

АНТЕННО-ФИДЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 621.396.67.01

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЙКОНАЛА НА ПОВЕРХНОСТИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЛИНЗЫ И МИНИМИЗАЦИЯ АБЕРРАЦИЙ

© 2018 г. А. С. Венецкий*, В. А. Калошин

*Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
Российская Федерация, 125009 Москва, ул. Моховая, 11, корп. 7*

**E-mail: Avenetsky@yandex.ru*

Поступила в редакцию 28.10.2016 г.

На основе развитой в работе однопараметрической теории aberrаций получена формула, описывающая распределение эйконала на поверхности осесимметричной диэлектрической линзы с двумя произвольно расположенными на оси фокусами при произвольном направлении смещения источника из фокуса. Ошибка формулы – порядка четвертой степени величины смещения источника. Проведен численный анализ точности полученной формулы и ее разложений путем сравнения результатов расчета эйконала и величины aberrаций на поверхности апланатической линзы с результатами точного геометрикооптического расчета. Получено уравнение фокальной кривой и условие минимума астигматизма. В качестве примера использования найденных формул синтезирован широкоугольный апланат-анастигмат с оптимальными параметрами. В приближении физической оптики исследованы характеристики сканирования линзовой антенны на основе синтезированного апланата-анастигмата.

DOI: 10.7868/S0033849418020067

ВВЕДЕНИЕ

Для анализа и оптимизации линзовых систем в оптике широко используется классическая теория aberrаций, основанная на разложении оптического пути (эйконала) в области фокусировки по степеням угла зрения и диаметра линзы [1–3]. Соответствующий двумерный ряд можно эффективно использовать при анализе линз с относительно небольшими значениями угла зрения и числовой апертуры. В противном случае возникает необходимость учета aberrаций высоких порядков, что приводит к необходимости суммирования большого количества членов двумерного ряда и, как следствие, необходимости использования численных методов в задачах оптимизации.

В случае небольших смещений источника из фокуса линзы для вычисления распределения эйконала на ее выходной поверхности можно воспользоваться хорошо известной формулой для двух первых членов разложения эйконала по степеням величины этого смещения [1]. Однако при увеличении величины смещения точность этой формулы резко падает. Кроме того, формула не описывает aberrации в апланатических линзах, поскольку член при первой степени величины смещения источника в таких системах равен нулю.

В работах [5–9] развита однопараметрическая теория aberrаций эйконала в двухзеркальных системах с использованием разложения только по величине

смещения источника, которая пропорциональна углу зрения системы. В работе [10] аналогичный подход развит для описания эйконала на поверхности диэлектрической линзы и получена формула, имеющая погрешность порядка третьей степени величины смещения источника из фокуса. В работе [11] для планарной (цилиндрической) диэлектрической линзы получена формула, имеющая погрешность порядка четвертой степени величины смещения источника из фокуса.

В представленной работе аналогичная теория построена для осесимметричной линзы и получена формула, также имеющая погрешность порядка четвертой степени величины смещения источника из фокуса. Проведено численное исследование точности полученной формулы и ее разложений по величине смещения источника для описания эйконала и его aberrаций. С использованием найденных разложений получено уравнение фокальной кривой и условие минимума астигматизма. В качестве примера применения развитой теории найдена область параметров апланатической линзы с коэффициентом преломления $n = 1.5$, реализующих отсутствие астигматизма на заданном радиусе в апертуре и проведена оптимизация этих параметров с целью реализации апланата-анастигмата с минимальными aberrациями. В приближении физической оптики проведено исследование сканирующих характеристик линзовой антенны на основе синтезированного апланата-анастигмата.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим осесимметричную диэлектрическую линзу с коэффициентом преломления n и вынесенным из фокуса источником сферической волны, продольное сечение которой показано на рис. 1 для несмещенного и смещенного источников.

При расположении источника в фокусе O системы на выходной поверхности линзы формируется сферический фронт. Предположим, что через любую точку B на выходной поверхности линзы проходит только один луч, выходящий из источника под углом α к оси системы и попадающий во второй фокус O_2 под углом θ , т.е. обеспечивается взаимно-однозначное соответствие между углами α и θ , которое описывается функциями отображения:

$$\theta = \Gamma(\alpha), \quad \alpha = \Gamma^{-1}(\theta). \quad (1)$$

Если второй фокус находится на бесконечности, закон отображения (1) заменяется на закон соответствия каждой точки апертуры B углу α :

$$r = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = r(\alpha), \quad \alpha = \alpha(r). \quad (1')$$

Пусть точка O_1 с координатами $(-\delta_R, 0, -\delta_Z)$ – положение смещенного источника (см. рис. 1б). Предположим, что при смещении источника в точку O_1 взаимно-однозначное соответствие множества точек выходной апертуры множеству выходящих из O_1 лучей сохраняется. При этом всегда существует луч, соединяющий точку O_1 и точку B . Эйконал вдоль этого луча равен сумме оптических длин двух отрезков

$$\Phi(BO_1) = n|BP_1| + |P_1O_1|, \quad (2)$$

где n – коэффициент преломления линзы. Будем искать разложение выражения (2) по степеням δ_R и δ_Z .

Выберем систему координат XYZ с центром в фокусе O так, чтобы точка B имела координаты $(X_B, 0, Z_B)$. Тогда другие точки будут иметь координаты $P(x_P, 0, z_P)$, $P_1(x_P + \Delta x, \Delta y, z_P + \Delta z)$, $O_1(-\delta_X, -\delta_Y, -\delta_Z)$, $O(0, 0, 0)$. При этом $Z_B = F(X_B)$, $z_P = f(x_P)$, где $Z = F(X)$ и $z = f(x)$ – уравнения образующих поверхности линзы соответственно, $\delta_X = \delta_R \cos \varphi$, $\delta_Y = -\delta_R \sin \varphi$.

Выражение для эйконала (2) представим в виде

$$\begin{aligned} \Phi(BO_1) = n\sqrt{(X_B - x_P - \Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (Z_B - z_P - \Delta z)^2} + \\ + \sqrt{(x_P + \Delta x + \delta_X)^2 + (\Delta y + \delta_Y)^2 + (z_P + \Delta z + \delta_Z)^2} \end{aligned} \quad (3)$$

С точностью до членов 3-го порядка малости по $\Delta x, \Delta y$ можно записать

$$\Delta z = f'_P \Delta x + \frac{f''_P}{2x_P} \Delta y^2 + \frac{f''_P}{2} \Delta x^2. \quad (4)$$

Здесь и далее $f'_P = f'(x_P)$, $f''_P = f''(x_P)$.

Таким образом, задача нахождения эйконала заключается в определении величин $\Delta x, \Delta y$, входящих в выражение (3).

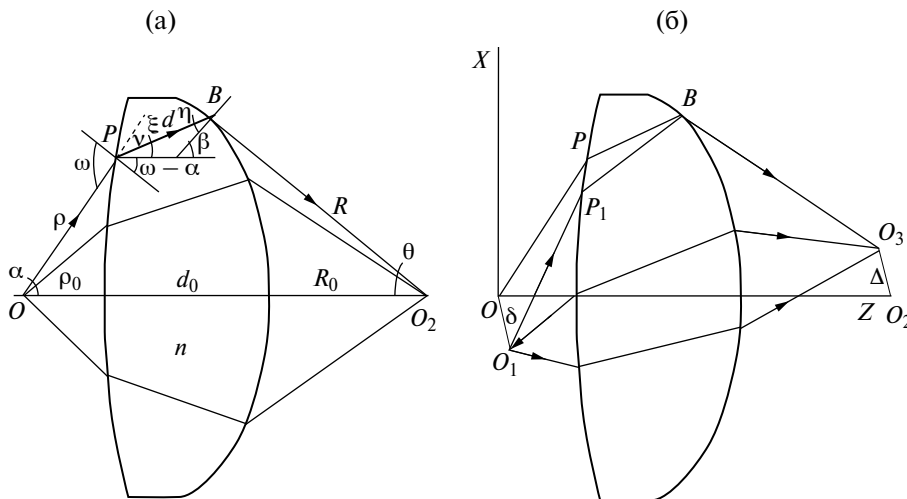


Рис. 1. Геометрия лучей в линзе при несмещенном (а) и смещенном (б) источниках.

2. ВЫВОД ФОРМУЛ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЙКОНАЛА НА ПОВЕРХНОСТИ ЛИНЗЫ

Для нахождения величин Δx , Δy заменим в выражении (3) величину Δz ее разложением (4) и найдем разложение для эйконала (3) в ряд по степеням Δx , Δy , ограничиваясь членами второго порядка малости. Каждое из двух слагаемых в формуле (2) можно представить в виде

$$|BP| = d + (u_x + u_z f'_P) \Delta x + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{d} (u_z - u_x f'_P)^2 + u_z f''_P \right] \Delta x^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d} + u_z \frac{f'_P}{x_P} \right) \Delta y^2,$$

$$|P_1O_1| = \sqrt{A} + Q_{X1} \Delta x + Q_{Y1} \Delta y + Q_{X2} \Delta x^2 + Q_{Y2} \Delta y^2,$$

где

$$\begin{aligned} \sqrt{A} &= \rho + \sin \alpha \delta_X + \cos \alpha \delta_Z + \\ &+ \frac{1}{2\rho} (\delta_X^2 \cos^2 \alpha + \delta_Y^2 + \delta_Z^2 \sin^2 \alpha - \delta_X \delta_Z \sin 2\alpha), \\ \rho &= |OP|, d = |BP|. \end{aligned}$$

Суммируя полученные для слагаемых эйконала выражения и приводя подобные члены, можно записать

$$\Phi(BO_1) = \sqrt{A} + nd + \Phi_1(\Delta x, \Delta y), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= (nS_{X1} + Q_{X1}) \Delta x + Q_{Y1} \Delta y + (nS_{X2} + Q_{X2}) \Delta x^2 + \\ &+ (nS_{Y2} + Q_{Y2}) \Delta y^2, \end{aligned}$$

$u_X = -\sin \xi$, $u_Z = -\cos \xi$ – компоненты единичного вектора $\vec{u} = \vec{BP}/|BP|$.

Учитывая закон преломления луча в точке P : $\sin \omega = n \sin(\xi + \omega - \alpha)$, а также равенства

$x_P/\rho = \sin \alpha$, $f_P/\rho = \cos \alpha$, $f'_P = \operatorname{tg}(\omega - \alpha)$, выражения, входящие в Φ_1 , можно привести к виду

$$\begin{aligned} S_{X1} &= -\frac{\sin \omega}{n \cos(\omega - \alpha)}, \\ S_{X2} &= \frac{1}{2d} \left[\frac{n^2 - \sin^2 \omega}{n^2 \cos^2(\omega - \alpha)} - d \cos \xi f''_P \right], \\ Q_{X1} &= \frac{\sin \omega}{\cos(\omega - \alpha)} + \frac{\delta_X \cos \omega \cos \alpha}{\rho \cos(\omega - \alpha)} - \frac{\delta_Z \cos \omega \sin \alpha}{\rho \cos(\omega - \alpha)}, \\ Q_{X2} &= \frac{1}{2\rho} \left(\frac{\cos^2 \omega}{\cos^2(\omega - \alpha)} + \rho \cos \alpha f''_P \right), \\ Q_{Y1} &= \frac{\delta_Y}{\rho}, \quad Q_{Y2} = \frac{\sin \omega}{2\rho \sin \alpha \cos(\omega - \alpha)}, \end{aligned}$$

$$S_{Y2} = \frac{1}{2d} \left(1 - \frac{d \cos \xi \operatorname{tg}(\omega - \alpha)}{\rho \sin \alpha} \right),$$

$$Q_{X1} + nS_{X1} = \frac{\delta_X \cos \omega \cos \alpha}{\rho \cos(\omega - \alpha)} - \frac{\delta_Z \cos \omega \sin \alpha}{\rho \cos(\omega - \alpha)},$$

$$Q_{X2} + nS_{X2} = \frac{1}{2 \cos^2(\omega - \alpha)} \times \quad (6)$$

$$\times \left(\frac{\cos^2 \omega}{\rho} + \frac{n^2 - \sin^2 \omega}{nd} \right) + \frac{1}{2} (\cos \alpha - n \cos \xi) f''_P,$$

$$Q_{Y2} + nS_{Y2} = \frac{n(\rho \sin \alpha + d \sin \xi)}{2d \rho \sin \alpha} = \frac{nr}{2d \rho \sin \alpha}. \quad (7)$$

Используя принцип Ферма, неизвестные величины Δx , Δy можно найти из системы линейных уравнений, выражающих условие экстремума эйконала –

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta x} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta y} = 0, \quad (8)$$

решение которой имеет вид

$$\Delta x = \frac{-(nS_{X1} + Q_{X1})}{2(nS_{X2} + Q_{X2})}, \quad \Delta y = \frac{-Q_{Y1}}{2(nS_{Y2} + Q_{Y2})}. \quad (9)$$

Подставляя найденные Δx , Δy в выражение (5) и ограничиваясь членами второго порядка малости по δ_X и δ_Z , можно получить

$$\begin{aligned} \Phi(BO_1) &= \sqrt{A} + nd - \\ &- \frac{(nS_{X1} + Q_{X1})^2}{4(nS_{X2} + Q_{X2})} - \frac{Q_{Y1}^2}{4(nS_{Y2} + Q_{Y2})}. \quad (10) \end{aligned}$$

Правая часть (10) содержит производную f''_P , которую можно выразить через кривизну поверхности линзы K_P :

$$K_P = \frac{f''_P}{(\sqrt{1 + f_P'^2})^3} = f''_P \cos^3(\omega - \alpha),$$

где ω – угол между падающим и отраженным лучом в точке P . Формула кривизны, выраженная через функцию отображения и параметры луча, приведена в Приложении (П. 8). Подставляя это выражение в (10) и учитывая соотношения (6), (7), выражение для эйконала можно представить в виде

$$\Phi = \rho + nd + \delta_X \sin \alpha + \delta_Z \cos \alpha + \frac{\delta_X^2 \cos^2 \alpha}{2L_1} + \frac{\delta_Y^2}{2L_2} -$$

$$-\frac{\delta_X \delta_Z}{2L_1} \sin 2\alpha + \frac{\delta_Z^2}{2L_1} \sin^2 \alpha + \dots, \quad (11)$$

где для случая конечных фокусных расстояний имеем

$$\frac{1}{L_1} = \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{d}{GWR} \frac{d\alpha}{d\theta} \right), \quad \frac{1}{L_2} = \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{d \sin \alpha}{nR \sin \theta} \right),$$

а для случая, когда второй фокус расположен в бесконечности –

$$\frac{1}{L_1} = \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{d}{GW} \frac{d\alpha}{dr} \right), \quad \frac{1}{L_2} = \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{d \sin \alpha}{nr} \right),$$

($\rho = |OP|$, $d = |BP|$ величины W и G определены в Приложении 1).

Возвращаясь в исходную систему координат XYZ , в которой точки B и O_1 имеют декартовы координаты $(r \cos \varphi, r \sin \varphi, Z_B)$ и $(-\delta_R, 0, -\delta_Z)$ соответственно, формулу (11) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \Phi(r, \varphi) = & L_0 + \delta_R \cos \varphi \sin \alpha + \delta_Z \cos \alpha + \\ & + \frac{\delta_R^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{L_1} \cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \varphi}{L_2} \right) - \end{aligned} \quad (12)$$

$$-\frac{\delta_R \delta_Z}{2L_1} \cos \varphi \sin 2\alpha + \frac{\delta_Z^2}{2L_1} \sin^2 \alpha + \dots,$$

где $L_0 = \rho + nd$ – значение эйконала на выходной поверхности линзы при несмещенном источнике, (r, φ) – полярные координаты точки B , $(-\delta_R, 0, -\delta_Z)$ – координаты точки O_1 в исходной декартовой системе координат.

Формула (12) описывает эйконал на поверхности линзы с точностью до $\delta^2 = \delta_R^2 + \delta_Z^2$, т.е. ошибка пропорциональна δ^3 .

Эйконал на поверхности линзы можно вычислить непосредственно сложением оптических путей по формуле (2), где координаты P_1 вычисляются с помощью формул (6):

$$\begin{aligned} \Phi(r, \varphi) = & \sqrt{(x_1 + \delta_R)^2 + y_1^2 + (z_1 + \delta_Z)^2} + \\ & + n\sqrt{(r \cos \varphi - x_1)^2 + (r \sin \varphi - y_1)^2 + (F(r) - z_1)^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $x_1 = x_P + \Delta x \cos \varphi - \Delta y \sin \varphi$, $y_1 = y_P + \Delta x \sin \varphi + \Delta y \cos \varphi$, $z_1 = f(\sqrt{x_1^2 + y_1^2})$, Δx , Δy – вычисляются по формулам (9) и могут быть представлены в виде (14) для конечных фокусных расстояний и (14') – для второго – в бесконечности:

$$\begin{aligned} \Delta x = & -\frac{\cos \alpha \cos(\omega - \alpha)}{\cos \omega} \frac{d}{GWR} \left(\frac{d\alpha}{d\theta} \right) \delta_R \cos \varphi + \\ & + \frac{\sin \alpha \cos(\omega - \alpha)}{\cos \omega} \frac{d}{GWR} \left(\frac{d\alpha}{d\theta} \right) \delta_Z, \end{aligned}$$

$$\Delta y = \frac{d \sin \alpha}{nR \sin \theta} \delta_R \sin \varphi, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Delta x = & -\frac{\cos \alpha \cos(\omega - \alpha)}{\cos \omega} \frac{d}{GW} \left(\frac{d\alpha}{dr} \right) \delta_R \cos \varphi + \\ & + \frac{\sin \alpha \cos(\omega - \alpha)}{\cos \omega} \frac{d}{GW} \left(\frac{d\alpha}{dr} \right) \delta_Z, \end{aligned}$$

$$\Delta y = \frac{d \sin \alpha}{nr} \delta_R \sin \varphi. \quad (14')$$

Если источник O_1 находится на фокальной поверхности, тогда $\delta_Z = A\delta_R^2 + B\delta_R^4 + \dots$ и формулы (14), (14') упрощаются. Для конечных фокусных расстояний получаем

$$\Delta x = -\frac{\cos \alpha \cos(\omega - \alpha)}{\cos \omega} \frac{d}{GWR} \left(\frac{d\alpha}{d\theta} \right) \delta_R \cos \varphi, \quad (15)$$

для второго фокуса в бесконечности –

$$\Delta x = -\frac{\cos \alpha \cos(\omega - \alpha)}{\cos \omega} \frac{d}{GW} \left(\frac{d\alpha}{dr} \right) \delta_R \cos \varphi. \quad (15')$$

3. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ПОЛУЧЕННЫХ ФОРМУЛ

Покажем, что погрешность формулы (13) $|\Phi(r, \varphi) - \Phi_0(r, \varphi)| < (c\delta)^4$, где $\Phi_0(r, \varphi)$ – точное значение эйконала в данной точке, c – константа. Для этого представим выражение для эйконала (3) в виде ряда, включая члены третьего порядка малости по Δx , Δy , δ_X , δ_Y , δ_Z с использованием разложения:

$$\begin{aligned} \Delta z = & f'_P \Delta x + \frac{f''_P}{2} \Delta x^2 + \frac{f'_P}{2x_P} \Delta y^2 + \\ & + \left(\frac{f''_P}{2x_P} - \frac{f'_P}{2x_P^2} \right) \Delta x \Delta y^2 + \frac{f'''_P}{6} \Delta x^3. \end{aligned}$$

Выражение (13) для эйконала примет вид

$$\begin{aligned} \Phi(BO_1) = & \sqrt{A} + nd + C_1 \Delta x + C_2 \Delta x^2 + C_3 \Delta x^3 + \\ & + H_1 \Delta y + H_2 \Delta y^2 + h_3 \delta_Y \Delta x \Delta y + H_4 \Delta x \Delta y^2, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} C_1 = & C_{11} \delta_X + D_{11} \delta_Z + C_{12} \delta_X^2 + \\ & + D_{12} \delta_Z^2 + E \delta_X \delta_Z + G_Y \delta_Y^2, \end{aligned}$$

$$C_2 = C_{20} + C_{21} \delta_X + D_{21} \delta_Z,$$

$$H_1 = H_Y \delta_Y + H_{XY} \delta_X \delta_Y + H_{YZ} \delta_Y \delta_Z,$$

$$H_2 = H_{20} + H_{2X} \delta_X + H_{2Z} \delta_Z,$$

$$A = \rho^2 + 2x_P \delta_X + 2f_P \delta_Z + \delta_X^2 + \delta_Z^2 + \delta_Y^2.$$

Выражение (16) является разложением эйконала по степеням $\delta_X^i \delta_Y^j \delta_Z^k$, включая третьи степени разложения, где $i + j + k = 3$. Неизвестные величины Δx , Δy можно найти из уравнений (6), выражающих условие экстремума эйконала на истинной траектории (принцип Ферма), которые можно записать в виде

$$C_1 + 2C_2\Delta x + 3C_3\Delta x^2 + h_3\delta_Y\Delta y + H_4\Delta y^2 = 0, \quad (17)$$

$$H_1 + 2H_2\Delta y + h_3\delta_Y\Delta x + 2H_4\Delta x\Delta y = 0. \quad (18)$$

Из вида (16) следует, что неизвестные Δx , Δy могут быть представлены разложениями по степеням $\delta_X^i \delta_Y^j \delta_Z^k$, включая вторые степени разложения, где $i + j + k = 2$:

$$\Delta x = a_1\delta_X + b_1\delta_Z + a_{11}\delta_X^2 + b_{11}\delta_Z^2 + a_3\delta_X\delta_Z + g_1\delta_Y^2,$$

$$\Delta y = a_2\delta_Y + b_2\delta_X\delta_Y + g_2\delta_Z\delta_Y.$$

В выражении для Δx нет члена, пропорционального $\delta_X\delta_Y$; а в выражении для Δy – нет члена пропорционального δ_Y^2 из-за симметрии задачи. Подставим Δx , Δy в уравнения (17), (18), приведем подобные члены и приравняем нулю члены первого и второго порядка малости по δ_X , δ_Y , δ_Z . В результате получаем систему девяти уравнений для определения коэффициентов a_1 , b_1 , a_2 , a_{11} , b_{11} , a_3 , g_1 , b_2 , g_2 :

$$C_{11} + 2C_{20}a_1 = 0, \quad D_{11} + 2C_{20}b_1 = 0,$$

$$H_Y + 2H_{20}a_2 = 0,$$

$$C_{12} + 2C_{21}a_1 + 2C_{20}a_{11} + 3C_3a_1^2 = 0,$$

$$D_{12} + 2D_{21}b_1 + 2C_{20}b_{11} + 3C_3b_1^2 = 0,$$

$$E + 2D_{21}a_1 + 2C_{21}b_1 + 2C_{20}a_3 + 6C_3a_1b_1 = 0,$$

$$G_Y + 2C_{20}g_1 + a_2h_3 + a_2^2H_4 = 0,$$

$$H_{YZ} + 2H_{2Z}a_2 + h_3b_1 + 2H_4b_1a_2 + 2H_{20}g_2 = 0,$$

$$H_{XY} + 2H_{2X}a_2 + 2H_{20}b_2 + h_3a_1 + 2a_1a_2H_4 = 0.$$

Подставим полученные коэффициенты в выражение для Δx , Δy , а последние, в свою очередь, в выражение (16). Путем несложных преобразований можно получить следующие выражения для членов третьей степени (без учета \sqrt{A} , так как величина A не зависит от Δx , Δy):

$$\delta_X^3(C_{12}a_1 + C_{11}a_{11} + C_{21}a_1^2 + 2a_1a_{11}C_{20} + C_3a_1^3) = C_{12}a_1 + C_{21}a_1^2 + C_3a_1^3,$$

$$\delta_Z^3(D_{12}a_1 + D_{11}b_{11} + D_{21}b_1^2 + 2b_1b_{11}C_{20} + C_3b_1^3) = D_{12}b_1 + D_{21}b_1^2 + C_3b_1^3,$$

$$\delta_X\delta_Z(Ea_1 + C_{12}b_1 + D_{21}a_1^2 + 2a_1b_1C_{21} + 3C_3a_1^2b_1),$$

$$\delta_X\delta_Z^2(Eb_1 + D_{12}a_1 + C_{21}b_1^2 + 2a_1b_1D_{21} + 3C_3b_1^2a_1),$$

$$\delta_X\delta_Y^2(G_Ya_1 + H_{XY}a_2 + H_{2X}a_2^2 + h_3a_1a_2 + H_4a_2^2a_1),$$

$$\delta_Z\delta_Y^2(G_Yb_1 + H_{XZ}a_2 + H_{2Z}a_2^2 + h_3b_1a_2 + H_4a_2^2b_1).$$

Из приведенных выражений видно, что они не содержат коэффициенты a_{11} , b_{11} , a_3 , g_1 , b_2 , g_2 и поэтому члены разложения смещения Δx по δ_X , δ_Y , δ_Z зависят только от a_1 , b_1 , а в разложении Δy – только от a_2 , т.е.

$$\Delta x = a_1\delta_X + b_1\delta_Z, \quad \Delta y = a_2\delta_Y. \quad (19)$$

Отсюда следует, что если не раскладывать выражение (6) в степенной ряд, а найти координаты точки P_1 по формулам: $x_{p1} = x_p + \Delta x$, $y_{p1} = y_p + \Delta y$, где Δx , Δy выражены формулами (14), (14') или (15), (15'), а вместо $z_{p1} = z_p + \Delta z$ подставить $z_{p1} = f(\sqrt{x_{p1}^2 + y_{p1}^2})$, то величина $\Phi(BO_1) = |O_1P_1| + n|P_1B|$ определяет эйконал с той же точностью, что и его разложение в степенной ряд, включая третьи степени $\delta_X^i \delta_Y^j \delta_Z^k$, где $i + j + k = 3$. Следовательно, ошибка формулы (13) будет пропорциональна δ^4 . Переходя в исходную систему координат, которая повернута на угол φ , координаты точки P_1 можно найти по формулам: $x_{p1} = x_p + \Delta x \cos \varphi - \Delta y \sin \varphi$, $y_{p1} = y_p + \Delta x \sin \varphi + \Delta y \cos \varphi$, при этом нужно учесть, что $\delta_X = \delta_R \cos \varphi$, $\delta_Y = -\delta_R \sin \varphi$.

Для численного анализа точности формул (12) и (13) были проведены расчеты распределения эйконала на выходной поверхности апланатической линзы, преобразующей сферический фронт в плоский, с параметрами: половина углового размера входной поверхности линзы $\alpha_{\max} = 30^\circ$, $\rho_0 = 1$, $d_0 = 1$, диаметр апертуры $D = 1.5$, $n = 1.6$ для смещений $\delta_R = 0.4$ и $\delta_Z = 0.1$, что соответствует углу наклона фронта 15° .

На рис. 2 приведена нормированная на D разность между результатами расчетов эйконала по формуле (12) и точным геометрикооптическим расчетом (кривые 1, 2), а также аналогичная разность для формулы (13) (кривые 3, 4). На рис. 3 представлена нормированная абберация эйконала $\Delta\Phi_A = (\Phi(r, \varphi) - \Phi(0, 0) - X \sin \theta - Z \cos \theta)/D$ (величина эйконала без линейной составляющей), вычисленная с использованием формулы (12) (кривые 1, 2), формулы (13) (кривые 3, 4) (кривые 5, 6) и с использованием трассировки лучей (кривые 5, 6). Кривые с нечетными номерами относятся к плоскости

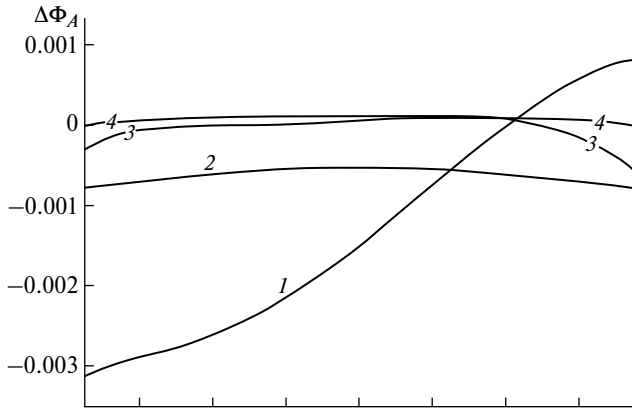


Рис. 2. Погрешности формул для эйконала в апертуре апланатической линзы.

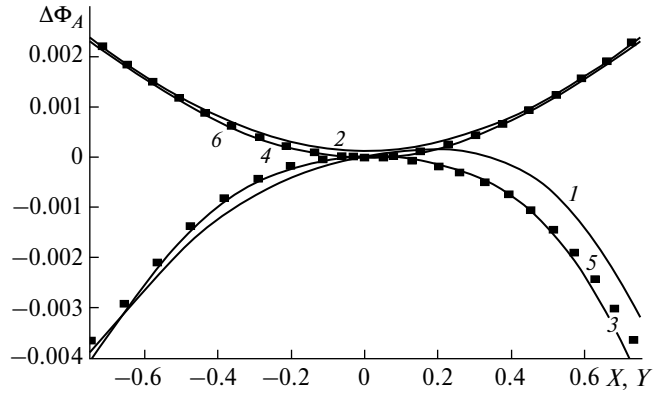


Рис. 3. Аберрации эйконала в апертуре апланатической линзы.

сканирования, с четными – к ортогональной плоскости.

Как видно из рис. 2, погрешность формулы (12) для эйконала при данном наборе параметров равна 4×10^{-3} , что примерно равно $(\delta/D)^4$, где $\delta = \sqrt{\delta_X^2 + \delta_Z^2} = 0.41$, а ошибка формулы (13) без учета константы – 7×10^{-4} , т.е. порядка $(\delta/D)^5$. При этом точность вычисления аберрации (см. рис. 3) по обеим формулам примерно равна. Иными словами, формула (13) точнее формулы (12) за счет более точного описания наклона волнового фронта.

4. УРАВНЕНИЕ ФОКАЛЬНОЙ КРИВОЙ

При смещении источника из фокуса в точке $O(0, 0, 0)$ в точку $O_1(-\delta_R, 0, -\delta_Z)$ изображение сместится из точки $O_2(0, 0, 0)$ в точку $O_3(\Delta_R, 0, \Delta_Z)$. Для простоты выкладок источник и его изображение будем рассматривать в их системах координат. Пусть изображение смещается по некоторой заданной кривой, которая определяется уравнением

$$\Delta_Z = f_2(\Delta_R). \tag{20}$$

Найдем уравнение кривой $\delta_Z = f_1(\delta_R)$, по которой будет перемещаться источник O_1 , из условия минимума среднеквадратической аберрации (СА):

$$S_A(\Delta_R) = \sqrt{\int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} (\Phi(r, \varphi) + |BO_3| - \Phi(0,0) - |B_0O_3|)^2 r dr d\varphi} \tag{21}$$

величина которой, в случае второго фокуса в бесконечности, имеет вид

$$S_A(\theta) = \sqrt{\int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} (\Phi(r, \varphi) - \Phi(0,0) - X \sin \theta - Z \cos \theta)^2 r dr d\varphi}, \tag{22}$$

где θ – угол наклона выходного волнового фронта к оси линзы.

Эйконал в точке B на выходной поверхности линзы с координатами $(r \cos \varphi, r \sin \varphi, F(r))$ определяем по формуле (12). Найдем эйконал между точками O_3 и B :

$$\begin{aligned} |BO_3| &= \sqrt{(r \cos \varphi - \Delta_R)^2 + r^2 \sin^2 \varphi + (F(r) - \Delta_Z)^2} = \\ &= \sqrt{R^2 - 2r \cos \varphi \Delta_R - 2F \Delta_Z + \Delta_R^2 + \Delta_Z^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= R - \sin \theta \cos \varphi \Delta_R - \cos \theta \Delta_Z + \frac{\Delta_R^2}{2R} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) + \\ &+ \frac{\Delta_Z^2}{2R} \sin^2 \theta - \frac{\Delta_R \Delta_Z}{2R} \sin 2\theta \cos \varphi + \dots, \end{aligned}$$

где $R = \sqrt{r^2 + F^2(r)}$.

Рассмотрим сумму эйконалов $E(r, \varphi) = \Phi(r, \varphi) + |BO_3|$, которую представим в виде суммы двух функций: $E(r, \varphi) = \Phi_1(r, \varphi) + \Phi_2(r, \varphi)$, где Φ_1 – функция, нечетная по $\cos \varphi$, а Φ_2 – функция, четная по $\cos \varphi$:

$$\begin{aligned}\Phi_1(r, \varphi) &= \delta_R \sin \alpha \cos \varphi - \frac{\delta_R \delta_Z}{2L_1} \sin 2\alpha \cos \varphi - \\ &- \Delta_R \sin \theta \cos \varphi - \frac{\Delta_R \Delta_Z}{2R} \sin 2\theta \cos \varphi, \\ \Phi_2(r, \varphi) &= L_0 + \delta_Z \cos \alpha + \\ &+ \frac{\delta_R^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{L_1} \cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \varphi}{L_2} \right) + \\ &+ \frac{\Delta_R^2}{2R} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) + \frac{\Delta_Z^2}{2R} \sin^2 \theta.\end{aligned}$$

Найдем значения δ_R , δ_Z , при которых максимум СА эйконала на окружности $r = r_1$ имеет минимальное значение, предполагая, что Δ_R , Δ_Z — заданы. Для этого представим закон отображения (1) в виде

$$\sin \theta = \gamma \sin \alpha (1 + p_2 \alpha^2 + p_4 \alpha^4 + \dots). \quad (23)$$

Если выбрать $\delta_R = \gamma \Delta_R$, то из (23) следует, что $\delta_R \sin \alpha - \Delta_R \sin \theta = O(\alpha^3)$. В случае, когда линза является апланатом, $\delta_R \sin \alpha - \Delta_R \sin \theta = 0$ для всех α , θ .

Можно показать, что величина СА будет минимальна, если для любой окружности $r = r_1 = r(\alpha_1)$ внутри апертуры линзы выполняется условие:

$$\Phi_2(0, 0) = \frac{1}{2} \left(\Phi_2(r_1, 0) + \Phi_2(r_1, \frac{\pi}{2}) \right). \quad (24)$$

Параметров линзы недостаточно для удовлетворения уравнению (24) для всех точек на выходной поверхности линзы. Требуя удовлетворения этому уравнению на окружности радиуса $r = r_1$, получаем уравнение, описывающее приближенную фокальную кривую в общем случае:

$$\begin{aligned}\delta_Z (\cos \alpha_1 - 1) + \frac{\delta_R^2}{4} \left(\frac{\cos^2 \alpha_1}{L_1(\alpha_1)} + \frac{1}{L_2(\alpha_1)} - \frac{2}{L_1(0)} \right) + \\ + \frac{\delta_Z^2}{2L_1(\alpha_1)} \sin^2 \alpha_1 + \\ + (1 - \cos \theta_1) \Delta_Z + \frac{\Delta_R^2}{4} \left(\frac{\cos^2 \theta_1 + 1}{R_1} - \frac{2}{R_0} \right) + \\ + \frac{\Delta_Z^2}{2R_1} \sin^2 \theta_1 = 0.\end{aligned}$$

Учитывая, что Δ_Z выражается через Δ_R (см. (20)), а $\Delta_R = \delta_R / \gamma$, получаем уравнение δ_R относительно δ_Z .

В случае второго фокуса в бесконечности линза формирует выходной фронт, близкий к плоскости, уравнение которой имеет вид

$$Z \cos \Theta + X \sin \Theta - Z_0 \cos \Theta = 0,$$

где $\Theta = \arcsin(\delta_R / f_e)$ — угол наклона фронта (f_e — эквивалентный фокальный радиус), Z_0 — координата точки пересечения плоскости с осью Z и выбрана так, что $Z_0 > \rho_0 + d_0$. Найдем расстояние от произвольной точки B на поверхности линзы до этой плоскости. Пусть точка B имеет координаты $(r \cos \varphi, r \sin \varphi, F(r))$. Тогда расстояние от точки B до плоскости равно:

$$D = Z_0 \cos \Theta - r \cos \varphi \sin \Theta - F(r) \cos \Theta, \quad (25)$$

где $Z = F(r)$ — уравнение выходной поверхности линзы. Из закона отображения (1) можно получить разложение:

$$\sin \alpha = r / f_e + pr^3 + \dots$$

Прибавляя к значению эйконала в точке B , найденному по формуле (12), величину D из формулы (25), заменяя $\sin \alpha$ приведенным выше разложением и учитывая, что и $\rho + nd + Z_0 - F(r) = C$ (C — константа), можно получить

$$\begin{aligned}\Phi(r, \varphi) + D &= C + (F(r) - Z_0)(1 - \cos \Theta) + \\ &+ \delta_Z \cos \alpha + \delta_R pr^3 \cos \varphi + \\ &+ \frac{\delta_R^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{L_1} \cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \varphi}{L_2} \right) - \\ &- \frac{\delta_R \delta_Z}{2L_1} \sin 2\alpha \cos \varphi + \frac{\delta_Z^2}{2L_1} \sin^2 \alpha.\end{aligned}$$

Последнее выражение можно представить в виде суммы $\Phi + D = \Phi_1 + \Phi_2$, где

$$\Phi_1 = \delta_R pr^3 \cos \varphi - \frac{\delta_R \delta_Z}{2L_1} \sin 2\alpha \cos \varphi,$$

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= C + (F(r) - Z_0)(1 - \cos \Theta) + \delta_Z \cos \alpha + \\ &+ \frac{\delta_R^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{L_1} \cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \varphi}{L_2} \right) + \frac{\delta_Z^2}{2L_1} \sin^2 \alpha.\end{aligned}$$

Используя вновь условие (24) и заменяя $\cos \Theta$ выражением $\cos \Theta = \sqrt{1 - \delta_R^2 / f_e^2} = 1 - \delta_R^2 / (2f_e^2)$, можно получить уравнение фокальной кривой для линзы со вторым фокусом в бесконечности:

$$\begin{aligned}\delta_Z (1 - \cos \alpha_1) - \frac{\delta_Z^2}{2L_1(\alpha_1)} \sin^2 \alpha_1 = \\ = \frac{\delta_R^2}{4} \left(\frac{\cos^2 \alpha_1}{L_1(\alpha_1)} + \frac{1}{L_2(\alpha_1)} - \frac{2}{L_1(0)} - \frac{2}{f_e^2} (F(0) - F(r_1)) \right).\end{aligned} \quad (26)$$

Как выбрать радиус r_1 для минимизации СА в апертуре линзы, обсудим в следующем разделе.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ И МИНИМИЗАЦИЯ АБЕРРАЦИЙ

Разность значений коэффициента разложения эйконала при δ_R^2 , если $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$, характеризует величину астигматизма линзы. Для устранения астигматизма для всех точек на поверхности линзы свободных параметров недостаточно, поэтому устраним его на окружности с радиусом $r = r_2$, требуя выполнения равенства

$$\Phi_2(r_2, 0) = \Phi_2(r_2, \pi/2), \tag{27}$$

где Φ_2 – четная по $\cos \varphi$ составляющая суммы $\Phi(r, \varphi) + |BO_3| = \Phi_1 + \Phi_2$; $\Phi(r, \varphi)$ – эйконал в точке B с координатами (r, φ) на выходной поверхности линзы, вычисленный по формуле (12), а $|BO_3|$ – расстояние от B до смещенного второго фокуса либо до плоскости фронта (в случае второго фокуса – на бесконечности).

В общем случае из уравнения (27) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\delta_R^2 \cos^2 \alpha_2}{2 L_1(\alpha_2)} + \frac{\Delta_R^2}{2R(\theta_2)} \cos^2 \theta_2 = \\ = \frac{\delta_R^2}{2L_2(\alpha_2)} + \frac{\Delta_R^2}{2R(\theta_2)}. \end{aligned} \tag{28}$$

Для апланатических линз $\Delta_R = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \delta_R$ и из равенства (28) получаем

$$\frac{\cos^2 \alpha_2}{L_1(\alpha_2)} = \frac{1}{L_2(\alpha_2)} + \frac{\sin^2 \alpha_2}{R(\theta_2)}$$

или, после подстановки L_1, L_2 (см. формулу (11)) и несложных преобразований:

$$d_2 \left(\frac{1}{n} - \frac{\cos \alpha_2 \cos \theta_2}{WG} \right) = \sin \alpha_2 \sin \theta_2 (\rho_2 + R_2). \tag{29}$$

Переходя в (29) к пределу при $\alpha_2 \rightarrow 0, \theta_2 \rightarrow 0$, получаем условие отсутствия параксиального астигматизма в апланатической линзе с конечными фокусами:

$$d_0(1 + \gamma^2 + Q) = 2\gamma n(\rho_0 + R_0), \quad \gamma = \sin \theta / \sin \alpha,$$

$$Q = \frac{(n+1)}{(n-1)} (2p^2 + 2p(\gamma-1) + \gamma^2 + 1),$$

$$p = (R_0\gamma - \rho_0) / d_0.$$

В случае второго фокуса на бесконечности отсутствие астигматизма обеспечивается условием

$$\frac{\cos^2 \alpha_2}{L_1(\alpha_2)} = \frac{1}{L_2(\alpha_2)}. \tag{30}$$

Подставляя в (30) выражения для L_1 и L_2 из формулы (11), получаем

$$d_2 \left(\frac{\sin \alpha_2}{nr_2} - \frac{\cos^2 \alpha_2}{GW r'(\alpha_2)} \right) = \sin^2 \alpha_2, \tag{31}$$

где d_2 – расстояние между поверхностями линзы по лучу, r_2 – радиус точки выхода луча из линзы, величины G и W приведены в Приложении 1.

В линзе с острыми кромками для крайнего луча $d = 0$ и из (31), в частности, следует, что убрать астигматизм в этом случае невозможно, что было показано ранее в работе [12].

Для апланатических линз условие (31) можно привести к виду

$$d_2 \left(\frac{1}{n} - \frac{\cos \alpha_2}{GW} \right) = f_e \sin^2 \alpha_2. \tag{32}$$

Габариты системы источник–линза на практике всегда ограничены. В данной работе мы ограничим объем системы цилиндром единичного диаметра ($D = 1$) и длиной $\rho_0 + d_0 = 1.2$, поэтому из пяти параметров – D, ρ_0, d_0, f_e, n , – которые однозначно определяют геометрию апланатической линзы, для оптимизации мы можем использовать три, а если зафиксировать коэффициент преломления n – то два: ρ_0 и f_e . Другими словами, у нас имеются две степени свободы, которые можно попытаться использовать для удовлетворения условию (31) или (32) на двух радиусах одновременно. Однако кроме астигматизма система обладает и другими aberrациями. Для апланатических линз – это кома высоких порядков [1–3]. Поэтому при оптимизации мы будем подавлять астигматизм только на одном радиусе (r_2), оставляя одну степень свободы для подавления других aberrаций.

Вместо подавления астигматизма на конкретном радиусе r_2 можно потребовать его подавления вблизи оси системы. Переходя в уравнении (32) к пределу при $\alpha_2 \rightarrow 0$, получаем условие отсутствия параксиального астигматизма в апланатической линзе с фокусом на бесконечности:

$$d_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{(n+1)}{2(n-1)} (2p^2 - 2p + 1) \right) = n f_e, \tag{33}$$

где $p = (f_e - \rho_0) / d_0$. Уравнение (33) является квадратным уравнением относительно любого из четырех входящих в него параметров при условии, что остальные три – заданы. Для любого фиксированного значения $0 \leq r_2 \leq D/2$ и соответствующего ему значения $\alpha_2 = \arcsin(r_2/f_e)$ уравнением (33) определяется зависимость $\rho_0(f_e)$.

С использованием уравнений (32), (33) была проведена минимизация астигматизма в апланатической линзе с коэффициентом преломления $n = 1.5$ для плоского выходного фронта с углом наклона $\theta = 20^\circ$. Используя для ускорения вычислений приближенное решение дифференциального

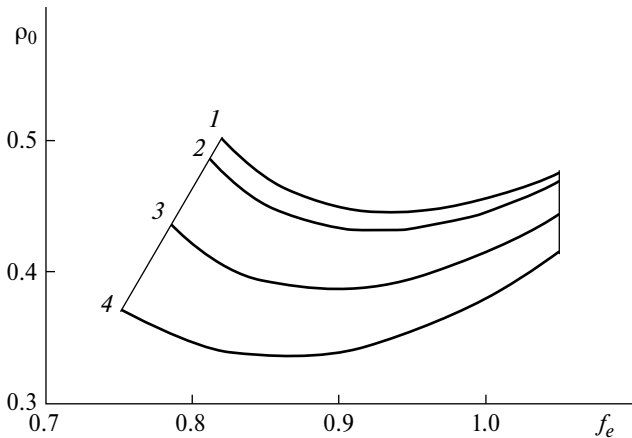


Рис. 4. Зависимости фокального расстояния от фокального радиуса в линзовом апланате-анастигмате.

уравнения для поверхности апланатической линзы в виде двух членов разложения в ряд по степеням α (см. далее формулу (П. 19)) и формулы (32), (33), были найдены соответствующие зависимости $\rho_0(f_e)$ в параксиальном приближении (кривая 1), а также для трех значений r_2 : $D/8$, $D/4$ и $D/3$ (рис. 4, кривые 2–4 соответственно). Кривые 1–4 слева и справа ограничены прямыми, которые являются границами существования решения задачи синтеза апланатической линзы. Далее на кривых 1, 3, 4 были найдены значения ρ_0, f_e обеспечивающие минимальное значение СА на каждой из кривых. При этом для каждого набора параметров ρ_0, f_e с использованием уравнения (26) была найдена фокальная кривая, для чего предполагалось, что $r_1 = r_2$, а для вычисления эйконала использовалась

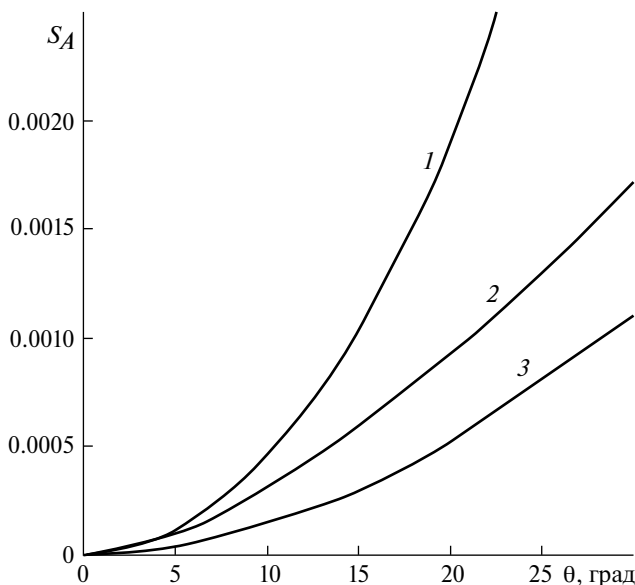


Рис. 5. Зависимости среднеквадратической aberrации линзовых антенн от угла отклонения луча.

формула (13). В результате процесса минимизации СА все найденные точки оказались на левой границе кривых 1, 3, 4. В частности, в параксиальном приближении оптимальные значения равны $\rho_0 = 0.489, f_e = 0.83$. Далее были построены две параболы, проходящие через найденные минимальные значения СА на кривых 1, 3, 4 в системах координат $\rho_0, СА$ и $f_e, СА$, по минимумам которых были найдены оптимальные значения $\rho_0 = 0.405$ и $f_e = 0.77$. Эти значения с точностью до 10^{-3} совпали с оптимальными значениями, найденными численно с использованием метода лучевой трассировки.

На рис. 5 приведены рассчитанные методом лучевой трассировки величины СА для трех апланатических линзовых антенн в зависимости от угла отклонения луча. Кривой 1 на рисунке представлена зависимость для линзы с плоской левой поверхностью [13] и параметрами $n = 1.6, \rho_0 = 1, d_0 = 0.2, f_e = 1.12$, кривой 2 – для линзы, оптимизированной в параксиальном приближении, а кривой 3 – аналогичная зависимость для оптимальной линзы с параметрами, найденными по описанной выше процедуре. При вычислении СА источник перемещали по фокальным кривым, найденным минимизацией СА с использованием метода трассировки лучей. При вычислении кривой 3 на рис. 5 использовалась, в частности, кривая 1 на рис. 6. В качестве первого приближения для фокальных кривых при расчете СА использовались кривые, найденные с помощью уравнения (26), в частности, при вычислении кривой 3 на рис. 5 – кривая 2 на рис. 6. Видно, что до точки $\delta_R = 0.27$ (соответствует углу отклонения луча $\theta = 20^\circ$) кривые 1, 2 практически совпадают (см. рис. 6). Видно также, что СА в оптимизированных линзах (кривые 2, 3) существенно ниже, чем в известной апланатической линзе [13] (кривая 1).

Величина aberrаций в меридиональной и сагиттальной плоскости для линзовой антенны с оптимальными параметрами для угла отклонения луча $\theta = 15^\circ$ представлена на рис. 7. Видно, что величина астигматизма в этой линзе очень мала (меньше комы высшего порядка, величина которой порядка 10^{-3}). Отметим, что среднеквадратическая aberrация имеет тот же порядок величины при угле $\theta = 30^\circ$ (см. рис. 5). Если выбрать диаметр линзы равным 100 длинам волн, то при этом среднеквадратическая фазовая ошибка составит 0.1 длины волны (36°), т.е. величину, которая еще слабо влияет на коэффициент усиления.

На рис. 8 показаны диаграммы направленности антенны на основе оптимизированной выше линзы диаметром 100 длин волн для различных углов отклонения луча θ при облучении антенны источником сферической волны с шириной диаграммы направленности 80° по уровню -10 дБ. Источник перемещали по фокальной линии 1 (см. рис. 6). Диаграммы направленности были

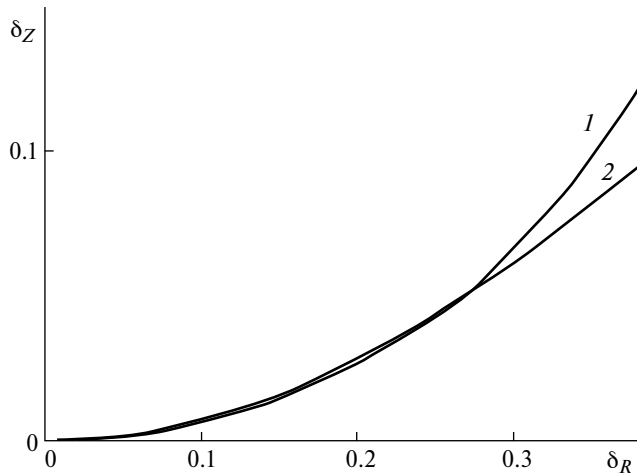


Рис. 6. Фокальные кривые.

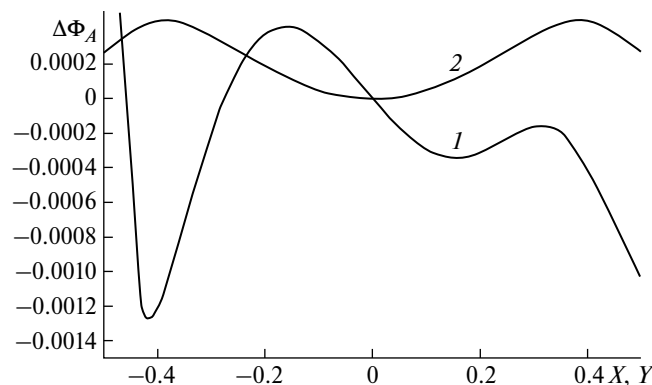


Рис. 7. Аберрации линзы с оптимальными параметрами в меридиональной и сагитальной плоскости для угла отклонения луча 15°.

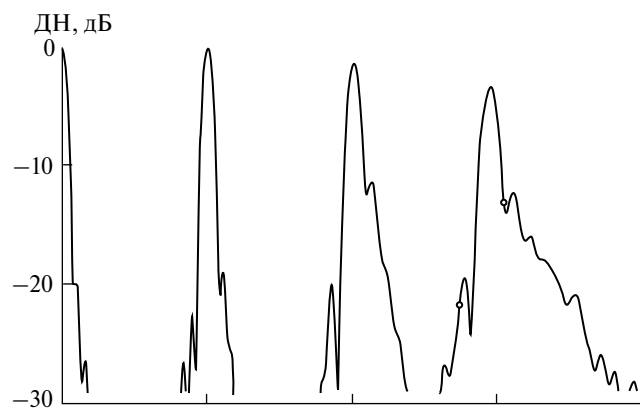


Рис. 8. Диаграммы направленности линзовой антенны при сканировании.

вычислены методом физической оптики. На рис. 8 видно, что сектор сканирования антенны по уровню -3 дБ составляет почти 60°. При этом, как следует из приведенного выше анализа аберраций, падение усиления на краю сектора нельзя объяснить их влиянием.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Формулы, полученные на основе развитой в работе однопараметрической теории аберраций, позволяют находить оптимальные параметры широкоугольных диэлектрических линз, которые обеспечивают минимальное значение среднеквадратической аберрации и, соответственно, максимальный угол зрения при использовании данных линз в составе многолучевых антенн и радиообъективов.

Многолучевая линзовая антенна диаметром 100 длин волн на основе синтезированного в работе апланата-анастигмата обеспечивает угол зрения 60°. При этом причины падения усиления на 3 дБ на краю поля зрения требуют дальнейшего анализа.

Развитая в работе теория может быть обобщена на случай осесимметричной системы из нескольких линз.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Найдем связь между законом отображения и кривизной поверхности линзы в точке пересечения с соответствующим лучом. Рассмотрим два луча, падающие из точки *A* под малым углом γ на криволинейную границу раздела двух сред в плоскости *XU* (рис. 9). Предположим, что в системе координат с центром в точке *P* и осью *Y*, совпадающей с нормалью к поверхности в точке *P*, сечение поверхности плоскостью *XU* вблизи этой точки описывается кривой второго порядка $y = 1/2 f_p'' x^2$. Пусть прямая *QN* – нормаль к кривой в точке *Q*, а прямая *QM* параллельна оси *Y*. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\mu \approx \text{tg} \mu = y'(x) = |f_p'' x|,$$

$$\angle QPP_1 \approx \text{tg}(\angle QPP_1) = 1/2 f_p'' x = \mu/2,$$

$$\begin{aligned} \angle PQA &= \pi - (\gamma + \pi/2 + \omega + \mu/2) = \\ &= \pi/2 - \gamma - \mu/2 - \omega, \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\sin \gamma = |PQ| \frac{\sin \angle PQA}{|AP|} = |PQ| \frac{\cos(\omega + \gamma + \mu/2)}{|AP|},$$

$$|PQ| = \frac{x}{\cos \angle QPP_1} = \frac{x}{\cos(\mu/2)} = \frac{\mu}{f_p'' \cos(\mu/2)},$$

находим

$$\mu = \gamma \frac{f_p'' |AP|}{\cos \omega}.$$

Учитывая, что $f_p'' = K_p$ (K_p – кривизна кривой в точке *P*), последнее равенство можно записать в виде

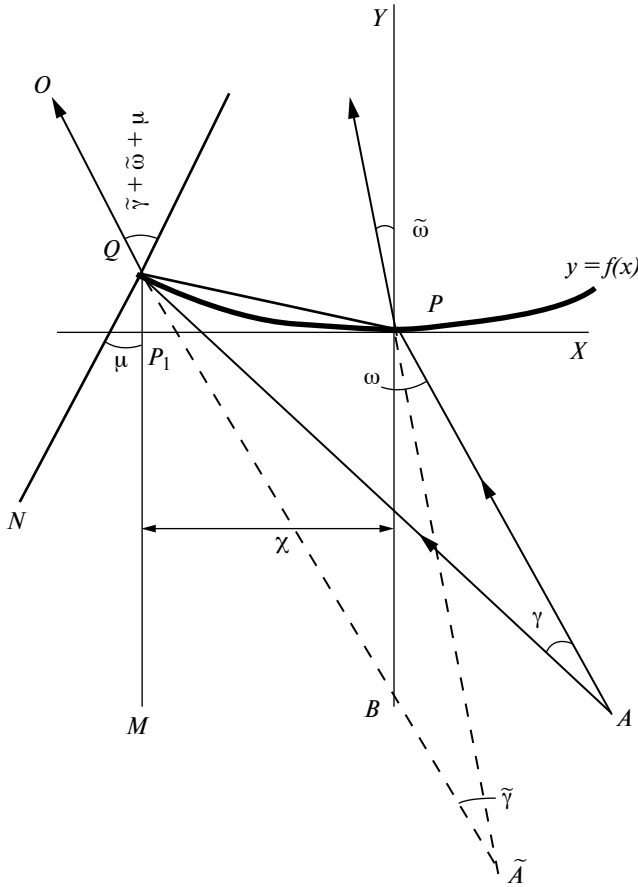


Рис. 9. Преломление лучей на границе раздела двух сред.

$$\mu = \gamma K_p |AP| / \cos \omega.$$

Используя законы преломления в точках P и P₁

$$\sin \omega = n \sin \tilde{\omega}, \quad \sin(\omega + \gamma + \mu) = n \sin(\tilde{\gamma} + \tilde{\omega} + \mu)$$

и раскладывая обе части последнего равенства в ряды по малым величинам $\gamma, \tilde{\gamma}, \mu$, можно получить

$$n \tilde{\gamma} \cos \tilde{\omega} = \gamma \cos \omega + \mu (\cos \omega - n \cos \tilde{\omega}).$$

Учитывая, что $n \cos \tilde{\omega} = \sqrt{n^2 - \sin^2 \omega}$, из последнего уравнения находим

$$\tilde{\gamma} = \gamma [1 + B(1 - G)] / G, \quad (\text{П. 1})$$

где $B = K_p |AP| / \cos \omega$, $G = \sqrt{n^2 - \sin^2 \omega} / \cos \omega$.

Из теоремы синусов для треугольников APQ и $\tilde{A}PQ$ следует:

$$\begin{aligned} |\tilde{A}P| &= |AP| \frac{\sin \gamma \sin(PQ\tilde{A})}{\sin \tilde{\gamma} \sin(PQA)} = \\ &= |AP| \frac{\sin \gamma \cos(\tilde{\omega} + \tilde{\gamma} + \mu/2)}{\sin \tilde{\gamma} \cos(\omega + \gamma + \mu/2)}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\gamma \rightarrow 0$ в последнем равенстве и учитывая (П. 1), можно получить

$$|\tilde{A}P| n Q = |AP| G^2, \quad (\text{П. 2})$$

где $Q = 1 + B(1 - G)$.

Применяя полученные результаты для лучей, проходящих через линзу (рис. 10), можно получить

$$G d\tilde{\alpha} = Q d\alpha, \quad n Q \tilde{\rho} = G^2 \rho,$$

$$dl = (\tilde{\rho} + d) d\tilde{\alpha}, \quad ds = R(\theta) d\theta. \quad (\text{П. 3})$$

Сечения лучевых трубок dl и ds, (см. рис. 10), удовлетворяют уравнениям

$$\cos(\beta + \theta) dl = \cos \eta ds, \quad (\text{П. 4})$$

$$\sin \omega = n \sin(\xi + \omega - \alpha), \quad \xi + \eta = \beta,$$

$$n \sin \eta = \sin(\beta + \theta). \quad (\text{П. 5})$$

Используя (П. 5), соотношение (П. 4) можно привести к виду

$$dl = \frac{n - \cos(\xi + \theta)}{n \cos(\xi + \theta) - 1} ds. \quad (\text{П. 6})$$

С учетом (П. 6) из (П. 3) следует уравнение

$$\left(\rho \frac{G^2}{nQ} + d \right) \frac{Q}{G} = WR \frac{d\theta}{d\alpha},$$

где

$$W = \frac{n - \cos(\xi + \theta)}{n \cos(\xi + \theta) - 1},$$

$$G = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \omega}}{\cos \omega} = \frac{n(n - \cos(\alpha - \xi))}{n \cos(\alpha - \xi) - 1}.$$

Из последнего уравнения можно выразить кривизну в точке P

$$K_p = \frac{\cos^2 \omega}{(1 - G) d \rho n} (n G W R \frac{d\theta}{d\alpha} - \rho G^2 - nd). \quad (\text{П. 7})$$

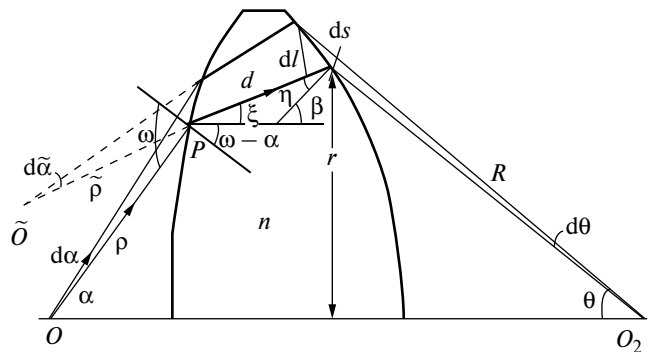


Рис. 10. К выводу связи между кривизной поверхности линзы и законом отображения.

В случае второго фокуса на бесконечности соотношение $ds = R(\theta)d\theta$ из (П. 3) надо заменить на соотношение $ds = r'(\alpha)d\alpha$, которое следует из (1'), и тогда формула (П. 7) будет иметь вид

$$K_p = \frac{\cos^2 \omega}{(1-G)d\rho n} (nGW \frac{dr}{d\alpha} - \rho G^2 - nd) \quad (\text{П. 8})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Задача синтеза линзы, преобразующей один сферический фронт в другой, сводится к решению системы уравнений [13]:

$$\rho \sin \alpha + d \sin \xi = R \sin \theta, \quad (\text{П. 9})$$

$$\rho \cos \alpha + d \cos \xi + R \cos \theta = L_0, \quad (\text{П. 10})$$

$$\rho + nd + R = C_0, \quad (\text{П. 11})$$

$$\frac{d\rho}{d\alpha} = \rho \operatorname{tg} \omega, \quad (\text{П. 12})$$

$$\sin \omega = n \sin(\omega - \alpha + \xi), \quad (\text{П. 13})$$

где $L_0 = \rho_0 + d_0 + R_0$, $C_0 = \rho_0 + nd_0 + R_0$, $\theta = \Gamma(\alpha)$ – заданный закон отображения сферических фронтов (для апланатов $\sin \theta = \gamma \sin \alpha$), ω – угол между вектором ρ и нормалью к поверхности линзы в данной точке.

Систему уравнений (П. 9)–(П.13) можно свести [14] к дифференциальному уравнению относительно формы поверхности линзы

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\alpha} = \frac{n \sin(\alpha - \xi)}{n \cos(\alpha - \xi) - 1}, \quad \rho(0) = \rho_0, \quad (\text{П. 14})$$

где

$$\xi(\alpha, \rho) = \arcsin \frac{Q}{\sqrt{A^2 + B^2}} - \psi. \quad (\text{П. 15})$$

$$\text{Здесь } \cos \psi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \psi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

в случае второго фокуса на конечном расстоянии имеем

$$A = \rho(\cos \alpha - \cos \theta) - L_0 + C_0 \cos \theta,$$

$$B = C_0 \sin \theta - \rho(\sin \alpha + \sin \theta),$$

$$Q = L_0 n \sin \theta - \rho n \sin(\alpha + \theta),$$

в случае второго фокуса на бесконечности –

$$A = \rho(\cos \alpha - 1) + d_0(n - 1), \quad B = r(\alpha) - \rho(\alpha) \sin \alpha, \\ Q = nB, \quad r(\alpha) - \text{заданный закон отображения.}$$

Зная $\rho(\alpha)$, из уравнений в случае конечного второго фокуса (П. 10) и (П. 11) находим d и R :

$$d = \frac{L_0 - \rho \cos \alpha - \cos \theta (C_0 - \rho)}{\cos \xi - n \cos \theta}, \quad R = C_0 - \rho - nd.$$

В случае второго фокуса на бесконечности находим d, X, Z по формулам:

$$d = \frac{d_0(n - 1) + \rho(\cos \alpha - 1)}{n - \cos \xi}, \quad (\text{П. 16})$$

$$X = \rho \sin \alpha + d \sin \xi, \quad (\text{П. 17})$$

$$Z = \rho \cos \alpha + d \cos \xi. \quad (\text{П. 18})$$

Отметим, что координата X может быть также найдена из закона отображения $X = r(\alpha)$.

После того, как левая поверхность найдена, т.е. известен закон $\rho = \rho(\alpha)$, угол ω может быть найден из закона преломления $\sin \omega = n \sin(\omega - \alpha + \xi)$:

$$\omega = \operatorname{arctg} \left(\frac{n \sin(\alpha - \xi)}{n \cos(\alpha - \xi) - 1} \right),$$

а ξ выражается через (П. 15).

Найдем решение дифференциального уравнения (П. 14) для частного случая закона отображения $r(\alpha) = f_e \sin \alpha$ (линза-апланат со вторым фокусом на бесконечности) в виде трех членов разложения в ряд Тейлора:

$$\rho(\alpha) = \rho_0 + \rho_2 \alpha^2 + \rho_4 \alpha^4. \quad (\text{П. 19})$$

Используя разложение (П. 19), разложим обе части уравнения (П. 14) в ряд Тейлора и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях α . В результате получим

$$\rho_2 = \frac{n\rho_0}{2(n-1)d_0} (\rho_0 + d_0 - f_e),$$

$$\rho_4 = \frac{\rho_2^2}{2\rho_0} + \frac{\rho_0 n}{4(n-1)} \left[v_3 + v_1^3 \left(\frac{n}{2(n-1)} - \frac{1}{6} \right) \right],$$

$$v_1 = 1 - b_1/d_0, \quad b_1 = f_e - \rho_0,$$

$$v_3 = \rho_2 + \frac{b_1}{6} + \frac{b_1}{2d_0^2(n-1)^2} [b_1^2 - d_0\rho_0(n-1)] - \frac{b_1^3(n^3-1)}{6d_0^2(n-1)^3}.$$

Если первая поверхность линзы представлена в виде (П. 19), то вторую поверхность находим из формул (П. 16) – (П. 18).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-07-07797).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970.
2. Апенко М.И., Дубовик А.С., Дурейко Г.В., Жилкин А.М. Прикладная оптика. М.: Машиностроение, 1992.
3. Заказнов Н.П., Кирюшин С.И., Кузичев В.И. Теория оптических систем. М.: Машиностроение, 1992.
4. Венецкий А.С., Калошин В.А. // ДАН. 2010. Т. 434. № 2. С. 178.
5. Венецкий А.С., Калошин В.А. // РЭ. 2012. Т. 57. № 9. С. 1004.
6. Kaloshin V.A., Venetskiy A.S. // Журнал радиоэлектроники (электрон. журн.). 2013. № 3 (URL: <http://jre.cplire.ru/jre/mar13/6/text.html>).
7. Венецкий А.С., Калошин В.А. // РЭ. 2013. Т. 58. № 10. С. 1025.
8. Венецкий А.С., Калошин В.А. // РЭ. 2014. Т. 59. № 11. С. 1102.
9. Венецкий А.С., Калошин В.А. // РЭ. 2016. Т. 61. № 4. С. 327.
10. Венецкий А.С., Калошин В.А. // ДАН. 2015. Т. 463. № 5. С. 533.
11. Венецкий А.С., Калошин В.А. // РЭ. 2017. Т. 62. № 6. С. 533.
12. Калошин В.А. // Журнал радиоэлектроники (электрон. журн.). 2001. № 3 (URL: <http://jre.cplire.ru/jre/mar01/1/text.html>).
13. Зелкин Е.Г., Петрова Р.А. Линзовые антенны. М.: Сов. радио, 1974.
14. Head A.K. // Proc. Phys. Soc. 1959. V. L24. № 6. P. 731.