



ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 517.9

MSC 2010: 37D20, 37D45, 34C15, 34D08

Генератор хаоса с аттрактором Смейла–Вильямса на основе эффекта гибели колебаний

В. М. Дорошенко, В. П. Круглов, С. П. Кузнецов

Предложена неавтономная система с однородно гиперболическим аттрактором типа Смейла–Вильямса в сечении Пуанкаре, в которой генерация осуществляется на основе эффекта гибели колебаний. Представлены результаты численного исследования системы: итерационные диаграммы для фаз и портреты аттрактора в стробоскопическом сечении Пуанкаре, спектры плотности мощности, показатели Ляпунова и их зависимости от параметров, карта режимов. Выполнена проверка гиперболичности аттрактора, основанная на критерии углов.

Ключевые слова: однородно гиперболический аттрактор, соленоид Смейла–Вильямса, отображение Бернулли, гибель колебаний, показатели Ляпунова

Получено 21 июля 2017 года

После доработки 31 августа 2017 года

Работа В. М. Дорошенко и В. П. Круглова поддержана грантом РФФИ № 16-32-00449. Работа С. П. Кузнецова поддержана грантом РНФ № 17-12-01008.

Дорошенко Валентина Михайловна

Dorvalentina9@gmail.com

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Круглов Вячеслав Павлович

kruglovyacheslav@gmail.com

Кузнецов Сергей Петрович

spkuz@yandex.ru

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

1. Введение

К классу однородно гиперболических относятся аттракторы, состоящие только из седловых траекторий. Седловыми называются траектории, в касательном пространстве которых можно выделить два инвариантных подпространства. Одно из подпространств состоит из векторов, нормы которых экспоненциально уменьшаются при эволюции в прямом времени; второе подпространство состоит из векторов, нормы которых экспоненциально уменьшаются при эволюции в обратном времени. Темпы уменьшения норм векторов этих подпространств ограничены и дистанцированы от нуля. В потоковых системах в касательном пространстве траекторий, не являющихся положением равновесия, выделяется также нейтральное подпространство, соответствующее возмущениям вдоль траектории, норма векторов которых в среднем не убывает и не возрастает. В силу инвариантности указанных подпространств, произвольный вектор возмущения седловой траектории представляет собой линейную комбинацию векторов, принадлежащих этим подпространствам. Множества точек, асимптотически приближающихся к седловой траектории в прямом времени и в обратном времени, соответственно называются ее устойчивым многообразием и неустойчивым многообразием, причем эти многообразия могут пересекаться лишь трансверсально [1–7].

Однородно гиперболические аттракторы обладают рядом замечательных свойств, в силу их структуры [1–7]. Самое наглядное из них называется существованием меры Синая – Рюэля – Боуэна и проявляется в гладкой деформации фазового пространства на однородно гиперболическом аттракторе, без образования локальных разрывов и уплотнений. Другое важное свойство заключается в том, что однородно гиперболические аттракторы, в отличие от большинства других, являются грубыми (или структурно устойчивыми), то есть структура аттрактора и характер динамики не чувствительны к малым изменениям параметров и функций, входящих в описывающие динамику уравнения. Еще одно качество однородно гиперболических аттракторов состоит в возможности построения символической динамики, соответствующей динамике на аттракторе. Благодаря структуре однородно гиперболического аттрактора можно установить взаимно однозначное соответствие между произвольной траекторией аттрактора и бесконечной последовательностью из конечного набора символов. Два последних свойства полезны с точки зрения практического применения однородно гиперболических аттракторов.

В течение долгого времени были известны лишь геометрические модели однородно гиперболических аттракторов [1–7]: соленоид Смейла – Вильямса, аттрактор Плыкина, DA-аттрактор (“derived from Anosov”). Соленоид Смейла – Вильямса представляет собой результат бесконечного числа отображений внутрь себя тороидальной области в пространстве размерности не меньшей трех, при которых происходит растяжение тороида в целое число раз вдоль, сильное поперечное сжатие, перекручивание и вложение внутрь исходной области.

Лишь недавно появились примеры физически реализуемых систем с однородно гиперболическими аттракторами [8–12]. Во многих предложенных моделях потоковых систем в сечении Пуанкаре присутствует аттрактор типа Смейла – Вильямса. Принцип функционирования этих систем основан на манипуляции переменными, величина которых определена с точностью до постоянного слагаемого и которым можно приписать смысл угловой переменной; примером может служить фаза колебаний. При этом преобразование угловой переменной при действии отображения Пуанкаре состоит в растяжении в целое число раз (такое преобразование называют растягивающим отображением окружности или отображением Бернулли) при сильном сжатии фазового пространства по остальным направлениям.

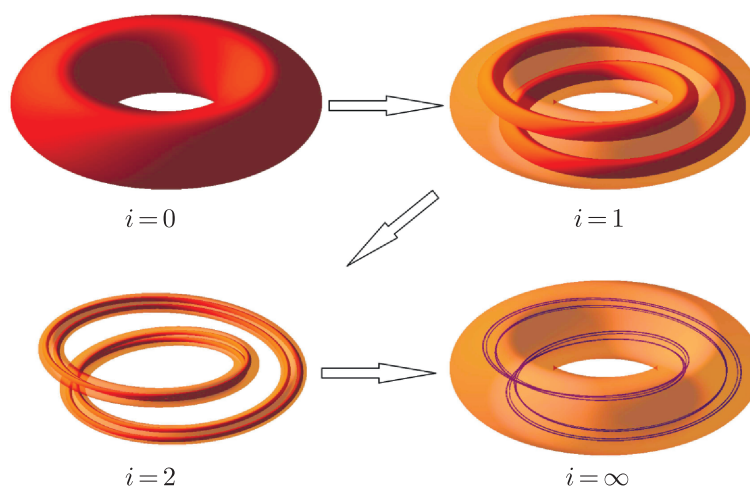


Рис. 1. Пример построения соленоида Смейла – Вильямса.

Требуемое преобразование фазы в уже известных примерах физически осуществляется разными способами. Системы с аттракторами типа Смейла – Вильямса могут иметь различную физическую природу (механическую, химическую, радиофизическую) и представлять собой связанные осцилляторы, между которыми возмущение передается резонансным и нерезонансным образом [13], кольцевые цепочки осцилляторов, вдоль которых передается возмущение [14], системы параметрических осцилляторов, в которых роль угловой переменной может выполнять соотношение амплитуд осцилляторов [15], распределенные системы, в которых особым образом взаимодействуют пространственные гармоники волновых паттернов [16], системы на основе взаимодействующих ансамблей фазовых осцилляторов с глобальной связью, в которых угловой переменной является аргумент параметра порядка [17].

В работе предложена новая модель системы с соленоидом Смейла – Вильямса, принцип работы которой основан на эффекте гибели колебаний. Гибель колебаний может произойти в автоколебательной системе из-за включения диссипативной связи ее с другим осциллятором, имеющим отличную частоту [18–21]. Диссипативная связь между осцилляторами обеспечивается членами, содержащими первые производные по времени от обобщенных координат, и способствует выравниванию мгновенных состояний взаимодействующих через ее посредство подсистем. Наиболее часто в литературе встречается следующий механизм гибели колебаний: автоколебательная система находится вблизи бифуркации Андронова – Хопфа и при включении связи с другим осциллятором происходит стабилизация положения равновесия [18].

В статье впервые продемонстрирована возможность использования эффекта гибели колебаний для построения системы с гиперболическим аттрактором. В разделе 2 дано описание модели, в разделе 3 — результаты численного моделирования.

2. Описание системы

Система состоит из автоколебательного элемента — осциллятора ван дер Поля и осциллятора с диссипацией. Собственная частота ω_2 диссипативного осциллятора в два раза больше частоты ω_1 осциллятора ван дер Поля. Колебательные подсистемы обмениваются

сигналами x и y через квадратичный нелинейный элемент. Также на осциллятор ван дер Поля действует разность производных сигналов с периодически модулируемым коэффициентом $KH\left(\sin\frac{2\pi t}{T}\right)(\dot{y} - \dot{x})$, где $H(\xi)$ — ступенчатая функция Хевисайда:

$$H(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi < 0, \\ 1, & \text{если } \xi \geq 0. \end{cases}$$

На рисунке 2 изображена блок-схема генератора.

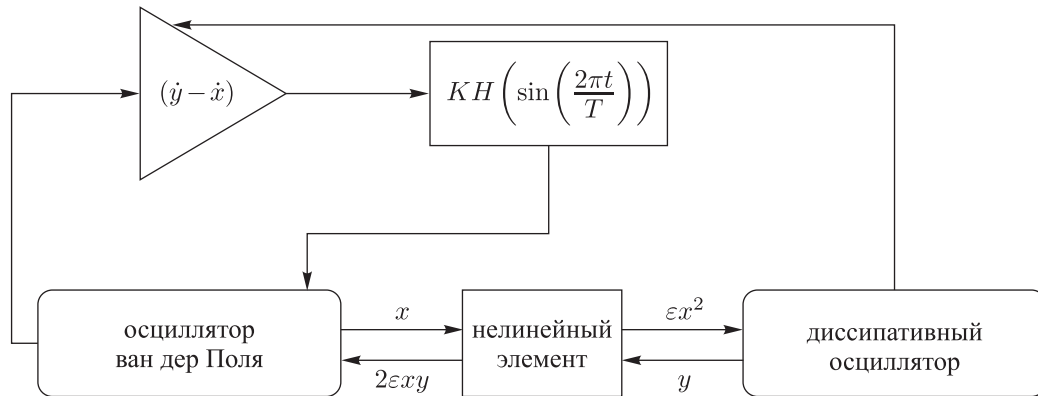


Рис. 2. Блок-схема генератора

Модельные уравнения системы получены без рассмотрения конкретной физической природы осцилляторов и записаны в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\mu - x^2)\dot{x} + \omega_1^2 x + 2\varepsilon xy &= KH\left(\sin\frac{2\pi t}{T}\right)(\dot{y} - \dot{x}), \\ \ddot{y} + \alpha\dot{y} + \omega_2^2 y + \varepsilon x^2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где ω_1 — частота осциллятора ван дер Поля, $\omega_2 = 2\omega_1$ — частота диссипативного осциллятора, μ — управляющий параметр осциллятора ван дер Поля, α — коэффициент затухания осциллятора, ε — коэффициент связи через нелинейный элемент, K — коэффициент, T — период модуляции.

Рассмотрим работу генератора. Пусть в начальный момент времени коэффициент перед разностью производных $KH(\sin(2\pi t/T)) = 0$ и осциллятор ван дер Поля осуществляет автоколебания с частотой ω_1 и фазой φ . Сигнал, генерируемый осциллятором ван дер Поля, будем считать близким к синусоидальному: $x \sim \sin(\omega_1 t + \varphi)$. На диссипативный осциллятор действует сигнал $\varepsilon x^2 \sim \sin^2(\omega_1 t + \varphi) = 1/2 - \cos(2\omega_1 t + 2\varphi)/2$ и возбуждает в нем колебания с удвоенной фазой и частотой $y \sim \sin(2\omega_1 t + 2\varphi)$. В момент времени, когда коэффициент перед разностью производных $KH(\sin(2\pi t/T))$ становится ненулевым, колебания осциллятора ван дер Поля быстро прекращаются, тогда как колебания второго осциллятора лишь медленно затухают. Когда $KH(\sin(2\pi t/T))$ становится нулевым снова, автоколебания в осцилляторе ван дер Поля возбуждаются и синхронизируются с составляющей с удвоенной фазой 2φ и частотой ω_1 сигнала $2\varepsilon xy \sim 2\sin(\omega_1 t)\sin(2\omega_1 t + 2\varphi) = \cos(\omega_1 t + 2\varphi) - \cos(3\omega_1 t + 2\varphi)$. Фаза возникающих автоколебаний равна удвоенной фазе предыдущей автоколебательной

стадии 2φ . Таким образом, фазы колебаний осцилляторов за период модуляции преобразуются в соответствии с отображением Бернулли: $\varphi_{n+1} = 2\varphi_n + \text{const} \pmod{2\pi}$ (константа устраняется сдвигом начала отсчета фазы и не играет существенной роли). При сильном сжатии фазового пространства по остальным переменным в системе возникает аттрактор типа Смейла–Вильямса.

Введя дополнительные переменные u и v , можно перейти от уравнения (2.1) к системе уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u, \\ \dot{u} &= (\mu - x^2)u - \omega_1^2 x - 2\varepsilon xy + KH \left(\sin \frac{2\pi t}{T} \right) (v - u), \\ \dot{y} &= v, \\ \dot{v} &= -\alpha v - \omega_2^2 y - \varepsilon x^2.\end{aligned}\tag{2.2}$$

3. Результаты численного моделирования

Система дифференциальных уравнений первого порядка (2.2) решалась численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом 0.001. На рисунке 3 представлены временные реализации динамических переменных x и y в установившемся режиме (при значении параметров $\varepsilon = 0.5$, $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, $T = 20$, $\alpha = 0.4$, $K = 5$, $\mu = 1.5$) и график зависимости от времени функции, описывающей модуляцию параметра. На временных реализациях наблюдаются периодические возбуждение и гибель колебаний в осцилляторе ван дер Поля и периодические постепенные возмущения и затухания колебаний в диссипативном осцилляторе. Этот процесс сопровождается нерегулярным изменением фазового сдвига на последовательных периодах модуляции.

Для иллюстрации передачи возбуждения между осцилляторами были получены спектры плотности мощности сигналов x и y . Было выполнено численно преобразование Фу-

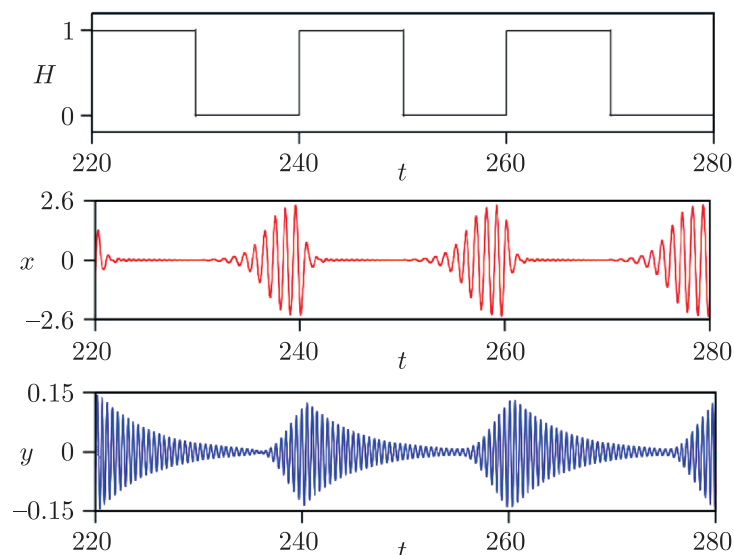


Рис. 3. Временные зависимости динамических переменных x и y и функции $H(\sin(2\pi t/T))$ при фиксированных значениях параметров $\varepsilon = 0.5$, $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, $T = 20$, $\alpha = 0.4$, $K = 5$, $\mu = 1.5$.

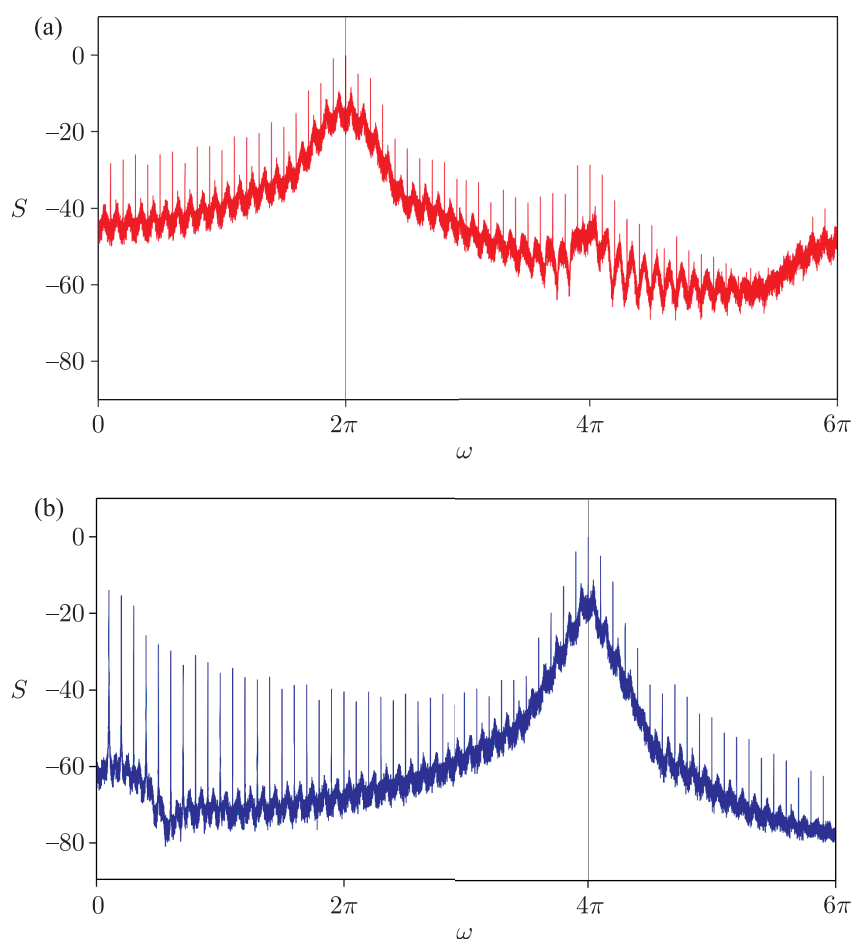


Рис. 4. Спектры плотности мощности сигналов x (а) и y (б) в логарифмическом масштабе в децибелах при фиксированных значениях параметров $\varepsilon = 0.5$, $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, $T = 20$, $\alpha = 0.4$, $K = 5$, $\mu = 1.5$.

рые достаточно длинных реализаций (2^{17} точек) переменных x и y , полученных с шагом 0.001 и прореженных в 100 раз, чтобы точнее отобразить составляющие спектра с частотами, близкими к собственным частотам осцилляторов. Спектры представлены на рисунке 4. Максимум плотности мощности осциллятора ван дер Поля (а) приходится на частоту ω_1 , а диссипативного осциллятора (б) — на ω_2 ; эти частоты отмечены на графиках вертикальными линиями.

Поскольку фаза колебаний изменяется между периодами модуляции параметра, целесообразно перейти к исследованию динамики с помощью стробоскопического сечения Пуанкаре. Стробоскопическое отображение было получено сечением потока траекторий системы (2.2) плоскостями $t_n = nT$. На рисунке 5 представлены портреты аттрактора стробоскопического отображения в проекции на плоскости переменных обоих осцилляторов и итерационные диаграммы для фаз, полученные по формулам $\varphi = \arg(x + iu)$ и $\psi = \arg(y + iv)$. Портреты аттрактора визуально похожи на соленоид Смейла–Вильямса. Трансформация фаз колебаний приближенно описывается растягивающим отображением окружности: при изменении значения фазы на предыдущем периоде модуляции от 0 до 2π ее образ на текущем периоде пробегает интервал от 0 до 4π .

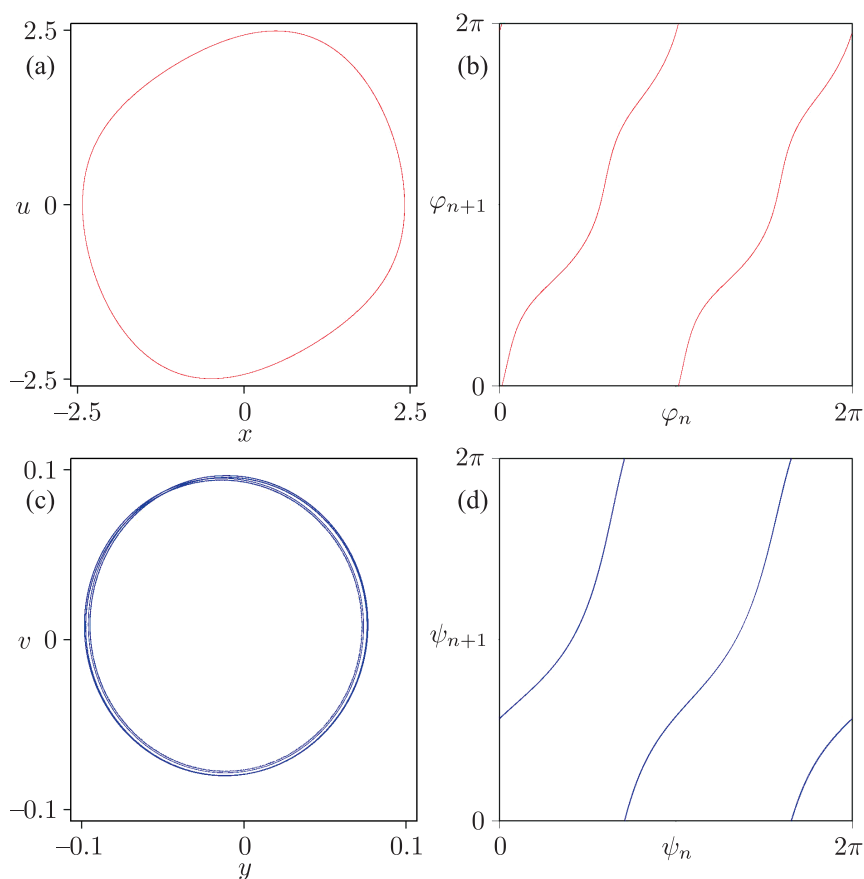


Рис. 5. Портреты аттрактора стробоскопического отображения в проекциях на плоскости (а) переменных осциллятора ван дер Поля (x, u) , (с) диссипативного осциллятора (y, v) и (b, d) итерационные диаграммы фаз осцилляторов. Портреты и диаграммы фаз получены при значениях параметров $\varepsilon = 0.5$, $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, $T = 20$, $\alpha = 0.4$, $K = 5$, $\mu = 1.5$.

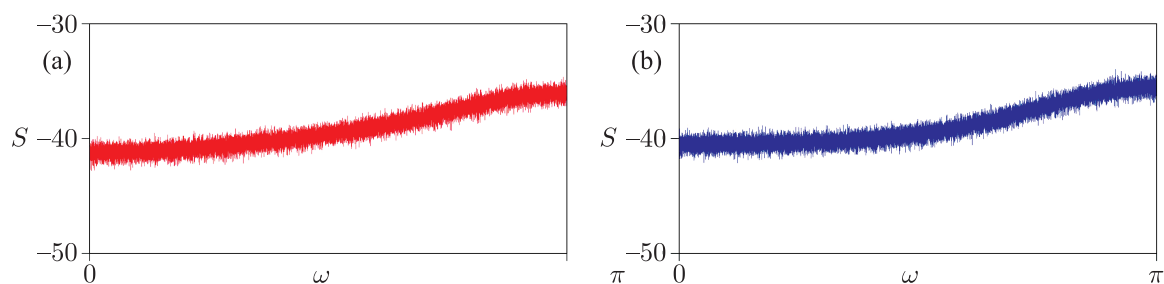


Рис. 6. Спектры плотности мощности сигналов x_n (а) и y_n (b) стробоскопического отображения в логарифмическом масштабе в децибелах при фиксированных значениях параметров $\varepsilon = 0.5$, $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, $T = 20$, $\alpha = 0.4$, $K = 5$, $\mu = 1.5$.

Было выполнено численно преобразование Фурье реализаций переменных x_n и y_n длиной 2^{16} итераций стробоскопического отображения системы (2.2). На рисунке 6 изображены спектры плотности мощности переменных стробоскопического отображения Пуанкаре. Спектры сплошные, что подтверждает хаотичность генерируемых системой сигналов.

Были вычислены показатели Ляпунова стробоскопического отображения системы (2.2) по алгоритму Бенеттина [22, 23]. В соответствии с ним одновременно решались численно уравнения (2.2) вдоль произвольной фазовой траектории с шагом 0.001 и четыре набора уравнений в вариациях, соответствующие четырем векторам возмущений опорной траектории:

$$\begin{aligned}\delta\dot{x} &= \delta u, \\ \delta\dot{u} &= \left(-2xu - \omega_1^2 - 2\varepsilon y\right)\delta x + \left[\mu - x^2 - KH\left(\sin \frac{2\pi t}{T}\right)\right]\delta u - 2\varepsilon x\delta y + KH\left(\sin \frac{2\pi t}{T}\right)\delta v, \\ \delta\dot{y} &= \delta v, \\ \delta\dot{v} &= -2\varepsilon x\delta x - \omega_2^2\delta y - \alpha\delta v.\end{aligned}\quad (3.1)$$

На каждом шаге векторы возмущений подвергались процедуре ортогонализации Грама–Шмидта. После достаточно длинного переходного процесса накапливались суммы логарифмов норм векторов возмущений. Показатели Ляпунова отображения получались как отношения этих сумм к числу полных периодов модуляции (числу итераций стробоскопического отображения). При $\varepsilon = 0.5$, $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, $T = 20$, $\alpha = 0.4$, $K = 5$, $\mu = 1.5$ показатели Ляпунова отображения составили

$$\Lambda_1 = 0.626 \pm 0.009, \quad \Lambda_2 = -1.266 \pm 0.004, \quad \Lambda_3 = -17.75 \pm 0.02, \quad \Lambda_4 = -19.93 \pm 0.03.$$

Старший показатель положительный и близок по величине к $\ln 2$, показателю Ляпунова отображения Бернулли, приближенно описывающего преобразование фазы в системе. Остальные показатели отрицательные. Таким образом, элемент объема в фазовом пространстве стробоскопического отображения Пуанкаре за одну итерацию испытывает растяжение по одному направлению и сжатие по остальным трем. Это соответствует построению гиперболического аттрактора типа Смейла–Вильямса (если учесть, что растяжение происходит по угловой переменной) в четырехмерном фазовом пространстве.

На рисунке 7 представлена зависимость показателей Ляпунова стробоскопического отображения системы (2.2) от параметра K . Старший показатель на большом интервале значений параметра K остается близким к $\ln 2$, резкие провалы в отрицательную область не наблюдаются. Это объясняется структурной устойчивостью аттрактора.

На рисунке 8 изображена карта режимов стробоскопического отображения системы (2.2) на плоскости параметров $(\omega_1/2\pi, K)$ (при построении карты частоты ω_1 и ω_2 не были связаны соотношением) при фиксированных значениях параметров $\omega_2 = 4\pi$, $\varepsilon = 0.5$, $T = 20$, $\alpha = 0.4$, $\mu = 1.5$. Гиперболический хаос диагностировался по отклонению старшего показателя Ляпунова для стробоскопического отображения Пуанкаре не более чем на 10% от $\ln 2$. Другие режимы определялись следующим образом. Если при некотором значении параметров в установившемся режиме точка отображалась в малую окрестность самой себя за конечное число итераций m , то аттрактором системы является цикл периода m . Если точка не отображалась в свою малую окрестность за «разумное» число итераций, то режим нерегулярный (квазипериодический и хаотический режимы можно разделить по значению старшего показателя Ляпунова). Как видно из рисунка 8, гиперболический хаос наблюдается в широком диапазоне параметров. В системе также реализуются другие режимы: квазипериодические, периодические («языки Арнольда»), хаотические негиперболические («слабый хаос») и отсутствие колебаний.

Была выполнена численная проверка гиперболичности, основанная на свойстве трансверсальности многообразий гиперболического аттрактора [24–27]. Процедура заключает-

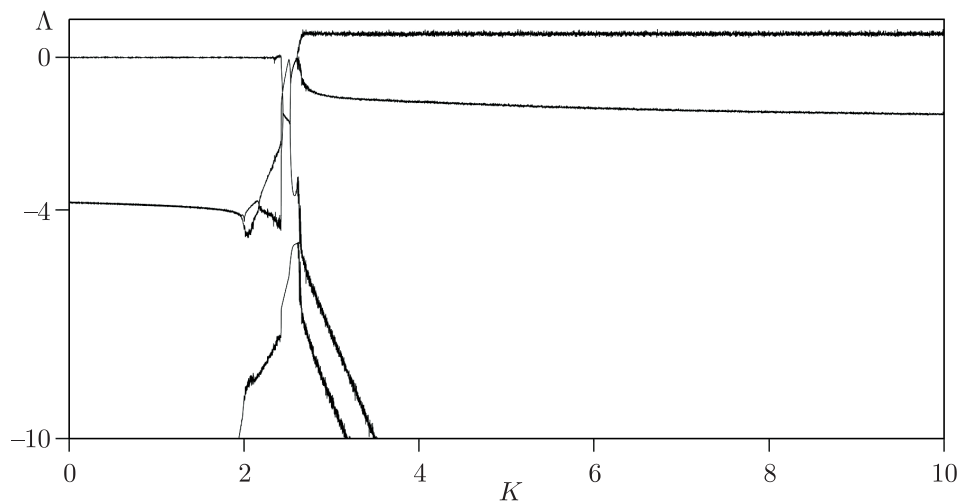


Рис. 7. Зависимость показателей Ляпунова стробоскопического отображения системы (2.2) от параметра K при фиксированных значениях параметров $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, $\varepsilon = 0.5$, $T = 20$, $\alpha = 0.4$, $\mu = 1.5$.

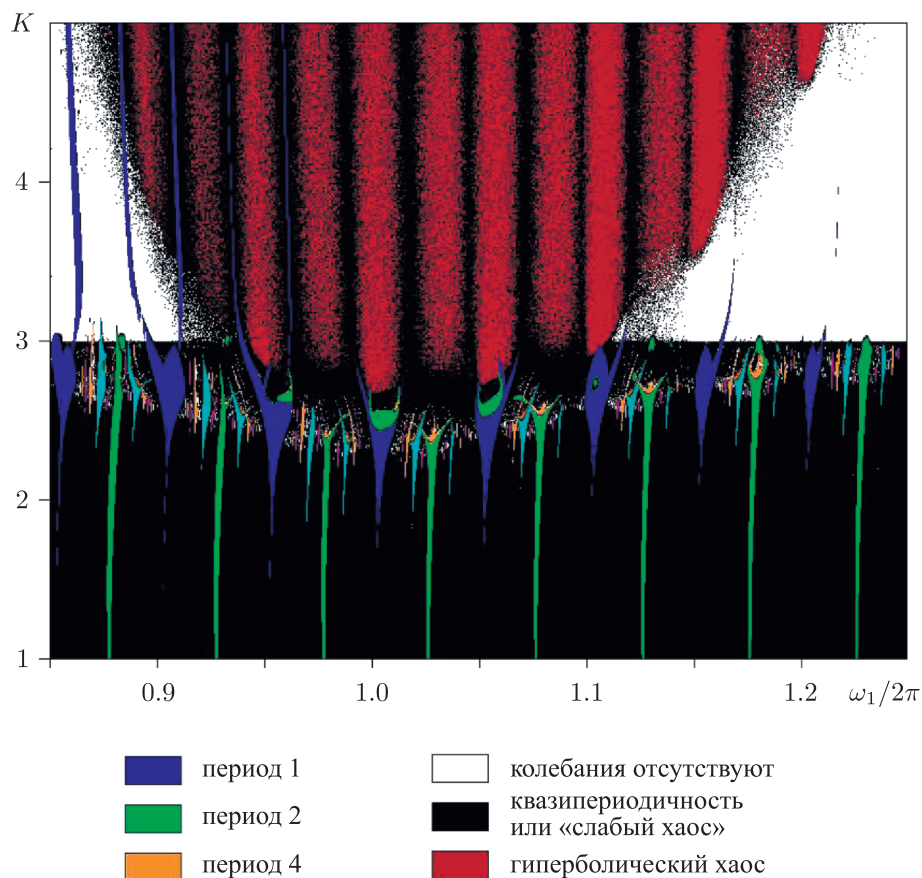


Рис. 8. Карта режимов стробоскопического отображения системы (2.2) на плоскости параметров $(\omega_1/2\pi, K)$ при фиксированных значениях параметров $\omega_2 = 4\pi$, $\varepsilon = 0.5$, $T = 20$, $\alpha = 0.4$, $\mu = 1.5$.

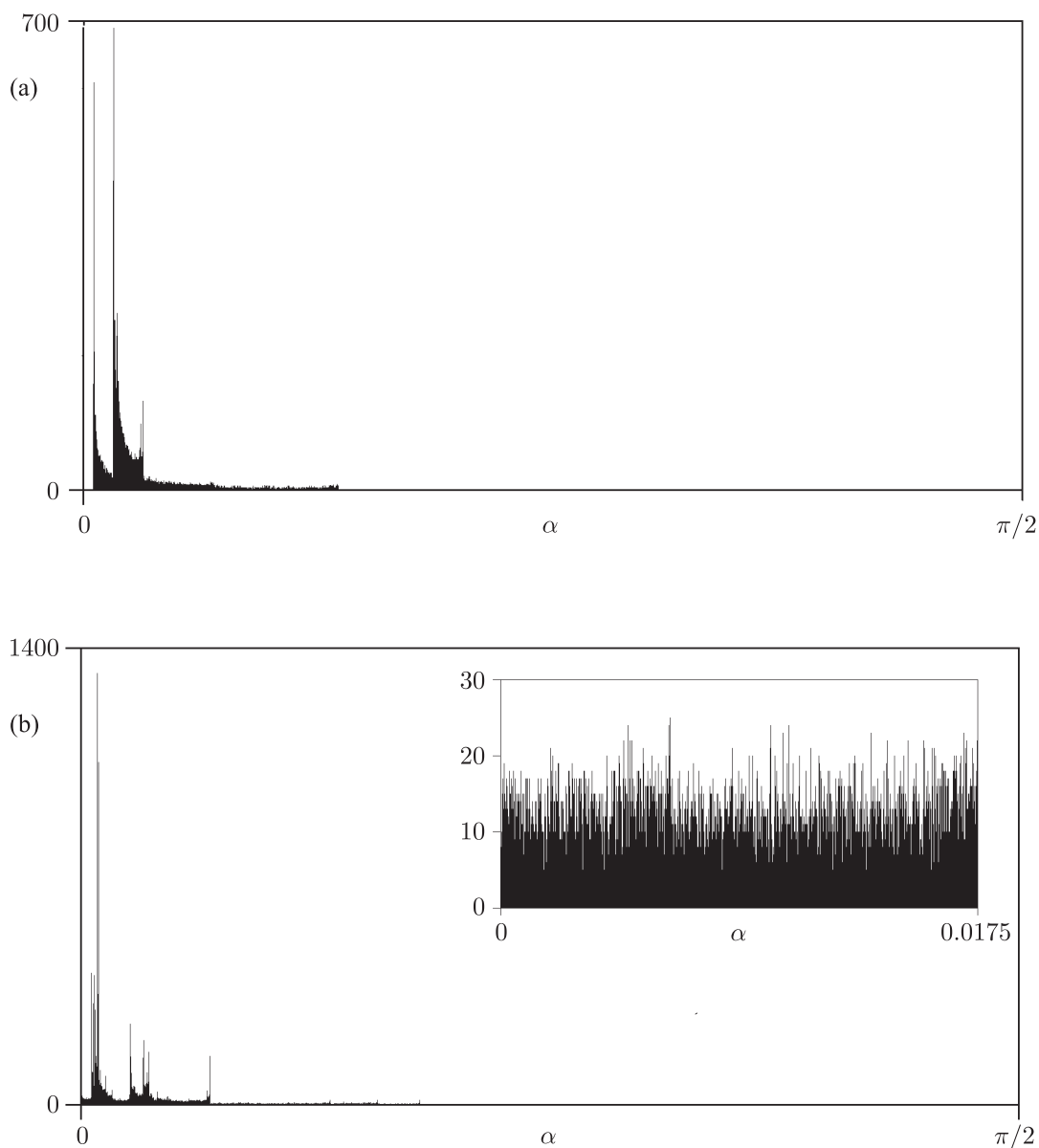


Рис. 9. Гистограммы распределений углов между многообразиями аттрактора стробоскопического отображения системы (2.2) при $\mu = 1.5$ (a) и при $\mu = 4.3$ (b); остальные значения параметров фиксированы: $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, $\varepsilon = 0.5$, $T = 20$, $\alpha = 0.4$, $K = 5$.

ся в построении гистограмм распределений углов между многообразиями. Кратко опишем алгоритм в форме, применимой к аттрактору стробоскопического отображения системы (2.2) [26]. На первом этапе проверки необходимо численно решить уравнения системы (2.2) совместно с уравнениями в вариациях (3.1), нормируя вектор возмущения на каждом шаге, пока не установится режим, соответствующий хаотическому аттрактору, а вектор возмущения будет принадлежать неустойчивому подпространству. На втором этапе вычисления продолжают, на каждой итерации отображения Пуанкаре сохраняются в файл значения динамических переменных $\{x_n, u_n, y_n, v_n\}$ и компонент вектора воз-

мущения $\{\delta x_n, \delta u_n, \delta y_n, \delta v_n\}$. Этот участок траектории должен быть достаточно длинным. На третьем этапе решаются уравнения и записываются в файл значения динамических переменных $\{x_n, u_n, y_n, v_n\}$ на каждой итерации отображения Пуанкаре. На четвертом этапе необходимо начать двигаться вдоль записанной в файл опорной траектории в обратном времени и численно решать сопряженные уравнения в вариациях

$$\begin{aligned}\dot{\delta \tilde{x}} &= (2xu + \omega_1^2 + 2\epsilon y)\delta \tilde{u} + 2\epsilon x\delta \tilde{v}, \\ \dot{\delta \tilde{u}} &= -\delta \tilde{x} - \left[\mu - x^2 - KH \left(\sin \frac{2\pi t}{T} \right) \right] \delta \tilde{u}, \\ \dot{\delta \tilde{y}} &= 2\epsilon x\delta \tilde{u} + \omega_2^2\delta \tilde{v}, \\ \dot{\delta \tilde{v}} &= -KH \left(\sin \frac{2\pi t}{T} \right) \delta \tilde{u} - \delta \tilde{y} + \alpha\delta \tilde{v},\end{aligned}\tag{3.2}$$

полученные транспонированием матрицы Якоби системы (3.1), все элементы которой взяты с обратным знаком. Когда процедура доходит до участка траектории, где записывался вектор возмущения в прямом времени (второй этап), необходимо начать записывать вектор возмущения сопряженной системы на каждой итерации отображения Пуанкаре. В результате для точек на длинном отрезке траектории будет получен набор векторов $\{\delta x_n, \delta u_n, \delta y_n, \delta v_n\}$, касательных к неустойчивому многообразию, и набор векторов $\{\delta \tilde{x}_n, \delta \tilde{u}_n, \delta \tilde{y}_n, \delta \tilde{v}_n\}$, ортогональных к устойчивому многообразию. В каждой точке можно найти угол $\beta = [0, \pi/2]$ между векторами $\{\delta x_n, \delta u_n, \delta y_n, \delta v_n\}$ и $\{\delta \tilde{x}_n, \delta \tilde{u}_n, \delta \tilde{y}_n, \delta \tilde{v}_n\}$ по теореме косинусов. Соответственно, угол между устойчивым и неустойчивым подпространствами в этой точке равен $\alpha = \pi/2 - \beta$. Хотя описанный тест не может претендовать на строгое обоснование гиперболичности аттрактора, он позволяет на практике выявлять гиперболические и негиперболические аттракторы.

На рисунке 9 представлены гистограммы распределений углов между многообразиями аттрактора стробоскопического отображения системы (2.2) в двух режимах. Гистограмма (а) соответствует режиму с гиперболическим аттрактором ($\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, $\epsilon = 0.5$, $T = 20$, $\alpha = 0.4$, $K = 5$, $\mu = 1.5$), поскольку нулевые значения углов отсутствуют, а минимальное значение угла дистанцировано от нуля. Гистограмма (b) соответствует негиперболическому хаотическому аттрактору.

4. Заключение

В работе впервые представлена неавтономная система на основе взаимодействующих осциллятора ван дер Поля и диссипативного осциллятора, в которой генерация гиперболического хаоса реализуется на основе эффекта гибели колебаний. Проведено численное исследование системы. Получены итерационные диаграммы и портреты аттрактора в стробоскопическом сечении Пуанкаре, построены спектры генерируемых системой сигналов, вычислены показатели Ляпунова и их зависимости от параметров, построена карта режимов. Проведена проверка гиперболичности при помощи построения гистограмм распределений углов между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями траекторий аттрактора в стробоскопическом сечении Пуанкаре. Все проведенные исследования подтверждают наличие в данной системе аттрактора типа Смейла – Вильямса.

Представляется возможным построение других моделей систем с гиперболическим хаосом на основе эффекта гибели колебаний, в том числе распределенных.

Список литературы

- [1] Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // УМН, 1970, т. 25, № 1, с. 113–185.
- [2] Williams R. Expanding attractors // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 1974, No. 43, pp. 169–203.
- [3] Shilnikov L. Mathematical problems of nonlinear dynamics: A tutorial // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 1997, vol. 7, no. 9, pp. 1953–2001.
- [4] Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. Москва: Факториал, 1999. 768 с.
- [5] Аносов Д. В., Арансон С. Х., Гринес В. З., Плыкин Р. В., Сатаев Е. А., Сафонов А. В., Солодов В. В., Старков А. Н., Степин А. М., Шлячков С. В. Динамические системы с гиперболическим поведением // Динамические системы — 9 / Д. В. Аносов (ред.). (Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, т. 66.) Москва: ВИНТИ, 1991. С. 5–242.
- [6] Afraimovich V., Hsu S.-B. Lectures on chaotic dynamical systems. (AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 28.) Providence, R.I.: AMS, 2003. 353 pp.
- [7] Кузнецов С. П. Динамический хаос и гиперболические аттракторы: от математики к физике. Москва – Ижевск: ИКИ, 2013. 488 с.
- [8] Kuznetsov S. P. Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // Phys. Rev. Lett., 2005, vol. 95, no. 14, 144101, 4 pp.
- [9] Кузнецов С. П., Селезнев Е. П. Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // ЖЭТФ, 2006, т. 129, № 2, с. 400–412.
- [10] Isaeva O. B., Jalnina A. Yu., Kuznetsov S. P. Arnold’s cat map dynamics in a system of coupled nonautonomous van der Pol oscillators // Phys. Rev. E, 2006, vol. 74, no. 4, 046207, 5 pp.
- [11] Kuznetsov S. P., Pikovsky A. Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // Phys. D, 2007, vol. 232, no. 2, pp. 87–102.
- [12] Kuznetsov S. P. Example of blue sky catastrophe accompanied by a birth of Smale–Williams attractor // Regul. Chaotic Dyn., 2010, vol. 15, nos. 2–3, pp. 348–353.
- [13] Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Пиковский А. С., Тюрюкина Л. В. Хаотическая динамика в системах связанных неавтономных осцилляторов с резонансным и нерезонансным механизмом передачи возбуждения // Изв. вузов. ПНД, 2007, т. 15, № 6, с. 75–85.
- [14] Kruglov V. P., Kuznetsov S. P. An autonomous system with attractor of Smale–Williams type with resonance transfer of excitation in a ring array of van der Pol oscillators // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2011, vol. 16, no. 8, pp. 3219–3223.
- [15] Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Сатаев И. Р. Параметрический генератор гиперболического хаоса на основе двух связанных осцилляторов с нелинейной диссипацией // ЖТФ, 2010, т. 80, № 12, с. 1–9.
- [16] Kuptsov P. V., Kuznetsov S. P., Pikovsky A. Hyperbolic chaos of Turing patterns // Phys. Rev. Lett., 2012, vol. 108, no. 19, 194101, 4 pp.
- [17] Kuznetsov S. P., Pikovsky A., Rosenblum M. Collective phase chaos in the dynamics of interacting oscillator ensembles // Chaos, 2010, vol. 20, no. 4, 043134, 8 pp.
- [18] Aronson D. G., Ermentrout G. B., Kopell N. Amplitude response of coupled oscillators // Phys. D, 1990, vol. 41, no. 3, pp. 403–449.
- [19] Ermentrout G. B., Kopell N. Oscillator death in systems of coupled neural oscillators // SIAM J. Appl. Math., 1990, vol. 50, no. 1, pp. 125–146.
- [20] Matthews P. C., Strogatz S. H. Phase diagram for the collective behavior of limit-cycle oscillators // Phys. Rev. Lett., 1990, vol. 65, no. 14, pp. 1701–1704.
- [21] Matthews P. C., Mirollo R. E., Strogatz S. H. Dynamics of a large system of coupled nonlinear oscillators // Phys. D, 1991, vol. 52, nos. 2–3, pp. 293–331.

- [22] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them: P. 1: Theory; P. 2: Numerical application // *Meccanica*, 1980, vol. 15, pp. 9–30.
- [23] Shimada I., Nagashima T. A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems // *Progr. Theoret. Phys.*, 1979, vol. 61, no. 6, pp. 1605–1616.
- [24] Lai Y.-C., Grebogi C., Yorke J. A., Kan I. How often are chaotic saddles nonhyperbolic? // *Nonlinearity*, 1993, vol. 6, no. 5, pp. 779–797.
- [25] Anishchenko V. S., Kopeikin A. S., Kurths J., Vadivasova T. E., Strelkova G. I. Studying hyperbolicity in chaotic systems // *Phys. Lett. A*, 2000, vol. 270, no. 6, pp. 301–307.
- [26] Kuptsov P. V. Fast numerical test for hyperbolic chaos // *Phys. Rev. E*, 2012, vol. 85, no. 1, 015203, 4 pp.
- [27] Kuznetsov S. P., Kruglov V. P. Verification of hyperbolicity for attractors of some mechanical systems with chaotic dynamics // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2016, vol. 21, no. 2, pp. 160–174.

Chaos generator with the Smale – Williams attractor based on oscillation death

Valentina M. Doroshenko¹, Vyacheslav P. Kruglov², Sergey P. Kuznetsov³

¹Saratov State University

ul. Astrahanskaya 83, Saratov, 410012, Russia

^{2,3}Saratov Branch of Kotel'nikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS

ul. Zelenaya 38, Saratov, 410019, Russia

¹Dorvalentina9@gmail.com, ²kruglovyacheslav@gmail.com, ³spkuz@yandex.ru

A nonautonomous system with a uniformly hyperbolic attractor of Smale–Williams type in a Poincaré cross-section is proposed with generation implemented on the basis of the effect of oscillation death. The results of a numerical study of the system are presented: iteration diagrams for phases and portraits of the attractor in the stroboscopic Poincaré cross-section, power density spectra, Lyapunov exponents and their dependence on parameters, and the atlas of regimes. The hyperbolicity of the attractor is verified using the criterion of angles.

MSC 2010: 37D20, 37D45, 34C15, 34D08

Keywords: uniformly hyperbolic attractor, Smale – Williams solenoid, Bernoulli map, oscillation death, Lyapunov exponents

Received July 21, 2017, accepted August 31, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 3, pp. 303–315 (Russian)