

АБЕРРАЦИИ В ТРЕХЗЕРКАЛЬНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ АПЛАНАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

А. С. Венецкий

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
125009, Москва, ул. Моховая, 11-7

Статья поступила в редакцию 20 марта 2018 г.

Аннотация. Выведена формула для эйконала на поверхности главного зеркала трехзеркальной системы при смещении источника из фокуса и члены ее разложения по степеням величин продольного и поперечного смещения, включая члены первого и второго порядка малости. Погрешность формулы пропорциональна четвертой степени величины смещения. Выведено условие отсутствия астигматизма на оси системы и на произвольном радиусе в апертуре. Получено приближенное уравнение фокальной кривой. Проведена оценка точности полученной формулы для эйконала и его aberrаций в трехзеркальной системе.

Ключевые слова: трехзеркальные системы, апланатические системы, aberrации, астигматизм.

Abstract. Two-mirror aplanatic systems are used in optical telescopes. These systems have no aberrations proportional to the first degree of displacement of the source from the focus. The two-mirror aplanatic systems have two free parameters that is not enough to minimize aberrations proportional to the second etc. powers of displacement of the source. When using a three-mirror aplanatic system we have an additional degree of freedom due to the choice of the form of the third mirror. Therefore, it is interesting to construct the theory of aberrations for the case of three-mirror systems. For this purpose the new formula for the eikonal distribution on the output surface of the three-mirror system is derived in this paper. The error of the formula is proportional to the fourth degree of displacement from the focus. The condition of absence of astigmatism on the axis of the system and at an arbitrary radius in the aperture is derived. The approximate equation of the focal curve is

obtained. The accuracy of obtained formula for eikonal and its aberration in three-mirror system was verified.

Key words: three-mirror systems, aplanatic systems, aberrations, astigmatism.

Введение

Осесимметричные зеркальные системы используются в различных частотных диапазонах электромагнитных волн. Наиболее известными являются однозеркальные (параболические) антенны. Двухзеркальные апланатические системы, в которых отсутствуют aberrации, пропорциональные 1-й степени смещения источника из фокуса, используются, главным образом, в оптических телескопах [1]. Двухзеркальные апланаты имеют два свободных параметра, что бывает недостаточно для минимизации aberrаций, пропорциональных 2-й, 3-й и т.д. степеням смещения источника. При использовании трехзеркальных систем [1, 2] появляется дополнительная степень свободы – за счет выбора формы третьего зеркала.

В работах [3-5] развита однопараметрическая теория aberrаций эйконала в двухзеркальных системах, на основе которой получена приближенная формула для эйконала на произвольной точке главного зеркала, имеющая погрешность порядка четвертой степени величины продольного и поперечного смещения источника из фокуса, а также его разложение по степеням этих смещений, включая члены первого и второго порядка малости. С учетом наличия дополнительной степени свободы представляет интерес обобщение однопараметрической теории aberrаций на случай трехзеркальных систем. Для цилиндрических трехзеркальных систем такое обобщение проведено в работе [6]. В данной работе такое обобщение проведено на случай осесимметричных трехзеркальных систем.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачи синтеза, анализа и минимизации астигматизма осесимметричной трехзеркальной апланатической системы, которая преобразует сферический фронт с центром в точке O в другой сферический

фронт с центром в точке O_2 . Такая система может быть реализована в виде четырех вариантов. Соответствующие образующие зеркал показаны на рис. 1. При формировании на выходе системы плоской волны фокус O_2 находится в бесконечности.

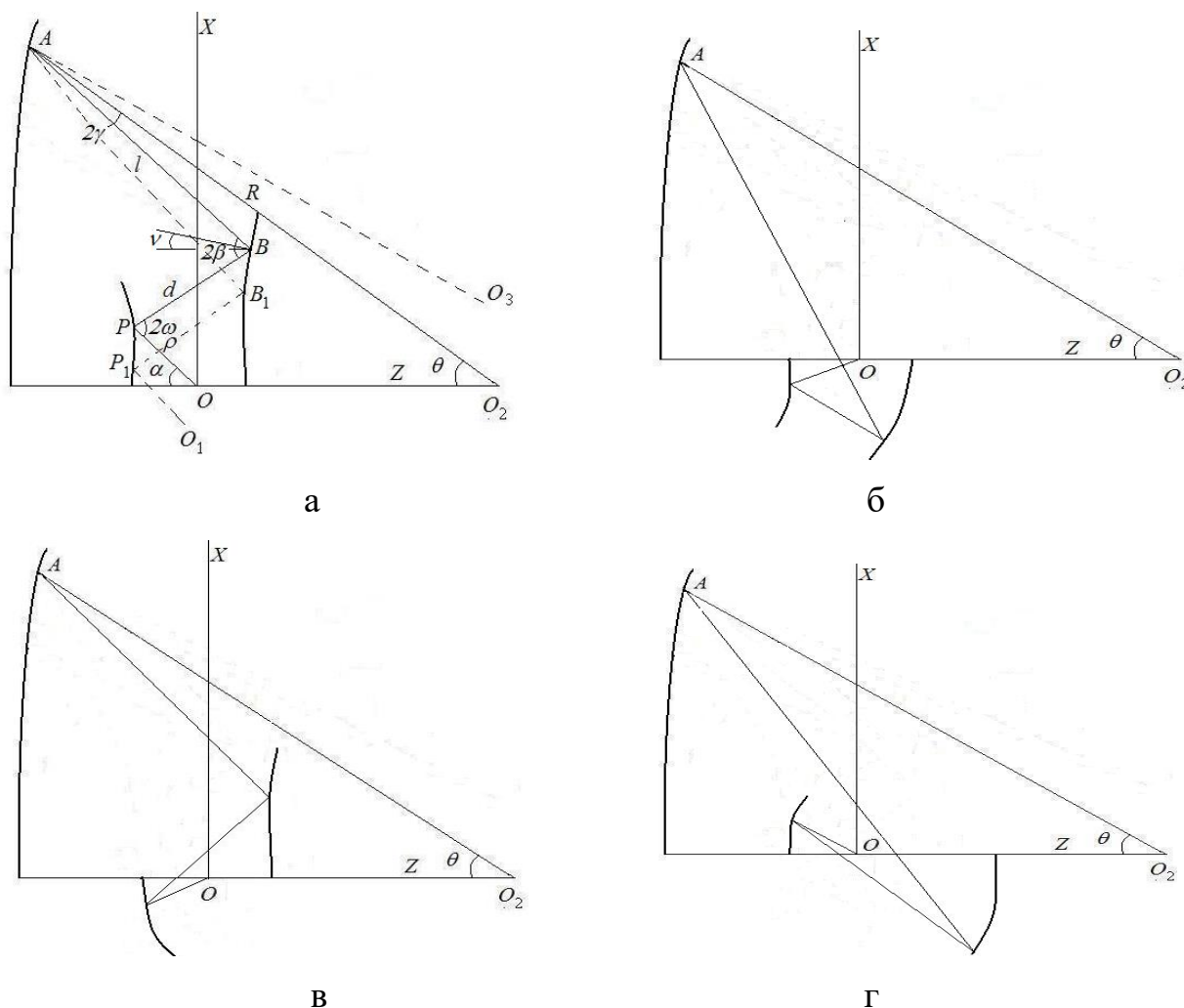


Рис.1. Варианты трехзеркальных систем

Предположим, что форма образующей главного зеркала (на рисунке слева) известна и задана в декартовой системе с центром в точке O уравнением

$$Z = F(X), \tag{1}$$

или в полярной системе с центром в точке O_2

$$R = R(\theta) \tag{1'}$$

Тогда два других зеркала определяются однозначно из условия фокусировки и выполнения условия апланатизма

$$\sin \theta = m \sin \alpha - \text{в случае конечного второго фокуса,} \quad (2)$$

$$r_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = f_e \sin \alpha - \text{когда второй фокус на бесконечности,} \quad (2')$$

где $m, f_e = \text{const}$, углы α, θ показаны на рис.1.

Цель данной работы – найти формулу для эйконала при выносе источника из фокуса O , как функцию величины продольного и поперечного смещения и параметров системы $\rho_0, d_0, l_0, m (f_e), F(X)$ и минимизировать величину астигматизма. Параметры ρ, d, l показаны на рис.1а, нижний индекс соответствует значению параметра на оси системы.

2. Синтез вспомогательных зеркал

Для решения задачи определения формы образующей вспомогательных зеркал используем результаты, полученные в работе [7]. Рассмотрим для определенности вариант расположения зеркал, показанный на рис.1а. Если задано положение фокусов O и O_2 и образующая главного зеркала, то геометрия задачи определяется четырьмя параметрами: ρ_0, d_0, l_0, m (или f_e).

Задача сводится к интегрированию дифференциального уравнения

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \left(\frac{1}{\rho} \right) S(\alpha) + T(\alpha),$$

решение которого имеет вид

$$\frac{1}{\rho} = C \exp \left[\int S(\alpha) d\alpha \right] + \exp \left[\int S(\alpha) d\alpha \right] \int T(\alpha) \exp \left[- \int S(\alpha) d\alpha \right] d\alpha,$$

$$\text{где } S(\alpha) = \frac{(C_0 - \Phi_A - Z_*) \tan(\gamma + \theta/2) - (C_0 - \Phi_A + Z_*) \tan(\alpha/2)}{(C_0 - \Phi_A + Z_*) + (C_0 - \Phi_A - Z_*) \tan(\gamma + \theta/2) \tan(\alpha/2)},$$

$$T(\alpha) = \frac{2(\tan(\alpha/2) - \tan(\gamma + \theta/2))}{(C_0 - \Phi_A + Z_*) + (C_0 - \Phi_A - Z_*) \tan(\gamma + \theta/2) \tan(\alpha/2)},$$

$$C_0 = \rho_0 + d_0 + l_0 + R_0, \Phi_A = R_A + X_A / \sin(2\gamma + \theta), Z_* = X_A / \tan(2\gamma + \theta) + F(X_A)$$

-для случая конечного фокуса,

$$S(\alpha) = \frac{(C_0 - \Phi_A - Z_*) \tan(\gamma) - (C_0 - \Phi_A + Z_*) \tan(\alpha/2)}{(C_0 - \Phi_A + Z_*) + (C_0 - \Phi_A - Z_*) \tan(\gamma) \tan(\alpha/2)},$$

$$T(\alpha) = \frac{2(\tan(\alpha/2) - \tan(\gamma))}{(C_0 - \Phi_A + Z_*) + (C_0 - \Phi_A - Z_*) \tan(\gamma) \tan(\alpha/2)},$$

$$C_0 = 2\rho_0 + 2l_0, \Phi_A = -F(X_A) + X_A / \sin(2\gamma), Z_* = X_A / \tan(2\gamma) + F(X_A)$$

- для фокуса на бесконечности.

Для апланатической системы решение приводится к однократному интегралу:

$$\frac{1}{\rho} = \left[\frac{1}{2(\rho_0 - \hat{l}_0)} + \frac{1}{2d_0} \right] + \left[\frac{1}{2(\rho_0 - \hat{l}_0)} - \frac{1}{2d_0} \right] \cos \alpha - \frac{\hat{l}_0}{\rho_0(\rho_0 - \hat{l}_0)} \exp \Psi,$$

$$\Psi = \int_0^\alpha \frac{(\rho_0 - \hat{l}_0) \tan \gamma - d_0 \tan(\alpha/2)}{d_0 + (\rho_0 - \hat{l}_0) \tan \gamma \tan(\alpha/2)} d\alpha, \hat{l}_0 = Z_*^0 - d_0 + \rho_0 = \frac{1}{4F_2} - l_0$$

для фокуса на бесконечности,

$$\Psi = \int_0^\alpha \frac{(\rho_0 - \hat{l}_0) \tan(\gamma + \theta/2) - d_0 \tan(\alpha/2)}{d_0 + (\rho_0 - \hat{l}_0) \tan(\gamma + \theta/2) \tan(\alpha/2)} d\alpha, \hat{l}_0 = Z_*^0 - d_0 + \rho_0 = \frac{1}{4F_2 - 1/R_0} - l_0$$

для конечного фокуса.

3. Формула для эйконала

Эйконал на поверхности зеркала в произвольной точке $A(r, \varphi)$ можно вычислить непосредственно сложением оптических путей

$$\Phi(r, \varphi) = |O_1P_1| + |P_1B_1| + |B_1A| = \sqrt{(x_1 + \delta_R)^2 + y_1^2 + (z_1 + \delta_Z)^2} + \sqrt{(X_1 - x_1)^2 + (Y_1 - y_1)^2 + (Z_1 - z_1)^2} + \sqrt{(r \cos \varphi - X_1)^2 + (r \sin \varphi - Y_1)^2 + (F(r) - Z_1)^2} \quad (3)$$

где координаты $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $B_1(X_1, Y_1, Z_1)$ вычисляются с помощью формул:

$$x_1 = x_P + \Delta x \cos \varphi - \Delta y \sin \varphi, y_1 = y_P + \Delta x \sin \varphi + \Delta y \cos \varphi,$$

$$z_1 = f(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}) - \text{уравнение первого зеркала,}$$

$$X_1 = X_B + \Delta X \cos \varphi - \Delta Y \sin \varphi, Y_1 = Y_B + \Delta X \sin \varphi + \Delta Y \cos \varphi,$$

$$Z_1 = G(\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}) - \text{уравнение второго зеркала.}$$

Неизвестные $\Delta x, \Delta y, \Delta X, \Delta Y$ – можно найти, предварительно разложив $\Phi(r, \varphi)$, определенную в (3), в ряд по степеням $\Delta x, \Delta y, \Delta X, \Delta Y$, включая

члены второго порядка и записать условие экстремума согласно принципу Ферма

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta X} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta Y} = 0. \quad (4)$$

Из приведенных уравнений находим:

$$\Delta x = -\frac{\cos(\omega - \alpha)}{\cos \omega} \frac{(R\theta'd + l\rho)}{R(\theta')^2(R + l - C_A lR)} (\delta_R \cos \alpha \cos \varphi + \delta_Z \sin \alpha),$$

$$\Delta y = -\frac{\sin \alpha (Rmd + l\rho)}{mR_B R} \delta_R \sin \varphi, \quad (5)$$

$$\Delta X = -\frac{l \cos \theta \cos \nu}{Rm \cos \alpha \cos \beta} (\delta_R \cos \alpha \cos \varphi + \delta_Z \sin \alpha),$$

$$\Delta Y = -\frac{l}{Rm} \delta_R \sin \varphi, \quad \nu = \gamma + \theta/2 - \omega + \alpha/2$$

Формулы (5) – для конечного фокуса.

$$\Delta x = -\frac{\cos(\omega - \alpha)}{\cos \omega} \frac{(r'd + l\rho)}{(r')^2(1 - C_A l)} (\delta_R \cos \alpha \cos \varphi + \delta_Z \sin \alpha),$$

$$\Delta y = -\frac{\sin \alpha (f_e d + l\rho)}{f_e R_B} \delta_R \sin \varphi, \quad R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}, \quad (5')$$

$$\Delta X = -\frac{l \cos \nu}{f_e \cos \alpha \cos \beta} (\delta_R \cos \alpha \cos \varphi + \delta_Z \sin \alpha),$$

$$\Delta Y = -\frac{l}{f_e} \delta_R \sin \varphi, \quad \nu = \gamma - \omega + \alpha/2$$

Формулы (5') – для фокуса на бесконечности.

Если смещенный источник расположен на фокальной кривой, то формулы для Δx , ΔX в (5) и (5') упрощаются:

$$\Delta x = -\frac{\cos(\omega - \alpha)}{\cos \omega} \frac{(R\theta'd + l\rho)}{R(\theta')^2(R + l - C_A lR)} \delta_R \cos \alpha \cos \varphi,$$

$$\Delta X = -\frac{l \cos \theta \cos \nu}{Rm \cos \alpha \cos \beta} \delta_R \cos \alpha \cos \varphi,$$

$$\Delta x = -\frac{\cos(\omega - \alpha)}{\cos \omega} \frac{(r'd + l\rho)}{(r')^2(1 - C_A l)} \delta_R \cos \alpha \cos \varphi,$$

$$\Delta X = -\frac{l \cos \nu}{f_e \cos \alpha \cos \beta} \delta_R \cos \alpha \cos \varphi.$$

Полученные формулы обобщают результаты, полученные в работах для двухзеркальных систем [4,5] и также позволяют вычислять величину эйконала с точностью порядка δ^4 , где $\delta = \sqrt{\delta_R^2 + \delta_Z^2}$. Однако для анализа астигматизма удобнее использовать представление формул для эйконала в виде разложения по степеням δ . Для этого рассмотрим пучок лучей с малым угловым размером $d\alpha$, падающий на первое зеркало. Найдем $d\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\rho}$ отраженного пучка (Рис.2).

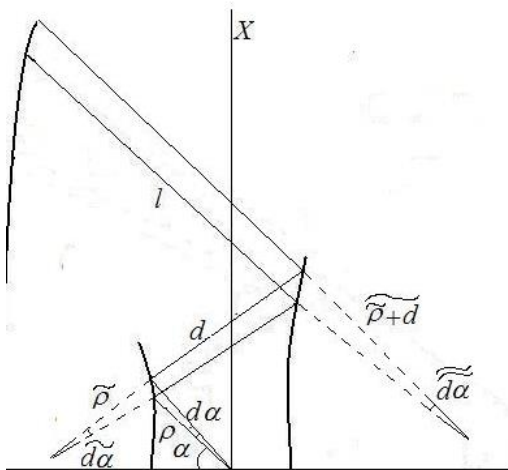


Рис.2. Геометрия преломления малых пучков.

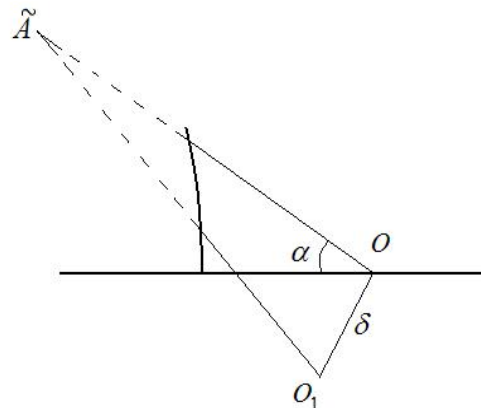


Рис.3 К вычислению эйконала от мнимого фокуса.

Можно показать [3], что при отражении тонкого пучка, выходящего из точки O выполняются соотношения для измененных малых углов и длин (обозначены волнистой чертой сверху), выраженные через значения кривизны на зеркалах и углы между нормалью и падающим лучом.

$$\tilde{\rho} = \rho / (1 + C_p \rho), \quad d\tilde{\alpha} = (1 + C_p \rho) d\alpha,$$

$$(\tilde{\rho} + d) = \frac{\tilde{\rho} + d}{1 + C_B(\tilde{\rho} + d)} = \frac{\rho + d + C_p \rho d}{1 + C_p \rho + C_B(\rho + d + C_p \rho d)},$$

$$d\tilde{\alpha} = [1 + C_B(\tilde{\rho} + d)] d\tilde{\alpha} = [1 + C_p \rho + C_B(\rho + d + C_p \rho d)] d\alpha,$$

$[(\tilde{\rho} + d) + l] d\tilde{\alpha} = R(\theta)d\theta$ - в случае конечного фокуса,

$[(\tilde{\rho} + d) + l] d\tilde{\alpha} = r'(\alpha)d\alpha$ - в случае бесконечного фокуса,

$$L_0 + C_P\rho(d+l) + C_B l(\rho+d) + C_B C_P l \rho d = R\theta', \quad (6)$$

$$L_0 + C_P\rho(d+l) + C_B l(\rho+d) + C_B C_P l \rho d = r'(\alpha) \quad (6')$$

$$L_0 = \rho + d + l, \quad \theta' = \frac{d\theta}{d\alpha}, \quad r(\alpha) = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}, \quad C_P = 2K_P / \cos \omega, \quad C_B = 2K_B / \cos \beta,$$

K_P, K_B – кривизны в точках P и B .

$$C_B = \frac{R\theta' - L_0 - C_P\rho(d+l)}{l(\rho+d+C_P\rho d)}, \quad \text{конечный фокус} \quad (7)$$

$$C_B = \frac{r'(\alpha) - L_0 - C_P\rho(d+l)}{l(\rho+d+C_P\rho d)} \quad \text{бесконечный фокус} \quad (7')$$

$$C_P C_B = \frac{1}{\rho d l} [R\theta' - L_0 - C_P\rho(d+l) - C_B l(\rho+d)], \quad (8)$$

$$C_P C_B = \frac{1}{\rho d l} [r'(\alpha) - L_0 - C_P\rho(d+l) - C_B l(\rho+d)]$$

Теперь, если рассмотреть пучок, исходящий из точки A , и проходящий через точки O и O_1 , то можно найти измененную длину L_1 от точки A до точки O_1 .

$$L_1 = (\tilde{l} + d) + \rho, \quad \tilde{l} = l / (1 + C_B l),$$

$$(\tilde{l} + d) = \frac{\tilde{l} + d}{1 + C_P(\tilde{l} + d)},$$

$$(\tilde{l} + d) + \rho = \frac{L_0 + C_P\rho(d+l) + C_B l(\rho+d) + C_B C_P l \rho d}{1 + C_B l + C_P(l+d) + C_B C_P l d},$$

Из (6), (7), (8) следует, что

$$L_1 = \frac{R\theta'(\rho+d+C_P\rho d)}{R\theta'(1+C_P d) - l} \quad \text{конечный фокус,} \quad (9)$$

$$L_1 = \frac{r'(\alpha)(\rho+d+C_P\rho d)}{r'(\alpha)(1+C_P d) - l} \quad \text{бесконечный фокус.} \quad (9')$$

В точке A условие соответствия падающего и отраженного пучков можно записать в виде:

$$(C_A R - 1)d\theta = d\tilde{\alpha}, \quad \text{конечный фокус} \quad (10)$$

$$1 - C_A[(\tilde{\rho} + d) + l] = 0 \quad \text{бесконечный фокус} \quad (10')$$

где $C_A = 2K_A / \cos \gamma$, $K_A > 0$ - кривизна зеркала в точке A .

С учетом (6)-(8) (10) можно записать в виде:

$$(C_A R - 1)\theta' = (R\theta' - C_p \rho d - \rho - d) / l$$

Из последнего соотношения можно выразить:

$$1 + C_p d = [R\theta' - l(C_A R - 1)\theta' - d] / \rho$$

$$\text{или } 1 + C_p d = (r' - C_A l r' - d) / \rho$$

и подставить в выражение (9) и (9') для L_1 :

$$\frac{1}{L_1} = \frac{R\theta'[\theta'(R+l-C_A Rl) - d] - l\rho}{\rho R(\theta')^2(R+l-C_A Rl)} \quad \text{- конечный фокус} \quad (11)$$

$$\frac{1}{L_1} = \frac{r'[r'(1-C_A l) - d] - l\rho}{\rho(r')^2(1-C_A l)} \quad \text{- бесконечный фокус.} \quad (11')$$

Так как система является апланатической, то $\sin \theta = m \sin \alpha$ (для конечного фокуса), или $r(\alpha) = f_e \sin \alpha$ (для бесконечного фокуса), то $\theta' = \frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{m \cos \alpha}{\cos \theta}$, а $r'(\alpha) = f_e \cos \alpha$.

Теперь для произвольной точки A на зеркале можно найти значение эйконала при смещении источника в точку O_1 с координатами $(-\delta_R, 0, -\delta_Z)$. В треугольнике на рис.3 $L_1 = |\tilde{A}O_1|$, по теореме косинусов:

$$|\tilde{A}O_1|^2 = L_1^2 + \delta^2 - 2\delta L_1 \cos \langle \tilde{A}OO_1, \delta^2 = \delta_R^2 + \delta_Z^2.$$

Выражая из последнего равенства $|\tilde{A}O_1| = \Phi(AO_1)$ в виде ряда по δ_R, δ_Z , получаем

$$\begin{aligned} \Phi(r, \varphi) = L_0 + \delta_R \sin \alpha \cos \varphi + \delta_Z \cos \alpha + \frac{\delta_R^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{L_1} \cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{L_2} \right) + \\ + \frac{\delta_Z^2 \sin^2 \alpha}{2 L_1} - \frac{1}{2} \frac{\delta_R \delta_Z}{L_1} \sin 2\alpha \cos \varphi + \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

где r, φ - полярные координаты точки A .

Можно показать, что L_2 получается из L_1 заменой θ' на $\sin\theta/\sin\alpha=m$ для конечного фокуса, и заменой $r'(\alpha)$ на $r(\alpha)/\sin\alpha = f_e$ для бесконечного фокуса.

$$\frac{1}{L_2} = \frac{Rm[m(R+l-C_A Rl)-d]-l\rho}{\rho Rm^2(R+l-C_A Rl)} \quad \text{для конечного фокуса} \quad (13)$$

$$\frac{1}{L_2} = \frac{f_e[f_e(1-C_A l)-d]-l\rho}{\rho f_e^2(1-C_A l)} \quad \text{для бесконечного фокуса.} \quad (13')$$

4. Уравнение фокальной кривой

При смещении источника из фокуса в точке $O(0,0,0)$ в точку $O_1(-\delta_R, 0, -\delta_Z)$ изображение сместится из точки $O_2(0,0,0)$ в точку $O_3(\Delta_R, 0, \Delta_Z)$. Для простоты выкладок источник и его изображение будем рассматривать в их системах координат. Пусть изображение смещается по некоторой заданной кривой, которая определяется уравнением

$$\Delta_Z = f_2(\Delta_R). \quad (14)$$

Найдем уравнение кривой $\delta_Z = f_1(\delta_R)$, по которой будет перемещаться источник O_1 , из условия минимума среднеквадратической аберрации (СА):

$$S_A(\Delta_R) = \sqrt{\int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} (\Phi(r, \varphi) + |AO_3| - \Phi(0,0) - |A_0O_3|)^2 r dr d\varphi} \quad (15)$$

величина которой, в случае второго фокуса в бесконечности, имеет вид

$$S_A(\theta) = \sqrt{\int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} (\Phi(r, \varphi) - \Phi(0,0) - X \sin \theta - Z \cos \theta)^2 r dr d\varphi}, \quad (16)$$

где θ - угол наклона выходного волнового фронта к оси системы.

Эйконал в точке A на третьем зеркале с координатами $(r \cos \varphi, r \sin \varphi, F(r))$ определяем по формуле (12). Найдем эйконал между точками O_3 и A :

$$\begin{aligned}
 |AO_3| &= \sqrt{(r \cos \varphi - \Delta_R)^2 + r^2 \sin^2 \varphi + (F(r) - \Delta_Z)^2} = \\
 &= \sqrt{R^2 - 2r \cos \varphi \Delta_R - 2F \Delta_Z + \Delta_R^2 + \Delta_Z^2} = \\
 &= R - \sin \theta \cos \varphi \Delta_R - \cos \theta \Delta_Z + \frac{\Delta_R^2}{2R} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) + \\
 &+ \frac{\Delta_Z^2}{2R} \sin^2 \theta - \frac{\Delta_R \Delta_Z}{2R} \sin 2\theta \cos \varphi + \dots, \\
 \text{где } R &= \sqrt{r^2 + F^2(r)}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим сумму эйконалов $E(r, \varphi) = \Phi(r, \varphi) + |AO_3|$, которую представим в виде суммы двух функций: $E(r, \varphi) = \Phi_1(r, \varphi) + \Phi_2(r, \varphi)$, где $\Phi_{1,2}$ – функции, нечетная и четная по $\cos \varphi$, соответственно,

$$\Phi_1(r, \varphi) = \delta_R \sin \alpha \cos \varphi - \frac{\delta_R \delta_Z}{2L_1} \sin 2\alpha \cos \varphi - \Delta_R \sin \theta \cos \varphi - \frac{\Delta_R \Delta_Z}{2R} \sin 2\theta \cos \varphi,$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_2(r, \varphi) &= L_0 + \delta_Z \cos \alpha + \frac{\delta_R^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{L_1} \cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \varphi}{L_2} \right) + \\
 &+ \frac{\Delta_R^2}{2R} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) + \frac{\Delta_Z^2}{2R} \sin^2 \theta.
 \end{aligned}$$

Найдем значения δ_R, δ_Z , при которых максимум СА на окружности $r = r_1$ имеет минимальное значение, предполагая, что Δ_R, Δ_Z - заданы. Если выбрать $\delta_R = m\Delta_R$, то из условия (2) следует, что $\delta_R \sin \alpha - \Delta_R \sin \theta = 0$ для всех α, θ .

Можно показать, что величина СА будет минимальна, если для любой окружности $r = r_1 = r(\alpha_1)$ внутри апертуры выходного зеркала выполняется условие:

$$\Phi_2(0,0) = \frac{1}{2} \left(\Phi_2(r_1, 0) + \Phi_2(r_1, \frac{\pi}{2}) \right). \tag{17}$$

Требую удовлетворения этому уравнению на окружности радиуса $r = r_1$, получаем уравнение, описывающее приближенную фокальную кривую в общем случае:

$$\delta_Z(\cos \alpha_1 - 1) + \frac{\delta_R^2}{4} \left(\frac{\cos^2 \alpha_1}{L_1(\alpha_1)} + \frac{1}{L_2(\alpha_1)} - \frac{2}{L_1(0)} \right) + \frac{\delta_Z^2}{2L_1(\alpha_1)} \sin^2 \alpha_1 +$$

$$+ (1 - \cos \theta_1) \Delta_Z + \frac{\Delta_R^2}{4} \left(\frac{(\cos^2 \theta_1 + 1)}{R_1} - \frac{2}{R_0} \right) + \frac{\Delta_Z^2}{2R_1} \sin^2 \theta_1 = 0.$$

Учитывая, что Δ_Z выражается через Δ_R (14), а $\Delta_R = \delta_R / m$, получаем уравнение δ_R относительно δ_Z .

В случае второго фокуса в бесконечности система формирует выходной фронт, близкий к плоскости, уравнение которой имеет вид

$$Z \cos \Theta + X \sin \Theta - Z_0 \cos \Theta = 0,$$

где $\Theta = \arcsin(\delta_R / f_e)$ - угол наклона фронта (f_e - эквивалентный фокальный радиус), Z_0 - координата точки пересечения плоскости с осью Z и выбрана так, что $Z_0 > d_0$. Найдем расстояние от произвольной точки A на поверхности зеркала до этой плоскости. Пусть точка A имеет координаты $(r \cos \varphi, r \sin \varphi, F(r))$. Тогда расстояние от точки A до плоскости равно:

$$D = Z_0 \cos \Theta - r \cos \varphi \sin \Theta - F(r) \cos \Theta, \quad (18)$$

где $Z = F(r)$ - уравнение зеркала.

Прибавляя к значению эйконала в точке A , найденному по формуле (12), величину D из формулы (18) и учитывая, что и $\rho + d + l + Z_0 - F(r) = C$ (C - константа), $\Theta = \arcsin(\delta_R / f_e)$, $\sin \alpha = r / f_e$ можно получить:

$$\Phi(r, \varphi) + D = C + (F(r) - Z_0)(1 - \cos \Theta) + \delta_Z \cos \alpha +$$

$$+ \frac{\delta_R^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{L_1} \cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \varphi}{L_2} \right) - \frac{\delta_R \delta_Z}{2L_1} \sin 2\alpha \cos \varphi + \frac{\delta_Z^2}{2L_1} \sin^2 \alpha.$$

Последнее выражение можно представить в виде суммы: $\Phi + D = \Phi_1 + \Phi_2$, где

$$\Phi_1 = -\frac{\delta_R \delta_Z}{2L_1} \sin 2\alpha \cos \varphi,$$

$$\Phi_2 = C + (F(r) - Z_0)(1 - \cos \Theta) + \delta_Z \cos \alpha +$$

$$+ \frac{\delta_R^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{L_1} \cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \varphi}{L_2} \right) + \frac{\delta_Z^2}{2L_1} \sin^2 \alpha.$$

Используя условие (17) и выражение $\cos \Theta = \sqrt{1 - \delta_R^2 / f_e^2} = 1 - \delta_R^2 / (2f_e^2)$, можно получить уравнение фокальной кривой для линзы со вторым фокусом в бесконечности:

$$\delta_Z(1 - \cos \alpha_1) - \frac{\delta_Z^2}{2L_1(\alpha_1)} \sin^2 \alpha_1 = \frac{\delta_R^2}{4} \left(\frac{\cos^2 \alpha_1}{L_1(\alpha_1)} + \frac{1}{L_2(\alpha_1)} - \frac{2}{L_1(0)} - \frac{2}{f_e^2} (F(0) - F(r_1)) \right). \quad (19)$$

5. Минимизация астигматизма

Разность значений коэффициента разложения эйконала при δ_R^2 , если $\varphi=0$ и $\varphi=\pi/2$, характеризует величину астигматизма системы. За счет выбора параметров можно устранить астигматизм на окружности с радиусом $r=r_2$, требуя выполнения равенства

$$\Phi_2(r_2, 0) = \Phi_2(r_2, \pi/2), \quad (20)$$

где Φ_2 – четная по $\cos \varphi$ составляющая суммы $\Phi(r, \varphi) + |AO_3| = \Phi_1 + \Phi_2$; $\Phi(r, \varphi)$ – эйконал в точке A с координатами (r, φ) на поверхности зеркала, вычисленный по формуле (12), а $|AO_3|$ – расстояние от A до смещенного второго фокуса либо до плоскости фронта (в случае второго фокуса - на бесконечности).

В общем случае из уравнения (20) получаем:

$$\frac{\delta_R^2 \cos^2 \alpha_2}{2 L_1(\alpha_2)} + \frac{\Delta_R^2}{2R(\theta_2)} \cos^2 \theta_2 = \frac{\delta_R^2}{2L_2(\alpha_2)} + \frac{\Delta_R^2}{2R(\theta_2)}. \quad (21)$$

Для апланатических систем $\Delta_R = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \delta_R$ и из равенства (21) получаем

$$\frac{\cos^2 \alpha_2}{L_1(\alpha_2)} = \frac{1}{L_2(\alpha_2)} + \frac{\sin^2 \alpha_2}{R(\theta_2)}$$

или, после подстановки L_1 , L_2 (см. формулы 11 и 13) и несложных преобразований:

$$d_2 m (1 - \cos \alpha_2 \cos \theta_2) = \sin^2 \theta_2 (\rho_2 + R_2) (1 - C_A l_2). \quad (22)$$

Переходя в (22) к пределу при $\alpha_2 \rightarrow 0$, $\theta_2 \rightarrow 0$, получаем условие отсутствия параксиального астигматизма в апланатической трехзеркальной системе с конечными фокусами:

$$d_0(1 + m^2) = 2m(\rho_0 + R_0)(1 - 4F_2l_0), \quad m = \sin \theta / \sin \alpha. \quad (23)$$

В случае второго фокуса на бесконечности отсутствие параксиального астигматизма обеспечивается условием

$$\frac{\cos^2 \alpha_2}{L_1(\alpha_2)} = \frac{1}{L_2(\alpha_2)}. \quad (24)$$

Подставляя в (24) выражения для L_1 и L_2 из формул (11') и (13'), получаем

$$d_2 = 2f_e(1 - C_A l_2) \cos^2(\alpha_2/2). \quad (25)$$

Переходя в (25) к пределу при $\alpha_2 \rightarrow 0$, получаем условие отсутствия параксиального астигматизма в апланатической трехзеркальной системе с фокусом на бесконечности:

$$d_0 = 2f_e(1 - 4F_2l_0), \quad (25')$$

где F_2 - коэффициент при втором члене разложения образующей главного зеркала по четным степеням X .

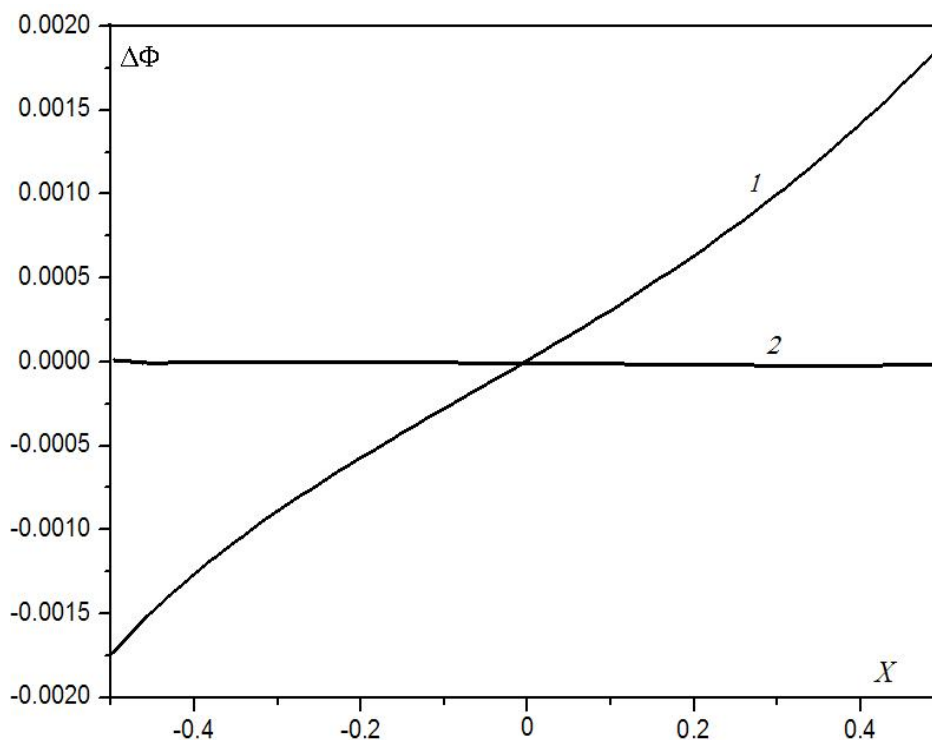


Рис. 4. Ошибки вычисления эйконала по формулам (3) и (12)

На рис. 4 приведены величины разности точного значения эйконала на выходном зеркале в плоскости сканирования и приближенного значения эйконала, вычисленного по формуле (12) (кривая 1) и по формуле (3) (кривая 2). Для системы с параметрами: $\rho_0=0.4$, $d_0=0.8$, $l_0=1.$, $f_e =0.8$, $F_2=0.125$, $F_4=0$, $F_6=0$ (F_2 выбрано из условия (25')). Точка смещения O_2 находится на фокальной кривой (19) и имеет координаты $\delta_R=0.07$, $\delta_Z=0.005$. Это смещение соответствует углу наклона фронта 5 градусов. Как видно из рисунка, формула (12) содержит линейную составляющую, не влияющую на aberrации. На рис.5 даны те же зависимости без линейной составляющей, откуда видно, что ошибка формулы (12) в сравнении с ошибкой формулы (3) содержит также существенную нелинейную составляющую.

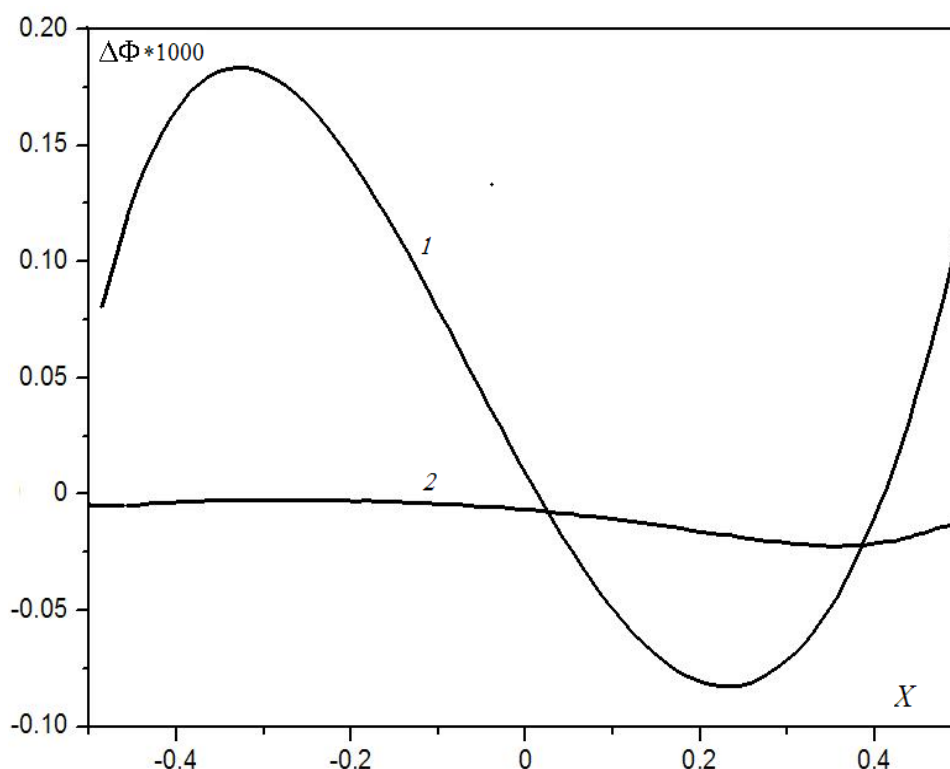


Рис.5. Ошибки вычисления aberrаций эйконала по формулам (3) и (12)

На рис. 6 даны зависимости величины aberrации в меридиональной (кривые 1, 2) и сагиттальной плоскостях (кривые 3,4). Нечетные номера кривых соответствуют точным значениям aberrаций эйконала, а нечетные – aberrациям эйконала, вычисленного по формуле (3).

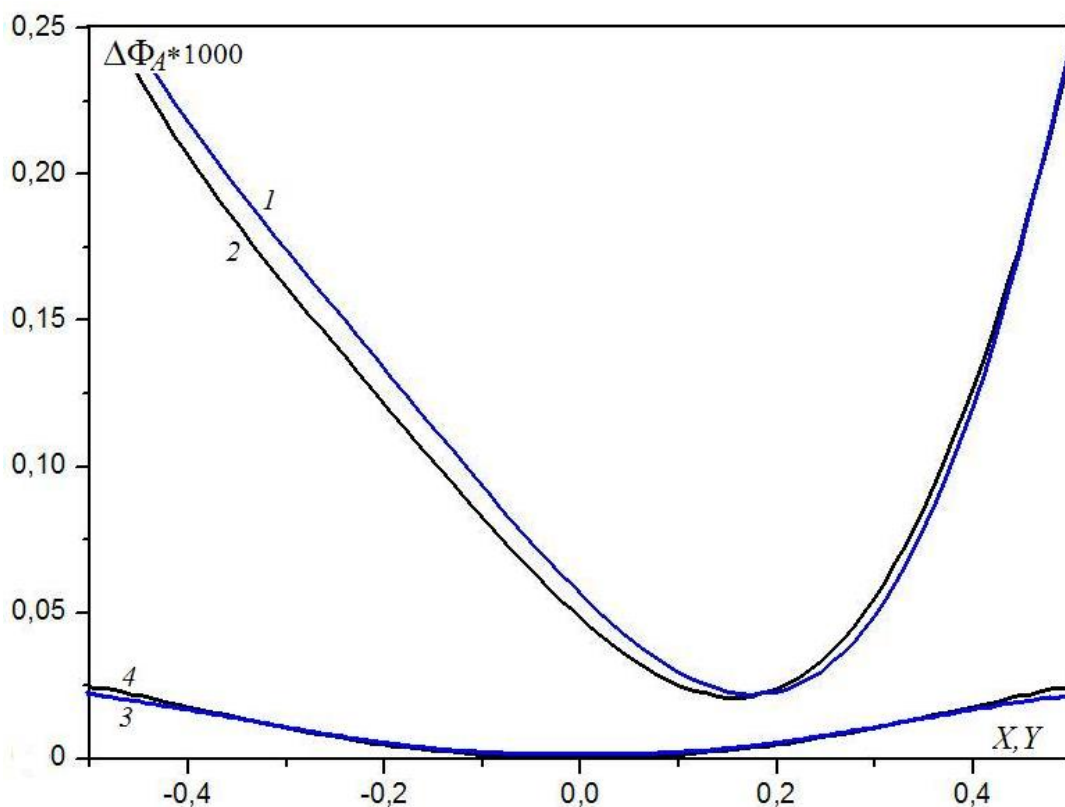


Рис.6. Аберрации эйконала в меридиональной и сагиттальной плоскостях

На рис.6 видно, что в меридиональной плоскости аберрация содержит как четную, так и нечетную составляющие.

В заключение автор выражает благодарность В.А.Калошину за постановку задачи и полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 18-07-00655 А.

Литература

1. Михельсон Н.Н. Оптика астрономических телескопов и методы ее расчета. М., Физматлит, 1995. 384с.
2. Korsch D. Closed Form Solution for Three-Mirror Telescopes, Corrected for Spherical Aberration, Coma, Astigmatism and Field Curvature. *Applied Optics*. Vol. 11, No.12, 1972.
3. Венецкий А.С., Калошин В.А. О распределении эйконала в апертуре двухзеркальной телескопической системы. РЭ, 2012, т.57, №9, С.1004-1011.

4. Венецкий А.С., Калошин В.А. Аберрации эйконала в планарных двухзеркальных антеннах. РЭ, 2014, т.59, №11, С.1102-1110.
5. Венецкий А.С., Калошин В.А. Об аберрациях эйконала в осесимметричных двухзеркальных телескопических системах. РЭ, 2016, т.61, №4, С.327-336.
6. Венецкий А.С., Калошин В.А., Нгуен К.Т., Фролова Е.В. Синтез и исследование сверхширокополосной планарной трехзеркальной системы, Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2018. N1. <http://jre.cplire.ru/jre/jan18/4/text.pdf>.
7. Head A.K. A Class of Aplanatic Optical Systems. *Proc. Phys. Soc.* LXXI, 4. pp. 546-551.

Для цитирования:

А. С. Венецкий. Аберрации в трехзеркальных осесимметричных апланатических системах. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2018. №3. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/mar18/13/text.pdf>