

АНТЕННО-ФИДЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 621.396.67

АБЕРРАЦИИ ЭЙКОНАЛА В ПЛАНАРНЫХ ДВУХЗЕРКАЛЬНЫХ АНТЕННАХ

© 2014 г. А. С. Венецкий, В. А. Калошин

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,

Российская Федерация, 125009 Москва, ул. Моховая 11, стр. 7

E-mail: AVenetsky@yandex.ru

Поступила в редакцию 17.02.2014 г.

Приведен вывод формулы, описывающей распределение эйконала на главном зеркале в двухмерной двухзеркальной системе при произвольном направлении смещения источника из фокуса, при этом второй фокус системы находится на бесконечности; формула учитывает четыре члена разложения эйконала по степеням величины смещения источника. Проведен анализ точности данной формулы путем сравнения результатов расчета эйконала в двухмерной системе Шварцшильда при ее использовании и результатов точного геометрикооптического расчета. Получены формулы фокальной кривой, угла наклона фазового фронта и аберраций в произвольной двухзеркальной телескопической системе. С использованием полученной формулы проведен анализ и минимизация аберраций в двухмерной системе Шварцшильда.

DOI: 10.7868/S003384941410009X

ВВЕДЕНИЕ

Двумерные двухзеркальные системы (ДДЗС) являются моделью планарных двухзеркальных антенн (ПДЗА), которые применяются в качестве многолучевых антенн с веерной диаграммой направленности, облучающих систем многозеркальных антенн, а также диаграммообразующих систем антенных решеток. Для построения таких систем могут использоваться различные конструкции: симметричная двухэтажная с двумя 90-градусными изломами [1], одноэтажная офсетная [2], симметричная трехэтажная с двумя 180-градусными разворотами [3]. Отметим, что только две последние конструкции являются, по существу, планарными и могут быть выполнены с использованием соответствующих технологий.

Симметричные двухзеркальные системы обеспечивают, как известно, большой угол обзора по сравнению с офсетными [4]. Формирование многолучевой диаграммы в ПДЗА реализуется с использованием решетки облучателей. Использование многоэтажной конструкции в симметричных ПДЗА позволяет избежать взаимного затенения зеркал, а также их затенения решеткой облучателей. Отклонение лучей от оси в ПДЗА обеспечивается за счет выноса облучателей из фокуса системы, что приводит к возникновению аберраций эйконала в апертуре главного зеркала, фазовым искажениям и падению коэффициента использования поверхности (КИП) апертуры.

В случае небольших смещений источника из фокуса системы для вычисления распределения эйконала в апертуре главного зеркала можно воспользоваться известной формулой для трех первых членов разложения эйконала в апертуре осесимметричной двухзеркальной системы по степеням величины этого смещения [5]. Однако при увеличении величины смещения и, соответственно, угла зрения системы, точность этой формулы падает и оказывается недостаточной для анализа и минимизации аберраций в широкоугольных системах. В работе [3] для этих целей была использована численная методика трассировки лучей.

В данной работе приведен вывод формулы для четырех членов разложения эйконала на поверхности главного зеркала ДДЗС с произвольными образующими по степеням величин поперечного и продольного смещения источника из фокуса системы. Показано, что формула позволяет вычислять и минимизировать аберрации эйконала при достаточно больших (до 100 град) углах зрения системы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим ДДЗС с вынесенным из фокуса источником, вид которой в плоскости (XZ) показан на рис. 1а, 1б.

При расположении источника в фокусе O системы в апертуре главного зеркала формируется синфазный фронт. Предположим, что только

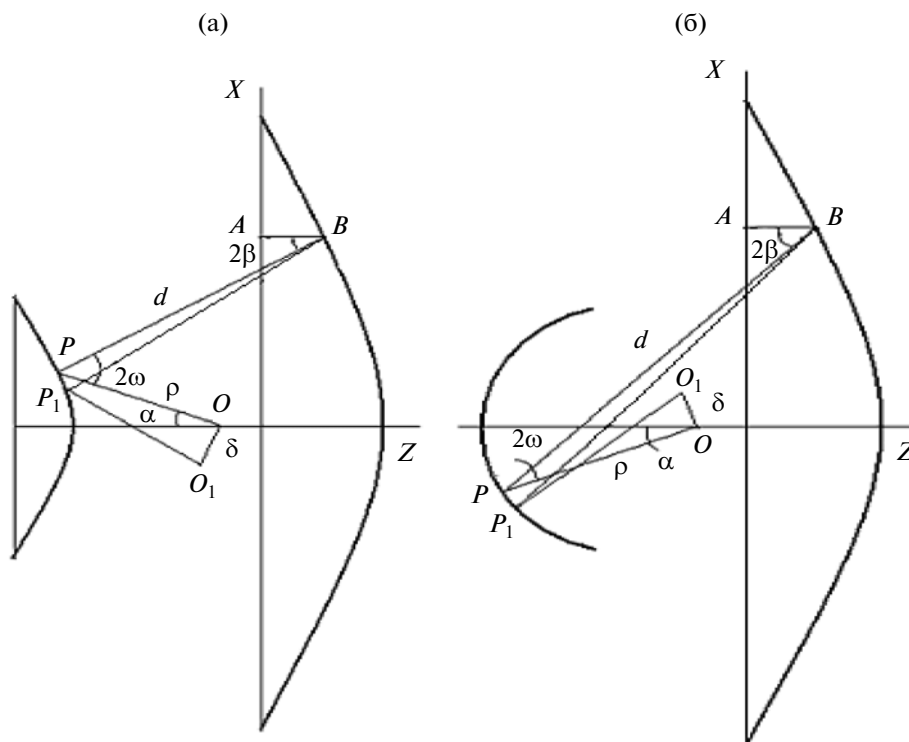


Рис. 1. Двухзеркальная система двух типов: 1-го, зафокальная (а) и 2-го, предфокальная (б).

один луч, выходящий из источника под углом α попадает в заданную точку B апертуры, т.е. обеспечивается взаимно-однозначное соответствие между каждой точкой апертуры B и углом α выхода луча из источника O , которое описывается функциями отображения

$$R = |X_B| = R(\alpha), \quad \alpha = \alpha(R). \quad (1)$$

Пусть точка O_1 с координатами $(-\delta_x, -\delta_z)$ – положение смещенного источника. Предположим, что при смещении источника в точку O_1 взаимно-однозначное соответствие точек апертуры и множества выходящих из O_1 лучей сохраняется. При этом всегда существует луч, соединяющий точку O_1 и точку B . Оптический путь (эйконал) вдоль этого луча равен сумме длин двух отрезков

$$\Phi(BO_1) = |BP_1| + |P_1O_1|. \quad (2)$$

Будем искать разложение функции Φ в ряд по степеням δ_x и δ_z .

2. РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЙКОНАЛА ПО СТЕПЕНЯМ ВЕЛИЧИНЫ СМЕЩЕНИЯ ИСТОЧНИКА

Пусть в системе координат XZ с центром в фокусе O точка B имеет координаты (X_B, Z_B) . Тогда другие точки будут иметь координаты: $B(X_B, Z_B)$,

$P(x_p, z_p)$, $P_1(x_p + \Delta x, z_p + \Delta z)$, $O_1(-\delta_x, -\delta_z)$, $O(0, 0)$. При этом $Z_B = F(X_B)$, $z_p = f(x_p)$, где $Z = F(X)$ и $z = f(x)$ – уравнения образующих большого и малого зеркал соответственно.

Выражение для эйконала (2) представим в виде

$$\Phi(BO_1) = \sqrt{(x_p + \Delta x - X_B)^2 + (z_p + \Delta z - Z_B)^2} + \sqrt{(x_p + \Delta x + \delta_x)^2 + (z_p + \Delta z + \delta_z)^2}. \quad (3)$$

С точностью до членов четвертого порядка малости по Δx , можно записать

$$\Delta z = f'_p \Delta x + \frac{f''_p}{2} \Delta x^2 + \frac{f'''_p}{6} \Delta x^3. \quad (4)$$

Здесь и далее $f'_p = f'(x_p)$, $f''_p = f''(x_p)$, $f'''_p = f'''(x_p)$ (дифференцирование по x).

Величины Δx , Δz , входящие в (3), являются неизвестными. Заменяя в выражении (3) Δz отрезком ряда (4), разложим выражение для эйконала (3) в ряд по Δx , ограничиваясь членами третьего порядка малости. Каждое из двух слагаемых в формуле (2) можно представить в виде

$$|BP_1| = d + S_{x1} \Delta x + S_{x2} \Delta x^2 + S_{x3} \Delta x^3,$$

$$|P_1O_1| = \sqrt{A} + Q_{x1} \Delta x + Q_{x2} \Delta x^2 + Q_{x3} \Delta x^3.$$

Здесь

$$S_{X1} = u_x + u_z f'_P, \quad S_{X2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{d} (u_z - u_x f'_P)^2 + u_z f''_P \right],$$

$$Q_{X1} = \frac{1}{\rho} (x_P + f_P f'_P) + \delta_X \left[\frac{1}{\rho} - (x_P + f_P f'_P) \frac{\sin \alpha}{\rho^2} \right] +$$

$$+ \delta_Z \left[\frac{f'_P}{\rho} + (x_P + f_P f'_P) \frac{\cos \alpha}{\rho^2} \right] +$$

$$+ C_{12} \delta_X^2 + D_{12} \delta_Z^2 + E \delta_X \delta_Z,$$

$$Q_{X2} = \frac{1}{2\rho} \left[1 + f_P'^2 + f_P f_P'' - \frac{1}{\rho^2} (x_P + f_P f_P'')^2 \right] +$$

$$+ C_{21} \delta_X + D_{21} \delta_Z,$$

$$A = \rho^2 + 2x_P \delta_X + 2f_P \delta_Z + \delta_X^2 + \delta_Z^2,$$

$$\sqrt{A} = \rho + \sin \alpha \delta_X - \cos \alpha \delta_Z +$$

$$+ \frac{1}{2\rho} (\delta_X^2 \cos^2 \alpha + \delta_Z^2 \sin^2 \alpha + \delta_X \delta_Z \sin 2\alpha) +$$

$$+ \frac{1}{2\rho^2} (-\delta_X^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha + \delta_X \delta_Z \cos \alpha (1 - 3 \sin^2 \alpha) -$$

$$- \delta_X \delta_Z^2 \sin \alpha (1 - 3 \cos^2 \alpha) + \delta_Z^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha),$$

где $C_{12} = -\frac{\cos \alpha}{2\rho^2 \cos(\omega - \alpha)} (\sin \omega \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cos \omega),$

$$D_{12} = -\frac{1}{2\rho^2 \cos(\omega - \alpha)} \times$$

$$\times (2 \cos \alpha \sin(\omega - \alpha) + (1 - 3 \cos^2 \alpha) \sin \omega),$$

$$C_{21} = \frac{f_P''}{2\rho} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\cos \omega}{2\rho^2 \cos^2(\omega - \alpha)} \times$$

$$\times (\sin \alpha \cos \omega + 2 \cos \alpha \sin \omega),$$

$$D_{21} = \frac{f_P''}{2\rho} \sin^2 \alpha +$$

$$+ \frac{\cos \omega}{2\rho^2 \cos^2(\omega - \alpha)} (\cos \alpha \cos \omega - 2 \sin \alpha \sin \omega),$$

$$E = \frac{1}{\rho^2 \cos(\omega - \alpha)} \times$$

$$\times \left(\cos \alpha \cos(\omega - \alpha) + \sin \alpha \sin(\omega - \alpha) - \frac{3}{2} \sin \omega \sin 2\alpha \right),$$

$\rho = |OP|$, $d = |BP|$, ω – угол между лучом, падающим на субрефлектор в точке P , и нормалью в этой точке, β – угол между лучом, падающим на главное зеркало в точке B , и нормалью в этой точке. Для углов ω и β справедливы соотношения

$$\operatorname{tg} \omega = \pm \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\alpha}, \quad \omega = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{|R(\alpha)| \mp \rho \sin \alpha}{d} \right) \pm \frac{\alpha}{2},$$

$$2\beta = 2\omega \mp \alpha,$$

где верхний знак соответствует системе 1-го типа, нижний – системе 2-го типа.

Суммируя полученные для слагаемых эйконала в (2) выражения и приводя подобные члены, можно записать

$$\Phi(BO_1) = \sqrt{A} + d + C_1 \Delta x + C_2 \Delta x^2 + C_3 \Delta x^3, \quad (5)$$

где

$$C_1 = S_{X1} + Q_{X1} =$$

$$= C_{11} \delta_X + D_{11} \delta_Z + C_{12} \delta_X^2 + D_{12} \delta_Z^2 + E \delta_X \delta_Z,$$

$$C_2 = S_{X2} + Q_{X2} = C_{20} + C_{21} \delta_X + D_{21} \delta_Z,$$

$$C_3 = S_{X3} + Q_{X3} = -\frac{1}{3} \cos \omega \cos(\omega - \alpha) f_P''' +$$

$$+ \frac{f_P'' \cos \omega}{2\rho d \cos(\omega - \alpha)} (d \sin \alpha - \rho \sin 2\beta) +$$

$$+ \frac{\sin \omega \cos^2 \omega}{2 \cos^3(\omega - \alpha)} \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{\rho^2} \right),$$

$$C_{11} = \frac{1}{\rho} - (x_P + f_P f'_P) \frac{\sin \alpha}{\rho^2},$$

$$D_{11} = \frac{f'_P}{\rho} + (x_P + f_P f'_P) \frac{\cos \alpha}{\rho^2},$$

$$C_{20} = \frac{\cos^2 \omega}{2 \cos^2(\omega - \alpha)} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{\rho} \right) - \cos \omega \cos(\omega - \alpha) f_P''.$$

Используя принцип Ферма, неизвестную величину Δx можно найти из уравнения, выражающего условие экстремума эйконала на истинной траектории

$$\partial \Phi / \partial \Delta x = 0, \quad (6)$$

которое будет иметь вид

$$C_1 + 2C_2 \Delta x + 3C_3 \Delta x^2 = 0. \quad (7)$$

Следуя методике, изложенной в [5], представим Δx в следующем виде:

$$\Delta x = a_1 \delta_X + b_1 \delta_Z + a_2 \delta_X^2 + b_2 \delta_Z^2 + e \delta_X \delta_Z, \quad (8)$$

подставим его в (5), приведем подобные члены и приравняем нулю члены первого и второго порядка малости по δ_X, δ_Z . В результате получаем систему уравнений для определения коэффициентов a_1, b_1, a_2, b_2, e :

$$C_{11} + 2C_{20} a_1 = 0, \quad D_{11} + 2C_{20} b_1 = 0,$$

$$C_{12} + 2C_{20} a_2 + 2C_{21} b_1 + 3C_3 a_1^2 = 0,$$

$$D_{12} + 2C_{20} b_2 + 2D_{21} b_1 + 3C_3 b_1^2 = 0,$$

$$E + 2C_{20} e + 2C_{21} b_1 + 2D_{21} a_1 + 6C_3 a_1 b_1 = 0.$$

Решая систему относительно a_1, b_1, a_2, b_2, e , получаем

$$a_1 = -\frac{C_{11}}{2C_{20}} = -\frac{d \cos \alpha \cos(\omega - \alpha)}{R'(\alpha) \cos \omega},$$

$$b_1 = -\frac{D_{11}}{2C_{20}} = -\frac{d \sin \alpha \cos(\omega - \alpha)}{R'(\alpha) \cos \omega},$$

$$a_2 = -\frac{1}{2C_{20}}(C_{12} + 2C_{21}b_1 + 3C_3a_1^2),$$

$$b_2 = -\frac{1}{2C_{20}}(D_{12} + 2D_{21}b_1 + 3C_3a_1^2),$$

$$e = -\frac{1}{2C_{20}}(E + 2C_{21}b_1 + 2D_{21}a_1 + 6C_3a_1b_1).$$

Подставляя выражение для Δx с найденными коэффициентами в выражение для эйконала (5) и используя формулу для эйконала из работы [5], учитывая члены второй степени малости по δ_x, δ_z , можно получить следующее выражение для эйконала с точностью до третьей степени малости по δ_x, δ_z включительно:

$$\begin{aligned} \Phi(BO_1) = & \rho + d + \delta_x \sin \alpha \cos \varphi - \delta_z \cos \alpha + \\ & + \frac{\delta_x^2 \cos^2 \alpha}{2 L_1} + \frac{\delta_x \delta_z}{2 L_1} \sin 2\alpha \cos \varphi + \frac{\delta_z^2 \sin^2 \alpha}{2 L_1} + \\ & + W_1 \delta_x^3 \cos \varphi + W_2 \delta_x^2 \delta_z + W_3 \delta_x \delta_z^2 \cos \varphi + W_4 \delta_z^3, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\frac{1}{L_1} = \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{d}{R'(\alpha)} \right)$, $\varphi = 0$ при $X_B \geq 0$, $\varphi = \pi$ при $X_B < 0$,

$$W_1 = a_1(C_{12} + a_1 C_{21} + a_1^2 C_3) - \frac{1}{2\rho^2} \cos^2 \alpha \sin \alpha,$$

$$\begin{aligned} W_2 = & a_1(E + a_1 D_{21} + 2b_1 C_{21}) + b_1 C_{12} + 3a_1^2 b_1 C_3 + \\ & + \frac{1}{2\rho^2} \cos \alpha (1 - 3 \sin^2 \alpha), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_3 = & b_1(E + b_1 C_{21} + 2a_1 D_{21}) + a_1 D_{12} + 3a_1 b_1^2 C_3 - \\ & - \frac{1}{2\rho^2} \sin \alpha (1 - 3 \cos^2 \alpha), \end{aligned}$$

$$W_4 = b_1(D_{12} + b_1 D_{21} + b_1^2 C_3) + \frac{1}{2\rho^2} \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

Приведенные для W_{1-4} выражения не содержат коэффициенты a_2, b_2, e , т.е. члены разложения эйконала третьей степени малости по δ_x, δ_z зависят только от a_1, b_1 в разложении величины смещения Δx .

В выражения W_{1-4} входят производные $f_p'' = f''(x_p)$, $f_p''' = f'''(x_p)$. Как показано в работе [5], кривизна поверхности зеркал в точках P и B

выражается через производную функции отображения:

$$\frac{2K_P}{\cos \omega} = \frac{1}{\rho d} (R'(\alpha) - \rho - d), \quad \frac{2K_B}{\cos \beta} = \frac{R'(\alpha) - \rho}{R'(\alpha)d},$$

откуда с учетом формулы для кривизны

$$K_P = \frac{f_p'''}{\left(\sqrt{1 + f_p'^2} \right)^3} = f_p''' \cos^3(\omega - \alpha)$$

можно получить

$$f_p''' = -\frac{\cos \omega}{2\rho d \cos^3(\omega - \alpha)} (R'(\alpha) - \rho - d). \quad (10)$$

Продифференцируем обе части соотношения (10) по параметру α . Для левой части, используя соотношение $\rho' = \rho \operatorname{tg} \omega$, можно записать

$$\frac{df_p'''}{d\alpha} = \frac{df_p'''}{dx} \frac{dx}{d\alpha} = f_p'''' \frac{d(\rho \sin \alpha)}{d\alpha} = f_p'''' \rho \frac{\cos(\omega - \alpha)}{\cos \omega}.$$

При дифференцировании правой части (10) используем соотношение

$$\beta = -\operatorname{arctg} \left(\frac{dZ}{dX} \right),$$

откуда

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{Z_X''}{1 + (Z_X')^2} \frac{dX}{d\alpha} = \frac{K_B}{\cos \beta} R'(\alpha) = \frac{R' - \rho}{2d},$$

$$\omega' = \frac{d}{d\alpha} \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1}{2d} (R' - \rho + d),$$

$$d' = -\rho' - \frac{dZ_B}{d\alpha} = -\rho \operatorname{tg} \omega + R' \operatorname{tg} \beta.$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} f_p'''' = & -\frac{\cos^2 \omega}{4\rho^3 d^2 \cos^5(\omega - \alpha)} \times \\ & \times \left(G \cos(\omega - \alpha) + 3 \sin(\omega - \alpha) \rho (R' - \rho - d)^2 \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G = & \operatorname{tg} \omega (4\dot{R}\rho^2 - \dot{R}^2 \rho + 3d^2 \rho - 3\rho^3 - 2R' \rho d) + \\ & + 2 \operatorname{tg} \beta (\rho^2 R' - \dot{R}^2 \rho) + 2\rho d R''. \end{aligned}$$

Используя полученные выражения для производных, преобразуем выражение C_3 , входящее в выражения W_{1-4} :

$$\begin{aligned} C_3 = & \frac{\cos^2 \omega}{12d^2 \rho^2 \cos^4(\omega - \alpha)} \times \\ & \times \left(\lambda_1 \dot{R}\rho + \lambda_2 \dot{R}^2 + \lambda_3 \dot{R}d + 2\mu_1 d R'' \right), \end{aligned}$$

где $\lambda_1 = 4\mu_1 \operatorname{tg} \omega + 2\mu_1 \operatorname{tg} \beta - 6\mu_2 + 3 \sin 2\beta$,

$\lambda_2 = -\mu_1 \operatorname{tg} \omega - 2\mu_1 \operatorname{tg} \beta + 3\mu_2$, $\lambda_3 = -4 \sin 2\beta - \sin \alpha$,

$\mu_1 = \cos \omega \cos(\omega - \alpha)$, $\mu_2 = \cos \omega \sin(\omega - \alpha)$.

После приведения подобных членов и тригонометрических преобразований, получаем

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \sum_{i=1}^5 p_i e_i, & W_2 &= \sum_{i=1}^5 u_i e_i, \\
 W_3 &= \sum_{i=1}^5 v_i e_i, & W_4 &= \sum_{i=1}^5 q_i e_i, \\
 e_1 &= \frac{d}{R^2 \rho^2}, & e_2 &= \frac{d}{(R')^2 \rho^2}, & e_3 &= \left(\frac{d}{R' \rho} \right)^2, \\
 e_4 &= \frac{d^2 R''}{(R')^3 \rho^2}, & e_5 &= \frac{1}{\rho^2}, \\
 p_1 &= \frac{\cos^2 \alpha}{24 \cos \beta \cos \omega} \times \\
 &\times \left(9 \sin \left(2\omega + \frac{\alpha}{2} \right) + 7 \sin \frac{3\alpha}{2} - 3 \sin \left(2\omega - \frac{3\alpha}{2} \right) + 5 \sin \frac{\alpha}{2} \right), \\
 p_2 &= \frac{\cos^3 \alpha}{12 \cos \beta \cos \omega} \left(3 \sin \left(\frac{\alpha}{2} - 2\omega \right) - \sin \frac{\alpha}{2} \right), \\
 p_3 &= \frac{\cos^2 \alpha}{12 \cos \omega} (\sin(\omega - \alpha) - 5 \sin(\omega + \alpha)), \\
 p_4 &= -\frac{\cos^3 \alpha}{6}, & p_5 &= -\frac{1}{2} \cos^2 \alpha \sin \alpha, \\
 u_1 &= -\frac{\cos \alpha}{16 \cos \omega \cos \beta} \left(-4 \cos \frac{\alpha}{2} + 5 \cos \frac{3\alpha}{2} + 7 \cos \frac{5\alpha}{2} - \right. \\
 &\left. - 4 \cos \left(\frac{\alpha}{2} - 2\omega \right) + 3 \cos \left(\frac{5\alpha}{2} - 2\omega \right) + 9 \cos \left(\frac{3\alpha}{2} + 2\omega \right) \right), \\
 u_2 &= \frac{\sin \alpha \cos^2 \alpha}{4 \cos \beta \cos \omega} \left(3 \sin \left(\frac{\alpha}{2} - 2\omega \right) - \sin \frac{\alpha}{2} \right), \\
 u_3 &= \frac{\cos \alpha}{8 \cos \omega} (\cos(2\alpha - \omega) - 2 \cos \omega + 5 \cos(2\alpha + \omega)), \\
 u_4 &= -\frac{1}{2} \cos^2 \alpha \sin \alpha, & u_5 &= \frac{1}{2} \cos \alpha (1 - 3 \sin^2 \alpha), \\
 v_1 &= -\frac{\sin \alpha}{16 \cos \omega \cos \beta} \left(4 \cos \frac{\alpha}{2} + 5 \cos \frac{3\alpha}{2} + 7 \cos \frac{5\alpha}{2} + \right. \\
 &\left. + 4 \cos \left(\frac{\alpha}{2} - 2\omega \right) + 3 \cos \left(\frac{5\alpha}{2} - 2\omega \right) + 9 \cos \left(\frac{3\alpha}{2} + 2\omega \right) \right), \\
 v_2 &= \frac{\sin^2 \alpha \cos \alpha}{4 \cos \beta \cos \omega} \left(3 \sin \left(\frac{\alpha}{2} - 2\omega \right) - \sin \frac{\alpha}{2} \right), \\
 v_3 &= \frac{\sin \alpha}{8 \cos \omega} (\cos(2\alpha - \omega) + 2 \cos \omega + 5 \cos(2\alpha + \omega)), \\
 v_4 &= -\frac{1}{2} \cos \alpha \sin^2 \alpha, & v_5 &= \frac{1}{2} \sin \alpha (3 \cos^2 \alpha - 1), \\
 q_1 &= \frac{-\sin^2 \alpha}{24 \cos \beta \cos \omega} \times \\
 &\times \left(9 \cos \left(2\omega + \frac{\alpha}{2} \right) + 7 \cos \frac{3\alpha}{2} + 3 \cos \left(2\omega - \frac{3\alpha}{2} \right) + 5 \sin \frac{\alpha}{2} \right),
 \end{aligned}$$

$$q_2 = \frac{\sin^3 \alpha}{12 \cos \beta \cos \omega} \left(3 \sin \left(\frac{\alpha}{2} - 2\omega \right) - \sin \frac{\alpha}{2} \right),$$

$$q_3 = \frac{\sin^2 \alpha}{12 \cos \omega} (\cos(\omega - \alpha) + 5 \cos(\omega + \alpha)),$$

$$q_4 = -\frac{\sin^3 \alpha}{6}, \quad q_5 = \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

3. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ПОЛУЧЕННОЙ ФОРМУЛЫ

Для анализа точности формулы (9) были проведены расчеты распределения эйконала в двухзеркальной апланатической системе 1-го типа (системы Шварцшильда [6]) для трех различных соотношений δ_X и δ_Z с двумя наборами параметров –

вариант а: $\alpha_{\max} = 30^\circ$, $\rho_0 = 0.4$, $d_0 = 0.4$, $D_s = 0.48$, $D = 1$;

вариант б: $\alpha_{\max} = 30^\circ$, $\rho_0 = 0.7$, $d_0 = 0.4$, $D_s = 0.78$, $D = 1$.

Здесь D – диаметр апертуры главного зеркала, α_{\max} – половина угла раскрытия источника, D_s – диаметр вспомогательного зеркала, ρ_0 – расстояние от источника до вспомогательного зеркала вдоль оси, d_0 – расстояние между зеркалами на оси.

Разность между результатами расчетов эйконала на главном зеркале, вычисленными по приближенной формуле (9), и результатами, полученными строгим геометрикооптическим расчетом, представлена для поперечного $\delta_X = 0.1$, $\delta_Z = 0$ (рис. 2); продольного $\delta_X = 0$, $\delta_Z = 0.1$ (рис. 3) и продольно-поперечного $\delta_X = \delta_Z = 0.07$ (рис. 4) смещения источника для трех членов разложения эйконала по степеням δ [5] для варианта *а* (кривая 1) и варианта *б* (кривая 3) и для четырех членов (формула (9)) для варианта *а* (кривая 2) и варианта *б* (кривая 4).

Как видно из данных рис. 2–4, погрешность формулы (9) существенно меньше, чем соответствующей формулы в [5], и для данных наборов параметров составляет величину порядка 10^{-4} , что соответствует порядку δ^4 . При этом точность формулы (9), как и точность соответствующей формулы в [5], повышается при увеличении величины ρ_0 .

4. АНАЛИЗ И МИНИМИЗАЦИЯ АБЕРРАЦИЙ ЭЙКОНАЛА

Для анализа и минимизации aberrаций эйконала прежде всего в формуле (9) надо выделить члены, описывающие линейный фазовый фронт. Для этого разобьем функцию, описывающую за-

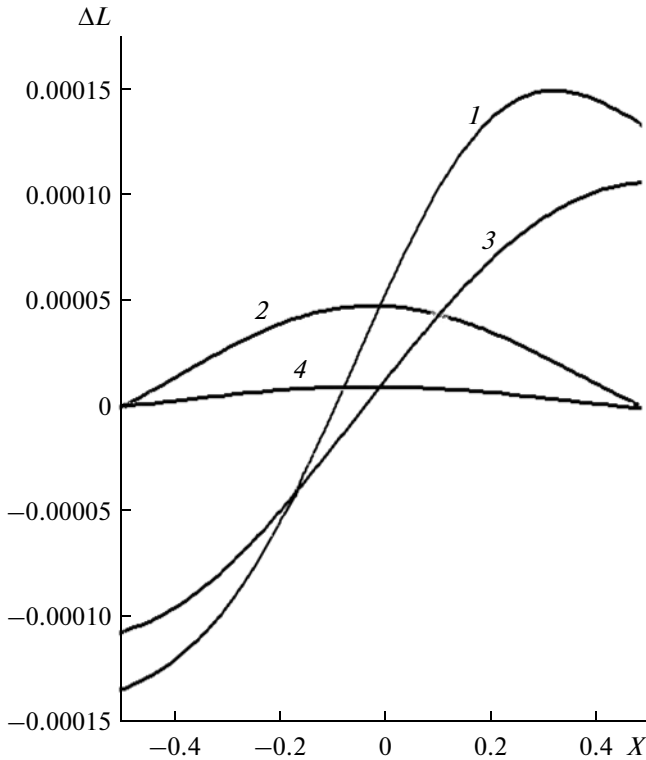


Рис. 2. Разность точного и приближенного значения эйконала при поперечном смещении источника $\delta_x = 0.1$.

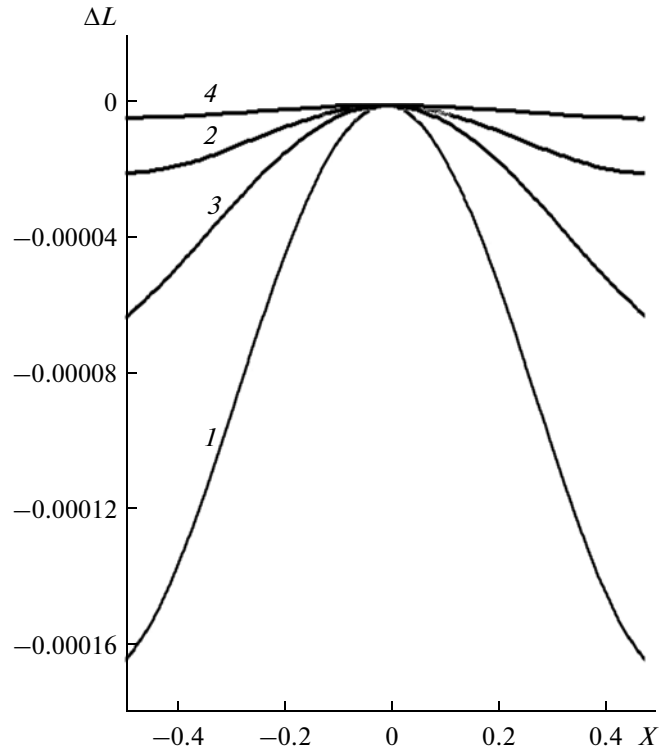


Рис. 3. Разность точного и приближенного значения эйконала при продольном смещении источника $\delta_z = 0.1$.

висимость эйконала от координаты X на главном зеркале, на две составляющие: нечетную

$$\Phi_1 = \left(\delta_x \sin \alpha + \frac{\delta_x \delta_z}{2L_1(\alpha)} \sin 2\alpha + \delta_x^3 W_1(\alpha) + \delta_x \delta_z^2 W_3(\alpha) \right) \cos \varphi \quad (11)$$

и четную

$$\Phi_2 = \rho + d - \delta_z \cos \alpha + \frac{\delta_x^2 \cos^2 \alpha}{2L_1(\alpha)} + \frac{\delta_z^2 \sin^2 \alpha}{2L_1(\alpha)} + \delta_x^2 \delta_z W_2(\alpha) + \delta_z^3 W_4(\alpha). \quad (12)$$

Угол наклона фронта θ и угол зрения 2θ могут быть определены путем дифференцирования Φ_1 по X при $X = 0$. В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX} \left[\delta_x^3 \left(\sum_{i=1}^5 p_i e_i \right) \right]_{X=0} &= \frac{1}{R(\alpha)} \frac{d}{d\alpha} \left(\delta_x^3 \sum_{i=1}^5 p_i e_i \right)_{\alpha=0} = \\ &= \frac{\delta_x^3}{4f_e^3 \rho_0^2} \left((f_e - \rho_0)^2 - 2(f_e - d_0)^2 \right), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX} \left[\delta_x \delta_z^2 \left(\sum_{i=1}^5 v_i e_i \right) \right]_{X=0} &= \\ &= \frac{1}{R(\alpha)} \frac{d}{d\alpha} \left(\delta_x \delta_z^2 \sum_{i=1}^5 v_i e_i \right)_{\alpha=0} = \frac{\delta_x \delta_z^2 (f_e - d_0)^2}{f_e^3 \rho_0^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{d}{dX} \left(\frac{\delta_x \delta_z}{2L_1} \sin 2\alpha \cos \varphi \right)_{X=0} = \frac{\delta_x \delta_z (f_e - d_0)}{f_e^2 \rho_0},$$

$$\frac{d}{dX} (\delta_x \sin \alpha \cos \varphi)_{X=0} = \quad (15)$$

$$= \frac{1}{R(\alpha)} \frac{d}{d\alpha} (\delta_x \sin \alpha \cos \varphi)_{\alpha=0} = \frac{\delta_x}{f_e},$$

где $f_e = R(\alpha)_{\alpha=0}$ – эквивалентный фокус системы.

Суммируя производные, получаем

$$\begin{aligned} \sin \theta = \frac{d\Phi_1}{dX} \Big|_{X=0} &= \frac{\delta_x}{f_e} + \frac{\delta_x \delta_z (f_e - d_0)}{f_e^2 \rho_0} + \\ &+ \frac{\delta_x^3}{4f_e^3 \rho_0^2} \left[(f_e - \rho_0)^2 - 2(f_e - d_0)^2 \right] + \frac{\delta_x \delta_z^2 (f_e - d_0)^2}{f_e^3 \rho_0^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Для любого угла наклона фронта существует оптимальная точка положения облучателя, обеспечивающая минимальные aberrации. Эту точку можно характеризовать определенным соотно-

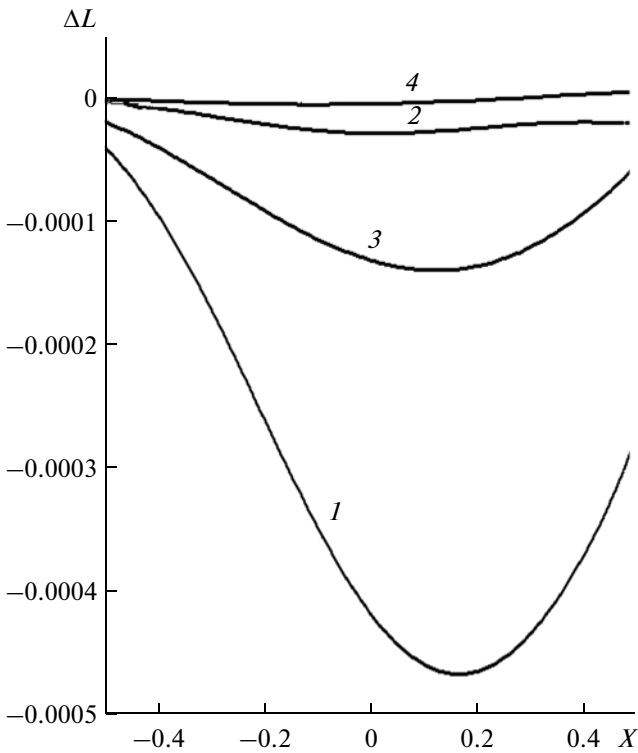


Рис. 4. Разность точного и приближенного значения эйконала при продольно-поперечном смещении источника $\delta_X = \delta_Z = 0.07$.

пением между δ_X и δ_Z . Геометрическое место этих точек называется фокальной кривой. Для нахождения фокальной кривой минимизируем прежде всего четные aberrации, требуя, чтобы величина Φ_2 (12) имела одинаковые значения в центре апертуры и на ее краях (краях главного зеркала)

$$\Phi_A(0) = \Phi_2(\alpha_{\max}). \quad (17)$$

Несложно показать, что значение эйконала в центре апертуры с точностью до третьей степени смещения выражается через значение эйконала в центре главного зеркала:

$$\Phi_A(0) = \Phi(0) + \frac{t_0}{\cos \theta} - \Phi'_X(0)t_0 \operatorname{tg} \theta + \frac{1}{2} \Phi''_X(0)t_0^2 \operatorname{tg}^2 \theta,$$

где $t_0 = Z(\alpha_{\max}) - Z(0)$ – глубина зеркала (расстояние от апертуры зеркала до его центра).

С учетом (12), (16) и (17) последнее выражение можно привести к виду

$$\Phi_A(0) = \Phi(0) + t_0 \cos \theta + \frac{1}{2} \left(K_0 + \frac{\delta_Z}{f_e^2} \right) t_0^2 \operatorname{tg}^2 \theta, \quad (18)$$

где $K_0 = Z''(0) = \frac{1}{2\rho_0 d_0} (f_e - \rho_0 - d_0)$ – кривизна в центре главного зеркала.

В результате с учетом (18) уравнение (17) переходит в уравнение

$$\begin{aligned} W_4(\alpha_{\max}) \delta_Z^3 + \frac{\sin^2 \alpha_{\max}}{2L_1(\alpha_{\max})} \delta_Z^2 + (1 - \cos \alpha_{\max}) \delta_Z = \\ = \delta_X^2 \left(\frac{1}{L_1(0)} - \frac{\cos^2 \alpha_{\max}}{2L_1(\alpha_{\max})} - \right. \\ \left. - Q_1 - \delta_Z [W_2(\alpha_{\max}) - W_2(0) - Q_2] \right). \end{aligned}$$

Разрешая полученное уравнение относительно δ_X , получаем уравнение фокальной кривой:

$$\delta_X^2 = \frac{(1 - \cos \alpha_{\max}) \delta_Z + A \delta_Z^2 + W_4(\alpha_{\max}) \delta_Z^3}{C - Q_1 - [W_2(\alpha_{\max}) - W_2(0) - Q_2] \delta_Z}, \quad (19)$$

где $A = \frac{\sin^2 \alpha_{\max}}{2L_1(\alpha_{\max})}$, $C = \frac{1}{2L_1(0)} - \frac{\cos^2 \alpha_{\max}}{2L_1(\alpha_{\max})}$,

$$Q_1 = \frac{t_0}{2f_e^2} (K_0 t_0 - 1), \quad Q_2 = \frac{t_0}{f_e^3 \rho_0} (f_e - d_0) (K_0 t_0 - 1),$$

$$\frac{1}{L_1(\alpha)} = \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{d}{R(\alpha)} \right), \quad K_0 = \frac{1}{2\rho_0 d_0} (f_e - \rho_0 - d_0)$$

– кривизна главного зеркала в центре.

Вычитая из значения эйконала Φ константу и линейную составляющую, находим величину aberrации в данной точке зеркала. В результате для среднеквадратичной (усредненной по поверхности главного зеркала) aberrации получаем

$$S = \sqrt{\int_{-1/2}^{1/2} |\Phi(X) - \Phi(0) - X \sin \theta - Z \cos \theta|^2 dX}, \quad (20)$$

где X, Z – координаты точки на главном зеркале, Φ – эйконал, определенный формулой (9). Отметим, что величина (20) отличается от среднеквадратичной aberrации, введенной в работе [3], которая определяется на основе лучевой картины. При умножении эйконала на волновое число формула (20) переходит в формулу для среднеквадратичной фазовой ошибки.

С помощью формулы (20) была проведена минимизация aberrаций эйконала в апланатической системе, ограниченной квадратом единичной длины для угла зрения 80° и $d_0 = 0.09$. При отклонении на 40° ($\delta_X = 0.45$, $\delta_Z = 0.3$) оптимальными оказались значения параметров: $\rho_0 = 0.85$, $f_e = 0.98$, которые очень близки к результатам численной оптимизации для системы Шварцшильда с углом зрения 80° ($\rho_0 = 0.87$, $f_e = 0.96$), полученными в работе [3] для $d_0 = 0.09$. Фокальные кривые, рассчитанные тремя путями: по формуле (19), в результате минимизации среднеквадратичной aberrации (20) по формуле (9) и минимизации с использованием

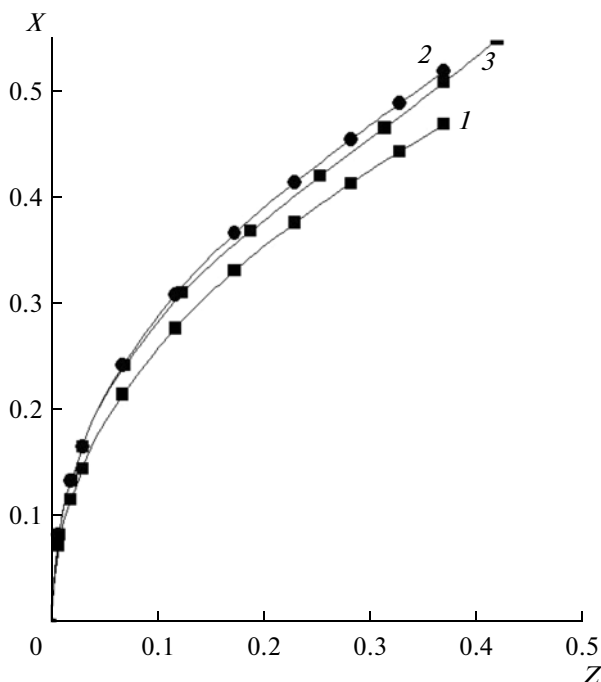


Рис. 5. Фокальные кривые для системы Шварцшильда.

метода трассировки лучей, показаны на рис. 5 кривыми 1, 2 и 3 соответственно.

На рис. 6 представлена зависимость среднеквадратичной aberrации от угла отклонения волнового фронта в оптимизированной системе Шварцшильда, рассчитанная для фокальных кривых 2 и 3 на рис. 5: для кривой 2 по формулам (9) и (20) (рис. 6 кривая 1) и с использованием метода трассировки лучей (кривая 2), для кривой 3 с использованием метода трассировки лучей (кривая 3).

Как следует из рисунка, с увеличением угла зрения точность формулы (9) для вычисления среднеквадратичной aberrации (20) падает и при угле зрения более 40° ошибка для оптимизированной системы становится соизмеримой с абсолютной величиной aberrации. Однако минимизация величины среднеквадратичной aberrации с использованием формулы (9) позволяет находить оптимальные значения параметров системы и, частности, форму фокальной кривой (различие кривых 2 и 3 на рис. 5 – невелико). Разницу точной и приближенной величин aberrаций следует учитывать при анализе оптимизированной системы или дополнительной оптимизации с использованием более точных методов, например метода Кирхгофа.

Умножая величину среднеквадратичной aberrации S на волновое число и ограничивая полученную среднеквадратичную фазовую ошибку величиной $\pi/10$, получаем ограничение величины размера апертуры $D = \lambda/20S$, где λ – длина волны.

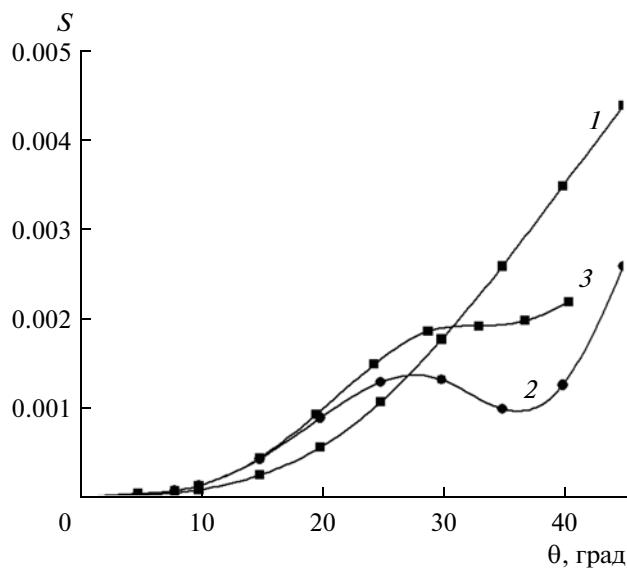


Рис. 6. Зависимости среднеквадратичной aberrации в системе Шварцшильда от угла отклонения.

Подставляя в полученную формулу величину среднеквадратичной aberrации S из графика 3 (см. рис. 6) для угла $\theta = 15^\circ$ ($S = 5 \times 10^{-4}$) и угла $\theta = 45^\circ$ ($S = 2 \times 10^{-3}$), получаем соответственно $D = 100\lambda$ и 25λ . При таких электрических размерах апертуры многолучевой планарной антенны основным фактором, влияющим на уменьшение коэффициента усиления, будет уменьшение эквивалентной апертуры, пропорциональной $\cos\theta$. Иными словами, влиянием aberrации на усиление антенны и ширину луча при этом можно пренебречь. Эти результаты хорошо согласуются с численными результатами, полученными в работе [3].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе получена формула, описывающая величину эйконала на поверхности главного зеркала двумерной двухзеркальной телескопической системы с произвольной формой зеркал. Анализ точности полученной формулы для распределения эйконала в двухзеркальной системе Шварцшильда показал, что ее погрешность для исследованных наборов параметров составляет величину порядка величины смещения источника из фокуса в четвертой степени.

В работе также получены формулы для фокальной кривой, угла наклона волнового фронта и величины aberrаций эйконала в двумерной двухзеркальной телескопической системе. Для относительно небольших углов зрения ($2\theta < 30^\circ$) эти формулы позволяют анализировать и оптимизировать многолучевые планарные двухзеркальные антенны. При больших углах зрения эти формулы имеют большую погрешность, в частно-

сти, для среднеквадратичной абберации в оптимизированных системах формулы дают погрешность сравнимую с этой величиной. Тем не менее процесс минимизации с использованием формулы для среднеквадратичной абберации позволяет находить оптимальные параметры систем даже при очень больших углах зрения (до 100°). При этом формулу для фокальной кривой можно использовать для получения начального приближения при оптимизации с использованием формулы для среднеквадратичной абберации, а полученный результат – в качестве начального приближения для оптимизации с использованием метода трассировки лучей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галимов Г.К.* Апланаты. Т. 3. Апланатические телескопы и антенны. М.: Антенны-связь НПК, 2011.
2. *Ettorre M., Bruni S., Gerini G. et al.* // *Antennas and Wireless Propagation Lett.* 2007. V. 6. № 12. P. 537.
3. *Калошин В.А., Фролова Е.В.* // Журн. радиоэлектроники. 2014. № 1. <http://jre.cplire.ru/jre/jan14/16/text.pdf>.
4. *Калошин В.А., Фролова Е.В.* // Антенны. 2008. № 10. С. 9.
5. *Венецкий А.С., Калошин В.А.* // РЭ. 2012. Т. 57. № 9. С. 1004.
6. *Schwarzschild K.* Mathematisch-Physikalische Klassen. 1906. В. 4. № 2. S. 1.