

УДК 517.9:537.86:621.373

## ПРОСТЫЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ ХАОСА И ИХ СХЕМОТЕХНИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

*С. П. Кузнецов*

Саратовский филиал Института радиотехники  
и электроники им. В.А. Котельникова РАН  
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
E-mail: spkuz@yandex.ru

*Поступила в редакцию 29.03.2018*

**Тема и цель исследования.** Цель работы состоит в проведении обзора описанных в литературе и оригинальных схем генераторов хаоса. Для наглядности сопоставления различных устройств описание дается в едином стиле, опираясь на схемотехническое моделирование с использованием пакета NI Multisim. **Исследуемые модели.** Рассматриваются несколько несложных по конструкции электронных генераторов хаоса, в том числе: генератор Колпитца; генератор Хартли; RC-генератор хаоса; варианты схемы Чуа; конструкции, предложенные литовской группой; аналоговый осциллятор Лоренца; генераторы гиперболического хаоса с передачей возбуждения между попеременно возбуждающимися элементами, а также кольцевой генератор с запаздыванием. **Результаты.** Представлены схемы электронных устройств – генераторов хаоса, обсуждены принципы их функционирования и проведено схемотехническое моделирование. Для всех рассмотренных систем хаотическая динамика иллюстрируется осциллограммами сигналов, фазовыми портретами аттракторов, спектрами колебаний. Специально отмечены генераторы робастного хаоса – электронный аналог модели Лоренца и схемы с гиперболическими аттракторами Смейла–Вильямса, которые представляются предпочтительными для возможных приложений в силу малой чувствительности характеристик хаоса к вариации параметров, несовершенствам изготовления, помехам и т.д. **Обсуждение.** Приведенные схемы отвечают низкочастотным устройствам, но некоторые из них могут быть полезны в плане разработки генераторов хаоса также на высоких и сверхвысоких частотах. Представленный материал может представлять интерес для постановки лабораторных и компьютерных практикумов, ориентированных на подготовку специалистов в области радиофизики и нелинейной динамики, а также для исследователей, заинтересованных в конструировании генераторов хаоса и их практическом использовании.

*Ключевые слова:* динамическая система, хаос, аттрактор, генератор хаоса, схемотехническое моделирование.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-3-35-61

*Образец цитирования:* Кузнецов С.П. Простые электронные генераторы хаоса и их схемотехническое моделирование // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 3. С. 35–61. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-3-35-61

# SIMPLE ELECTRONIC CHAOS GENERATORS AND THEIR CIRCUIT SIMULATION

*S. P. Kuznetsov*

Kotelnikov Institute of Radio-Engineering  
and Electronics of RAS, Saratov Branch  
38, Zelenaya, 410019 Saratov, Russia  
E-mail: spkuz@yandex.ru

*Received 29.03.2018*

**Topic and aim.** The aim of the work is to review circuits of chaos generators, those described in the literature and some original ones, in a unified style basing on circuit simulations with the NI Multisim package, which makes the comparison of the various devices apparent. **Investigated models.** A number of electronic chaos generators are considered including the Kolpitz oscillator, the Hartley oscillator, the RC chaos generator, variants of Chua circuit, the designs proposed by the Lithuanian group, Lorenz analog oscillator, generators of hyperbolic chaos with excitation transfer between alternately excited oscillators, as well as a ring generator with delayed feedback. **Results.** The circuit diagrams of chaos generators are presented, the principles of their operation are discussed, and circuit simulations are carried out using the NI Multisim package. For all considered systems the chaotic dynamics are illustrated consistently by waveforms of the signals, phase portraits of the attractors, spectra of the oscillations. Specially outlined are generators of robust chaos including the electronic analog of the Lorenz model and the circuits with Smale–Williams hyperbolic attractors, which seem preferable for possible applications due to low sensitivity of the chaos characteristics to parameter variations, manufacturing imperfections, interferences, etc. **Discussion.** The circuits collected in the paper correspond to low-frequency devices, but some of them may be useful in development of chaos generators also at high and ultrahigh frequencies. The material presented may be of interest for setting up laboratory and computer practical courses aimed at training specialists in the field of electronics and nonlinear dynamics, as well as for researchers interested in constructing chaos generators and their practical applications.

*Key words:* dynamic system, chaos, attractor, chaos generator, circuit simulation.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-3-35-61

*References:* Kuznetsov S.P. Simple electronic chaos generators and their circuit simulation. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 3, pp. 35–61. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-3-35-61

## Введение

Исследование сложной динамики и хаоса в электронных системах – одно из главных направлений научной школы, созданной Д.И. Трубецковым. Во многом благодаря исследованиям именно этой школы, электроника сверхвысоких частот сыграла роль одной из определяющих составных частей сформировавшегося междисциплинарного направления, имеющего содержанием сложную динамику нелинейных систем различной природы, со своей методологией, инструментарием аналитических, численных и экспериментальных исследований, коллекцией обобщающих и частных моделей [1–4].

К настоящему времени имеется обширная литература, посвященная различным вариантам построения электронных генераторов хаоса, представляющих интерес в таких областях как информационно-коммуникационные системы [5, 6], систе-

мы радиопротиводействия [7] и шумовой локации [8], генерация случайных чисел [9, 10], криптографические приложения [11].

Цель предлагаемого обзора – представить с единых позиций определенную коллекцию схем генераторов хаоса с воспроизведением их функционирования с помощью программного пакета NI Multisim, представляющего собой удобное и популярное современное средство схемотехнического моделирования [12]. Работая с программой, пользователь составляет и изображает графически на экране компьютера электронную схему, следуя стандартным обозначениям, принятым в радиотехнике и электронике. Радиодетали берутся из имеющейся в распоряжении библиотеки электронных компонентов, содержащей резисторы, конденсаторы, индуктивности, диоды и транзисторы, а также элементы аналоговой техники – операционные усилители, умножители. Предусмотрено использование обширного набора виртуальных приборов, в том числе генераторы сигналов, осциллографы, анализатор спектра. Обращение с ними приближено к работе с реальными приборами в лаборатории: подключив виртуальный прибор к соответствующей точке схемы, можно получить информацию о характеристиках процессов, протекающих при функционировании схемы.

Рассматриваемые здесь конкретные схемы отвечают низкочастотным устройствам, но некоторые из них могут представлять интерес (при соответствующей модификации) также в плане реализации генераторов хаоса высоких и сверхвысоких частот.

Стоит подчеркнуть, что хаотическую динамику, имеющую место в тех или иных системах, далеко не во всех случаях можно отнести к ситуациям «настоящего» или, как говорят, робастного хаоса [13, 14], который характеризовался бы незначительной чувствительностью по отношению к разбросу параметров элементов, несовершенству изготовления и прочим мешающим факторам. К этой категории принадлежат, в первую очередь, системы с гиперболическими аттракторами (соленоид Смейла–Вильямса, аттрактор Плыкина), но они до не давнего времени были представлены только математическими конструкциями, а их физическая реализация, в том числе в виде электронных схем, требует специальных усилий [14]. Другой класс систем с робастным хаосом – это системы с так называемыми псевдогиперболическими аттракторами [15]. Хорошо известный и изученный представитель – это аттрактор Лоренца [16–18]. В более широком плане вопрос о реализуемости псевдогиперболических аттракторов в физических системах до сих пор не проработан в достаточной мере. В подавляющем большинстве случаев при рассмотрении схем генераторов хаоса приходится сталкиваться с ситуацией квазиаттрактора [19], когда с хаотическими траекториями в фазовом пространстве системы сосуществуют притягивающие периодические орбиты или же они появляются при сколь угодно малой вариации параметров. В пространстве параметров это проявляется в наличии неустраняемых «окон периодичности», пронизывающих область хаоса, что, очевидно, нежелательно с точки зрения любых мыслимых приложений хаоса. С практической точки зрения, ситуация несколько облегчается тем, что «окна периодичности» нивелируются присутствующими в системе естественными шумами, так что в определенных случаях отличие квазиаттрактора от «настоящего» хаотического аттрактора незаметно.

## 1. Генератор Колпитца

Генератор Колпитца («емкостная трехточка») – электронная схема, особенностью которой является то обстоятельство, что сигнал в цепь обратной связи поступает с делителя напряжения на конденсаторах. Это удобное в реализации и часто используемое электронное устройство для генерации синусоидальных колебаний на радиочастотах. В 1990-е годы было установлено, что в определенной области параметров транзисторный генератор Колпитца демонстрирует хаотическое поведение, ассоциирующееся с присутствием странного аттрактора в фазовом пространстве. В сравнении с другими описанными в литературе электронными генераторами хаоса, генератор Колпитца имеет некоторые привлекательные особенности. Схема достаточно проста и без труда реализуется в разных частотных диапазонах от единиц герц до микроволновой области, так что генератор Колпитца рассматривается как один из наиболее подходящих элементов для коммуникации на основе хаоса [6].

На рис. 1, *a* показана составленная в среде Multisim схема, воспроизводящая систему из работы [20], где для описания динамики предложены уравнения

$$C_1 \dot{V} = I - I_C, \quad C_2 \dot{U} = -R_2^{-1}(V - E) - I - I_B, \quad L \dot{I} = E - V + U - IR_1. \quad (1)$$

Здесь  $V$  и  $U$  – напряжения на конденсаторах  $C_1$  и  $C_2$ ;  $I$  – ток через индуктивность  $L$ ;  $E$  – напряжение батарей  $V_1$  и  $V_2$ . Токи коллектора и базы транзистора  $Q_1$ , обозначенные  $I_C$  и  $I_B$ , выражаются следующим образом в соответствии с принятой моделью транзистора:

$$I_B = \begin{cases} 0, & U \leq U_0, \\ R_0^{-1}(U - U_0), & U > U_0, \end{cases} \quad I_C = \beta I_B, \quad (2)$$

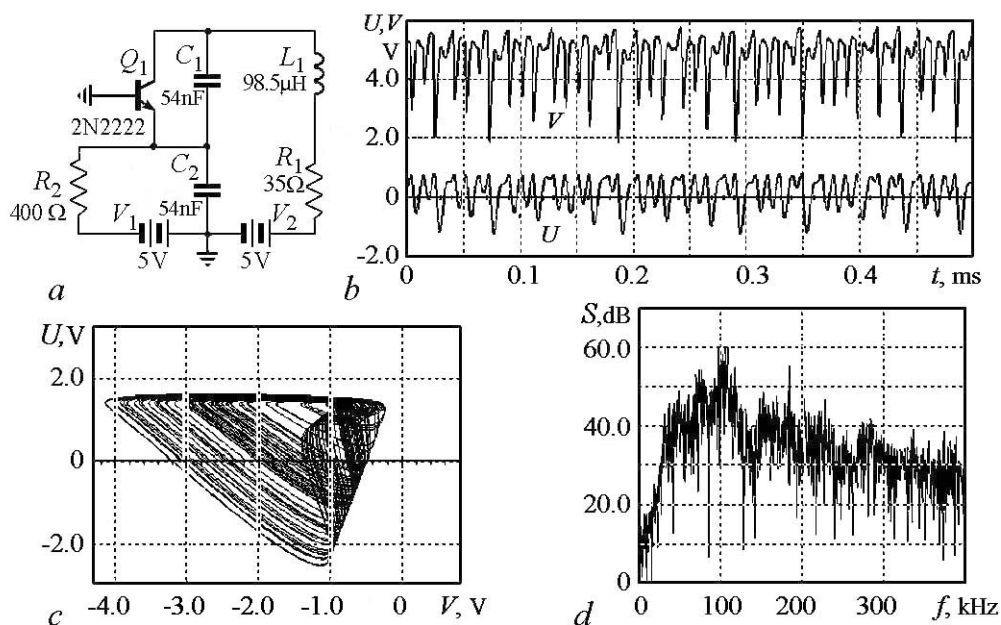


Рис. 1. Схема генератора хаоса Колпитца из [20] (*a*) и результаты моделирования в среде Multisim (*b*)–(*d*)

Fig. 1. Circuit diagram of the Kolpitz chaos generator from [20] (*a*) and simulation results in Multisim (*b*)–(*d*)

где  $U_0$  пороговое напряжение (примерно 0.75 V),  $R_0$  – малосигнальное сопротивление перехода база–эмиттер,  $\beta$  – параметр усиления. (В работе [20] принято  $U_0 = 0.75$  V,  $R_0 = 100$  Ом,  $\beta = 200$ .)

На рис. 1, *b* показаны зависимости от времени напряжений на конденсаторах  $C_1$  и  $C_2$ ,  $V$  и  $U$ , соответственно, скопированные с виртуального осциллографа при моделировании схемы в среде Multisim. На рис. 1, *c* показан портрет аттрактора в проекции на плоскость этих двух переменных. На рис. 1, *d* приводится спектр сигнала, отвечающего напряжению  $V$ . Можно видеть, что схема функционирует как генератор хаоса: реализации демонстрируют явно непериодический процесс, аттрактор выглядит как характерный портрет странного аттрактора («клубок ниток»), спектр сплошной – не содержит выраженных дискретных составляющих.

## 2. Генератор Хартли

Генератор Хартли («индуктивная трёхточка») – одна из классических схем электронных генераторов, отличающаяся тем, что положительная обратная связь осуществляется через отвод от части катушки индуктивности параллельного LC-контура. Как и в случае генератора Колпитца, традиционное использование схемы – генерация синусоидальных колебаний. Однако в 1990-е годы было показано, что в определенной области параметров имеет место хаос, ассоциирующийся с присутствием странного аттрактора.

На рис. 2, *a* показана составленная в среде Multisim схема, воспроизводящая систему, описанную в работе [21], где для описания ее динамики предложены уравнения

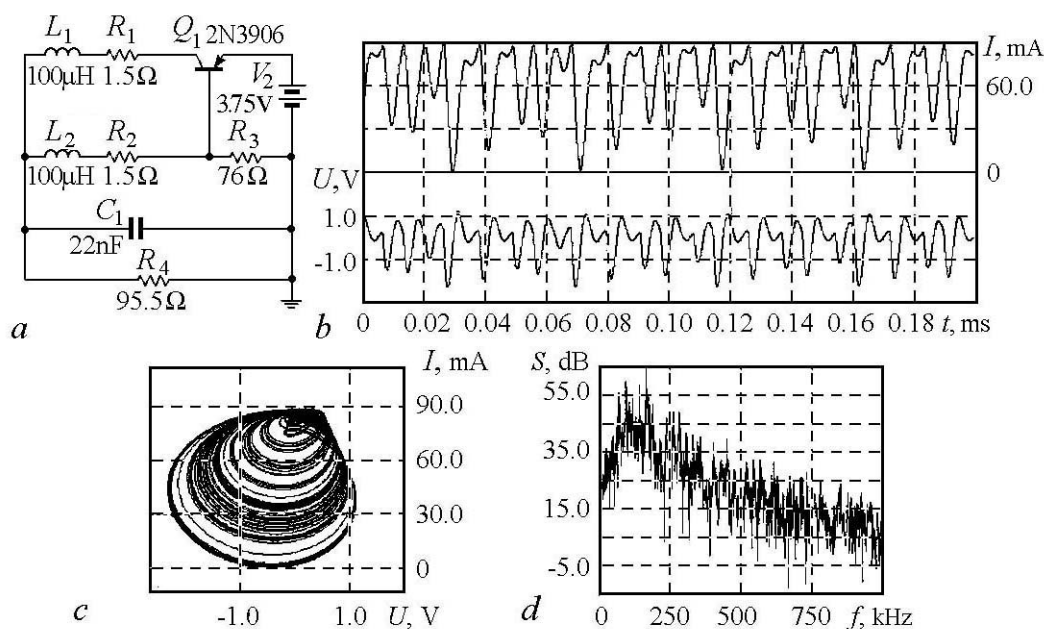


Рис. 2. Схема генератора хаоса Хартли из [21] (*a*) и результаты моделирования в среде Multisim (*b*)–(*d*)  
 Fig. 2. Circuit diagram of the Hartley chaos generator from [21] (*a*) and simulation results in Multisim (*b*)–(*d*)

$$C_1 \dot{V} = I_1 - I_2 - V R_4^{-1}, \quad L_1 \dot{I}_1 = E - V_{EC} - V - I_1 R_1, \quad L_2 \dot{I}_2 = V - I_2 R_2 - (I_2 - I_B) R_3. \quad (3)$$

Здесь  $V$  – напряжение на конденсаторе  $C_1$ ;  $I_1$  и  $I_2$  – токи через индуктивности  $L_1$  и  $L_2$ ;  $E$  – напряжение батареи  $V$ . Ток базы и напряжение эмиттер–коллектор транзистора  $Q_1$ , выражаются следующим образом в соответствии с принятой моделью транзистора:

$$I_B = \begin{cases} 0, & V_{EB} \leq U_0, \\ R_0^{-1}(V_{EB} - U_0), & V_{EB} > U_0, \end{cases} \quad V_{EC} = \begin{cases} k(V_{EB} - U_0), & V_{EB} > U_0, \\ V_{EC0}, & V_{EB} < U_0, \end{cases} \quad (4)$$

где  $U_0$ ,  $R_0$ ,  $k$  параметры транзистора. (В работе [21] приняты параметры  $U_0 = 0.75$  В,  $R_0 = 100$   $\Omega$ ,  $k = 900$ .)

На рис. 2, *b* показаны зависимости напряжения  $U$  на индуктивности  $L_2$  и тока через нее от времени, полученные при моделировании схемы в среде Multisim. На рис. 2, *c* показан портрет аттрактора в проекции на плоскость этих двух переменных. На рис. 2, *d* приводится спектр сигнала, отвечающего напряжению  $U$ . Можно видеть, что схема функционирует как генератор хаоса: реализации демонстрируют явно непериодический процесс, спектр сплошной – не содержит выраженных дискретных составляющих.

### 3. Простой RC-генератор хаоса на двух транзисторах

В работе [22] предложена схема RC-генератора хаотических автоколебаний, в которой используется два транзистора, нет катушек индуктивности, и питание осуществляется от единственного источника. Как полагают авторы, это привлекательный и недорогой источник хаотических колебаний для возможных приложений. Схема получила широкую известность благодаря тому, что была представлена и популяризована в сети Интернет («Постройте генератор хаоса за 5 минут»: <http://www.instructables.com/id/A-Simple-Chaos-Generator/>). Схема приводится на рис. 3, *a*.

Приняв  $C = C_1 = C_2 = C_3$ , можно записать уравнения, описывающие динамику, в виде

$$RC \frac{dU_1}{dt} = -U_1 \left( 1 + \frac{R}{R_1} - \frac{RR_3}{R_1(2R_3 + R_1)} \right) + U_2 + \frac{RR_3}{2R_3 + R_1} \left( \frac{E}{R_1} - i_{C1} + \frac{v_{BE2}}{R_3} \right), \quad (5)$$

$$RC \frac{dU_2}{dt} = -2U_2 + U_1 + v_{BE1} - i_{C2}R, \quad (6)$$

$$RC \frac{dv_{BE1}}{dt} = -v_{BE1} + U_2 - i_{B1}R, \quad (7)$$

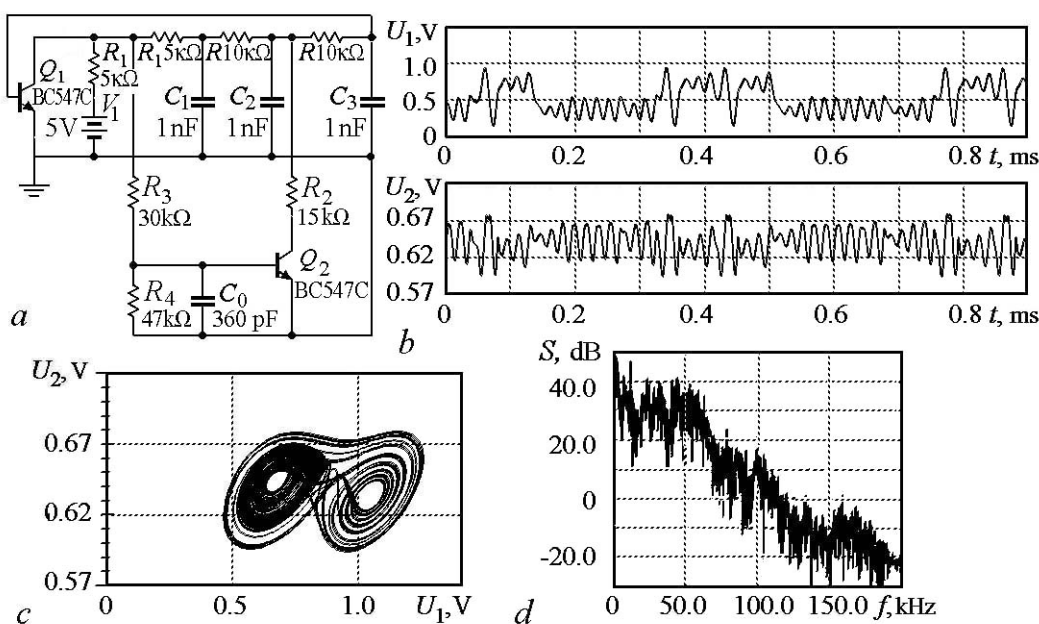


Рис. 3. Схема генератора хаоса из работы [22] (а) и результаты моделирования в среде Multisim (b)–(d)  
 Fig. 3. The scheme of the chaos generator from [22] (a) and the results of modeling in Multisim (b)–(d)

$$(2R_3 + R_1)C_0 \frac{dv_{BE2}}{dt} = -v_{BE2} \frac{R_1 + 2R_3 + 2R_4}{R_4} + U_1 + E - i_{C1}R_1 - i_{B2}(R_1 + 2R_3), \quad (8)$$

где  $U_{1,2}$  – напряжения на конденсаторах  $C_1, C_2$ ; токи  $i_{B1}, i_{B2}, i_{C1}, i_{C2}$  определяются моделью транзистора, как функции напряжений база–эмиттер и коллектор–эмиттер  $v_{BE1}, v_{BE2}, v_{CE1}, v_{CE2}$ .

На рис. 3, b показаны осциллограммы напряжений  $U_{1,2}$ , полученные при моделировании схемы в среде Multisim. На рис. 3, c показан портрет аттрактора в проекции на плоскость этих двух переменных. На рис. 3, d приводится спектр сигнала, отвечающего напряжению  $U_1$ .

#### 4. Схема Чуа

Одной из первых конструкций электронной системы с хаотической динамикой была схема Чуа, изначальной мотивацией построения которой было намерение реализовать электронный аналог системы Лоренца [23]. В дальнейшем эта система была подвергнута всестороннему теоретическому и экспериментальному исследованию и на сегодняшний день является в нелинейной динамике одной из наиболее хорошо исследованных моделей.

Схема содержит индуктивность  $L$ , резистор  $R$ , два конденсатора  $C_1$  и  $C_2$  и специальный элемент с кусочно-линейной вольтамперной характеристикой – «диод Чуа». Один из конкретных вариантов схемы показан на рис. 4, a [24]. «Диод Чуа» в данном случае представляет собой блок, обозначенный на схеме пунктирным прямоугольником, и реализован на операционных усилителях  $OA_1, OA_2$ .

Записывая уравнения Кирхгофа и переходя к безразмерным переменным, можно получить для схемы Чуа следующую систему уравнений:

$$\dot{x} = \alpha(y - h(x)), \quad \dot{y} = x + y - z, \quad \dot{z} = -\beta y, \quad (9)$$

где переменные  $x, y, z$  пропорциональны, соответственно, напряжению на нелинейном элементе, напряжению на индуктивности и току через индуктивность,  $\alpha = C_1 C_2^{-1}$  и  $\beta = R^2 C_1 L^{-1}$ , а функция  $h(x)$  определяется характеристикой нелинейного элемента и для рассматриваемого конкретного случая показана на рис. 4, *b*.

На рис. 5, *a* показаны осциллограммы напряжений на конденсаторах  $C_1$  и  $C_2$ , соответственно. Результаты для  $V$  и  $U$ , полученные при моделировании схемы в среде Multisim. На рис. 5, *b* показан портрет аттрактора в проекции на плоскость этих двух переменных. На рис. 5, *c* приводится спектр сигнала, отвечающего напряжению  $V$ . Можно видеть, что схема функционирует как генератор хаоса: реализации демонстрируют явно непериодический процесс. Спектр, очевидно, сплошной и не содержит выраженных дискретных составляющих.

На рис. 6 показан другой вариант схемы генератора хаоса [25], использующего диод Чуа, где индуктивность заменена элементом на основе моста Вина, содержащим операционный усилитель ОА3. На рис. 7 представлены результаты моделирования динамики схемы в среде Multisim.

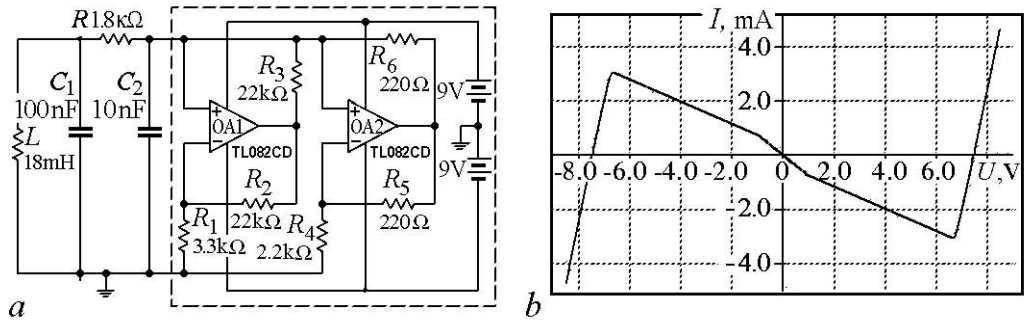


Рис. 4. Схема Чуа из работы [24] (*a*), реализованная в среде Multisim, и вольт–амперная характеристика диода Чуа (*b*), представляющего собой блок, выделенный на схеме пунктирным контуром

Fig. 4. Chua circuit from [24] (*a*) implemented in Multisim and the current–voltage characteristic of the Chua diode (*b*), which is a block marked in the circuit diagram with a dotted contour

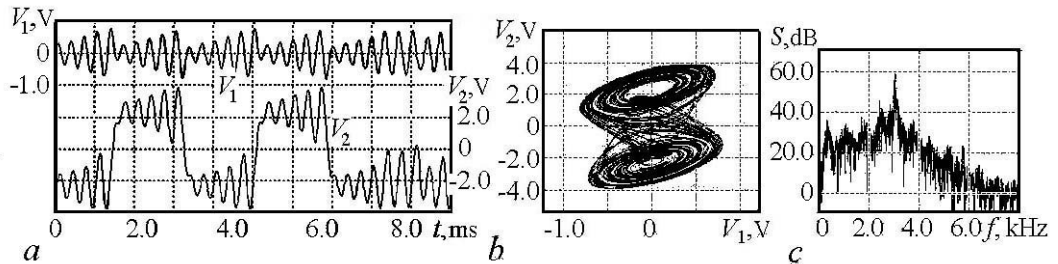


Рис. 5. Результаты моделирования динамики схемы, показанной на рис. 4: осциллограммы напряжений на конденсаторах  $C_1$  и  $C_2$  (*a*); портрет аттрактора в проекции на плоскость этих переменных (*b*); спектр сигнала, отвечающего напряжению на конденсаторе  $C_1$  (*c*)

Fig. 5. Results of simulating the dynamics of the circuit of Fig. 4: waveforms of voltages on the capacitors  $C_1$  and  $C_2$  (*a*); portrait of the attractor in projection onto the plane of these variables (*b*); spectrum of the signal corresponding to voltage on the capacitor  $C_1$  (*c*)



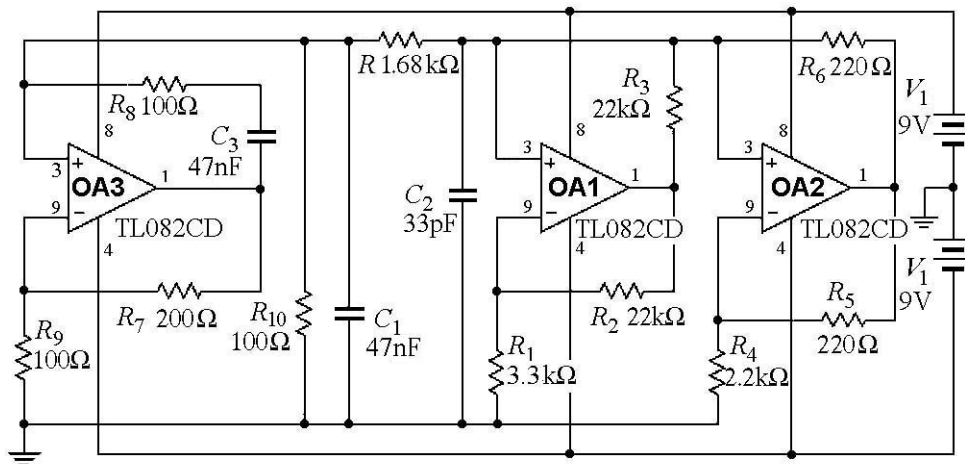


Рис. 6. Схема генератора хаоса, использующего мост Вина и диод Чуа [25]

Fig. 6. Circuit diagram of the chaos generator using the Wien bridge and the Chua diode [25]

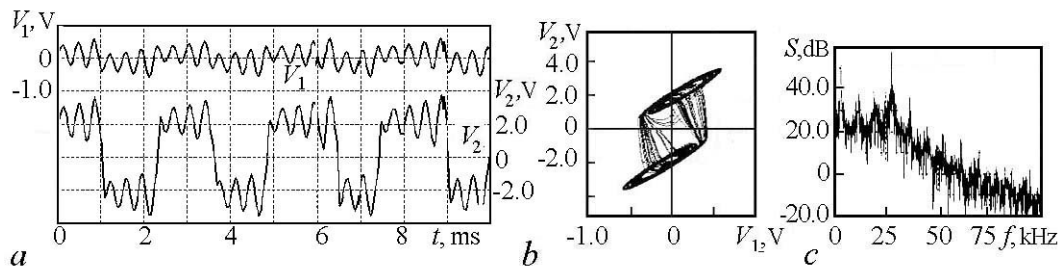


Рис. 7. Результаты моделирования динамики схемы, показанной на рис. 4: осциллограммы напряжений на конденсаторах C1 и C2 (a); портрет аттрактора в проекции на плоскость этих переменных (b); спектр сигнала, отвечающего напряжению на конденсаторе C1 (c)

Fig. 7. Results of simulating dynamics of the circuit shown in Fig. 4: waveforms of voltages on the capacitors C1 and C2 (a); portrait of the attractor in projection onto the plane of these variables (b), and spectrum of the signal corresponding to voltage on the capacitor C1 (c)

## 5. Генераторы, предложенные литовской группой

Несколько интересных схем генераторов хаоса на операционных усилителях были предложены группой исследователей из Института физики полупроводников в Вильнюсе.

В статье [26] авторы предлагают способ создания автономных хаотических генераторов хаоса на основе простой схемы третьего порядка (рис. 8), постулируя, что для этого достаточно в стандартный генератор синусоидальных колебаний добавить дополнительный элемент накопления энергии (например, индуктивность или емкость) и подходящий нелинейный элемент (например, диод).

Схема включает в себя неинвертирующий усилитель OA1 и резонансную последовательную цепь LCR с положительной обратной связью. Кроме того, в схему добавлен конденсатор C2 и диод D.

Уравнения, описывающие динамику системы, имеют вид

$$C\dot{V} = I, \quad L\dot{I} = (k-1)RI - V - W, \quad C_2W = E/R_0 + I - I_D. \quad (10)$$

Здесь  $V$  и  $W$  напряжения на конденсаторах  $C$  и  $C_2$ , соответственно;  $I$  – ток через индуктивность;  $I_D$  – ток через диод, выражающийся через напряжение на диоде  $V_D$  соотношением

$$I_D = I_S(\exp(eV_D/k_B T) - 1) \quad (11)$$

где  $I_S, e, k_B, T$  – константы. С использованием безразмерных величин

$$\begin{aligned} x &= eV/k_B T, & y &= \sqrt{L/C}eI/k_B T, & z &= eW/k_B T, \\ \tau &= t/\sqrt{LC}, & a &= (k-1)R\sqrt{C/L}, & b &= \sqrt{L/C}eE/(k_B T R_0), \\ & & c &= eI_S\sqrt{L/C}/(k_B T), & \varepsilon &= C_2/C \end{aligned} \quad (12)$$

уравнения принимают вид

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = ay - x - z, \quad \varepsilon\dot{z} = b + y - c(e^z - 1). \quad (13)$$

На рис. 8, *b-d* представлены результаты моделирования схемы в среде Multisim, подтверждающие хаотическую природу возникающих в ней автоколебаний. На рис. 8, *b* показаны зависимости напряжения  $U$  и тока  $I$  через индуктивность  $L$ , а на рис. 8, *c* портрет аттрактора в проекции на плоскость этих двух переменных. На рис. 8, *d* приводится спектр сигнала, отвечающего напряжению  $U$ .

В работе [27] предложена схема RC-генератора хаоса на операционных усилителях, показанная на рис. 9, *a*. В предположении, что  $R_1 = R_2 = R_3 + R_4 = R$ ,

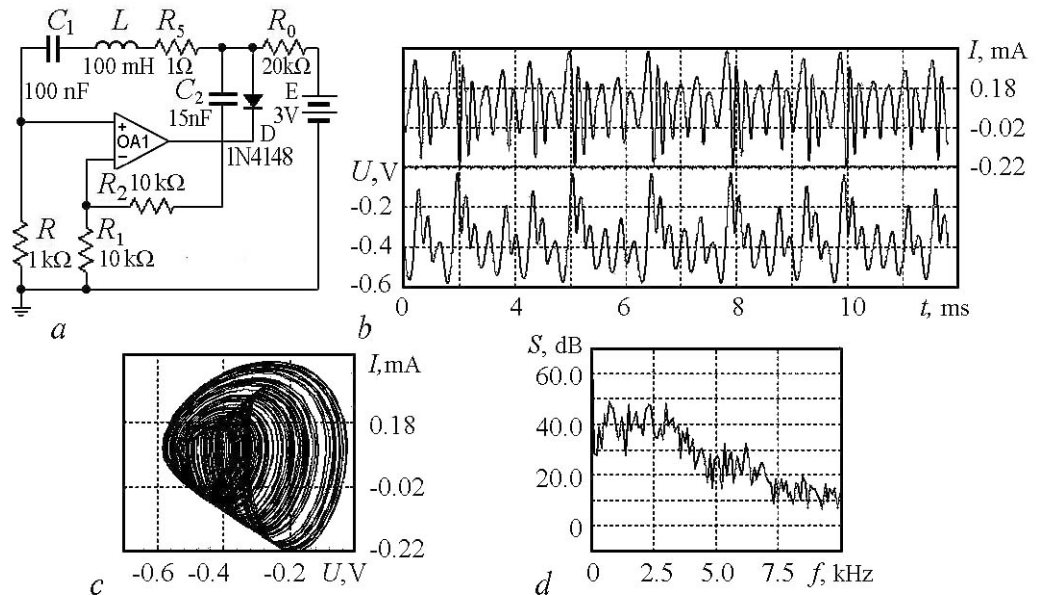


Рис. 8. Схема генератора хаоса из работы [26] (*a*) и результаты моделирования в среде Multisim (*b*)–(*d*)  
 Fig. 8. Circuit diagram the chaos generator from [26] (*a*) and results of simulating in Multisim (*b*)–(*d*)

$C_{1,2,3} = C$ , с использованием обозначений

$$\begin{aligned} x &= U/U_*, \quad y = V/U_*, \quad z = W/U_*, \quad U_* = U_0/(k_2 - 1), \\ \tau &= t/RC, \quad \alpha = R/R_6, \quad \beta = R/R_8, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $U, V, W$  напряжения на конденсаторах  $C1, C2, C3$ ,  $k_1, k_2$  – коэффициенты усиления элементов на операционных усилителях  $OA1$  и  $OA2$ , уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + (k_1 - 1)(y - z), \\ \dot{y} &= -x + (k_1 - 1)y - (k_1 - 1)z, \\ \dot{z} &= k_1y - (k_1 + \alpha)z + \beta(z - 1)H(z - 1), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $H$  – функция Хевисайда.

На рис. 9, *b–d* представлены результаты моделирования схемы в среде Multisim. На рис. 9, *b* показаны осциллограммы напряжений на выходе операционных усилителей, а на рис. 9, *c* портрет аттрактора в проекции на плоскость этих двух переменных. На рис. 9, *d* приводится спектр сигнала, отвечающего напряжению на выходе усилителя  $OA1$ .

В работе [28] предложен автономный генератор хаотических сигналов, построенный на основе модификации неавтономной системы (осциллятора Дуффинга–Холмса с периодическим внешним воздействием). Система описывается уравнениями

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x - x^3 + by - kz, \quad \dot{z} = \omega(y - z). \quad (16)$$

Вместо внешнего воздействия введена дополнительная переменная  $z$  и добавлено уравнение для нее. Схема, реализующая динамику данной модели, показана на рис. 10, *a*.

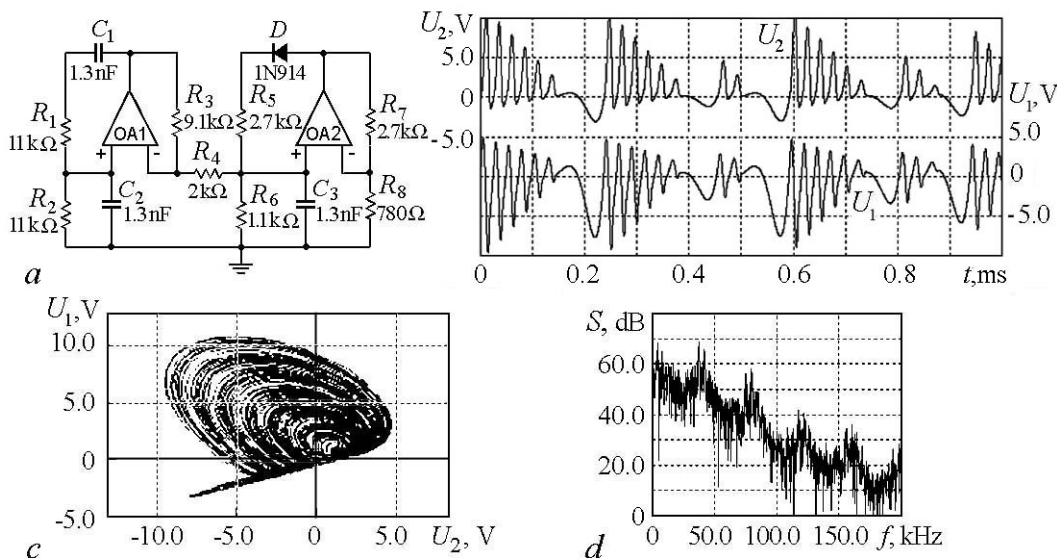


Рис. 9. Схема генератора хаоса из работы [27] (*a*) и результаты моделирования в среде Multisim (*b–d*)  
 Fig. 9. Circuit diagram the chaos generator from [27] (*a*) and results of simulating in Multisim (*b–d*)

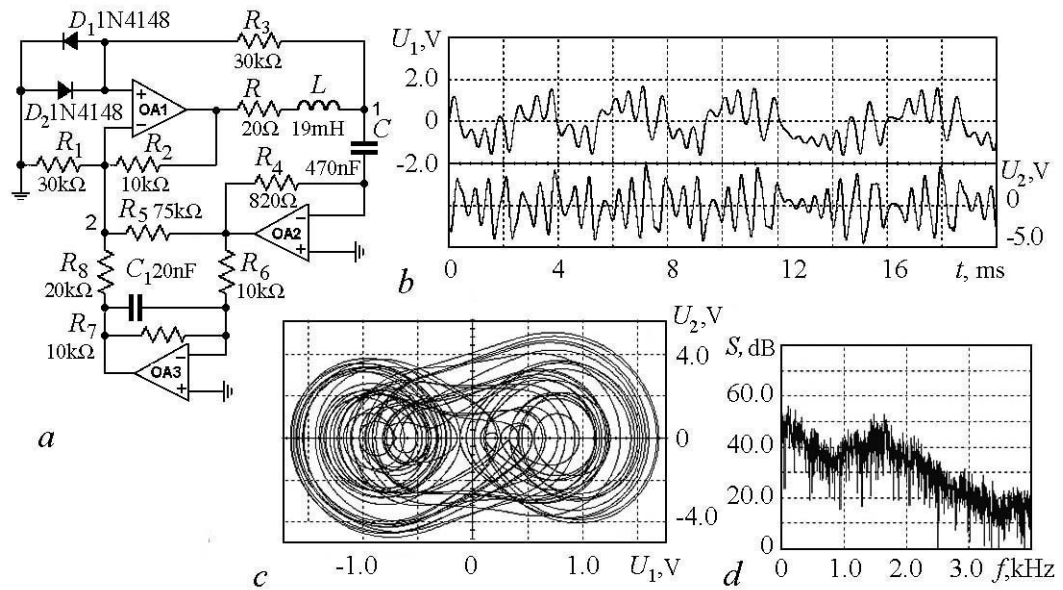


Рис. 10. Схема генератора хаоса из работы [28] (a) и результаты моделирования в среде Multisim (b)–(d)  
 Fig. 10. Circuit diagram the chaos generator from [28] (a) and results of simulating in Multisim (b)–(d)

На рис. 10, b–d представлены результаты моделирования схемы в среде Multisim. На рис. 10, b показаны осциллограммы напряжений в узлах, обозначенных на схеме цифрами 1 и 2, а на рис. 10, c портрет аттрактора в проекции на плоскость этих двух переменных. На рис. 10, d приводится спектр сигнала, отвечающего напряжению в точке 1.

## 6. Система Лоренца

Аттрактор Лоренца – популярный и хорошо изученный пример странного хаотического аттрактора в системе трех дифференциальных уравнений первого порядка [16–18]

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy. \quad (17)$$

«Классический» набор параметров в уравнениях  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 28$ . Первоначально эта модель была рассмотрена для задачи о конвекции жидкости в подогреваемом снизу слое, но в дальнейшем оказалась применима к описанию множества систем различной физической природы [29–33]. Аттрактор Лоренца относится к классу псевдогиперболических (квазигиперболических) аттракторов [15] и порождает робастный хаос, не разрушающийся при малом смещении по параметрам. Поэтому электронные генераторы, воспроизводящие соответствующую динамику, возможно, представляют интерес в свете принципов, обсуждавшихся во Введении. (Аттрактор Лоренца, впрочем, не обладает свойством структурной устойчивости в том смысле, что не имеет места эквивалентность топологического устройства при смещении по параметрам, как это свойственно равномерно гиперболическим аттракторам.)

Схемотехническую реализацию системы Лоренца на трех операционных усилителях и двух аналоговых умножителях представил в Интернет-публикации автор известного ставшего классикой двухтомника «Искусство схемотехники» Пауль Хоро-

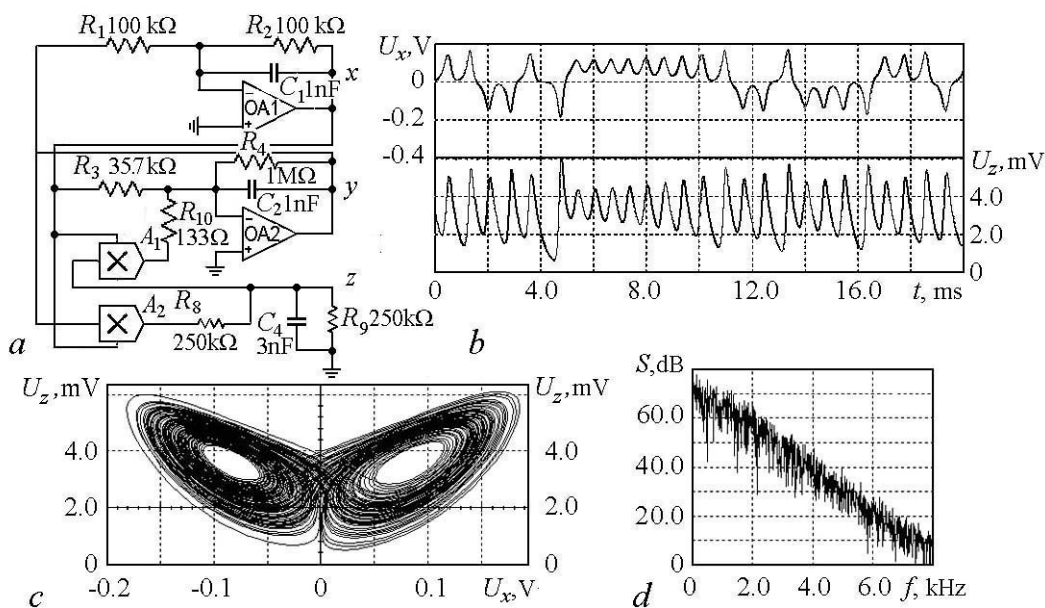


Рис. 11. Схема, реализующая систему Лоренца (а), и результаты моделирования в среде Multisim (b)–(d). A1 и A2 – аналоговые умножители с коэффициентом передачи  $1 \text{ V}^{-1}$

Fig. 11. A circuit implementing the Lorenz system (a) and results of its simulating in Multisim (b)–(d). A1 and A2 are analog multipliers with the transmission coefficient  $1 \text{ V}^{-1}$

виц [34]. Здесь рассмотрен упрощенный вариант этой схемы, где количество операционных усилителей уменьшено до двух (рис. 11, а). Узлы, где напряжение пропорционально переменным  $x, y, z$ , обозначены соответствующими буквами. На рис. 11, b показаны осциллограммы напряжений  $U_x$  и  $U_z$  в узлах  $x$  и  $z$ , а на рис. 11, c – портрет аттрактора в проекции на плоскость этих двух переменных. На рис. 11, d приводится спектр сигнала  $U_x$ .

## 7. Две системы с грубым гиперболическим хаосом

Первый пример физически реализуемой системы с гиперболическим аттрактором, обеспечивающим свойство структурной устойчивости (грубости) хаоса, был предложен в работе [35]. Это система двух осцилляторов ван дер Поля с частотами  $\omega_0$  и  $2\omega_0$ , возбуждающихся по очереди благодаря медленной модуляции параметра, так что за полный цикл передачи возбуждения от одного элемента к другому фаза колебаний претерпевает двукратно растягивающее отображение (отображение Бернулли). Передача возбуждения осуществлялась резонансным образом: от первого осциллятора ко второму с удвоением частоты, а обратно – с возвращением в область частот около  $\omega_0$  благодаря смещению с опорным сигналом частоты  $\omega_0$ . В дальнейшем такая система была реализована схмотехнически [36] и экспериментально [37, 38]. Заметим, что использование опорного сигнала представляет очевидное неудобство с точки зрения приложений.

На рис. 12, а показана схема устройства, функционирующего без опорного сигнала, в условиях нерезонансной передачи возбуждения от второго осциллятора к

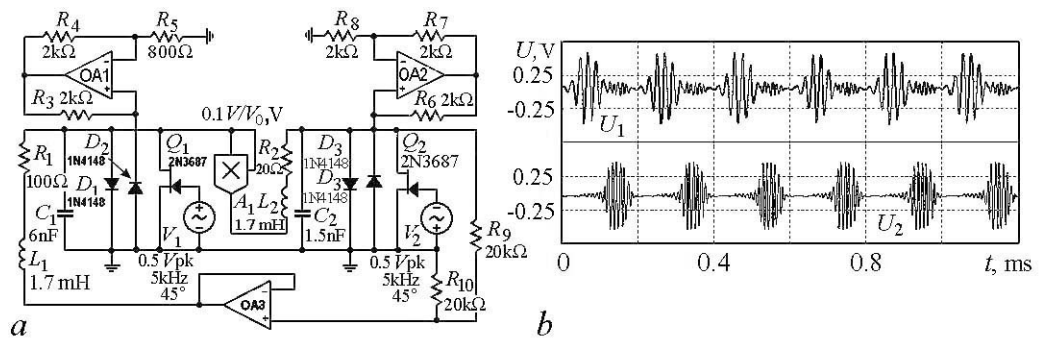


Рис. 12. Схематехническая реализация (а) системы двух попеременно активных генераторов с нерезонансной передачей возбуждения, где имеет место гиперболический хаотический аттрактор Смейла–Вильямса и осциллограммы (b) напряжений на конденсаторах C1 и C2, полученные при моделировании динамики в среде Multisim. A1 – аналоговый умножитель с коэффициентом передачи  $0.1 \text{ V}^{-1}$

Fig. 12. Circuit implementation (a) of a system of two alternately active oscillators with non-resonance transfer of excitation, where hyperbolic chaotic Smale–Williams attractor occurs, and waveforms (b) of the voltages on capacitors C1 and C2 as obtained in simulating the dynamics in Multisim. A1 is analog multiplier with the transmission coefficient  $0.1 \text{ V}^{-1}$

первому. (Такая возможность на уровне численного моделирования была отмечена в работе [39].) Имеется две подсистемы в виде осцилляторов ван дер Поля на основе колебательных контуров, один из которых образован катушкой индуктивности L1 и емкостью C1, а второй – L2 и C2, соответственно. Поскольку индуктивности одинаковы, а емкость во втором контуре в 4 раза меньше, собственные частоты  $f_0$  и  $2f_0$  находятся в отношении 1:2, составляя приблизительно 50 kHz и 100 kHz. Отрицательное сопротивление в каждый контур вносится элементом на основе операционного усилителя OA1 и OA2, соответственно. Нелинейная проводимость, обеспечивающая увеличение потерь энергии с ростом амплитуды колебаний, вводится элементом, составленным из полупроводниковых диодов (D1, D2 и D3, D4). Для модуляции параметра, ответственного за возникновение автоколебаний, в каждый из контуров включен полевой транзистор, у которого проводимость «сток–исток» управляется подаваемым на затвор переменным напряжением на частоте 5 kHz источниками V1 и V2, имеющими противоположную полярность мгновенного напряжения. Первый генератор действует на второй через посредство умножителя A1, выдающего на выходе квадрат входного сигнала. Порождаемая при этом вторая гармоника сигнала служит для стимуляции возбуждения второго генератора в диапазоне частот вблизи  $2\omega_0$ , когда он выходит за порог генерации.

В свою очередь, второй генератор действует на первый через посредство повторителя напряжения на операционном усилителе OA3. Передача возбуждения происходит в силу присутствия спектральных составляющих с частотами в окрестности  $f_0$ , амплитуда которых не мала благодаря тому, что соотношение периода модуляции и высокочастотного периода не очень большое (порядка 10). На рис. 12, b показаны графики реализаций напряжения на конденсаторах C1 и C2, полученные при моделировании в среде Multisim. Как можно видеть, в соответствии с приведенным выше качественным описанием, имеет место поочередное возбуждение колебаний в контурах L1, C1 и L2, C2.

Убедимся, что переход к каждой новой стадии активности сопровождается удвоением фазы. Для этого подключим осциллограф так, чтобы один луч управлялся

напряжением на конденсаторе C1, а второй – напряжением на резисторе R1. В среде Multisim с помощью приложения Grapher предусмотрена запись в файл данных, получаемых в процессе моделирования. Шаг выборки по времени надо установить равным периоду модуляции ( $T = 0.2$  ms). Моменты выборки подберем так, чтобы они отвечали стадиям активности первого генератора. Затем файл обрабатывается специальной программой. Сначала оба временных ряда – для напряжений на конденсаторе и резисторе  $U_C$  и  $U_R$  – нормируются так, чтобы сумма квадратов элементов была для них одинакова. Затем для каждой пары величин  $U_C^n$ ,  $U_R^n$ , относящихся к одному и тому же моменту времени  $nT$ , определяем фазу как  $\theta_n = \arg(U_C^n + iU_R^n)$ , приведя ее к интервалу от 0 до  $2\pi$ . На рис. 13, *a* показан график, где представлены обработанные таким образом данные. Видно, что график соответствует растягивающему отображению окружности типа Бернулли, то есть требуемое для аттрактора Смейла–Вильямса условие выполняется.

То же самое подключение осциллографа можно использовать для получения портрета аттрактора в проекции на фазовую плоскость первого генератора, если перевести его в режим, в котором развертка по времени не производится, а отклонение луча по горизонтали и вертикали управляется входными напряжениями  $U_C$  и  $U_R$ . Для построения аттрактора в стробоскопическом сечении можно воспользоваться записанными в файл данными, использованными при построении диаграммы для фаз, представив их графически в координатах  $U_C$ ,  $U_R$ . Полученный таким образом портрет аттрактора показан на рис. 13, *b*; он соответствует по виду соленоиду Смейла–Вильямса, с характерной образуемой его витками поперечной канторовой структурой.

На рис. 14 показаны спектры сигналов, генерируемых обеими подсистемами, полученные в среде Multisim с помощью виртуального анализатора спектра. Панель (*a*) отвечает спектру сигнала от первого генератора (напряжение на конденсаторе C1), а панель (*b*) – сигналу от второго генератора (напряжение на конденсаторе C2). Спектр сплошной, как это и должно быть для случайного сигнала. Для пер-

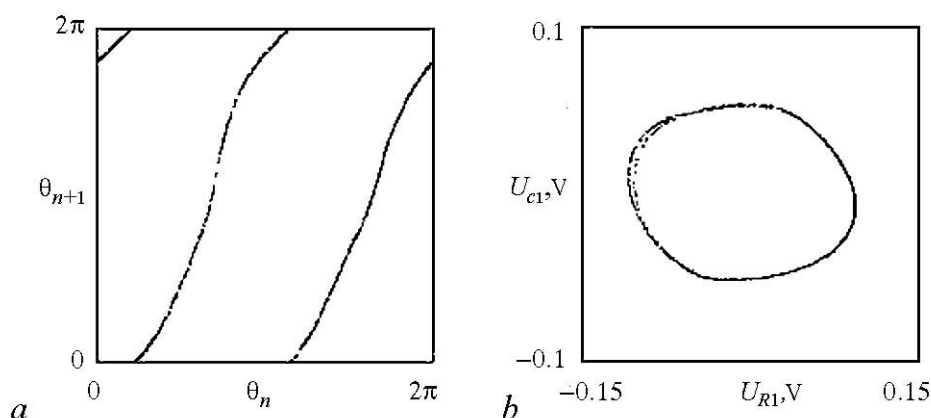


Рис. 13. Диаграмма изменения фаз одного из осцилляторов за период модуляции (*a*) и портрет аттрактора (*b*) в стробоскопическом сечении в проекции на плоскость переменных, отвечающих напряжению на резисторе R1 и конденсаторе C1

Fig. 13. Phase transformation diagram of one of the oscillators during the modulation period (*a*) and portrait of the attractor (*b*) in the stroboscopic section projected on the plane of variables corresponding to the voltages across the resistor R1 and the capacitor C1

вого генератора он сосредоточен по большей части в окрестности его собственной частоты 50 kHz, а для второго – в окрестности удвоенной частоты 100 kHz. В низкочастотной части спектра заметны дискретные компоненты на частоте 5 kHz и ее гармониках, обусловленные присутствием периодической модуляции параметров с этой частотой.

Недавно в работе [40] была указана интересная возможность реализовать гиперболический хаос в системе попеременно возбуждающихся (благодаря внешней модуляции параметров) двух симметричных автоколебательных элементов Бонхоффера – ван дер Поля. В данном случае имеет место резонансная передача возбуждения с удвоением фазы благодаря использованию второй гармоники релаксационных колебаний, возникающих на развитой стадии активности. Обратимся к схемотехнической реализации этой идеи.

На рис. 15 показана схема, составленная из двух одинаковых автоколебательных элементов на основе контуров  $L_1C_1$  и  $L_2C_2$ . Внесение отрицательного сопротивления в один и другой контур обеспечивается операционными усилителями ОА1 и ОА2. Величина вносимого сопротивления в каждый момент времени зависит от мгновенного сопротивления сток–исток полевых транзисторов Q1 и Q2. Подавае-

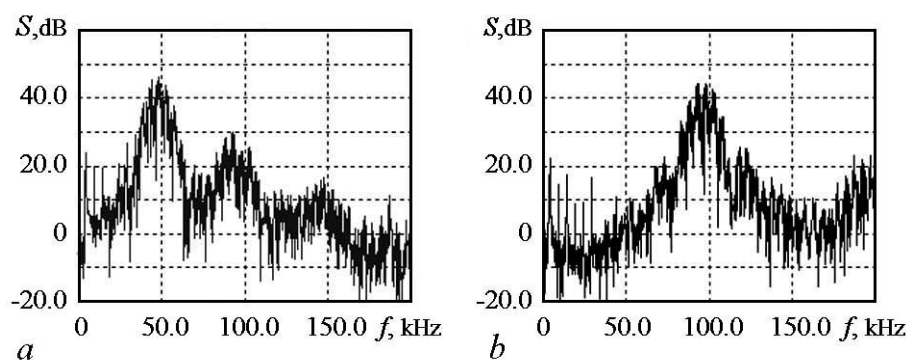


Рис. 14. Спектры сигналов первого (a) и второго (b) генератора, полученные при моделировании в среде Multisim подачи на виртуальный анализатор спектра напряжений, соответственно, на конденсаторе C1 и C2

Fig. 14. Spectra of the first (a) and second (b) oscillators obtained in the Multisim simulation by means of the virtual spectrum analyzer, respectively, on the capacitors C1 and C2

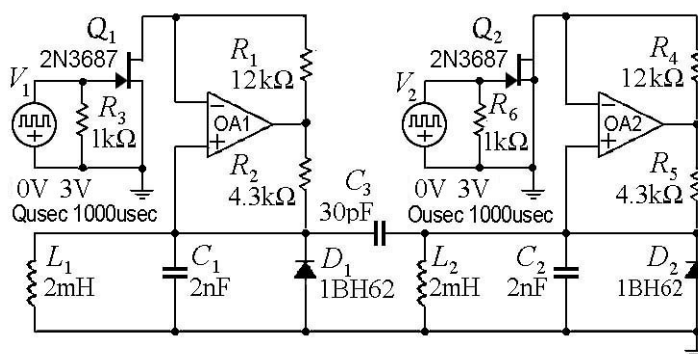


Рис. 15. Система двух связанных автоколебательных элементов, реализующая гиперболический хаос

Fig. 15. A system of two coupled self-oscillating elements realizing hyperbolic chaos



мое на затворы управляющее напряжение от источников  $V_1$  и  $V_2$  остается нулевым на протяжении определенной части периода модуляции (при этом осциллятор активен), а на остальной части периода напряжение меньше нуля, и его временная зависимость имеет вид треугольной функции (колебания подавляются). Для первого и второго осцилляторов управляющие напряжения сдвинуты друг относительно друга по времени. Параметры элементов отрицательного сопротивления подобраны так, что нулевое напряжение затвора отвечает установлению релаксационных колебаний с частотой вдвое меньшей частоты линейных колебаний осциллятора. В каждый колебательный контур включен диод ( $D1$  и  $D2$ ), что обеспечивает ограничение уровня колебаний и наличие интенсивной второй гармоники при большой амплитуде колебаний. Когда наступает очередная стадия активности осциллятора, развитие колебаний в нем, начиная от малой амплитуды, эффективно стимулируется резонансным образом благодаря связи через конденсатор  $C3$  за счет второй гармоники колебаний осциллятора-партнера, который как раз пребывает на стадии развитых релаксационных колебаний. Далее второй осциллятор оказывается подавленным, тогда как в первом развиваются релаксационные колебания, а затем процесс повторяется с очередной сменой ролей обоих осцилляторов. Поскольку передача возбуждения от одного осциллятора к другому осуществляется через посредство второй гармоники, это должно сопровождаться удвоением фазы, что при наличии сжатия по остальным направлениям в пространстве состояний будет отвечать аттрактору типа Смейла–Вильямса в стробоскопическом отображении, определяющем эволюцию системы за период.

Рис. 16, где представлены осциллограммы, полученные при моделировании в среде Multisim, иллюстрирует функционирование схемы в соответствии с описанным механизмом. Подтверждение гиперболической природы хаоса требует проверить, что последовательные стадии активности отвечают преобразованию фазы, согласно растягивающему отображению. В данном случае, однако, в области развитых колебаний их форма существенно отличается от синусоидальной, поэтому вычисление фазы через арктангенс отношения переменной и ее производной не приводит к удовлетворительным результатам. Альтернативой является использование величины, определяющей временной сдвиг относительно заданного начала отсчета, нормированный на характерный период релаксационных колебаний. Пусть  $t$  – момент

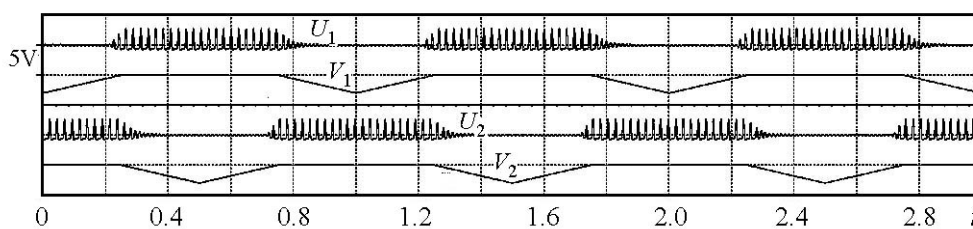


Рис. 16. Зависимости от времени напряжений  $U_1$  и  $U_2$  на конденсаторах  $C1$  и  $C2$  и управляющих напряжений на затворе полевых транзисторов  $V_1$  и  $V_2$ , полученные с помощью виртуального четырехлучевого осциллографа при моделировании в среде Multisim. Номиналы элементов схемы соответствуют рис. 15

Fig. 16. Waveforms of voltages  $U_1$  and  $U_2$  on capacitors  $C1$  and  $C2$  and control voltages on the gate of field effect transistors  $V_1$  and  $V_2$ , obtained with the help of a virtual four-beam oscilloscope in the Multisim simulation. The nominal values of the circuit elements correspond to Fig. 15

времени, фиксированный относительно профиля управляющего сигнала в области активности одного из осцилляторов, а  $t_1$  и  $t_2$  – предшествующие моменты изменения знака напряжения в колебательном контуре с плюса на минус, причем  $t_2 > t_1$ . Тогда можно определить угловую (фазовую) переменную, принадлежащую интервалу  $[0,1]$  согласно соотношению  $\varphi = (t - t_2)(t_2 - t_1)^{-1}$ .

Чтобы построить график для величин, относящихся к последовательным стадиям активности  $\varphi_n$  и  $\varphi_{n+1}$ , можно использовать записанные в файл данные моделирования в среде Multisim на достаточно большом времени с малым шагом выборки (на порядок меньше периода малых колебаний). Полученный обработкой этих данных график показан на рис. 17, *a*. Поскольку удвоение фазовой переменной осуществляется при каждой передаче возбуждения от первого осциллятора ко второму и от второго к первому, то за период модуляции растяжение по фазе четырехкратное, и график состоит из ветвей, имеющих коэффициент наклона близкий к 4. На рис. 17, *b, c* показан спектр сигнала, порождаемого одним из осцилляторов, в линейном и логарифмическом масштабе. Спектр изрезан в силу того, что сигнал имеет вид периодически следующих цугов колебаний, однако из-за хаотичности изменения фазы на последовательных стадиях активности, спектр, безусловно, сплошной.

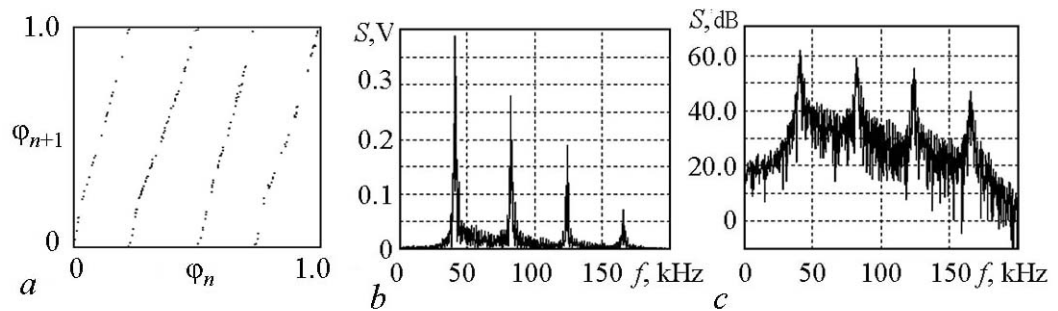


Рис. 17. Диаграмма, иллюстрирующая трансформацию фаз на последовательных стадиях активности (*a*) и спектры колебаний в линейном (*b*) и логарифмическом масштабе (*c*) для одного из осцилляторов, полученные при моделировании в среде Multisim схемы рис. 15

Fig. 17. Diagram illustrating the phase transformation in successive stages of activity (*a*) and the oscillation spectra in linear (*b*) and logarithmic scale (*c*) for one of the oscillators as obtained in the Multisim simulation of the circuit in Fig. 15

## 8. Генератор с запаздывающей обратной связью

Системы, в которых взаимодействие элементов осуществляется с запаздыванием во времени, распространены в природе и технике и встречаются, например, в теории автоматического управления, нелинейной оптике, физиологии и т.д. [41–45].

Системы с запаздыванием следует классифицировать как распределенные системы с бесконечномерным фазовым пространством, где роль виртуальной пространственной координаты играет время, отсчитываемое в пределах интервала запаздывания; при достаточно сильной нелинейности они часто порождают хаотическую динамику. В электронике на этой основе возможна реализация генераторов хаоса, к категории которых относится шумотрон – устройство в виде кольцевой схемы из

двух ламп бегущей волны (усилителя и нелинейного элемента), разработанное для систем радиопротиводействия в ИРЭ АН СССР под руководством В.Я. Кислова в 1960-е годы [46, 7].

Для генерации хаоса в системах кольцевого типа существенным является присутствие нелинейного элемента, у которого зависимость уровня выходного сигнала от уровня входного имеет насыщение и падающий участок. Ниже рассматривается вариант схемы генератора с запаздыванием, где в качестве нелинейного элемента используется блок на основе двух полевых транзисторов – так называемый «лямбда-диод» [5, 6].

На рис. 18, *a* показана схема, составленная в среде Multisim. Схема включает низкочастотный RC-фильтр (конденсатор  $C_1$ , резисторы  $R_1, R_2$ ), операционный усилитель  $OA_1$ , обеспечивающий усиление с коэффициентом  $K = 1 + R_3/R_4$ , и нелинейный элемент на диоде  $D_1$  и двух полевых транзисторах  $Q_1, Q_2$ . Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента  $I = f(U)$  показана отдельно на панели (*b*). Выходным сигналом его служит ток, поступающий на вход линии задержки  $T$ , волновое сопротивление которой выбрано равным  $R_3$ , чтобы избежать отражений сигнала. Выходной сигнал из линии задержки через повторитель напряжения на операционном усилителе  $OA_2$  подается на вход RC-фильтра, что замыкает кольцевую цепь.

Если пренебречь изменением напряжения на нелинейном элементе в сравнении с падением напряжения на входных клеммах линии задержки, что при выбранных параметрах дает достаточно хорошее приближение, то динамика схемы описывается уравнениями

$$C_1 \frac{dU}{dt} + \frac{U}{R_2} = \frac{V - U}{R_1}, \quad I = f(KU), \quad V = R_3 I(t - T).$$

Заменой переменных

$$x = U, \quad t = t' RC_1, \quad \tau = T/RC_1, \quad F(x) = \frac{R_3 f(KU)}{1 + R_1 R_2^{-1}}$$

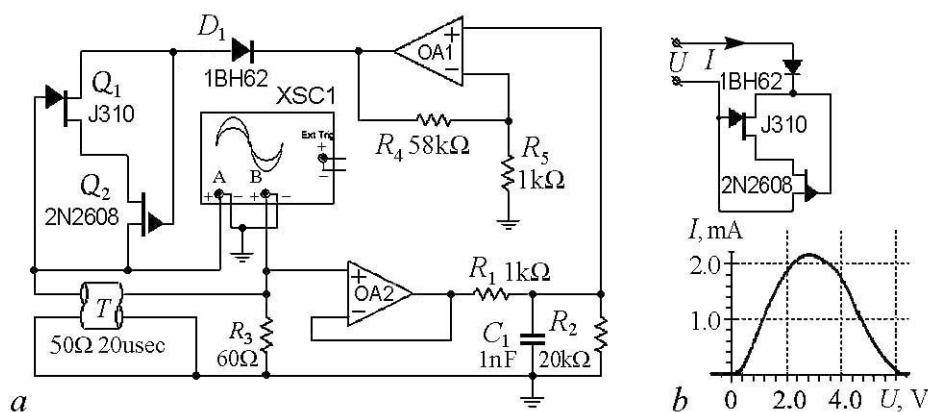


Рис. 18. Схема генератора с запаздывающей обратной связью (*a*) и вольт-амперная характеристика использованного в ней нелинейного элемента (*b*)

Fig. 18. Circuit diagram of the generator with delayed feedback (*a*) and the current-voltage characteristic of the nonlinear element used (*b*)

они приводятся к уравнению

$$\dot{x} + x = F(x(t - \tau)),$$

где точка означает производную по безразмерному времени, и штрих в обозначении времени опущен. Это уравнение при разной форме функции  $F$  встречается в различных приложениях. Можно упомянуть уравнение МакКея–Гласса, рассматриваемое в контексте физиологических систем [43], уравнения, предложенные для оптических, электрооптических и акустооптических систем с запаздыванием, а также для химических систем [41, 42, 43, 47–50].

На рис. 19, *a* показана зависимость напряжения на выходе линейного усилителя ОА1 от времени, полученная при моделировании схемы в среде Multisim с помощью виртуального осциллографа. На рис. 19, *b* приводится изображение, скопированное с виртуального осциллографа, подключенного, как показано на схеме рис. 19, *a*, так что горизонтальное отклонение луча отвечает напряжению на входе, а вертикальное – на выходе линии задержки. Это двумерная проекция аттрактора из бесконечномерного фазового пространства системы с запаздыванием. Как можно судить визуально, аттрактор в данном режиме хаотический. На панелях (*c*) и (*d*) показан спектр мощности, полученный с помощью виртуального анализатора спектра в среде Multisim, где в одном случае использован линейный, а во втором – логарифмический масштаб по оси ординат.

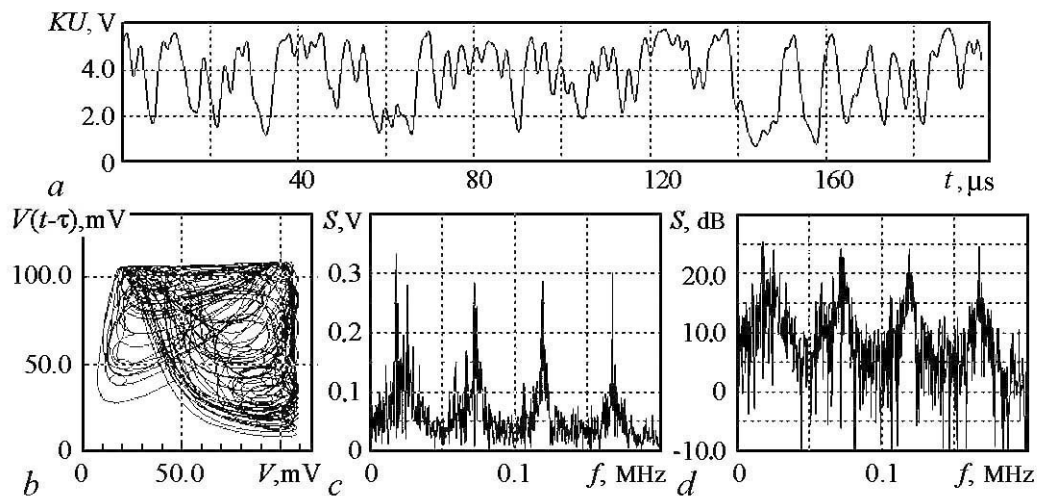


Рис. 19. Осциллограмма напряжения  $KU$  на выходе линейного усилителя ОА1, имеющего коэффициент усиления  $K$  (*a*); фазовый портрет в проекции из бесконечномерного фазового пространства системы с запаздыванием на двумерную плоскость, где по осям координат отложены напряжения на входе и выходе линии задержки (*b*); спектры сигнала, представленные в линейном (*c*) и логарифмическом (*d*) масштабах. Моделирование проведено при номиналах компонентов схемы, указанных на рис. 18, *a*

Fig. 19. Waveform of the voltage  $KU$  at the output of the linear amplifier ОА1 having the transmission coefficient  $K$  (*a*); phase portrait in projection from the infinite-dimensional phase space of the system with delay to a two-dimensional plane of the input and output of the delay line (*b*); spectra in the linear (*c*) and logarithmic scale (*d*). The simulation was carried out at nominal values of the circuit components as shown in Fig. 18, *a*

## Заключение

В статье представлена коллекция схемотехнических решений электронных генераторов хаоса, динамика которых проиллюстрирована единообразно с использованием пакета NI Multisim. Рассмотрены как известные из литературы схемы (генератор Колпитца, генератор Хартли, RC-генератор хаоса, варианты схемы Чуа, конструкции, предложенные литовской группой), так и оригинальные или модифицированные схемы (аналоговый осциллятор Лоренца, генераторы гиперболического хаоса с передачей возбуждения между попеременно возбуждающимися элементами, кольцевой генератор с запаздыванием). Для всех рассмотренных систем динамика иллюстрируется осциллограммами сигналов, фазовыми портретами аттракторов, спектрами колебаний. Среди представленных конструкций следует специально отметить те, где генерируемый хаос робастный, то есть не разрушается при вариации параметров, что существенно для возможных приложений хаоса. Сюда относится электронный аналог модели Лоренца, а также обладающие более сильным свойством структурной устойчивости (грубости) схемы с гиперболическими аттракторами Смейла–Вильямса. Хотя в настоящей статье все схемы иллюстрируются только на уровне низкочастотных устройств, некоторые из них, как представляется, могут быть модифицированы и проработаны для использования в качестве генераторов хаоса также на высоких и сверхвысоких частотах. Собранный здесь материал может представлять интерес для постановки компьютерных практикумов, ориентированных на проведение численного и схемотехнического моделирования сложной нелинейной динамики электронных устройств, и лабораторных работ, нацеленных на их экспериментальное исследование и выработку соответствующих навыков у студентов и аспирантов в области радиофизики и теории колебаний. Также этот материал может быть полезен для исследователей, имеющих дело с конструированием, анализом и практическим использованием электронных систем со сложной динамикой.

*Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 16-02-00135.*

## Библиографический список

1. Электроника ламп с обратной волной / Ред. Шевчик В.Н. и Трубецков Д.И. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1975.
2. Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И. Экспериментальное наблюдение стохастических автоколебаний в динамической системе электронный поток–обратная электромагнитная волна // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29, № 3. С. 180–184.
3. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
4. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. М.: Физматлит, Т. 1, 2003, Т. 2, 2004.
5. Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Максимов Н.А., Панас А.И. Генерация хаоса М.: Техносфера, 2012.
6. Дмитриев А.С., Панас А.И. Динамический хаос. Новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.

7. Мясин Е.А. Исследования генерации СВЧ шума в ИРЭ АН СССР 1962–1967 годов – Начало нового научного направления // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22, № 1. С. 104–122.
8. Lukin K.A. Noise radar technology //Telecommunications and Radio Engineering. 2001. Vol. 55, № 12. Pp. 8–16.
9. Stojanovski T., Kocarev L. Chaos-based random number generators – Part I: Analysis //IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. 2001. Vol. 48, № 3. Pp. 281–288.
10. Stojanovski T., Pihl J., Kocarev L. Chaos-based random number generators – Part II: Practical realization //IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. 2001. Vol. 48, № 3. Pp. 382–385.
11. Baptista M. Cryptography with chaos //Physics Letters A. 1998. Vol. 240, № 1–2. Pp. 50–54.
12. Хернумер М.Е. Multisim. Современная система компьютерного моделирования и анализа схем электронных устройств. М.: Издательский Дом «ДМК-пресс», 2006.
13. Zeraoulia E., Sprott J.C. Robust Chaos and its Applications. Singapore: World Scientific, 2012.
14. Кузнецов С. П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: От математики к физике //Успехи физических наук. 2011. Т. 181, № 2. С. 121–149.
15. Гонченко А.С., Гонченко С.В., Казаков А.О., Козлов А.Д. Математическая теория динамического хаоса и её приложения: Обзор. Часть 1. Псевдогиперболические аттракторы // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 2. С. 4–36.
16. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow //Journal of the Atmospheric Sciences. 1963. Vol. 20, № 2. Pp. 130–141.
17. Sparrow C. The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors. Springer Science & Business Media, 2012.
18. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
19. Shilnikov L. Mathematical problems of nonlinear dynamics: A tutorial //International Journal of Bifurcation and Chaos. 1997. Vol. 7, № 9. Pp. 1953–2001.
20. Kennedy M.P. Chaos in the Colpitts oscillator //IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. 1994. Vol. 41, № 11. Pp. 771–774.
21. Peter K. Chaos in Hartley’s oscillator //International Journal of Bifurcation and Chaos. 2002. Vol. 12, № 10. Pp. 2229–2232.
22. Keuninckx L., Van der Sande G., Danckaert J. Simple two-transistor single-supply resistor–capacitor chaotic oscillator //IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs. 2015. Vol. 62, № 9. Pp. 891–895.
23. Chua L.O., Wu C.W., Huang A., Zhong G.Q. A universal circuit for studying and generating chaos. I. Routes to chaos //IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. 1993. Vol. 40, № 10. Pp. 732–744.

24. *Kennedy M.P.* Robust op amp realization of Chua's circuit // *Frequenz. Journal of RF-Engineering and Telecommunications*. 1992. Vol. 46, № 3–4. Pp. 66–80.
25. *Morgul O.* Wien bridge based RC chaos generator // *Electronics Letters*. 1995. Vol. 31, № 24. Pp. 2058–2059.
26. *Tamaševičius A., Mykolaitis G., Pyragas V., Pyragas K.* A simple chaotic oscillator for educational purposes // *European Journal of Physics*. 2004. Vol. 26, № 1. Pp. 61–63.
27. *Namajunas A., Tamasevicius A.* Simple RC chaotic oscillator // *Electronics Letters*. 1996. Vol. 32, № 11. Pp. 945–946.
28. *Tamaševičius A., Bumelienė S., Kirvaitis R., Mykolaitis G., Tamaševičiūtė E.* Autonomous Duffing–Holmes type chaotic oscillator // *Elektronika ir Elektrotechnika*. 2009. Vol. 93, № 5. Pp. 43–46.
29. *Ораевский А.Н.* Мазеры, лазеры и странные аттракторы // *Квантовая электроника*. 1981. Т. 8, № 1. С. 130–142.
30. *Kolář M., Gumbs G.* Theory for the experimental observation of chaos in a rotating waterwheel // *Physical Review A*. 1992. Vol. 45, № 2. Pp. 626–637.
31. *Глуховский А.Б.* Нелинейные системы, являющиеся суперпозициями гиростатов // *ДАН СССР*. 1982. Т. 266, № 4. С. 816–820.
32. *Doroshin A. V.* Modeling of chaotic motion of gyrostats in resistant environment on the base of dynamical systems with strange attractors // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2011. Vol. 16, № 8. Pp. 3188–3202.
33. *Кузнецов С.П.* Аттрактор типа Лоренца в электронном параметрическом генераторе и его трансформация при нарушении точных условий параметрического резонанса // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2016. Т. 24, № 3. С. 68–87.
34. *Horowitz P.* Build a Lorenz attractor: <http://frank.harvard.edu/~paulh/misc/lorenz.htm>
35. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // *Physical Review Letters*. 2005. Vol. 95, № 14. 144101.
36. *Кузнецов С.П.* Схемы электронных устройств с гиперболическим хаосом и моделирование их динамики в программной среде Multisim // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2011. Т. 19, № 5. С. 98–115.
37. *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2006. Т. 129, № 2. С. 400–412.
38. *Isaeva O.B., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Savin D.V., Seleznev E.P.* Hyperbolic chaos and other phenomena of complex dynamics depending on parameters in a nonautonomous system of two alternately activated oscillators // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2015. Vol. 25, № 12. Pp. 1530033.
39. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Тюрюкина Л.В.* Хаотическая динамика в системах связанных неавтономных осцилляторов с резонансным и нерезонансным механизмом передачи возбуждения // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2007. Т. 15, № 6. С. 75–85.

40. *Круглов В.П., Дорошенко В.М., Кузнецов С.П.* Гиперболический хаос в связанных осцилляторах Бонхоффера–Ван дер Поля, функционирующих с возбуждением релаксационных автоколебаний // *Нелинейные волны–2018. XVIII научная школа. 26 февраля–4 марта 2018. Тезисы докладов молодых ученых.* Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2018. С. 87–89.
41. *Кузнецов С.П.* Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью. // *Известия вузов. Радиофизика.* 1982. Т. 25, № 12. С. 1410–1428.
42. *Vallée R., Delisle C., Chrostowski J.* Noise versus chaos in acousto-optic bistability. *Physical Review A.* 1984. Vol. 30, № 1. Pp. 336–342.
43. *Mackey M.C., Glass L.* Oscillation and chaos in physiological control systems // *Science,* 1977. Vol. 97, №4 300. Pp. 287–289.
44. *Hu H.Y. and Wang Z.H.* Dynamics of Controlled Mechanical Systems with Delayed Feedback. Springer 2002.
45. *Chiasson J.N. and Loiseau J.J.* (eds.): Applications of Time Delay Systems. Springer, 2007.
46. *Кислов В.Я., Залогин Н.Н., Мясин Е.А.* Исследование стохастических автоколебательных процессов в автогенераторах с запаздыванием // *Радиотехника и электроника.* 1979. Т. 24, № 6. С. 1118–1130.
47. *Ikeda K., Daido H., Akimoto O.* Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity // *Physical Review Letters.* 1980. Vol. 45, № 9. Pp. 709–712.
48. *Farmer J.D.* Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 1982. Vol. 4, № 3. Pp. 366–393.
49. *Chrostowski J., Vallee R., Delisle C.* Self-pulsing and chaos in acoustooptic bistability // *Canadian Journal of Physics.* 1983. Vol. 61, № 8. Pp. 1143–1148.
50. *Chevalier T., Freund A., Ross J.* The effects of a nonlinear delayed feedback on a chemical reaction // *The Journal of Chemical Physics.* 1991. Vol. 95, № 1. С. 308–316.

## References

1. Electronics of Backward-Wave Tubes / Eds Shevchik V.N., Trubetskov D.I. Saratov: Saratov University, 1975 (in Russian.)
2. Bezruchko B.P., Kuznetsov S.P., Trubetskov D.I. Experimental observation of stochastic self-oscillations in the electron beam – backscattered electromagnetic wave dynamic system. *JETP Lett,* 1979, vol. 29, no. 3, pp. 162–165.
3. Rabinovich M.I., Trubetskov D.I. Oscillations and waves: in linear and nonlinear systems. Springer Science & Business Media, 2012.
4. Trubetskov D.I., Hramov A.E. Lectures on Microwave Electronics for Physicists. Moscow: Fizmatlit, 2003. (In Russian.)
5. Dmitriev A.S., Efremova E.V., Maksimov N.A., Panas A.I. Generation of chaos. Moscow, Technosfera, 2012. 432 p. (In Russian.)
6. Dmitriev A.S., Panas A.I. Dynamic Chaos: New Information Carriers for Communications Systems. Moscow: Fizmatlit, 2002. (In Russian.)
7. Myasin E.A. Investigations of the hf noise generation in IRE of Academy of



- Sciences of USSR at 1962–1967 years – The beginning of the new science direction. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2014, vol. 22, no. 1, pp. 104–122. (In Russian.)
8. Lukin K.A. Noise radar technology. *Telecommunications and Radio Engineering*, 2001, vol. 55, no. 12, pp. 8–16.
  9. Stojanovski T., Kocarev L. Chaos-based random number generators-part I: analysis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2001, vol. 48, no 3, pp. 281–288.
  10. Stojanovski T., Pihl J., Kocarev L. Chaos-based random number generators. Part II: practical realization. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2001, vol. 48, no. 3, pp. 382–385.
  11. Baptista M.S. Cryptography with chaos. *Physics Letters A*, 1998, vol. 240, no. 1–2, pp. 50–54.
  12. Herniter M.E. Schematic Capture with Multisim. Prentice Hall, 2004.
  13. Zeraouia E., Sprott J. C. Robust chaos and its applications. Singapore: World Scientific, 2012.
  14. Kuznetsov S.P. Dynamical chaos and uniformly hyperbolic attractors: from mathematics to physics. *Physics-Uspeski*, 2011, vol. 54, no. 2, pp. 119–144.
  15. Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Kozlov A.D. Mathematical theory of dynamical chaos and its applications: Review. Part 1. Pseudohyperbolic attractors. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 25, no. 2, pp. 4–36. (In Russian.)
  16. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1963, vol. 20, no. 2, pp. 130–141.
  17. Sparrow C. The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors. Springer Science & Business Media, 2012.
  18. Kuznetsov S.P. Dynamical chaos. M., Fizmatlit, 2001. (In Russian.)
  19. Shilnikov L. Mathematical problems of nonlinear dynamics: a tutorial. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1997, vol. 7, no. 9, pp. 1953–2001.
  20. Kennedy M. P. Chaos in the Colpitts oscillator. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 1994, vol. 41, no. 11, pp. 771–774.
  21. Peter K. Chaos in Hartley's Oscillator. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, vol. 12, no. 10, pp. 2229–2232.
  22. Keuninckx L., Van der Sande G., Danckaert J. Simple Two-Transistor Single-Supply Resistor–Capacitor Chaotic Oscillator. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2015, vol. 62, no. 9, pp. 891–895.
  23. Chua L.O., Wu C.W., Huang A., Zhong G.Q. A universal circuit for studying and generating chaos. I. Routes to chaos. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 1993, vol. 40, no. 10, pp. 732–744.
  24. Kennedy M. P. Robust op amp realization of Chua's circuit. *Frequenz. Journal of RF-Engineering and Telecommunications*, 1992, vol. 46, no. 3–4, pp. 66–80.

25. Morgul O. Wien bridge based RC chaos generator. *Electronics Letters*, 1995, vol. 31, no. 24, pp. 2058–2059.
26. Tamaševičius A., Mykolaitis G., Pyragas V., Pyragas K. A simple chaotic oscillator for educational purposes. *European Journal of Physics*, 2004, vol. 26, no. 1, pp. 61–63.
27. Namajunas A., Tamasevicius A. Simple RC chaotic oscillator. *Electronics Letters*. 1996. Vol. 32, No. 11. Pp. 945–946.
28. Tamaševičius A., Bumelienė S., Kirvaitis R., Mykolaitis G., Tamaševičiūtė E. Autonomous Duffing-Holmes type chaotic oscillator. *Elektronika ir Elektrotechnika*, 2009, vol. 93, no. 5, pp. 43–46.
29. Oraevskii A.N. Masers, lasers, and strange attractors. *Quantum electronics*, 1981, vol. 11, no. 1, pp. 71–78.
30. Kolář M., Gumbs G. Theory for the experimental observation of chaos in a rotating waterwheel. *Physical Review A*, 1992, vol. 45, no. 2, pp. 626–637.
31. Glukhovskii A.B. Nonlinear systems that are superpositions of gyrostats. *Soviet Physics Doklady*, 1982, vol. 27, pp. 823–827.
32. Doroshin A.V. Modeling of chaotic motion of gyrostats in resistant environment on the base of dynamical systems with strange attractors. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011. vol. 16, no. 8, pp. 3188–3202.
33. Kuznetsov S.P. Lorenz type attractor in electronic parametric generator and its transformation outside the accurate parametric resonance. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2016, vol. 24, no. 3, pp. 68–87.
34. Horowitz P. Build a Lorenz attractor: <http://frank.harvard.edu/~paulh/misc/lorenz.htm>
35. Kuznetsov S.P. Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale-Williams type. *Physical Review Letters*, 2005, vol. 95, no. 14, 144101.
36. Kuznetsov S.P. Electronic circuits manifesting hyperbolic chaos and simulation of their dynamics using software package MULTISIM. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2011, vol. 19, no. 5, pp. 98–115.
37. Kuznetsov S.P., Seleznev E.P. A strange attractor of the Smale–Williams type in the chaotic dynamics of a physical system. *JETP*, 2006, vol. 102, no. 2, pp. 355–364.
38. Isaeva O.B., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Savin D.V., Seleznev E.P. Hyperbolic chaos and other phenomena of complex dynamics depending on parameters in a nonautonomous system of two alternately activated oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2015, vol. 25, no. 12, pp. 1530033.
39. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Pikovski A.S., Turukina L.V. Chaotic dynamics in the systems of coupling nonautonomous oscillators with resonance and nonresonance communicator of the signal. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2007, vol. 15, no. 6, pp. 75–85. (In Russian.)
40. Kruglov V.P., Doroshenko V.M., Kuznetsov S.P. Hyperbolic chaos in the coupled Bonhoeffer – van der Pol oscillators operating with excitation of relaxation self-oscillations. Nonlinear waves – 2018. XVIII Scientific School. February 26 – March 4, 2018. Abstracts of reports of young scientists. Nizhny Novgorod: IAP RAS, 2018. P. 87–89.

41. Kuznetsov S. P. Complex dynamics of oscillators with delayed feedback. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 1982, vol. 25, no. 12, pp. 996–1009.
42. Vallée R., Delisle C., Chrostowski J. Noise versus chaos in acousto-optic bistability. *Physical Review A*, 1984, vol. 30, no. 1, pp. 336–342.
43. Mackey M.C., Glass L. Oscillation and chaos in physiological control systems. *Science*, 1977, vol. 197, no. 4300, pp. 287–289.
44. Hu, H.Y. and Wang, Z.H.: Dynamics of Controlled Mechanical Systems with Delayed Feedback. Springer, 2002.
45. Chiasson J.N. and Loiseau J.J. (eds.): Applications of Time Delay Systems. Springer, 2007.
46. Kislov V.Ya., Zalogin N.N., Myasin E.A. Study of stochastic self-oscillating processes in self-excited oscillators with delay. *Radiotekhnika i elektronika*, 1979, vol. 24, no. 6, pp. 1118–1130. (In Russian.)
47. Ikeda K., Daido H., Akimoto O. Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity. *Physical Review Letters*, 1980, vol. 45, no. 9, pp. 709–712.
48. Farmer J.D. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1982, vol. 4, no. 3, pp. 366–393.
49. Chrostowski J., Vallée R., Delisle C. Self-pulsing and chaos in acousto-optic bistability. *Canadian Journal of Physics*, 1983, vol. 61, no. 8, pp. 1143–1148.
50. Chevalier T., Freund A., Ross J. The effects of a nonlinear delayed feedback on a chemical reaction. *The Journal of Chemical Physics*, 1991, vol. 95, no. 1, p. 308–316.

Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН (с 1988), где в настоящее время руководит лабораторией теоретической нелинейной динамики. Главный научный сотрудник лаборатории нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения Удмуртского государственного университета. Профессор базовой кафедры факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Автор монографий «Strange Nonchaotic Attractors» (совместно с А. Пиковским и У. Фойдель), «Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике» и «Hyperbolic Chaos: a Physicist's View». Автор учебно-научных монографий «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 200 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П. Кузнецова защищены двенадцать кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996). Член редакционной коллегии журналов «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», «Regular and Chaotic Dynamics», «Нелинейная динамика», «Известия Саратовского университета – Новая серия. Серия Физика».



410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
 Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН  
 E-mail: spkuz@yandex.ru