ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2017, т. 297, с. 232–259

УДК 517.9+501+51-72+531.3+534.112+515.16

О некоторых простых примерах механических систем с гиперболическим хаосом[1]

С. П. Кузнецов[2,3,4], **В. П. Круглов**[3,5]

Поступило 6 июля 2016 г.

Посвящается памяти академика Дмитрия Викторовича Аносова

Обсуждаются примеры механических систем с гиперболическим хаосом: шарнирный механизм Тёрстона–Уикса–Ханта–Мак-Кэя, где реализуется консервативная динамика Аносова, и диссипативные системы с аттракторами типа Смейла–Вильямса (частица на плоскости под действием периодических импульсных толчков, взаимодействующие частицы, скользящие на двух попеременно вращающихся дисках, и струна с параметрическим возбуждением модулированной накачкой). Рассмотренные примеры интересны с точки зрения наполнения физическим содержанием гиперболической теории как хорошо разработанного раздела математической теории динамических систем. Представлены результаты компьютерного тестирования гиперболичности в рассмотренных системах на основе анализа статистики углов пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий.

DOI: 10.1134/S0371968517020133

ВВЕДЕНИЕ

Гиперболическая теория — раздел теории динамических систем, дающий строгое математическое обоснование возможности хаотического поведения детерминированных систем как с дискретным временем (итерируемые отображения — диффеоморфизмы), так и с непрерывным (потоки) [2, 8, 38, 80, 81, 89]. Разработка этой теории, по выражению Д.В. Аносова, составила содержание “гиперболической революции 60-х годов” [7]. Объектами исследования служат равномерно гиперболические инвариантные множества в фазовом пространстве динамических систем, составленные исключительно из седловых траекторий. Для всех точек на такой траектории в пространстве малых возмущений (касательном пространстве) можно определить подпространство векторов, экспоненциально убывающих по норме при эволюции в прямом времени, и подпространство векторов, экспоненциально убывающих при эволюции в обратном времени. В потоковых системах, кроме того, вводится одномерное нейтральное подпространство возмущений вдоль траектории, которые в среднем не нарастают и не убывают. Произвольный вектор малого возмущения обязан допускать представление в виде линейной комбинации векторов, относящихся к указанным подпространствам. Множество точек в фазовом пространстве, которые приближаются к данной траектории в ходе эволюции во времени, называется ее устойчивым многообразием. Аналогично неустойчивое многообразие

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-12-20035).

[2]Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия.

[3]Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратов, Россия; Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия.

[4]E-mail: spkuz@yandex.ru

[5]E-mail: kruglovyacheslav@gmail.com

© С.П. Кузнецов, В.П. Круглов, 2017

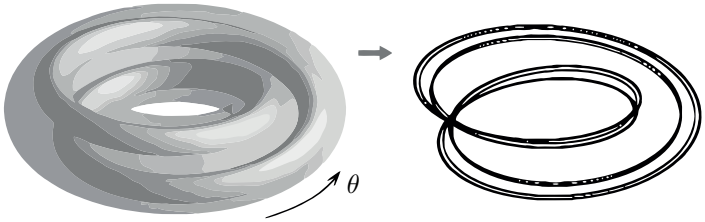

Рис. 1. Построение аттрактора Смейла–Вильямса. Слева показана область в виде тора, которая подвергается продольному растяжению и поперечному сжатию с последующим вложением в виде двойной петли внутрь исходного тора. Справа — соленоид, получающийся в пределе при многократном повторении преобразования

есть множество точек, которые приближаются к исходной траектории при эволюции в обратном времени. Касания устойчивых и неустойчивых многообразий должны быть исключены; допускаются лишь пересечения под ненулевым углом.

Для консервативных систем гиперболический хаос представлен динамикой Аносова, когда равномерно гиперболическое инвариантное множество занимает все компактное фазовое пространство (для диффеоморфизма) или отвечает поверхности постоянной энергии (для потока). Для диссипативных систем гиперболическая теория вводит в рассмотрение специальный тип притягивающих инвариантных множеств — равномерно гиперболические хаотические аттракторы. Примером служит аттрактор Смейла–Вильямса в системе с дискретным временем, в трехмерном пространстве состояний которой область в виде тора за один шаг преобразования претерпевает двукратное продольное растяжение с поперечным сжатием и складывание двойной петлей, помещенной внутрь исходного тора (рис. 1). При каждом повторении преобразования полный объем объекта уменьшается (отображение диссипативное), а число витков удваивается и стремится к бесконечности в пределе бесконечного числа шагов, в результате чего возникает образование, называемое соленоидом, с характерной поперечной структурой типа канторова множества. Очевидным обобщением служит построение, где складываемая петля имеет другое число оборотов — три и больше. Хаотическая природа динамики определяется тем, что преобразование угловой координаты отвечает растягивающему отображению окружности, или отображению Бернулли, вида $\theta_{n+1} = M\theta_n \pmod{2\pi}$, где $M \geq 2$.

Фундаментальный математический факт состоит в том, что равномерно гиперболические инвариантные множества характеризуются свойством грубости, или структурной устойчивости [2, 8, 38, 80, 81, 89]. После того как А.А. Андронов и Л.С. Понтрягин ввели понятие грубости (пригодное для систем с регулярной динамикой), в теории колебаний принято постулировать, что реальный интерес должны представлять именно грубые системы, которые демонстрируют движения, качественно не меняющиеся при малой вариации (“шевелении”) параметров [1, 4, 24, 79]. Рассуждая в этом ключе, можно было ожидать, что, как грубый феномен, гиперболический хаос должен встречаться во многих физических ситуациях. Однако по мере появления многочисленных примеров хаотических систем различной природы (механика, гидродинамика, электроника, химическая кинетика [13, 16, 17, 27, 49, 50, 57, 68, 72, 73, 77, 78, 85]) стало ясно, что они не вписываются в узкие рамки ранней гиперболической теории. В отношении проблем, ведущих происхождение от естественных наук, по замечанию Д.В. Аносова, складывается “такое впечатление, будто Господь Бог предпочитает скорее пойти на некоторое ослабление гиперболичности, нежели возиться с ограничениями на топологию аттрактора, возникающими при его настоящей (полной и равномерной) гиперболичности образца 60-х годов” [7]. Соответственно гиперболическая динамика такого рода стала рассматриваться лишь как рафинированный абстрактный образ хаоса, не относящийся напрямую к реальным системам, а усилия математиков оказались перенаправлены на развитие более широко применимых обобщений [15, 74].

В учебниках и обзорах по динамическим системам равномерно гиперболический хаос обычно представлен искусственно сконструированными математическими примерами, такими как автоморфизмы тора Аносова, геодезические потоки на замкнутых многообразиях постоянной отрицательной кривизны, DA-аттрактор Смейла, аттрактор Плыкина и упомянутый выше соленоид Смейла–Вильямса [2, 8, 38, 80, 81, 89].

Что касается реализации гиперболического хаоса в природе и технике и его практического применения, вопрос долгое время оставался непроработанным. Если полагать согласно идее школы Андронова, что грубые системы должны быть приоритетными для теоретического анализа и практического использования, такое положение выглядит странным и неприемлемым. Так, для любых потенциальных приложений хаоса[6] системы с равномерно гиперболической динамикой видятся предпочтительными, поскольку в силу математически обоснованной структурной устойчивости обладают малой чувствительностью к несовершенству изготовления, помехам, погрешностям параметров, заданию функциональных характеристик элементов и т.п.

Имея в виду сложившуюся ситуацию, представляется продуктивным вместо поиска "готовых" примеров в природе и технике обратиться к целенаправленному построению систем с гиперболической динамикой с привлечением инструментария физики и теории колебаний (осцилляторы, частицы, поля, взаимодействия, цепи обратной связи). В этом отношении в последнее время достигнут значительный прогресс и предложены многочисленные примеры физически реализуемых систем с аттракторами типа Смейла–Вильямса и иными разновидностями гиперболических аттракторов [31, 35, 51–56, 61, 62, 65, 66, 87]. С точки зрения наглядности можно выделить системы механики, которые легко воспринимаются и трактуются благодаря нашему повседневному опыту; их обзору и посвящена настоящая статья.

От физических примеров трудно ожидать, что к ним можно будет применить математически выверенные приемы доказательства гиперболической природы инвариантных множеств, поэтому возникает потребность подтверждения гиперболичности с привлечением компьютерных расчетов. Один из подходов, именуемый для краткости критерием углов, основан на анализе статистики углов между устойчивыми и неустойчивыми подпространствами векторов возмущений (а значит, и многообразиями) фазовых траекторий и был предложен первоначально в работе [67] для седловых инвариантных множеств. Впоследствии он использовался применительно к аттракторам [5, 25, 46, 58], в том числе к аттракторам типа Смейла–Вильямса и Плыкина у отображений Пуанкаре систем, допускающих физическую реализацию [51, 53–55, 65]. Методика состоит в том, что на одной и той же принадлежащей рассматриваемому инвариантному множеству типичной траектории в каждой анализируемой точке определяются углы между подпространствами векторов малых возмущений при проходе по траектории вперед и назад во времени и исследуется их статистическое распределение. Отсутствие углов, близких к нулю, указывает на гиперболичность инвариантного множества. Если же обнаруживается положительная вероятность нулевых углов, то касания между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями имеют место и гиперболичности нет[7]. Ниже будет рассмотрено применение этого подхода к механическим системам с гиперболическим хаосом.

В разд. 1 мы обратимся к задаче о тройном шарнирном механизме, который обсуждался в научно-популярной статье Тёрстона и Уикса [86] как объект с конфигурационным пространством в виде нетривиального двумерного многообразия рода 3 ("бублик с тремя дырками").

[6] Можно упомянуть разработку приложений хаоса в информационно-коммуникационных системах [18–20, 34, 40], криптографии [10, 75], генераторах случайных чисел [12, 21], шумовой локации [69], задачах управления динамикой при помощи малых воздействий на хаотические движения ("управление хаосом"), в том числе в робототехнике [14, 28, 29, 82].

[7] Для диссипативных систем это может говорить о наличии квазиаттрактора, представляющего собой сложно устроенное множество, которое, помимо хаотических орбит, содержит также долгопериодические устойчивые циклы с весьма узкими областями притяжения [79].

В свое время было доказано, что для двумерных многообразий рода, отличного от 0 и 1, динамика геодезического потока неинтегрируема [42]. Если кривизна на двумерном многообразии всюду отрицательна, то геодезический поток соответствует гиперболической динамике Аносова [6, 9]. Хант и Мак-Кэй [30] установили, что в тройном шарнирном механизме такую ситуацию можно обеспечить, и указали при этом соответствующий конкретный набор параметров (размеров и масс дисков и стержней)[8]. В контексте настоящей статьи этот объект весьма удобен для предварительного тестирования метода проверки гиперболичности, поскольку она в данном случае не вызывает сомнений.

В последующих разделах будут рассмотрены три диссипативные системы, у которых отображение Пуанкаре характеризуется присутствием аттракторов в виде соленоида Смейла–Вильямса. Первая задача относится к частице, совершающей скольжение на плоскости в потенциальном поле, имеющем минимум на окружности, под действием периодических импульсных толчков, интенсивность которых зависит от мгновенного положения частицы по специально подобранному закону [56, 66, 87]. Другая система построена на основе двух попеременно вращающихся дисков, на каждый из которых помещена способная скользить по нему частица, притягивающаяся к центру диска, причем обе частицы взаимодействуют между собой через заданное определенным образом потенциальное поле [56]. Наконец, последний пример относится к параметрическому возбуждению стоячих волн в одномерной среде с периодическими граничными условиями в присутствии нелинейной диссипации [32, 33], что можно рассматривать как модификацию классического опыта Мельде по параметрическому возбуждению колебаний струны. В нашем варианте накачка в виде колебаний силы натяжения струны, обеспечиваемых внешним воздействием, модулирована во времени и выполняется попеременно на более низкой и более высокой (утроенной) частотах, что приводит к возникновению по очереди длинноволновых и коротковолновых паттернов. Проверка гиперболичности аттрактора, который реализуется при надлежащем подборе параметров задачи, произведена для конечномерной модели, в рамках которой форма струны представляется комбинацией двух основных с точки зрения функционирования системы пространственных мод.

1. ШАРНИРНЫЙ МЕХАНИЗМ ТЁРСТОНА–УИКСА–ХАНТА–МАК-КЭЯ

На рис. 2 схематически показан шарнирный механизм, составленный из размещенных в общей плоскости трех дисков с центрами в вершинах равностороннего треугольника. Каждый диск способен вращаться вокруг своей оси и имеет установленный на краю шарнир. К этим шарнирам $P_{1,2,3}$ прикреплены три одинаковых стержня, противоположные концы которых соединены вместе посредством еще одного подвижного шарнира P_0. Мгновенная конфигурация системы задается углами поворота дисков θ_1, θ_2, θ_3 от лучей, соединяющих центры дисков с началом координат, но независимыми являются только две из этих переменных в силу наложенной механической связи. Хант и Мак-Кэй показали, что при определенном подборе масс и размеров элементов движение такого механизма по инерции с сохранением кинетической энергии отвечает геодезическому потоку на многообразии всюду отрицательной кривизны, так что реализуется динамика Аносова. В настоящей работе мы ограничимся простым для анализа асимптотическим случаем, когда радиус r мал, а длины стержней R равны расстоянию от начала координат до центров дисков, принятому за единицу, и, кроме того, массивными элементами являются только диски. В этом случае кривизна отрицательна не везде — имеется конечное число точек, где она нулевая, но этого достаточно для обеспечения динамики Аносова [30].

[8] В последнее время предложены и проанализированы также некоторые другие шарнирные механизмы, способные демонстрировать динамику Аносова [41, 70].

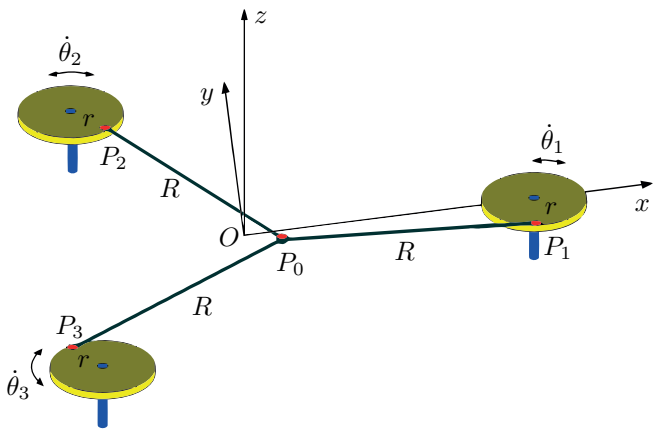

Рис. 2. Шарнирный механизм Тёрстона–Уикса–Ханта–Мак-Кэя (“triple linkage” — тройное соединение)

Декартовы координаты установленных на дисках шарниров $P_{1,2,3}$ выражаются через углы θ_1, θ_2, θ_3 следующим образом:

$$\begin{aligned}
&x_1 = 1 - r\cos\theta_1, && y_1 = -r\sin\theta_1,\\
&x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}r\cos\theta_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}r\sin\theta_2, && y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}r\sin\theta_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}r\cos\theta_2,\\
&x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}r\cos\theta_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}r\sin\theta_3, && y_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}r\sin\theta_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}r\cos\theta_3.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Механическая связь, обусловленная присутствием стержней и шарниров, геометрически соответствует тому, что радиус описанной окружности треугольника $P_1P_2P_3$ должен равняться длине стержней R. Известна формула $R = abc/4S$, где a, b, c — длины сторон треугольника, а S — его площадь. Имея координаты вершин (x_i, y_i), находим длины сторон, а площадь выражаем через векторное произведение векторов, идущих из одной вершины в две другие, $S = \frac{1}{2}|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|$. В результате уравнение связи $(abc)^2 - 4R^2(\mathbf{b}\times\mathbf{c})^2 = 0$ записывается через координаты как

$$\begin{aligned}
F(x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3) = {}& -4R^2\big(x_2y_3 + x_3y_1 + x_1y_2 - x_3y_2 - x_1y_3 - x_2y_1\big)^2 +\\
&+ \big[(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2\big]\big[(x_2-x_3)^2 + (y_2-y_3)^2\big]\big[(x_3-x_1)^2 + (y_3-y_1)^2\big] = 0,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

а подстановка сюда выражений (1.1) приводит к его представлению через угловые переменные: $F(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = 0$.

Если предположить, что $r \ll 1$, и разложить равенство (1.2) в ряд Тейлора по малому параметру r с учетом членов нулевого и первого порядка, получим

$$F(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = 27(R^2-1) - 18r(2R^2-3)(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3). \tag{1.3}$$

Полагая $R = 1$, приходим к очень простому уравнению голономной связи

$$F(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = \cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3 = 0, \tag{1.4}$$

которое далее только и будет использоваться в настоящей работе.

Принимая моменты инерции дисков за единицу, можно записать формулу для кинетической энергии, которая задает в данном случае также и функцию Лагранжа:

$$W = L = \frac{1}{2}\big(\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2 + \dot\theta_3^2\big). \tag{1.5}$$

Уравнения движения выводятся стандартным образом [23, 26] и представляются в виде

$$\ddot{\theta}_1 = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \theta_1}, \qquad \ddot{\theta}_2 = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \theta_2}, \qquad \ddot{\theta}_3 = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \theta_3}, \tag{1.6}$$

где множитель Λ подлежит определению с учетом алгебраического условия голономной механической связи (1.4).

Дифференцируя уравнение связи по времени однократно и двукратно, имеем

$$\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 + \dot{\theta}_2 \sin\theta_2 + \dot{\theta}_3 \sin\theta_3 = 0, \tag{1.7}$$

$$\ddot{\theta}_1 \sin\theta_1 + \ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 + \ddot{\theta}_3 \sin\theta_3 + \dot{\theta}_1^2 \cos\theta_1 + \dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2 + \dot{\theta}_3^2 \cos\theta_3 = 0. \tag{1.8}$$

Подставив в соотношение (1.8) вторые производные из уравнений движения (1.6), находим явно множитель Λ и получаем систему уравнений в замкнутой форме

$$\ddot{\theta}_i = -\frac{\sum_{j=1}^3 \dot{\theta}_j^2 \cos\theta_j}{\sum_{j=1}^3 \sin^2\theta_j} \sin\theta_i, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{1.9}$$

Уравнение (1.4) и соотношение (1.7) отвечают двум интегралам движения системы (1.9), при этом начальные условия обязательно должны задаваться так, чтобы равенства (1.4) и (1.7) выполнялись. Поскольку система (1.9) формально шестого порядка, у нее имеется шесть показателей Ляпунова, характеризующих поведение возмущенных фазовых траекторий около опорной траектории в шестимерном фазовом пространстве. Сумма показателей равна нулю в силу консервативности системы. В случае хаотической динамики один показатель положительный, четыре нулевых, и один отрицательный, равный по абсолютной величине положительному показателю. Один из нулевых показателей обусловлен автономной природой системы и отвечает за возмущение, направленное по касательной к фазовой траектории. Еще один нулевой показатель ассоциируется с возмущением сдвига по энергии. Оставшиеся два нулевых показателя нефизические, так как отвечают возмущениям интегралов движения, обусловленных наложенной голономной связью, и их надо исключить из рассмотрения.

Имея некоторую мгновенную конфигурацию системы, целесообразно использовать в качестве обобщенных координат те две переменные θ_i и θ_j, синусы которых (производные от функции в уравнении связи) имеют меньшую абсолютную величину. Третью координату θ_k и обобщенную скорость $\dot{\theta}_k$ можно получить из уравнения связи:

$$\cos\theta_k = \pm \arccos(-\cos\theta_i - \cos\theta_j), \qquad \dot{\theta}_k = \pm\sqrt{\frac{\dot{\theta}_i^2 \sin^2\theta_i + \dot{\theta}_j^2 \sin^2\theta_j}{1 - (\cos\theta_i + \cos\theta_j)^2}}. \tag{1.10}$$

Выделение пары обобщенных координат отвечает выбору одной из трех согласованных карт атласа двумерного многообразия, что можно делать на каждом шаге численного решения задачи при моделировании динамики. Этим обеспечивается адекватное описание движения на всем конфигурационном пространстве.

Подставив в формулу для кинетической энергии выражение одной из угловых скоростей $\dot{\theta}_3$ через две другие скорости $\dot{\theta}_{1,2}$ и координаты $\theta_{1,2}$, представим ее в виде

$$W(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}\big[E(\theta_1, \theta_2)\dot{\theta}_1^2 + F(\theta_1, \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + G(\theta_1, \theta_2)\dot{\theta}_2^2\big], \tag{1.11}$$

где

$$E = 1 + \frac{\sin^2\theta_1}{1 - (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)^2}, \qquad F = \frac{2\sin\theta_1 \sin\theta_2}{1 - (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)^2}, \qquad G = 1 + \frac{\sin^2\theta_2}{1 - (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)^2}.$$

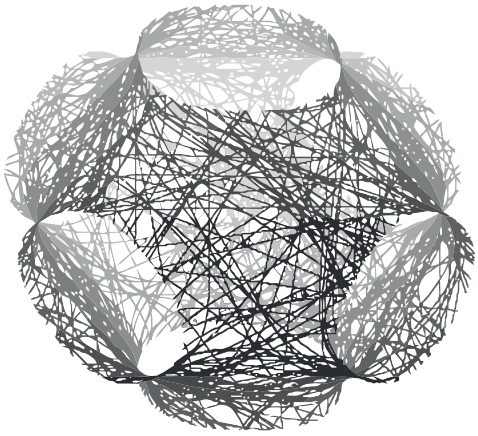

Рис. 3. Типичный портрет траектории в трехмерном конфигурационном пространстве $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$

Кинетическая энергия сохраняется, и динамика имеет место по геодезическим линиям метрики, заданной в локальных координатах (θ_1, θ_2) выражением

$$ds^2 = E(\theta_1, \theta_2)\, d\theta_1^2 + F(\theta_1, \theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 + G(\theta_1, \theta_2)\, d\theta_2^2, \tag{1.12}$$

а на других картах атласа аналогичными выражениями, полученными циклической перестановкой индексов. Согласно известной из дифференциальной геометрии формуле [3, 83] гауссова кривизна равна

$$K = \frac{2}{(4EG - F^2)^2} \left(\begin{vmatrix} -E''_{22} + F''_{12} - G''_{22} & E'_1 & F'_1 - E'_2 \\ F'_2 - G'_1 & 2E & F \\ G'_2 & F & 2G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & E'_2 & G'_1 \\ E'_2 & 2E & F \\ G'_1 & F & 2G \end{vmatrix} \right), \tag{1.13}$$

где штрихи и индексы обозначают производные по соответствующим переменным (θ_1, θ_2), и для метрики (1.12) ее удается найти явно [30, 59]:

$$K = -\frac{\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \cos x_1 \cos x_2}{4(-3/2 + \cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \cos x_1 \cos x_2)^2}. \tag{1.14}$$

С учетом уравнения связи выражение можно переписать в симметричной форме

$$K = -\frac{\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3}{2(\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_3)^2}, \tag{1.15}$$

откуда видно, что кривизна отрицательна везде, за исключением восьми точек $x_i = \pm\pi/2$, $i = 1, 2, 3$, где она обращается в нуль. Этого достаточно, чтобы геодезический поток обеспечивал динамику Аносова [30].

На рис. 3 приводится типичный портрет траектории в конфигурационном пространстве, полученной при численном решении уравнений (1.9). Траектория непрерывна: при пересечении грани представленной на рисунке кубической ячейки она продолжается от противоположной грани куба в силу периодичности конфигурационного пространства по трем переменным. Видно, что она покрывает поверхность, топологически эквивалентную “кренделю с тремя дырками”. На рис. 4 показаны реализации — зависимости обобщенных координат θ_1, θ_2, θ_3 и скоростей $\dot\theta_1$, $\dot\theta_2$, $\dot\theta_3$ от времени для энергии $W = 0.1$.

Чтобы охарактеризовать наблюдаемый хаос на количественном уровне, естественно использовать показатели Ляпунова. Как уже говорилось, имеется четыре показателя Ляпунова, согласующихся с наложенной голономной связью, причем два из них нулевые. Поскольку полная сумма показателей также равна нулю, в численных расчетах достаточно найти один

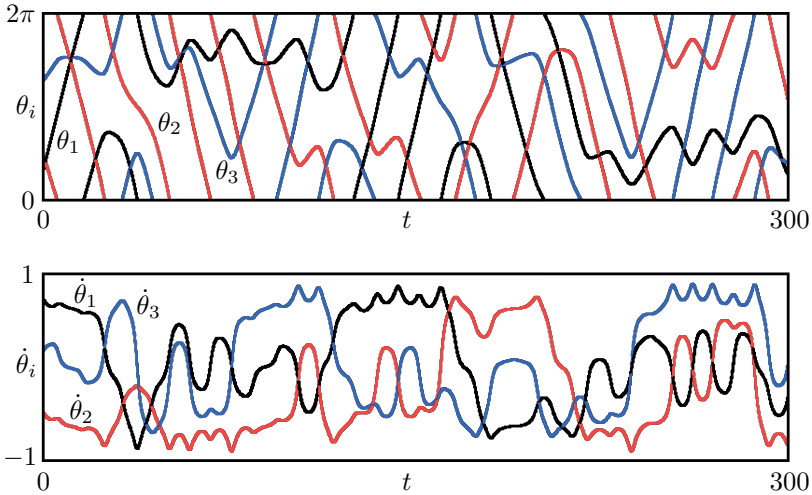

Рис. 4. Реализации зависимостей обобщенных координат и скоростей от времени, полученные при величине кинетической энергии $W = (\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2 + \dot\theta_3^2)/2 = 0.1$. В силу циклической природы обобщенных координат непрерывные кривые на верхней диаграмме выглядят так, что при пересечении верхней границы кривая продолжается, стартуя от нижней границы, и наоборот

наибольший показатель, после чего остальные три определяются однозначно. Для $W = 0.1$, что соответствует графикам на рис. 4, показатели Ляпунова, рассчитанные по традиционному алгоритму [11, 50, 77] на основе совместного интегрирования уравнений движения и уравнений в вариациях, таковы: $\lambda_1 = 0.224$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = -0.224$.

Имея формулу для кривизны, можно применить альтернативный метод вычисления показателей Ляпунова, рассматривая задачу в терминах полей Якоби [39]. Разность радиус-векторов для близких точек на близких геодезических линиях представляется в локально определенном базисе $(\mathbf{e}_\parallel, \mathbf{e}_\perp)$, где $\mathbf{e}_\parallel$ — единичный вектор, направленный вдоль геодезической линии, а $\mathbf{e}_\perp$ — ортогональный ему единичный вектор. Тогда для коэффициентов разложения вектора инфинитезимального возмущения $J_\parallel \mathbf{e}_\parallel + J_\perp \mathbf{e}_\perp$ получаются уравнения

$$\ddot J_\parallel = 0, \qquad \ddot J_\perp = -2K(t) W J_\perp, \tag{1.16}$$

где $K(t)$ — локальная кривизна, которая зависит от мгновенных координат, $W = \dot s^2/2$ — кинетическая энергия. Из первого уравнения видно, что имеется два нулевых показателя, ассоциирующихся с продольной составляющей движения. Из второго уравнения, учитывая, что $K \le 0$, где равенство достигается только в исключительных изолированных точках, следует наличие равных по абсолютной величине положительного и отрицательного показателей. Конкретно найти старший показатель можно, интегрируя численно уравнение для коэффициента $J_\perp$ совместно с уравнениями движения, причем получается хорошее соответствие с приведенным выше результатом. Старший показатель Ляпунова записывается в виде $\lambda = \kappa\sqrt{W}$, где эмпирический коэффициент $\kappa \approx 0.70$ определяется средней кривизной вдоль траектории. Вследствие присущей гиперболическому хаосу эргодичности этот коэффициент статистически хорошо определен для типичной траектории.

Гиперболичность в данном случае не вызывает сомнений, но представляется интересным выполнить для этого примера тестирование “критерия углов” [5, 25, 46, 58, 67], который может применяться также и в ситуациях, когда наличие или отсутствие гиперболичности неочевидно.

Критерий удобно использовать в изящной формулировке работы [46]. Начинаем с вычисления на компьютере опорной орбиты $\mathbf{x}(t)$ путем решения системы (1.9) $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ на достаточно протяженном временно́м интервале. Затем берем линеаризованное уравнение для вектора возмущения $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}'(\mathbf{x}(t))\tilde{\mathbf{x}}$, где $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ — матричная производная (составленная из частных

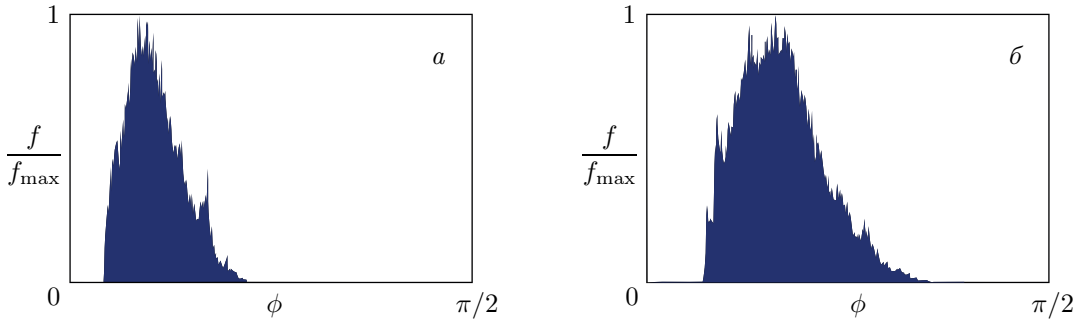

Рис. 5. Проверка критерия углов в системе (1.9) для траекторий с кинетической энергией $W = (\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2 + \dot\theta_3^2)/2 = 0.1$ (*а*) и 0.3 (*б*). Показан вид полученной в численных расчетах функции распределения f для углов (см. текст), нормированной на ее максимальное значение

производных матрица размера 6×6), и интегрируем его вдоль найденной траектории $\mathbf{x}(t)$ с нормировкой вектора $\widetilde{\mathbf{x}}$ на каждом шаге n на единицу, чтобы исключить расходимость. (В нашей задаче неустойчивое направление одно, что связано с наличием единственного положительного показателя Ляпунова.) В результате получаем набор единичных векторов $\{\mathbf{x}_n\}$. Далее выполняем интегрирование в обратном времени вдоль той же самой опорной траектории линейного уравнения $\dot{\mathbf{u}} = -[\mathbf{F}'(\mathbf{x}(t), t)]^{\mathrm{T}}\mathbf{u}$, где верхний индекс T означает транспонирование. Это дает набор векторов $\{\mathbf{u}_n\}$, определяющих ортогональное дополнение к устойчивому подпространству векторов возмущения в точках опорной траектории. Их также удобно нормировать на единицу. Теперь для оценки угла ϕ между одномерным неустойчивым подпространством и устойчивым подпространством на каждом n-м шаге вычисляем угол $\beta_n \in [0, \pi/2]$ между векторами $\widetilde{\mathbf{x}}_n$ и $\mathbf{u}_n$: $\cos\beta_n = |\mathbf{u}_n(t) \cdot \widetilde{\mathbf{x}}_n(t)|$, и полагаем $\phi_n = \pi/2 - \beta_n$.

На рис. 5 показаны полученные численно гистограммы распределения углов между устойчивыми и неустойчивыми подпространствами в системе (1.9) для $W = 0.1$ и 0.3. Видно, что распределения отделены от нулевых значений углов ϕ_n, т.е. в обоих случаях тест подтверждает гиперболичность.

Интересно отметить, что гиперболическая природа хаотической динамики сохраняется при рассмотренных в работах [58, 59] модификациях системы с введением диссипации и обратной связи, делающих ее автоколебательной. Это продемонстрировано численно как в варианте, когда в качестве аттрактора выступает инвариантная энергетическая поверхность, так и в моделях, где энергия для траекторий на аттракторе с течением времени флуктуирует около некоторого среднего значения [58]. Более того, гиперболический аттрактор продолжает существовать до известных пределов и при более глубокой модификации, когда механическая связь трех ротаторов, образующих систему, заменяется их взаимодействием посредством потенциала, минимум которого отвечает предполагавшемуся в исходной задаче условию связи [58, 59]. Эти результаты позволяют говорить о возможности создания систем немеханической природы, аналогичных по характеру динамики тройному шарнирному механизму, например электронных генераторов грубого хаоса с привлекательными для приложений характеристиками [60].

2. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ НА ПЛОСКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТОЛЧКОВ

Задачи о движении частицы на плоскости под действием периодических толчков, когда в отображении за период воздействия реализуется аттрактор типа Смейла–Вильямса, были предложены и исследованы численно в работах [66, 87]. Здесь будет рассмотрен вариант из более поздней работы [56], который, по-видимому, больше подходит для возможной экспериментальной реализации.

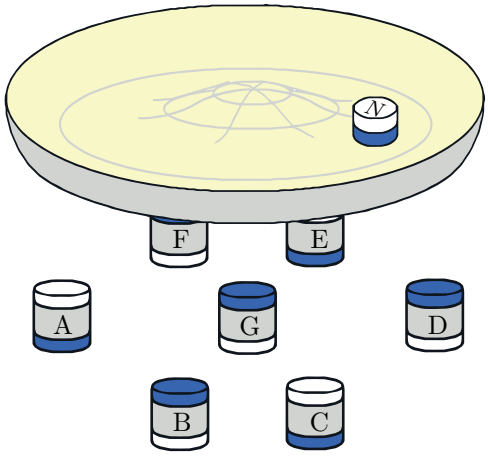

Рис. 6. Схематическое изображение возможной конструкции, где реализуется движение частицы с импульсными толчками, моделируемое уравнениями (2.1). Серые цилиндры — электромагниты, включаемые периодически следующими импульсами тока; цвет торца указывает полярность

Пусть дана частица единичной массы, совершающая движение на плоскости (x, y) в стационарном потенциальном поле $U(x, y) = -\mu(x^2 + y^2)/2 + \mu(x^2 + y^2)^2/4$, которое обладает вращательной симметрией относительно начала координат, с минимумом на единичной окружности. Предположим, что периодически с периодом T на короткое время включается дополнительное силовое поле с потенциалом $V(x, y) = (x^2 + y^2)/2 - x^3/3 + xy^2$, так что получаемый частицей импульс по величине и направлению зависит от ее мгновенного положения. Функция Лагранжа для данной задачи имеет вид

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(x, y) - V(x, y) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) =$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\mu\left[x^2 + y^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2\right] + \left[-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}x^3 - xy^2\right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

Практически потенциал $V(x, y)$ можно обеспечить при помощи системы шести электромагнитов A, ..., F в виде гексаполя и дополнительного электромагнита G, создающего центрально симметричную часть потенциала, которые все включаются одновременно импульсами тока, следующими периодически (рис. 6). Частицу считаем магнитом, один полюс которого участвует во взаимодействии, а второй удален за пределы области взаимодействия.

Запишем уравнения движения как уравнения Лагранжа в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \mu x(1 - x^2 - y^2) + (-x + x^2 - y^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) - \dot{x}, \\ \ddot{y} &= \mu y(1 - x^2 - y^2) + (-y - 2xy) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) - \dot{y}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где добавлена сила трения, пропорциональная мгновенной скорости. Коэффициент трения для простоты принят равным единице.

Поясним механизм функционирования системы.

Вместо одной частицы представим себе кольцо из множества невзаимодействующих частиц, в начальный момент покоящихся на единичной окружности в точках $x = \cos\varphi$ и $y = \sin\varphi$, где $0 \le \varphi < 2\pi$.

После толчка со стороны поля V частица, имевшая начальный угол φ, получит импульс с компонентами $P_x = -x + x^2 - y^2$ и $P_y = -y - 2xy$. Если временно не учитывать поле U, то легко найти, что частица остановится из-за трения в точке с координатами

$$x' = x + P_x = x^2 - y^2, \qquad y' = y + P_y = -2xy. \tag{2.2}$$

Подставляя $x = \cos\varphi$ и $y = \sin\varphi$ в (2.2), получим $x' = \cos\varphi'$ и $y' = \sin\varphi'$, где $\varphi' = -2\varphi$. Это значит, что частицы расположатся опять по единичной окружности, но однократный обход исходного кольца отвечает теперь двукратному обходу вновь образовавшегося кольца в обратном направлении. Таким образом, для угловой координаты получаем растягивающее отображение окружности, или отображение Бернулли.

Пусть в уравнениях (2.1) параметр μ будет относительно малым, чтобы за характерное время, в течение которого происходит движение частицы вследствие импульсного толчка, смещение под действием поля $U(x, y)$ было невелико. С другой стороны, пусть интервал времени между толчками T будет достаточно большим, чтобы частица успевала подойти к минимуму потенциального поля. (Эти условия не очень жесткие, и их достаточно обеспечить хотя бы в грубом приближении, что обусловлено структурной устойчивостью аттрактора, который мы намерены получить.) Задав начальное состояние $\mathbf{x}_n = \{x, \dot{x}, y, \dot{y}\}_{t=nT-0}$ в момент непосредственно перед n-м импульсом, можно определить состояние перед следующим $(n+1)$-м импульсом из решения уравнений (2.1) на периоде T

$$\ddot{x} + \dot{x} = \mu x(1 - x^2 - y^2), \qquad \ddot{y} + \dot{y} = \mu y(1 - x^2 - y^2) \tag{2.3}$$

с начальными условиями, определяемыми состоянием сразу после толчка:

$$\begin{aligned} x|_{t=nT+0} &= x_n, \qquad \dot{x}|_{t=nT+0} = \dot{x}_n - x_n + x_n^2 - y_n^2, \\ y|_{t=nT+0} &= y_n, \qquad \dot{y}|_{t=nT+0} = \dot{y}_n - y_n - 2x_n y_n. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Соотношения (2.3), (2.4) приводят к четырехмерному отображению Пуанкаре $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$, которое, хотя и не выражается в аналитическом виде, легко воспроизводится посредством компьютерной программы с помощью численного решения дифференциальных уравнений (2.3) при соответствующих начальных условиях. Аттрактором этого отображения служит соленоид Смейла–Вильямса, что обусловлено топологическим свойством ансамбля частиц после преобразования, а именно появлением конфигурации в виде петли, охватывающей начало координат дважды. Сжатие в фазовом пространстве в поперечном направлении осуществляется за счет трения на той стадии процесса, когда под действием потенциального поля частица дрейфует в направлении потенциального минимума на единичной окружности. В отличие от классического построения, описанного во введении, аттрактор типа Смейла–Вильямса в этой модели вложен в четырехмерное (а не трехмерное) фазовое пространство.

На рис. 7 приводятся полученное при численном решении уравнений (2.1) изображение типичной траектория частицы в процессе движения на плоскости (x, y) и портрет аттрактора в стробоскопическом сечении в проекции на плоскость (x, y), причем различима канторова поперечная структура соленоида. На рис. 8 показана диаграмма для угловой координаты $\varphi_n = \arg(x(nT - 0) + iy(nT - 0))$, определенной перед каждым очередным толчком. Видно, что угловая координата изменяется от шага к шагу в соответствии с растягивающим отображением окружности (отображением Бернулли). Один обход окружности для прообраза отвечает двум обходам для образа в обратном направлении.

Вычисление полного спектра четырех показателей Ляпунова для отображения Пуанкаре системы (2.3) основано на совместном численном решении уравнения (2.3) для опорной орбиты

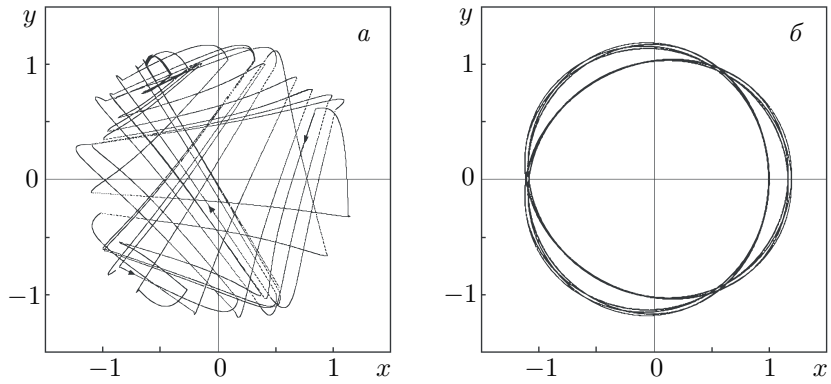

Рис. 7. Траектория частицы на плоскости (x, y) в модели, заданной соотношениями (2.1), при $\mu = 0.3$, $T = 4$ за 50 периодов воздействия, где стрелки показывают направление движения (a), и портрет аттрактора в стробоскопическом сечении ($б$)

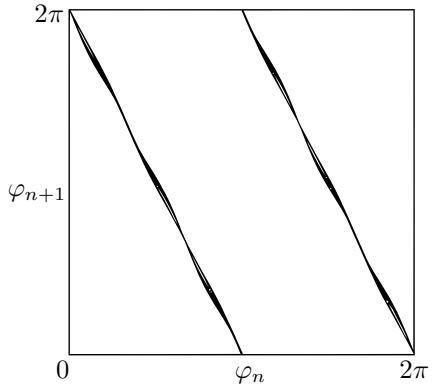

Рис. 8. Итерационная диаграмма для угловой переменной $\varphi_n = \arg(x(nT - 0) + iy(nT - 0))$, полученная при численном моделировании динамики системы (2.1) на аттракторе при $\mu = 0.3$, $T = 4$

с учетом соотношений (2.4), отвечающих толчкам, и четырех комплектов уравнений в вариациях. После каждого толчка проводится ортогонализация векторов возмущения по Граму–Шмидту и их перенормировка. Показатели Ляпунова определяются как средние коэффициенты роста или убывания накапливающихся сумм логарифмов норм для векторов возмущения после ортогонализации, но до нормировки [11, 50, 77].

На рис. 9 показаны графики показателей Ляпунова в зависимости от параметра μ при фиксированном периоде T. Заметим, что старший показатель Ляпунова остается приблизительно постоянным и близок к величине $\Lambda_1 \approx \ln 2$, что соответствует отображению окружности с равномерным двукратным растяжением, приближенно описывающему динамику угловой переменной. Остальные показатели отрицательные. В частности, при $\mu = 0.3$, $T = 4$ показатели Ляпунова таковы: $\Lambda_1 = 0.687$, $\Lambda_2 = -1.386$, $\Lambda_3 = -3.000$, $\Lambda_4 = -3.733$. Оценка фрактальной размерности аттрактора системы (2.3) в сечении Пуанкаре при $\mu = 0.3$, $T = 4$ по формуле Каплана–Йорке дает $D = 1.50$.[9]

[9]Количественной характеристикой, присущей аттрактору канторовой структуры, служит фрактальная размерность. Каплан и Йорке предложили формулу для оценки размерности аттракторов через показатели Ляпунова $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m, \dots, \Lambda_N$, которые считаются занумерованными в порядке убывания [37, 50, 77]: $D_{\mathrm{KY}} = m + S_m/|\Lambda_{m+1}|$, $S_m = \sum_{i=1}^{m} \Lambda_i$. Здесь m — такое целое число, что сумма S_m еще положительна, а сумма S_{m+1} уже отрицательна. Эмпирически формула дает результаты, близкие к корректно определенной фрактальной размерности аттракторов, но строгого обоснования у нее нет. Поэтому приведенную оценку предпочитают трактовать как отдельную характеристику аттрактора, называемую размерностью

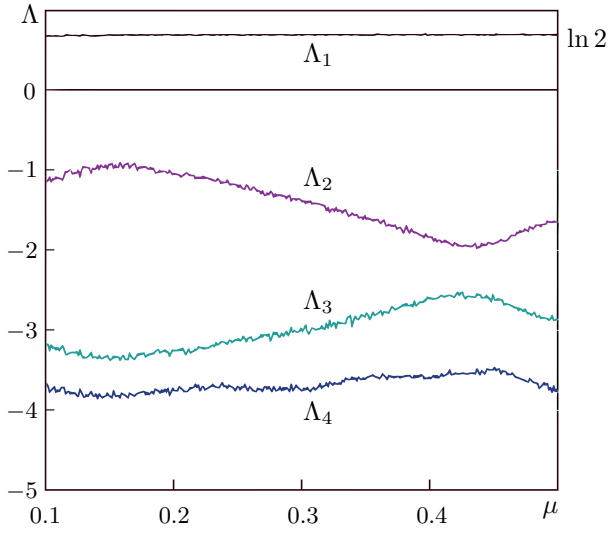

Рис. 9. График показателей Ляпунова для аттрактора отображения Пуанкаре модели (2.1) в зависимости от параметра μ при $T = 4$

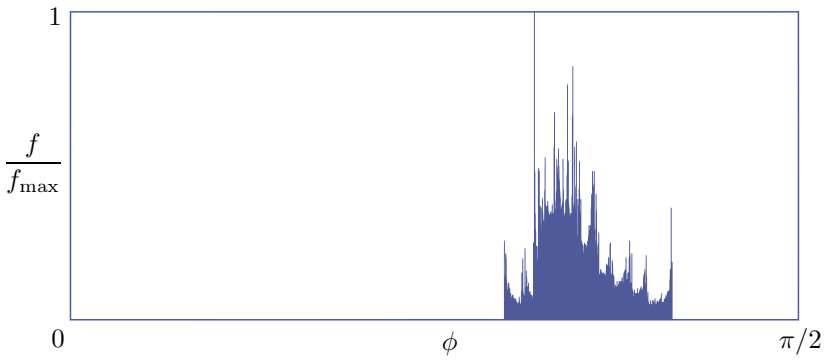

Рис. 10. Проверка критерия углов для принадлежащей аттрактору орбиты, порождаемой отображением Пуанкаре системы (2.3) при $\mu = 0.3$, $T = 4$

Процедура проверки критерия углов для аттрактора системы (2.3) в численных расчетах выполнялась по той же схеме, что и в предыдущем разделе, с той разницей, что применялась к динамике в дискретном времени, отвечающей итерациям стробоскопического отображения Пуанкаре $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$.

Первый этап состоит в получении достаточно длинной последовательности четырехмерных векторов состояния $\mathbf{x}_n$, отвечающей опорной орбите на аттракторе. Затем берем линеаризованное уравнение для вектора возмущения $\widetilde{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)\widetilde{\mathbf{x}}_n$, где $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)$ — матрица размера 4×4, составленная из частных производных, и выполняем итерации вдоль опорной траектории $\mathbf{x}_n$ с нормировкой вектора $\widetilde{\mathbf{x}}_n$ на каждом шаге n на единицу, чтобы исключить расходимость. (Неустойчивое направление одно, что связано с наличием единственного положительного показателя Ляпунова.) В результате получаем набор единичных векторов $\{\widetilde{\mathbf{x}}_n\}$. Далее выполняем итерации в обратном времени вдоль той же самой опорной траектории линейного уравнения, используя транспонированную обратную матрицу производных $\widetilde{\mathbf{u}}_n = \{[\mathbf{f}'(\mathbf{x}_{n+1})]^{-1}\}^{\mathrm{T}}\widetilde{\mathbf{u}}_{n+1}$, и, проводя нормировку на единицу, получаем набор векторов $\{\mathbf{u}_n\}$, определяющих ортогональное

Каплана–Йорке или ляпуновской размерностью. Заметим, что эвристический вывод формулы (4.1) базируется на предположении об однородном сжатии и растяжении фазового объема в ходе динамической эволюции, что оправдано в наибольшей мере как раз для равномерно гиперболических аттракторов.

дополнение устойчивого подпространства векторов возмущения в точках опорной траектории. Наконец, на каждом n-м шаге вычисляем угол $\beta_n \in [0, \pi/2]$ между векторами $\widetilde{\mathbf{x}}_n$ и $\mathbf{u}_n$: $\cos\beta_n = |\mathbf{u}_n(t) \cdot \widetilde{\mathbf{x}}_n(t)|$, и полагаем $\phi_n = \pi/2 - \beta_n$.

На рис. 10 показана гистограмма распределения углов между устойчивыми и неустойчивыми подпространствами для траектории на аттракторе системы (2.3) при $\mu = 0.3$, $T = 4$. Видно, что распределение отделено от нулевых значений углов ϕ_n, т.е. тест подтверждает гиперболичность аттрактора отображения Пуанкаре данной системы.

3. СИСТЕМА ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ, РАЗМЕЩЕННЫХ НА ПОПЕРЕМЕННО ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКАХ

Перейдем к системе, которая была введена в работе [56] и представляет собой конструкцию в виде двух горизонтально расположенных один над другим дисков, совершающих вращение вокруг общей оси с некоторой угловой скоростью ω попеременно (один вращается, другой стоит, затем наоборот) (рис. 11). На каждый диск помещена частица, способная по нему скользить, испытывая вязкое трение, сила которого пропорциональна скорости частицы относительно диска. Пусть также присутствует силовое поле $U(r)$, симметричное относительно оси вращения, с минимумом потенциала в центре и сильным нарастанием к краю дисков. Кроме того, будем считать, что обе частицы взаимодействуют посредством потенциального поля $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, где $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — векторы, задающие положение частиц. Как будет показано, в этой системе при надлежащем выборе потенциала взаимодействия и других параметров в отображении, описывающем изменение состояния системы за период смены вращения, возникает хаотическая динамика, соответствующая аттрактору типа Смейла–Вильямса.

Положим[10]

$$U(x,y) = \frac{1}{2}k(x^2+y^2) + \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2, \qquad V(x,y) = -\frac{1}{3}x^3 + xy^2. \tag{3.1}$$

В отсутствие трения система характеризуется функцией Лагранжа

$$L = \sum_{i=1,2}\left[\frac{1}{2}(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2) - \frac{1}{2}k(x_i^2+y_i^2) - \frac{1}{4}(x_i^2+y_i^2)^2\right] + \frac{1}{3}(x_1-x_2)^3 - (x_1-x_2)(y_1-y_2)^2, \tag{3.2}$$

где $x_{1,2}$, $y_{1,2}$ — декартовы координаты каждой частицы на своем диске, k — параметр. Чтобы учесть действие вязкого трения, в соответствующие уравнения Лагранжа надо добавить члены, пропорциональные скорости частиц относительно дисков. Учитывая, что при вращении диска с угловой скоростью ω линейная скорость в точке расположения частицы (x_i, y_i) равна $(-\omega y_i, \omega x_i)$, получаем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \alpha\left(\frac{dx_i}{dt} + \omega_i y_i\right), \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = \frac{\partial L}{\partial y_i} - \alpha\left(\frac{dy_i}{dt} - \omega_i x_i\right), \qquad i = 1,2, \tag{3.3}$$

или

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i &= x_i(k + x_i^2 + y_i^2) + \alpha(-\omega_i y_i - \dot{x}_i) + (-1)^i\varepsilon\big[(x_1-x_2)^2 - (y_1-y_2)^2\big], \\ \ddot{y}_i &= y_i(k + x_i^2 + y_i^2) + \alpha(\omega_i x_i - \dot{y}_i) - 2(-1)^i\varepsilon(x_1-x_2)(y_1-y_2), \qquad i = 1,2, \end{aligned} \tag{3.4}$$

[10] Практически потенциал типа $U(x,y)$ из (3.1) можно реализовать, заменив диски чашеобразными поверхностями, а потенциал типа $V(x,y)$ — используя вместо первой частицы одиночный магнит, а вместо второй конструкцию из магнитов типа гексаполя, причем ее пространственная ориентация должна оставаться неизменной независимо от вращения диска. (При формальном описании мы не концентрируемся на этой конкретной реализации, поскольку она маскирует присущую модели симметрию между составляющими систему двумя подсистемами.)

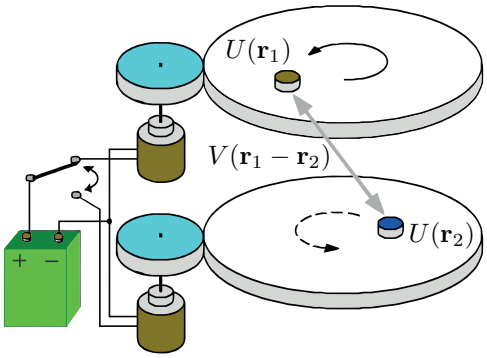

Рис. 11. Схематическое изображение конструкции, реализующей движение двух взаимодействующих частиц на попеременно вращающихся дисках, моделируемое уравнениями (3.4)

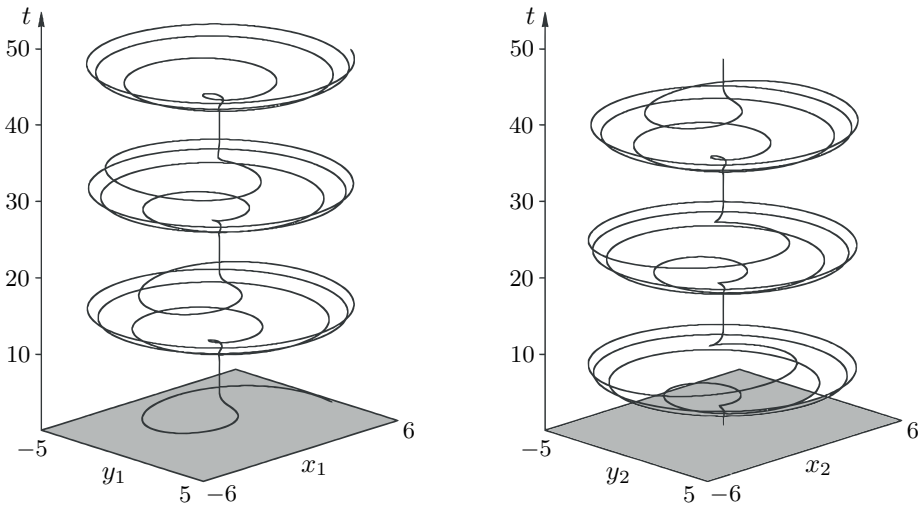

Рис. 12. Изменение пространственного положения частиц на дисках во времени в процессе функционирования модели (3.4) при параметрах (3.6)

где

$$\omega_1(t) = \begin{cases} \omega_0, & nT \le t < nT + \dfrac{T}{2}, \\ 0, & nT + \dfrac{T}{2} \le t < (n+1)T, \end{cases} \qquad \omega_2(t) = \begin{cases} 0, & nT \le t < nT + \dfrac{T}{2}, \\ \omega_0, & nT + \dfrac{T}{2} \le t < (n+1)T. \end{cases} \tag{3.5}$$

Рисунок 12 иллюстрирует типичный режим динамики модели, полученный из численного решения уравнений (3.4) при задании параметров

$$k = 3, \qquad \alpha = 3, \qquad \varepsilon = 0.03, \qquad T = 16, \qquad \omega_0 = 2\pi. \tag{3.6}$$

На рисунке показано изменение пространственного положения каждой из частиц во времени в процессе функционирования системы. Видно, что вращение частиц происходит попеременно, причем движение не является периодическим: форма витков не повторяется на последовательных стадиях активности ни одной из подсистем.

На рис. 13, *а* приводится итерационная диаграмма для угловой координаты одной из частиц $\varphi_n = \arg(x(nT-0) + iy(nT-0))$, определенной непосредственно по окончании каждой очередной стадии вращения соответствующего диска перед каждым очередным толчком. Видно, что угловая координата ведет себя в соответствии с растягивающим отображением окружности (отображением Бернулли). Один обход окружности для прообраза отвечает четырем

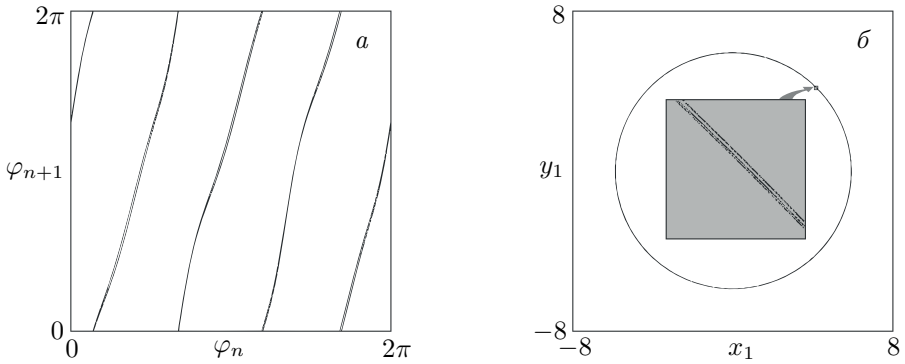

Рис. 13. Итерационная диаграмма для угловой координаты одной из частиц (*а*) и портрет аттрактора в стробоскопическом сечении (*б*) для модели, заданной уравнениями (3.4) при параметрах (3.6). На вставке видно характерную для аттрактора Смейла–Вильямса поперечную канторову структуру

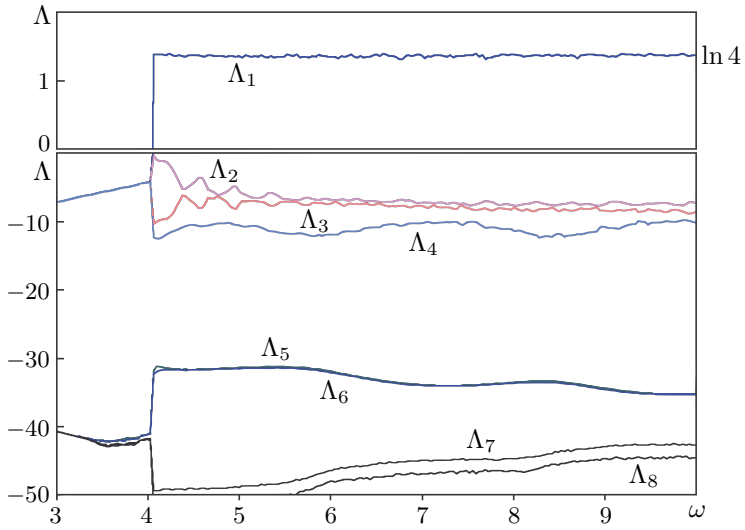

Рис. 14. График показателей Ляпунова модели (3.4) в зависимости от параметра угловой скорости вращения дисков при $k = 3$, $\alpha = 3$, $\varepsilon = 0.03$, $T = 16$

обходам для образа. На рис. 13, *б* показан портрет аттрактора в стробоскопическом сечении в проекции на плоскость координат одной из частиц (x_1, y_1). В исходном масштабе он выглядит как окружность, но при увеличении (см. вставку) становится различимой характерная для аттрактора типа Смейла–Вильямса поперечная канторова структура. В данном случае аттрактору соответствует четырехкратное складывание образа тороидальной области в восьмимерном фазовом пространстве стробоскопического отображения Пуанкаре.

На рис. 14 показан график показателей Ляпунова в зависимости от угловой скорости вращения дисков ω. Показатели Ляпунова вычислялись путем совместного численного решения уравнения (3.4) для опорной орбиты и восьми комплектов уравнений в вариациях. На каждом шаге интегрирования проводилась ортогонализация векторов по Граму–Шмидту и их перенормировка. Заметим, что старший показатель Ляпунова остается приблизительно постоянным и близок к величине $\Lambda_1 \approx \ln 4$, которая соответствует отображению Бернулли, приближенно описывающему динамику угловой переменной. В частности, при $\omega = 2\pi$ показатели таковы: $\Lambda_1 = 1.354$, $\Lambda_2 = -6.90$, $\Lambda_3 = -7.65$, $\Lambda_4 = -11.61$, $\Lambda_5 = -32.81$, $\Lambda_6 = -32.92$, $\Lambda_7 = -45.34$, $\Lambda_8 = -47.26$. Формула Каплана–Йорке для фрактальной размерности аттрактора в данном режиме дает $D \approx 1.20$.

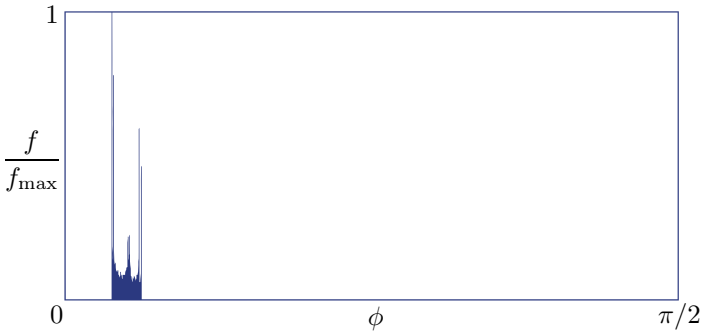

Рис. 15. Проверка критерия углов для принадлежащей аттрактору орбиты модели (3.4) при задании параметров $k = 3$, $\alpha = 3$, $\varepsilon = 0.03$, $T = 16$, $\omega_0 = 2\pi$. Сечение Пуанкаре отвечает моментам времени $T/4 + nT$, где n — целое число

Проверка критерия углов для аттрактора системы (2.3) в численных расчетах проводилась по той же схеме, что и в предыдущем разделе. Рассматривалась динамика в дискретном времени, отвечающая итерациям восьмимерного отображения Пуанкаре $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ на аттракторе. На полученной опорной траектории выполнялись итерации отображений для восьмимерных векторов в прямом времени $\widetilde{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)\widetilde{\mathbf{x}}_n$ и обратном времени $\widetilde{\mathbf{u}}_n = \{[\mathbf{f}'(\mathbf{x}_{n+1})]^{-1}\}^{\mathrm{T}}\widetilde{\mathbf{u}}_{n+1}$, где $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)$ — матрица Якоби, с последующим построением гистограммы распределения углов между векторами $\widetilde{\mathbf{x}}_n$ и $\mathbf{u}_n$. Гистограмма, полученная для траектории на аттракторе системы при параметрах (3.6), показана на рис. 15. Имея в виду, что распределение отделено от нулевых значений углов ϕ_n, заключаем, что тест подтверждает гиперболичность аттрактора отображения Пуанкаре данной системы.

4. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ХАОС ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ СТРУНЫ С МОДУЛИРОВАННОЙ НАКАЧКОЙ

В работах [32, 33] была указана и продемонстрирована в численных расчетах возможность хаотической динамики, ассоциирующейся с гиперболическим аттрактором типа Смейла–Вильямса, при параметрическом возбуждении механических колебаний неоднородной струны с нелинейной диссипацией, когда накачка попеременно осуществляется колебаниями на низкой и высокой частотах. При этом роль угловой координаты играет пространственная фаза возбуждающихся паттернов стоячих волн[11].

Как известно, в линейном приближении колебания струны описываются уравнением в частных производных [71, 84]

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = G\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{4.1}$$

где $y(x,t)$ — поперечное смещение струны в точке с координатой x в момент t, ρ — линейная плотность струны (масса на единицу длины), G — сила натяжения. Для однородной струны при постоянном натяжении величина $c = \sqrt{G/\rho}$ определяет скорость распространения волновых возмущений.

Закрепленная на концах струна длины L имеет набор собственных мод с частотами $\omega_s = \pi sc/L$. В классическом опыте Мельде [71, 76, 84] при периодическом изменении во времени силы натяжения струны с частотой $2\omega_0$, где ω_0 отвечает одной из мод, возбуждаются

[11] Идея использовать пространственную фазу попеременно возбуждающихся в среде коротковолновых и длинноволновых паттернов для реализации динамики, отвечающей гиперболическому аттрактору, была высказана и продемонстрирована первоначально применительно к системам, описываемым модифицированным уравнением Свифта–Хохенберга в работах [44, 47].

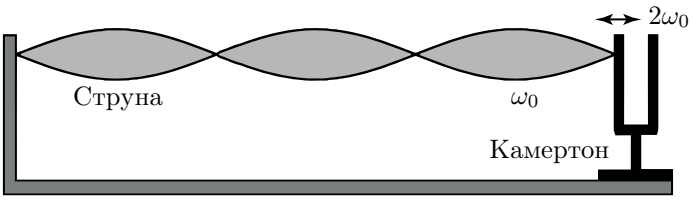

Рис. 16. Опыт Мельде (1859): колебания камертона на частоте $2\omega_0$ вызывают периодическое изменение силы натяжения струны, благодаря чему происходит параметрическое возбуждение поперечных колебаний на частоте ω_0

параметрические колебания на этой моде (рис. 16). Начальная стадия раскачки колебаний описывается уравнением вида (4.1), в котором коэффициент G является функцией времени, скажем, $G = G_0(1 + a_2^0 \sin(2\omega_0 t))$, $a_2^0 < 1$. Колебания силы натяжения выступают в качестве накачки — источника энергии, вызывающего параметрические колебания.

Если использовать накачку попеременно на частотах, различающихся втрое, то можно обеспечить параметрическое возбуждение коротковолновых и длинноволновых паттернов по очереди, с передачей пространственной фазы от одного паттерна к другому так, чтобы за полный период модуляции накачки имело место утроение фазовой переменной [32, 33][12]. При наличии диссипации сжатие по остальным направлениям в пространстве состояний системы обеспечивает присутствие аттрактора типа Смейла–Вильямса. Концептуально проще всего осуществить эту идею для системы с периодическими граничными условиями, т.е. замкнутой в кольцо (хотя это и не самый легкий вариант для воспроизведения в реальном эксперименте)[13].

Пусть в уравнении (4.1) сила натяжения струны колеблется по закону

$$G(t) = G_0\bigl[1 + a_2(t)\sin(2\omega_0 t) + a_6(t)\sin(6\omega_0 t)\bigr], \tag{4.2}$$

где коэффициенты a_2, a_6 изменяются во времени с некоторым периодом T, поочередно оказываясь по величине большими или близкими к нулю. Конкретно мы задаем

$$a_2(t) = a_2^0 \sin^2\biggl(\frac{\pi t}{T} - \frac{\pi}{4}\biggr), \qquad a_6(t) = a_6^0 \cos^2\biggl(\frac{\pi t}{T} - \frac{\pi}{4}\biggr), \tag{4.3}$$

где неотрицательные постоянные a_2^0, a_6^0 подчинены условию $a_2^0 + a_6^0 < 1$. Таким образом, накачка имеет составляющие на частотах $2\omega_0$ и $6\omega_0$ с амплитудами, модулированными во времени. Распределение массы по струне будем считать слабо неоднородным, зависящим от пространственной координаты по закону

$$\rho(x) = \rho_0(1 + \varepsilon \sin(4k_0 x)), \tag{4.4}$$

где $k_0 = \omega_0/c_0$, $c_0 = \sqrt{G_0/\rho_0}$. Кроме того, введем линейную и нелинейную диссипации, добавив в правую часть уравнения член вида $-(\alpha + \beta u^2)\,\partial y/\partial t$, где параметр α отвечает за линейную диссипацию, а параметр β — за нелинейную. Присутствие нелинейной диссипации необходимо для стабилизации параметрической неустойчивости, однако для рассматриваемой здесь системы существенным является еще и то обстоятельство, что нелинейная диссипация обеспечивает наличие кубической нелинейности и возникновение третьей гармоники при

[12] В работе [43] рассмотрены ситуации параметрического возбуждения паттернов стоячих волн также при других отношениях частот, когда коэффициент растяжения для фазовой переменной определяется нечетными числами от 3 до 11.

[13] В работах [32, 33] показано, что гиперболический аттрактор можно реализовать также в системе с фиксацией концов струны. Это удается обеспечить при увеличении длины системы и введении зависимости линейной диссипации от пространственной координаты по определенному профилю, с увеличением параметра диссипации у концов струны.

колебательно-волновых движениях. Наконец, добавим линейный член $-\gamma y$, чтобы обеспечить затухание колебательно-волновых возмущений с нулевым волновым числом. Физически эту добавку можно интерпретировать как то, что колебания струны имеют место в потенциальном поле, зависящем по закону $U(y) = \gamma y^2/2$ от поперечной координаты y.

Используя нормировку переменных и параметров такую, что $c_0 = 1$, $k_0 = \omega_0$, $\beta = 1$, приходим к системе, описываемой уравнением в частных производных следующего вида:

$$(1 + \varepsilon \sin(4k_0 x))\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -(\alpha + y^2)\frac{\partial y}{\partial t} - \gamma y + \\ + \left[1 + a_2^0 \sin^2\left(\frac{\pi t}{T} - \frac{\pi}{4}\right)\sin(2\omega_0 t) + a_6^0 \cos^2\left(\frac{\pi t}{T} - \frac{\pi}{4}\right)\sin(6\omega_0 t)\right]\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (4.5)$$

Наложим на систему периодические граничные условия

$$y(x + L, t) \equiv y(x, t), \quad (4.6)$$

а длину L примем равной целому числу длин волн с волновым числом k_0: $L = 2\pi N/k_0$.

Механизм функционирования системы состоит в следующем.

Предположим, что при накачке на частоте $2\omega_0$ в системе возбуждается стоячая волна на частоте ω_0 с волновым числом k_0, у которой расположение узлов и пучностей характеризуется фазовой постоянной θ, так что в грубом приближении $y \sim \cos(\omega_0 t)\sin(k_0 x + \theta)$. Амплитуда стабилизируется на конечном уровне благодаря нелинейной диссипации. Последняя также обеспечивает составляющую колебательно-волнового движения на третьей гармонике вида $\sin(3\omega_0 t)\sin(3k_0 x + 3\theta)$.

Затем имеет место стадия, когда амплитуда накачки на частоте $2\omega_0$ становится малой и колебания частоты ω_0 затухают. С другой стороны, амплитуда накачки на частоте $6\omega_0$ теперь достаточна для развития параметрической неустойчивости стоячей волны с частотой $3\omega_0$ и волновым числом $3k_0$. Эта волна формируется из возмущения, оставшегося от предыдущей стадии процесса, и поэтому характеризуется пространственной фазой 3θ.

Далее вновь наступает стадия накачки на частоте $2\omega_0$ и коротковолновый паттерн затухает. Затравочное колебательно-волновое возбуждение параметрических колебаний с частотой ω_0 и волновым числом k_0 обеспечивается теперь возмущением $y \sim \sin(3\omega_0 t)\sin(3k_0 x + 3\theta)$, оставшимся от предыдущей стадии процесса, в комбинации с составляющей частоты $2\omega_0$ с волновым числом $4k_0$, которая присутствует благодаря накачке и пространственной неоднородности плотности струны (ее пространственная фаза фиксирована). В результате новая величина сдвига пространственной фазы возникающего паттерна θ' получается как результат применения троекратно растягивающего отображения окружности вида $\theta' = -3\theta + \mathrm{const}$. Это отображение с хаотической динамикой, характеризуемое положительным показателем Ляпунова $\Lambda = \ln 3 \approx 1.0986$.

По остальным направлениям в фазовом пространстве отображения, описывающего изменение состояния системы за период модуляции накачки, будет происходить сжатие, что обеспечивает реализацию аттрактора типа Смейла–Вильямса.

Для численного решения уравнения (4.5) была использована разностная схема “крест”, имеющая второй порядок аппроксимации по пространственному и временно́му шагам и являющаяся явной [36, 43]. Схема устойчива, когда временной шаг мал в сравнении с пространственным шагом, отнесенным к скорости распространения волн. При численном решении уравнений задавались следующие параметры:

$$\omega_0 = 2\pi, \qquad k_0 = 2\pi, \qquad L = 1, \qquad T = 40, \qquad a_2^0 = 0.4, \qquad a_6^0 = 0.2, \\ \varepsilon = 0.2, \qquad \alpha = 0.4, \qquad \gamma = 0.03. \quad (4.7)$$

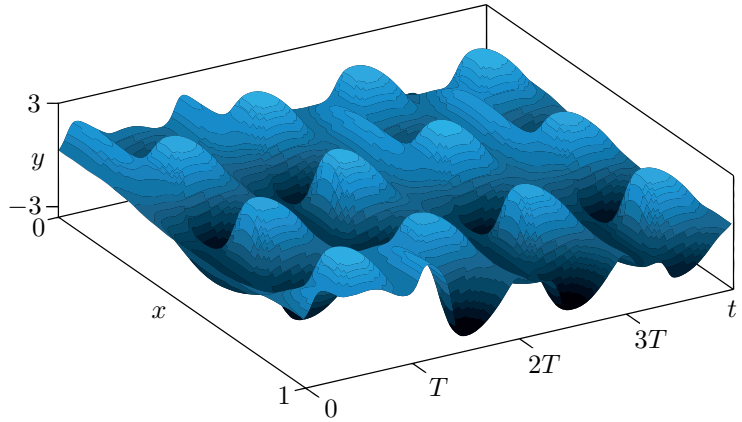

Рис. 17. Пространственно-временна́я диаграмма, иллюстрирующая динамику системы (4.5) с периодическими граничными условиями при параметрах, заданных согласно (4.7), на четырех полных периодах модуляции накачки. Пространственное распределение выводится с шагом, отвечающим периоду быстрых колебаний $2\pi/\omega_0$, так что высокочастотного заполнения не видно

На рис. 17 показана пространственно-временна́я диаграмма, из которой видно, что в системе поочередно возбуждаются длинноволновые и коротковолновые структуры, причем пространственная фаза их меняется от одного периода модуляции накачки к другому. Фаза колебаний стоячих волн во времени, с другой стороны, жестко привязана к фазе накачки.

Проверим, что пространственная фаза стоячих волн за период модуляции накачки действительно изменяется, как при троекратном растягивающем отображении окружности, для чего в процессе решения уравнения (4.5) на большом числе периодов модуляции определим пространственные фазы в моменты времени $t_n = nT$. Представив результаты графически в координатах (θ_n, θ_{n+1}), можно увидеть, что расположение ветвей получается таким, что однократный обход окружности для прообраза (изменение аргумента на 2π) соответствует трехкратному обходу для образа в обратном направлении с изменением фазы на величину -6π (рис. 18, *а*). Рисунок 18, *б* иллюстрирует портрет аттрактора в стробоскопическом сечении в проекции на плоскость переменных смещения струны в точках, отстоящих одна от другой на четверть основной длины волны. Поперечная фрактальная структура не видна из-за сильного поперечного сжатия, и соленоид выглядит как замкнутая кривая, однако расположение изображающих точек на последовательных шагах итераций отображения Пуанкаре отвечает скачкам на этой кривой в соответствии с троекратно растягивающим отображением окружности, что видно из диаграммы на рис. 18, *а*.

Для распределенной системы формально число показателей Ляпунова бесконечно. Для вычисления конечного их числа S используем метод Бенеттина [11, 50, 77], адаптированный к распределенной системе [22, 45]. Наряду с уравнением (4.5) одновременно решаем численно комплект S уравнений в вариациях

$$(1+\varepsilon\sin(4k_0x))\frac{\partial^2\widetilde{y}}{\partial t^2} = -(\alpha+y^2)\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial t} - 2y\widetilde{y}\frac{\partial y}{\partial t} - \gamma\widetilde{y} + \\ + \left\{1 + a\cos^2\frac{\pi t}{T}\sin(2\omega_0 t) + b\sin^2\frac{\pi t}{T}\sin(6\omega_0 t)\right\}\frac{\partial^2\widetilde{y}}{\partial x^2}. \qquad (4.8)$$

При этом используются такие же периодические граничные условия, как для уравнения (4.5), и такой же конечно-разностный метод. Векторы возмущения представлены заданными на интервале длины L распределениями добавок к смещению и скорости: $\mathbf{y} = \{\widetilde{y}(t), \widetilde{y}_t(t)\}$. В численных расчетах это векторы конечной размерности, определяемой числом узлов разностной сетки на длине системы. По истечении каждого очередного периода модуляции T производится

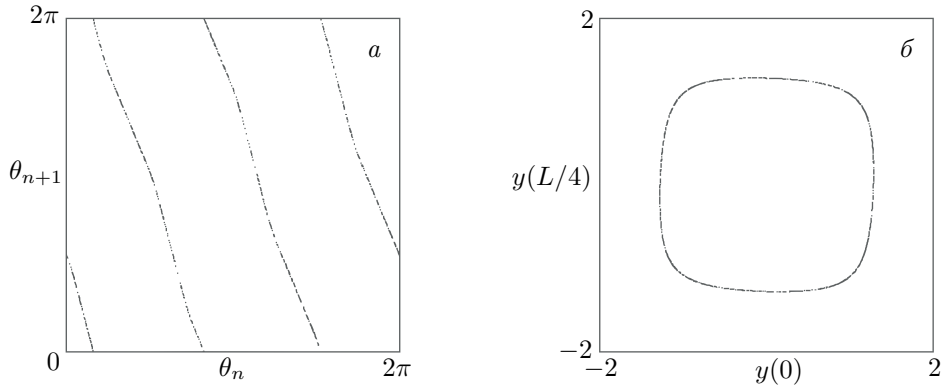

Рис. 18. Диаграмма для пространственных фаз в системе (4.5) (*а*) и портрет аттрактора в проекции на плоскость, где по осям отложены поперечные смещения y в точках струны $x = 0$ и $L/4$ (*б*). Параметры заданы согласно (4.7). Пространственная фаза определяется по ходу численного решения уравнений через коэффициенты при синусе и косинусе для первой гармоники разложения Фурье волнового поля по пространственной координате: $\theta_n = \arg \int_0^1 y(x, nT) \exp(-2\pi i x)\, dx$

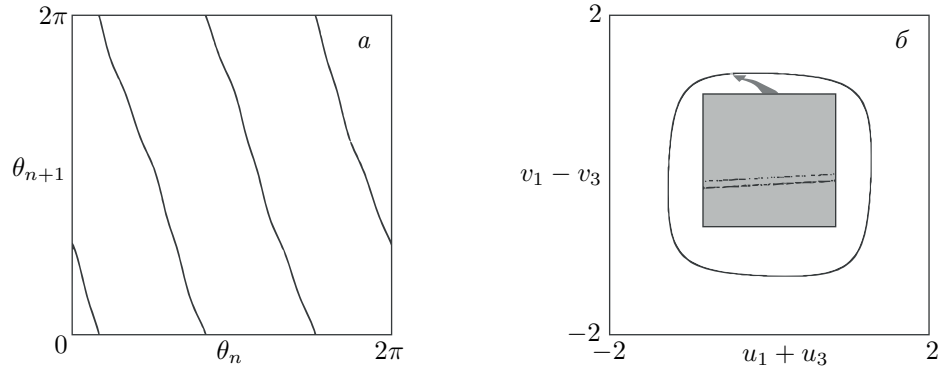

Рис. 19. Диаграмма для угловой переменной, отвечающей за соотношение амплитуд косинус- и синус-составляющих u_1 и v_1, полученная при численном решении уравнений конечномерной модели (4.10) (*а*). Портрет аттрактора в стробоскопическом изображении в проекции на плоскость, где по осям координат отложены комбинации $u_1 + u_3$ и $v_1 - v_3$, соответствующие величинам $y(0,t)$ и $y(L/4,t)$ исходной модели согласно (4.9) (*б*). На вставке видно характерную для аттрактора Смейла–Вильямса поперечную канторову структуру

ортогонализация векторов возмущения $\widetilde{\mathbf{y}}_s$, $s = 1, \dots, S$, по схеме Грама–Шмидта, что дает набор векторов $\widetilde{\mathbf{y}}'_s$, и при продолжении вычислений в качестве начальных условий каждый раз берутся переопределенные нормированные на единицу векторы $\widetilde{\mathbf{y}}^0_s = \widetilde{\mathbf{y}}'_s / \|\widetilde{\mathbf{y}}'_s\|$.

Показатели Ляпунова для отображения за период определяются как средние коэффициенты роста или убывания накапливающихся сумм логарифмов норм для векторов возмущения после ортогонализации, но до нормировки. При параметрах (4.7) первые пять показателей таковы: $\Lambda_1 = 1.091$, $\Lambda_2 = -1.63$, $\Lambda_3 = -7.94$, $\Lambda_4 = -10.62$, $\Lambda_5 = -17.74$. Наибольший показатель, как и ожидалось, близок к величине $\ln 3$. Остальные показатели отрицательные и отвечают за приближение траекторий к аттрактору, представляющему собой разновидность соленоида Смейла–Вильямса, который получается при трансформации исходной тороидальной области во вложенную тройную петлю, претерпевшую продольное растяжение и достаточно сильное сжатие поперек витков.

Учитывая, что параметрическое возбуждение стоячих волн имеет место на волновых числах k_0 и $3k_0$, можно построить редуцированную конечномерную модель, в которой в качестве динамических переменных будут выступать зависящие от времени коэффициенты разложения

решения по соответствующим пространственным модам. Эта модель будет ниже использована для проверки гиперболичности аттрактора, поскольку для нее это можно сделать по стандартной схеме, использованной в предыдущих разделах.

Будем искать решение уравнения (4.5) в виде

$$y(x,t) = u_1(t)\cos(k_0x) + v_1(t)\sin(k_0x) + u_3(t)\cos(3k_0x) + v_3(t)\sin(3k_0x). \tag{4.9}$$

Сделав эту подстановку, умножим обе части уравнения по очереди на функции $\cos(k_0x)$, $\sin(k_0x)$, $\cos(3k_0x)$ и $\sin(3k_0x)$, выполняя каждый раз интегрирование по пространственному периоду. В результате получается система уравнений для коэффициентов

$$\ddot u_1 = \frac{f_1 - \varepsilon g_3/2}{1-\varepsilon^2/4}, \qquad \ddot u_3 = \frac{f_3 - \varepsilon g_1/2}{1-\varepsilon^2/4}, \qquad \ddot v_1 = \frac{g_1 - \varepsilon f_3/2}{1-\varepsilon^2/4}, \qquad \ddot v_3 = \frac{g_3 - \varepsilon f_1/2}{1-\varepsilon^2/4}, \tag{4.10}$$

где

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\omega_0^2\bigl(1 + a_2(t)\sin(2\omega_0 t) + a_6(t)\sin(6\omega_0 t)\bigr)u_1 - \gamma u_1 - \alpha\dot u_1 - \\
&\quad - \frac{1}{2}\biggl[\biggl(\frac{3}{2}u_1^2 + u_1u_3 + u_3^2 + \frac{1}{2}v_1^2 + v_1v_3 + v_3^2\biggr)\dot u_1 + \frac{1}{2}(u_1^2 + 4u_1u_3 - v_1^2)\dot u_3 + \\
&\quad + (u_1v_1 - u_3v_1 + u_1v_3)\dot v_1 + (u_1v_1 + 2u_1v_3)\dot v_3\biggr], \\
g_1 &= -\omega_0^2\bigl(1 + a_2(t)\sin(2\omega_0 t) + a_6(t)\sin(6\omega_0 t)\bigr)v_1 - \gamma v_1 - \alpha\dot v_1 - \\
&\quad - \frac{1}{2}\biggl[\biggl(\frac{3}{2}v_1^2 - v_1v_3 + v_3^2 + \frac{1}{2}u_1^2 - u_1u_3 + u_3^2\biggr)\dot v_1 + \frac{1}{2}(u_1^2 + 4v_1v_3 - v_1^2)\dot v_3 + \\
&\quad + (u_1v_1 - u_3v_1 + u_1v_3)\dot u_1 + (-u_1v_1 + 2u_3v_1)\dot u_3\biggr], \\
f_3 &= -9\omega_0^2(1 + a_2(t)\sin(2\omega_0 t) + a_6(t)\sin(6\omega_0 t))u_3 - \gamma u_3 - \alpha\dot u_3 - \\
&\quad - \frac{1}{4}\bigl[(u_1^2 + 4u_1u_3 - v_1^2)\dot u_1 + 2(-u_1v_1 + 2u_3v_1)\dot v_1 + (2u_1^2 + 2v_1^2 + 3u_3^2 + v_3^2)\dot u_3 + 2u_3v_3\dot v_3\bigr], \\
g_3 &= -9\omega_0^2(1 + a_2(t)\sin(2\omega_0 t) + a_6(t)\sin(6\omega_0 t))v_3 - \gamma v_3 - \alpha\dot v_3 - \\
&\quad - \frac{1}{4}\bigl[2(u_1v_1 + 2u_1v_3)\dot u_1 + (u_1^2 + 4v_1v_3 - v_1^2)\dot v_1 + 2u_3v_3\dot u_3 + (2u_1^2 + 2v_1^2 + u_3^2 + 3v_3^2)\dot v_3\bigr].
\end{aligned}$$

Результаты численного решения редуцированной системы уравнений при параметрах (4.7) хорошо согласуются с расчетами для уравнения в частных производных. В частности, соотношения между амплитудами синус- и косинус-составляющих (которые связаны с пространственной фазой возбуждающихся стоячих волн) меняются от одного периода модуляции к другому хаотически. Можно ввести угловую переменную $\theta_n = \arg[u_1(nT)/v_1(nT)]$, отвечающую пространственной фазе в момент времени $t = nT$. На рис. 19 показаны диаграмма в координатах (θ_n, θ_{n+1}), демонстрирующая, что для фазовой переменной реализуется отображение троекратного растяжения окружности, и портрет аттрактора в стробоскопическом представлении на плоскости переменных $(u_1 + u_3, v_1 - v_3)$, которые следует сравнить с рис. 18.

Поскольку рассматривается неавтономная система уравнений восьмого порядка, полный спектр показателей Ляпунова отображения Пуанкаре содержит восемь показателей. Их вычисление с помощью алгоритма Бенеттина при задании параметров согласно (4.7) дает $\Lambda_1 = 1.098$, $\Lambda_2 = -9.5$, $\Lambda_3 = -14.8$, $\Lambda_4 = -23.2$, $\Lambda_5 = -27.2$, $\Lambda_6 = -28.0$, $\Lambda_7 = -31.8$, $\Lambda_8 = -33.2$. Оценка размерности аттрактора по формуле Каплана–Йорке дает $D \approx 1.12$.

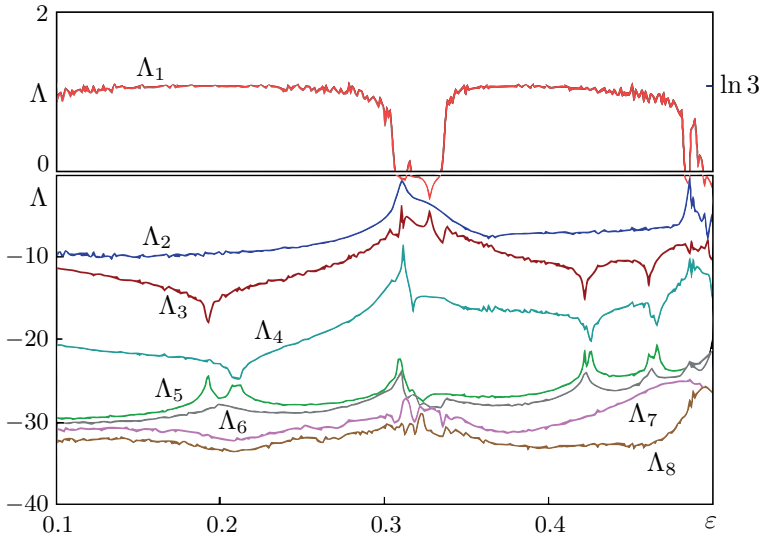

Рис. 20. График показателей Ляпунова для конечномерной модели параметрически возбуждаемой струны (4.10) в зависимости от параметра неоднородности распределения массы ε при $\omega_0 = 2\pi$, $k_0 = 2\pi$, $T = 40$, $L = 1$, $a_2^0 = 0.4$, $a_6^0 = 0.2$, $\alpha = 0.4$, $\gamma = 0.03$

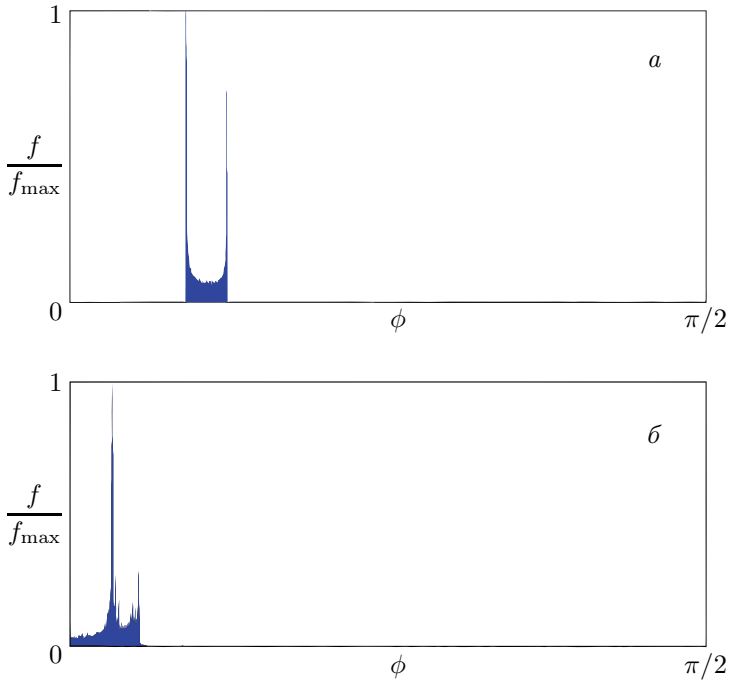

Рис. 21. Проверка критерия углов для аттрактора конечномерной модели (4.10) при задании параметров $\omega_0 = 2\pi$, $k_0 = 2\pi$, $T = 40$, $L = 1$, $\alpha = 0.4$, $a_2^0 = 0.4$, $a_6^0 = 0.2$, $\gamma = 0.03$, $\varepsilon = 0.2$ (*а*) и $\varepsilon = 0.49$ (*б*). В первом случае аттрактор гиперболический, а во втором тест показывает наличие нулевых углов, т.е. имеют место касания устойчивого и неустойчивого многообразий, и аттрактор гиперболическим не является

На рис. 20 показан график показателей Ляпунова в зависимости от параметра неоднородности распределения массы ε. Интервалы, в которых старший показатель Ляпунова остается приблизительно постоянным и близким к величине $\Lambda_1 \approx \ln 3$, соответствуют гиперболическому хаосу, когда отображение Пуанкаре имеет аттрактор типа Смейла–Вильямса с утроением угловой координаты.

Результаты расчетов на основании конечномерной модели находятся в хорошем соответствии с теми, которые получаются при численном решении уравнения в частных производных (4.5). Однако при анализе показателей Ляпунова обнаруживается, что в распределенной системе присутствуют дополнительные отрицательные показатели, не соответствующие никаким показателям конечномерной модели и ассоциирующиеся, очевидно, с затухающими возмущениями, исключенными при использовании подстановки (4.9). Соответственно различается и оценка размерности аттрактора по Каплану–Йорке.

Проверка критерия углов для аттрактора системы, описываемой уравнением в частных производных (4.5), требует специальной проработки алгоритма, но для редуцированной модели (4.10) ее можно осуществить, обращаясь с восьмимерным стробоскопическим отображением Пуанкаре по схеме, применявшейся в предыдущих двух разделах. На рис. 21 показаны гистограммы распределения углов между устойчивыми и неустойчивыми подпространствами для траекторий на аттракторе системы (4.10) в случае гиперболической динамики (*а*) и в случае, когда аттрактор оказывается негиперболическим, о чем свидетельствует присутствие близких к нулю углов (*б*). Для параметров, заданных в соответствии с (4.7), распределение отделено от нулевых углов ϕ_n, т.е. тест подтверждает гиперболичность аттрактора отображения Пуанкаре конечномерной модели. Учитывая наблюдаемое в численных расчетах хорошее соответствие между динамикой распределенной системы и динамикой конечномерной модели, а также грубость хаотического аттрактора отображения Пуанкаре, можно полагать результаты проверки критерия углов аргументом также и в пользу гиперболичности аттрактора исходной распределенной системы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрены примеры механических систем с гиперболической хаотической динамикой. Первый пример отвечает шарнирному механизму Тёрстона–Уикса–Ханта–Мак-Кэя, реализующему при движении по инерции динамику Аносова. Остальные три системы диссипативные. Это задача о частице, совершающей движение в потенциальном поле под действием импульсных толчков, конструкция, где реализуется движение двух взаимодействующих частицах на попеременно вращающихся дисках, и задача о параметрическом возбуждении струны с модулированной накачкой. Хаос в этих системах обусловлен аттракторами, которые при описании в терминах отображения Пуанкаре представляют собой разновидности соленоида Смейла–Вильямса.

Обсуждаемые примеры представляют интерес с точки зрения наполнения конкретным физическим содержанием фундаментального раздела теории динамических систем — гиперболической теории, испытывающей в этом плане очевидный дефицит.

Для подтверждения гиперболической природы динамики применительно ко всем обсуждаемым моделям реализован и апробирован метод, основанный на анализе статистики углов между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями. Для этого на одной и той же принадлежащей исследуемому инвариантному множеству типичной траектории в каждой рассматриваемой точке определяются углы между подпространствами векторов малых возмущений при проходе по траектории вперед и назад во времени и анализируется их статистическое распределение. Для всех рассмотренных систем при подходящем выборе параметров продемонстрировано отсутствие близких к нулю углов, что указывает на гиперболичность соответствующих инвариантных множеств. Для первой модели это энергетическая поверхность, где реализуется динамика Аносова, а для остальных моделей — аттракторы в виде соленоидов Смейла–Вильямса для отображения Пуанкаре. Наглядным указанием на присутствие аттракторов типа Смейла–Вильямса служит топология итерационных диаграмм для угловых переменных, соответствующих растягивающим отображениям окружности. Стоит оговориться,

что аргументация в пользу гиперболической природы аттракторов опирается на качественный анализ и результаты численных расчетов. Более аккуратное математическое обоснование гиперболичности, например, в технике проверки критерия конусов [63, 64, 88] представляется желательным и может быть одним из направлений дальнейшей работы.

Относительная простота устройства и принципа функционирования рассмотренных моделей позволяет надеяться, что они осуществимы в эксперименте. Благодаря структурной устойчивости равномерно гиперболического хаоса их реализуемость не должна критично зависеть от деталей конструкции.

В чем можно усмотреть значение обсуждавшихся систем с прагматической точки зрения?

Вопрос о практическом применении хаоса привлекает внимание в течение многих лет; проводились многочисленные международные конференции, концентрировавшиеся на этих проблемах. Обсуждаются такие направления, как использование хаоса для скрытой коммуникации [18–20, 34, 40], генерации случайных чисел [12, 21], в криптографических схемах [10, 75], для шумовой локации [69]. О каких бы приложениях хаоса речь ни шла, предпочтительными, как можно думать, будут грубые системы, динамика которых нечувствительна к вариации параметров и характеристик элементов системы, к техническим погрешностям и флуктуациям и т.п. Техническая потребность в том, чтобы эти свойства имели место, специально подчеркивается исследователями, целенаправленно работающими над созданием генераторов хаоса для информационно-коммуникационных приложений [18, 20].

В отношении механических систем, по-видимому, наиболее интересна возможность эффективного управления хаотической динамикой посредством малых воздействий [14, 28, 29, 82], что связано с принципиально присущей хаосу чувствительностью движения к возмущениям начальных условий; соответствующая область исследований известна как управление хаосом.

На основе принципов, изложенных в настоящей работе на примере механических систем, по-видимому, можно построить генераторы хаоса иной физической природы, например, в электронике и нелинейной оптике, имея в виду развивавшуюся Л.И. Мандельштамом и А.А. Андроновым идею о “колебательной взаимопомощи” различных научно-технических дисциплин [4, 48, 71].

Благодарности. Авторы благодарны А.В. Борисову, предложившему подготовить настоящий обзор.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Afraimovich V.S., Gonchenko S.V., Lerman L.M., Shilnikov A.L., Turaev D.V.* Scientific heritage of L.P. Shilnikov // Regul. Chaotic Dyn. 2014. V. 19, N 4. P. 435–460.
2. *Afraimovich V., Hsu S.-B.* Lectures on chaotic dynamical systems. Somerville, MA: International Press, 2003.
3. *Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю.* Геометрия. М.: Наука, 1990.
4. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
5. *Anishchenko V.S., Kopeikin A.S., Kurths J., Vadivasova T.E., Strelkova G.I.* Studying hyperbolicity in chaotic systems // Phys. Lett. A. 2000. V. 270, N 6. P. 301–307.
6. *Аносов Д.В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. М.: Наука, 1967. (Тр. МИАН; Т. 90).
7. *Аносов Д.В.* Динамические системы в 60-е годы: гиперболическая революция // Математические события XX века. М.: Фазис, 2003. С. 1–18.
8. *Аносов Д.В., Арансон С.Х., Гринес В.З., Плыкин Р.В., Сатаев Е.А., Сафонов А.В., Солодов В.В., Старков А.Н., Степин А.М., Шлячков С.В.* Динамические системы с гиперболическим поведением. М.: ВИНИТИ, 1991. (Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фунд. напр.; Т. 66: Динамические системы–9).
9. *Balazs N.L., Voros A.* Chaos on the pseudosphere // Phys. Rep. 1986. V. 143, N 3. P. 109–240.
10. *Baptista M.S.* Cryptography with chaos // Phys. Lett. A. 1998. V. 240, N 1–2. P. 50–54.

11. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Parts 1, 2 // Meccanica. 1980. V. 15. P. 9–20, 21–30.
12. *Bernstein G.M., Lieberman M.A.* Secure random number generation using chaotic circuits // IEEE Trans. Circuits Syst. 1990. V. 37, N 9. P. 1157–1164.
13. *Bizyaev I.A., Borisov A.V., Kazakov A.O.* Dynamics of the Suslov problem in a gravitational field: Reversal and strange attractors // Regul. Chaotic Dyn. 2015. V. 20, N 5. P. 605–626. Рус. пер.: *Бизяев И.А., Борисов А.В., Казаков А.О.* Динамика задачи Суслова в поле тяжести: реверс и странные аттракторы // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12, № 2. С. 263–287.
14. *Bollt E.M., Meiss J.D.* Targeting chaotic orbits to the Moon through recurrence // Phys. Lett. A. 1995. V. 204, N 5–6. P. 373–378.
15. *Bonatti C., Díaz L.J., Viana M.* Dynamics beyond uniform hyperbolicity: A global geometric and probabilistic perspective. Berlin: Springer, 2005.
16. *Борисов А.В., Казаков А.О., Кузнецов С.П.* Нелинейная динамика кельтского камня: неголономная модель // УФН. 2014. Т. 184, № 5. С. 493–500.
17. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Странные аттракторы в динамике кельтских камней // УФН. 2003. Т. 173, № 4. С. 407–418.
18. *Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Максимов Н.А., Панас А.И.* Генерация хаоса. М.: Техносфера, 2012.
19. *Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Никишов А.Ю., Панас А.И.* Генераторы хаоса: от вакуумных приборов до наносхем // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информ. технологии. 2009. Т. 1, № 1–2. С. 6–22.
20. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: Новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
21. *Drutarovský M., Galajda P.* A robust chaos-based true random number generator embedded in reconfigurable switched-capacitor hardware // Radioengineering. 2007. V. 16, N 3. P. 120–127.
22. *Farmer J.D.* Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system // Physica D. 1982. V. 4, N 3. P. 366–393.
23. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2005.
24. *Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И.* Проблемы современной нелинейной динамики // Вестн. РАН. 1997. Т. 67, № 7. С. 608–614.
25. *Ginelli F., Poggi P., Turchi A., Chaté H., Livi R., Politi A.* Characterizing dynamics with covariant Lyapunov vectors // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 99, N 13. Pap. 130601.
26. *Goldstein H., Poole C.P., Safko J.L.* Classical mechanics. 3rd ed. San Francisco: Addison-Wesley, 2001.
27. *Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O.* Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a celtic stone // Regul. Chaotic Dyn. 2013. V. 18, N 5. P. 521–538.
28. *Gritli H., Khraief N., Belghith S.* Chaos control in passive walking dynamics of a compass-gait model // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2013. V. 18, N 8. P. 2048–2065.
29. Handbook of chaos control / Ed. by E. Schöll, H.G. Schuster. Weinheim: Wiley-VCH, 2008.
30. *Hunt T.J., MacKay R.S.* Anosov parameter values for the triple linkage and a physical system with a uniformly chaotic attractor // Nonlinearity. 2003. V. 16, N 4. P. 1499–1510.
31. *Isaeva O.B., Jalnine A.Yu., Kuznetsov S.P.* Arnold's cat map dynamics in a system of coupled nonautonomous van der Pol oscillators // Phys. Rev. E. 2006. V. 74, N 4. Pap. 046207.
32. *Isaeva O.B., Kuznetsov A.S., Kuznetsov S.P.* Hyperbolic chaos of standing wave patterns generated parametrically by a modulated pump source // Phys. Rev. E. 2013. V. 87, N 4. Pap. 040901.
33. *Исаева О.Б., Кузнецов А.С., Кузнецов С.П.* Гиперболический хаос при параметрических колебаниях струны // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9, № 1. С. 3–10.
34. *Жалнин А.Ю.* Новая схема передачи информации на основе фазовой модуляции несущего хаотического сигнала // Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика. 2014. Т. 22, № 5. С. 3–12.
35. *Jalnine A.Yu.* Hyperbolic and non-hyperbolic chaos in a pair of coupled alternately excited FitzHugh–Nagumo systems // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2015. V. 23, N 1–3. P. 202–208.
36. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.
37. *Kaplan J.L., Yorke J.A.* Chaotic behavior of multidimensional difference equations // Functional differential equations and approximation of fixed points / Ed. by H.-O. Peitgen, H.-O. Walther. Berlin: Springer, 1979. P. 204–227. (Lect. Notes Math.; V. 730).
38. *Katok A., Hasselblatt B.* Introduction to the modern theory of dynamical systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. Рус. пер.: *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999.
39. *Казарян М.Э.* Курс дифференциальной геометрии (2001–2002). М.: МЦНМО, 2002.

40. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // УФН. 2009. Т. 179, № 12. С. 1281–1310.

41. *Kourganoff M.* Anosov geodesic flows, billiards and linkages: E-print, 2015. arXiv: 1503.04305 [math.DS].

42. *Козлов В.В.* Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем // ДАН СССР. 1979. Т. 249, № 6. С. 1299–1302.

43. *Круглов В.П., Кузнецов А.С., Кузнецов С.П.* Гиперболический хаос в системах с параметрическим возбуждением паттернов стоячих волн // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, № 3. С. 265–277.

44. *Kruglov V.P., Kuznetsov S.P., Pikovsky A.* Attractor of Smale–Williams type in an autonomous distributed system // Regul. Chaotic Dyn. 2014. V. 19, N 4. P. 483–494.

45. *Купцов П.В.* Вычисление показателей Ляпунова для распределенных систем: преимущества и недостатки различных численных методов // Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 5. С. 93–112.

46. *Kuptsov P.V.* Fast numerical test of hyperbolic chaos // Phys. Rev. E. 2012. V. 85, N 1. Pap. 015203.

47. *Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P., Pikovsky A.* Hyperbolic chaos of Turing patterns // Phys. Rev. Lett. 2012. V. 108, N 19. Pap. 194101.

48. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002.

49. *Kuznetsov A.P., Migunova N.A., Sataev I.R., Sedova Yu.V., Turukina L.V.* From chaos to quasi-periodicity // Regul. Chaotic Dyn. 2015. V. 20, N 2. P. 189–204.

50. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.

51. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 95, N 14. Pap. 144101.

52. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике // УФН. 2011. Т. 181, № 2. С. 121–149.

53. *Kuznetsov S.P.* Plykin type attractor in electronic device simulated in MULTISIM // Chaos. 2011. V. 21, N 4. Pap. 043105.

54. *Kuznetsov S.P.* Hyperbolic chaos: A physicist's view. Berlin: Springer, 2012.

55. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике. М.; Ижевск: ИКИ, 2013.

56. *Kuznetsov S.P.* Some mechanical systems manifesting robust chaos // Nonlinear Dyn. Mob. Rob. 2013. V. 1, N 1. P. 3–22.

57. *Кузнецов С.П.* Движение падающей пластины в жидкости: конечномерные модели и феномены сложной нелинейной динамики // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11, № 1. С. 3–49. Англ. пер.: *Kuznetsov S.P.* Plate falling in a fluid: Regular and chaotic dynamics of finite-dimensional models // Regul. Chaotic Dyn. 2015. V. 20, N 3. P. 345–382.

58. *Kuznetsov S.P.* Hyperbolic chaos in self-oscillating systems based on mechanical triple linkage: Testing absence of tangencies of stable and unstable manifolds for phase trajectories // Regul. Chaotic Dyn. 2015. V. 20, N 6. P. 649–666. Рус. пер.: *Кузнецов С.П.* Гиперболический хаос в автоколебательных системах на основе тройного шарнирного механизма: Проверка отсутствия касаний устойчивых и неустойчивых многообразий фазовых траекторий // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12, № 1. С. 121–143.

59. *Кузнецов С.П.* Хаос в системе трех связанных ротаторов: от динамики Аносова к гиперболическому аттрактору // Изв. Саратов. ун-та. Нов. серия. Физика. 2015. Т. 15, № 2. С. 5–17.

60. *Kuznetsov S.P.* From geodesic flow on a surface of negative curvature to electronic generator of robust chaos: E-print, 2016. arXiv: 1604.08048 [nlin.CD].

61. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.* Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // Physica D. 2007. V. 232, N 2. P. 87–102.

62. *Кузнецов С.П., Пономаренко В.И.* О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла–Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием // Письма в журн. техн. физики. 2008. Т. 34, № 18. С. 1–8.

63. *Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Проверка условий гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля // Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 5. С. 3–29.

64. *Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Hyperbolic attractor in a system of coupled non-autonomous van der Pol oscillators: Numerical test for expanding and contracting cones // Phys. Lett. A. 2007. V. 365, N 1–2. P. 97–104.

65. *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // ЖЭТФ. 2006. Т. 129, № 2. С. 400–412.

66. *Кузнецов С.П., Тюрюкина Л.В.* Аттракторы типа Смейла–Вильямса в модельных системах с импульсным периодическим воздействием // Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 5. С. 80–92.

67. *Lai Y.-C., Grebogi C., Yorke J.A., Kan I.* How often are chaotic saddles nonhyperbolic? // Nonlinearity. 1993. V. 6, N 5. P. 779–798.
68. *Letellier C.* Chaos in nature. Hackensack, NJ: World Scientific, 2013.
69. *Lukin K.A.* Noise radar technology // Telecommun. Radio Eng. 2001. V. 55, N 12. P. 8–16.
70. *Magalhães M.L.S., Pollicott M.* Geometry and dynamics of planar linkages // Commun. Math. Phys. 2013. V. 317, N 3. P. 615–634.
71. *Мандельштам Л.И.* Полное собрание трудов. Т. 4: Лекции по колебаниям (1930–1932). М.: Изд-во АН СССР, 1955.
72. *Монин А.С.* О природе турбулентности // УФН. 1978. Т. 125, № 5. С. 97–122.
73. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
74. *Pesin Ya.B.* Lectures on partial hyperbolicity and stable ergodicity. Zürich: Eur. Math. Soc., 2004. (Zurich Lect. Adv. Math.).
75. *Птицын Н.* Приложение теории детерминированного хаоса в криптографии. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.
76. *Rowland D.R.* Parametric resonance and nonlinear string vibrations // Amer. J. Phys. 2004. V. 72, N 6. P. 758–766.
77. *Schuster H.G., Just W.* Deterministic chaos: An introduction. Weinheim: Wiley-VCH, 2005.
78. *Scott S.K.* Chemical chaos. Oxford: Clarendon Press, 1993.
79. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2004, 2009. Ч. 1, 2.
80. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем // Нелинейные волны / Под ред. А.В. Гапонова-Грехова. М.: Наука, 1979. С. 192–212.
81. *Smale S.* Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73, N 6. P. 747–817. Рус. пер.: *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. Т. 25, № 1. С. 113–185.
82. *Steingrube S., Timme M., Wörgötter F., Manoonpong P.* Self-organized adaptation of a simple neural circuit enables complex robot behaviour // Nature Phys. 2010. V. 6, N 3. P. 224–230.
83. *Struik D.J.* Lectures on classical differential geometry. New York: Dover Publ., 1988.
84. *Strutt J.W. (Baron Rayleigh)* The theory of sound. London: Macmillan, 1894. V. 1. Рус. пер.: *Стретт Дж.В. (Лорд Рэлей)* Теория звука. М.: Гостехиздат, 1955. Т. 1.
85. *Thompson J.M.T., Stewart H.B.* Nonlinear dynamics and chaos. Chichester: J. Wiley & Sons, 1986.
86. *Thurston W.P., Weeks J.R.* The mathematics of three-dimensional manifolds // Sci. Amer. 1984. V. 251, N 1. P. 108–120. Рус. пер.: *Тёрстон У.П., Уикс Дж.Р.* Математика трехмерных многообразий // В мире науки. 1984. № 9. С. 74–88.
87. *Тюрюкина Л.В.* Гиперболический хаос в системах с импульсным периодическим воздействием // Нелинейный мир. 2010. Т. 8, № 2. С. 72–73.
88. *Wilczak D.* Uniformly hyperbolic attractor of the Smale–Williams type for a Poincaré map in the Kuznetsov system // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2010. V. 9, N 4. P. 1263–1283.
89. *Williams R.F.* Expanding attractors // Publ. math. Inst. Hautes Étud. Sci. 1974. V. 43. P. 169–203.