

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЭЙКОНАЛА НА ПОВЕРХНОСТИ ЛИНЗЫ

© 2015 г. А. С. Венецкий, В. А. Калошин

Представлено академиком РАН Ю.В. Гуляевым 05.02.2015 г.

Поступило 06.02.2015 г.

Приведен вывод формулы, описывающей распределение эйконала на поверхности диэлектрической осесимметричной линзы при произвольном направлении смещения источника из фокуса. При этом второй фокус системы находится на бесконечности. Формула учитывает три члена разложения эйконала по степеням величины смещения источника. Проведен анализ точности полученной формулы путем сравнения результатов расчета эйконала на поверхности апланатической линзы, полученных с ее использованием, с результатами точного геометрического расчета.

DOI: 10.7868/S0869565215230127

Для анализа и оптимизации оптических систем широко используется классическая теория aberrаций, основанная на разложении пятна рассеяния по степеням углов зрения и апертуры [1]. Соответствующий двумерный ряд можно эффективно использовать при анализе параксиальных лучей. Однако для широкоугольных систем возникает необходимость учета aberrаций высоких порядков, что приводит к сложности соответствующих формул и, как следствие, необходимости использования численных методов в задачах оптимизации.

В случае небольших смещений источника из фокуса системы для вычисления распределения эйконала на поверхности линзы можно воспользоваться хорошо известной формулой для двух первых членов разложения эйконала по степеням величины этого смещения [2]. Однако при увеличении величины смещения точность формулы резко падает. Кроме того, эта формула не позволяет вычислять aberrации в апланатических линзах.

В работах [3–6] развита теория aberrаций эйконала в двухзеркальных системах, в которой используется разложение эйконала по одному параметру – величине смещения источника. В данной работе аналогичный подход развивается для описания эйконала на поверхности диэлектрической линзы.

Рассмотрим осесимметричную диэлектрическую линзу с коэффициентом преломления n и

вынесенным из фокуса источником сферической волны, вид которой в плоскости продольного сечения (XZ) показан на рис. 1а.

При расположении источника в фокусе O системы на выходной поверхности линзы формируется плоский фронт. Предположим, что только один луч, выходящий из источника под углом α , проходит через заданную точку B , т.е. обеспечивается взаимно однозначное соответствие между каждой точкой апертуры B и углом α , которое описывается функциями отображения:

$$R = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = R(\alpha), \quad \alpha = \alpha(R). \quad (1)$$

Пусть точка O_1 с координатами $(-\delta_R, 0, -\delta_Z)$ – положение смещенного источника. Предположим, что при смещении источника в точку O_1 взаимно однозначное соответствие точек выходной апертуры и множества выходящих из O_1 лучей сохраняется. При этом всегда существует луч, соединяющий точку O_1 и точку B (рис. 1б). Оптический путь (эйконал) вдоль этого луча равен сумме длин двух отрезков

$$\Phi(BO_1) = n|BP_1| + |P_1O_1|, \quad (2)$$

где n – коэффициент преломления линзы. Будем искать разложение выражения (2) по степеням δ_R и δ_Z .

Выберем систему координат XYZ с центром в фокусе O так, чтобы точка B имела координаты $(X_B, 0, Z_B)$. Тогда другие точки будут иметь координаты: $P(x_p, 0, z_p)$, $P_1(x_p + \Delta x, \Delta y, z_p + \Delta z)$, $O_1(-\delta_x, -\delta_y, -\delta_z)$, $O(0, 0, 0)$. При этом $Z_B = F(X_B)$, $z_p = f(x_p)$, где $Z = F(X)$ и $z = f(x)$ – уравнения образующих

Институт радиотехники и электроники
им. В.А. Котельникова
Российской Академии наук, Москва
E-mail: avenetsky@yandex.ru

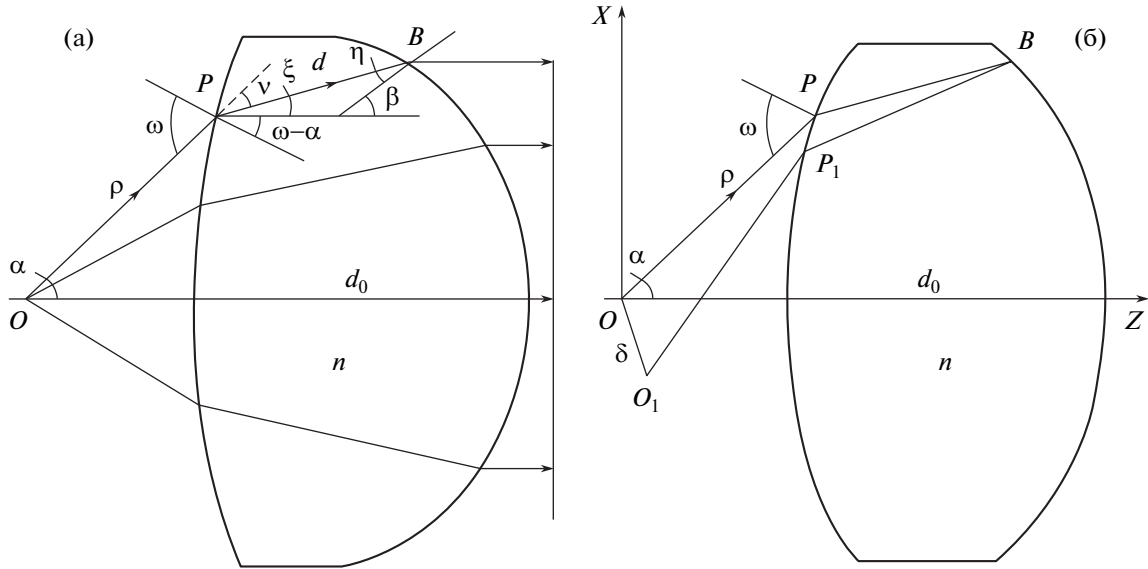


Рис. 1. Вид линзы: а – в продольном сечении, б – со смещенным источником.

большого и малого зеркал соответственно, $\delta_x = \delta_R \cos \varphi$, $\delta_y = -\delta_R \sin \varphi$.

Выражение для эйконала (2) представим в виде

$$\begin{aligned} \Phi(BO_1) &= \\ &= n \sqrt{(X_B - x_P - \Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (Z_B - z_P - \Delta z)^2} + \\ &+ \sqrt{(x_P + \Delta x + \delta_x)^2 + (\Delta y + \delta_y)^2 + (z_P + \Delta z + \delta_z)^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

С точностью до членов 3-го порядка малости по Δx , Δy можно записать

$$\Delta z = f'_P \Delta x + \frac{f''_P}{2x_P} \Delta y^2 + \frac{f''_P}{2} \Delta x^2 \quad (4)$$

(здесь и далее $f'_P = f'(x_P)$, $f''_P = f''(x_P)$).

Величины x , y , входящие в (3), являются неизвестными. Заменяя в выражении (3) Δz разложением (4), разложим выражение для эйконала (3) в ряд по степеням x , y , ограничиваясь членами второго порядка малости. Каждое из трех слагаемых в формуле (2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} |BP_1| &= d + (u_x + u_z f'_P) \Delta x + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{d} (u_z - u_x f'_P) + u_z f''_P \right] \Delta x^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d} + u_z \frac{f''_P}{x_P} \right) \Delta y^2, \\ |P_1O_1| &= \sqrt{A} + Q_{x1} \Delta x + Q_{y1} \Delta y + Q_{x2} \Delta x^2 + Q_{y2} \Delta y^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \sqrt{A} &= \rho + \sin \alpha \delta_x + \cos \alpha \delta_z + \\ &+ \frac{1}{2\rho} (\delta_x^2 \cos^2 \alpha + \delta_y^2 + \delta_z^2 \sin^2 \alpha - \delta_x \delta_z \sin 2\alpha), \end{aligned}$$

$\rho = |OP|$, $d = |BP|$, $u_x = -\sin \xi$, $u_z = -\cos \xi$ – компоненты единичного вектора $\mathbf{u} = \frac{\vec{BP}}{|BP|}$.

Суммируя полученные для слагаемых эйконала выражения и приводя подобные члены, можно записать

$$\Phi(BO_1) = \sqrt{A} + nd + \Phi_1(\Delta x, \Delta y), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= (nS_{x1} + Q_{x1}) \Delta x + Q_{y1} \Delta y + \\ &+ (nS_{x2} + Q_{x2}) \Delta x^2 + (nS_{y2} + Q_{y2}) \Delta y^2. \end{aligned}$$

Учитывая закон преломления $\sin \omega = n \sin(\xi + \omega - \alpha)$, а также равенства

$$\frac{x_P}{\rho} = \sin \alpha, \quad \frac{f_P}{\rho} = \cos \alpha, \quad f'_P = \operatorname{tg}(\omega - \alpha),$$

выражения, входящие в Φ_1 , можно привести к виду

$$\begin{aligned} S_{x1} &= -\frac{\sin \omega}{n \cos(\omega - \alpha)}, \\ S_{x2} &= \frac{1}{2d} \left[\frac{n^2 - \sin^2 \omega}{n^2 \cos^2(\omega - \alpha)} - d \cos \xi f''_P \right], \\ Q_{x1} &= \frac{\sin \omega}{\cos(\omega - \alpha)} + \frac{\delta_x \cos \omega \cos \alpha}{\rho \cos(\omega - \alpha)} - \frac{\delta_z \cos \omega \sin \alpha}{\rho \cos(\omega - \alpha)}, \\ Q_{x2} &= \frac{1}{2\rho} \left(\frac{\cos^2 \omega}{\cos^2(\omega - \alpha)} + \rho \cos \alpha f''_P \right), \\ Q_{y1} &= \frac{\delta_y}{\rho}, \quad Q_{y2} = \frac{\sin \omega}{2\rho \sin \alpha \cos(\omega - \alpha)}, \end{aligned}$$

$$S_{Y2} = \frac{1}{2d} \left(1 - \frac{d \cos \xi \operatorname{tg}(\omega - \alpha)}{\rho \sin \alpha} \right).$$

Используя принцип Ферма, неизвестные величины Δx , Δy можно найти из системы линейных уравнений, выражающих условие экстремума эйконала на истинной траектории

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta y} = 0, \quad (6)$$

решения которой имеют вид

$$\Delta x = \frac{-(nS_{X1} + Q_{X1})}{2(nS_{X2} + Q_{X2})}, \quad \Delta y = \frac{-Q_{Y1}}{2(nS_{Y2} + Q_{Y2})}. \quad (7)$$

Подставляя найденные Δx , Δy в выражение (5) и ограничиваясь членами второго порядка малости по δ_x и δ_z , можно получить

$$\begin{aligned} \Phi(BO_1) &= \\ &= \sqrt{A} + nd - \frac{(nS_{X1} + Q_{X1})^2}{4(nQ_{X2} + Q_{X2})} - \frac{Q_{Y1}^2}{4(nS_{Y2} + Q_{Y2})}. \end{aligned} \quad (8)$$

Правая часть (8) содержит производную f_p'' , которую можно выразить через Кривизну поверхности линзы K_p

$$K_p = \frac{f_p''}{(\sqrt{1 + f_p'^2})^3} = f_p'' \cos^3(\omega - \alpha),$$

где ω — угол между падающим и отраженным лучом в точке P .

Выведем соотношения между функцией отображения и кривизной поверхности линзы в точке пересечения с лучом.

Рассмотрим два луча, падающие из точки A под малым углом γ на выпуклую поверхность в плоскости XY . Предположим, что в системе координат с центром в точке P и осью Y , совпадающей с нормалью к поверхности в точке P , сечение поверхности плоскостью XY вблизи этой точки описывается кривой 2-го порядка $y = \frac{1}{2} f_p'' x^2$. Пусть прямая

QN — нормаль к кривой в точке Q , а прямая QM параллельна оси Y (рис. 2). Тогда имеют место следующее соотношения:

$$\mu \approx \operatorname{tg} \mu = y'(x) = |f_p'' x|,$$

$$\angle QPP_1 \approx \operatorname{tg}(\angle QPP_1) = \frac{1}{2} f_p'' x = \frac{\mu}{2},$$

$$\angle PQA = \pi - \left(\gamma + \frac{\pi}{2} + \omega + \frac{\mu}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - \gamma - \frac{\mu}{2} - \omega,$$

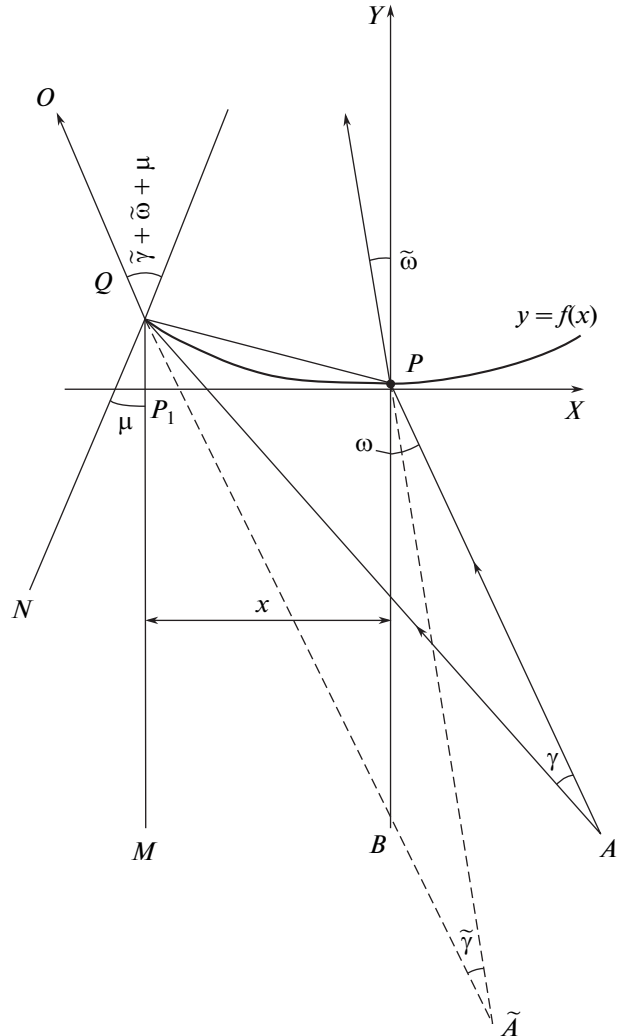


Рис. 2. Геометрия преломления пучка.

Учитывая, что

$$\sin \gamma = |PQ| \frac{\sin \angle PQA}{|AP|} = |PQ| \frac{\cos(\omega + \gamma + \mu/2)}{|AP|},$$

$$|PQ| = \frac{x}{\cos \angle QPP_1} = \frac{x}{\cos(\mu/2)} = \frac{\mu}{f_p'' \cos(\mu/2)},$$

находим $\mu = \frac{\gamma f_p'' |AP|}{\cos \omega}$. Учитывая, что $f_p'' = K_p$, где

K_p — кривизна кривой в точке P , последнее равенство можно записать в виде

$$\mu = \frac{\gamma K_p |AP|}{\cos \omega}. \quad (9)$$

Используя законы преломления в точках P и P_1

$$\sin \omega = n \sin \tilde{\omega}, \quad \sin(\omega + \gamma + \mu) = n \sin(\tilde{\gamma} + \tilde{\omega} + \mu)$$

и раскладывая обе части последнего равенства в ряды по малым величинам γ , $\tilde{\gamma}$, μ , можно получить

$$n \tilde{\gamma} \cos \tilde{\omega} = \gamma \cos \omega + \mu (\cos \omega - n \cos \tilde{\omega}).$$

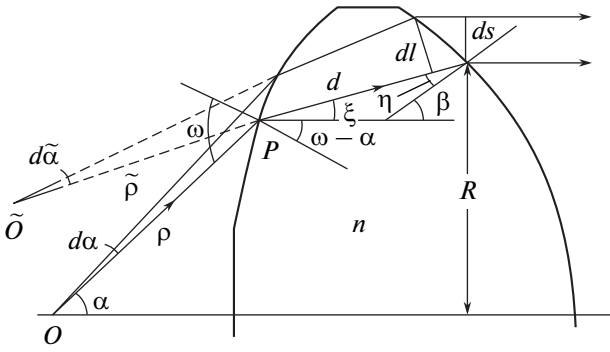


Рис. 3. К выражению кривизны (16) через закон отображения.

Учитывая, что $n \cos \tilde{\omega} = \sqrt{n^2 - \sin^2 \omega}$, из последнего уравнения находим

$$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{G} [1 + B(1 - G)], \tag{10}$$

где $B = \frac{K_p |AP|}{\cos \omega}$, $G = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \omega}}{\cos \omega}$.

Из теоремы синусов для треугольников APQ и $\tilde{A}PQ$ следует:

$$\begin{aligned} |\tilde{A}P| &= |AP| \frac{\sin \tilde{\gamma} \sin \angle PQ\tilde{A}}{\sin \tilde{\gamma} \sin \angle PQA} = \\ &= |AP| \frac{\sin \tilde{\gamma} \cos(\tilde{\omega} + \tilde{\gamma} + \mu/2)}{\sin \tilde{\gamma} \cos(\omega + \gamma + \mu/2)}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\gamma \rightarrow 0$ в последнем равенстве и учитывая (10), можно получить

$$|\tilde{A}P| n Q = |AP| G^2, \tag{11}$$

где $Q = 1 + B(1 - G)$, а B и G приведены после равенства (10).

Применяя полученные результаты для лучей в линзе (рис. 3), можно получить

$$\begin{aligned} G d\tilde{\alpha} &= Q d\alpha, \quad n Q \tilde{\rho} = G^2 \rho, \\ dl &= (\tilde{\rho} + d) d\tilde{\alpha}, \quad ds = R'(\alpha) d\alpha. \end{aligned} \tag{12}$$

Сечения лучевых трубок (рис. 3) и углы удовлетворяют уравнениям

$$\cos \beta dl = \cos \eta ds, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \sin \omega &= n \sin(\xi + \omega - \alpha), \quad \xi + \eta = \beta, \\ n \sin \eta &= \sin \beta. \end{aligned} \tag{14}$$

Используя (14), соотношение (13) можно привести к виду

$$dl = \frac{n - \cos \xi}{n \cos \xi - 1} ds. \tag{15}$$

С учетом (15) из (12) следует уравнение:

$$\begin{aligned} \left(\rho \frac{G^2}{nQ} + d \right) \frac{Q}{G} &= WR'(\alpha), \\ W &= \frac{n - \cos \xi}{n \cos \xi - 1}. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения можно выразить кривизну в точке P :

$$K_p = \frac{\cos^2 \omega}{(1 - G) d \rho n} (n G W R'(\alpha) - \rho G^2 - nd). \tag{16}$$

Подставляя выражение (14) в выражение (8) и учитывая соотношение

$$\cos(\omega - \alpha) (\cos \omega - \sqrt{n^2 - \sin^2 \omega}) = \cos \alpha - n \cos \xi$$

(которое выводится из закона преломления), а также соотношение

$$n S_{\gamma_2} + Q_{\gamma_2} = \frac{n(\rho \sin \alpha + d \sin \xi)}{2 d \rho \sin \alpha} = \frac{n R}{2 d \rho \sin \alpha},$$

выражение для эйконала (8) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Phi &= \rho + nd + \delta_x \sin \alpha + \delta_z \cos \alpha + \frac{\delta_x^2 \cos^2 \alpha}{2 L_1} + \frac{\delta_z^2}{2 L_2} - \\ &- \frac{\delta_x \delta_z}{2 L_1} \sin 2\alpha + \frac{\delta_z^2}{2 L_1} \sin^2 \alpha + \dots, \end{aligned}$$

где

$$\frac{1}{L_1} = \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{d}{G W d R} \right), \quad \frac{1}{L_2} = \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{d \sin \alpha}{n R} \right).$$

Возвращаясь в исходную систему координат XYZ , в которой точки B и O_1 имеют декартовы координаты $(R \cos \varphi, R \sin \varphi, Z_B)$ и $(-\delta_R, 0, -\delta_Z)$ соответственно, последнюю формулу преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \Phi(R, \varphi) &= L_0 + \delta_R \cos \varphi \sin \alpha + \delta_z \cos \alpha + \\ &+ \frac{\delta_R^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{L_1} \cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \varphi}{L_2} \right) - \\ &- \frac{\delta_R \delta_Z}{2 L_1} \cos \varphi \sin 2\alpha + \frac{\delta_Z^2}{2 L_1} \sin^2 \alpha + \dots, \end{aligned} \tag{17}$$

где $L_0 = \rho + nd$ – значение эйконала на апертуре при несмещенном источнике, (R, φ) – полярные координаты точки B , $(-\delta_R, 0, -\delta_Z)$ – координаты точки O_1 в исходной системе координат, угол α выражается через R из закона отображения (1), угол ω может быть найден либо из уравнения поверхности линзы $\rho = \rho(\alpha)$:

$$\omega = \arctg \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\alpha} \right),$$

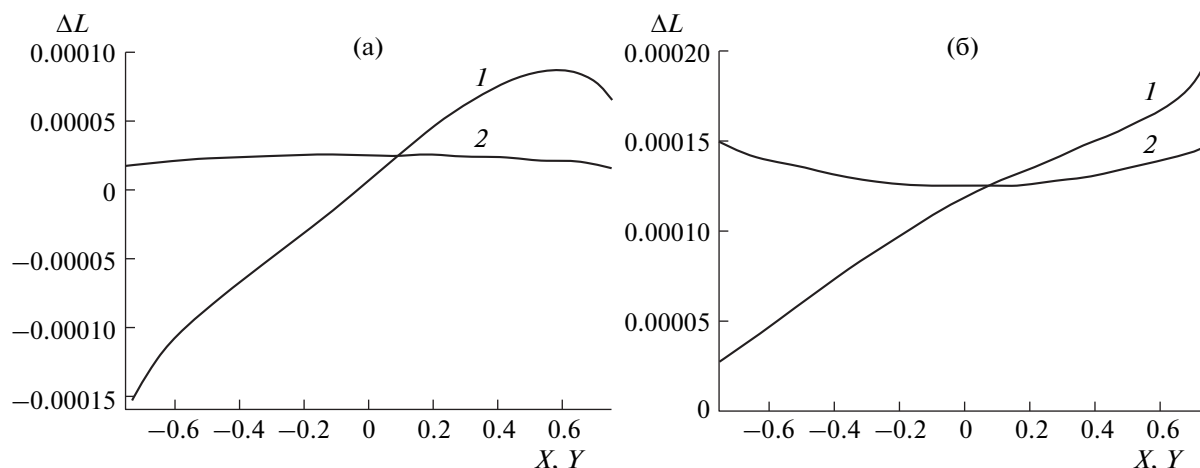


Рис. 4. Зависимость ошибки вычисления эйконала: а – при $\delta_R = 0.15$, $\delta_Z = 0$, б – при $\delta_R = \delta_Z = 0.1$.

либо с использованием законов отображения (1) и закона преломления $\sin\omega = n\sin(\xi + \omega - \alpha)$ (это позволяет избежать дифференцирования ρ):

$$\omega = \operatorname{arctg}\left(\frac{n\sin v}{n\cos v - 1}\right), \quad (18)$$

где

$$v = \alpha + \arccos\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) - \arcsin\left(\frac{Bn}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right),$$

$$A = (n-1)d_0 + \rho(\alpha)(1 - \cos\alpha),$$

$$B = R(\alpha) - \rho(\alpha)\sin\alpha,$$

а угол ξ выражается из закона преломления

$$\xi = \arcsin\left(\frac{\sin\omega}{n}\right) - \omega + \alpha, \quad \text{или} \quad \xi = \alpha - v.$$

Из выражения (18) легко получить

$$G = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\omega}}{\cos\omega} = \frac{n(n - \cos v)}{n\cos v - 1}.$$

Для анализа точности формулы (17) были проведены расчеты распределения эйконала на выходной поверхности апланатической линзы с параметрами: $\alpha_{\max} = 30^\circ$, $\rho_0 = 1$, $d_0 = 1$, $D = 1.5$, $n = 1.6$ для двух различных соотношений между δ_X и δ_Z . Здесь D – диаметр апертуры главного зеркала, α_{\max} – половина угла раскрытия источника, n – коэффициент преломления линзы.

На рис. 4а показана разность между результатами расчетов эйконала по формуле (17) и соответствующими результатами, полученными стро-

гим геометрическим расчетом и нормированная на D для $\delta_X = 0.15$, $\delta_Z = 0$. Кривой 1 показана эта разность (погрешность формулы (17)) в плоскости сканирования (вдоль оси X), кривой 2 – аналогичная разность в ортогональной плоскости (вдоль оси Y). Аналогичные результаты для случая $\delta_X = \delta_Z = 0.1$ приведены на рис. 4б кривыми 1, 2 соответственно.

Из рис. 4 видно, что погрешность формулы для данного набора параметров порядка 10^{-4} , что меньше $\left(\frac{\delta}{D}\right)^3 \leq 10^{-3}$, где $\delta = \sqrt{\delta_X^2 + \delta_Z^2}$.

Следует отметить, что погрешность формулы существенно больше в плоскости сканирования, чем в ортогональной плоскости. При этом зависимость погрешности в плоскости сканирования от расстояния до оси системы имеет существенную линейную составляющую, которая не влияет на величину aberrаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михельсон Н.Н. Оптические телескопы. Теория и конструкция. М.: Наука, 1976.
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970.
3. Венецкий А.С., Калошин В.А. // ДАН. 2010. Т. 434. № 2. С. 178–181.
4. Венецкий А.С., Калошин В.А. // Радиотехника и электроника. 2012. Т. 57. № 9. С. 1004–1011.
5. Венецкий А.С., Калошин В.А. // Радиотехника и электроника. 2013. Т. 58. № 10. С. 1025–1032.
6. Венецкий А.С., Калошин В.А. // Радиотехника и электроника. 2014. Т. 59. № 10. С. 1102–1110.