

ОБ АБЕРРАЦИЯХ ЭЙКОНАЛА  
В ПЛАНАРНЫХ ЛИНЗОВЫХ АНТЕННАХ

© 2017 г. А. С. Венецкий\*, В. А. Калошин

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
Российская Федерация, 125009 Москва, ул. Моховая, 11, стр. 7

\*E-mail: AVenetsky@yandex.ru

Поступила в редакцию 02.02.2016 г.

Найдена формула для распределения эйконала на поверхности цилиндрической диэлектрической линзы с погрешностью порядка величины смещения источника из фокуса в четвертой степени. Исследована точность полученной формулы и трех первых членов ее разложения по этой величине для описания эйконала и его aberrаций. Предложен способ нахождения параметров оптимальной апланатической линзы (с минимальными aberrациями). Получено приближенное уравнение фокальной кривой.

DOI: 10.7868/S0033849417060262

## ВВЕДЕНИЕ

Для анализа и оптимизации оптических систем широко используется классическая теория aberrаций, основанная на разложении эйконала по степеням углов зрения и апертуры [1, 2]. Соответствующий двумерный ряд можно эффективно использовать при анализе параксиальных лучей. Однако для больших углов зрения и апертуры возникает необходимость учета aberrаций высоких порядков, что приводит к сложности соответствующих формул и, как следствие, к необходимости использования численных методов в задачах оптимизации.

В работе [3] для осесимметричной диэлектрической линзовой антенны получена формула в виде трех членов разложения эйконала только по одному параметру (величине смещения источника из фокуса). В данной работе для величины эйконала на поверхности планарной (цилиндрической) диэлектрической линзы получены более точные формулы. Исследована точность полученных формул для описания эйконала и его aberrаций. Получено приближенное уравнение для фокальной кривой. С использованием найденных формул для частного случая линзы из полистирола проведена оптимизация параметров с целью минимизации величины среднеквадратической aberrации.

1. ВЫВОД ФОРМУЛ ДЛЯ ЭЙКОНАЛА  
НА ПОВЕРХНОСТИ ЛИНЗЫ

Рассмотрим цилиндрическую диэлектрическую линзу с коэффициентом преломления  $n$ , продольное сечение которой с источником ци-

линдрической волны в фокусе (точке  $O$ ) показано на рис. 1.

Поле источника после прохождения линзы формирует плоский фронт. Предположим, что только один луч, выходящий из источника под углом  $\alpha$ , проходит через заданную точку  $B$ , с декартовыми координатами  $X_B, Y_B$ , т.е. обеспечивается взаимно-однозначное соответствие между каждой точкой апертуры  $B$  и углом  $\alpha$ , которое описывается функциями отображения:

$$R = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = R(\alpha), \quad \alpha = \alpha(R). \quad (1)$$

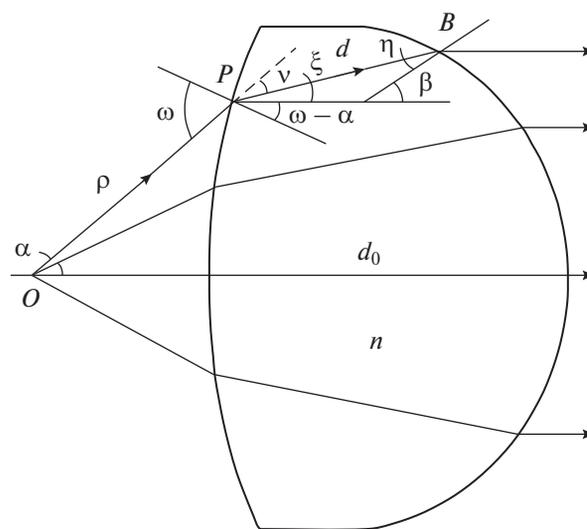


Рис. 1. Лучевая картина для несмещенного источника.

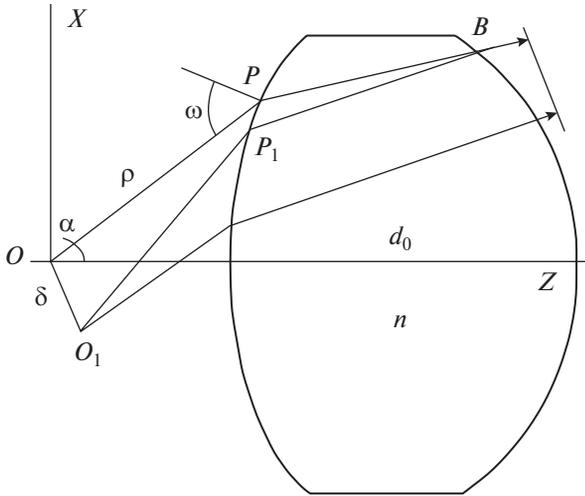


Рис. 2. Лучевая картина для смещенного источника.

Пусть точка  $O_1$  с координатами  $(-\delta_x, -\delta_z)$  – положение смещенного источника (рис. 2). Предположим, что при смещении источника в точку  $O_1$  взаимно-однозначное соответствие точек выходной апертуры и множеством выходящих из  $O_1$  лучей сохраняется. При этом всегда существует луч, соединяющий точку  $O_1$  и точку  $B$ . Оптический путь (эйконал) этого луча определяется формулой

$$\Phi(BO_1) = n|BP| + |P_1O_1|. \tag{2}$$

Будем искать разложение выражения (2) по степеням  $\delta_x$  и  $\delta_z$  в системе координат  $XZ$ , в которой точка  $B$  имеет координаты  $(X_B, Z_B)$ . Тогда другие точки будут иметь координаты:  $P(x_p, z_p)$ ,  $P_1(x_p + \Delta x, z_p + \Delta z)$ ,  $O_1(-\delta_x, -\delta_z)$ ,  $O(0,0)$ . При этом  $Z_B = F(X_B)$ ,  $z_p = f(x_p)$  ( $Z = F(X)$  и  $z = f(x)$  – уравнения образующих большого и малого зеркал соответственно)  $\delta_x = \delta_R \cos \varphi$ , где  $\varphi = 0$ , если  $X_B > 0$ , и  $\varphi = \pi$ , если  $X_B < 0$ .

Выражение для эйконала (2) представим в виде

$$\begin{aligned} \Phi(BO_1) &= \\ &= n\sqrt{(X_B - x_p - \Delta x)^2 + (Z_B - z_p - \Delta z)^2} + \\ &+ \sqrt{(x_p + \Delta x + \delta_x)^2 + (z_p + \Delta z + \delta_z)^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

С точностью до членов третьего порядка малости по  $\Delta x, \Delta z$  можно записать

$$\Delta z = f'_p \Delta x + \frac{f''_p}{2} \Delta x^2, \quad f'_p = f'(x_p), \quad f''_p = f''(x_p). \tag{4}$$

Величина  $\Delta x$ , входящая в (3), является неизвестной. Заменяя в выражении (3)  $\Delta z$  разложением (4), разложим выражение для эйконала (3) в ряд по степеням  $\Delta x$ , ограничиваясь членами вто-

рого порядка малости. Каждое из трех слагаемых в формуле (2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} |BP| &= d + (u_x + u_z f'_p) \Delta x + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{d} (u_z - u_x f'_p)^2 + u_z f''_p \right] \Delta x^2, \\ |P_1O_1| &= \sqrt{A} + Q_{x1} \Delta x + Q_{x2} \Delta x^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \sqrt{A} &= \rho + \sin \alpha \delta_x + \cos \alpha \delta_z + \\ &+ \frac{1}{2\rho} (\delta_x^2 \cos^2 \alpha + \delta_z^2 \sin^2 \alpha - \delta_x \delta_z \sin 2\alpha), \end{aligned}$$

$\rho = |OP|$ ,  $d = |BP|$ ,  $u_x = -\sin \xi$ ,  $u_z = -\cos \xi$  – компоненты единичного вектора,  $\vec{u} = B\vec{P}/|BP|$ . Суммируя полученные для слагаемых эйконала выражения и приводя подобные члены, можно записать

$$\Phi(BO_1) = \sqrt{A} + nd + \Phi_1(\Delta x), \tag{5}$$

где  $\Phi_1 = (nS_{x1} + Q_{x1})\Delta x + (nS_{x2} + Q_{x2})\Delta x^2$ .

Учитывая закон преломления  $\sin \omega = n \sin(\xi + \omega - \alpha)$ , а также равенства  $x_p/\rho = \sin \alpha$ ,

$f_p/\rho = \cos \alpha$ ,  $f'_p = \text{tg}(\omega - \alpha)$ , выражения, входящие в  $\Phi_1$ , можно привести к виду

$$\begin{aligned} S_{x1} &= -\frac{\sin \omega}{n \cos(\omega - \alpha)}, \\ S_{x2} &= \frac{1}{2d} \left[ \frac{n^2 - \sin^2 \omega}{n^2 \cos^2(\omega - \alpha)} - d \cos \xi f''_p \right], \\ Q_{x1} &= \frac{\sin \omega}{\cos(\omega - \alpha)} + \frac{\delta_x \cos \omega \cos \alpha}{\rho \cos(\omega - \alpha)} - \frac{\delta_z \cos \omega \sin \alpha}{\rho \cos(\omega - \alpha)}, \\ Q_{x2} &= \frac{1}{2\rho} \left( \frac{\cos^2 \omega}{\cos^2(\omega - \alpha)} + \rho \cos \alpha f''_p \right). \end{aligned}$$

Используя принцип Ферма, неизвестную величину  $\Delta x$  можно найти из линейного уравнения, выражающего условие экстремума эйконала на истинной траектории, решение которой имеет вид

$$\Delta x = \frac{-(nS_{x1} + Q_{x1})}{2(nS_{x2} + Q_{x2})}. \tag{6}$$

Подставляя найденную величину  $\Delta x$  в выражение (5) и ограничиваясь членами второго порядка малости по  $\delta_x$  и  $\delta_z$ , можно получить

$$\Phi(BO_1) = \sqrt{A} + nd - \frac{(nS_{x1} + Q_{x1})^2}{4(nS_{x2} + Q_{x2})}. \tag{7}$$

В выражение  $Q_{X2} + nS_{X2}$  в (5) входит вторая производная  $f_p''$ , которую можно выразить через кривизну из соотношения:

$$K_p = \frac{f_p''}{(\sqrt{1 + f_p'^2})^3} = f_p'' \cos^3(\omega - \alpha),$$

где  $K_p$  – кривизна поверхности линзы в точке  $P$ , а  $\omega$  – угол между падающим и отраженным лучом в точке  $P$ .

Выведем соотношения между кривизной зеркал в точках пересечения с лучом и функцией отображения. Рассмотрим два луча, падающие из точки  $A$  под малым углом  $\gamma$  на выпуклую поверхность в плоскости  $XY$ . Предположим, что в системе координат с центром в точке  $P$  и осью  $Y$ , совпадающей с нормалью к поверхности в точке  $P$ , сечение поверхности плоскостью  $XY$  вблизи этой точки описывается кривой второго порядка  $y = 1/2 f_p'' x^2$ . Пусть прямая  $QN$  – нормаль к кривой в точке  $Q$ , а прямая  $QM$  параллельна оси  $Y$ . Тогда имеют место следующие соотношения (рис. 3):

$$\begin{aligned} \mu &\approx \operatorname{tg} \mu = y'(x) = \left| f_p'' x \right|, \quad \angle QPP_1 \approx \operatorname{tg}(\angle QPP_1) = \\ &= 1/2 f_p'' x = \mu/2, \quad \angle PQA = \pi - (\gamma + \pi/2 + \omega + \\ &\quad + \mu/2) = \pi/2 - \gamma - \mu/2 - \omega. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= |PQ| \frac{\sin \angle PQA}{|AP|} = |PQ| \frac{\cos(\omega + \gamma + \mu/2)}{|AP|}, \\ |PQ| &= \frac{x}{\cos \angle QPP_1} = \frac{x}{\cos(\mu/2)} = \frac{\mu}{f_p'' \cos(\mu/2)}, \end{aligned}$$

находим

$$\mu = \gamma \frac{f_p'' |AP|}{\cos \omega}.$$

Учитывая, что в системе координат  $XY f_p'' = K_p$ , последнее равенство можно записать в виде

$$\mu = \gamma \frac{K_p |AP|}{\cos \omega}.$$

Используя законы преломления в точках  $P$  и  $P_1$

$$\sin \omega = n \sin \tilde{\omega}, \quad \sin(\omega + \gamma + \mu) = n \sin(\tilde{\gamma} + \tilde{\omega} + \mu),$$

и раскладывая обе части последнего равенства в ряды по малым величинам  $\gamma, \tilde{\gamma}, \mu$ , можно получить

$$n\tilde{\gamma} \cos \tilde{\omega} = \gamma \cos \omega + \mu(\cos \omega - n \cos \tilde{\omega}).$$

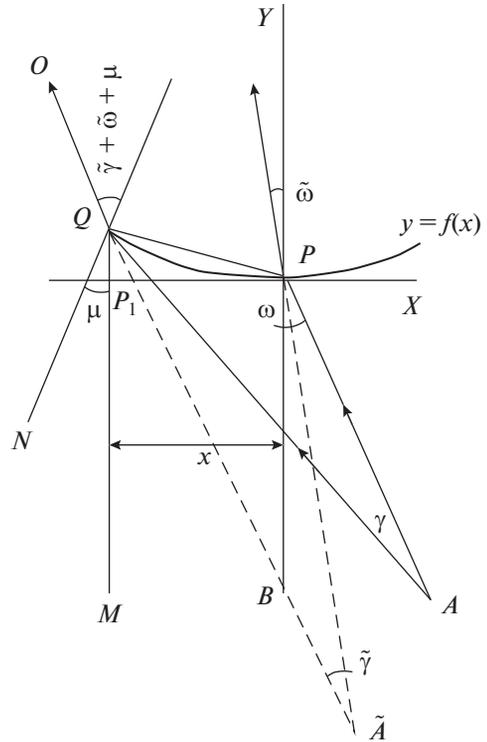


Рис. 3. Геометрия преломленного пучка лучей.

Учитывая, что  $n \cos \tilde{\omega} = \sqrt{n^2 - \sin^2 \omega}$ , из последнего уравнения находим

$$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{G} [1 + B(1 - G)], \quad (8)$$

где  $B = \frac{K_p |AP|}{\cos \omega}$ ,  $G = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \omega}}{\cos \omega}$ .

Используя теорему синусов для треугольников  $APQ$  и  $\tilde{A}PQ$ , можно получить

$$\begin{aligned} |\tilde{A}P| &= |AP| \frac{\sin \gamma \sin \angle PQA}{\sin \tilde{\gamma} \sin \angle PQA} = \\ &= |AP| \frac{\sin \gamma \cos(\tilde{\omega} + \tilde{\gamma} + \mu/2)}{\sin \tilde{\gamma} \cos(\omega + \gamma + \mu/2)}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $\gamma \rightarrow 0$  в последнем равенстве и учитывая (8), можно получить

$$|\tilde{A}P| = |AP| \frac{G^2}{nQ}, \quad (9)$$

где  $Q = 1 + B(1 - G)$ .

Применяя полученные результаты для лучей в линзе (рис. 4), можно получить

$$\begin{aligned} Gd\alpha &= Qd\alpha, \quad nQ\tilde{\rho} = G^2\rho, \quad dl = (\tilde{\rho} + d)d\tilde{\alpha}, \\ ds &= R'(\alpha) d\alpha. \end{aligned} \quad (10)$$

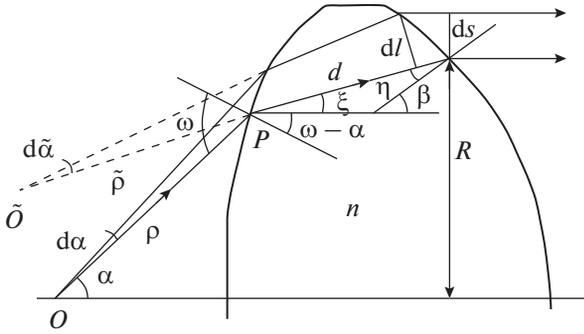


Рис. 4. К выводу кривизны линзы через функцию отображения.

Сечения лучевых трубок (см. рис. 4) и углы удовлетворяют уравнениям

$$\cos \beta dl = \cos \eta ds, \tag{11}$$

$$\sin \omega = n \sin(\xi + \omega - \alpha), \quad \xi + \eta = \beta, \tag{12}$$

$$n \sin \eta = \sin \beta.$$

Используя (12), соотношение (11) можно привести к виду

$$dl = \frac{n - \cos \xi}{n \cos \xi - 1} ds. \tag{13}$$

С учетом (13) из (10) следует уравнение

$$\left( \rho \frac{G^2}{nQ} + d \right) \frac{Q}{G} = WR'(\alpha),$$

где  $W = \frac{n - \cos \xi}{n \cos \xi - 1}$ . Из последнего уравнения можно выразить кривизну в точке P:

$$K_P = \frac{\cos^2 \omega}{(1 - G)d\rho n} (nGWR'(\alpha) - \rho G^2 - nd). \tag{14}$$

Подставляя выражение (14) в выражение (7) и учитывая соотношение  $\cos(\omega - \alpha)(\cos \omega - \sqrt{n^2 - \sin^2 \omega}) = \cos \alpha - n \cos \xi$  (которое выводится из закона преломления), выражение для эйконала (7) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Phi(X_B) = & L_0 + \delta_R \cos \varphi \sin \alpha + \delta_Z \cos \alpha + \\ & + \frac{\delta_R^2}{2} \left( \frac{\cos^2 \alpha}{L_1} \right) - \frac{\delta_R \delta_Z}{2L_1} \cos \varphi \sin 2\alpha + \\ & + \frac{\delta_Z^2}{2L_1} \sin^2 \alpha + \dots, \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_1} = & \frac{1}{\rho} \left( 1 - \frac{d}{GW} \frac{d\alpha}{dR} \right), \quad W = (n - \cos \xi) / (n \cos \xi - 1), \\ v = & \alpha - \xi, \quad G = \sqrt{n^2 - \sin^2 \omega} / \cos \omega = \\ = & n(n - \cos v) / (n \cos v - 1), \end{aligned} \tag{16}$$

$L_0 = \rho + nd$  – значение эйконала на апертуре при несмещенном источнике,  $(-\delta_R, 0, -\delta_Z)$  – координаты точки  $O_1$  в исходной декартовой системе координат, угол  $\alpha$  выражается через  $R = |X_B|$  из закона отображения (1),  $\varphi = 0$ , если  $X_B > 0$ ,  $\varphi = \pi$ , если  $X_B < 0$ ,

$$\begin{aligned} v = & \alpha + \arccos(A / \sqrt{A^2 + B^2}) - \\ & - \arcsin(Bn / \sqrt{A^2 + B^2}), \quad \xi = \alpha - v, \\ A = & (n - 1)d_0 - \rho(\alpha)(1 - \cos \alpha), \\ B = & R(\alpha) - \rho(\alpha) \sin \alpha. \end{aligned}$$

Приближенная формула (15) описывает эйконал на поверхности линзы с точностью до  $\delta^2$ , поэтому ее погрешность пропорциональна  $\delta^3$ . При выводе этой формулы была найдена поправка к координатам  $\Delta x$  и  $\Delta z$  (6) невозмущенной точки P. Можно показать, аналогично тому, как это было сделано в работе [4] для двухзеркальных систем, что при уточнении формулы (15) до членов третьего порядка по  $\delta_R, \delta_Z$  достаточно использовать  $\Delta x$  из формулы (6), которую можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta x = & - \frac{\cos \alpha \cos(\omega - \alpha)}{\cos \omega} \frac{d}{GWR'(\alpha)} \delta_R + \\ & + \frac{\sin \alpha \cos(\omega - \alpha)}{\cos \omega} \frac{d}{GWR'(\alpha)} \delta_Z. \end{aligned} \tag{17}$$

Отсюда следует, что для вычисления эйконала с погрешностью, пропорциональной  $\delta^4$ , можно непосредственно складывать оптические пути по формуле (2), где координаты  $P_1$  вычисляются с помощью формулы (6):

$$\begin{aligned} \Phi(X_B) = & \sqrt{(x_1 + \delta_R)^2 + (z_1 + \delta_Z)^2} + \\ & + n \sqrt{(X_B - x_1)^2 + (F(X_B) - z_1)^2}, \end{aligned} \tag{18}$$

где  $x_1 = x_P + \Delta x, z_1 = f(x_1)$ .

Если величины  $\delta_R, \delta_Z$  находятся на фокальной поверхности  $\delta_Z = A\delta_R^2 + B\delta_R^4 + \dots$ , то

$$\Delta x = - \frac{\cos \alpha \cos(\omega - \alpha)}{\cos \omega} \frac{d}{GWR'(\alpha)} \delta_R. \tag{19}$$

Тогда для погрешности формулы (18) справедливо неравенство

$$|\Phi(X_B) - \Phi_0(X_B)| < (k\delta_R)^4,$$

где  $\Phi_0(X_B)$  – точное значение эйконала в данной точке,  $k$  – константа.

## 2. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ФОРМУЛ ДЛЯ ЭЙКОНАЛА

Для анализа точности формул (15) и (18) были проведены расчеты распределения эйконала на выходной поверхности апланатической линзы с

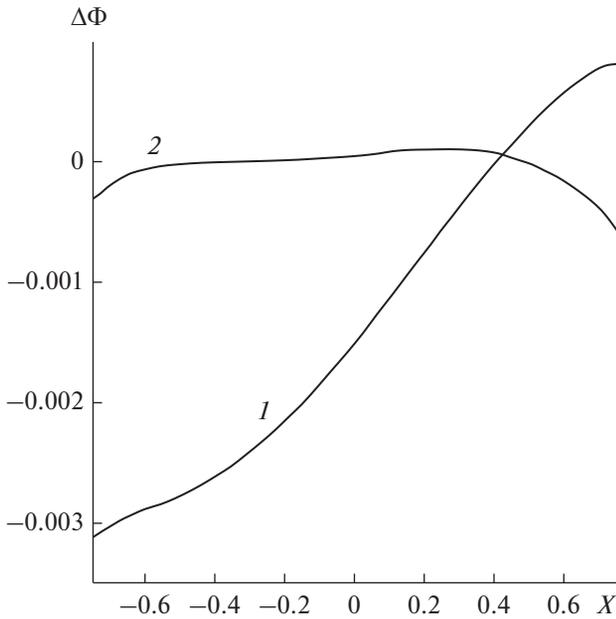


Рис. 5. Ошибка вычисления эйконала на поверхности линзы.

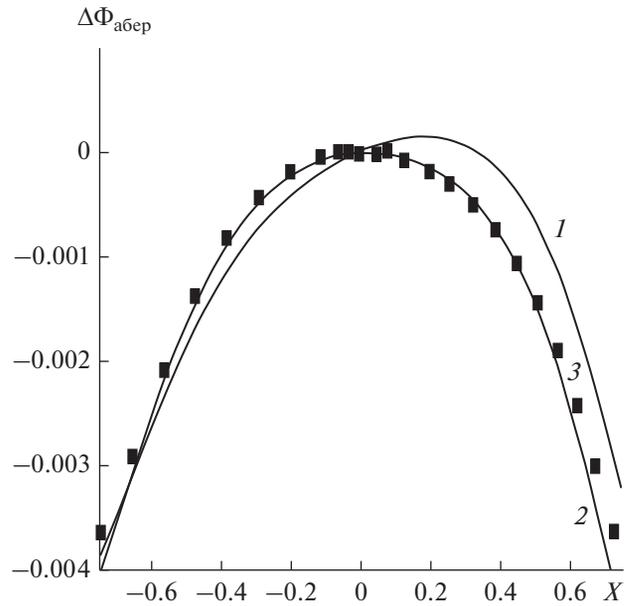


Рис. 6. Аберрации эйконала на поверхности линзы.

параметрами: половина угла раскрыва источника  $\alpha_{\text{макс}} = 30^\circ$ ,  $\rho_0 = 1$ ,  $d_0 = 1$ , диаметр апертуры  $D = 1.5$ ,  $n = 1.6$  для смещений  $\delta_R = 0.4$  и  $\delta_Z = 0.1$ , что соответствует углу наклона луча фронта  $15^\circ$ .

На рис. 5 представлена нормированная на  $D$  разность между результатами расчетов эйконала по формуле (15) и геометрическим расчетом (кривая 1) и аналогичная разность, полученная с использованием формулы (18) (кривая 2). На рис. 6 показана нормированная аберрация эйконала  $(\Phi(X_B) - \Phi(0) - X_B \sin \theta - Z_B \cos \theta)/D$  (величина эйконала без линейной составляющей), вычисленная с использованием формул (15) (кривая 1), (18) (кривая 2) и с использованием геометрической оптики (кривая 3 (точки)).

Из анализа рис. 5 следует, что для данного набора параметров погрешность формулы (15) составляет  $4 \times 10^{-3}$ , а формулы (18) —  $5 \times 10^{-4}$ , что меньше, чем  $(\delta/D)^4$ ,  $\delta = \sqrt{\delta_X^2 + \delta_Z^2}$ . Точность вычисления аберрации (см. рис. 6) по формуле (18) также выше.

Из формулы (15) следует хорошо известное [1, 2] условие апланатизма  $R(\alpha) = f_e \sin \alpha$ , при выполнении которого член  $\delta_R \sin \alpha \cos \phi$  в формуле (15) описывает линейный фронт, т.е. нет искажений эйконала, пропорциональных первой степени  $\delta_R$ .

### 3. УРАВНЕНИЕ ФОКАЛЬНОЙ КРИВОЙ

Выведем уравнение кривой, которому удовлетворяют поперечные  $\delta_R$  и продольные  $\delta_Z$  смещения, при которых достигаются минимальные фазовые искажения плоского фронта. При смещении облучателя вдоль оси  $X$  на величину  $\delta_R$  выходящий из линзы плоский фронт повернется в первом приближении [4] на угол

$$\theta = \arcsin(\delta_R/f_e) \quad (20)$$

в плоскости  $XOZ$ , где  $f_e$  — эквивалентный фокус линзы. Проведем справа от линзы прямую, ортогональную этому наклонному фронту. Ее уравнение имеет вид

$$Z \cos \theta + X \sin \theta - Z_0 \cos \theta = 0,$$

где  $Z_0$  — координата точки пересечения этой прямой с осью  $Z$  и выбрана так, что  $Z_0 > \rho_0 + d_0$ . Найдем расстояние от произвольной точки  $B$  на поверхности линзы до этой прямой. Пусть точка  $B$  имеет координаты  $(X, F(X))$ . Тогда расстояние от точки  $B$  до плоскости равно

$$\Delta = Z_0 \cos \theta - X \sin \theta - F(X) \cos \theta, \quad (21)$$

где  $Z = F(R)$  — уравнение выходной поверхности линзы. Из закона отображения (1) можно получить разложение

$$\sin \alpha = R/f_e + pR^3 + \dots \quad (22)$$

Прибавляя к значению эйконала в точке  $B$ , найденному по формуле (15), величину  $\Delta$  по формуле (21), заменяя  $\sin \alpha$  разложением (22) и учи-

тывая, что  $\rho + nd + Z_0 - F(R) = C$ , где  $C$  – константа, можно получить

$$\begin{aligned} \Phi(X) + \Delta = C + (F(X) - Z_0)(1 - \cos \theta) + \\ + \delta_Z \cos \alpha + \delta_R \rho X^3 + \frac{\delta_R^2}{2} \left( \frac{\cos^2 \alpha}{L_1} \right) - \\ - \frac{\delta_R \delta_Z}{2L_1} \sin 2\alpha \cos \varphi + \frac{\delta_Z^2}{2L_1} \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (23)$$

Выражение (23) можно представить в виде суммы  $\Phi + \Delta = \Phi_1 + \Phi_2$ , где

$$\begin{aligned} \Phi_1 = \delta_R \rho X^3 - \frac{\delta_R \delta_Z}{2L_1} \sin 2\alpha \cos \varphi, \quad \Phi_2 = C + \\ + (F(X) - Z_0)(1 - \cos \theta) + \delta_Z \cos \alpha + \\ + \frac{\delta_R^2}{2} \left( \frac{\cos^2 \alpha}{L_1} \right) + \frac{\delta_Z^2}{2L_1} \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Член с  $\delta_R^2$  надо скомпенсировать членом с  $\delta_Z$ , выбирая  $\delta_Z$  из условия  $\Phi_2(0) = \Phi_2(\alpha_{\max})$ , а  $\cos \theta$  надо заменить с учетом (20) выражением

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \delta_R^2 / f_e^2} = 1 - \delta_R^2 / (2f_e^2).$$

В результате получаем уравнение фокальной кривой:

$$\begin{aligned} \delta_Z (1 - \cos \alpha_{\max}) - \frac{\delta_Z^2}{2L_1(\alpha_{\max})} \sin^2 \alpha_{\max} = \\ = \frac{\delta_R^2}{2} \left( \frac{\cos^2 \alpha_{\max}}{L_1(\alpha_{\max})} - \frac{1}{L_1(0)} - \frac{1}{f_e^2} (F(0) - F(X_{\max})) \right). \end{aligned} \quad (24)$$

#### 4. МИНИМИЗАЦИЯ АБЕРРАЦИЙ

В планарных апланатических системах при смещении источника из фокуса aberrацию эйконала в нашем приближении можно представить в виде:  $A(X) = p_3 X^3$ . Коэффициент  $p_3$  находим, раскладывая функцию  $\Phi(X)$ , определенную формулой (18) в ряд по  $X$  в точке 0. Сравнивая выражение для кривизны (14) на оси

$$K_0 = \frac{(nf_e - n\rho_0 - d_0)}{(1-n)d_0\rho_0}$$

и выражение для кривизны на оси в полярной системе координат  $K_0 = \rho_0'' / \rho_0^2 - 1/\rho_0$ , получаем

$$\rho_0'' = \frac{n\rho_0(f_e - \rho_0 - d_0)}{(1-n)d_0}.$$

Выразим все переменные в формуле (18) через  $X$ . Из закона отображения  $X = f_e \sin \alpha$ ,  $\alpha = X/f_e$ , получим  $x_p = \rho(\alpha) \sin \alpha = \gamma_1 X + \gamma_3 X^3$ ,  $\gamma_1 = \rho_0 / f_e$ ,

$\gamma_3 = \rho_0'' / (2f_e^3)$ . В силу четности  $f(x)$  и  $F(X)$  можно представить

$$f(x_p + \Delta x) = \rho_0 + \frac{K_0}{2} (x_p + \Delta x)^2 + \dots,$$

где

$$\Delta x = \Delta x_0 (1 + PX^2), \quad \Delta x_0 = -\frac{d_0}{nf_e} \delta_R,$$

$$P = (\Lambda - \Omega) / f_e^2 + T / d_0,$$

$$\Lambda = \frac{2n(f_e - \rho_0) - d_0(n+1)}{2(1-n)d_0}, \quad \Omega = \frac{(n+1)}{2(n-1)} \times$$

$$\times [t^2 + (1-t)^2], \quad T = \frac{(f_e - \rho_0)^2 + \rho_0 d_0}{2(1-n)d_0 f_e^2},$$

$$t = \frac{f_e - \rho_0}{d_0}, \quad F(X) = \rho_0 + d_0 + \frac{K_B}{2} X^2 + \dots,$$

$$K_B = \frac{n(f_e - \rho_0)}{(1-n)f_e d_0}$$

– кривизна второй поверхности на оси. После приведения подобных членов формула (18) для  $\Phi(X)$  примет вид

$$\begin{aligned} \Phi(X) = \sqrt{(x_p + \Delta x + \delta_R)^2 + (f(x_p + \Delta x) + \delta_Z)^2} + \\ + n\sqrt{(X - x_p - \Delta x)^2 + (F(X) - f(x_p + \Delta x))^2} = \\ = \sqrt{A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + A_3 X^3} + \\ + n\sqrt{B_0 + B_1 X + B_2 X^2 + B_3 X^3}. \end{aligned}$$

Раскладывая полученное выражение в ряд по  $X$ , находим коэффициент при  $X^3$ :

$$\begin{aligned} p_3 = A_0^{1/2} \left( \frac{a_3}{2} - \frac{a_1 a_2}{4} + \frac{a_1^3}{16} \right) + \\ + n B_0^{1/2} \left( \frac{b_3}{2} - \frac{b_1 b_2}{4} + \frac{b_1^3}{16} \right), \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$a_i = A_i / A_0, \quad b_i = B_i / B_0,$$

$$A_0 = \rho_0^2 + \Delta x_0^2 (1 + \rho_0 K_0) + 2\Delta x_0 \delta_R + \delta_R^2 + 2\rho_0 \delta_Z,$$

$$\begin{aligned} A_1 = 2\gamma_1 (1 + K_0 \rho_0) \Delta x_0 + 2\gamma_1 \delta_R + \\ + K_0^2 \gamma_1 \Delta x_0^3 + 2K_0 \gamma_1 \delta_Z \Delta x_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 = \gamma_1^2 (1 + \rho_0 K_0) + \frac{3}{2} K_0^2 \gamma_1^2 \Delta x_0^2 + \delta_Z K_0 \gamma_1^2 + \\ + P(2\Delta x_0 \delta_R + \Delta x_0^2 (2 + 2\rho_0 K_0 + K_0^2 \Delta x_0^2 + 2\delta_Z K_0)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 = (2\gamma_3 (1 + \rho_0 K_0) + K_0^2 \gamma_1^3) \Delta x_0 + 2\delta_R \gamma_3 + \\ + K_0^2 \gamma_3 \Delta x_0^3 + 2K_0 \gamma_3 \Delta x_0 \delta_Z + \\ + (2 + 3K_0^2 \Delta x_0^2 + 2\rho_0 K_0 + 2K_0 \delta_Z) \gamma_1 \Delta x_0 P, \end{aligned}$$

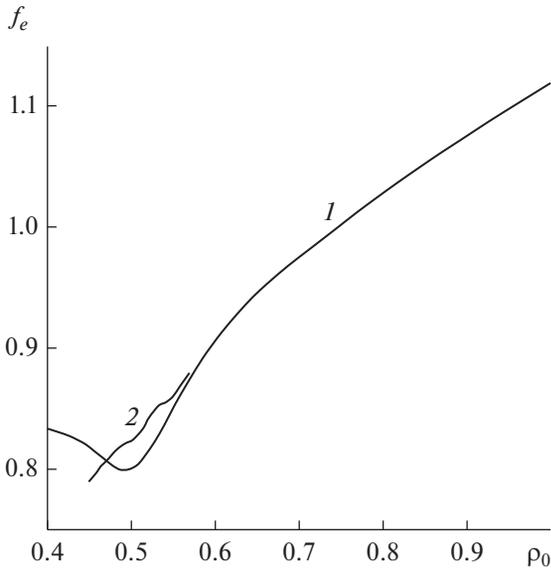


Рис. 7. Зависимость фокального радиуса от фокального расстояния оптимизированных линз.

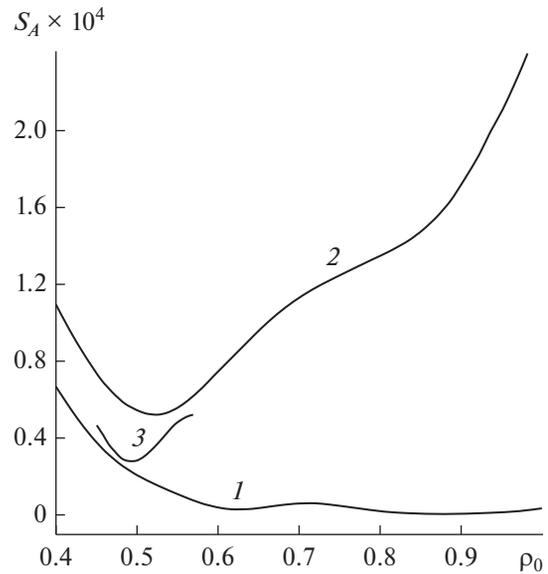


Рис. 8. Зависимость минимизированной среднеквадратической aberrации от фокального расстояния.

$$B_0 = d_0^2 + (1 - d_0 K_0) \Delta x_0^2,$$

$$B_1 = 2(\gamma_1 - 1 - d_0 K_0 \gamma_1) \Delta x_0 + K_0^2 \gamma_1 \Delta x_0^3,$$

$$B_2 = (1 - \gamma_1)^2 + d_0(K_B - K_0 \gamma_1^2) + \left(\frac{3}{2} K_0^2 \gamma_1^2 - \frac{1}{2} K_B K_0\right) \Delta x_0^2 + P(2\Delta x_0^2(1 - d_0 K_0) + K_0^2 \Delta x_0^4),$$

$$B_3 = (2\gamma_3(1 - d_0 K_0) + K_0^2 \gamma_1^3 - K_B K_0 \gamma_1) \Delta x_0 + K_0^2 \gamma_3 \Delta x_0^3 + P\Delta x_0(2(\gamma_1 - 1) + 3K_0^2 \gamma_1 \Delta x_0^2 - 2d_0 K_0 \gamma_1).$$

В качестве примера используем выражение (25) для коэффициента разложения эйконала  $p_3$  с целью

нахождения параметров планарной апланатической линзовой системы из полистирола ( $n = 1.6$ ), ограниченной прямоугольником, размер которого  $1 \times 1.2$  обеспечивает минимальные aberrации в угле зрения  $40^\circ$ . Сначала для каждого  $\rho_0$  из диапазона  $0.4 \leq \rho_0 \leq 1$  найдем параметр  $f_e$ , при котором модуль коэффициента (25) достигает минимума при угле отклонения  $10^\circ$ . Полученная зависимость представлена на рис. 7. Далее найдем величину среднеквадратической aberrации  $S_A$  для углов отклонения  $10^\circ$  и  $20^\circ$ , когда  $\rho_0$  меняется в диапазоне  $0.4 \leq \rho_0 \leq 1$  при найденном выше соотношении между  $\rho_0$  и  $f_e$  по формуле

$$S_A(\theta) = \sqrt{\int_{-0.5}^{0.5} (\Phi(X) - \Phi(0) - X \sin \theta - F(X) \cos \theta)^2 dX},$$

где  $\Phi(X)$  – значение эйконала от смещенного источника на выходной поверхности линзы  $Z = F(X)$ . Величины смещений  $\delta_R, \delta_Z$  находим путем минимизации  $S_A$ , при этом в качестве первого приближения используем приближенное уравнение фокальной кривой (24).

Зависимости среднеквадратической aberrации от фокального расстояния приведены на рис. 8 для угла отклонения  $10^\circ$  (кривая 1) и  $20^\circ$  (кривая 2). Как видно из рисунка, минимум среднеквадратической aberrации для угла  $20^\circ$   $4.7 \times 10^{-4}$  обеспечивает линза с параметрами  $\rho_0 = 0.53$  ( $d_0 = 0.67$ ),  $f_e = 0.83$ . Уточненные значения

для оптимального соотношения параметров  $\rho_0$  и  $f_e$ , полученные с использованием трассировки лучей приведены на рис. 7 (кривая 2). Соответствующее уточнение для среднеквадратической aberrации приведено на рис. 8 (кривая 3). При этом минимальная величина  $S_A = 3 \times 10^{-5}$  существенно меньше соответствующей величины в планарных двухзеркальных антеннах [4] и вполне сопоставима с aberrациями в линзах Ротмана [5]. Отметим, что оптимальные значения параметров достаточно точно предсказаны полученными в данной работе формулами.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, полученные формулы для эйконала позволяют проводить оценку aberrаций и оптимизацию параметров в планарных линзовых антеннах без использования численной трассировки лучей. Эти оценки далее могут быть использованы в качестве начального приближения для оптимизации методом трассировки лучей с целью уточнения результата оптимизации.

Очень малая величина aberrации, полученная в результате оптимизации параметров линзы из полистирола, подтверждает перспективность использования планарных диэлектрических линз в

качестве диаграммообразующих элементов многолучевых планарных антенн и антенных решеток.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970.
2. Русинов М.М. Техническая оптика. Л.: Машиностроение, 1979.
3. Венецкий А.С., Калошин В.А. // ДАН. 2015. Т. 463. № 4. С. 533.
4. Венецкий А.С., Калошин В.А. // РЭ. 2014. Т. 59. № 11. С. 1102.
5. Rotman W., Turner R.F. // IEEE Trans. 1963. V. AP-11. № 6. P. 623.