

РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ  
В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И ПЛАЗМЕ

УДК 537.874;537.624

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ  
ДЛЯ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ ГИПЕРЗВУКА  
В ФЕРРИТОВОЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ ФЕРРОМАГНИТНОМ РЕЗОНАНСЕ.  
ЧАСТЬ 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

© 2015 г. В. С. Власов<sup>1</sup>, А. П. Иванов<sup>1</sup>, В. Г. Шавров<sup>2</sup>, В. И. Щеглов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Сыктывкарский государственный университет,

Российская Федерация, 167001 Сыктывкар, Октябрьский просп., 55

<sup>2</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,

Российская Федерация, 125009 Москва, ул. Моховая, 11, корп. 7

Поступила в редакцию 13.03.2014 г.

В применении к задаче анализа работы магнитоотрицательного преобразователя СВЧ диапазона рассмотрено возбуждение гиперзвуковых колебаний переменным магнитным полем в геометрии нормально намагниченной ферритовой пластины. Рассмотрено квадратичное приближение по намагниченности с учетом кругового характера прецессии, в результате чего полная система, содержащая семь уравнений первого порядка и четыре граничных условия, сведена к квадратурной системе четырех уравнений первого порядка без граничных условий, соответствующей модели двух связанных осцилляторов с кубической нелинейностью. Показано, что приближение, обеспечиваемое квадратурной системой на уровне 20%, сохраняет корректность вплоть до значений переменного поля, составляющих 0.4 от намагниченности насыщения, что соответствует углам прецессии вектора намагниченности до 40°.

DOI: 10.7868/S0033849415010118

ВВЕДЕНИЕ

Задача возбуждения ультразвуковых колебаний с помощью магнитоотрицательных преобразователей издавна привлекает внимание исследователей [1–8]. Наряду с традиционными областями применения (гидроакустикой, дефектоскопией, ультразвуковой техникой), особый интерес представляет использование таких преобразователей для целей акустоэлектроники в диапазоне СВЧ ( $f \sim 10^9 \dots 10^{11}$  Гц), где высокая механическая добротность ферритовых резонаторов (до  $10^7$  при использовании железиттриевого граната (ЖИГ)) позволяет создать высокоэффективные устройства обработки информации [9, 10]. Важнейшей задачей здесь является создание достаточно эффективного излучателя гиперзвука, определенным препятствием к чему может явиться нелинейное параметрическое возбуждение обменных спиновых волн, создающее значительные потери уже при уровне возбуждения порядка 1 мВт [11–13].

Однако в работах [14–18] было показано, что параметрический распад можно предотвратить путем выбора надлежащей геометрии преобразователя. Оптимальной геометрией является нормально намагниченная тонкая пластина, низшая частота ферромагнитного резонанса (ФМР) которой совпадает с “дном” спектра обменных спиновых волн.

Отсутствие параметрического распада в такой геометрии позволило в экспериментах достичь углов прецессии вектора намагниченности до 10...20 град и более [16–18], что открывает в задаче возбуждения мощного гиперзвука немалые перспективы.

Теоретически задача возбуждения гиперзвука с помощью магнитоакустического преобразователя на нормально намагниченном ферритовом диске в линейном режиме была рассмотрена в работах [9, 10, 19]. В работе [20] было показано, что нелинейный режим позволяет повысить уровень возбуждения гиперзвука почти на два порядка. Однако использованный там математический аппарат отличается громоздкостью и при численной реализации сопряжен с большими затратами машинного времени.

Такое положение в сочетании с потребностями практики ставит вопрос о создании более простого математического аппарата, позволяющего в адекватной степени решать те же задачи с точностью, достаточной для практического применения.

В работах [21, 22] такой аппарат для расчета возбуждения гиперзвука с помощью магнитоотрицательного преобразователя был создан на основе модели связанных осцилляторов в линейном [21] и квадратичном [22] приближении. Однако рассмотренные там примеры ограничены

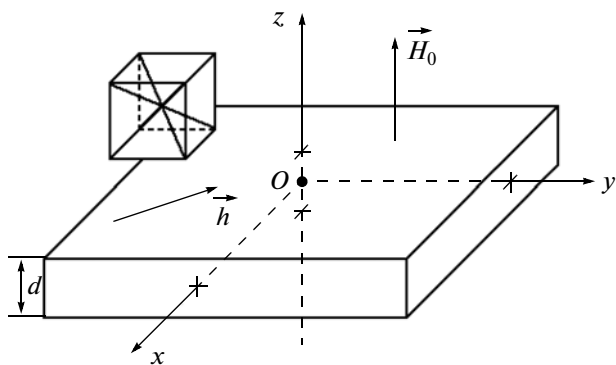


Рис. 1. Геометрия задачи. На вставке — схема кристаллографической ячейки.

довольно жесткими резонансными условиями и не отражают сильно нелинейный режим возбуждения, сопровождающийся явлениями автомодуляционного характера.

Данная работа посвящена дальнейшему развитию модели связанных осцилляторов на основе квадратичного приближения с целью расширения возможностей его использования в более широком частотном диапазоне при более высоком уровне нелинейности.

Работа состоит из двух частей. В представленной первой части приводится вывод и краткий анализ системы связанных уравнений в квадратичном приближении, включающей как частный случай линейное приближение. Во второй части развитый аппарат применяется к исследованию ряда нелинейных задач, касающихся возбуждения гиперзвука с помощью магнитоэлектрического преобразователя.

## 1. ГЕОМЕТРИЯ ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Геометрия задачи, совпадающая с принятой в [20–22], показана на рис. 1. В ее основе лежит плоскопараллельная пластина толщиной  $d$ , обладающая магнитными, упругими и магнитоупругими свойствами. Материал пластины имеет кубическую кристаллографическую симметрию, плоскость (100) которой совпадает с плоскостью пластины.

Внешнее постоянное магнитное поле  $\vec{H}_0$  приложено перпендикулярно плоскости пластины, переменное магнитное поле  $\vec{h}$  действует в плоскости пластины. Задача решается в декартовой системе координат  $Oxyz$ , плоскость  $Oxy$  которой совпадает с плоскостью пластины, а оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  параллельны ребрам куба кристаллографической ячейки. Центр системы координат  $O$  находится в центре пластины, так что ее плоскости соответствуют координатам  $z = \pm d/2$ .

Основная система уравнений движения для нормированных компонент намагниченности  $m_{x,y,z}$  имеет вид [20]

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2} \times \left[ (m_y + \alpha m_x m_z) H_z - (m_z - \alpha m_y m_x) H_y - \alpha (m_y^2 + m_z^2) H_x \right], \quad (1)$$

где  $\gamma$  — гиромангнитная постоянная,  $\alpha$  — параметр затухания Гильберта, уравнения для  $m_{y,z}$  получаются циклической перестановкой  $x, y, z$ .

Входящие в эти уравнения эффективные поля  $H_{x,y,z}$  имеют вид:

$$H_x = h_x + H_{ax}; \quad (2)$$

$$H_y = h_y + H_{ay}; \quad (3)$$

$$H_z = H_0 - 4\pi M_0 m_z + H_{az}, \quad (4)$$

где  $H_0$  — внешнее постоянное поле,  $h_{x,y}$  — компоненты внешнего переменного поля,  $M_0$  — намагниченность насыщения материала пластины, а выражения для компонент полей  $H_{ax,ay,az}$  аналогичны приведенным в работе [20]:

$$H_{ax} = -\frac{2K_0}{M_0} m_x - \frac{2K_1}{M_0} m_x (m_y^2 + m_z^2) - \frac{2K_2}{M_0} m_x m_y m_z - \frac{2B_1}{M_0} m_x \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{B_2}{M_0} \times \left[ m_y \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + m_z \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right], \quad (5)$$

причем  $H_{ay}$  и  $H_{az}$  получаются из (5) циклической перестановкой  $x, y, z$ . Здесь  $K_{0,1,2}$  — константы одноосной и кубической анизотропии,  $B_{1,2}$  — константы магнитоупругого взаимодействия,  $u_{x,y,z}$  — компоненты упругого смещения.

Уравнения для компонент упругого смещения  $u_{x,y}$  имеют вид [20]

$$\frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial t^2} = -2\beta \frac{\partial u_{x,y}}{\partial t} + \frac{c_{44}}{\rho} \frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial z^2}; \quad (6)$$

граничные условия:

$$c_{44} \frac{\partial u_{x,y}}{\partial z} \Big|_{z=\pm d/2} = -B_2 m_{z,y} m_z, \quad (7)$$

где  $\beta$  — параметр затухания,  $c_{44}$  — константа упругости,  $\rho$  — плотность материала пластины.

Таким образом, здесь имеются три уравнения первого порядка для компонент намагниченности и два уравнения второго порядка для компонент упругого смещения, что эквивалентно системе из семи уравнений первого порядка. Анализ развития колебаний в такой системе методом фазового пространства [23–25] требует нахождения координат особых точек, что сводится к решению линейного алгебраического уравнения седьмой степени. Сложность решения такой за-

дачи стимулирует поиск возможностей ее упрощения, некоторые из которых рассматриваются далее.

## 2. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И УКРОЧЕННЫЕ ЭФФЕКТИВНЫЕ ПОЛЯ

Аналогично [21, 22], примем следующие упрощающие предположения – анизотропия отсутствует:  $K_0 = 0, K_1 = 0, H_2 = 0$ ; продольные упругие волны отсутствуют:  $B_1 = 0$ ; упругие смещения вдоль оси  $Oy$  отсутствуют:  $u_y = 0$ ; упругие волны распространяются только вдоль оси  $Oz$ :  $\partial u_x / \partial x = 0, \partial u_x / \partial y = 0$ .

Для упрощения записи введем обозначение

$$H_p = H_0 - 4\pi M_0. \quad (8)$$

При этом эффективные поля (2)–(4) принимают вид

$$H_x = h_x - \frac{B_2}{M_0} m_z \frac{\partial u_x}{\partial z}; \quad (9)$$

$$H_y = h_y; \quad (10)$$

$$H_z = H_p + 4\pi M_0 - 4\pi M_0 m_z - \frac{B_2}{M_0} m_x \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (11)$$

## 3. КВАДРАТИЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Условие сохранения длины вектора намагниченности требует выполнения соотношения [26, 27]:

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1, \quad (12)$$

откуда, полагая  $m_{x,y} \ll 1$  и разлагая  $m_z$  в ряд Тейлора в окрестности единицы с точностью до второй степени по  $m_x$  и  $m_y$ , получаем

$$m_z = 1 - \frac{1}{2} m_x^2 - \frac{1}{2} m_y^2. \quad (13)$$

## 4. ЭФФЕКТИВНЫЕ ПОЛЯ В КВАДРАТИЧНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Подставляя (13) в (9)–(11) и оставляя члены не выше второй степени по намагниченности, получаем эффективные поля в виде

$$H_x = h_x + \left( -\frac{B_2}{M_0} + \frac{B_2}{2M_0} m_x^2 + \frac{B_2}{2M_0} m_y^2 \right) \frac{\partial u_x}{\partial z}; \quad (14)$$

$$H_y = h_y; \quad (15)$$

$$H_z = H_p + 2\pi M_0 m_x^2 + 2\pi M_0 m_y^2 - \frac{B_2}{M_0} m_x \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (16)$$

В эти выражения входит производная от упругого смещения по координате  $\partial u_x / \partial z$ . Согласно работе [20] (формула (62)), эта производная имеет вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{B_2}{c_{44}} m_x m_z + \frac{2}{d} v_x, \quad (17)$$

где  $v_x$  – функция, удовлетворяющая уравнению (формула (53) из [20]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{c_{44}\pi^2}{pd^2} v_x = \\ = \frac{4B_2 d}{c_{44}\pi^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} (m_x m_z) + 2\beta \frac{\partial}{\partial t} (m_x m_z) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Поскольку функция  $v_x$  представляет собой решение краевой задачи, редуцированное к случаю первой упругой моды [20], далее будем называть ее “редуцированной функцией упругого смещения” или просто “редуцированным упругим смещением”. При этом полная  $x$ -компонента упругого смещения имеет вид (формула (51) в [19])

$$u_x = -\frac{B_2}{c_{44}} m_x m_z z + v_x \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right), \quad (19)$$

на поверхностях пластины при  $z = \pm d/2$  равна

$$u_{xS} = \pm \left( -\frac{B_2 d}{2c_{44}} m_x m_z + v_x \right). \quad (20)$$

С учетом квадратичного приближения (13) производная (17) принимает вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{B_2}{c_{44}} m_x + \frac{B_2}{2c_{44}} m_x^3 + \frac{B_2}{2c_{44}} m_x m_y^2 + \frac{2}{d} v_x. \quad (21)$$

Вводя вспомогательные обозначения:

$$b_0 = 2\pi M_0; \quad (22)$$

$$b_1 = \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}}; \quad (23)$$

$$b_2 = \frac{B_2}{M_0 d} \quad (24)$$

и подставляя (21) в (14)–(16), получаем эффективные поля в виде:

$$H_x = h_x + b_1 m_x - b_1 m_x^3 - b_1 m_x m_y^2 - \quad (25)$$

$$- 2b_2 v_x + b_2 m_x^2 v_x + b_2 m_y^2 v_x;$$

$$H_y = h_y; \quad (26)$$

$$H_z = H_p + (b_0 + b_1) m_x^2 + b_0 m_y^2 - 2b_2 m_x v_x. \quad (27)$$

### 5. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НАМАГНИЧЕННОСТИ В КВАДРАТИЧНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Подставим (25)–(27) в (1), а также учтем, что при реальных параметрах материала (например ЖИГ):  $b_1 \ll H_p$ ,  $b_1 \ll b_2$ , причем  $b_2 \sim H_p$ . То есть везде при умножении  $b_1$  на  $m_{x,y}^3$  получаются величины четвертого порядка малости, которые отбрасываем. При этом, полагая затухание достаточно малым, т.е.  $a \ll 1$ , получаем:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\gamma[-h_y + H_p m_y + b_0 m_x^2 m_y + b_0 m_y^3 - 2b_2 m_x m_y v_x + \alpha(H_p - b_1)m_x + 2\alpha b_2 v_x]; \quad (28)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = \gamma[h_x + (H_p - b_1)m_x + b_0 m_x^3 + b_0 m_x m_y^2 + 2b_2 v_x - 4b_2 m_x^2 v_x - 2b_2 m_y^2 v_x - \alpha H_p m_y]. \quad (29)$$

Дифференцируя (28) по времени и подставляя  $\partial m_y / \partial t$  в соответствии с (29), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} + \alpha\gamma(H_p - b_1)\frac{\partial m_x}{\partial t} + \gamma^2 H_p(H_p - b_1)m_x + \\ + 2\gamma^2 H_p b_2 v_x + 2\alpha\gamma b_2 \frac{\partial v_x}{\partial t} + 2\gamma^2 H_p b_0 m_x^3 - \\ - 2\gamma^2(3H_p - b_0)b_2 m_x^2 v_x - 4\gamma^2 b_2 m_x v_x^2 - \\ - \alpha\gamma^2 H_p^2 m_y + 2\gamma b_0 m_x m_y \frac{\partial m_x}{\partial t} - 2\gamma b_2 m_y v_x \frac{\partial m_x}{\partial t} - \\ - 2\gamma^2(H_p - 3b_0)b_2 m_y^2 v_x = \gamma^2 H_p h_x. \end{aligned} \quad (30)$$

Это уравнение получено для компоненты намагниченности  $m_x$ , однако в некоторых слагаемых оно содержит компоненту  $m_y$ , которая не позволяет рассматривать это уравнение независимо от получаемого подобным путем уравнения для  $m_y$ . Чтобы уравнения для  $m_x$  и  $m_y$  стали независимыми, примем приближение круговой прецессии.

### 6. ПРИБЛИЖЕНИЕ КРУГОВОЙ ПРЕЦЕССИИ

Предположим, что прецессия намагниченности является круговой по правому кругу с частотой  $\omega$ , т.е. будем считать, что

$$m_x = \cos(\omega t); \quad (31)$$

$$m_y = \sin(\omega t), \quad (32)$$

т.е. выполняется соотношение

$$m_y = -\frac{1}{\omega} \frac{dm_x}{dt}. \quad (33)$$

В случае вынужденных колебаний частота прецессии  $\omega$  совпадает с частотой вынуждающей си-

лы, а в случае свободных колебаний при малой амплитуде в отсутствие магнитоупругости равна [26, 27]:

$$\omega = \gamma H_p. \quad (34)$$

### 7. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НАМАГНИЧЕННОСТИ В КВАДРАТИЧНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПРИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ

Рассмотрим вынужденные колебания намагниченности с частотой  $\omega$  под действием поля:

$$h_x = h_0 \cos(\omega t). \quad (35)$$

Подставляя (35) в (30) и приводя подобные члены, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} + \alpha\gamma\left(H_p - b_1 + \frac{\gamma H_p^2}{\omega}\right)\frac{\partial m_x}{\partial t} + \gamma^2 H_p(H_p - b_1)m_x + \\ + 2\gamma^2 H_p b_2 v_x + 2\alpha\gamma b_2 \frac{\partial v_x}{\partial t} + 2\gamma^2 H_p b_0 m_x^3 - \\ - 2\gamma^2(3H_p - b_0)b_2 m_x^2 v_x - 4\gamma^2 b_2 m_x v_x^2 + \\ + \frac{2\gamma^2 b_0}{\omega^2}(2\gamma H_p - \omega)m_x\left(\frac{\partial m_x}{\partial t}\right)^2 + \\ + \left(\frac{2\gamma b_2}{\omega}m_x\right)\left(\frac{\partial m_x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}\right) - \frac{2\gamma^2 b_0}{\omega^2}\left[\gamma(H_p - 3b_0) - \omega\right] \times \\ \times \left(\frac{\partial m_x}{\partial t}\right)^2 v_x = \gamma^2 H_p h_0 \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (36)$$

Это – уравнение второго порядка для компоненты намагниченности  $m_x$ , “отвязанное” от подобного уравнения для  $m_y$  (тождественного (36) с точностью до замены индексов  $x, y$ ).

### 8. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ УПРУГОГО СМЕЩЕНИЯ В КВАДРАТИЧНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассмотрим теперь уравнение (18) для редуцированного упругого смещения  $v_x$ . Подробное раскрытие производных по формулам (28)–(29) приводит к крайне громоздким выражениям. Однако контрольный численный расчет по полным уравнениям (1)–(7), выполненный аналогично [20], показывает, что правая часть уравнения (18) меньше левой более чем на порядок, поэтому вместо (13) можно положить  $m_z = 1$ . При этом уравнение (18) с использованием следующих вспомогательных обозначений:

$$c_1 = \frac{c_{44}\pi^2}{\rho d^2}; \quad (37)$$

$$c_2 = \frac{4B_2 d}{c_{44}\pi^2}, \quad (38)$$

принимает вид

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial v_x}{\partial t} + c_1 v_x - 2\beta c_2 \frac{\partial m_x}{\partial t} - c_2 \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} = 0. \quad (39)$$

Подставляя в уравнение (39) вторую производную от намагниченности в соответствии с (36) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + 2(\beta + \alpha\gamma b_2 c_2) \frac{\partial v_x}{\partial t} + (c_1 + 2\gamma^2 H_p b_2 c_2) v_x + \\ & + \gamma^2 H_p (H_p - b_1) c_2 m_x + \left[ \alpha\gamma \left( H_p - b_1 + \frac{\gamma H_p}{\omega} \right) - 2\beta \right] \times \\ & \times c_2 \frac{\partial m_x}{\partial t} + 2\gamma^2 H_p b_0 c_2 m_x^3 - 2\gamma^2 (3H_p - b_0) b_2 c_2 m_x^2 v_x - \\ & - 4\gamma^2 b_2^2 c_2 m_x v_x^2 + \frac{2\gamma b_0 c_2}{\omega^2} (2\gamma H_p - \omega) m_x \left( \frac{\partial m_x}{\partial t} \right)^2 + \\ & + \frac{2\gamma b_2 c_2}{\omega} m_x \left( \frac{\partial m_x}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} \right) - \frac{2\gamma b_2 c_2}{\omega^2} \left[ \gamma (H_p - 3b_0) - \omega \right] \times \\ & \times \left( \frac{\partial m_x}{\partial t} \right)^2 v_x = \gamma^2 H_p c_2 h_0 \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (40)$$

Уравнения (36) и (40) составляют искомую систему уравнений для намагниченности и редуцированного упругого смещения в квадратичном приближении. При этом полные упругие смещения на поверхностях пластины определяются формулой (20).

### 9. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Приведем для сравнения ту же систему в линейном приближении:

уравнение для намагниченности –

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} + \alpha\gamma (2H_p - b_1) \frac{\partial m_x}{\partial t} + \gamma^2 H_p (H_p - b_1) m_x + \\ & + 2\gamma^2 H_p b_2 v_x + 2\alpha\gamma b_2 \frac{\partial v_x}{\partial t} = \gamma^2 H_p h_0 \cos(\omega t); \end{aligned} \quad (41)$$

уравнение для редуцированного упругого смещения –

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + 2(\beta + \alpha\gamma b_2 c_2) \frac{\partial v_x}{\partial t} + (c_1 + 2\gamma^2 H_p b_2 c_2) v_x + \\ & + \gamma^2 H_p (H_p - b_1) c_2 m_x + \\ & \times [\alpha\gamma (2H_p - b_1) - 2\beta] c_2 \frac{\partial m_x}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Как видим, такая система с точностью до обозначений совпадает с полученной в работе [21] (формулы (19) и (24)).

*Замечание.* Для удобства дальнейшего изложения будем называть систему (41)–(42) – “линеаризованной”, а систему (36), (40) – “квадрированной”.

### 10. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ НЕБОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЕ

В случае свободных колебаний при небольшой амплитуде (т.е. в пренебрежении эффектом нелинейной расстройки) для частоты можно воспользоваться выражением (34), подставляя которое в (36) и (40), получаем:

уравнение для намагниченности –

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} + \alpha\gamma (2H_p - b_1) \frac{\partial m_x}{\partial t} + \gamma^2 H_p (H_p - b_1) m_x + \\ & + 2\gamma^2 H_p b_2 v_x + 2\alpha\gamma b_2 \frac{\partial v_x}{\partial t} + 2\gamma^2 H_p b_0 m_x^3 - \\ & - 2\gamma^2 (3H_p - b_0) b_2 m_x^2 v_x - 4\gamma^2 b_2^2 m_x v_x^2 + \\ & + \frac{2b_0}{H_p} m_x \left( \frac{\partial m_x}{\partial t} \right)^2 + \frac{2b_2}{H_p} m_x \left( \frac{\partial m_x}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} \right) + \\ & + \frac{6b_0 b_2}{H_p^2} v_x \left( \frac{\partial m_x}{\partial t} \right)^2 = 0; \end{aligned} \quad (43)$$

уравнение для упругого смещения –

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + 2(\beta + \alpha\gamma b_2 c_2) \frac{\partial v_x}{\partial t} + (c_1 + 2\gamma^2 H_p b_2 c_2) v_x + \\ & + \gamma^2 H_p (H_p - b_1) c_2 m_x + [\alpha\gamma (H_p - b_1) - 2\beta] \times \\ & \times c_2 \frac{\partial m_x}{\partial t} + 2\gamma^2 H_p b_0 c_2 m_x^3 - 2\gamma^2 (3H_p - b_0) b_2 c_2 m_x^2 v_x - \\ & - 4\gamma^2 b_2^2 c_2 m_x v_x^2 + \frac{2b_0 c_2}{H_p} m_x \left( \frac{\partial m_x}{\partial t} \right)^2 + \\ & + \frac{2b_2 c_2}{H_p} m_x \left( \frac{\partial m_x}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} \right) + \frac{6b_0 b_2 c_2}{H_p^2} \left( \frac{\partial m_x}{\partial t} \right)^2 v_x = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Приведенные к такому виду уравнения (43), (44) с точностью до обозначений совпадают с полученными в работе [22].

### 11. ПОЛНЫЙ ОБОБЩЕННЫЙ ВИД СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ В КВАДРАТИЧНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Полученная квадрированная система (36), (40) представляет собой частный случай более общей симметричной системы двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с

двумя переменными  $x_1$  и  $x_2$ , соответствующей нелинейным вынужденным колебаниям системы из двух связанных осцилляторов с двумя степенями свободы:

$$\begin{aligned} & p_{11} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + p_{12} \frac{\partial x_1}{\partial t} + p_{13} x_1 + q_{11} x_2 + q_{12} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \\ & + r_{11} x_1^3 + r_{12} x_1^2 x_2 + r_{13} x_1 x_2^2 + r_{14} x_2^3 + \\ & + s_{11} x_1 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 + s_{12} x_1 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right) + s_{13} x_1 \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right)^2 + \\ & + s_{14} x_2 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 + s_{15} x_2 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right) + s_{16} x_2 \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right)^2 = \\ & = A_{11} \cos(\omega t) + A_{12} \sin(\omega t); \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} & p_{21} \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + p_{22} \frac{\partial x_2}{\partial t} + p_{23} x_2 + q_{21} x_1 + q_{22} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \\ & + r_{21} x_2^3 + r_{22} x_2^2 x_1 + r_{23} x_2 x_1^2 + r_{24} x_1^3 + \\ & + s_{21} x_2 \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right)^2 + s_{22} x_2 \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) + s_{23} x_2 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 + \\ & + s_{24} x_1 \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right)^2 + s_{25} x_1 \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) + s_{26} x_1 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 = \\ & = A_{21} \cos(\omega t) + A_{22} \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (46)$$

Эти уравнения переходят одно в другое при замене индексов переменных и первых индексов коэффициентов "1" на "2" и обратно. Еще более полный вид подобной связанной системы должен включать в себя слагаемые, состоящие из произведений трех производных. Однако в решаемой здесь реальной задаче о вынужденных магнитоупругих колебаниях в ферритовой пластине такие слагаемые отсутствуют, поэтому на данном этапе не рассматриваются.

Линеаризованная система (41)–(42) является частным случаем этой системы.

Приведем значения коэффициентов системы (45)–(46), выраженные через параметры материала, геометрию магнитной пластины и значения приложенного поля:

$$p_{11} = 1; \quad (47)$$

$$p_{12} = \alpha \gamma \left( H_p - b_1 + \frac{\gamma H_p^2}{\omega} \right); \quad (48)$$

$$p_{13} = \gamma^2 H_p (H_p - b_1); \quad (49)$$

$$q_{11} = 2\gamma^2 H_p b_2; \quad (50)$$

$$q_{12} = 2\alpha \gamma b_2; \quad (51)$$

$$r_{11} = 2\gamma^2 H_p b_0; \quad (52)$$

$$r_{12} = -2\gamma^2 (3H_p - b_0) b_2; \quad (53)$$

$$r_{13} = -4\gamma^2 b_2^2; \quad (54)$$

$$r_{14} = 0; \quad (55)$$

$$s_{11} = \frac{2\gamma b_0}{\omega^2} (2\gamma H_p - \omega); \quad (56)$$

$$s_{12} = \frac{2\gamma b_2}{\omega}; \quad (57)$$

$$s_{13} = 0; \quad (58)$$

$$s_{14} = -\frac{2\gamma b_2}{\omega^2} [\gamma (H_p - 3b_0) - \omega]; \quad (59)$$

$$s_{15} = 0; \quad (60)$$

$$s_{16} = 0; \quad (61)$$

$$A_{11} = \gamma^2 H_p h_0; \quad (62)$$

$$A_{12} = 0; \quad (63)$$

$$p_{21} = 1; \quad (64)$$

$$p_{22} = 2(\beta + \alpha \gamma b_2 c_2); \quad (65)$$

$$p_{23} = c_1 + 2\gamma^2 H_p b_2 c_2; \quad (66)$$

$$q_{21} = \gamma^2 H_p (H_p - b_1) c_2; \quad (67)$$

$$q_{22} = \left[ \alpha \gamma \left( H_p - b_1 + \frac{\gamma H_p}{\omega} \right) - 2\beta \right] c_2; \quad (68)$$

$$r_{21} = 0; \quad (69)$$

$$r_{22} = -4\gamma^2 b_2^2 c_2; \quad (70)$$

$$r_{23} = -2\gamma^2 (3H_p - b_0) b_2 c_2; \quad (71)$$

$$r_{24} = 2\gamma^2 H_p b_0 c_2; \quad (72)$$

$$s_{21} = 0; \quad (73)$$

$$s_{22} = 0; \quad (74)$$

$$s_{23} = -\frac{2\gamma b_2 c_2}{\omega^2} [\gamma (H_p - 3b_0) - \omega]; \quad (75)$$

$$s_{24} = 0; \quad (76)$$

$$s_{25} = \frac{2\gamma b_2 c_2}{\omega}; \quad (77)$$

$$s_{26} = \frac{2\gamma b_0 c_2}{\omega^2} (2\gamma H_p - \omega); \quad (78)$$

$$A_{21} = \gamma^2 H_p c_2 h_0; \quad (79)$$

$$A_{22} = 0. \quad (80)$$

В этих выражениях используются следующие вспомогательные обозначения:

$$H_p = H_0 - 4\pi M_0; \quad (81)$$

$$b_0 = 2\pi M_0; \quad (82)$$

$$b_1 = \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}}; \quad (83)$$

$$b_2 = \frac{B_2}{M_0 d}; \quad (84)$$

$$c_1 = \frac{c_{44} \pi^2}{\rho d^2}; \quad (85)$$

$$c_2 = \frac{4B_2 d}{c_{44} \pi^2}. \quad (86)$$

## 12. АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Рассмотрим структуру системы (45)–(46) более подробно. Уравнения (45) и (46) содержат довольно много слагаемых. Для того чтобы выявить их роль в формировании колебаний намагниченности и упругого смещения, оценим относительную величину отдельных слагаемых для типичной ситуации возбуждения гиперзвуковых колебаний. Пусть параметры материала соответствуют (ЖИГ) [9, 26, 27]:  $4\pi M_0 = 1750$  Гс;  $B_2 = 6.96 \times 10^6$  эрг см<sup>-3</sup>;  $c_{44} = 7.64 \times 10^{11}$  эрг см<sup>-3</sup>;  $\rho = 5.17$  г см<sup>-3</sup>, параметры затухания:  $\alpha = 0.02$ ;  $\beta = 10^9$  с<sup>-1</sup>, толщина пленки:  $d = 6.865 \times 10^{-5}$  см, поле  $H_0 = 2750$  Э, частота  $f = 2800$  МГц (т.е.  $\omega = 1.7592 \times 10^{10}$  с<sup>-1</sup>). Выбранные значения частоты и поля соответствуют возбуждению ферромагнитного и упругого резонансов. Вспомогательные параметры (81)–(86) принимают значения:  $H_p = 1000$  Э;  $b_0 = 875$  Гс;  $b_1 = 0.4553$  Э;  $b_2 = 7.2802 \times 10^8$  Э см<sup>-1</sup>;  $c_1 = 3.0947 \times 10^{20}$  с<sup>-1</sup>;  $c_2 = 2.5346 \times 10^{-10}$  см.

Структура слагаемых уравнений (45)–(46) представляет собой произведения коэффициентов  $a_{ik}$ ,  $b_{ik}$ ,  $c_{ik}$  на переменные  $m$ ,  $v$  в той или иной степени, умноженные на частоту  $\omega$  в первой или второй степени, получающуюся за счет производных (при временном множителе типа  $\exp(i\omega t)$ ).

Полученные таким образом абсолютные величины слагаемых уравнений (45)–(46) представлены в табл. 1 при различных значениях возбуждающего поля (знаки и наименования размерности в системе СГС (Гаусса) опущены для простоты записи).

Амплитуды переменных, полученные из разверток по времени при решении полной задачи (1)–(7), составляют:

при поле  $h_0 = 0.01$  Э:  $m = 2 \times 10^{-4}$ ,  $v = 5 \times 10^{-13}$  см;

при поле  $h_0 = 400$  Э:  $m = 6 \times 10^{-1}$ ,  $v = 1 \times 10^{-9}$  см.

Такие значения полей выбраны, исходя из следующего.

Поле  $h_0 = 0.01$  Э соответствует чисто линейному режиму, что дает опорную точку, отталкиваясь от которой можно выявить роль нелинейности наиболее отчетливо.

Поле  $h_0 = 400$  Э соответствует сильно нелинейному режиму, когда квадратичное приближение дает ошибку по намагниченности порядка 5% и по упругому смещению – около двух раз [22].

Из данных табл. 1 видно следующее. В линейном режиме ( $h_0 = 400$  Э) вклад от слагаемых с коэффициентами  $r_{ik}$  и  $s_{ik}$  меньше основных слагаемых с коэффициентами  $p_{ik}$  и  $q_{ik}$  более чем на семь порядков, т.е. ими с весьма высокой точностью можно пренебречь. Связь обеспечивается слагаемыми, пропорциональными первой степени переменных, т.е.  $q_{11}$  и  $q_{21}$ , тогда как слагаемые, пропорциональные производным от переменных, с коэффициентами  $q_{12}$  и  $q_{22}$  вносят вклад на один три порядка меньший, чем вклад от параметров затухания  $p_{12}$  и  $p_{22}$ .

В сильно нелинейном режиме при  $h_0 = 400$  Э значительно возрастает роль нелинейных слагаемых с коэффициентами  $r_{11}$  и  $r_{24}$ , что отражает роль нелинейности магнитного осциллятора, обусловленную нелинейностью прецессии намагниченности. Роль связи, обеспечиваемой линейными слагаемыми с коэффициентами  $q_{ik}$ , несколько возрастает, становясь больше примерно на порядок. Сильно проявляют себя нелинейные слагаемые с производными, особенно с коэффициентом  $s_{11}$  для магнитного осциллятора и  $s_{26}$  для упругого, причем в обоих случаях эта нелинейность обеспечивается за счет нелинейности магнитного осциллятора. Заметно увеличивается нелинейная связь через производные за счет слагаемых с коэффициентами  $s_{12}$  и  $s_{14}$  для магнитного осциллятора и  $s_{23}$  и  $s_{25}$  для упругого, причем в обоих случаях нелинейность обеспечивается за счет квадрата амплитуды магнитного осциллятора.

Таким образом, в сильно нелинейном режиме возрастает роль слагаемых с производными, причем нелинейность обеспечивается за счет магнитного осциллятора. В уравнениях в первую очередь надо учитывать те слагаемые, которые пропорциональны квадрату и кубу амплитуды колебаний намагниченности.

**Таблица 1.** Слагаемые системы (45)–(46) при  $B_2 = 6.96 \times 10^6$  эрг см<sup>-3</sup>

Первый осциллятор			Второй осциллятор		
слагаемые	$h_0 = 0.01$	$h_0 = 400$	слагаемые	$h_0 = 0.01$	$h_0 = 400$
$p_{11}\omega^2 x_1$	$6.19 \times 10^{16}$	$1.86 \times 10^{20}$	$p_{21}\omega^2 x_2$	$1.55 \times 10^8$	$3.09 \times 10^{11}$
$p_{12}\omega x_1$	$2.49 \times 10^{15}$	$7.46 \times 10^{18}$	$p_{22}\omega x_2$	$1.76 \times 10^7$	$3.52 \times 10^{10}$
$p_{13}x_1$	$6.23 \times 10^{16}$	$1.87 \times 10^{20}$	$p_{23}x_2$	$1.55 \times 10^8$	$3.09 \times 10^{11}$
$q_{11}x_2$	$2.27 \times 10^{14}$	$4.54 \times 10^{17}$	$q_{21}x_1$	$1.58 \times 10^7$	$4.73 \times 10^{10}$
$q_{12}\omega x_2$	$4.52 \times 10^{12}$	$9.04 \times 10^{15}$	$q_{22}\omega x_1$	$1.47 \times 10^6$	$4.40 \times 10^9$
$r_{11}x_1^3$	$4.36 \times 10^9$	$1.18 \times 10^{20}$	$r_{21}x_2^3$	0.00	0.00
$r_{12}x_1^2 x_2$	$1.93 \times 10^7$	$3.47 \times 10^{17}$	$r_{22}x_2^2 x_1$	$8.37 \times 10^{-6}$	$1.00 \times 10^5$
$r_{13}x_1 x_2^2$	$3.30 \times 10^4$	$3.96 \times 10^{14}$	$r_{23}x_2 x_1^2$	$4.90 \times 10^{-3}$	$8.80 \times 10^7$
$r_{14}x_2^3$	0.00	0.00	$r_{24}x_1^3$	$1.10 \times 10^0$	$2.98 \times 10^{10}$
$s_{11}\omega^2 x_1^3$	$4.38 \times 10^9$	$1.18 \times 10^{20}$	$s_{21}\omega^2 x_2^3$	0.00	0.00
$s_{12}\omega^2 x_1^2 x_2$	$9.04 \times 10^6$	$1.63 \times 10^{17}$	$s_{22}\omega^2 x_2^2 x_1$	0.00	0.00
$s_{13}\omega^2 x_1 x_2^2$	0.00	0.00	$s_{23}\omega^2 x_2 x_1^2$	$6.00 \times 10^{-3}$	$1.08 \times 10^8$
$s_{14}\omega^2 x_1^2 x_2$	$2.28 \times 10^7$	$4.28 \times 10^{17}$	$s_{24}\omega^2 x_2^2 x_1$	0.00	0.00
$s_{15}\omega^2 x_1 x_2^2$	0.00	0.00	$s_{25}\omega^2 x_2 x_1^2$	$2.30 \times 10^{-3}$	$4.12 \times 10^7$
$s_{16}\omega^2 x_2^3$	0.00	0.00	$s_{26}\omega^2 x_1^3$	$1.11 \times 10^0$	$3.00 \times 10^{10}$
$A_{11}$	$3.11 \times 10^{15}$	$1.25 \times 10^{20}$	$A_{21}$	$7.90 \times 10^5$	$3.16 \times 10^{10}$
$A_{12}$	0.00	0.00	$A_{22}$	0.00	0.00

Для более эффективного возбуждения гиперзвуковых колебаний величина константы магнитоупругого взаимодействия  $B_2$  должна быть достаточно большой. Так, например, в тербиевом феррит-гранате эта константа превышает такую для ЖИГ примерно в пять раз [9]. При этом, как показано в работе [28], возможны дополнительные нелинейные эффекты, такие как заметное изменение поля ориентационного перехода намагниченности и спонтанная переориентация вектора намагниченности при значении константы  $B_2$  выше критического.

В связи с этим представляет интерес выяснить, как ведут себя слагаемые системы (45)–(46) при повышенном значении этой константы. Полученные результаты при  $B_2 = 20 \times B_2$  (ЖИГ) представлены в табл. 2. При построении табл. 2 использовались те же параметры, что и для табл. 1, кроме констан-

ты  $B_2$ . Вспомогательные параметры (81)–(86) при этом имеют следующие значения:  $H_p = 1000$  Э;  $b_0 = 875$  Гс;  $b_1 = 182.12$  Э;  $b_2 = 1.4560 \times 10^{10}$  Э см<sup>-1</sup>;  $c_1 = 3.0947 \times 10^{20}$  с<sup>-1</sup>;  $c_2 = 5.0692 \times 10^{-9}$  см.

Из сравнения данных, представленных в табл. 2 и табл. 1, видно, что при большом значении константы  $B_2$  даже в линейном режиме ( $h_0 = 0.01$  Э) значительно возрастает роль линейных слагаемых связи, определяемых коэффициентами  $q_{ik}$ , т.е. они становятся того же порядка, что и основные слагаемые, определяемые коэффициентами  $p_{ik}$  (особенно это заметно для  $q_{11}$ , где эти слагаемые даже слегка превышают основные).

В нелинейном режиме значительно возрастает роль слагаемых с производными, причем в случае магнитного осциллятора это происходит для всех таких слагаемых с коэффициентами  $r_{ik}$  и  $s_{ik}$ . Вели-



**Таблица 2.** Слагаемые системы (45)–(46) при  $B_2 = 20 B_2$  (ЖИГ)

Первый осциллятор			Второй осциллятор		
слагаемые	$h_0 = 0.01$	$h_0 = 400$	слагаемые	$h_0 = 0.01$	$h_0 = 400$
$p_{11}\omega^2 x_1$	$9.28 \times 10^{14}$	$4.64 \times 10^{19}$	$p_{21}\omega^2 x_2$	$4.02 \times 10^7$	$1.86 \times 10^{12}$
$p_{12}\omega x_1$	$3.39 \times 10^{13}$	$1.70 \times 10^{18}$	$p_{22}\omega x_2$	$4.69 \times 10^6$	$2.17 \times 10^{11}$
$p_{13}x_1$	$7.65 \times 10^{14}$	$3.82 \times 10^{19}$	$p_{23}x_2$	$4.62 \times 10^7$	$2.13 \times 10^{12}$
$q_{11}x_2$	$1.18 \times 10^{15}$	$5.44 \times 10^{19}$	$q_{21}x_1$	$3.88 \times 10^6$	$1.94 \times 10^{11}$
$q_{12}\omega x_2$	$2.35 \times 10^{13}$	$1.08 \times 10^{18}$	$q_{22}\omega x_1$	$4.58 \times 10^5$	$2.29 \times 10^{10}$
$r_{11}x_1^3$	$1.47 \times 10^4$	$1.84 \times 10^{18}$	$r_{21}x_2^3$	0.00	0.00
$r_{12}x_1^2 x_2$	$2.26 \times 10^4$	$2.60 \times 10^{18}$	$r_{22}x_2^2 x_1$	$6.79 \times 10^{-5}$	$7.23 \times 10^9$
$r_{13}x_1 x_2^2$	$1.34 \times 10^4$	$1.43 \times 10^{18}$	$r_{23}x_2 x_1^2$	$1.14 \times 10^{-4}$	$1.32 \times 10^{10}$
$r_{14}x_2^3$	0.00	0.00	$r_{24}x_1^3$	$7.46 \times 10^{-5}$	$9.33 \times 10^9$
$s_{11}\omega^2 x_1^3$	$1.48 \times 10^4$	$1.85 \times 10^{18}$	$s_{21}\omega^2 x_2^3$	0.00	0.00
$s_{12}\omega^2 x_1^2 x_2$	$1.06 \times 10^4$	$1.22 \times 10^{18}$	$s_{22}\omega^2 x_2^2 x_1$	0.00	0.00
$s_{13}\omega^2 x_1 x_2^2$	0.00	0.00	$s_{23}\omega^2 x_2 x_1^2$	$1.41 \times 10^{-4}$	$1.63 \times 10^{10}$
$s_{14}\omega^2 x_1^2 x_2$	$2.78 \times 10^4$	$3.21 \times 10^{18}$	$s_{24}\omega^2 x_2^2 x_1$	0.00	0.00
$s_{15}\omega^2 x_1 x_2^2$	0.00	0.00	$s_{25}\omega^2 x_2 x_1^2$	$5.36 \times 10^{-5}$	$1.19 \times 10^9$
$s_{16}\omega^2 x_2^3$	0.00	0.00	$s_{26}\omega^2 x_1^3$	$7.49 \times 10^{-5}$	$9.36 \times 10^9$
$A_{11}$	$3.11 \times 10^{15}$	$1.25 \times 10^{20}$	$A_{21}$	$1.58 \times 10^7$	$6.32 \times 10^{11}$
$A_{12}$	0.00	0.00	$A_{22}$	0.00	0.00

чина этих слагаемых всего на порядок не достигает величины основных слагаемых с коэффициентами  $p_{ik}$  и  $q_{ik}$ , а слагаемое, ответственное за затухание с коэффициентом  $p_{12}$  — даже несколько превышает. В случае упругого осциллятора главную роль здесь играют слагаемые с коэффициентами  $r_{23}$  и  $s_{23}$ , опять же пропорциональные квадрату амплитуды магнитных колебаний.

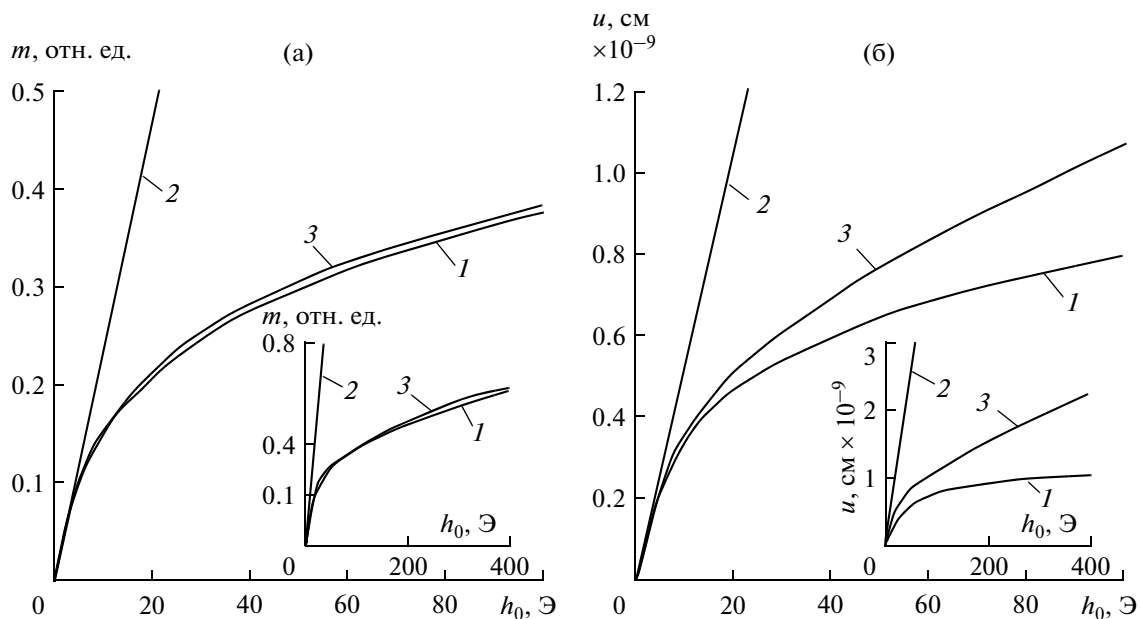
Таким образом, в случае большой константы магнитоупругого взаимодействия даже в линейном режиме велика роль слагаемых связи, в нелинейном режиме еще более возрастающая. В сильно нелинейном режиме для магнитного осциллятора велика роль всех слагаемых с производными, а для упругого — тех слагаемых, которые пропорциональны квадрату амплитуды колебаний на магнитичности.

### 13. УКРОЧЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРИ СОХРАНЕНИИ ГЛАВНЫХ ЧЛЕНОВ

На основе данных табл. 1 и 2 связанные уравнения (45)–(46) можно несколько упростить, сохраняя в них только наибольшие по величине слагаемые. При этом такие укороченные уравнения для случаев малой и большой величин константы  $B_2$  различаются, поэтому запишем их отдельно.

Для малой величины константы  $B_2$  получаем уравнение для первого осциллятора

$$\begin{aligned}
 p_{11} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + p_{12} \frac{\partial x_1}{\partial t} + p_{13} x_1 + q_{11} x_2 + r_{11} x_1^3 + \\
 + s_{11} x_1 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 = A_{11} \cos(\omega t);
 \end{aligned}
 \tag{87}$$



**Рис. 2.** Зависимости поперечной компоненты намагниченности (а) и упругого смещения (б) от амплитуды переменного поля. 1 – решение полной нелинейной системы (1)–(7); 2 – решение линеаризованной системы (41)–(42); 3 – решение квадратурной системы (45)–(46). На вставках – те же кривые в интервале переменного поля до 400 Э. Параметры материала соответствуют ЖИГ ( $4\pi M_0 = 1750$  Гс;  $B_2 = 6.96 \times 10^6$  эрг см $^{-3}$ ;  $c_{44} = 7.64 \times 10^{11}$  эрг см $^{-3}$ ;  $\rho = 5.17$  г см $^{-3}$ ;  $\alpha = 0.02$ ;  $\beta = 10^9$  с $^{-1}$ ); а также  $d = 6.865 \times 10^{-5}$  см;  $H_0 = 2750$  Э; частота возбуждения: 2.8 ГГц.

и уравнение для второго осциллятора:

$$p_{21} \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + p_{22} \frac{\partial x_2}{\partial t} + p_{23} x_2 + q_{21} x_1 + q_{22} \frac{\partial x_1}{\partial t} + r_{24} x_1^3 + s_{26} x_1 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 = A_{21} \cos(\omega t). \quad (88)$$

Для большой величины константы  $B_2$  получаем уравнение для первого осциллятора

$$p_{11} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + p_{12} \frac{\partial x_1}{\partial t} + p_{13} x_1 + q_{11} x_2 + q_{12} \frac{\partial x_2}{\partial t} + r_{11} x_1^3 + r_{12} x_1^2 x_2 + r_{13} x_1 x_2^2 + s_{11} x_1 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 + s_{12} x_1 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right) + s_{14} x_2 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 = A_{11} \cos(\omega t) \quad (89)$$

и уравнение для второго осциллятора:

$$p_{21} \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + p_{22} \frac{\partial x_2}{\partial t} + p_{23} x_2 + q_{21} x_1 + q_{22} \frac{\partial x_1}{\partial t} + r_{23} x_2 x_1^2 + s_{23} x_2 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 = A_{21} \cos(\omega t). \quad (90)$$

Отметим, что в обоих случаях система уравнений получается не полностью симметричной, что обусловлено различной природой колебательных систем, магнитной и упругой, исследуемых в данной работе. Однако можно видеть, что из линей-

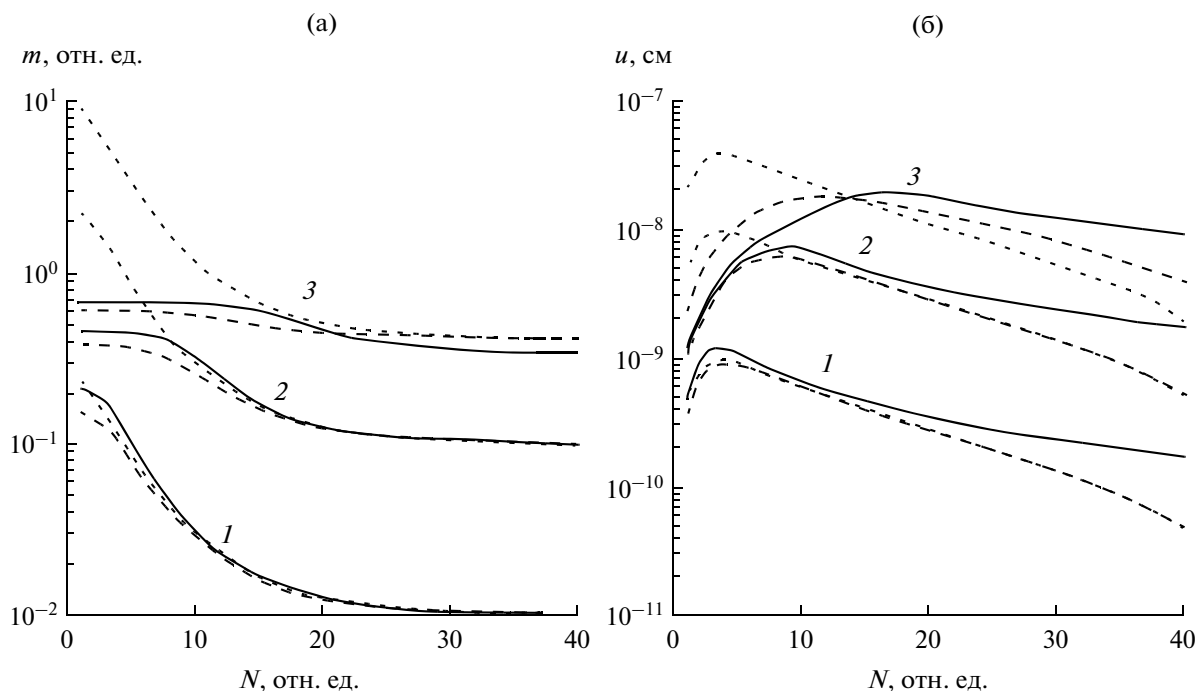
ных членов, как правило, присутствуют слагаемые связи через переменные и производные от переменных, а из нелинейных – слагаемые, содержащие третью степень переменных и произведение первой степени переменной на квадрат производной, т.е. в обоих случаях нелинейность имеет кубический характер.

#### 14. ПРОВЕРКА КОРРЕКТНОСТИ КВАДРАТИЧНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Рассмотрим степень приближения результатов обеспечиваемых квадратурной системой (45)–(46), и результатов, обеспечиваемых исходной нелинейной системой (1)–(7). Приведем также приближение, обеспечиваемое линеаризованной системой (41)–(42).

На рис. 2 показаны зависимости поперечной компоненты намагниченности (а) и упругого смещения (б) от амплитуды переменного поля при параметрах ЖИГ, принятых в работе [21]. Смещение  $u$  получено из  $v$  в соответствии с формулой (20) при  $z = d/2$ .

Из рис. 2 видно, что обе системы – квадратурная и линеаризованная – несколько завышают точные значения амплитуд намагниченности и смещения, причем для смещения это завышение выражено сильнее, чем для намагниченности. В то же время видно, что приближение, обеспечиваемое квадратурной системой, значи-



**Рис. 3.** Зависимости амплитуды колебаний намагниченности (а) и упругого смещения (б) от относительной величины константы магнитоупругого взаимодействия  $N = B_2/B_2$  (ЖИГ) при различных уровнях возбуждения:  $h_0 = 10$  (1), 100 (2), 400 Э (3), сплошная линия – решение по полным уравнениям (1)–(7), пунктирная – линейное приближение (41)–(42), штриховая – квадратичное приближение (45)–(46).

тельно лучше, чем приближение, даваемое линеаризованной системой.

Так, линеаризованная система (41)–(42) описывает точную картину до амплитуды переменного поля, равной 5 Э (т.е. до  $h_0/M_0 = 0.04$ ) с точностью порядка 10%, а для амплитуды поля, равной 10 Э (до  $h_0/M_0 = 0.07$ ) – с точностью около 30%, после чего ее приближение резко ухудшается.

В то же время квадрированная система (45)–(46) описывает амплитуду магнитных колебаний до амплитуды переменного поля 100 Э ( $h_0/M_0 = 0.71$ ) с точностью порядка 3%, а для амплитуды поля 400 Э ( $h_0/M_0 = 2.86$ ) – до 5%. Та же система описывает амплитуду упругих колебаний при амплитуде переменного поля 60 Э ( $h_0/M_0 = 0.43$ ) с точностью 20%, при амплитуде 100 Э с точностью 25%, а при амплитуде поля 400 Э – с точностью около двух раз.

Таким образом, ограничиваясь точностью описания упругих колебаний на уровне 20%, можно видеть, что квадрированная система позволяет рассматривать амплитуду переменного поля до 0.40 от намагниченности насыщения, что обеспечивает углы прецессии до 25°, тогда как для линеаризованной системы эти же параметры составляют 0.05 и 3°. Что касается магнитных колебаний, то здесь возможности использования квадрированной системы простираются до полей, превышающих намагниченность насыщения в несколько

(не менее трех) раз, что соответствует углам прецессии до 30...40°. Можно полагать, что столь большие углы прецессии позволяют успешно использовать квадрированную систему для описания многих нелинейных процессов с достаточно хорошим приближением.

### 15. КОРРЕКТНОСТЬ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ БОЛЬШОЙ КОНСТАНТЕ МАГНИТОУПРУГОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В связи с тем, что для некоторых условий возбуждения упругих колебаний, например для явления переориентации вектора намагниченности [28], важное значение имеет несколько повышенная по сравнению с ЖИГ величина константы магнитоупругого взаимодействия  $B_2$ , представляет интерес рассмотреть, какую точность обеспечивают линейное и квадратичное приближения в этом случае.

На рис. 3 представлены зависимости амплитуды колебаний намагниченности (а) и упругого смещения (б) от относительной величины константы магнитоупругого взаимодействия  $N = B_2/B_2$  (ЖИГ) при различных уровнях возбуждения, в том числе соответствующих заведомо сильно нелинейному режиму.

Из рис. 3а видно, что для колебаний намагниченности при сравнительно невысоком уровне

возбуждения (группа кривых 1, соответствующая  $h_0 = 10$  Э) как линейное, так и квадратичное приближение обеспечивают вблизи  $N \sim 1$  точность около 20%, тогда как при увеличении  $N$  до 10 точность возрастает до  $\sim 1\%$ , а при дальнейшем увеличении  $N$  возрастает еще более.

При среднем уровне возбуждения (группа кривых 2, соответствующая  $h_0 = 100$  Э) линейное приближение при  $N \sim 1$  дает отклонение вверх почти на порядок, тогда как ошибка квадратичного приближения не превышает 10%. По мере увеличения  $N$  ошибка как линейного, так и квадратичного приближений уменьшается, составляя при  $N \sim 1$  не более 10%, а при дальнейшем увеличении  $N$  вблизи 20 падает до  $\sim 1\%$ .

При высоком уровне возбуждения (группа кривых 3, соответствующая  $h_0 = 400$  Э) ошибка линейного приближения при малых значениях  $N$  составляет более полутора порядков, тогда как для квадратичного не превышает 20%. При увеличении  $N$  до 20 ошибки обоих приближений сравниваются, уменьшаясь до  $\sim 20\%$  и при дальнейшем увеличении  $N$  больше не меняются.

Для упругого смещения (см. рис. 3б) наибольшее отклонение приближенных решений от полного наблюдается вблизи малых значений  $N \sim 2 \dots 3$  и по мере увеличения уровня возбуждения также увеличивается, составляя при  $h_0 = 1$  Э (кривые 1) для обоих приближений не более 20%, а при  $h_0 = 400$  Э (кривые 3) для линейного приближения – более порядка, тогда как для квадратичного приближения – не более 30%.

С увеличением  $N$  до 20 ошибки обоих приближений падают до 10% при  $h_0 = 10$  Э и не превышают 30% при  $h_0 = 400$  Э. Однако при дальнейшем увеличении  $N$  ошибки обоих приближений снова растут, при  $N = 40$  достигая в случае  $h_0 = 10$  Э – 30%, а в случае  $h_0 = 400$  Э для линейного приближения до 80% и для квадратичного до 30%.

Таким образом, можно сделать вывод, что для колебаний намагниченности при увеличении константы магнитоупругого взаимодействия  $B_2$  точность как линейного, так и квадратичного приближений возрастает вплоть до высоких уровней нелинейности. Для упругих колебаний при увеличении константы  $B_2$  точность сначала возрастает, после чего, пройдя через максимум, убывает, причем максимум точности приходится на значение константы  $B_2$ , на порядок большее, чем значение  $B_2$  для ЖИГ.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты первой части работы сводятся к следующему.

В применении к задаче анализа работы магнитоупругого преобразователя СВЧ-диапазона на частоте ферромагнитного резонанса рассмотрено возбуждение гиперзвуковых колебаний переменным магнитным полем в геометрии плоскопараллельной нормально намагниченной ферритовой пластины. Записаны уравнения движения вектора намагниченности и упругого смещения с граничными условиями и возбуждением переменным магнитным полем.

Для упрощения задачи рассмотрено квадратичное приближение по намагниченности с учетом кругового характера прецессии, в результате чего полная система, содержащая семь уравнений первого порядка и четыре граничных условия, сведена к квадратованной системе четырех уравнений первого порядка без граничных условий. Показано, что полученная ранее линеаризованная система является частным случаем выведенной здесь квадратованной системы.

Введены эквивалентные параметры квадратованной системы, выраженные через параметры материала и геометрию исходной ферритовой пластины. Записана полная система уравнений для квадратичного приближения в обобщенном симметричном виде, соответствующая модельной системе из двух связанных осцилляторов, нелинейность в которых описывается слагаемыми третьего порядка по намагниченности, упругому смещению и их производным.

На основе численного анализа соотношения составляющих эквивалентных параметров для реального случая железиттриевого граната, получены укороченные уравнения, содержащие только главные слагаемые, отвечающие за динамическое поведение системы. Показано, что главную роль играют слагаемые, пропорциональные третьей степени по намагниченности и произведению намагниченности на квадрат ее производной по времени.

Путем рассмотрения развития колебаний во времени выполнен анализ приближения, обеспечиваемого линеаризованной и квадратованной системами по сравнению с решением, обеспечиваемым исходной нелинейной системой. Показано, что при описании упругих колебаний на уровне точности 20% линеаризованная система является корректной на уровне переменных полей не более 0.05 от намагниченности насыщения при углах прецессии порядка  $3^\circ$ , тогда как квадратованная система сохраняет корректность вплоть до полей, составляющих 0.40 от намагниченности насыщения, что соответствует углам прецессии до  $25^\circ$ . По магнитным колебаниям квадратованная система сохраняет точность 5% до полей, превышающих намагниченность насыщения более чем в три раза, что соответствует углам прецессии до  $40^\circ$ .

Рассмотрена точность расчета, обеспечиваемая линеаризованной и квадрированной системами для случая повышенных значений константы магнитоупругого взаимодействия. Показано, что для колебаний намагниченности, по мере увеличения константы магнитоупругого взаимодействия до 40 раз по сравнению с таковой для ЖИГ, точность линейного и квадратичного приближений, вплоть до полей порядка 0.40 от намагниченности насыщения, возрастает, составляя не менее 5%. Для упругих колебаний, при таком же увеличении константы магнитоупругого взаимодействия точность, первоначально составляя не более 40%, при значении константы, на порядок большем, чем значение таковой для ЖИГ, возрастает до 10%, после чего, пройдя через максимум, при увеличении константы до 40 раз убывает до 80%.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-02-01035-а, № 13-02-01401-а).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Физическая энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия, 1988. Т. 1. Статья "Гиперзвук".
2. Такер Дж., Рэмpton В. Гиперзвук в физике твердого тела. М.: Мир, 1975.
3. Поверхностные акустические волны / Под ред. А. Олинера. М.: Мир, 1981.
4. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981.
5. Bleustein J.L. // Appl. Phys. Lett. 1968. V. 13. P. 412.
6. Гуляев Ю.В. // Письма в ЖЭТФ. 1969. Т. 9. С. 63.
7. Кикучи Е. Ультразвуковые преобразователи. М.: Мир, 1972.
8. Голямина И.П. Магнестрикционные излучатели из ферритов // Физика и техника мощного ультразвука. Кн. 1. Источники мощного ультразвука. М.: Наука, 1967.
9. Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона, Р. Терстона. М.: Мир, 1966–1974. Т. 1–7.
10. Comstock R.L., LeCraw R.C. // J. Appl. Phys. 1963. V. 34. № 10. P. 3022.
11. Suhl H. // J. Phys. Chem. Sol. 1957. V. 1. № 4. P. 209.
12. Моносов Я.А. // Нелинейный ферромагнитный резонанс. М.: Наука, 1971.
13. Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. // Успехи физ. наук. 1974. Т. 114. № 4. С. 609.
14. Temiryazev A.G., Tikhomirova M.P., Zilberman P.E. // J. Appl. Phys. 1994. V. 76. № 12. P. 5586.
15. Зильберман П.Е., Темирязов А.Г., Тихомирова М.П. // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. № 1. С. 281.
16. Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Темирязов А.Г., Тихомирова М.П. // РЭ. 1999. Т. 44. № 10. С. 1262.
17. Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Темирязов А.Г., Тихомирова М.П. // ФТТ. 2000. Т. 42. № 6. С. 1062.
18. Gerrits Th., Schneider M.L., Kos A.B., Silva T.J. // Phys. Rev. B. 2006. V. 73. № 9. P. 094454(7).
19. Власов В.С. Исследование релаксационной и нелинейной динамики магнитных и магнитоупругих колебаний пленок и частиц. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ. 2007.
20. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // РЭ. 2009. Т. 54. № 7. С. 863.
21. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // Электронный "Журнал радиоэлектроники". 2013. № 11. С. 1–38. (<http://jre.cplire.ru/jre/nov13/3/text.html>, <http://jre.cplire.ru/jre/nov13/3/text.pdf>).
22. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // Электронный "Журнал радиоэлектроники". 2014. № 1. С. 1–42. (<http://jre.cplire.ru/jre/jan14/11/text.html>, <http://jre.cplire.ru/jre/jan14/11/text.pdf>).
23. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988.
24. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Колебания, волны, структуры. М.: Физматлит, 2003.
25. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. М.: Наука, 1978.
26. Гуревич А.Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. М.: Наука, 1973.
27. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. М.: Физматлит, 1994.
28. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // РЭ. 2010. Т. 55. № 6. С. 689.