 или 3). Гиперболический хаос, в соответствии с присущим ему свойством структурной устойчивости, занимает на плоскости параметров сплошные области, обозначенные как  $SW_2$  и  $SW_3$ .

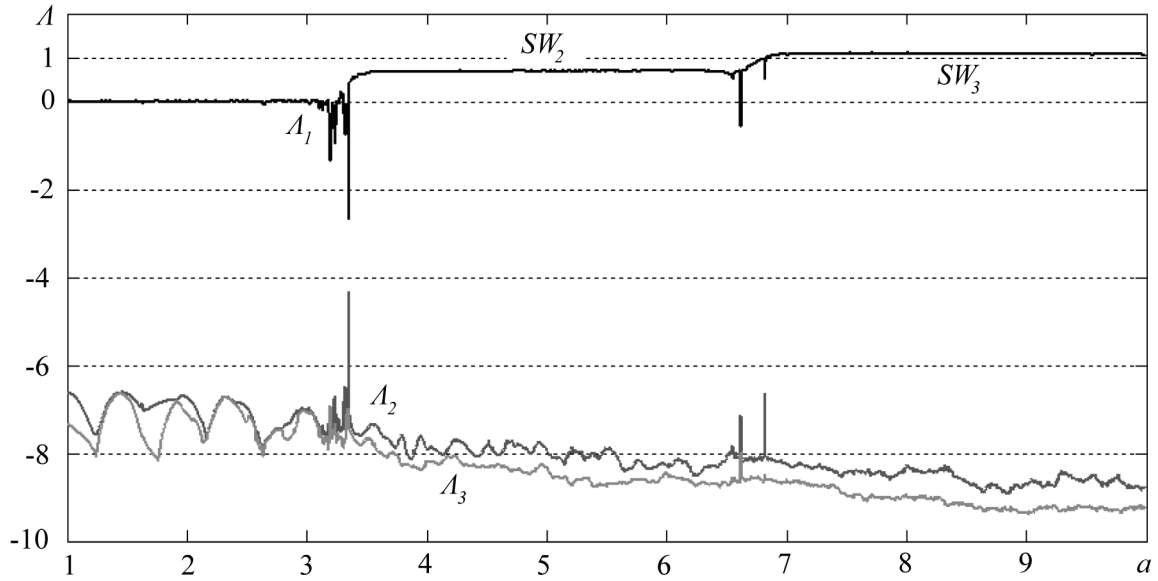


Рис. 7. Зависимость трех наибольших показателей Ляпунова системы (2) от параметра  $a$ . Остальные параметры:  $K = 0.5$ ,  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$ . Участки, отвечающие аттракторам Смейла–Вильямса с двукратным и трехкратным растяжением фазовой переменной, обозначены, соответственно, метками  $SW_2$  и  $SW_3$

Fig. The dependence of the largest three Lyapunov exponents of the system (2) on the parameter  $a$ . Other parameters:  $K = 0.5$ ,  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$ . The intervals corresponding to Smale–Williams attractors with double and triple expanding of the phase variable are indicated respectively by the labels  $SW_2$  and  $SW_3$

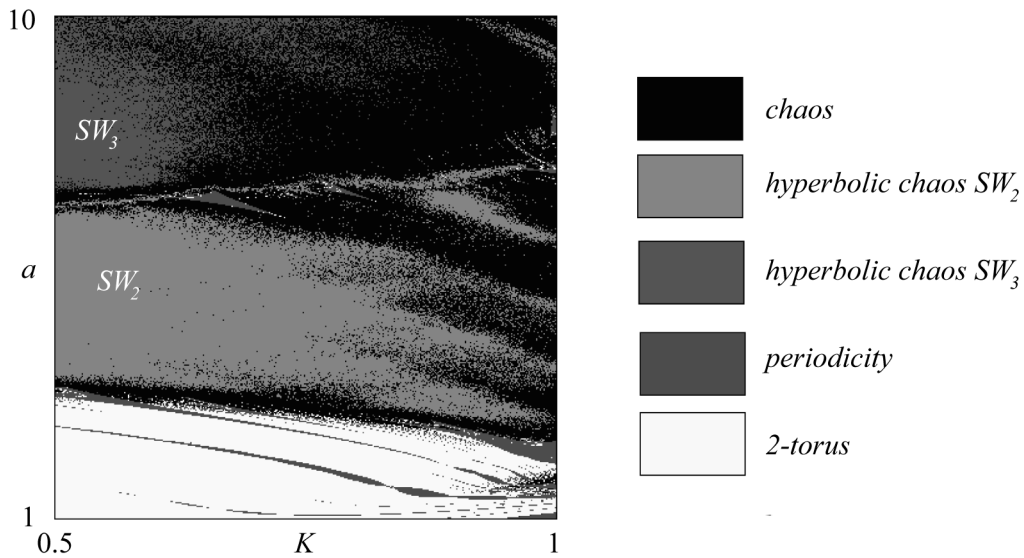


Рис. 8. Карта плоскости параметров  $(K, a)$  системы (2), где области режимов, обозначенные определенным цветом и соответствующими надписями, диагностированы по величинам показателей Ляпунова. Остальные параметры:  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$

Fig. 2. Chart of regimes for the parameter plane  $(K, a)$  of the system (2), where areas of regimes, which are indicated by definite color and the corresponding inscriptions, are diagnosed by the values of Lyapunov exponents. The remaining parameters are  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$

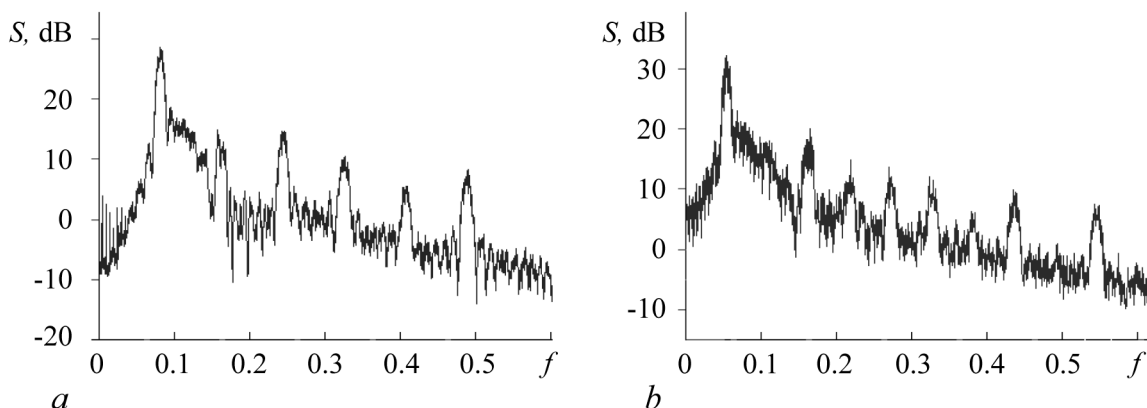


Рис. 9. Спектры колебаний сигнала  $x(t)$  в логарифмическом масштабе при  $a = 5.5$  (a) и  $a = 9.66$  (b). Остальные параметры:  $K = 0.5$ ,  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$

Fig. 9. The power density spectra of the signal  $x(t)$  in logarithmic scale at  $a = 5.5$  (a) and  $a = 9.66$  (b). Other parameters:  $K = 0.5$ ,  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$

На рис. 9 показаны спектры мощности сигнала, генерируемого системой для обоих типов аттрактора Смейла–Вильямса  $SW_2$  и  $SW_3$  (с удвоением и утроением числа петель на шаге построения). Спектры построены обработкой временных рядов для динамической переменной  $x$ , полученных при численном интегрировании уравнений, с применением методики статистической оценки спектральной плотности случайных процессов [31, 32].\* Из рисунка видно, что в каждом из рассмотренных случаев спектр является сплошным, как у случайного процесса, хотя характеризуется заметной изрезанностью – наличием размытых пиков в силу наличия корреляций между формами сигнала на интервалах, разнесенных на интервал времени запаздывания.

### 3. Электронный генератор грубого хаоса и его схемотехническое моделирование

Обратимся к схемотехнической реализации описанной выше идеи получения гиперболического хаоса в системе, где автоколебательный элемент с попеременным возбуждением и затуханием дополнен цепью запаздывающей обратной связи для передачи возбуждения с удвоением фазы на очередной стадии активности благодаря использованию второй гармоники возникающих релаксационных колебаний.

На рис. 10 показана схема, основным элементом которой служит автогенератор на основе колебательного контура LC1. Внесение отрицательного сопротивления в контур обеспечивается операционным усилителем OA1. Величина вносимого сопротивления в каждый момент времени зависит от мгновенного сопротивления сток – исток полевого транзистора Q1. Подаваемое на затвор управляющее напряжение от источника V1 остается нулевым на протяжении определенной части периода модуляции (при этом осциллятор активен), а на остальной части периода напряжение меньше нуля, и его временная зависимость имеет вид треугольной функции (колебания подавляются). Параметры элементов отрицательного сопротивления подобраны так, что нулевое напряжение затвора отвечает установлению релаксационных колебаний с частотой вдвое

\*Для получения спектра временной ряд разбивается на участки некоторой длительности, существенно превышающей характерный временной масштаб сигнала, с последующим умножением отрезка временного ряда на функцию «окна» (для улучшения качества спектрального анализа вследствие купирования эффекта несовпадения сигнала на краях интервалов разбиения). Далее выполняется преобразование Фурье на каждом участке, и квадраты амплитуд спектральных компонент усредняются по множеству участков разбиения.

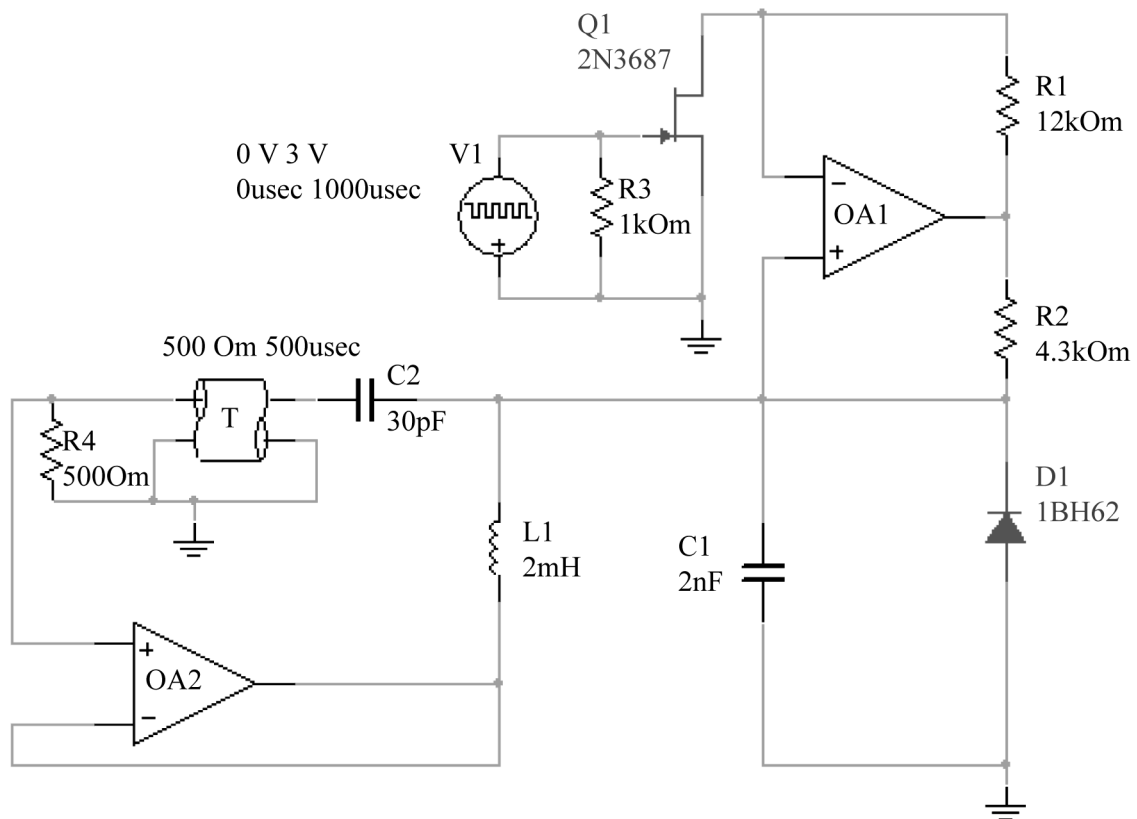


Рис. 10. Схема генератора с периодическим возбуждением и запаздывающей обратной связью, реализующая гиперболический хаос

Fig. 10. Generator circuit with periodic excitation and delayed feedback, realizing hyperbolic chaos

меньшей частоты линейных колебаний осциллятора. В колебательный контур включен диод D1, что обеспечивает ограничение уровня колебаний и наличие интенсивной второй гармоники при большой амплитуде колебаний. Когда наступает очередная стадия активности осциллятора, развитие колебаний в нем, начиная от малой амплитуды, эффективно стимулируется резонансным образом благодаря связи через конденсатор C2 за счет второй гармоники колебаний, поступивших через линию задержки T от предыдущей стадии развитых релаксационных колебаний. Поскольку передача возбуждения осуществляется через посредство второй гармоники, это должно сопровождаться удвоением фазы, что при наличии сжатия по остальным направлениям в пространстве состояний будет отвечать аттрактору типа Смейла–Вильямса в стробоскопическом отображении, определяющем эволюцию системы за период.

На рис. 11 представлены осциллограммы, полученные при моделировании в среде Multisim, которые демонстрируют функционирование схемы в соответствии с описанным механизмом.

Для подтверждения гиперболической природы хаоса надо убедиться, что последовательные стадии активности отвечают преобразованию фазы, согласно растягивающему отображению. В качестве фазы, как в предыдущем разделе, определим величину временного сдвига относительно заданного начала отсчета, нормированного на характерный период релаксационных колебаний.

Чтобы построить график для величин, относящихся к последовательным стадиям активности  $\varphi_n$  и  $\varphi_{n+1}$ , можно использовать записанные в файл данные моделирования в среде Multisim на достаточно большом времени с малым шагом выборки (на порядок меньше периода малых колебаний). Полученный обработкой этих данных график показан на рис. 12 а. Поскольку за

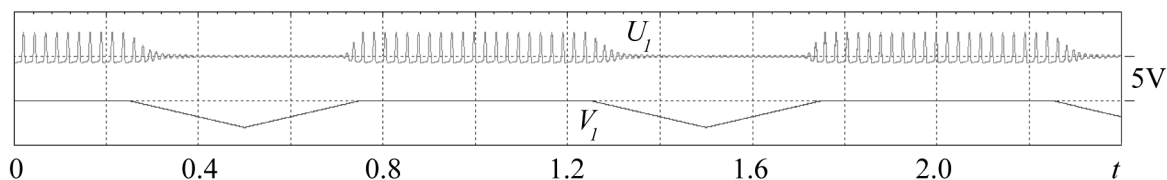


Рис. 11. Осциллограммы напряжения  $U_1$  на конденсаторе C1 и управляющего напряжения  $V_1$  на затворе полевого транзистора V1, полученные с помощью виртуального осциллографа при моделировании в среде Multisim. Номиналы элементов схемы отвечают рис. 10

Fig. 11. Waveforms of voltages  $U_1$  on capacitor C1 and control voltage  $V_1$  on the gate of field effect transistor V1 obtained with the help of a virtual oscilloscope in the Multisim simulation. The nominal values of the circuit elements correspond to Fig. 10

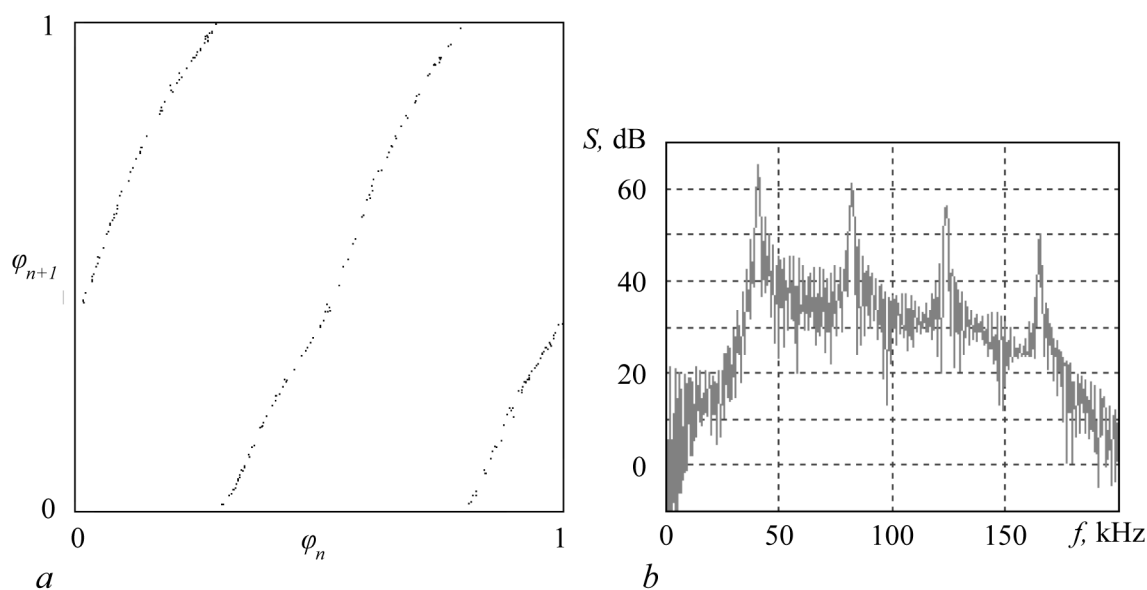


Рис. 12. Диаграмма, иллюстрирующая преобразование фаз на последовательных стадиях активности (a) и спектр колебаний в логарифмической шкале (b) для осциллятора, полученный при схемотехническом моделировании схемы рис. 10 в среде Multisim

Fig. 12. Diagram illustrating the phase transformation in successive stages of activity (a) and the oscillation spectrum in logarithmic scale (b) for the oscillator as obtained in the Multisim simulation of the circuit in Fig. 10

период модуляции имеет место удвоение фазовой переменной, то график состоит из ветвей, имеющих коэффициент наклона близкий к 2. На рис. 12, b показан спектр сигнала, порождаемого одним из осцилляторов, в логарифмическом масштабе. Спектр демонстрирует очевидное сходство с рис. 9, a, который построен для математической модели в виде уравнения с запаздыванием (2).

### Заключение

Продемонстрирована численными расчетами возможность грубого гиперболического хаоса, ассоциирующегося с аттрактором Смейла–Вильямса, в системе на основе осциллятора Бонхоффера–Ван дер Поля с запаздывающей обратной связью при попеременном возбуждении и подавлении активности за счет периодической модуляции параметра. Разработана схема электронного устройства, реализующего рассматриваемый тип динамики, и представлены подтверждающие этот факт результаты схемотехнического моделирования в программной среде Multisim.

Полученные результаты интересны в плане построения электронных генераторов шума, нечувствительных к вариации параметров и помехам, а также с точки зрения возможности реализации аналогичных явлений в системах различной природы, например, в контексте нейродинамики – для нейронов с запаздывающим взаимодействием и для аналогового моделирования такого рода систем.

Рассмотренный подход может служить примером для построения объектов различной природы с гиперболическими аттракторами на основе систем, в которых передача колебательного возбуждения между последовательными стадиями активности, разделенными стадиями затухания, осуществляется резонансным образом благодаря различию частот малых и больших колебаний в целое число раз. Схема получается структурно более простой, нежели предложенные ранее варианты систем с запаздыванием, демонстрирующих гиперболический хаос [18, 19], благодаря отсутствию вспомогательного источника сигнала на частоте, близкой к частоте используемого осциллятора.

### Библиографический список

1. *FitzHugh R.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // *Biophysical journal*. 1961. Vol. 1, no. 6. P. 445–466.
2. *Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S.* An active pulse transmission line simulating nerve axon // *Proceedings of the IRE*. 1962. Vol. 50, no. 10. P. 2061–2070.
3. *Izhikevich E.M., FitzHugh R.* FitzHugh–Nagumo model // *Scholarpedia*. 2006. Vol. 1, no. 9. 1349.
4. *Izhikevich E.M.* *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. The MIT Press, Cambridge, MA. 2010.
5. *Дмитричев А.С., Касаткин Д.В., Клиньшов В.В., Кириллов С.Ю., Масленников О.В., Щапин Д.С., Некоркин В.И.* Нелинейные динамические модели нейронов: Обзор // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2018. Т. 26, вып. 4. С. 5–58.
6. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы // *Успехи математических наук*. 1970. Т. 25, № 1. С. 113–185.
7. *Аносов Д.В., Арансон С.Х., Гринес В.З., Плыкин Р.В., Сатаев Е.А., Сафронов А.В., Солодов В.В., Старков А.Н., Степин А.М., Шлячков С.В.* Динамические системы с гиперболическим поведением // *Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления»*. 1991. Т. 66. С. 5–242.
8. *Shilnikov L.* Mathematical problems of nonlinear dynamics: A tutorial // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1997. Vol. 7, no. 9. Pp. 1953–2001.
9. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем // *Нелинейные волны*. М.: Наука, 1979. С. 192–212.
10. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999. 768 с.
11. *Afraimovich V. and Hsu S.-B.* Lectures on chaotic dynamical systems // *AMS/IP Stud. Adv. Math*. 2003. Vol. 28.
12. *Bonatti C., Díaz L.J., Viana M.* Dynamics beyond uniform hyperbolicity: A global geometric and probabilistic perspective // *Encyclopaedia Math. Sci.* Vol. 102. Berlin: Springer. 2005.
13. *Ruelle D.* Strange attractors // *The Mathematical Intelligencer*. 1980. Vol. 2, no. 3. P. 126–137.
14. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз. 1959.
15. *Pugh C. and Peixoto M.M.* Structural stability // *Scholarpedia*. 2008. Vol. 3, no. 9. 4008.
16. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.



17. Кузнецов С.П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: От математики к физике // Успехи физических наук. 2011. Т. 181, № 2. С. 121–149.
18. Кузнецов С.П., Пономаренко В.И. О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла–Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34, вып. 18. С. 1–8.
19. Аржанухина Д.С., Кузнецов С.П. Грубый хаос в автономной системе с запаздыванием // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22, № 2. С. 36–49.
20. Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P. Numerical test for hyperbolicity of chaotic dynamics in time-delay systems // Phys. Rev. E. 2016. Vol. 94, no. 1. P. 010201.
21. Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P. Numerical test for hyperbolicity in chaotic systems with multiple time delays // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2018. Vol. 56. P. 227–239.
22. Kuznetsov S.P., Sedova Yu.V. Hyperbolic chaos in systems based on FitzHugh–Nagumo model neurons // Regular and Chaotic Dynamics. 2018. Vol. 23, no. 4. P. 329–341.
23. Doroshenko V.M., Kruglov V.P., Kuznetsov S.P. Smale–Williams solenoids in a system of coupled Bonhoeffer–van der Pol oscillators // Russian Journal of Nonlinear Dynamics, 2018. Vol. 14, no. 4. P. 435–451.
24. Kruglov V.P., Kuznetsov S.P. Hyperbolic chaos in a system of two Froude pendulums with alternating periodic braking // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2019. Vol. 67. P. 152–161.
25. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
26. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
27. Farmer J.D. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1982. Vol. 4, no. 3. P. 366–393.
28. Yanchuk S., Giacomelli G. Spatio-temporal phenomena in complex systems with time delays // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2017. Vol. 50, no. 10. P. 103001.
29. Балякин А. А., Рыскин Н. М. Особенности расчета спектров показателей Ляпунова в распределенных автоколебательных системах с запаздывающей обратной связью // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 6. С. 3–21.
30. Колоскова А.Д., Москаленко О.И., Короновский А.А. Метод расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием // Письма в журнал технической физики. 2018. Выпуск 9. С. 19–25.
31. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968.
32. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Т. 2. М.: Мир, 1972.

## References

1. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical Journal*, 1961, vol. 1, no. 6, pp. 445–466.
2. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of the IRE*, 1962, vol. 50, no. 10, pp. 2061–2070.
3. Izhikevich E.M., FitzHugh R. FitzHugh–Nagumo model. *Scholarpedia*, 2006, vol. 1, no. 9, p. 1349.
4. Izhikevich E.M. *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. The MIT Press, Cambridge, MA. 2010.

5. Dmitrichev A.S., Klinshov V.V., Kirillov S.Y., Maslennikov O.V., Shapin D.S., Nekorkin V.I. Nonlinear dynamical models of neurons: Review. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 4, pp. 5–58 (in Russian).
6. Smale S. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American mathematical Society*, 1967, vol. 73, no. 6, pp. 747–817.
7. Dynamical Systems with Hyperbolic Behaviour, D.V. Anosov (Ed.). *Encyclopaedia Math. Sci., Dynamical Systems*, vol. 9, Berlin, Springer, 1995.
8. Shilnikov L. Mathematical problems of nonlinear dynamics: A tutorial. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1997, vol. 7, no. 09, pp. 1953–2001.
9. Sinai Ya.G. The Stochasticity of Dynamical Systems. *Selected Translations. Selecta Math. Soviet.*, 1981, vol. 1, no. 1, pp. 100–119.
10. Katok A. and Hasselblatt B. Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. *Encyclopedia Math. Appl.*, vol. 54, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1995.
11. Afraimovich V. and Hsu S.-B. Lectures on chaotic dynamical systems. *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, 2003, vol. 28.
12. Bonatti C., Díaz L.J., Viana M. Dynamics beyond uniform hyperbolicity: A global geometric and probabilistic perspective. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, 2005, vol. 102, Mathematical Physics, III, Springer-Verlag, Berlin, p. 2.
13. Ruelle D. Strange attractors. *The Mathematical Intelligencer*, 1980, vol. 2, no. 3, p. 126–137.
14. Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S.E. Theory of oscillators. Pergamon Press, Oxford, 1966.
15. Pugh C., Peixoto M.M. Structural stability. *Scholarpedia*, 2008, vol. 3, no. 9, 4008.
16. Rabinovich M.I., Trubetskov D.I. Oscillations and Waves in Linear and Nonlinear Systems. Kluwer Academic Publisher, 1989.
17. Kuznetsov S.P. Dynamical chaos and uniformly hyperbolic attractors: From mathematics to physics. *Physics-Uspekhi*, 2011, vol. 54, no. 2, pp. 119–144.
18. Kuznetsov S.P., Ponomarenko V.I. Realization of a strange attractor of the Smale–Williams type in a radiotechnical delay-feedback oscillator. *Technical Physics Letters*, 2008, vol. 34, no. 9, pp. 771–773.
19. Arzhanukhina D.S., Kuznetsov S.P. Robust chaos in autonomous time-delay system. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2014, vol. 22, no. 2, pp. 36–49 (in Russian).
20. Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P. Numerical test for hyperbolicity of chaotic dynamics in time-delay systems. *Phys. Rev. E*, 2016, vol. 94, no. 1, 010201.
21. Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P. Numerical test for hyperbolicity in chaotic systems with multiple time delays. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2018, vol. 56, pp. 227–239.
22. Kuznetsov S.P., Sedova Yu.V. Hyperbolic chaos in systems based on FitzHugh–Nagumo model neurons. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2018, vol. 23, no. 4, pp. 329–341.
23. Doroshenko V.M., Kruglov V.P., Kuznetsov S.P. Smale–Williams solenoids in a system of coupled Bonhoeffer–van der Pol oscillators. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 14, no. 4, p. 435–451.
24. Kruglov V.P., Kuznetsov S.P. Hyperbolic chaos in a system of two Froude pendulums with alternating periodic braking. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, vol. 67, pp. 152–161.
25. Bellman R.E., Cooke K.L. Differential-difference equations. Academic Press, 2012.
26. El'sgol'ts L.E., Norkin S.B. Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments. Academic Press, 1973.

27. Farmer J. D. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1982, vol. 4, no. 3, pp. 366–393.
28. Yanchuk S., Giacomelli G. Spatio-temporal phenomena in complex systems with time delays. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2017, vol. 50, no. 10, p. 103001.
29. Balyakin A.A., Ryskin N.M. Peculiarities of calculation of the Lyapunov exponents set in distributed self-oscillated systems with delayed feedback. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2007, vol. 15, no. 6, pp. 3–21 (in Russian).
30. Koloskova A.D., Moskalenko O.I., Koronovskii A.A. A method for calculating the spectrum of Lyapunov exponents for delay systems. *Technical Physics Letters*, 2018, vol. 44, no. 5, pp. 374–377.
31. Sveshnikov A.A. Applied methods of the theory of random functions. Elsevier, 2014.
32. Jenkins G.M., Watts D.G. Spectral analysis and its applications. Holden-Day, 1969.

*Кузнецов Сергей Петрович* родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиопизика. Сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН (с 1988), где в настоящее время руководит лабораторией теоретической нелинейной динамики. Главный научный сотрудник лаборатории нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения Удмуртского государственного университета. Профессор базовой кафедры факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Автор монографий «Strange Nonchaotic Attractors» (совместно с А. Пиковским и У. Фойдель), «Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике» и «Hyperbolic Chaos: a Physicist's View». Автор учебно-научных монографий «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 200 научных статей по нелинейной динамике, радиопизике и электронике. Под руководством С.П. Кузнецова защищены двенадцать кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996). Член редакционной коллегии журналов «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», «Regular and Chaotic Dynamics», «Нелинейная динамика», «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Физика».



Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
 Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН  
 E-mail: spkuz@yandex.ru



*Седова Юлия Викторовна* родилась в Саратове (1979), окончила Саратовский госуниверситет (2001), защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (2004) по специальности «Радиопизика». Работает в СФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН старшим научным сотрудником. Опубликовала 40 научных статей по направлению нелинейная динамика.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
 Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН  
 E-mail: sedovayv@yandex.ru