РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2016, том 61, № 8, с. 757–764

К 60-ЛЕТИЮ ЖУРНАЛА
“РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА”

УДК 538.566.2;621.372.8

ПЛАЗМОННЫЕ РЕЗОНАНСЫ В КВАРЦЕВОЙ НАНОНИТИ, ПОКРЫТОЙ СЛОЕМ ЗОЛОТА ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

© 2016 г. А. П. Анютин, И. П. Коршунов*, А. Д. Шатров

Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Российская Федерация, 141190 Фрязино Московской обл., Введенского, 1

**E-mail: korip@ms.ire.rssi.ru*

Поступила в редакцию 04.12.2015 г.

Рассмотрена двумерная задача дифракции плоской электромагнитной волны на цилиндрической оболочке из золота в случае, когда границами оболочки являются круговые цилиндры со смещенными центрами. Исследовано влияние неконцентричности границ на свойства плазмонных резонансов в световом диапазоне длин волн. Строгими численными методами рассчитаны ближние и дальние поля, а также спектры рассеяния. Обнаружено, что неконцентричность границ оболочки приводит к появлению дополнительных резонансов. В квазистатическом приближении для тонких оболочек развита аналитическая теория рассеяния. Показано, что в этом случае спектры рассеяния и поглощения существенным образом зависят от величины смещения центров цилиндрических границ, но не зависят от направления этого смещения.

DOI: 10.7868/S0033849416080015

ВВЕДЕНИЕ

Благодаря плазмонным резонансам нанопроволоки из благородных металлов широко используются в оптическом диапазоне в качестве сенсоров [1]. В работах [2, 3] исследованы свойства плазмонных резонансов в коаксиальных нанотрубках из серебра и золота. Цель данной работы состоит в исследовании особенностей плазмонных резонансов в некоаксиальных цилиндрических нанооболочках из золота.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим двумерную задачу дифракции плоской электромагнитной линейно поляризованной волны на кварцевой нанонити, покрытой слоем золота переменной толщины (рис. 1). Пусть плоская волна распространяется в свободном пространстве в направлении единичного вектора $(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0, 0)$ и характеризуется следующими компонентами электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} H_z^0 &= \exp(-ikx\cos\varphi_0 - iky\sin\varphi_0), \\ E_x^0 &= -\eta\sin\varphi_0\exp(-ikx\cos\varphi_0 - iky\sin\varphi_0), \\ E_y^0 &= \eta\cos\varphi_0\exp(-ikx\cos\varphi_0 - iky\sin\varphi_0). \end{aligned} \quad (1)$$

Зависимость от времени выбрана в виде $\exp(i\omega t)$, где $\omega = kc$, $k = 2\pi/\lambda$, c – скорость света в вакууме, λ – длина волны, $\eta = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi$ Ом – волновое сопротивление вакуума.

Золото заполняет оболочку, границы которой являются круговыми цилиндрами

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2, \\ (x+\delta)^2 + y^2 &= b^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где a – радиус кварцевой нити, b – внешний радиус структуры. Центры внешней и внутренней границ оболочки смещены на расстояние δ.

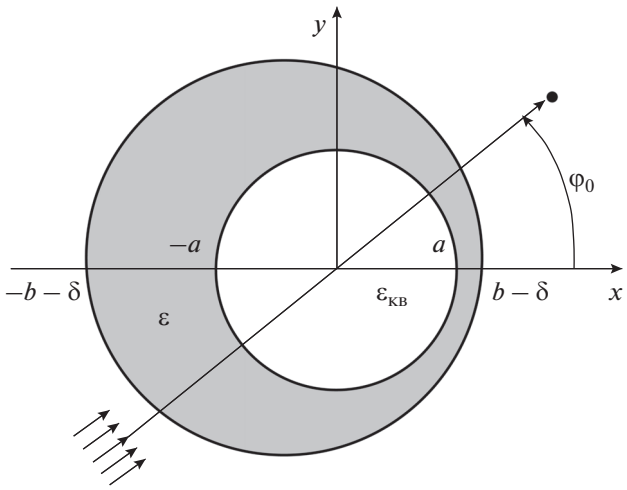

Рис. 1. Геометрия задачи.

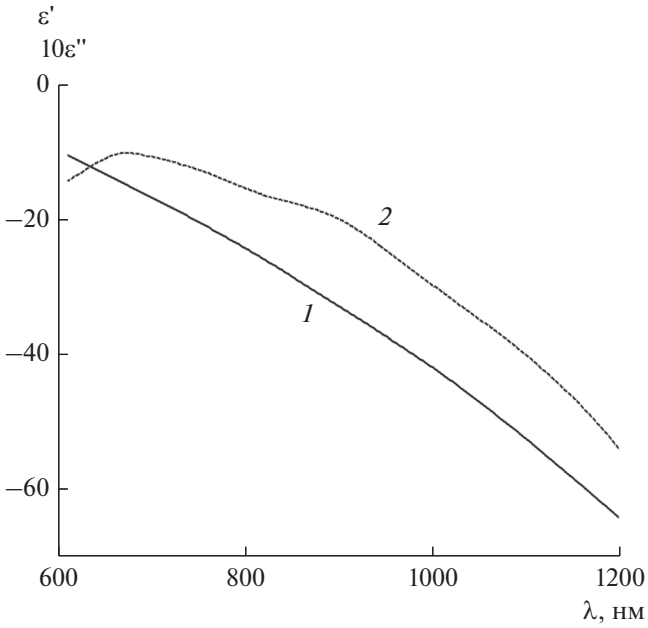

Рис. 2. Зависимость действительной ε' (*1*) и мнимой 10 ε" (*2*) частей диэлектрической проницаемости золота от длины волны.

Пространственное распределение диэлектрической проницаемости в рассматриваемой структуре определяется формулой

$$\varepsilon(x,y)=\begin{cases}\varepsilon_{\text{кв}},\ x^2+y^2<a^2,\\ \varepsilon,\ x^2+y^2>a^2,\ (x+\delta)^2+y^2<b^2,\\ 1,\ (x+\delta)^2+y^2>b^2,\end{cases}\quad(3)$$

где $\varepsilon_{\text{кв}}$ и ε диэлектрические проницаемости кварца и золота соответственно.

Вещественную и мнимую части диэлектрической проницаемости золота $\varepsilon=\varepsilon'+i\varepsilon''$ в диапазоне $600<\lambda<1100$ нм будем аппроксимировать функциями, представленными на рис. 2. Графики функций получены путем интерполяции кубическими сплайнами экспериментальных данных работы [4].

В отличие от золота, кварц в исследуемом диапазоне частот имеет существенно меньшие тепловые потери, а его диэлектрическая проницаемость слабо зависит от λ. Поэтому диэлектрическую проницаемость кварца будем полагать вещественной величиной: $\varepsilon_{\text{кв}}=2.1$.

Исследование сформулированной дифракционной задачи удобнее проводить, используя z-компоненту магнитного поля $U(x,y)=H_z(x,y)$, поскольку в этом случае краевая задача для функции $U(x,y)$ является скалярной. При этом компоненты электрического поля могут быть выражены через функцию $U(x,y)$ по формулам

$$E_x(x,y)=\frac{\eta}{ik\varepsilon(x,y)}\frac{\partial U(x,y)}{\partial y},\qquad E_y(x,y)=\frac{-\eta}{ik\varepsilon(x,y)}\frac{\partial U(x,y)}{\partial x},\quad(4)$$

а полное поле удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k^2\varepsilon(x,y)\right]U(x,y)=0.\quad(5)$$

На границах оболочки должны быть непрерывны величины $U(x,y)$ и $\frac{1}{\varepsilon(x,y)}\frac{\partial U(x,y)}{\partial N}$ (N – нормаль к границе).

Вне структуры полное поле состоит из падающего U^0 и рассеянного U^s полей

$$U=U^0+U^s.\quad(6)$$

В цилиндрической системе координат ($x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$) падающее поле задано функцией

$$U^0=\exp[-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)].\quad(7)$$

Рассеянное поле в дальней зоне должно удовлетворять условию излучения

$$U^s\sim\Phi(\varphi)\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\exp\left(-ikr+i\frac{\pi}{4}\right),\quad kr\to\infty,\quad(8)$$

где $\Phi(\varphi)$ – диаграмма рассеяния.

Полное сечение рассеяния σ_s определяется выражением

$$\sigma_s=\frac{2}{\pi k}\int_0^{2\pi}|\Phi(\varphi)|^2\,d\varphi.\quad(9)$$

Сечение поглощения σ_a может быть представлено в виде следующего интеграла по внешнему контуру границы оболочки:

$$\sigma_a=\frac{1}{k}\operatorname{Im}\oint\frac{\partial U}{\partial N}U^*ds.\quad(10)$$

2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численное решение сформулированной задачи проводилось модифицированным методом дискретных источников [5–7].

На рис. 3 изображены зависимости полных сечений рассеяния от длины волны λ для структур с фиксированными значениями радиусов цилиндрических границ оболочек $a=45$ нм, $b=50$ нм и различными расстояниями между центрами этих границ. Видно, что в осесимметричном случае ($\delta=0$) в спектре рассеяния наблюдается един-

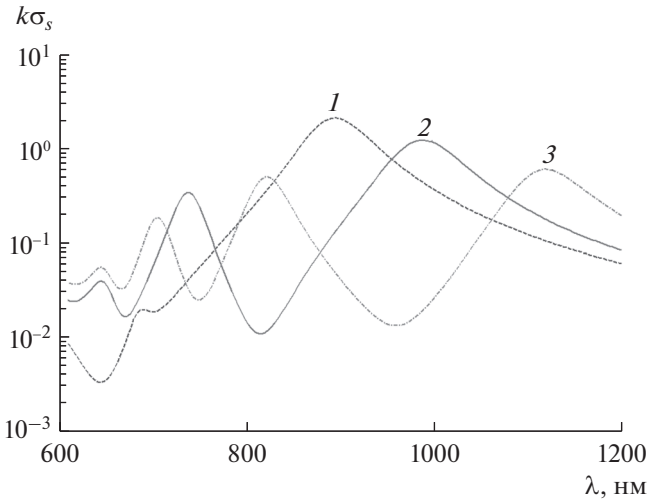

Рис. 3. Зависимость полного сечения рассеяния оболочки от длины волны при $a = 45$ нм, $b = 50$ нм, $\varphi_0 = 0$ и $\delta = 0$ (*1*), 3 (*2*), 4 нм (*3*).

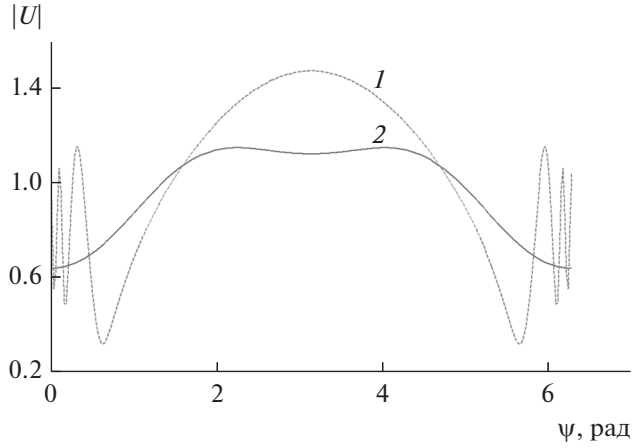

Рис. 4. Зависимость модуля поля $|U(x, y)|$ на внешней границе оболочки от угловой координаты ψ ($x = b\cos\psi - \delta$, $y = b\sin\psi$) при $a = 45$ нм, $b = 50$ нм, $\varphi_0 = 0$, $\lambda = 810$ нм и $\delta = 4.9$ нм (*1*) и 0 (2).

ственный резонанс, а с увеличением δ появляются дополнительные резонансы.

На рис. 4 представлено распределение модуля поля $|U|$ вдоль внешней границы оболочки на длине волны $\lambda = 810$ нм для структуры с параметрами $a = 45$ нм, $b = 50$ нм, $\delta = 4.9$ нм (кривая *1*). Видно, что в области, где оболочка становится тоньше ($\psi \approx 0$), осцилляции более частые. Этот эффект можно объяснить тем, что тонкий слой золота, расположенный между двумя диэлектрическими полупространствами, поддерживает сильно замедленную поверхностную волну, постоянная распространения которой увеличивается с уменьшением толщины слоя. Для сравнения на этом же рисунке приведен осесимметричный случай ($\delta = 0$), когда толщина оболочки не зависит от угла ψ (кривая *2*).

На рис. 5 приведены диаграммы рассеяния $|\Phi(\varphi)|$ структуры с параметрами $a = 45$ нм, $b = 50$ нм, $\delta = 4.8$ нм на длине волны $\lambda = 810$ нм при трех различных углах падения φ_0 плоской волны. Из результатов, представленных на этом рисунке, следует, что независимо от угла φ_0 лепестки диаграммы рассеяния $\Phi(\varphi)$ приблизительно ориентированы по направлению распространения плоской волны ($\varphi = \varphi_0$) и в противоположном направлении ($\varphi = \varphi_0 + \pi$).

Рис. 6 и 7 иллюстрируют рассеивающие свойства структуры меньшего размера: $a = 18$ нм, $b = 20$ нм. Качественно эти рисунки близки к рис. 3 и 5. Обратим внимание на то, что диаграммы рассеяния, представленные на рис. 7, с большой точностью зависят только от разности углов $\varphi - \varphi_0$. Этим свойством с очевидностью обладают поля, рассеянные осесимметричными структурами. Однако следует отметить, что графики на рис. 7 рассчитаны для оболочки с сильно выраженной асимметрией.

3. КВАЗИСТАТИЧЕСКИЕ ПЛАЗМОННЫЕ РЕЗОНАНСЫ В ТОНКИХ ОБОЛОЧКАХ

Введем обозначение

$$l = b - a. \tag{11}$$

Далее будем предполагать, что выполнены условия

$$l \ll a \ll \lambda. \tag{12}$$

В этом случае толщина оболочки будет зависеть от угла φ по закону

$$d(\varphi) = l - \delta\cos\varphi. \tag{13}$$

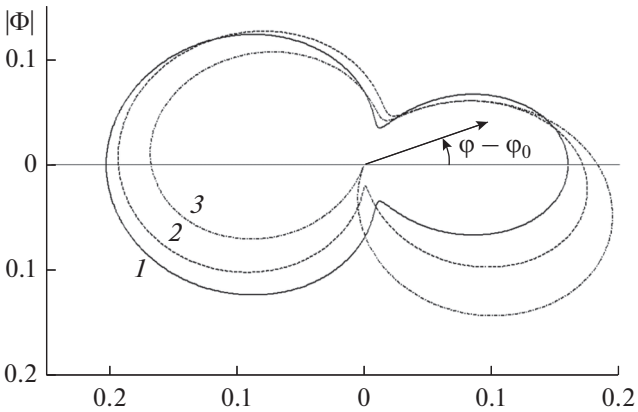

Рис. 5. Модули диаграмм рассеяния оболочки при $a = 45$ нм, $b = 50$ нм, $\delta = 4.8$ нм, $\lambda = 810$ нм и $\varphi_0 = 0$ (*1*), π/4 (*2*), π/2 (*3*).

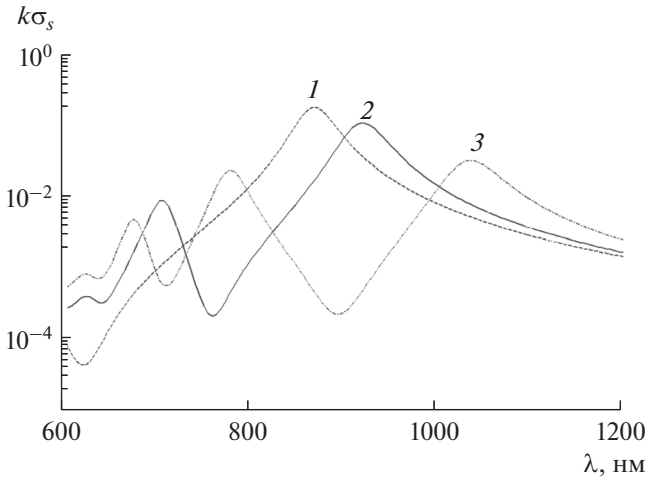

Рис. 6. Зависимость полного сечения рассеяния оболочки от длины волны при $a = 18$ нм, $b = 20$ нм, $\varphi_0 = 0$ и $\delta = 0$ (*1*), 1 (*2*), 1.5 нм (*3*).

Диэлектрическая проницаемость золота удовлетворяет условию $|\varepsilon| \gg 1$. Поэтому оболочку можно заменить бесконечно тонкой пленкой с поверхностной проводимостью σ, равной [8]

$$\sigma = ikd\varepsilon/\eta. \tag{14}$$

Поверхностная проводимость связывает тангенциальные компоненты магнитного и электрического полей на границе $r = a$ формулой

$$H_z(a-0,\varphi) - H_z(a+0,\varphi) = \eta\sigma E_\varphi(a,\varphi). \tag{15}$$

Учитывая (13), перепишем формулу (14) в виде

$$\eta\sigma = -ik\alpha(1-\beta\cos\varphi), \tag{16}$$

где

$$\alpha = -\varepsilon l, \tag{17}$$

$$\beta = \delta/l. \tag{18}$$

Таким образом, тонкую металлическую оболочку можно заменить бесконечно тонкой пленкой, поверхностная проводимость которой (16) характеризуется двумя параметрами α и β. Если пренебречь тепловыми потерями в золоте ($\varepsilon'' = 0$), то α будет вещественной положительной величиной, а при учете потерь $\alpha = \alpha' + i\alpha''$, $\alpha'' \ll \alpha'$.

Исследуем квазистатические колебания кварцевого цилиндра радиусом a, покрытого бесконечно тонким слоем материала с поверхностной проводимостью, которая зависит от угла φ по формуле (16).

Внутри цилиндра и в статической близости от него ($kr \ll 1$) волновое поле $U(r,\varphi)$ будет приближенно удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{19}$$

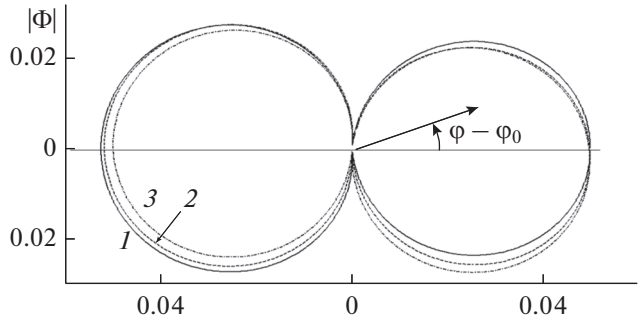

Рис. 7. Модули диаграмм рассеяния оболочки при $a = 18$ нм, $b = 20$ нм, $\delta = 1.9$ нм, $\lambda = 810$ нм и $\varphi_0 = 0$ (*1*), π/4 (*2*), π/2 (*3*).

Граничные условия на поверхности цилиндра $r = a$ имеют вид

$$\frac{1}{\varepsilon_{\text{кв}}}\frac{\partial U}{\partial r}(a-0,\varphi) = \frac{\partial U}{\partial r}(a+0,\varphi), \tag{20}$$

$$U(a-0,\varphi) - U(a+0,\varphi) = \\ = \alpha(1-\beta\cos\varphi)\frac{\partial U}{\partial r}(a+0,\varphi). \tag{21}$$

Будем искать частные решения задачи (19)–(21), которые убывают при $r \to \infty$. Так как задача однородная, то ее нетривиальные решения существуют лишь при определенных значениях параметра α. Эти дискретные величины α_m являются собственными значениями краевой задачи.

Покажем, что для собственных функций $U_m(r,\varphi)$ и собственных чисел α_m существуют простые аналитические выражения. Введем два вещественных положительных параметра, $t_1 > a$ и $t_2 < a$:

$$t_{1,2} = a\frac{1 \pm \sqrt{1-\beta^2}}{\beta}. \tag{22}$$

Величины t_1 и t_2 удовлетворяют соотношениям

$$t_1 + t_2 = \frac{2a}{\beta},\quad t_1 - t_2 = \frac{2a\sqrt{1-\beta^2}}{\beta},\quad t_1 t_2 = a^2. \tag{23}$$

Волновые поля и соответствующие им собственные числа α_m выражаются формулами

$$U_m(r,\varphi) = \\ = \begin{cases} 1 + \varepsilon_{\text{кв}}\left(\dfrac{t_1}{t_2}\right)^m \left(\dfrac{r\exp(i\varphi) - t_2}{r\exp(i\varphi) - t_1}\right)^m, & r < a, \\ 1 - \left(\dfrac{r\exp(-i\varphi) - t_1}{r\exp(-i\varphi) - t_2}\right)^m, & r > a, \end{cases} \tag{24}$$

$$\alpha_m = \frac{(\varepsilon_{\text{кв}} + 1)a}{m\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{25}$$

где $m = 1, 2, 3\ldots$

Поля (24) удовлетворяют уравнению Лапласа (19) так как они являются аналитическими функциями комплексных переменных $r\exp(i\varphi)$ или $r\exp(-i\varphi)$. Требование целочисленности и положительности параметра m необходимо для того, чтобы соответствующие функции комплексного переменного не имели сингулярностей в точках $r = t_1$, $\varphi = 0$ и $r = t_2$, $\varphi = 0$. Выполнение граничных условий (20), (21) легко устанавливается непосредственной проверкой. При этом следует использовать формулы (23), (25), а также соотношение

$$1-\beta\cos\varphi = -\frac{\beta}{2a^2}\left(a\exp(-i\varphi)-t_1\right)\times \\ \times\left(a\exp(-i\varphi)-t_2\right)\exp(i\varphi) = \\ = -\frac{\beta}{2a^2}\left(a\exp(i\varphi)-t_1\right)\left(a\exp(i\varphi)-t_2\right)\exp(-i\varphi), \quad (26)$$

которое вытекает из (23).

Асимптотика функций $U_m(r,\varphi)$ при $r \gg t_1$ имеет вид

$$U_m(r,\varphi) \sim m\frac{t_1-t_2}{r}\exp(i\varphi). \quad (27)$$

Продлевая с помощью функции $H_1^{(2)}(kr)$ квазистатическое ближнее поле (27) в дальнюю зону, получим диаграмму направленности этого поля

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{\pi k}{2}m(t_1-t_2)\exp(i\varphi). \quad (28)$$

Функции $U_m(r,\varphi)$ являются комплексными, а соответствующие им собственные значения α_m оказались вещественными. Это означает, что комплексно сопряженные функции $U_m^*(r,\varphi)$ также будут удовлетворять условиям краевой задачи. Таким образом, в квазистатическом приближении в рассматриваемой структуре имеет место двукратное вырождение собственных колебаний.

Используя (17), (18) можно выражение (25) сформулировать в терминах резонансных значений диэлектрической проницаемости оболочки

$$\varepsilon_m = -\frac{\varepsilon_{\text{кв}}+1}{m}\frac{a}{\sqrt{l^2-\delta^2}},\ m = 1,2,3\ldots \quad (29)$$

При изменении частоты оптических колебаний комплексная диэлектрическая проницаемость золота может приблизиться к значению ε_m. На этих частотах поле в задаче дифракции должно испытывать резонансные всплески. Для структуры, спектр рассеяния которой описывается кривой *2* на рис. 6, из формулы (29) получим: $\varepsilon_1 \approx -32$, $\varepsilon_2 \approx -16$. Как следует из рис. 2, этим значениям соответствуют длины волн, которые согласуются с положением резонансов на кривой *2*.

4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ В КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В соответствии с обобщенным методом собственных колебаний [9], поле $U(r,\varphi)$ в задаче дифракции можно представить в виде разложения по функциям $U_m(r,\varphi)$ и $U_m^*(r,\varphi)$. Собственные функции $U_m(r,\varphi)$ удовлетворяют уравнению Лапласа (19) и следующим граничным условиям:

$$\frac{1}{\varepsilon_{\text{кв}}}\frac{\partial U_m}{\partial r}(a-0,\varphi) = \frac{\partial U_m}{\partial r}(a+0,\varphi), \quad (30)$$

$$U_m(a-0,\varphi) - U_m(a+0,\varphi) = \\ = \alpha_m(1-\beta\cos\varphi)\frac{\partial U_m}{\partial r}(a+0,\varphi). \quad (31)$$

Эти условия отличаются от граничных условий (20), (21) для искомого поля $U(r,\varphi)$ заменой параметра α на α_m. Условия (30), (31) справедливы и для функций $U_m^*(r,\varphi)$.

Обобщенные колебания получим так называемым ρ-методом, т.е. путем введения собственного числа в истинные двухсторонние граничные условия [9].

Полное поле будем искать в виде разложения

$$U(r,\varphi) = \tilde{U}(r,\varphi) + \sum_{m=1}^{\infty}\left[A_m U_m(r,\varphi) + B_m U_m^*(r,\varphi)\right], \quad (32)$$

где $\tilde{U}(r,\varphi)$ квазистатическое решение задачи дифракции плоской волны (7) на кварцевой нити без проводящей пленки. Поле $\tilde{U}(r,\varphi)$ подчиняется уравнению Лапласа и следующим граничным условиям:

$$\frac{1}{\varepsilon_{\text{кв}}}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial r}(a-0,\varphi) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r}(a+0,\varphi), \quad (33)$$

$$\tilde{U}(a-0,\varphi) = \tilde{U}(a+0,\varphi). \quad (34)$$

Ряд (32) удовлетворяет уравнению (19) и граничному условию (20) почленно. Подставив представление (32) в граничное условие (21) и учитывая формулы (30), (31), (33), (34), получим соотношение

$$\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_m-\alpha)\left[A_m\frac{\partial U_m}{\partial r}(a+0,\varphi) + \right. \\ \left. + B_m\frac{\partial U_m^*}{\partial r}(a+0,\varphi)\right] = \alpha\frac{\partial \tilde{U}}{\partial r}(a+0,\varphi), \quad (35)$$

из которого далее, используя свойство ортогональности собственных колебаний, будут получены явные выражения для коэффициентов A_m и B_m.

Квазистатическое поле вблизи диэлектрического цилиндра кругового сечения известно

$$\tilde{U}(r,\varphi) = 1 - ikr\cos(\varphi-\varphi_0) - \\ - i\frac{\varepsilon_{\text{кв}}-1}{\varepsilon_{\text{кв}}+1}\frac{ka^2}{r}\cos(\varphi-\varphi_0), \quad r > a. \tag{36}$$

При этом диаграмма рассеяния выражается формулой

$$\tilde{\Phi}(\varphi) = -i\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon_{\text{кв}}-1}{\varepsilon_{\text{кв}}+1}k^2a^2\cos(\varphi-\varphi_0). \tag{37}$$

Используя (36), найдем правую часть соотношения (35)

$$\frac{\partial\tilde{U}}{\partial r}(a+0,\varphi) = -\frac{2ik}{\varepsilon_{\text{кв}}+1}\cos(\varphi-\varphi_0). \tag{38}$$

Справедливы следующие соотношения ортогональности:

$$\int_0^{2\pi}(1-\beta\cos\varphi)\frac{\partial U_m}{\partial r}(a+0,\varphi)\frac{\partial U_n^*}{\partial r}\times \\ \times(a+0,\varphi)d\varphi = \frac{\pi m^2\beta}{a^3}(t_1-t_2)\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^m\delta_{mn}, \tag{39}$$

$$\int_0^{2\pi}(1-\beta\cos\varphi)\frac{\partial U_m}{\partial r}(a+0,\varphi)\frac{\partial U_n}{\partial r}(a+0,\varphi)d\varphi = 0, \tag{40}$$

где δ_{mn} – символ Кронекера. Для доказательства этих соотношений следует использовать формулу (26), а также выражения

$$\frac{\partial U_m}{\partial r}(a+0,\varphi) = -m(t_1-t_2)\times \\ \times\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^m\frac{(a\exp(i\varphi)-t_2)^{m-1}}{(a\exp(i\varphi)-t_1)^{m+1}}\exp(i\varphi), \tag{41}$$

$$\frac{\partial U_n^*}{\partial r}(a+0,\varphi) = -n(t_1-t_2)\times \\ \times\frac{(a\exp(i\varphi)-t_1)^{n-1}}{(a\exp(i\varphi)-t_2)^{n+1}}\exp(i\varphi), \tag{42}$$

которые вытекают из (24). Интегрирование по φ в (39), (40) следует заменить интегрированием в комплексной плоскости t по замкнутому контуру в виде окружности $t = a\exp(i\varphi)$, а затем найти вычет подынтегральной функции в полюсе $t = t_2$.

Используя свойства ортогональности (39) и (40), из соотношения (35) можно найти коэффициенты A_m и B_m. Например, чтобы определить A_m, необходимо умножить (35) на $(1-\beta\cos\varphi)\frac{\partial U_m^*}{\partial r}\times$ $\times(a+0,\varphi)$ и результат проинтегрировать по интервалу $(0,2\pi)$. При вычислении правой части равенства потребуется формула

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_m^*}{\partial r}(a+0,\varphi)(1-\beta\cos\varphi)\cos(\varphi-\varphi_0)d\varphi = \\ = -\frac{\pi\beta m^2}{2a^3}(t_1-t_2)^2\exp(-i\varphi_0). \tag{43}$$

В результате для коэффициентов A_m и B_m получим

$$A_m = \frac{\alpha}{\alpha_m-\alpha}\frac{ik}{\varepsilon_{\text{кв}}+1}(t_1-t_2)\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^m\exp(-i\varphi_0), \tag{44}$$

$$B_m = \frac{\alpha}{\alpha_m-\alpha}\frac{ik}{\varepsilon_{\text{кв}}+1}(t_1-t_2)\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^m\exp(i\varphi_0). \tag{45}$$

Отдельным слагаемым в разложении ближнего поля (32) в дальней зоне будут соответствовать поля, диаграммы направленности которых определяются выражениями (28), (37). Учитывая это, для диаграммы рассеяния $\Phi(\varphi)$ и полного сечения рассеяния σ_s получим следующие выражения:

$$\Phi(\varphi) = -i\frac{\pi k^2a^2}{2(\varepsilon_{\text{кв}}+1)}\left[\varepsilon_{\text{кв}}-1+2\alpha\frac{(t_1-t_2)^2}{a^2}\times \\ \times\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{\alpha-\alpha_m}\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^m\right]\cos(\varphi-\varphi_0), \tag{46}$$

$$k\sigma_s = \frac{\pi^2k^4a^4}{2(\varepsilon_{\text{кв}}+1)^2}\left|\varepsilon_{\text{кв}}-1+2\alpha\frac{(t_1-t_2)^2}{a^2}\times \\ \times\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{\alpha-\alpha_m}\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^m\right|^2. \tag{47}$$

Заметим, что диаграмма рассеяния (46) зависит только от разности углов $\varphi-\varphi_0$, что является свойством осесимметричных рассеивателей, к числу которых рассматриваемая структура не относится.

Из формул (10) и (21) получим следующие выражения:

$$k\sigma_a = \\ = \frac{a\alpha''}{|\alpha|^2}\int_0^{2\pi}|U(a-0,\varphi)-U(a+0,\varphi)|^2\frac{d\varphi}{1-\beta\cos\varphi}. \tag{48}$$

Подставив разложение (32) в (48) и преобразуя его с помощью формул (25), (31), (39), (40), (44), (45), получим

$$k\sigma_a = \frac{4\pi k^2a\alpha''(t_1-t_2)^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{|\alpha-\alpha_m|^2}\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^m. \tag{49}$$

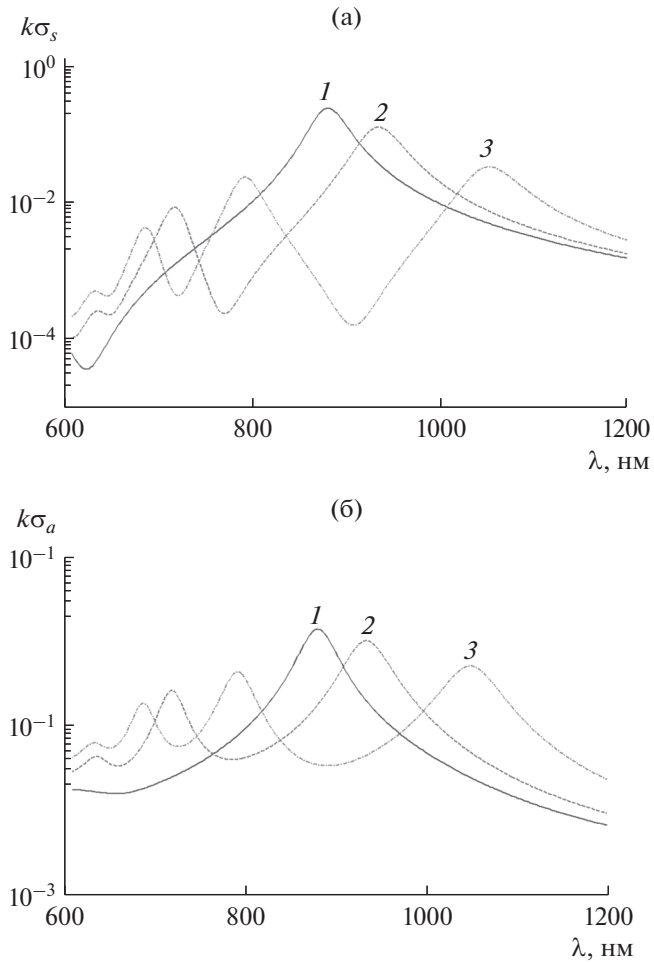

Рис. 8. Зависимость полного сечения рассеяния (а) и поглощения оболочки (б) от длины волны при $a = 18$ нм, $b = 20$ нм, $\varphi_0 = 0$ и $\delta = 0$ (*1*), 1 (*2*), 1.5 нм (*3*).

Оказалось, что сечение поглощения, так же как и сечение рассеяния, не зависит от угла падения φ_0.

На рис. 8а приведены рассчитанные согласно (47) зависимости сечения рассеяния σ_s от длины волны λ для структуры с параметрами $b = 20$ нм, $a = 18$ нм при $\delta = 0$, 1, 1.5 нм. Кривые на рис. 8а хорошо согласуются с результатами строгих расчетов, представленных на рис. 6.

С помощью расчетов по формуле (49) получены зависимости сечения поглощения σ_a от длины волны λ (рис. 8б). Значения параметров структуры те же, что и на рис. 8а. Из сравнения рис. 8а и 8б следует, что плазмонные резонансы высших порядков ($m = 2, 3\ldots$) сильнее проявляются в спектре поглощения.

Сечения рассеяния и поглощения коаксиальной оболочки могут быть найдены из разложений (47) и (49) путем предельного перехода: $\beta \to 0$, $t_1 \to \infty$, $t_2 \to 0$. При этом только слагаемые с $m = 1$ будут отличны от нуля. В результате получим

$$k\sigma_s = \frac{\pi^2 k^4 a^4}{2}\left|\frac{\alpha - (\varepsilon_{\text{кв}} - 1)a}{\alpha - (\varepsilon_{\text{кв}} + 1)a}\right|^2, \tag{50}$$

$$k\sigma_a = \frac{4\pi k^2 a^3 \alpha''}{\left|\alpha - (\varepsilon_{\text{кв}} + 1)a\right|^2}. \tag{51}$$

Наконец обратимся к эффекту значительного снижения заметности такой структуры, который можно объяснить на основе формулы (50). Результаты строгого численного расчета спектра рассеяния коаксиальной оболочки с параметрами $a = 18$ нм, $l = 2$ нм были представлены выше (рис. 6, кривая *1*). Обратим внимание на глубокий провал кривой *1* на длине волны $\lambda \approx 620$ нм, где полное сечение рассеяния достигает величины $k\sigma_s \sim 4 \times 10^{-5}$. Заметим, что кварцевая нить без покрытия рассеивает на этой длине волны на порядок большую мощность: $k\sigma_s \sim 7 \times 10^{-4}$. Таким образом, имеет место эффект существенного снижения заметности нити при нанесении на нее тонкого слоя металла [3]. Согласно формуле (50) минимальное значение $k\sigma_s$ достигается при выполнении условия $\alpha' = (\varepsilon_{\text{кв}} - 1)a$, т.е. при $\varepsilon' = -(\varepsilon_{\text{кв}} - 1)\,a/l \approx -10$. Как следует из анализа рис. 2, это значение ε' соответствует длине волны провала.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для случая ТМ-поляризации рассмотрена задача дифракции плоской волны на некоаксиальной цилиндрической оболочке из золота. Строгими численными методами исследовано влияние расстояния между центрами цилиндрических границ на спектральные характеристики рассеянного поля. Обнаружено, что с увеличением расстояния между центрами цилиндрических границ оболочки число плазмонных резонансов возрастает. Для тонких оболочек развита приближенная квазистатическая теория, основанная на замене оболочки пленкой с переменной поверхностной проводимостью. Получены аналитические выражения для частот плазмонных резонансов, сечений рассеяния и поглощения. Показано, что в области своей применимости результаты приближенной теории хорошо согласуются с результатами строгих численных расчетов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-02-00247-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Климов В.В.* Наноплазмоника. М.: Физматлит, 2009.
2. *Velichko E.A., Nosich A.I.* // Opt. Lett. 2013. V. 38. № 23. P. 4978.
3. *Анютин А.П., Коршунов И.П., Шатров А.Д.* // РЭ. 2015. Т. 60. № 9. С. 896.
4. *Johnson P.B., Christy R.W.* // Phys. Rev. B. 1972. V. 6. № 12. P. 4370.
5. *Кюркчан А.Г., Минаев С.А., Соловейчик А.Л.* // РЭ. 2001. Т. 46. № 6. С. 666.
6. *Anyutin A.P., Stasevich V.I.* // J. Quant. Spectr. Radiation Transfer. 2006. V. 100. № 1–3. P. 16.
7. *Кюркчан А.Г., Смирнова Н.И.* Математическое моделирование в теории дифракции с использованием априорной информации об аналитических свойствах решения. М.: ИД “Медиа Паблишер”, 2014.
8. *Аполлонский С.М., Ерофеенко В.Т.* Электромагнитные поля в экранирующих оболочках. Минск: Университетское, 1988.
9. *Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н.* Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. М.: Наука, 1977.