

РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ
В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И ПЛАЗМЕ

УДК 537.874;537.624

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ
ДЛЯ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ ГИПЕРЗВУКА
В ФЕРРИТОВОЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ ФЕРРОМАГНИТНОМ РЕЗОНАНСЕ.
ЧАСТЬ 2. НЕКОТОРЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

© 2015 г. В. С. Власов¹, А. П. Иванов¹, В. Г. Шавров², В. И. Щеглов²

¹Сыктывкарский государственный университет,

Российская Федерация, 167001 Сыктывкар, Октябрьский просп., 55

²Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,

Российская Федерация, 125009 Москва, ул. Моховая, 11, корп. 7

Поступила в редакцию 13.03.2014 г.

В применении к задаче анализа работы магнитострикционного преобразователя СВЧ-диапазона продолжено рассмотрение возбуждения гиперзвуковых колебаний переменным магнитным полем на основе модели связанных осцилляторов. Выявлены два режима развития вынужденных колебаний, соответствующие спаду и нарастанию амплитуды во времени, разделенные точкой бифуркации. Найдены два критерия бифуркации, определяющие критическое значение константы связи и частоту резонансных колебаний. Показано, что точка бифуркации между режимами эквивалентна точке переориентации вектора намагниченности. Выявлена роль кубической нелинейности, как главного фактора в ограничении экспоненциального роста амплитуды вынужденных колебаний. Рассмотрены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) связанных колебаний при различных уровнях возбуждения. Показано, что квадратичное приближение при амплитуде переменного поля до 0.7 от намагниченности насыщения обеспечивает точность описания АЧХ по магнитным колебаниям не менее 2%. Рассмотрена применимость квадратичного приближения для описания самоподдерживающегося процесса автомодуляционного характера. Показано, что модельная система полностью отражает развитие во времени огибающей как регулярных, так и хаотических автомодуляционных колебаний, причем отличие по амплитуде от решения по полной системе не превышает 20%. Показано, что расчет на основе модели связанных осцилляторов в квадратичном приближении приводит к экономии машинных ресурсов в два раза и сокращению времени машинного счета на два порядка.

DOI: 10.7868/S003384941501012X

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассмотрена задача о возбуждении гиперзвуковых колебаний с помощью магнито-стрикционного преобразователя, работающего в условиях ферромагнитного резонанса [2, 3]. С целью увеличения мощности возбуждаемого гиперзвука преобразователь выполнен в виде нормально намагниченной ферритовой пластины [4–8], что предотвращает потери энергии, обусловленные параметрическим возбуждением обменных спиновых волн [9–11]. В работе [12] было показано, что нелинейный режим в сравнении с линейным позволяет повысить уровень возбуждения гиперзвука почти на два порядка. Однако использованный там математический аппарат отличается высокой громоздкостью и при численной реализации сопряжен с большими затратами машинного времени.

В работе [1] было показано, что подробный математический аппарат с достаточной для боль-

шинства практических задач точностью (порядка 10%) можно свести к значительно более простому варианту, основанному на модели двух связанных осцилляторов – магнитного и упругого.

В данной работе, являющейся продолжением [1], развитый там аппарат применяется для исследования некоторых конкретных особенностей нелинейного возбуждения гиперзвука. Некоторые особенности такого возбуждения были рассмотрены в работах [13, 14]. Настоящая работа является более подробным развитием полученных там результатов.

1. МОДЕЛЬ ОСЦИЛЛЯТОРОВ, СВЯЗАННЫХ ЧЕРЕЗ ПРОИЗВОДНЫЕ

Рассмотрим сначала наиболее простой случай линейного возбуждения гиперзвука на основе решения линеаризованной системы двух дифференциальных уравнений второго порядка, свя-

занных через переменные и их производные, которая является линейной частью квадрированной системы (см. [1] формулы (45)–(46)) и имеет симметричный вид

$$p_{11} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + p_{12} \frac{\partial x_1}{\partial t} + p_{13} x_1 + q_{11} x_2 + q_{12} \frac{\partial x_2}{\partial t} = A_{11} \cos(\omega t), \quad (1)$$

$$p_{21} \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + p_{22} \frac{\partial x_2}{\partial t} + p_{23} x_2 + q_{21} x_1 + q_{22} \frac{\partial x_1}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

Здесь для простоты принято, что внешнее возбуждение действует только на первый осциллятор, а раскочка второго происходит только за счет связи между ними.

Для более наглядного выявления физического смысла рассматриваемых далее явлений произведем нормировку на параметры инерционности p_{11} , p_{21} и введем обозначения, близкие к традиционно используемым при описании колебаний:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 x_1 + \gamma_1 x_2 + \delta_1 \frac{dx_2}{dt} = A \cos(\omega t); \quad (3)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 x_2 + \gamma_2 x_1 + \delta_2 \frac{dx_1}{dt} = 0, \quad (4)$$

где введены нормированные параметры затухания:

$$\beta_1 = p_{12}/p_{11}; \quad (5)$$

$$\beta_2 = p_{22}/p_{21}; \quad (6)$$

нормированные собственные частоты осцилляторов:

$$\omega_1 = \sqrt{p_{13}/p_{11}}; \quad (7)$$

$$\omega_2 = \sqrt{p_{23}/p_{21}}; \quad (8)$$

нормированные параметры связи через переменные:

$$\gamma_1 = q_{11}/p_{11}; \quad (9)$$

$$\gamma_2 = q_{21}/p_{21}; \quad (10)$$

нормированные параметры связи через производные:

$$\delta_1 = q_{12}/p_{11}; \quad (11)$$

$$\delta_2 = q_{22}/p_{21}; \quad (12)$$

нормированная амплитуда возбуждения:

$$A = A_{11}/p_{11}. \quad (13)$$

В отсутствие вынуждающей силы (при $A = 0$), эти уравнения могут описывать только затухающие колебания. Однако, поскольку каждое из уравнений содержит, кроме слагаемого с производной от основной переменной еще слагаемое с производной от другой переменной, то затухание одного осциллятора может зависеть от состояния колебаний другого. Можно полагать, что при на-

личии вынуждающей силы это обстоятельство способно привести к частичной или даже полной компенсации затухания каждого из осцилляторов, т.е. колебания могли бы как убывать во времени, так и нарастать. Во втором случае можно считать, что колебательная система приобретает “отрицательное сопротивление”, т.е. становится активной, а нарастание колебаний ограничивается только нелинейными свойствами системы [15–17], рассмотрение которых пока отложим до раздела 7.

2. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ РАЗВИТИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Для анализа взаимодействия осцилляторов, связанных через производные, система уравнений (3)–(4) решалась численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка [18]. Исследовался характер возбуждаемых колебаний при различной величине параметров связи через производные δ_1 и δ_2 . Собственные частоты осцилляторов ω_1 и ω_2 полагались равными друг другу и частоте возбуждения ω . Параметры связи через переменные γ_1 и γ_2 также были равны. Полученные картины развития колебаний и их производных во времени показаны на рис. 1 (выбор единиц построения обусловлен наглядностью изображения), там же показаны соответствующие фазовые портреты.

Из рисунка видно, что в отсутствие связи через производные $\delta_1 = \delta_2 = 0 \text{ с}^{-1}$ (см. рис. 1а) колебания через время около 2 с приходят к стационарной амплитуде около 1.3 см и дальше не меняются. Картина соответствует обычному экспоненциальному насыщению, характерному для положительного затухания. Фазовый портрет представляет собой развивающуюся из неустойчивого фокуса спираль, расстояния между витками которой по мере ее развития уменьшаются, в результате чего образуется устойчивый цикл.

При связи $\delta_1 = \delta_2 = 2.0 \text{ с}^{-1}$ (б) колебания нарастают практически линейно. Амплитуда заметно превышает предыдущую и при времени 5 с составляет около 3.5 см. Близкий к линейному рост амплитуды можно интерпретировать как экспоненту с нулевым показателем. Расстояния между витками спирали фазового портрета сохраняются постоянными, устойчивый цикл не образуется.

При связи $\delta_1 = \delta_2 = 3.0 \text{ с}^{-1}$ (в) амплитуда колебаний резко растет: при времени 5 с достигает 15 см и далее еще более увеличивается, стремясь к бесконечности. Картина соответствует экспоненциальному росту, характерному для отрицательного затухания. Спираль фазового портрета, выходя из того же неустойчивого фокуса раскручивается тем сильнее, чем более удаляется от центра.

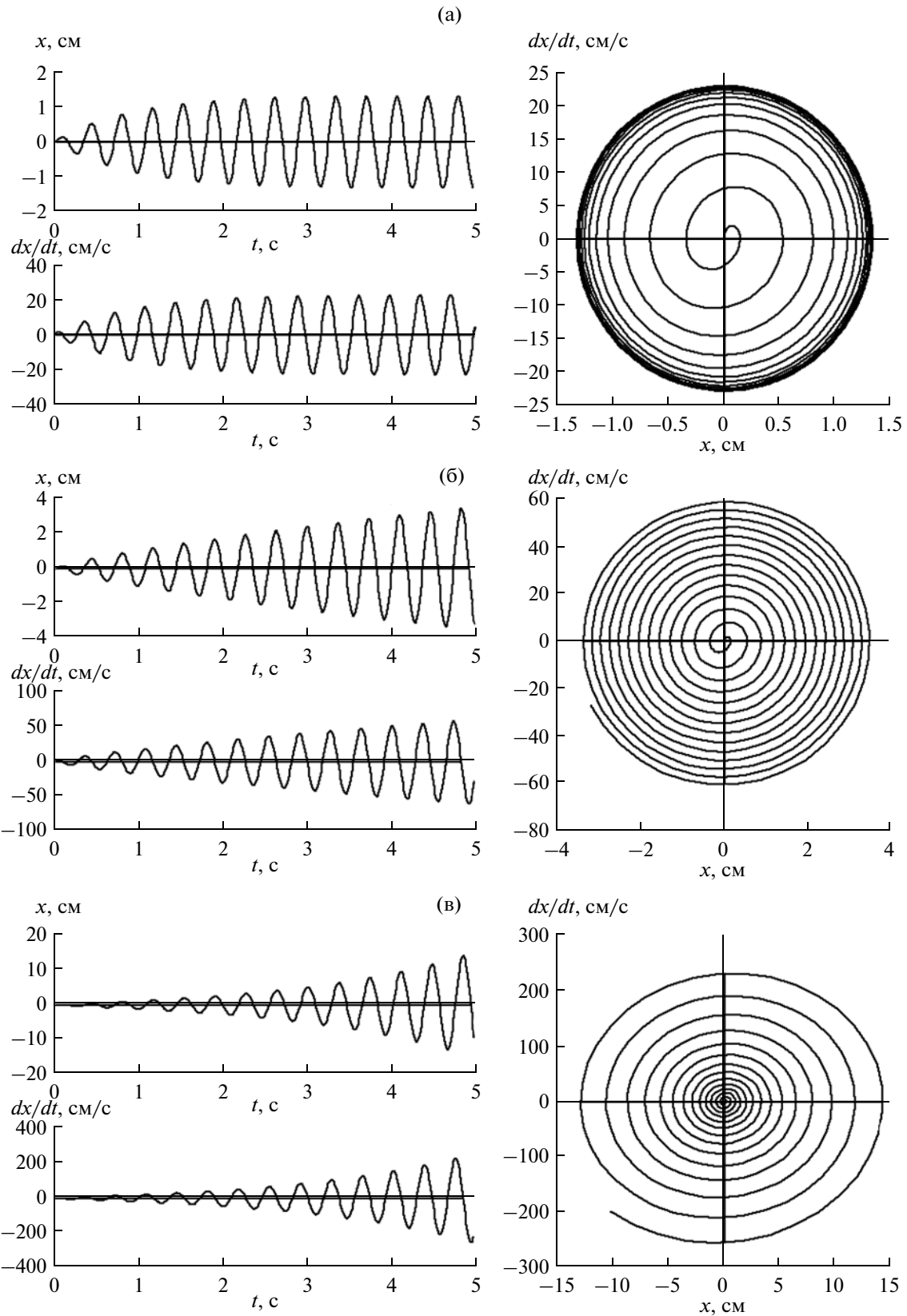


Рис. 1. Развитие вынужденных колебаний (x) и их производных (dx/dt) во времени при совпадении частоты возбуждения с собственной частотой осцилляторов при различной величине связи: $\delta_1 = \delta_2 = 0$ (а), 2 (б) и 3 с (в). Параметры возбуждения: $\omega = 17.5 \text{ с}^{-1}$; $A = 50 \text{ см с}^{-1}$ и параметры осцилляторов: $\beta_1 = \beta_2 = 2.0 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1 = \omega_2 = 17.5 \text{ с}^{-1}$; $\gamma_1 = \gamma_2 = 10.0 \text{ с}^{-2}$. Справа – фазовые портреты.

Таким образом, можно видеть, что в случае связи через производные, по мере увеличения параметров связи δ_1 и δ_2 , происходит уменьшение затухания от положительного значения через нулевое до отрицательного. То есть наблюдаются три различных режима вынужденных колебаний: режим спада амплитуды, режим ее нарастания, и между ними – режим стационарной амплитуды.

Сказанное относится к случаю равенства собственных частот осцилляторов частоте возбуждения. Дополнительное исследование, частично отраженное в работе [13], показывает, что при рассогласовании частот приведенная картина осложняется биениями, которые за счет связи через производные приобретают незатухающий стационарный характер. Однако общая картина упомянутых трех режимов поведения амплитуды сохраняется и соответствует тем же критическим значениям параметров связи δ_1 и δ_2 , что и при совпадении всех частот.

3. АНАЛИТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ИЗМЕНЕНИЯ ХАРАКТЕРА КОЛЕБАНИЙ

Система уравнений (3)–(4) в ряде случаев допускает аналитическое решение. Рассмотрим, например, частный случай свободных колебаний без вынуждающей силы. В этом случае система (3)–(4) принимает вид

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \beta_1 \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 x_1 + \gamma_1 x_2 + \delta_1 \frac{dx_2}{dt} = 0; \quad (14)$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \beta_2 \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 x_2 + \gamma_2 x_1 + \delta_2 \frac{dx_1}{dt} = 0. \quad (15)$$

Предполагая решение в виде

$$x_1 = x_{10} \exp^{\lambda t}; \quad (16)$$

$$x_2 = x_{20} \exp^{\lambda t}, \quad (17)$$

получаем систему алгебраических уравнений для x_{10} , x_{20} :

$$(\lambda^2 + \beta_1 \lambda + \omega_1^2) x_{10} + (\lambda \delta_1 + \gamma_1) x_{20} = 0; \quad (18)$$

$$(\lambda \delta_2 + \gamma_2) x_{10} + (\lambda^2 + \beta_2 \lambda + \omega_2^2) x_{20} = 0, \quad (19)$$

условие нетривиальности решения которой дает уравнение для λ :

$$\lambda^4 + \lambda^3 (\beta_1 + \beta_2) + \lambda^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1 \beta_2 - \delta_1 \delta_2) + \lambda (\beta_1 \omega_2^2 + \beta_2 \omega_1^2 - \delta_1 \gamma_2 - \delta_2 \gamma_1) + \omega_1^2 \omega_2^2 - \gamma_1 \gamma_2 = 0. \quad (20)$$

Предположим, что λ имеет вид комплексного числа:

$$\lambda = a + ib, \quad (21)$$

где a , b – действительные. В этом случае a соответствует изменению амплитуды колебаний во времени, а b – частоте этих колебаний.

Подставляя (21) в (20), выделяя действительную и мнимую части и приравнявая их по отдельности к нулю, получаем систему уравнений относительно a и b :

$$\begin{aligned} & (a^4 + b^4 - 6a^2b^2) + (a^3 - 3ab^2)(\beta_1 + \beta_2) + \\ & + (a^2 - b^2)(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) + \\ & + a(\beta_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2 - \delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1) + \omega_1^2\omega_2^2 - \gamma_1\gamma_2 = 0; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & b^2(4a + \beta_1 + \beta_2) = 4a^3 + 3a^2(\beta_1 + \beta_2) + \\ & + 2a(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) + \\ & + (\beta_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2 - \delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1). \end{aligned} \quad (23)$$

Выражая b^2 из (23) и подставляя в (22), можно получить уравнение, содержащее только a , однако его решение будет достаточно сложным.

Поэтому рассмотрим частный случай, соответствующий постоянству амплитуды во времени, т.е. $a = 0$. При этом из (22) и (23) получаем два уравнения для b , которые должны удовлетворяться одновременно:

$$b^4 - b^2(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) + \omega_1^2\omega_2^2 - \gamma_1\gamma_2 = 0; \quad (24)$$

$$b^2(\beta_1 + \beta_2) - (\beta_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2 - \delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1) = 0. \quad (25)$$

Из (25) при условии $\beta_1 + \beta_2 \neq 0$ получаем

$$b^2 = \frac{\beta_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2 - \delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1}{\beta_1 + \beta_2}. \quad (26)$$

Это соотношение позволяет найти частоту собственных колебаний системы при условии сохранения постоянства амплитуды:

$$\omega_S = \sqrt{\frac{\beta_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2 - \delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1}{\beta_1 + \beta_2}}. \quad (27)$$

При этом (24) также соответствует условию сохранения амплитуды постоянной, т.е. при его нарушении в ту или другую сторону амплитуда растет или спадает. Введем вспомогательную функцию

$$\begin{aligned} & G_S(\omega) = \\ & = \omega^4 - \omega^2(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) + \omega_1^2\omega_2^2 - \gamma_1\gamma_2, \end{aligned} \quad (28)$$

с помощью которой получаем критерий перехода от нарастания амплитуды к ее убыванию:

$$G_S(\omega) = 0. \quad (29)$$

Таким образом, главным критерием постоянства амплитуды является выражение (29) или

$$\omega_S^4 - \omega_S^2(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) + \omega_1^2\omega_2^2 - \gamma_1\gamma_2 = 0, \quad (30)$$

а если это условие выполняется, то частота определяется соотношением (27), причем (30) позволяет определить соответствующие переходу значения параметров $\beta_{1,2}, \gamma_{1,2}, \delta_{1,2}$.

Проверим условия (29) и (27) численно. Зависимость функции G_S от частоты иллюстрируется рис. 2 (параметры построения выбраны, исходя из наглядности чертежа).

Из рис. 2а видно, что функция $G(\omega)$ представляет собой параболу четвертого порядка, симметричную относительно оси ординат. Функция $G(\omega)$ имеет два минимума при $\omega = \pm 17.5$, разделенные максимумом при $\omega = 0$. Реальный физический смысл имеет правая часть параболы, соответствующая положительным значениям частоты ω . Действительными корнями уравнения (29) являются точки пересечения параболы с нулевой линией. Нули функции $G_S(\omega)$ находятся вблизи правого минимума параболы только при $\delta_1 = \delta_2 = 0.1$, тогда как при $\delta_1 = \delta_2 < 0.1$ они расходятся в разные стороны относительно $\omega = 17.5 \text{ с}^{-1}$, а в случае $\delta_1 = \delta_2 > 0.1$ вообще отсутствуют. При вынужденных колебаниях эти случаи соответствуют показанным на рис. 1 трем режимам развития колебаний: установлению стационарного значения амплитуды колебаний (а), а также ее линейного (б) и экспоненциального роста (в).

На рис. 2б показан левый нуль правой ветви функции $G_S(\omega)$ ($\omega > 0$) в более крупном масштабе. Видно, что он приходится на $\omega = 17.48571$. Рассчитанное по формуле (27) значение частоты резонанса системы составляет $\omega_S = 17.4857$ (на рисунке показано стрелкой). Видно, что оно весьма близко к частоте, при которой $G_S(\omega)$ проходит через нуль. Таким образом, можно видеть, что оба условия постоянства амплитуды (29) и (27) выполняются с весьма высокой степенью точности (до шести значащих цифр).

Выполненная численная проверка показывает, что из четырех возможных корней уравнения (29) только один соответствует частоте (27). Таким образом, условие (27) дополняет основной критерий (29) тем, что позволяет определить, какой именно из четырех корней уравнения (29) действительно соответствует переходу от убывания амплитуды к ее нарастанию. Из рис. 2б видно, что этот корень соответствует убыванию функции $G_S(\omega)$ в области $\omega > 0$. То есть для выбора корня

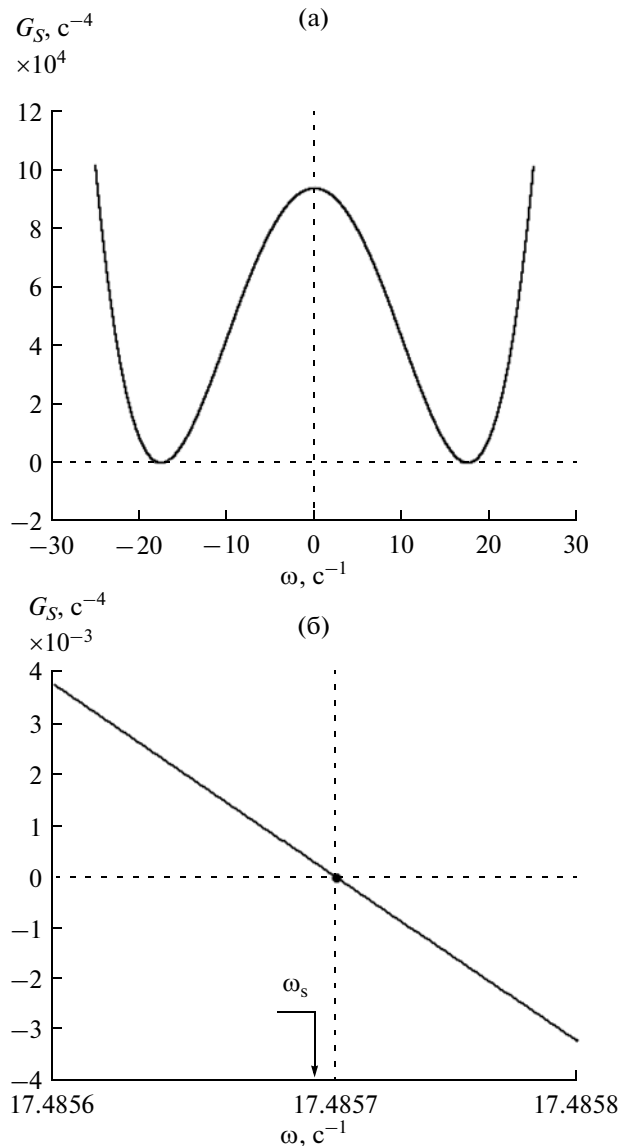


Рис. 2. Общий характер зависимости функции G_S от частоты ω (а) и зависимость вблизи главного нуля в крупном масштабе, (б) и параметры: $\beta_1 = \beta_2 = 0.1$; $\omega_1 = \omega_2 = 17.5$; $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$; $\delta_1 = \delta_2 = 0.1$.

можно использовать условие отрицательности производной функции $G_S(\omega)$ по частоте:

$$dG_S/d\omega < 0, \quad (31)$$

или в развернутом виде

$$2\omega^2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) < 0. \quad (32)$$

Для частоты можно записать

$$\omega < \sqrt{\frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2)}, \quad (33)$$

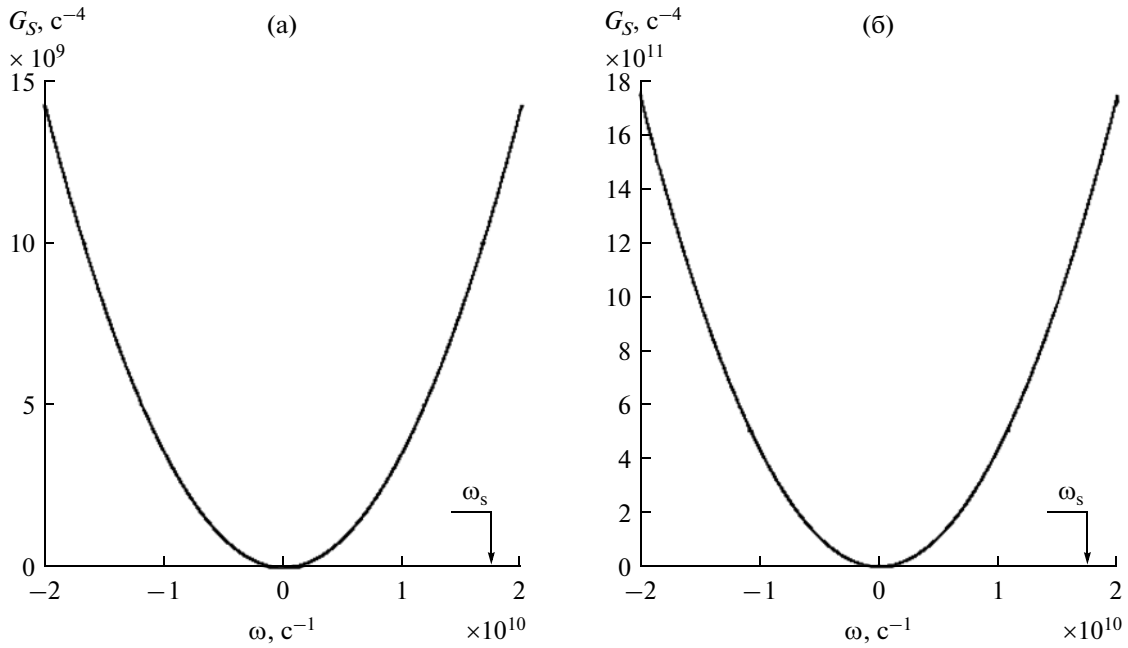


Рис. 3. Зависимости функции G_S от частоты ω для ферритов двух различных составов: ЖИГ (а) и ТбФГ (б). Общие параметры: $c_{44} = 7.64 \times 10^{11}$ эрг см^{-3} ; $\rho = 5.17$ г см^{-3} ; $\alpha = 0.02$; $\beta = 10^9$ с^{-1} ; $d = 6.865 \times 10^{-5}$ см. Параметры для ЖИГ и ТбФГ соответственно: $4\pi M_0 = 1750$ и 250 Гс, $B_2 = 6.96 \times 10^6$ и 3.0×10^7 эрг см^{-3} , $H_0 = 2750$ и 1250 Э.

причем это соотношение должно быть дополнено условием

$$\delta_1 \delta_2 < \omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1 \beta_2, \quad (34)$$

которое накладывает ограничение на величины параметров связи через производные.

4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ДЛЯ МАГНИТОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ

Запишем полученное значение частоты и критерия перехода для магнитоупругой колебательной системы, приведенной в [1] на рис. 1. Так из (27) и (29) получаем

$$\omega_S = \sqrt{\frac{p_{12}p_{23} + p_{22}p_{13} - q_{12}q_{21} - q_{22}q_{11}}{p_{12} + p_{22}}}, \quad (35)$$

$$G_S(\omega) = \omega^4 - \omega^2 \times (p_{13} + p_{23} + p_{12}p_{22} - q_{12}q_{22}) + p_{13}p_{23} - q_{11}q_{21}, \quad (36)$$

а условие (30) принимает вид

$$\omega_S^4 - \omega_S^2 (p_{13} + p_{23} + p_{12}p_{22} - q_{12}q_{22}) + p_{13}p_{23} - q_{11}q_{21} = 0, \quad (37)$$

где величины p_{ik} , q_{ik} определяются через параметры материала и поля с помощью приведенных в работе [1] формул (47)–(86).

Получение явного вида выражений (35)–(37) тривиально, однако довольно громоздко, поэтому здесь не приводится.

5. КРИТЕРИИ ПЕРЕХОДА НА ПРИМЕРЕ РЕАЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Рассмотрим предсказанную линеаризованной системой (3)–(4) возможность существования трех режимов – стационарной амплитуды, ее роста и убывания на примере реальных материалов типа железо-иттриевого граната (ЖИГ) и тербиевого феррит-граната (ТбФГ). Параметры этих материалов можно найти, например, в [2], эти же параметры использованы в работах [12–14]. На рис. 3 представлены зависимости функции G_S от частоты ω для ферритов двух составов: ЖИГ (а) и ТбФГ (б) видно, что в обоих случаях функция G_S представляет собой параболу, симметричную относительно оси ординат, с единственным нулем при $\omega = 0$. Ветви параболы для ТбФГ поднимаются вверх значительно круче (на два порядка), чем ветви параболы для ЖИГ, что, по-видимому, связано с большим значением константы B_2 для этого материала. Однако критические частоты, определяемые формулой (35) с учетом (47)–(86) из [1], для обоих ферритов близки друг к другу и составляют: $\omega_S(\text{ЖИГ}) = 1.7633 \times 10^{10}$ с^{-1} , $\omega_S(\text{ТбФГ}) = 1.7506 \times 10^{10}$ с^{-1} . Видно, что в обоих случаях эти частоты весьма далеки от нуля

функции G_S , т.е. критерий постоянства амплитуды не выполняется. Контрольная проверка развития колебаний во времени показывает, что в обоих случаях свободные колебания затухают со временем релаксации порядка 7×10^{-9} с, а амплитуда вынужденных колебаний принимает постоянное значение со временем установления той же длительности.

Представляет интерес найти условия, максимально близкие к реальности, при которых оба критерия (29) и (27) выполняются. Реальные материалы предоставляют в этом плане широкий выбор величины константы магнитоупругого взаимодействия B_2 . Проверка зависимости вида функции $G_S(\omega)$ от величины этой константы при всех остальных параметрах, соответствующих ЖИГ, показала, что резкое изменение $G_S(\omega)$ происходит при переходе значения B_2 через критическую величину B_{2C} , превышающую B_2 для ЖИГ в 46.86532 раза, т.е. если считать значение B_2 (ЖИГ) = 6.96×10^6 эрг см⁻³ точным, то при $B_{2C} = 3.261826 \times 10^8$ эрг см⁻³. При этом ветви параболы переходят от стремления вверх к стремлению вниз, причем переворот происходит при весьма критичном значении такой константы.

Соответствующее изменение вида функции $G_S(\omega)$ при переходе величины константы B_2 через критическое значение B_{2C} иллюстрируется рис. 4. Видно, что по мере роста значения B_2 в седьмой значащей цифре на единицу, ветви параболы первоначально стремящиеся вверх, резко перескакивают вниз. При этом частота, определяемая критерием (29), равна $\omega_S = 1.5256 \times 10^{10}$ с⁻¹. Ввиду крайней резкости перескока ветвей параболы сверху вниз определить точное значение константы B_{2C} , превышающее семь значащих цифр, в данной работе не представилось возможным, однако очевидно, что переход ветвей происходит через их выстраивание вдоль горизонтальной оси, т.е. правая ветвь на частоте ω_S должна приблизиться к нулю на величину бесконечно малую, что и обеспечит одновременное выполнение обоих критериев (29) и (27).

6. РАЗВИТИЕ ВО ВРЕМЕНИ КОЛЕБАНИЙ ПО ПОЛНОЙ И МОДЕЛЬНОЙ СИСТЕМАМ

Рассмотрим теперь, в какой степени колебания осцилляторов, описываемые упрощенной линеаризованной системой (3)–(4), соответствуют колебаниям намагниченности, описываемым полной системой (1)–(7) в [1]. Для сравнения обратимся к рис. 5, на котором показано развитие колебаний компонент $m_x(t)$ и $x_1(t)$ во времени при различных коэффициентах константы маг-

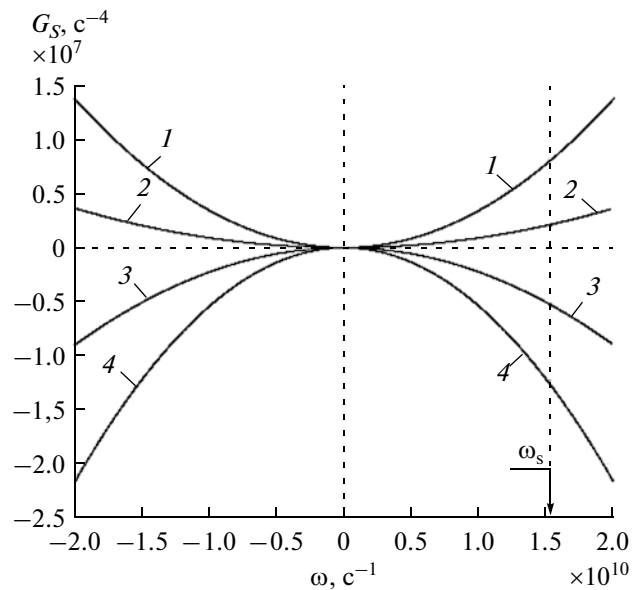


Рис. 4. Зависимость функции G_S от частоты ω при различных значениях B_2 (B_2 (ЖИГ) = 6.96×10^6 эрг см⁻³), близких к критическому:

- 1 – $B_2 \rightarrow B_2$ (ЖИГ) $\times 46.86530$;
- 2 – $B_2 \rightarrow B_2$ (ЖИГ) $\times 46.86531$;
- 3 – $B_2 \rightarrow B_2$ (ЖИГ) $\times 46.86532$;
- 4 – $B_2 \rightarrow B_2$ (ЖИГ) $\times 46.86533$.

Параметры: $4\pi M_0 = 1750$ Гс; $c_{44} = 7.64 \times 10^{11}$ эрг см⁻³;
 $\rho = 5.17$ г см⁻³; $\alpha = 0.02$; $\beta = 10^9$ с⁻¹; $d = 6.865 \times 10^{-5}$ см.

нитоупругого взаимодействия $N = B_2/B_2$ (ЖИГ). Кривые в левом столбце соответствуют полной системе (1)–(7) в [1], кривые в правом столбце – линеаризованной системе (3)–(4).

Кривые на рис. 5а, 5б отвечают чисто линейному режиму с константой B_2 , соответствующей ЖИГ, т.е. вдали от условий переориентации [19]. Видно, что в установившемся режиме амплитуды колебаний, рассчитанные по обеим системам уравнений, совпадают с точностью до 5%. Установление амплитуды колебаний здесь происходит одинаково по затухающей экспоненте с одной и той же постоянной времени. Дополнительное совпадение получается при возбуждении магнитной системы не по двум координатам, а лишь по одной, однако различие обоих этих случаев незначительно и не превышает 20%.

Кривые на рис. 5в, 5г соответствуют значению константы B_2 , приближающемуся к значению переориентации, соответствующему $N \approx 47$ [19]. В установившемся режиме здесь опять наблюдается хорошее совпадение амплитуд, рассчитанных по обеим системам уравнений: различие не превы-

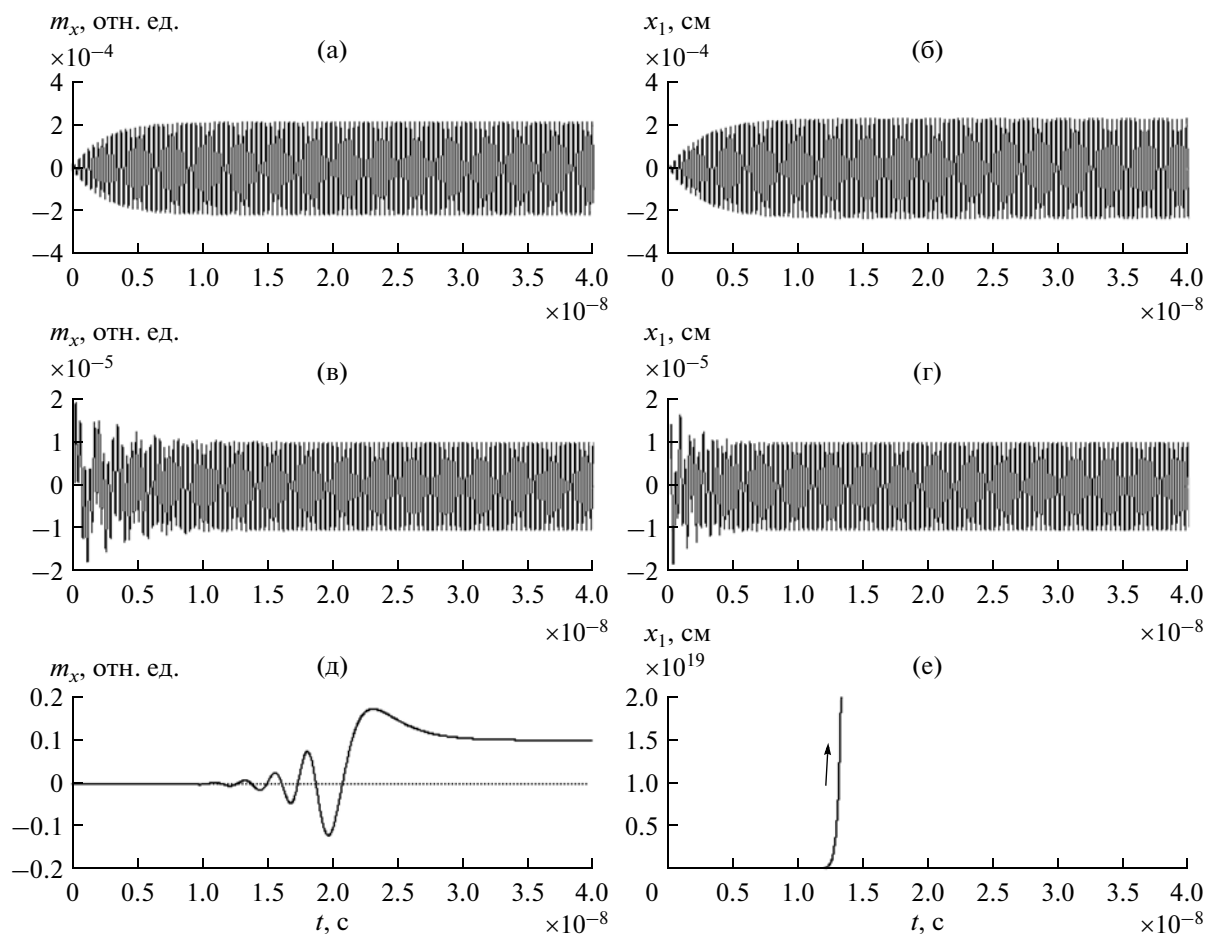


Рис. 5. Развитие колебаний компонент m_x (1) и x_1 (2) во времени при различных коэффициентах константы магнитоупругого взаимодействия: $N = 1$ (а, б), 40 (в, г), 50 (д, е), где $N = B_2/B_2$ (ЖИГ). Частота возбуждения $f = 2800$ МГц; условия возбуждения: $h_x = 0.01$ Э, $h_y = 0.01$ Э; $A = 0.01$.

шает 5%. Некоторое небольшое отличие состоит в режиме установления: биения при расчете по полной системе несколько более выражены, чем при расчете по линеаризованной, что, по-видимому, обусловлено близостью к режиму переориентации.

Кривые на рис. 5д, 5е соответствуют значению константы B_2 , несколько превышающему требуемое для переориентации. Из расчета по полной системе (рис. 5д) видно, что вектор намагниченности при времени $\sim 2.3 \times 10^{-8}$ с претерпевает переориентацию к направлению более близкому к плоскости пластины, что происходит через посредство нескольких затухающих осцилляций. При расчете по линеаризованной системе с тем же значением константы B_2 (см. рис. 5е) амплитуда осциллятора x_1 при времени $\sim 1.4 \times 10^{-8}$ с без каких-либо осцилляций сразу устремляется к бесконечности.

Более подробный расчет показывает, что переориентация вектора намагниченности в исходной магнитоупругой системе и уход на бесконечность амплитуды колебаний модельной системы осцилляторов происходит при одном и том же (с точностью не менее 1%) значении константы магнитоупругого взаимодействия $B_2 \rightarrow B_{2c}$.

7. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОГРАНИЧЕНИЯ АМПЛИТУДЫ ЗА СЧЕТ КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Ранее, в разделе 2 было показано, что связь осцилляторов через производные при достаточной величине приводит к экспоненциальному нарастанию амплитуды колебаний. Такой рост соответствует бесконечному возрастанию их энергии, что в реальных системах недопустимо. То есть при достаточно высокой амплитуде колебаний должны работать механизмы ограничения. Одним из

таких известных механизмов является нелинейная расстройка, при большой амплитуде приводящая к выводу системы из резонанса [15–17]. Рассмотрим, что добавляет к линейным явлениям, описанным в [13], нелинейность в квадратичном приближении.

Приведенные в [1] общие уравнения (45)–(46), содержат много слагаемых, роль которых в общем развитии колебаний, по-видимому, является различной. Однако, как было показано в [1] раздел 12, главную роль играют слагаемые, пропорциональные третьей степени намагниченности. Из классических представлений о колебаниях нелинейной системы с одной степенью свободы [15–17] следует, что ограничение амплитуды при резонансе происходит за счет расстройочного механизма, главную роль в котором играет нелинейность также кубического характера.

Поэтому пока пренебрежем ролью дополнительных механизмов и ограничим рассмотрение единственным слагаемым, соответствующим кубической нелинейности. При этом система уравнений (45)–(46) в работе [1] в обозначениях, принятых в разделе 1 данной работы (формулы (5)–(13)), сводится к следующей:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \beta_1 \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 x_1 + \gamma_1 x_2 + \delta_1 \frac{dx_2}{dt} + \eta_1 x_1^3 = A \cos(\omega_0 t); \quad (38)$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \beta_2 \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 x_2 + \gamma_2 x_1 + \delta_2 \frac{dx_1}{dt} + \eta_2 x_2^3 = 0, \quad (39)$$

где в дополнение к (5)–(13) введены нормированные параметры кубической нелинейности:

$$\eta_1 = r_{11}/p_{11}, \quad (40)$$

$$\eta_2 = r_{21}/p_{21}. \quad (41)$$

Развитие вынужденных колебаний во времени при различной величине связи и коэффициента кубической нелинейности иллюстрируется рис. 6. Эпюры на рис. 6а, 6в, 6д получены в линейном приближении при различных величинах связи через производные. Наблюдаемые на них три режима: стационарности (а), линейного (в) и экспоненциального роста (д) амплитуды колебаний подобны приведенным на рис. 1 (здесь для наглядности рассмотрен больший интервал времени). На рис. 6б, 6г, 6е показано, как развиваются те же вынужденные колебания в условиях кубической нелинейности. Видно, что во всех трех режимах кубическая нелинейность приводит к ограничению амплитуды колебаний. Благодаря нелинейной расстройке, установление колебаний происходит с биениями, проявляющимися в модуляции амплитуды на рис. 6б, 6г и 6е. При увеличении параметров нелинейности период биений уменьшается, что соответствует классическим представлениям [15–17]. Несколько более подробно вопрос о биениях рассмотрен в [14].

8. АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЕБАНИЙ ПРИ КВАДРАТИЧНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассмотрим теперь возможность использования квадрированной системы с кубической нелинейностью (45)–(46) для расчета частотных свойств связанной системы магнитного и упругого осцилляторов на примере пластины из ЖИГ. На рис. 7 показаны амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) магнитных (а, в) и упругих (б, г) колебаний такой системы при различных уровнях возбуждения. Сплошными линиями показан расчет по квадрированной системе, штриховыми – контрольный расчет по полной системе магнитоупругих уравнений (квадрированная система приведена в [1] под номерами (45)–(46), полная – под номерами (1)–(7)); вертикальная пунктирная линия соответствует резонансной частоте свободных колебаний 2800 МГц.

Рис. 7а, 7б соответствует линейному режиму ($h_0 = 0.01$ Э). В этом случае резонансные кривые как для магнитных (а), так и для упругих (б) колебаний полностью симметричны, квадратичное приближение описывает полное решение с точностью не хуже 1%, кроме ближайшей окрестности резонансной частоты $2.8 \text{ ГГц} \pm 10 \text{ МГц}$, где точность составляет около 4%.

Рис. 7в, 7г соответствует сильно нелинейному режиму ($h_0 = 100$ Э). Кривая для магнитных колебаний (в) представляет собой скошенный треугольник, причем частота согласно квадратичному приближению соответствует 3.50 ГГц, согласно полному решению – 3.57 ГГц. В области вне спада точность квадратичного приближения составляет около 2%. Кривая для упругих колебаний (г) имеет такой же крутой спад на тех же частотах, что и магнитная, однако резонанс на частоте 2.8 ГГц выражен значительно сильнее. Кривая квадратичного приближения проходит выше кривой полного, причем точность квадратичного приближения в области резонанса близка к 30%, а вблизи спада ухудшается до 50%.

Более подробное исследование показывает, что квадратичное приближение описывает магнитные колебания с точностью не хуже 1% в поле до 20 Э, до 2% в поле до 100 Э и до 10% в поле до 400 Э. То же приближение описывает упругие колебания с точностью до 10% в поле до 20 Э, до 30% в поле до 100 Э и до двух раз в поле до 400 Э, причем точность приближения при удалении от резонансной частоты возрастает.

9. АВТОМОДУЛЯЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В предыдущих разделах рассмотрено приложение квадрированной системы к довольно простым нелинейным явлениям, таким как ограничение амплитуды колебаний и деформация резонансных кривых. Проверим теперь применимость такой си-

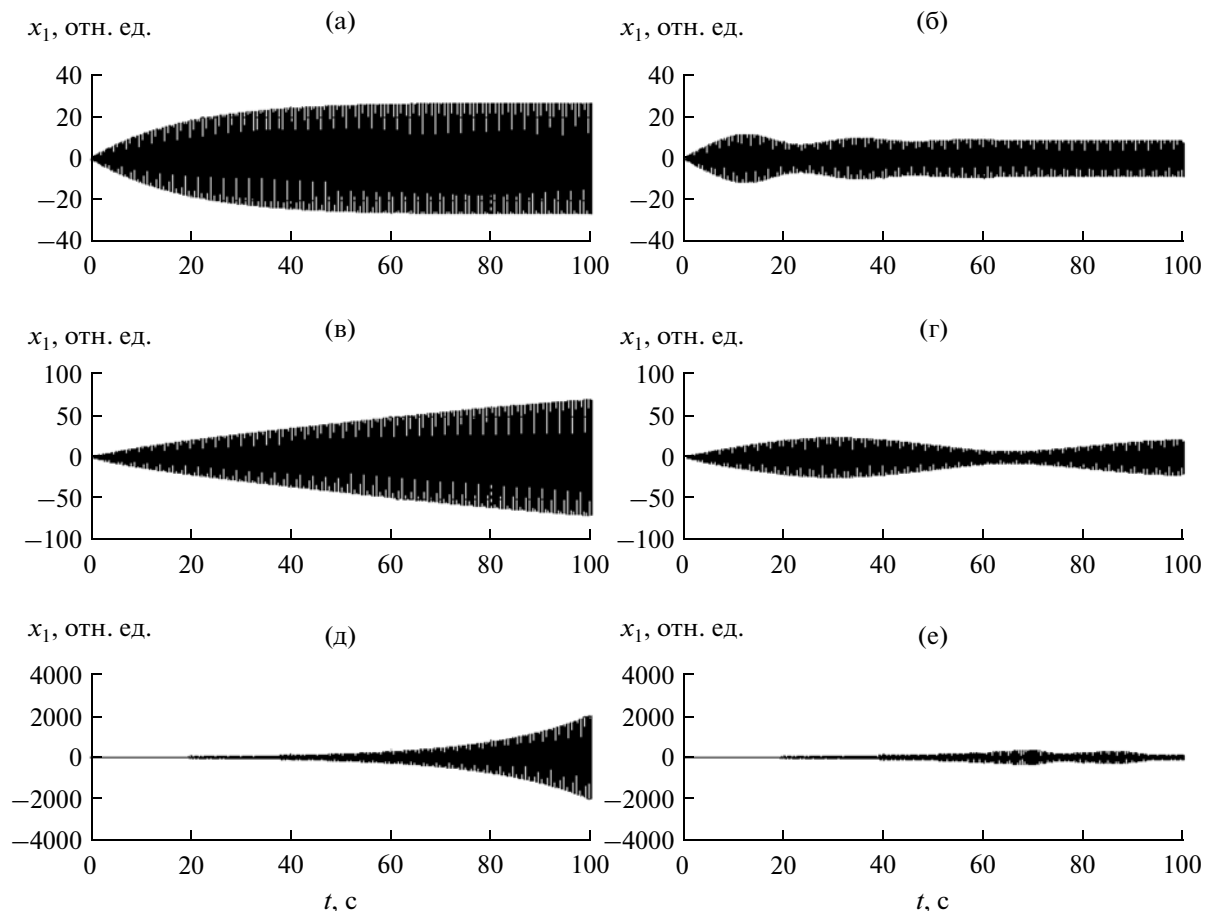


Рис. 6. Развитие вынужденных колебаний во времени при различных величинах связи и коэффициента кубической нелинейности (первый осциллятор): а – $\delta_{1,2} = 0$, $\eta_{1,2} = 0$; б – $\delta_{1,2} = 0$, $\eta_{1,2} = 0.1$; в – $\delta_{1,2} = 0.1$, $\eta_{1,2} = 0$; г – $\delta_{1,2} = 0.1$, $\eta_{1,2} = 0.01$; д – $\delta_{1,2} = 0.2$, $\eta_{1,2} = 0$; е – $\delta_{1,2} = 0.2$, $\eta_{1,2} = 0.001$. Параметры осцилляторов: $\beta_1 = \beta_2 = 0.1$; $\omega_1 = \omega_2 = 17.5$; $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$; параметры возбуждения: $\omega_0 = 17.5$; $A = 50$.

стемы для описания еще одного, более сложного нелинейного эффекта.

Так, в работах [20–24], посвященных связанным системам типа “ферритовый плюс электродинамический или упругий резонатор”, сообщалось о возможности возбуждения в ферритах самоподдерживающихся процессов автомодуляционного характера, имеющих место при достаточно высоких уровнях возбуждающего сигнала. Рассмотрим возможность применения квадратичного приближения (45)–(46) в [1] к таким системам.

Для уверенной реализации автомодуляционных режимов возьмем большую амплитуду возбуждения в сочетании с увеличенной константой магнитоупругого взаимодействия. Остальные параметры феррита возьмем типичными для ЖИГ [2]:

$$4\pi M_0 = 1750 \text{ Гс}, \quad \alpha = 0.0001; \quad \beta = 10^6 \text{ с}^{-1}, \\ B_2 = 6.96 \times 10^6 \text{ эрг/см}^3; \quad c_{44} = 7.64 \times 10^{11} \text{ эрг/см}^3; \\ \rho = 5.17 \text{ г/см}^3.$$

В отличие от работ [20–24], где решающую роль играла взаимная расстройка резонаторов и отстройка их от частоты возбуждения, для упрощения задачи возьмем все частоты равными, для чего примем постоянное поле $H_0 = 2750$ Э, толщину магнитной пластины $d = 6.865 \times 10^{-5}$ см. Такие параметры обеспечивают частоту ФМР и упругого резонанса равной 2800 МГц. Частоту возбуждения также возьмем равной этой величине. Отметим, что выбор равенства всех частот несколько затрудняет возбуждение автомодуляционных колебаний, повышая их порог, поэтому для облегчения реализации таких режимов положим константу магнитоупругого взаимодействия, в несколько раз превышающую таковую для ЖИГ. Полученные результаты представлены на рис. 8 и 9.

На рис. 8 показано развитие колебаний компонент m_x и u_x во времени, полученное путем расчета по полной и квадрированной системам. Видно, что в обоих случаях колебания намагниченности

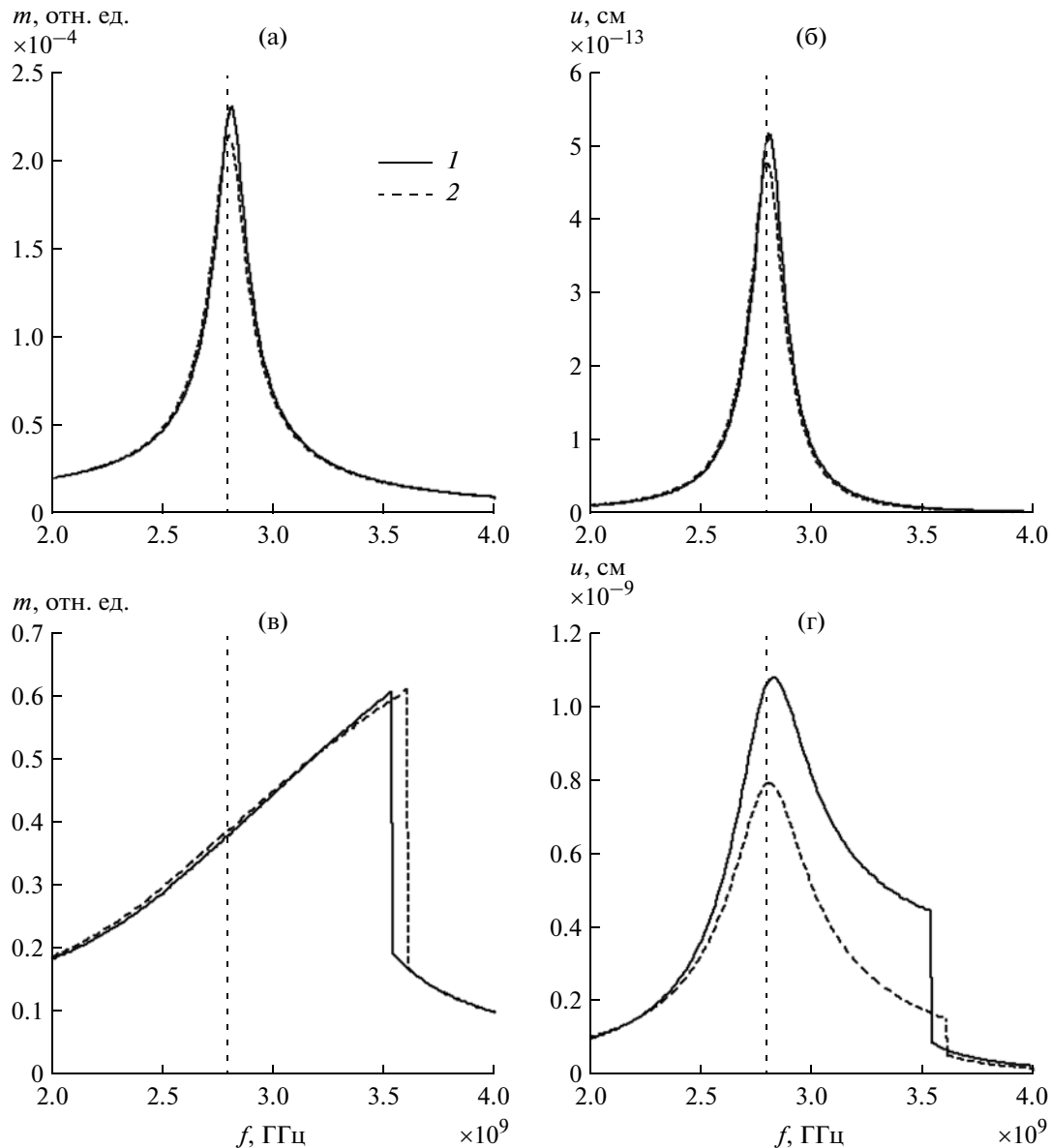


Рис. 7. Амплитудно-частотные характеристики магнитных (а, в) и упругих (б, г) колебаний при различных уровнях возбуждения: а, б – $h_0 = 0.01 \text{ Э} (h_0/M_0 = 7.1 \times 10^{-5})$; в, г – $h_0 = 100 \text{ Э} (h_0/M_0 = 0.71)$. Параметры см. рис. 4 при $B_2 = B_2$ (ЖИГ). 1, 2 – пояснения в тексте.

(а, б) имеют хаотический, близкий к шумовому характер, свойственный высокому уровню возбуждения [20–24]. Однако колебания упругого смещения (в, г) имеют регулярный, близкий к синусоидальному характер огибающей автомодуляционного типа.

Некоторое превышение средней амплитуды колебаний при расчете по квадрированной системе (б, г) над амплитудой при расчете по полной системе (а, в) соответствует аналогичному превышению на рис. 2 в [1] при достаточно высоком уровне возбуждения. Здесь превышение для магнитных колебаний составляет 1.2 раза, а для упругих – около двух раз.

На рис. 9 так же показано развитие колебаний компонент m_x и u_x во времени, полученное путем расчета по полной и квадрированной системам, но в отличие от рис. 8 в два раза более высоком уровне возбуждения и в 3.33 большем значении константы B_2 , т.е. здесь нелинейность режима должна проявляться сильнее. Из рис. 9 видно, что и в этом случае колебания намагниченности (а, б) имеют близкий к шумовому характер. Однако теперь колебания упругого смещения (в, г) теряют регулярность и также приобретают хаотический шумовой характер.

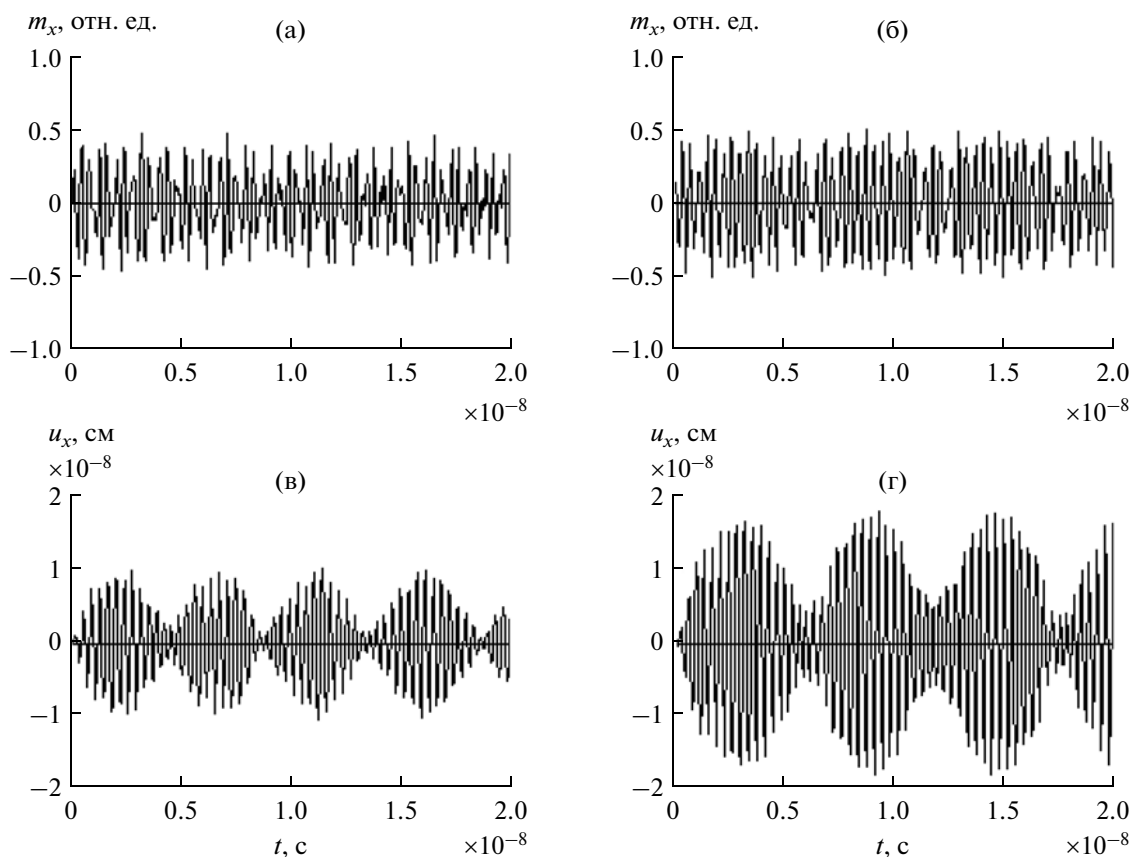


Рис. 8. Развитие колебаний компонент m_x и u_x во времени, полученное путем расчета по полной (а, в) и квадрированной (б, г) системам. Константа магнитоупругого взаимодействия $B_2 = 12 \times B_2$ (ЖИГ). Амплитуда переменного поля: $h_x = 150$ Э; $h_y = 0$ Э.

Некоторое превышение амплитуды при расчете по квадрированной системе над амплитудой при расчете по полной системе, имеет ту же причину, что и отмеченное на рис. 8. Здесь превышение для магнитных колебаний составляет 1.5 раз, а для упругих — около 1.2 раза.

10. ОЦЕНКА ПРИКЛАДНЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ КВАДРАТИЧНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Из проделанного рассмотрения следует, что модель связанных осцилляторов при использовании квадратичного приближения позволяет довольно адекватно рассчитать динамические свойства ряда нелинейных явлений, сопровождающих возбуждение ферромагнитного резонанса в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами.

С прикладной стороны представляет интерес оценить время счета и требуемые машинные ресурсы при использовании квадрированной системы уравнений вместо полной.

Из всех рассмотренных примеров наибольшего времени и машинных ресурсов требует расчет АЧХ системы. Так, в данной работе при принятых параметрах для ЖИГ программа для расчета АЧХ в диапазоне 2...6 ГГц с шагом в 10 МГц методом Рунге-Кутты четвертого порядка [18] по полной системе (см. [1], формулы (1)–(7)), написанная на языке “Фортран”, составляла 490 строк и занимала объем около 12000 байт, при этом время расчета на компьютере с процессором, имеющем тактовую частоту 2.8 ГГц, составляло 10...14 мин. Подобная программа для расчета по системе в квадратичном приближении (см. [1] (45)–(46)) составляла 250 строк, занимала менее 6000 байт и имела время счета 7...9 с. Аналогичная экономия машинных ресурсов и времени наблюдалась при расчете развития колебаний во времени.

Таким образом, расчет с помощью квадратичного приближения привел к экономии машинных ресурсов в два раза и сокращению времени машинного счета на два порядка.

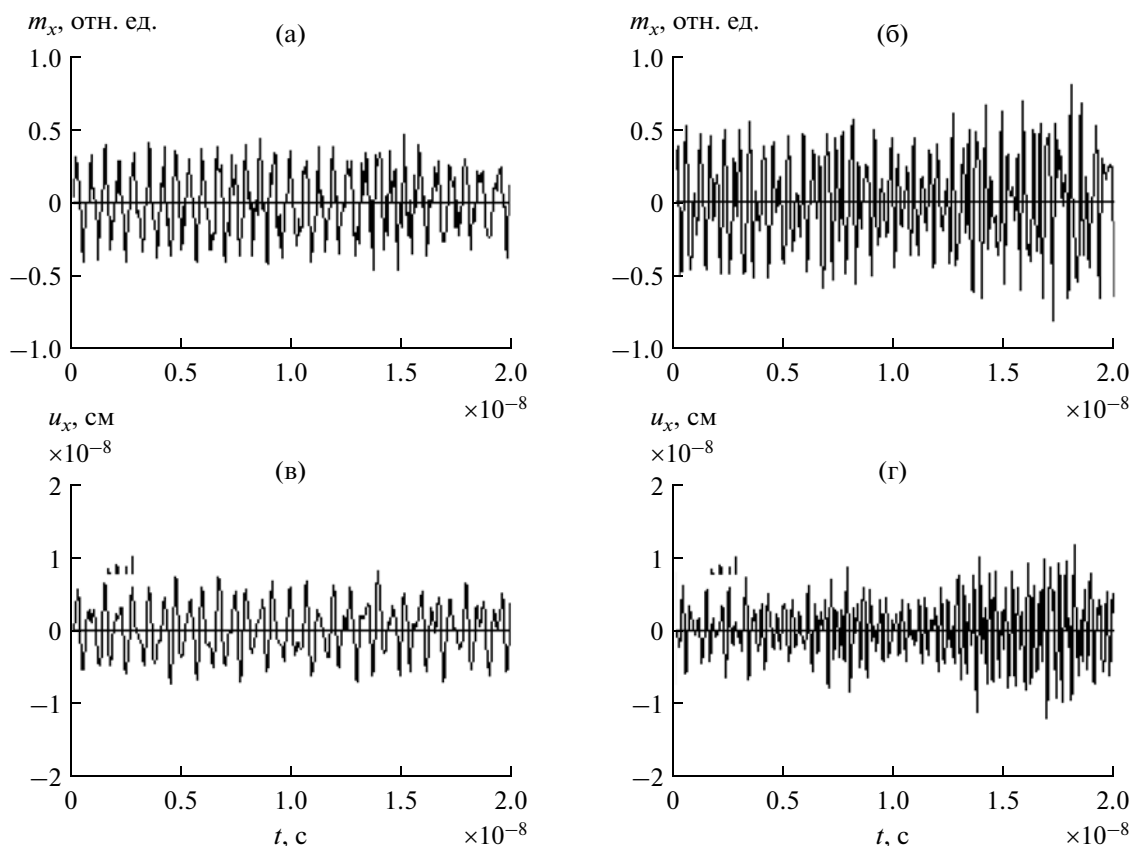


Рис. 9. Развитие колебаний компонент m_x и u_x во времени, полученное путем расчета по полной (а, в) и квадрированной (б, г) системам. Константа магнитоупругого взаимодействия $B_2 = 40 \times B_2$ (ЖИГ). Амплитуда переменного поля: $h_x = 300$ Э; $h_y = 0$ Э.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты данной работы сводятся к следующему.

В применении к задаче анализа работы магнитострикционного преобразователя СВЧ-диапазона на частоте ферромагнитного резонанса продолжено рассмотрение возбуждения гиперзвуковых колебаний переменным магнитным полем в геометрии плоскопараллельной нормально намагниченной ферритовой пластины.

На основе квадратичного приближения, полученного в первой части применительно к поставленной задаче, записана система связанных уравнений для модели двух осцилляторов, связанных как через переменные, так и через производные.

Рассмотрено развитие колебаний во времени. Показано, что в зависимости от величины параметров связи возможны два режима вынужденных колебаний, соответствующие спаду и нарастанию амплитуды во времени, разделенные третьим режимом (точкой бифуркации), в котором амплитуда вынужденных колебаний сохраняет постоянное значение, причем критичность порога перехода от одного режима к другому по константе связи составляет не менее шести значащих цифр.

Рассмотрено аналитическое решение полученной модельной системы в режиме постоянной амплитуды колебаний. Найдены два критерия, один из которых определяет критическое значение константы связи, соответствующее переходу между режимами, а другой дает частоту резонансных колебаний системы в точке перехода.

Результаты рассмотрения модельной системы применены к реальному случаю возбуждения пластины из ЖИГ. Выявлены условия перехода от режима убывания амплитуды к режиму ее нарастания. Отмечено, что в случае железоиттриевого граната амплитуда нарастающих колебаний ограничивается достаточно высоким постоянным уровнем, обусловленным нелинейной расстройкой магнитной колебательной системы.

Показано, что точка перехода между режимами, соответствующая бесконечному росту амплитуды колебаний модельной системы, для случая ЖИГ эквивалентна точке переориентации вектора намагниченности, причем тот и другой переходы происходят при одном и том же критическом значении константы магнитоупругого взаимодействия.

Отмечено, что модельная система связанных осцилляторов описывает как развитие во време-

ни, так и стационарное значение амплитуды установившихся колебаний реального материала во всем допустимом интервале изменения величины константы магнитоупругого взаимодействия с точностью не хуже 30%.

На основе модельной системы связанных осцилляторов выполнен анализ нелинейности кубического характера. Выявлена роль кубической нелинейности, как главного фактора в ограничении экспоненциального роста амплитуды вынужденных колебаний, предсказанного линеаризованной системой по прохождении критической точки бифуркации. Отмечено, что ограничение амплитуды сопровождается биениями, вызванными нелинейной расстройкой.

Рассмотрены АЧХ магнитных и упругих колебаний при различных уровнях возбуждения. На основе их анализа показано, что вблизи резонанса квадратичное приближение при амплитуде переменного поля до 0.14 от намагниченности описывает магнитные колебания с точностью 1% и упругие с точностью 10%, при амплитуде 0.71 от намагниченности – магнитные 2%, упругие 30%, при амплитуде 2.86 – магнитные 10% и упругие с точностью до двух раз, причем точность приближения при удалении от резонансной частоты возрастает.

Степень адекватности модельной и полной систем проверена на более сложном примере нелинейных колебаний – возбуждении самоподдерживающегося процесса автомодуляционного характера.

Для анализа выбраны автомодуляционные колебания, имеющие место при достаточно высокой амплитуде возбуждения (для ЖИГ – порядка 100 Э) в сочетании с повышенным значением константы магнитоупругого взаимодействия (на порядок выше, чем для ЖИГ). В ходе предварительного исследования были выявлены два режима возбуждаемых при этом колебаний. При первом режиме магнитные колебания носят близкий к шумовому характер, тогда как упругие остаются достаточно регулярными. При втором режиме как магнитные, так и упругие колебания являются хаотическими. Оба режима имеют пороговый характер, причем порог второго примерно в три раза выше, чем первого.

Расчет обоих типов автомодуляционных колебаний проводился как по модельной, так и по полной системам уравнений. Было показано, что модельная система, хотя и не совсем точно повторяет форму колебаний, однако полностью обеспечивает описание общего характера развития во времени и порога огибающей как регулярных, так и хаотических автомодуляционных колебаний, причем различие в амплитуде не превышает 20%.

Оценены прикладные возможности использования квадратичного приближения для решения задач о возбуждении гиперзвуковых колебаний с помощью магнитоупругого преобразователя СВЧ-диапазона, работающего в области ФМР. Показано, что расчет на основе модели связанных осцилляторов в квадратичном приближении приводит к эко-

номии машинных ресурсов в два раза и сокращению времени машинного счета на два порядка.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-02-01035-а, № 13-02-01401-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов В.С., Иванов А.П., Шафров В.Г., Щеглов В.И. // РЭ. 2015. Т. 60. № 1. С. 79.
2. Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона, Р. Терстона. Т. 1–7. М.: Мир, 1966–1974.
3. Comstock R.L., LeCraw R.C. // J. Appl. Phys. 1963. V. 34. № 10. P. 3022.
4. Temiryazev A.G., Tikhomirova M.P., Zilberman P.E. // J. Appl. Phys. 1994. V. 76. № 12. P. 5586.
5. Зильберман П.Е., Темирязов А.Г., Тихомирова М.П. // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. № 1. С. 281.
6. Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Темирязов А.Г., Тихомирова М.П. // РЭ. 1999. Т. 44. № 10. С. 1262.
7. Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Темирязов А.Г., Тихомирова М.П. // ФТТ. 2000. Т. 42. № 6. С. 1062.
8. Gerrits Th., Schneider M.L., Kos A.B., Silva T.J. // Phys. Rev. B. 2006. V. 73. № 9. P. 094454(7).
9. Suhl H. // J. Phys. Chem. Sol. 1957. V. 1. № 4. P. 209.
10. Моносов Я.А. // Нелинейный ферромагнитный резонанс. М.: Наука, 1971.
11. Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. // Успехи физ. наук. 1974. Т. 114. № 4. С. 609.
12. Власов В.С., Котов Л.Н., Шафров В.Г., Щеглов В.И. // РЭ. 2009. Т. 54. № 7. С. 863.
13. Власов В.С., Иванов А.П., Шафров В.Г., Щеглов В.И. // Электронный “Журнал радиоэлектроники”. 2013. № 11. С. 1–38. (<http://jre.cplire.ru/jre/nov13/3/text.html>, <http://jre.cplire.ru/jre/nov13/3/text.pdf>).
14. Власов В.С., Иванов А.П., Шафров В.Г., Щеглов В.И. // Электронный “Журнал радиоэлектроники”. 2014. № 1. С. 1–42. (<http://jre.cplire.ru/jre/jan14/11/text.html>, <http://jre.cplire.ru/jre/jan14/11/text.pdf>).
15. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. М.: Наука, 1978.
16. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Колебания, волны, структуры. М.: Физматлит, 2003.
17. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988.
18. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973.
19. Власов В.С., Котов Л.Н., Шафров В.Г., Щеглов В.И. // РЭ. 2010. Т. 55. № 6. С. 689.
20. Weiss M.T. // Phys. Rev. Lett. 1958. V. 1. № 7. P. 239.
21. Weiss M.T. // J. Appl. Phys. 1959. V. 30. Suppl. to № 4. P. 146S.
22. Карпачев С.Н., Власов В.С., Котов Л.Н. // Вестник МГУ. Сер. 3. 2006. № 6. С. 60.
23. Власов В.С. Исследование релаксационной и нелинейной динамики магнитных и магнитоупругих колебаний пленок и частиц. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2007.
24. Щеглов В.И., Шафров В.Г., Зубков В.И. и др. // Сборник трудов XII Межд. конф. “Магнетизм, дальнее и ближнее спин-спиновое взаимодействие”, Москва-Фирсановка, 2009. М.: МЭИ, 2009. С. 100.