РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2016, том 61, № 4, с. 327–336

АНТЕННО-ФИДЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 621.396.67

ОБ АБЕРРАЦИЯХ ЭЙКОНАЛА В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ДВУХЗЕРКАЛЬНЫХ ТЕЛЕСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

© 2016 г. А. С. Венецкий, В. А. Калошин

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Российская Федерация, 125009 Москва, ул. Моховая, 11, стр. 7

E-mail: AVenetsky@yandex.ru, vak@cplire.ru

Поступила в редакцию 24.07.2015 г.

Получена формула для эйконала на поверхности главного зеркала осесимметричной двухзеркальной телескопической системы общего вида и ее разложение в ряд по степеням величины смещения облучателя из фокуса, с погрешностью порядка величины смещения облучателя в четвертой степени. Проведен анализ и минимизация величины аберраций для двухзеркальной апланатической системы Шварцшильда.

DOI: 10.7868/S0033849416040136

ВВЕДЕНИЕ

Осесимметричные двухзеркальные телескопические системы в настоящее время применяются в системах радиолокации и связи в качестве антенн. При использовании линейного или матричного приемника эти антенны являются многолучевыми. Многолучевые антенны позволяют обеспечивать одновременную радиосвязь с большим количеством абонентов, а также получать изображение в реальном режиме времени в системах радиовидения и, в частности, в оптических и радиотелескопах. При наблюдении удаленных точечных источников, расположенных под углом к оси двухзеркальной телескопической системы, происходит искажение сферического фазового фронта на выходе системы, из-за чего искажаются их изображения на фокальной поверхности. Аналогично, при расположении передающего элемента в точке, смещенной по отношению к фокусу системы, в распределении эйконала (фазы) в апертуре главного зеркала, кроме линейной составляющей, появляются нелинейные члены (аберрации), описывающие искажения выходного плоского фронта и приводящие к падению коэффициента усиления, а также росту боковых лепестков диаграммы направленности. Величина аберраций увеличивается с увеличением величины смещения, что приводит к ограничению угла зрения системы.

Для анализа величины аберраций, а также их минимизации, можно использовать классическую (оптическую) теорию аберраций, основанную на разложении пятна рассеяния в фокальной плоскости в двумерный ряд по степеням углов зрения и апертуры при падении плоской волны под углом к оси системы [1]. Однако в случае больших углов зрения или зеркал с большой числовой (угловой) апертурой это приводит к необходимости учета высших аберраций, т.е. большого количества членов двумерного ряда, что затрудняет анализ и минимизацию аберраций за счет выбора оптимальных параметров двухзеркальной системы.

В работах [2–5] на основе использования принципа Ферма была построена теория аберраций в двухзеркальных системах в форме разложения эйконала в апертуре главного зеркала в одномерный ряд по степеням величины смещения источника из фокуса системы. В работах [2–4] было найдено три члена этого ряда для осесимметричных двухзеркальных систем, а в работе [5] – четыре члена ряда для планарных (цилиндрических) систем.

В данной работе получена замкнутая формула, а также четыре первых члена ее разложения в ряд по степеням величины смещения источника из фокуса для распределения эйконала в апертуре главного зеркала двухзеркальной осесимметричной телескопической системы. Показано, что полученная формула имеет точность порядка величины смещения в четвертой степени. В качестве примера применения полученная формула и различные варианты ее разложений использованы для анализа и минимизации аберраций в двухзеркальной апланатической системе Шварцшильда.

1. ФОРМУЛА ДЛЯ ЭЙКОНАЛА НА ПОВЕРХНОСТИ ГЛАВНОГО ЗЕРКАЛА

Рассмотрим осесимметричную двухзеркальную систему с вынесенным из фокуса источником сферической волны в плоскости XZ декартовой системы координат для систем 1-го типа (типа Кассегрена) и 2-го типа (типа Грегори) (рис. 1).

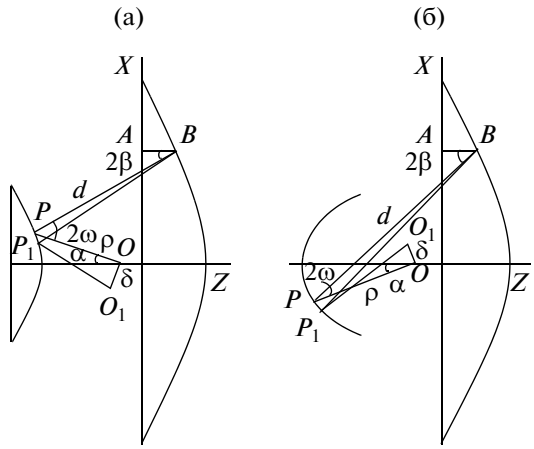

Рис. 1. Продольное (азимутальное) сечение систем 1-го (а) и 2-го (б) типа в плоскости *XZ* декартовой системы координат.

При расположении источника в точке фокуса системы *O* в апертуре главного зеркала телескопической системы формируется синфазный фронт. Предположим, что только один луч, выходящий из источника под углом α попадает в заданную точку *B* главного зеркала, т.е. обеспечивается взаимно-однозначное соответствие между каждой точкой главного зеркала *B* и углом α выхода луча из источника *O*, которое описывается функциями отображения

$$R = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = R(\alpha), \quad \alpha = \alpha(R). \tag{1}$$

Пусть точка *B* на главном зеркале имеет декартовы координаты ($R\cos\varphi$, $R\sin\varphi$, $F(R)$), где $Z = F(R)$ – уравнение поверхности главного зеркала. Тогда точка *P* на субрефлекторе, через которую проходит луч, вышедший из фокуса и попавший в точку *B*, имеет координаты

$$x_P = \rho(\alpha)\sin\alpha\cos\varphi,$$

$$y_P = \rho(\alpha)\sin\alpha\sin\varphi,$$

$$z_P = -\rho(\alpha)\cos\alpha,$$

где $\rho = \rho(\alpha)$ – расстояние от фокуса до точки *P*.

Пусть точка O_1 с координатами $(-\delta_R, 0, -\delta_Z)$ – положение смещенного из фокуса источника. Предположим, что при смещении источника в точку O_1 взаимно-однозначное соответствие точек апертуры и множества выходящих из O_1 лучей сохраняется. При этом всегда существует луч, соединяющий точку O_1 и точку *B* через точку P_1. Оптический путь (эйконал) вдоль этого луча равен сумме длин двух отрезков

$$\Phi(BO_1) = |BP_1| + |P_1O_1|, \tag{2}$$

$$\Phi(R,\varphi) = \sqrt{(x_1+\delta_R)^2 + y_1^2 + (z_1+\delta_Z)^2} + \\ + \sqrt{(R\cos\varphi - x_1)^2 + (R\sin\varphi - y_1)^2 + (F(R) - z_1)^2}. \tag{3}$$

Задача определения эйконала по формуле (3) сводится к нахождению точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$ на вспомогательном зеркале, через которую проходит луч, соединяющий точки O_1 и *B*. Будем искать эту величину как функцию величин δ_R и δ_Z.

Как будет показано ниже, координаты искомой точки можно найти по формулам

$$x_1 = x_P + \Delta x\cos\varphi - \Delta y\sin\varphi,$$

$$y_1 = y_P + \Delta x\sin\varphi + \Delta y\cos\varphi,$$

$$z_1 = f(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}),$$

$$\Delta x = -\frac{d}{R'(\alpha)}\frac{\cos(\omega-\alpha)}{\cos\omega}(\delta_R\cos\alpha\cos\varphi + \delta_Z\sin\alpha) + \ldots, \tag{4}$$

$$\Delta y = \frac{d\sin\alpha}{R}\delta_R\sin\varphi + \ldots,$$

где $\omega = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{R - \rho\sin\alpha}{d}\right) + \frac{\alpha}{2}$,

$z = f(r)$ – уравнение поверхности субрефлектора, ω – угол между падающим лучом и нормалью в точке *P* на субрефлекторе, $R'(\alpha)$ – производная функции отображения по параметру α; ρ и *d* – известные длины отрезков *OP* и *BP* (см. рис. 1а).

Как будет также показано далее, если величины δ_R, δ_Z находятся на фокальной поверхности $\delta_Z = A\delta_R^2 + B\delta_R^4 + \ldots$, то выражение Δx в формуле (4) имеет вид

$$\Delta x = -\frac{d}{R'(\alpha)}\frac{\cos(\omega-\alpha)}{\cos\omega}\delta_R\cos\alpha\cos\varphi. \tag{5}$$

При этом для погрешности формулы (3) справедлива оценка $|\Phi(R,\varphi) - \Phi_0(R,\varphi)| < (k\delta_R)^4$, где $\Phi_0(R,\varphi)$ – точное значение эйконала в данной точке , *k* – константа.

Для доказательства полученных формул рассмотрим для определенности систему 1-го типа. Выберем систему координат *XYZ* с центром в точке фокуса *O* так, чтобы точка *B* имела координаты $(X_B, 0, Z_B)$. Тогда другие точки будут иметь координаты: $P(x_P, 0, z_P)$, $P_1(x_P + \Delta x, \Delta y, z_P + \Delta z)$, $O_1(-\delta_X, -\delta_Y, -\delta_Z)$, $O(0, 0, 0)$. При этом $Z_B = F(X_B)$, $z_P = f(x_P)$, где $Z = F(X)$ и $z = f(x)$ – уравнения образующих большого и малого зеркал соответственно, $\delta_X = \delta_R\cos\varphi$, $\delta_Y = -\delta_R\sin\varphi$, $x_P = \rho(\alpha)\sin\alpha$, $z_P = -\rho(\alpha)\cos\alpha$.

Выражение для эйконала (2) представим в виде

$$\Phi(BO_1) = \\ = \sqrt{(x_P + \Delta x - X_B)^2 + \Delta y^2 + (z_P + \Delta z - Z_B)^2} + \\ + \sqrt{(x_P + \Delta x + \delta_X)^2 + (\Delta y + \delta_Y)^2 + (z_P + \Delta z + \delta_Z)^2}. \tag{6}$$

С точностью до членов 4-го порядка малости по Δx, Δy можно записать

$$\Delta z = f_P'\Delta x + \frac{f_P''}{2}\Delta x^2 + \frac{f_P'}{2x_P}\Delta y^2 + \left(\frac{f_P''}{2x_P} - \frac{f_P'}{2x_P^2}\right)\Delta x\Delta y^2 + \frac{f_P'''}{6}\Delta x^3. \quad (7)$$

Здесь и далее $f_P' = f'(x_P)$, $f_P'' = f''(x_P)$, $f_P''' = f'''(x_p)$.

Величины Δx, Δy, входящие в (6), являются неизвестными. Заменяя в выражении (6) Δz отрезком ряда (7), разложим выражение для эйконала (6) в ряд по Δx и Δy, ограничиваясь членами третьего порядка малости. Каждое из слагаемых в формуле (2) можно представить в виде

$$|BP_1| = d + S_{X1}\Delta x + S_{X2}\Delta x^2 + S_{X3}\Delta x^3 + S_{Y2}\Delta y^2 + S_{XY2}\Delta x\Delta y^2,$$

$$S_{X1} = u_x + u_z f_P', \quad S_{X2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{d}(u_z - u_x f_P')^2 + u_z f_P''\right],$$

$$S_{Y2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{d} + u_z\frac{f_P'}{x_P}\right)\Delta y^2,$$

$$S_{XY2} = \frac{f_P'^2}{2dx_P} - u_Z\frac{f_P'}{2x_P^2} + u_z\frac{f_P''}{2x_P} + \frac{\sin\omega}{2d^2\cos(\omega-\alpha)} + \frac{u_z\sin\omega f_P'}{2dx_P\cos(\omega-\alpha)},$$

$$|P_1O_1| = \sqrt{A} + Q_{X1}\Delta x + Q_{Y1}\Delta y + Q_{Y2}\Delta y^2 + Q_{X2}\Delta x^2 + Q_{XY}\Delta x\Delta y + Q_{X3}\Delta x^3 + Q_{XY2}\Delta x\Delta y^2,$$

где

$$Q_{X1} = \frac{1}{\rho}(x_P + f_P f_P') + \delta_X\left[\frac{1}{\rho} - (x_P + f_P f_P')\frac{\sin\alpha}{\rho^2}\right] + \delta_Z\left[\frac{f_P'}{\rho} + (x_P + f_P f_P')\frac{\cos\alpha}{\rho^2}\right] + C_{12}\delta_X^2 + D_{12}\delta_Z^2 + E\delta_X\delta_Z + G_Y\delta_Y^2,$$

$$Q_{Y1} = \frac{\delta_Y}{\rho}\left(1 - \frac{\sin\alpha}{\rho}\delta_X + \frac{\cos\alpha}{\rho}\delta_Z\right),$$

$$Q_{X2} = \frac{1}{2\rho}\left[1 + f_P'^2 + f_P f_P'' - \frac{1}{\rho^2}(x_P + f_P f_P'')^2\right] + C_{21}\delta_X + D_{21}\delta_Z,$$

$$C_{12} = -\frac{\cos\alpha}{2\rho^2\cos(\omega-\alpha)}(\sin\omega\cos\alpha + 2\sin\alpha\cos\omega),$$

$$D_{12} = -\frac{1}{2\rho^2\cos(\omega-\alpha)} \times (2\cos\alpha\sin(\omega-\alpha) + (1 - 3\cos^2\alpha)\sin\omega),$$

$$C_{21} = \frac{f_P''}{2\rho}\sin\alpha\cos\alpha - \frac{\cos\omega}{2\rho^2\cos^2(\omega-\alpha)} \times (\sin\alpha\cos\omega + 2\cos\alpha\sin\omega),$$

$$D_{21} = \frac{f_P''}{2\rho}\sin^2\alpha + \frac{\cos\omega}{2\rho^2\cos^2(\omega-\alpha)} \times (\cos\alpha\cos\omega - 2\sin\alpha\sin\omega),$$

$$E = \frac{1}{\rho^2\cos(\omega-\alpha)}\left(\cos\alpha\cos(\omega-\alpha) + \sin\alpha\sin(\omega-\alpha) - \frac{3}{2}\sin\omega\sin 2\alpha\right),$$

$$G_Y = -\frac{\sin\omega}{2\rho^2\cos(\omega-\alpha)},$$

$$A = \rho^2 + 2x_P\delta_X + 2f_P\delta_Z + \delta_X^2 + \delta_Z^2 + \delta_Y^2,$$

$$\sqrt{A} = \rho + \sin\alpha\delta_X - \cos\alpha\delta_Z + \frac{1}{2\rho}(\delta_X^2\cos^2\alpha + \delta_Z^2\sin^2\alpha + \delta_X\delta_Z\sin 2\alpha + \delta_Y^2) + \frac{1}{2\rho^2}(-\delta_X^3\cos^2\alpha\sin\alpha + \delta_X^2\delta_Z\cos\alpha(1 - 3\sin^2\alpha) - \delta_X\delta_Z^2\sin\alpha(1 - 3\cos^2\alpha) + \delta_Z^3\sin^2\alpha\cos\alpha - \delta_X\delta_Y^2\sin\alpha + \delta_Z\delta_Y^2\cos\alpha).$$

Суммируя полученные для слагаемых эйконала выражения и приводя подобные члены, можно записать

$$\Phi(BO_1) = \sqrt{A} + d + C_1\Delta x + C_2\Delta x^2 + C_3\Delta x^3 + H_1\Delta y + H_2\Delta y^2 + h_3\delta_Y\Delta x\Delta y + H_{XY2}\Delta x\Delta y^2, \quad (8)$$

$$C_1 = C_{11}\delta_X + D_{11}\delta_Z + C_{12}\delta_X^2 + D_{12}\delta_Z^2 + E\delta_X\delta_Z + G_Y\delta_Y^2, \quad C_2 = C_{20} + C_{21}\delta_X + D_{21}\delta_Z,$$

$$C_3 = -\frac{1}{3}\cos\omega\cos(\omega-\alpha)f_P''' + \frac{f_P''\cos\omega}{2\rho d\cos(\omega-\alpha)}(d\sin\alpha - \rho\sin 2\beta) + \frac{\sin\omega\cos^2\omega}{2\cos^3(\omega-\alpha)}\left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{\rho^2}\right),$$

$$C_{11} = \frac{1}{\rho} - (x_P + f_P f_P')\frac{\sin\alpha}{\rho^2} = \frac{\cos\omega\cos\alpha}{\rho\cos(\omega-\alpha)},$$

$$D_{11} = \frac{f_P'}{\rho} + (x_P + f_P f_P')\frac{\cos\alpha}{\rho^2} = \frac{\cos\omega\sin\alpha}{\rho\cos(\omega-\alpha)},$$

$$C_{20} = \frac{\cos^2\omega}{2\cos^2(\omega-\alpha)}\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{\rho}\right) - \cos\omega\cos(\omega-\alpha)f_P'' =$$
$$= \frac{R'(\alpha)\cos^2\omega}{2\rho d\cos^2(\omega-\alpha)},$$
$$H_1 = H_Y\delta_Y + H_{XY}\delta_X\delta_Y + H_{YZ}\delta_Y\delta_Z,$$
$$H_2 = H_{20} + H_{2X}\delta_X + H_{2Z}\delta_Z,$$
$$h_3 = -\frac{\sin\omega}{\rho^2\cos(\omega-\alpha)},\quad H_Y = \frac{1}{\rho},\quad H_{XY} = -\frac{\sin\alpha}{\rho^2},$$
$$H_{YZ} = \frac{\cos\alpha}{\rho^2},\quad H_{20} = \frac{R}{2d\rho\sin\alpha},$$
$$H_{2X} = -\frac{\sin\omega}{2\rho^2\cos(\omega-\alpha)},\quad H_{2Z} = \frac{\cos\omega}{2\rho^2\cos(\omega-\alpha)},$$
$$H_{XY2} = \frac{\chi_1 R'd + \chi_2\rho d + \chi_3 d^2 + \chi_4\rho^2}{2d^2\rho^2\cos^2(\omega-\alpha)\sin^2\alpha},$$
$$\chi_1 = \cos^2\omega\sin\alpha,\quad \chi_2 = -\cos\omega\sin\alpha\times$$
$$\times\cos 2\beta\cos(\omega-\alpha),\quad \chi_3 = -\cos^2(\omega-\alpha)\sin 2\beta,$$
$$\chi_4 = \sin\omega\cos(\omega-\alpha)\sin^2\alpha,\ 2\beta = 2\omega-\alpha.$$

Неизвестные величины Δx, Δy можно найти из уравнений, выражающих условие экстремума эйконала на истинной траектории (принцип Ферма)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta x} = 0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\Delta y} = 0. \tag{9}$$

Эти уравнения можно записать в виде

$$C_1 + 2C_2\Delta x + 3C_3\Delta x^2 + h_3\delta_Y\Delta y + H_{XY2}\Delta y^2 = 0, \tag{10}$$
$$H_1 + 2H_2\Delta y + h_3\delta_Y\Delta x + 2H_{XY2}\Delta x\Delta y = 0. \tag{11}$$

Как показано в работе [5], в выражении для Δx не содержится членов, пропорциональных δ_X^2, δ_Z^2, $\delta_X\delta_Z$. Из соображений симметрии в выражении для Δx нет члена, пропорционального $\delta_X\delta_Y$; а в выражении для Δy нет члена пропорционального δ_Y^2. В результате выражения для Δx, Δy можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Delta x &= a_1\delta_X + b_1\delta_Z + g_1\delta_Y^2,\\ \Delta y &= a_2\delta_Y + b_2\delta_X\delta_Y + g_2\delta_Z\delta_Y.\end{aligned} \tag{12}$$

Подставим Δx, Δy в уравнения (10), (11), приведем подобные члены и приравняем нулю члены первого и второго порядка малости по δ_X, δ_Y, δ_Z. В результате получаем систему уравнений для определения коэффициентов a_1, b_1, a_2, b_2, g_2:

$$C_{11} + 2C_{20}a_1 = 0,$$
$$D_{11} + 2C_{20}b_1 = 0,\quad H_Y + 2H_{20}a_2 = 0,$$
$$G_Y + 2C_{20}g_1 + a_2h_3 + a_2^2H_{XY2} = 0,$$
$$H_{YZ} + 2H_{2Z}a_2 + h_3b_1 + 2H_{XY2}b_1a_2 + 2H_{20}g_2 = 0,$$
$$H_{XY} + 2H_{2X}a_2 + 2H_{20}b_2 + h_3a_1 + 2a_1a_2H_{XY2} = 0.$$

Решая систему относительно a_1, b_1, g_1, a_2, b_2, g_2, получаем

$$a_1 = -\frac{d}{R'(\alpha)}\frac{\cos\alpha\cos(\omega-\alpha)}{\cos\omega},\quad a_2 = -\frac{d\sin\alpha}{R},$$
$$b_1 = -\frac{d}{R'(\alpha)}\frac{\sin\alpha\cos(\omega-\alpha)}{\cos\omega},$$
$$g_1 = -\frac{1}{2C_{20}}(a_2h_3 + a_2^2H_{XY2} + G_Y), \tag{13}$$
$$g_2 = -\frac{1}{2H_{20}}\left[H_{YZ} + 2a_2(H_{2Z} + b_1H_{XY2}) + h_3b_1\right],$$
$$b_2 = -\frac{1}{2H_{20}}\left[H_{XY} + 2a_2(H_{2X} + a_1H_{XY2}) + h_3a_1\right].$$

Подставляя выражения для Δx, Δy с найденными выше коэффициентами в выражение для эйконала (8), можно получить следующее разложение для эйконала по степеням δ_X, δ_Y, δ_Z:

$$\begin{aligned}\Phi(BO_1) &= \rho + d + \delta_X\sin\alpha - \delta_Z\cos\alpha +\\ &+ \frac{\delta_X^2}{2}\frac{\cos^2\alpha}{L_1} + \frac{\delta_Y^2}{2L_2} + \frac{\delta_X\delta_Z}{2L_1}\sin 2\alpha +\\ &+ \frac{\delta_Z^2}{2L_1}\sin^2\alpha + W_{X3}\delta_X^3 + W_{X2Z}\delta_X^2\delta_Z +\\ &+ W_{XZ2}\delta_X\delta_Z^2 + W_{Z3}\delta_Z^3 + W_{XY2}\delta_X\delta_Y^2 + W_{ZY2}\delta_Z\delta_Y^2,\end{aligned} \tag{14}$$

где $\frac{1}{L_1} = \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{d}{R'(\alpha)}\right)$, $\frac{1}{L_2} = \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{d\sin\alpha}{R}\right)$,

$$W_{X3} = a_1(C_{12} + a_1C_{21} + a_1^2C_3) - \frac{1}{2\rho^2}\cos^2\alpha\sin\alpha,$$
$$W_{X2Z} = a_1(E + a_1D_{21} + 2b_1C_{21}) + b_1C_{12} + 3a_1^2b_1C_3 +$$
$$+ \frac{1}{2\rho^2}\cos\alpha(1 - 3\sin^2\alpha),$$
$$W_{XZ2} = b_1(E + b_1C_{21} + 2a_1D_{21}) + a_1D_{12} + 3a_1b_1^2C_3 -$$
$$- \frac{1}{2\rho^2}\sin\alpha(1 - 3\cos^2\alpha), \tag{15}$$
$$W_{Z3} = b_1(D_{12} + b_1D_{21} + b_1^2C_3) + \frac{1}{2\rho^2}\sin^2\alpha\cos\alpha,$$
$$W_{XY2} = a_1G_Y + a_2H_{XY} + a_2^2H_{2X} + h_3a_1a_2 +$$
$$+ H_{XY2}a_1a_2^2 - \frac{\sin\alpha}{2\rho^2},\quad W_{ZY2} = b_1G_Y + a_2H_{YZ} +$$
$$+ a_2^2H_{2Z} + h_3b_1a_2 + H_{XY2}b_1a_2^2 + \frac{\cos\alpha}{2\rho^2}.$$

Из приведенных выражений видно, что они не содержат коэффициенты g_1, g_2, b_2, и поэтому члены разложения смещения Δx в (12) по δ_X, δ_Y, δ_Z зависят только от a_1, b_1, а в разложении Δy – только от a_2. т.е.

$$\Delta x = a_1\delta_X + b_1\delta_Z,\quad \Delta y = a_2\delta_Y. \tag{16}$$

Мы доказали, что при нахождении разложения эйконала в ряд включая третьи степени $\delta_X^i\delta_Y^j\delta_Z^k$, где $0 \le i + j + k \le 3$, для нахождения координаты точки P_1 $x_{P1} = x_P + \Delta x$, $y_{P1} = \Delta y$ достаточно линейного приближения (16). Отсюда следует, что если не раскладывать выражение (6) в ряд, а непосредственно подставить в (6) Δx и Δy из формул (13), (16), а вместо $z_{P1} = z_P + \Delta z$ подставить $z_{P1} = f(\sqrt{x_{P1}^2 + y_{P1}^2})$, то получим значение эйконала с той же точностью, что и разложения эйконала в ряд, включая третьи степени $\delta_X^i, \delta_Y^j, \delta_Z^k$. Возвращаясь в исходную систему координат, которая повернута вокруг оси OZ на угол φ относительно данной системы, получаем формулы (4), (5). Кроме того, учитывая, что $\delta_Z = O(\delta_R^2)$, величиной δ_Z в выражении для Δx можно пренебречь, т.е. можно для нахождения Δx использовать формулу (5) вместо формулы (4).

Коэффициенты W_{X3}, W_{X2Z}, W_{XZ2}, W_{Z3} ряда (11) содержат третью производную от формы образующей $f_P''' = f'''(x_P)$. Как показано в работе [4], ее можно выразить через функцию отображения, после чего коэффициенты W_{X3}, W_{X2Z}, W_{XZ2}, W_{Z3} можно привести к виду

$$W_{X3} = \sum_{i=1}^{5} p_i e_i,\ W_{X2Z} = \sum_{i=1}^{5} u_i e_i,$$
$$W_{XZ2} = \sum_{i=1}^{5} v_i e_i,\ W_{Z3} = \sum_{i=1}^{5} q_i e_i, \tag{17}$$

где

$$e_1 = \frac{d}{R'\rho^2},\quad e_2 = \frac{d}{(R')^2\rho},\quad e_3 = \left(\frac{d}{R'\rho}\right)^2,$$

$$e_4 = \frac{d^2 R''}{(R')^3\rho^2},\quad e_5 = \frac{1}{\rho^2},$$

$$p_1 = \frac{\cos^2\alpha}{24\cos\beta\cos\omega}\left(9\sin\left(2\omega + \frac{\alpha}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + 7\sin\frac{3\alpha}{2} - 3\sin\left(2\omega - \frac{3\alpha}{2}\right) + 5\sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$p_2 = \frac{\cos^3\alpha}{12\cos\beta\cos\omega}\left(3\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 2\omega\right) - \sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$p_3 = \frac{\cos^2\alpha}{12\cos\omega}\left(\sin(\omega - \alpha) - 5\sin(\omega + \alpha)\right),$$

$$p_4 = -\frac{\cos^3\alpha}{6},\quad p_5 = -\frac{1}{2}\cos^2\alpha\sin\alpha,$$

$$u_1 = -\frac{\cos\alpha}{16\cos\omega\cos\beta}\left(-4\cos\frac{\alpha}{2} + 5\cos\frac{3\alpha}{2} + \right.$$
$$+ 7\cos\frac{5\alpha}{2} - 4\cos\left(\frac{\alpha}{2} - 2\omega\right) +$$
$$\left. + 3\cos\left(\frac{5\alpha}{2} - 2\omega\right) + 9\cos\left(\frac{3\alpha}{2} + 2\omega\right)\right),$$

$$u_2 = \frac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{4\cos\beta\cos\omega}\left(3\sin(\frac{\alpha}{2} - 2\omega) - \sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$u_3 = \frac{\cos\alpha}{8\cos\omega}\left(\cos(2\alpha - \omega) - 2\cos\omega + 5\cos(2\alpha + \omega)\right),$$

$$u_4 = -\frac{1}{2}\cos^2\alpha\sin\alpha,\quad u_5 = \frac{1}{2}\cos\alpha(1 - 3\sin^2\alpha),$$

$$v_1 = -\frac{\sin\alpha}{16\cos\omega\cos\beta}\left(4\cos\frac{\alpha}{2} + 5\cos\frac{3\alpha}{2} + \right.$$
$$+ 7\cos\frac{5\alpha}{2} + 4\cos\left(\frac{\alpha}{2} - 2\omega\right) +$$
$$\left. + 3\cos\left(\frac{5\alpha}{2} - 2\omega\right) + 9\cos\left(\frac{3\alpha}{2} + 2\omega\right)\right),$$

$$v_2 = \frac{\sin^2\alpha\cos\alpha}{4\cos\beta\cos\omega}\left(3\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 2\omega\right) - \sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$v_3 = \frac{\sin\alpha}{8\cos\omega}\left(\cos(2\alpha - \omega) + 2\cos\omega + 5\cos(2\alpha + \omega)\right),$$

$$v_4 = -\frac{1}{2}\cos\alpha\sin^2\alpha,\quad v_5 = \frac{1}{2}\sin\alpha(3\cos^2\alpha - 1),$$

$$q_1 = \frac{-\sin^2\alpha}{24\cos\beta\cos\omega}\left(9\cos\left(2\omega + \frac{\alpha}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + 7\cos\frac{3\alpha}{2} + 3\cos\left(2\omega - \frac{3\alpha}{2}\right) + 5\sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$q_2 = \frac{\sin^3\alpha}{12\cos\beta\cos\omega}\left(3\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 2\omega\right) - \sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$q_3 = \frac{\sin^2\alpha}{12\cos\omega}\left(\cos(\omega - \alpha) + 5\cos(\omega + \alpha)\right),$$

$$q_4 = -\frac{\sin^3\alpha}{6},\quad q_5 = \frac{1}{2}\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

Возвращаясь в исходную систему координат и учитывая, что $\delta_X = \delta_R\cos\varphi$, $\delta_Y = -\delta_R\sin\varphi$, получаем из формулы (11) выражение для эйконала:

$$\Phi(R,\varphi) = \rho + d + \delta_R\sin\alpha\cos\varphi - \delta_Z\cos\alpha +$$
$$+ \frac{\delta_R^2}{2}\left(\frac{\cos^2\varphi}{L_1}\cos^2\alpha + \frac{\sin^2\varphi}{L_2}\right) +$$
$$+ \frac{\delta_R\delta_Z}{2L_1}\cos\varphi\sin 2\alpha + \frac{\delta_Z^2}{2L_1}\sin^2\alpha +$$
$$+ W_{X3}\delta_R^3\cos^3\varphi + W_{X2Z}\delta_R^2\delta_Z\cos^2\varphi +$$
$$+ W_{XZ2}\delta_R\delta_Z^2\cos\varphi + W_{Z3}\delta_Z^3 +$$
$$+ W_{XY2}\delta_R^3\cos\varphi\sin^2\varphi + W_{ZY2}\delta_Z\delta_R^2\sin^2\varphi. \tag{18}$$

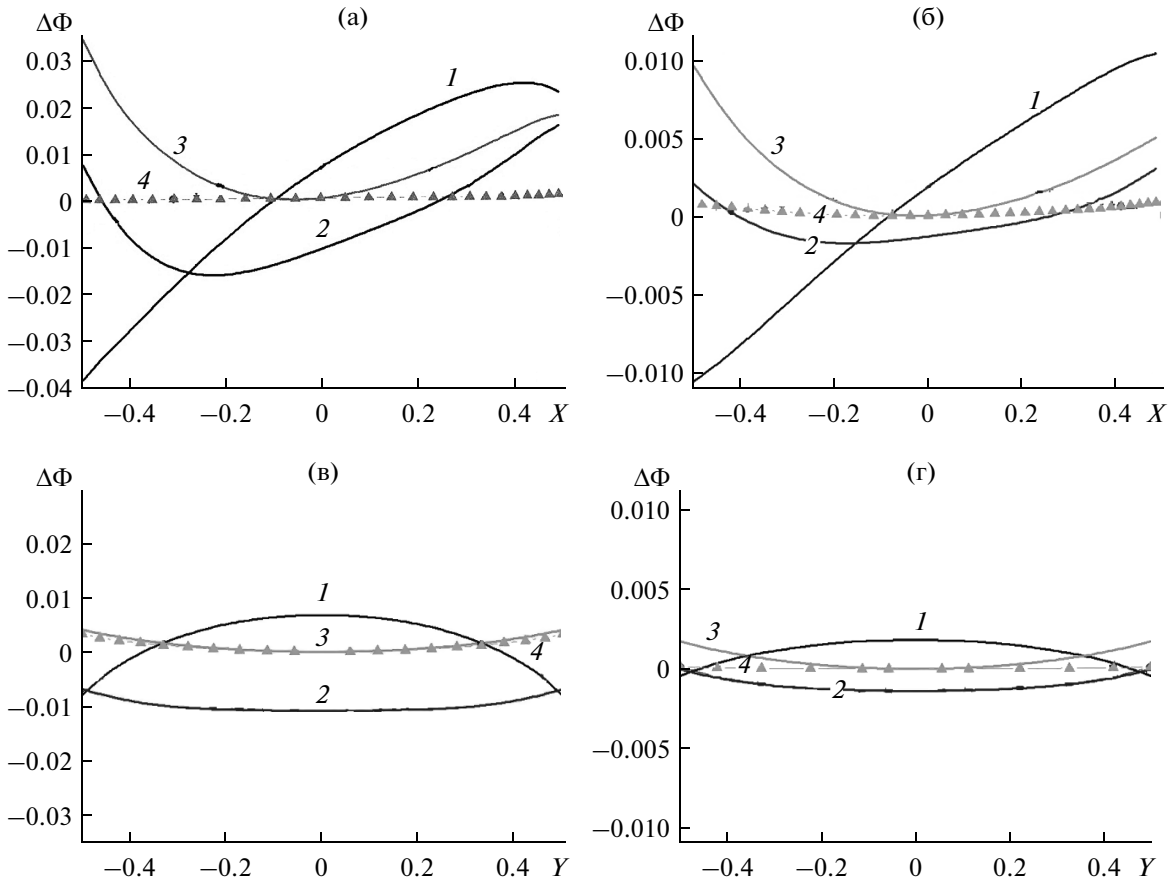

Рис. 2. Ошибка вычисления эйконала в меридиональной (а, б) и сагиттальной (в, г) плоскостях для двух наборов параметров смещения: а, в) $\rho_0 = 0.3$, $d_0 = 1.2$, $f_e = 0.62$, $\delta_R = 0.2$, $\delta_Z = -0.09$; б, г) $\rho_0 = 0.5$, $d_0 = 1.2$, $f_e = 0.67$, $\delta_R = 0.224$, $\delta_Z = -0.05$. Кривая *1* рассчитана по формуле (19), кривая *2* – по формуле (18), кривая *3* – по формулам (3), (4), кривая *4* (пунктир) – по формулам (3), (5).

При обнулении членов третьего порядка малости формула (18) переходит в полученную в работе [3] формулу

$$\Phi(R,\varphi) = \rho + d + \delta_R \sin\alpha\cos\varphi - \delta_Z\cos\alpha + \\ + \frac{\delta_R^2}{2}\left(\frac{\cos^2\varphi}{L_1}\cos^2\alpha + \frac{\sin^2\varphi}{L_2}\right) + \\ + \frac{\delta_R\delta_Z}{2L_1}\cos\varphi\sin 2\alpha + \frac{\delta_Z^2}{2L_1}\sin^2\alpha. \quad (19)$$

2. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ФОРМУЛ ДЛЯ ЭЙКОНАЛА

Прежде чем переходить к анализу и минимизации аберраций, оценим точность полученных формул. Для анализа точности формул (3), (18), (19) были проведены расчеты распределения эйконала в двухзеркальных апланатических системах 1-го типа (системах Шварцшильда [6]) с двумя наборами параметров смещений:

а) $\rho_0 = 0.3$, $d_0 = 1.2$, $f_e = 0.62$, $\delta_R = 0.2$, $\delta_Z = -0.09$,

б) $\rho_0 = 0.5$, $d_0 = 1.2$, $f_e = 0.67$, $\delta_R = 0.224$, $\delta_Z = -0.05$,

которые обеспечивают наклон волнового фронта на угол 20 град. Введены следующие обозначения: ρ_0 – расстояние от источника до вспомогательного зеркала вдоль оси, d_0 – расстояние между зеркалами вдоль оси системы, f_e – фокальный радиус, $D = 1$ – диаметр апертуры главного зеркала. Разность между величинами эйконала на главном зеркале, полученными численным методом трассировки лучей и по приближенным формулам (3), (18), (19) для систем с наборами геометрических параметров (а) и (б), показана на рис. 2 в меридиональной и сагиттальной плоскостях. Кривые рассчитаны по формулам (3), (4); (3), (5); (18) и (19). На рисунках видно, что формула (19) в меридиональной плоскости уступает по точности остальным формулам благодаря наличию в ошиб-

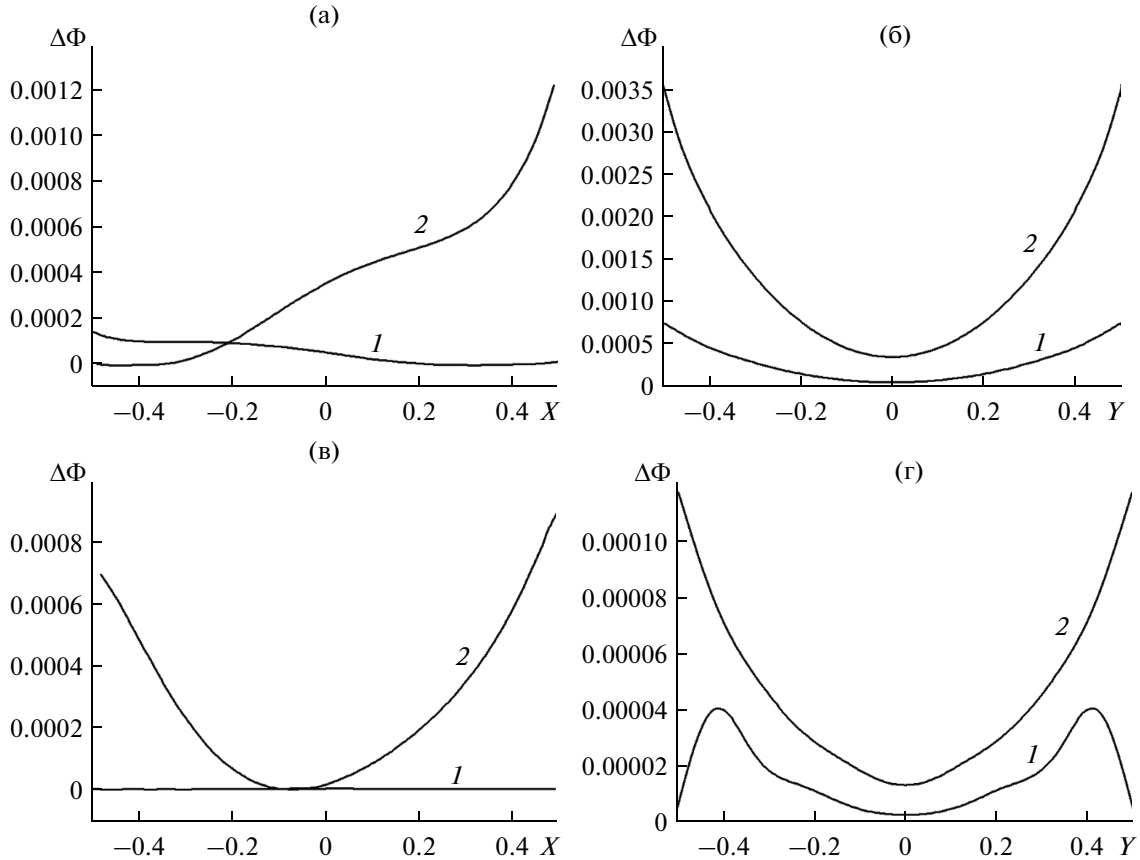

Рис. 3. Ошибка вычисления эйконала в меридиональной (а, в) и сагиттальной (б, г) плоскостях для двух систем: а,б) $d_0 = 1.2$, $\rho_0 = 0.3$, $f_e = 0.62$; кривая *1* – $\delta_X = 0.1$, $\delta_Z = -0.03$, кривая *2* – $\delta_X = 0.2$, $\delta_Z = -0.09$; в, г) $d_0 = 1.2$, $\rho_0 = 0.5$, $f_e = 0.67$; кривая *1* – $\delta_X = 0.1$, $\delta_Z = -0.015$, кривая *2* – $\delta_X = 0.224$, $\delta_Z = -0.05$.

ке большой линейной составляющей. При этом самое точное приближение эйконала дают формулы (3), (5). Также видно, что при увеличении ρ_0 ошибка вычисления эйконала в обеих плоскостях уменьшается.

На рис. 3 приведены распределения ошибки вычисления эйконала на главном зеркале по формулам (3), (5) в сагиттальной и меридиональной плоскостях в зависимости от координат и величин смещения облучателя для систем с двумя разными наборами геометрических параметров (см. выше (а) и (б)). Видно, что в меридиональной плоскости (см. рис. 3а, 3в) ошибка не только меньше, чем в сагиттальной (см. рис. 3б, 3г), но и значительно быстрее уменьшается при уменьшении величины смещения облучателя (более чем на порядок при уменьшении величины смещения в два раза). В сагиттальной плоскости ошибка с уменьшением величины смещения облучателя падает значительно медленнее, однако во всех случаях она не превышает этой величины в четвертой степени.

3. АНАЛИЗ И МИНИМИЗАЦИЯ АБЕРРАЦИЙ

Перейдем к анализу аберраций, возникающих при смещении облучателя из фокуса системы. Величиной аберрации эйконала $\delta\Phi$ будем называть отличие его распределения в апертуре главного зеркала от наиболее близкого линейного распределения. Эта величина равна сумме эйконала (2) и эйконала плоской волны, падающей под соответствующим углом θ на главное зеркало:

$$\delta\Phi = \Phi(R, \varphi) - \Phi(0, 0) - X\sin\theta - Z\cos\theta.$$

Здесь $\Phi(R, \varphi)$ – значение эйконала в точке на главном зеркале с координатами $X = R\cos\varphi$, $Y = R\sin\varphi$, $Z = F(R)$, вычисленное по формулам (3), (18) или (19) либо с помощью трассировки лучей, θ – угол наклона волнового фронта, обеспечивающий минимальные значения $|\delta\Phi|$.

На рис. 4 приведены распределения величины аберрации эйконала $\delta\Phi$ в меридиональной и сагиттальной плоскостях. Приведена кривая *3*, показывающая точное значение величины аберра-

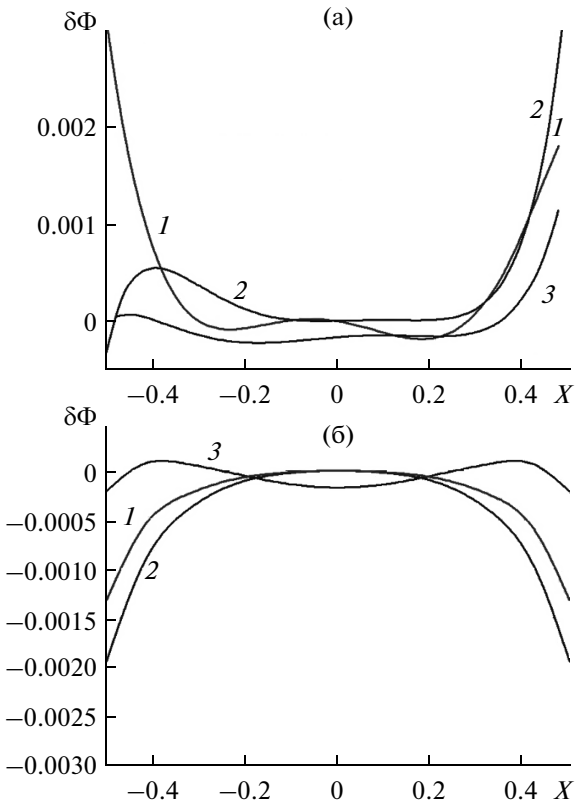

Рис. 4. Величина аберрации в меридиональной (а) и сагиттальной (б) плоскостях для системы $d_0 = 1.2$, $\rho_0 = 0.3$, $f_e = 0.62$, $\delta_X = 0.2$, $\delta_Z = -0.09$: кривая *1* рассчитана по формуле (19), кривая *2* – по формулам (3), (5), кривая *3* показывает точное значение величины аберрации.

ции, а также кривые, вычисленные по формулам (3), (5) и (19). Как видно из рис. 4, величина аберраций зависит от положения точки наблюдения на зеркале.

Для характеристики величины аберрации при проведении оптимизации удобно ввести следующий интегральный параметр:

$$S_A(\theta) = \min_{\delta_R,\delta_Z}\times$$
$$\times\sqrt{\int_0^{R_A}\int_0^{2\pi}\left(\Phi(R,\varphi)-\Phi(0,0)-X\sin\theta-Z\cos\theta\right)^2 R\,dR\,d\varphi}, \quad (20)$$

который определим как среднеквадратическую аберрацию (СКА) эйконала в апертуре. Здесь R_A – радиус апертуры по которой проводится интегрирование, δ_R, δ_Z – величины смещения источника из фокуса по соответствующей координате.

В качестве примера использования полученных формул проведем оптимизацию двухзеркальной системы Шварцшильда, первые два параметра которой ρ_0, d_0, определяющие геометрию системы, заданы, а фокальный радиус f_e, будет найден из условия минимизации среднеквадратической аберрации при заданном значении угла θ. Таким образом, в работе была проведена оптимизация системы Шварцшильда со значениями $d_0 = 1.2$, $\rho_0 = 0.3$ при $\theta = 20°$. При этом находились величины δ_R, δ_Z и f_e. При вычислении интеграла (20) по полной апертуре ($R < 0.5$) были получены следующие значения f_e: при использовании формулы (19) $f_e = 0.66$, при использовании формулы (5) $f_e = 0.67$; и при использовании трассировки лучей $f_e = 0.64$. При интегрировании в формуле (20) по усеченной апертуре ($R < 0.4$) значения f_e получились следующими: при использовании формулы (19) $f_e. = 0.64$, при использовании формул (3), (5) $f_e = 0.66$ и при использовании трассировки лучей – $f_e = 0.63$, что близко к значению $f_e = 0.62$, полученному с использованием метода лучевой трассировки в работе [7]. Для системы с параметрами $d_0 = 1.2$, $\rho_0 = 0.5$ при $\theta = 20°$ в процессе минимизации СКА с использованием для вычисления эйконала формулы (19), формул (3), (5) и трассировкой лучей были получены значения $f_e = 0.645$, 0.67 и 0.635 соответственно. Для системы с параметрами $d_0 = 0.9$, $\rho_0 = 0.3$ при $\theta = 20°$ в процессе минимизации величины среднеквадратической аберрации с использованием формулы (19), формул (3), (5) и при использовании трассировки лучей были получены значения $f_e = 0.53$, 0.54 и 0.525.

Отметим, что во всех трех рассмотренных случаях ближе всего к последнему (истинному) оптимальному значению f_e приводит использование формулы (19). Зависимости СКА от величины f_e для трех приведенных систем представлены на рис. 5. Кривые вычислены с использованием формул (3), (5) и (19) и при использовании трассировки лучей.

Формулы (3), (5), (18), (19) также могут быть использованы для нахождения фокальной кривой. Уравнение фокальной кривой определяется соотношением величин смещений источника δ_R, δ_Z, которые обеспечивают минимум аберраций для заданного угла наклона фронта θ. Эйконал на зеркале в точке с координатами (X, Y, Z) с добавлением расстояния от этой точки до фронта плоской волны, падающей на зеркало под углом θ в плоскости XZ, имеет вид

$$\Phi_1(R,\varphi) + \Phi_2(R,\varphi) - X\sin\theta - Z\cos\theta,$$

где $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, $Z = F(R)$, Φ_1 – нечетная по φ составляющая эйконала Φ, которая представлена формулой (18), а Φ_2 – четная составляющая. Уравнение фокальной кривой можно получить, полагая, что значение четной составляющей эй-

конала в центре апертуры равно полусумме значений на краях при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$:

$$\Phi_2(0,0) - F(0)\cos\theta = \frac{1}{2}\Big(\Phi_2(R_m,0) + \\ + \Phi_2\left(R_m,\frac{\pi}{2}\right) - 2F(R_m)\cos\theta\Big), \quad (21)$$

где $R_m = R(\alpha_m)$ – выбранный радиус на апертуре.

Из формулы (18) следует:

$$\Phi_2(0,0) = \rho_0 + d_0 - \delta_Z + \frac{\delta_R^2}{2}\frac{1}{L_1(0)} + W_{X2Z}^{(0)}\delta_R^2\delta_Z,$$

$$\Phi_2(R_m,0) = \rho + d - \delta_Z\cos\alpha + \frac{\delta_R^2}{2}\frac{\cos^2\alpha_m}{L_1(\alpha_m)} + \\ + \frac{\sin^2\alpha_m}{2L_1(\alpha_m)}\delta_Z^2 + W_{X2Z}^{(m)}\delta_R^2\delta_Z + W_{Z3}^{(m)}\delta_Z^3,$$

$$\Phi_2(R_m,\frac{\pi}{2}) = \rho + d - \delta_Z\cos\alpha + \frac{\delta_R^2}{2}\frac{1}{L_2(\alpha_m)} + \\ + \frac{\sin^2\alpha_m}{2L_1(\alpha_m)}\delta_Z^2 + W_{ZY2}^{(m)}\delta_R^2\delta_Z + W_{Z3}^{(m)}\delta_Z^3,$$

где $W_*^{(0)} = W_*(0)$, $W_*^{(m)} = W_*(\alpha_m)$.

В работе [5] получена формула, выражающая угол наклона фронта в параксиальном приближении через величины смещения δ_R, δ_Z:

$$\sin\theta = \frac{\delta_R}{f_e} + \frac{(f_e - d_0)}{f_e^2\rho_0}\delta_R\delta_Z + \\ + \frac{\delta_R^3}{4f_e^3\rho_0^2}[(f_e-\rho_0)^2 - 2(f_e-d_0)^2] + \frac{(f_e-d_0)^2}{f_e^3\rho_0^2}\delta_R\delta_Z^2,$$

из которой следует

$$\cos\theta = 1 - \frac{\delta_R^2}{2f_e^2} - \frac{(f_e-d_0)}{f_e^3\rho_0}\delta_R^2\delta_Z.$$

Подставляя полученные выражения в (21) и учитывая, что $\rho + d = \rho_0 + d_0 + t_0$, $t_0 = F(R_m) - F(0)$, получаем уравнение фокальной кривой

$$\delta_Z(\cos\alpha_m - 1) - \frac{\delta_Z^2}{2}\frac{\sin^2\alpha_m}{L_1(\alpha_m)} - W_{Z3}^{(m)}\delta_Z^3 = \\ = \frac{\delta_R^2}{4}\left(\frac{\cos^2\alpha_m}{L_1(\alpha_m)} + \frac{1}{L_2(\alpha_m)} - \frac{2}{L_1(0)} + \frac{2t_0}{f_e^2}\right) + \\ + \frac{\delta_R^2\delta_Z}{2}\left(W_{ZY2}^{(m)} + W_{X2Z}^{(m)} - 2W_{X2Z}^{(0)} + \frac{2t_0(f_e-d_0)}{f_e^3\rho_0}\right). \quad (22)$$

Если ограничиться членами только четвертого порядка малости, то уравнение фокальной кривой (22) переходит в уравнение

$$\delta_Z(\cos\alpha_m - 1) - \frac{\delta_Z^2}{2}\frac{\sin^2\alpha_m}{L_1(\alpha_m)} = \frac{\Lambda\delta_R^2}{4}, \quad (23)$$

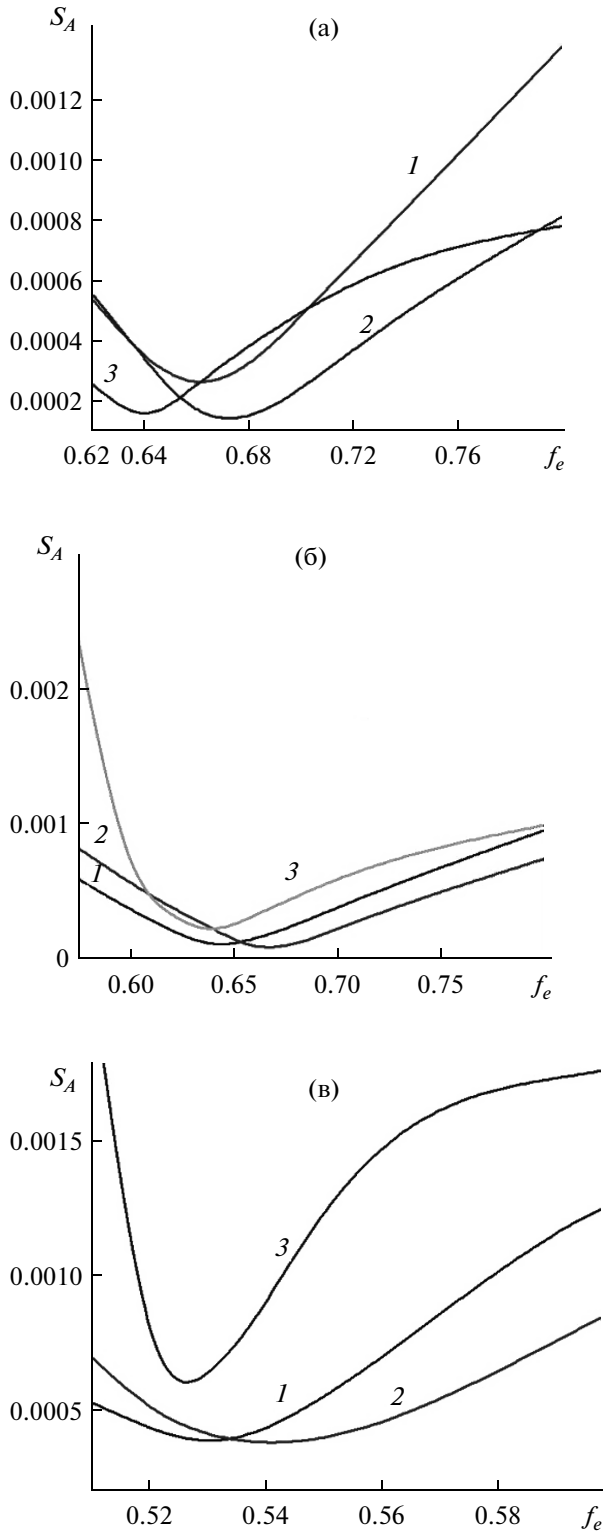

Рис. 5. Зависимость среднеквадратической аберрации от фокального радиуса в системах с различными параметрами: а) $d_0 = 1.2$, $\rho_0 = 0.3$, б) $d_0 = 1.2$, $\rho_0 = 0.5$, в) $d_0 = 0.9$, $\rho_0 = 0.3$. Кривые *1* вычислены по формуле (19), кривые *2* – по формулам (3) и (5), кривые *3* – при использовании трассировки лучей.

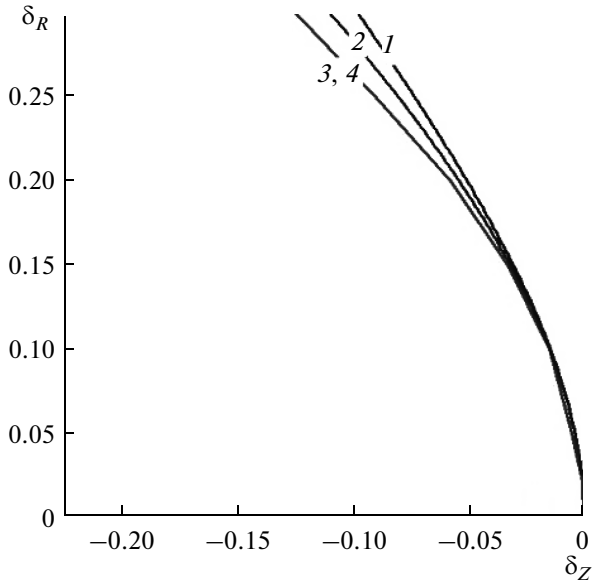

Рис. 6. Фокальные кривые в системе с параметрами $d_0 = 1.2$, $\rho_0 = 0.3$, $f_e = 0.62$. Кривая *1* рассчитана по формуле (23), кривая *2* – по формуле (22), кривая *3* получена в результате минимизации СКА с использованием формул (3), (5), кривая *4* взята из предыдущей работы [7].

которое может быть записано в разрешенном относительно δ_Z виде

$$\delta_Z = \frac{\Lambda}{4(\cos\alpha_m - 1)}\delta_R^2 + \frac{\sin^2\alpha_m \Lambda^2}{32(\cos\alpha_m - 1)^3 L_1(\alpha_m)}\delta_R^4, \quad (24)$$

где $\Lambda = \dfrac{\cos^2\alpha_m}{L_1(\alpha_m)} + \dfrac{1}{L_2(\alpha_m)} - \dfrac{2}{L_1(0)} + \dfrac{2t_0}{f_e^2}$

Фокальную кривую также можно найти с помощью формулы (3) в результате минимизации величины СКА или максимизации коэффициента усиления по δ_R, δ_Z.

На рис. 6 приведены фокальные кривые для системы Шварцшильда, полученные с помощью формул (3), (5) и (22), (23), с параметрами $\rho_0 = 0.3$, $d_0 = 1.2$, $f_e = 0.62$. Видно, что кривая *3* с графической точностью совпадает с кривой *4*, полученной в работе [7] в результате максимизации коэффициента усиления методом физической оптики.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе полученных в работе результатов можно сделать следующие выводы:

1. Погрешность полученных в работе формул для эйконала на поверхности главного зеркала – порядка четвертой степени величины смещения облучателя из фокуса.

2. Наименьшую погрешность вычисления эйконала на поверхности главного зеркала обеспечивают формулы (3), (5).

3. Погрешности описания аберраций эйконала примерно одинаковы для всех формул.

4. Минимум среднеквадратической аберрации по величине фокального радиуса наилучшим образом предсказывается формулой (19).

5. Фокальная кривая наиболее точно описывается с использованием минимизации среднеквадратической аберрации и формул (3), (5).

Все полученные в работе формулы выведены для двухзеркальных систем 1-го типа (типа Кассегрена). Можно показать, что они верны и для систем 2-го типа (типа Грегори), если в соответствующих формулах заменить α на $-\alpha$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-07-07797).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Михельсон Н.Н.* Оптические телескопы: Теория и конструкция. М.: Наука, 1976.
2. *Венецкий А.С., Калошин В.А.* // Докл. АН. 2010. Т. 434. № 2. С. 178.
3. *Венецкий А.С., Калошин В.А.* // РЭ. 2012. Т. 57. № 9. С. 1004.
4. *Венецкий А.С., Калошин В.А.* // РЭ. 2014. Т. 59. № 11. С. 1102.
5. *Schwarzschild K.* // Mathematisch-Physikalische Klassen. 1906. B. 4. № 2. S.1.
6. *Калошин В.А., Фролова Е.В.* // Журн. радиоэлектроники (электронный ресурс). 2015. № 3. http://jre.cplire.ru/jre/mar15/12/text.pdf.