

Сложная динамика кельтского камня, хаос и странные аттракторы

А.В. Борисов, И.С. Мамаев, С.П. Кузнецов

2 июня 2015 г.

Класс неавтономных систем характеризуется иерархией динамического поведения, от интегрируемых до неинтегрируемых систем, в зависимости от количества присутствующих инвариантов и симметрий [30, 20, 5, 6, 7]. Крайней ситуации наиболее сложной динамики отвечает задача о “кельтском камне”, состоящая в изучении движения твердого тела с выпуклой гладкой поверхностью на шероховатой плоскости для случая, когда расположение главных осей, определяющих геометрию тела и его динамические свойства, различается.

Происхождение названия – “кельтский камень” связано с находками археологами округлых каменных артефактов (очевидно, орудий труда или предметов утвари), которые при запуске волчком на горизонтальной поверхности, демонстрировали необычное поведение [44]. При закрутке около вертикальной оси в одном направлении кельтский камень может совершать устойчивое вращение. При попытке закрутить в противоположном направлении, он вскоре замедлит вращение, начнет колебаться, а потом без внешнего воздействия изменит направление вращения на противоположное (явление реверса). Для некоторых камней такие смены вращения могут наблюдаться при любом направлении закрутки и происходят многократно.

Наиболее общая постановка задачи описания кельтского камня подразумевает исследование движения твердого тела по горизонтальной плоскости с учетом силы тяжести и силы трения (диссипации). Несколько менее реалистичной, но намного более простой и общей (не требующей конкретизации законов трения), является неавтономная модель. Особенность описания в рамках такой модели в том, что приходится иметь дело с классом динамических систем, занимающим некоторое промежуточное положение между системами, допускающими формализм Лагранжа и Гамильтона с одной стороны, и диссипативными системами с другой.

Они могут сочетать наличие интеграла энергии, являясь в этом смысле консервативными, с отсутствием свойства сохранения фазового объема [16], что характерно для диссипативных систем. Гамильтоновы системы по теореме Лиувилля всегда обладают свойством сохранения фазового объема, с чем связано наличие стандартной инвариантной меры [22].

Не останавливаясь в деталях на исторических и описательных аспектах кельтских камней, отметим, что они подробно обсуждаются в литературе [1, 13, 14, 19, 40, 36, 21, 11]. Материал, излагаемый здесь, включает обзор результатов, относящихся к неголономной модели кельтского камня, в том числе новые численные результаты, полученные авторами.

1 Неголономная модель кельтского камня. Уравнения движения

Основным постулируемым свойством неголономной модели является наличие неинтегрируемой связи, состоящей в том, что скорость точки контакта тела с плоскостью считается нулевой. В этой ситуации сила трения не может совершать работу, поэтому механическая энергия сохраняется, и система является в этом смысле консервативной. Неголономная модель кельтского камня правильно передает основные качественные свойства движения, но все эффекты (колебания и реверсы) происходят на больших характерных временах, чем в реальных экспериментах [1, 20, 13, 14, 15, 21, 36, 11].

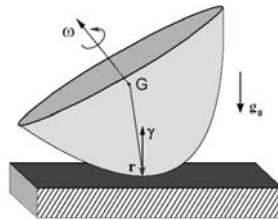


Рис. 1: К выводу уравнений движения модели кельтского камня: \mathbf{r} — радиус-вектор, соединяющий центр масс G с точкой контакта Q , \mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}$ — скорость центра масс и угловая скорость тела

Условие нулевой скорости точки контакта можно записать в виде $\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0$ (обозначения см. в подписи к рис.1). Все векторы полагаем спроецированными на оси, жестко связанные с твердым телом. Уравнения для изменения количества движения и кинетического момента

относительно центра масс G имеют вид

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - mg_0\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{N}, \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r} \times \mathbf{N}, \quad (1)$$

где \mathbf{N} — реакция в точке касания, $\boldsymbol{\gamma}$ — орт вертикали (направленный против силы тяжести), m — масса тела, g_0 — ускорение свободного падения, \mathbf{I} — тензор моментов инерции относительно центра масс. Исключая \mathbf{v} и \mathbf{N} с помощью уравнения связи, получим

$$(\dot{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}) + m\mathbf{r} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}) + m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + m(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + mg_0\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}. \quad (2)$$

Определим кинетический момент относительно точки Q как $\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ и, используя уравнение, описывающее эволюцию орта $\boldsymbol{\gamma}$ в связанной с телом системе координат, получим уравнения движения [20]

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + mg_0\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (3)$$

где вектор $\boldsymbol{\omega}$ выражается через \mathbf{M} . Векторы \mathbf{r} и $\boldsymbol{\gamma}$ связаны соотношением

$$\boldsymbol{\gamma} = -\text{grad } F(\mathbf{r})/|\text{grad } F(\mathbf{r})|, \quad (4)$$

где $F(\mathbf{r}) = 0$ — уравнение поверхности тела.

Уравнения (3) характеризуются наличием так называемого геометрического интеграла $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1$ и интеграла энергии $\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) - mg_0(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma})$. В отличие от уравнений Эйлера — Пуассона, для уравнений (3) в общем случае отсутствует интеграл площадей и инвариантная мера, что приводит к новым динамическим эффектам, не характерным для гамильтоновых систем [3].

При моделировании движения кельтского камня поверхность тела часто предполагают имеющей форму эллиптического параболоида, для которого записываем

$$F(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(r_1^2/a_1 + r_2^2/a_2) - (r_3 + h) = 0, \quad (5)$$

$$r_1 = -a_1\gamma_1/\gamma_3, \quad r_2 = -a_2\gamma_2/\gamma_3, \quad r_3 = -h + \frac{1}{2}(a_1\gamma_1^2 + a_2\gamma_2^2)/\gamma_3^2.$$

Здесь a_1, a_2 — главные радиусы кривизны в вершине параболоида, h — высота расположенного на оси параболоида центра масс.¹

¹Эта модель годится для описания колебаний и вращений около вертикальной оси, но не позволяет анализировать перевороты и качение. При необходимости исследовать такого рода движения рассматривают тело в форме трехосного эллипсоида, но это выходит за рамки нашего изложения здесь.

Примем, что одна из главных осей инерции OX_3 совпадает с главной геометрической осью e_3 , а две другие главные оси инерции повернуты относительно геометрических осей на угол δ . Тогда тензор инерции в геометрических осях имеет вид

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 \cos^2 \delta + I_2 \sin^2 \delta & (I_1 - I_2) \cos \delta \sin \delta & 0 \\ (I_1 - I_2) \cos \delta \sin \delta & I_1 \sin^2 \delta + I_2 \cos^2 \delta & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Постоянные величины I_1, I_2, I_3 представляют собой главные центральные моменты инерции твердого тела.

В терминах углов Эйлера система (3) описывает поведение углов нутации θ и собственного вращения φ , которые определяются выражениями $\cos \theta = \gamma_3$, $\operatorname{tg} \varphi = \gamma_1/\gamma_2$. Угол прецессии ψ и положение точки контакта можно получить квадратурами, зная решение уравнений (3) [2, 20].

Вместо углов Эйлера и переменных $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})$ при численном исследовании бывает удобно использовать переменные Андуайе–Депри (L, G, H, l, g) . Не останавливаясь на обсуждении их физического смысла (см., например, [2]), приведем явные формулы пересчета:

$$\begin{aligned} L &= M_3, \quad G = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}, \\ H &= M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2 + M_3\gamma_3, \quad l = \arg(M_2 + iM_1), \\ g &= \arg[HL/G - G\gamma_3 + i(M_2\gamma_1 - M_1\gamma_2)]. \end{aligned} \quad (7)$$

При описании динамики в этих переменных заведомо выполнено условие $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1$, и формулы (7) при указанном ограничении отвечают взаимно однозначному преобразованию.

В фазовом пространстве на многообразии, заданном условием постоянства двух интегралов движения, уравнения движения (3) определяют четырехмерный поток, сечение которого трехмерной гиперплоскостью приводит к некоторому трехмерному отображению Пуанкаре. Оно, вообще говоря, не относится к классу сохраняющих меру, что определяет возможность присутствия феноменов, аналогичных наблюдаемым в диссипативных системах, в том числе устойчивых точек, предельных циклов, странных аттракторов, отвечающих за хаотическую динамику.

Трехмерное сечение четырехмерной поверхности постоянной энергии $\mathcal{H}(L, G, H, l, g) = E$ произведем плоскостью $g = \operatorname{const}$, координаты на которой можно задать величинами $(l, L/G, H/G)$.² В результате

²Заметим, что если в определении сечения Пуанкаре взять величину g нулевой, то запись условия прохождения сечения оказывается простой и удобной в исходных переменных, а именно, $M_2\gamma_1 - M_1\gamma_2 = 0$.

задача приводится к трехмерному отображению Пуанкаре \mathcal{F} , которое можно считать определенным в некоторой компактной области. Согласно формулам (7), на каждом уровне $H/G = \text{const}$ можно отождествить точки с координатами l и $l + 2\pi$, а также не различать все точки прямой $L/G = 1$, сопоставив ей единственную точку. Приняв эти соглашения, получаем двумерную сферу S^2 , и фазовое пространство отображения \mathcal{F} гомеоморфно прямому произведению $S^2 \times [-1, 1]$.

Неподвижным точкам отображения Пуанкаре \mathcal{F} соответствуют периодические решения потоковой системы (3), его инвариантным кривым — двумерные торы, а двумерным точечным многообразиям — трехмерные многообразия в фазовом пространстве потоковой системы.

2 Симметрии потока и отображения

Свойство обратимости. Система (3) инвариантна относительно преобразования (инволюции)

$$\gamma \rightarrow \gamma, \quad \omega \rightarrow -\omega, \quad t \rightarrow -t. \quad (8)$$

Для отображения Пуанкаре \mathcal{F} при $g = 0$ преобразование (8) задает инволюцию $l' = \pi - l$, $(L/G)' = -L/G$, $(H/G)' = -H/G$, $\mathcal{F}' = \mathcal{F}^{-1}$, где \mathcal{F}^{-1} обозначает обратное отображение.

Отсюда можно заключить, что, во-первых, вблизи неподвижных точек инволюции, т. е. положений равновесия $\omega = 0$, применима теория Колмогорова – Арнольда – Мозера (КАМ) [42]. Во-вторых, неподвижные точки отображения \mathcal{F} , т. е. периодические траектории системы (3), не инвариантны относительно (8), встречается парами, причем их мультипликаторы (собственные числа линеаризованного отображения для возмущений орбиты за период) равны по модулю и противоположны по знаку. Аналогичное свойство имеет место для любых аттракторов. Если у системы (3) есть притягивающее множество при $t \rightarrow \infty$, то есть и аналогичное множество, притягивающее при $t \rightarrow -\infty$.

Симметрия относительно поворота осей. Если главная геометрическая ось \mathbf{e}_3 совпадает с главной осью инерции (две оставшиеся могут быть повернуты вокруг нее на угол δ по отношению к динамическим осям) то уравнения (3) остаются инвариантными относительно поворота осей $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ вокруг оси \mathbf{e}_3 на угол π , то есть относительно преобразования

$$\omega_{1,2} \rightarrow -\omega_{1,2}, \quad \omega_3 \rightarrow \omega_3, \quad \gamma_{1,2} \rightarrow -\gamma_{1,2}, \quad \gamma_3 \rightarrow \gamma_3. \quad (9)$$

Отображение \mathcal{F} симметрично относительно плоскости $l = \pi/2$: $l' = l - \pi$, $(L/G)' = L/G$, $(H/G)' = H/G$, а у любой неподвижной точки, не принадлежащей этой плоскости, имеется симметричный партнер в виде точки, получаемой из нее указанным преобразованием.

Симметрия относительно плоскости. Если геометрическая и динамическая оси \mathbf{e}_3 совпадают, то уравнения (3) инвариантны при отражении относительно плоскости $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ и обращения времени, то есть

$$\omega_{1,2} \rightarrow \omega_{1,2}, \quad \omega_3 \rightarrow -\omega_3, \quad \gamma_{1,2} \rightarrow \gamma_{1,2}, \quad \gamma_3 \rightarrow -\gamma_3, \quad t \rightarrow -t. \quad (10)$$

Трехмерное отображение при этом инвариантно относительно инволюции $l' = l$, $(L/G)' = -L/G$, $(H/G)' = H/G$, $\mathcal{F}' = \mathcal{F}^{-1}$.

При наличии симметрии (10) для неподвижных точек отображения \mathcal{F} одно собственное число равно 1, и произведение двух других тоже равно 1. Это связано с вырождением неподвижных точек, лежащих в плоскости $L = 0$. Если два оставшиеся мультипликатора имеют ненулевые мнимые части, то вблизи этих точек имеются замкнутые инвариантные кривые.

3 О численном решении уравнений кельтского камня

Для численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (3), например, методом Рунге – Кутты четвертого порядка [12], при вычислении правых частей на каждом шаге разностной схемы выполняется решение линейной системы трех алгебраических уравнений относительно составляющих вектора угловой скорости, и вычисляются дополнительные величины, определяемые формулами (5).

Проведенные тесты подтверждают, что при численном интегрировании уравнений (с надлежащим выбором шага интегрирования) сохранение интегралов движения обеспечивается с высокой точностью. Тем не менее, в некоторых случаях (например, при вычислении показателей Ляпунова, см. ниже) полезно предусмотреть приведение вектора $\boldsymbol{\gamma}$ к единичной норме, а составляющих вектора момента импульса \mathbf{M} к величинам, обеспечивающим фиксированное заданное значение энергии E . Для этого используются формулы

$$\boldsymbol{\gamma} := \boldsymbol{\gamma} / \sqrt{(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M} \sqrt{2[E + (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{r})g_0] / (\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega})}. \quad (11)$$

Вычисление отображения Пуанкаре удобно реализовать в виде специальной подпрограммы, привлекая при этом метод Эно [35, 17].³

Обсудим методику расчета показателей Ляпунова [32, 17, 26]. Если говорить об исходной системе (3), то у нее шесть показателей Ляпунова λ_i , $i = 1, \dots, 6$, смысл которых заключается в том, что они определяют характер изменения во времени инфинитезимальных возмущений опорной фазовой траектории пропорционально $\exp(\lambda_i t)$. Среди показателей Ляпунова три нулевые. Один ассоциируется с возмущением вдоль опорной траектории (сдвига по времени), а два других — с возмущениями типа сдвига по энергии и по норме вектора γ . Остается три подлежащих вычислению нетривиальных показателя.

С другой стороны, можно определить показатели Ляпунова для отображения Пуанкаре. Они характеризуют изменение возмущений в зависимости от числа итераций n пропорционально $\exp(\Lambda_i n)$. В сравнении с исходной потоковой системой, один нулевой показатель устраняется сразу. Два других нулевых показателя можно исключить, если при каждом обращении к вычислению отображения Пуанкаре использовать указанную выше нормировку векторов γ и \mathbf{M} . Показатели системы с непрерывным временем и отображения Пуанкаре связаны соотношениями $\lambda = \Lambda/\bar{T}$, где \bar{T} — средняя протяженность временного интервала между последовательными прохождениями сечения Пуанкаре для опорной траектории.

Определенная сложность исходных уравнений, включающих множество вспомогательных величин, дает основание предпочесть вариант методики расчета показателей Ляпунова, обходящий применение линеаризованных уравнений в вариациях. А именно, при заданных параметрах и начальных условиях с помощью подпрограммы отображения Пуанкаре (с нормировкой векторов γ и \mathbf{M}) выполняем совместно итерации для четырех состояний с одинаковой энергией, одно из которых отвечает опорной траектории, а три других — слабо возмущенным около него состояниям. После каждой итерации для трех векторов возмущения производится ортогонализация по Граму — Шмидту и приведение к заданной малой фиксированной норме, после чего для продолжения расчетов используются переопределенные векторы возмущения. Три показателя Ляпунова получаются как коэффициенты, характеризующие нараста-

³При обнаружении в процессе вычислений такой ситуации, что перед очередным шагом $g > 0$, а после него $g < 0$, с помощью того же разностного метода делается дополнительный шаг, на котором за независимую переменную принимается g , а величина шага дается полученным перед этим значением g с обратным знаком. Это обеспечивает возвращение изображающей точки на секущую Пуанкаре, притом согласованное по точности с используемой разностной схемой.

ние или убывание накапливающихся сумм логарифмов отношения норм (после ортогонализации, но до перенормировки) к исходным значениям.

Наличие хотя бы одного положительного показателя Ляпунова свидетельствует о хаотической природе динамики. Если сумма всех показателей отрицательная, то речь идет о странном хаотическом аттракторе.

4 Аналитические результаты в динамике кельтских камней

Устойчивость перманентных вращений. Режимы равномерного вращения тела вокруг вертикальной оси, отвечает неподвижным точкам системы (3): $\omega = (0, 0, \omega_0)$, $\gamma = (0, 0, 1)$. При линеаризации системы (3) вблизи этих неподвижных точек получается характеристическое уравнение [1, 13]

$$\chi(\lambda) = \lambda^2(k_0\lambda^4 + k_1\lambda^3 + k_2\lambda^2 + k_3\lambda + k_4) = 0, \quad (12)$$

$$k_0 = (I_1 + mh^2)(I_2 + mh^2), \quad k_1 = \omega_0 mh I_{12}(a_1 - a_2), \quad k_3 = \omega_0^3 mh I_{12}(a_1 - a_2), \\ k_2 = \omega_0^2((I_3 - I_2)(I_3 - I_1) + (I_1 + mh^2)(I_2 + mh^2) + mh((I_3 - I_{22})(a_2 - h) + (I_3 - I_{11})(a_1 - h)) + m^2 h^2(a_1 - h)(a_2 - h)) + mg_0((I_{22} + mh^2)(a_1 - h) + (I_{11} + mh^2)(a_2 - h)), \\ k_4 = \omega_0^4((I_3 - I_2)(I_3 - I_1) + mh((I_3 - I_{11})(a_1 - h) + (I_3 - I_{22})(a_2 - h)) + m^2 g_0^2 h^2(a_1 - h)(a_2 - h) + \omega_0^2 mg_0((I_3 - I_{11})(a_1 - h) + (I_3 - I_{22})(a_2 - h)) + 2mh(a_1 - h)(a_2 - h)) + m^2 g_0^2(a_1 - h)(a_2 - h).$$

Линейная устойчивость определяется вещественными частями корней (12). При фиксированной энергии существует два режима вращения вокруг вертикальной оси (вертикальных вращений) в разные стороны, с одной и той же угловой скоростью $|\omega_0|$. Применяя критерий Рауса – Гурвица, можно заключить, что вертикальные вращения параболоида устойчивы при выполнении условий, выражающихся через функцию $F_{GD} = (I_1 + I_2 - I_3)(a_1 + a_2 - 2h) - mh(4h^2 - 3h(a_1 + a_2) + 2a_1 a_2)$: $F_{GD} > 0$ и $\omega_0 < -\omega_*$, где $\omega_*^2 = mg_0(a_1 - h)(a_2 - h)/F_{GD}$ [1, 14].

Отсюда следует зависимость устойчивости от направления вращения (при $\delta \neq 0$). Для устойчивых режимов вращения требуется специальное распределение масс, такое, что $F_{GD} > 0$, и достаточно большая угловая скорость. Можно заметить, что существуют тела, вертикальные вращения которых в обе стороны неустойчивы. На рис. 2 приведены графики вещественных частей характеристических показателей при положительной и отрицательной F_{GD} . Из графика (а) следует, что при энергиях E , для которых $\omega_0 < \omega_*$, всегда существует неустойчивое вертикальное вращение, к которому стремится система при $t \rightarrow -\infty$. В данном случае

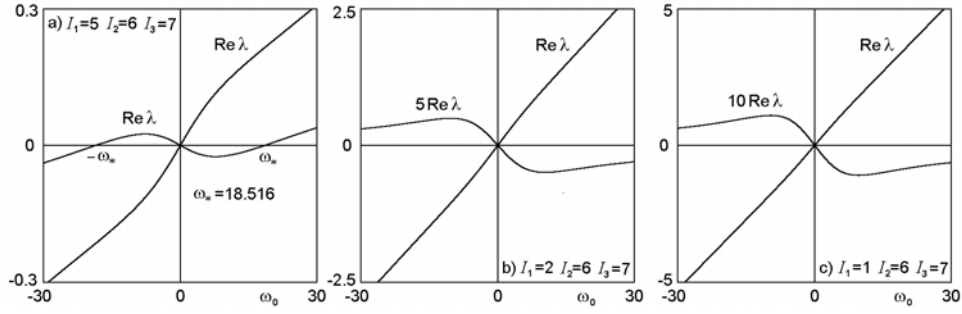


Рис. 2: Вещественные части характеристических показателей вертикальных вращений при различных соотношениях главных моментов инерции I_1, I_2, I_3 . В случае а) неравенство $F_{GD} > 0$ выполнено, а в случаях б) и с) — нет. Остальные параметры: $m = 1$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $\delta = 0.2$. Подразумевается, что длины измеряются в сантиметрах, масса в килограммах, а за единицу времени принята величина $10^{-1/2}$ секунды. Две кривые на каждом графике отвечают двум парам комплексно сопряженных корней, имеющихся у рассматриваемого уравнения 4-й степени

$\omega_* = 18.516$, что соответствует $E_* = 1300$. Типичный фазовый портрет отображения для кельтского камня при $E > E_*$, приведен на рис.3а в следующем разделе. Траектории уходят от состояния неустойчивого вертикального вращения и приходят к устойчивому состоянию вращения в противоположном направлении. Как показывают расчеты, других аттракторов в фазовом пространстве здесь нет.

Бифуркация Хопфа. Рождение цикла. В работе Карапетяна [14] показано, что вблизи критического значения частоты ω_* при потере устойчивости вращения для $\omega_0 > -\omega_*$ выполняются условия теоремы о рождении цикла Андронова – Хопфа. При этом вблизи неподвижной точки, соответствующей вертикальному вращению, возникает устойчивый предельный цикл, определяющий некоторое периодическое решение системы (3). Учитывая свойство обратимости, можно заключить, что при $\omega_0 < \omega_*$ также выполняются условия теоремы о рождении цикла, что отвечает обратной бифуркации Хопфа. Ниже, на рис.3б представлены результаты численного моделирования динамики, отвечающие присутствию устойчивого цикла Карапетяна.

Нелинейные колебания вблизи равновесия. Некоторые свойства движения кельтских камней удастся объяснить, исследуя нелинейные малые колебания вблизи положения равновесия, то есть при $\omega_0 = 0$

(эти решения являются неподвижными точками инволюции) [19, 21]. В этом случае характеристический полином (12) становится биквадратным, и при $a_1 > h$, $a_2 > h$ его корнями оказываются две пары чисто мнимых чисел. Нормальная форма системы (3) вблизи положения равновесия с точностью до членов третьего порядка имеет вид

$$\dot{\rho}_1 = -a\Omega_1^2\rho_1\rho_3, \quad \dot{\rho}_2 = a\Omega_2^2\rho_2\rho_3, \quad B\dot{\rho}_3 = a(\Omega_1^4\rho_1^2 - \Omega_2^4\rho_2^2), \quad \dot{\sigma}_1 = \Omega_1, \quad \dot{\sigma}_2 = \Omega_2, \quad (13)$$

где $\rho_{1,2,3}$ — переменные, определяющие некоторые полярные координаты, $\sigma_{1,2}$ — угловые координаты, Ω_1, Ω_2 — частоты нормальных колебаний системы, a и B постоянные величины, выражающиеся через параметры задачи. Здесь оказывается отделенной трехмерная система для ρ_1, ρ_2, ρ_3 , которая является интегрируемой. Наличие интегралов движения

$$\Omega_1^2\rho_1^2 + \Omega_2^2\rho_2^2 + B\rho_3^2 = \text{const}, \quad \rho_1^\alpha\rho_2 = \text{const}, \quad \alpha = \Omega_2^2/\Omega_1^2 \quad (14)$$

позволяет провести достаточно полный анализ (см. п.3 §6 главы 3). Эти результаты обобщены на случай качения кельтского камня на сфере [25].

Для системы (13) траектории представляют собой обмотки трехмерных инвариантных торов. Кроме того, существует особая трехмерная поверхность, заполненная двоякоасимптотическими траекториями, такого рода, что тело перестает вращаться в одну сторону и приходит к вращению в другую сторону. Таким образом, при $t \rightarrow +\infty$ вблизи рассматриваемого положения равновесия система (13) и, следовательно, система (3), мало отличается от гамильтоновой системы.

Вследствие обратимости движений в окрестности положения равновесия выполняются условия теоремы КАМ [42], причем в качестве невозмущенной системы можно взять нормальную форму (13), а в качестве малого параметра — отклонение энергии от $E_{min} = mgh$. Таким образом, при малых энергиях в полной системе (3) существуют трехмерные КАМ-торы, что иллюстрируется ниже на рис.3е.

Несуществование инвариантной меры. Как известно, для гамильтоновых систем имеет место теорема Лиувилля о сохранении элемента фазового объема (то есть меры, приписываемой этому элементу) в процессе эволюции множества изображающих точек, составляющих этот элемент. Отсутствие этого свойства — несуществование инвариантной меры, установленное В.В. Козловым [16], отражает качественное отличие поведения неголономных систем от гамильтоновых систем: в процессе динамической эволюции элемент объема не остается постоянным, а претерпевает сжатие в одних местах фазового пространства и растяжение в других. Поэтому в неголономных системах оказываются

возможными динамические феномены, аналогичные диссипативным системам, в частности, могут присутствовать аттракторы.

В более аккуратной формулировке, для тела в форме параболоида показано отсутствие вблизи вертикального вращения $\omega = \omega_0$, $\gamma_3 = 1$, $\omega_0 \neq 0$ инвариантной меры с аналитической плотностью при выполнении неравенств $I_1 \neq I_2$, $\delta \neq 0$.

Для случая $\delta = 0$, с помощью явных вычислений удастся показать, что в окрестности вертикального вращения в любых порядках теории возмущений нет препятствий к существованию инвариантной меры с аналитической плотностью. Однако в явном виде инвариантную меру удастся найти только в специальных случаях, а вопрос о ее форме в общем случае или о наличии каких-либо других препятствий к ее существованию остается открытым.

5 Численное исследование динамики

Материалы численного решения уравнений движения кельтского камня, представлены в ряде работ [40, 28, 18, 32].

Обратимся к результатам численного исследования трехмерного отображения Пуанкаре в зависимости от энергии E , когда имеется диапазон частот вертикальных вращений, обеспечивающих их устойчивость. Зафиксируем следующие динамические и геометрические параметры: $m = 1$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$ и $I_1 = 5$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $\delta = 0.2$. В этом случае устойчивость вертикального вращения описывается диаграммой рис.2а. Критическая частота и критическое значение энергии, соответственно, $\omega_* = 18.516$ и $E_* = 1300$.

В согласии с результатами предыдущего раздела, при $E > E_*$ движение асимптотически стремится к устойчивому перманентному вращению, а при E немного меньше E_* возникает цикл Каралетяна. В то же время, при малых энергиях, слегка превышающих $E_{min} = mg_0h = 100$, система демонстрирует поведение, близкое к гамильтонову при нелинейных колебаниях около равновесия.

Как показывают расчеты, в промежутке $[E_{min}, E_*]$ может реализоваться сложное хаотическое поведение. В интервале $E_{min} < E < \infty$ грубо можно выделить пять областей.

I. $E_1 > E_*$ (рис.3а). Имеет место вертикальное вращение в одну сторону, ассоциирующееся с регулярным аттрактором отображения в виде неподвижной точки. Ее мультипликаторы по модулю меньше 1 (один вещественный, и два других комплексно сопряженные). Вследствие сим-

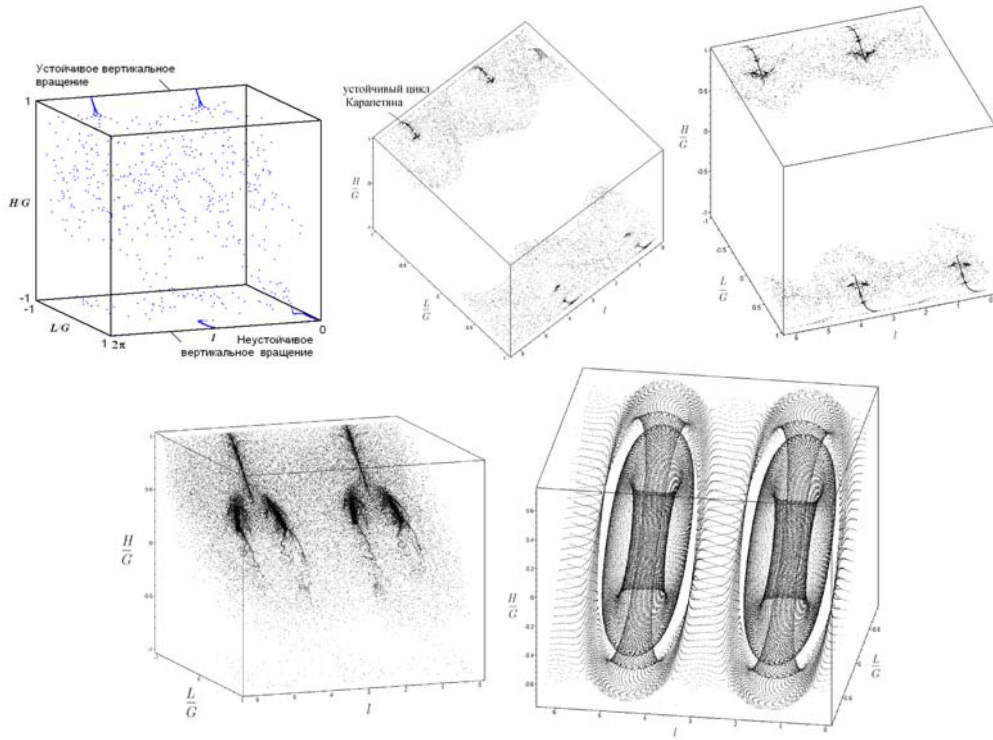


Рис. 3: Диаграммы в координатах Андуайте – Депри, показывающие результаты итераций отображения Пуанкаре для модели кельтского камня (3) при $I_1 = 5$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $\delta = 0.2$ при $E = 1900 > E_* = 1300$ (а) и $E < E_*$: 1295 (б), 900 (с), 555 (д), 200 (е).

метрии (8), в обратном времени, все решения стремятся при $t \rightarrow -\infty$ к аналогичному режиму вертикального вращения в другую сторону. На одномерной сепаратрисе, выходящей из неподвижной точки неустойчивого вращения, очевидно, расположена также неподвижная точка, отвечающая неустойчивому предельному циклу исходной системы.

II. $E_1 < E < E_*$ ($933 < E_1 < 941$) (рис.3б). При уменьшении энергии ниже E_* происходит бифуркация Андронова – Хопфа, и в окрестности потерявшего устойчивость вертикального вращения рождается предельный цикл. Вблизи второго вертикального вращения происходит обратная бифуркация, и рождается предельный цикл, притягивающий траектории при $t \rightarrow -\infty$. Кроме того, в фазовом пространстве возникает еще два устойчивых цикла (сохраняющихся при малом ше-

велении параметров), появление которых аналитически предсказать не удастся. Вследствие обратимости, аналогичные, являющиеся притягивающими в обратном времени и расположенные вблизи неустойчивого вертикального вращения. В фазовом пространстве имеются также неустойчивые неподвижные точки, соответствующие вертикальным вращениям.

III. $E_2 < E < E_1$ ($560.7 < E_2 < 561.9$) (рис.3с). При прохождении параметра энергии через E_1 цикл Карапетяна теряет устойчивость. При этом два других устойчивых цикла сохраняют устойчивость, оставаясь аттракторами. Их симметричными партнерами выступают два неустойчивых цикла, выступающих как аттракторы в обратном времени. В фазовом пространстве отображения Пуанкаре имеется также четыре неустойчивых неподвижных точки, отвечающих вертикальным вращениям и двум потерявшим устойчивость циклам Карапетяна.

IV. $E_3 < E < E_2 - \varepsilon_1$ ($\varepsilon_1 > 0$ и мало) (рис.3d). Два оставшихся предельных цикла теряют устойчивость, и возникает притягивающее множество сложной структуры. Спектр показателей Ляпунова для отображения Пуанкаре $\Lambda = (0.109, -0.007, -0.123)$. Максимальный показатель положителен, что говорит о хаотической природе динамики.

V. $E_{min} < E < E_{min} + \varepsilon_2$ ($\varepsilon_2 > 0$ и мало) (рис.3e). Данная область параметров относится к ситуации малых колебаний вблизи положения равновесия. Здесь обнаруживаются трехмерные инвариантные КАМ торы, между которыми заперты прочие фазовые траектории системы.

Как уже отмечалось, при рассмотрении режимов динамики кельтского камня могут встретиться две ситуации. Первая отвечает тому, что в фазовом пространстве неголономной модели, редуцированной на гиперповерхность постоянных энергии и геометрического интеграла, имеется аттрактор — притягивающее множество, не инвариантное относительно обращения времени, и симметричный объект, составленный из траекторий с точно таким же поведением, но в обратном времени. Другая возможность — это движения, представленные множествами траекторий, симметричными по отношению к обращению времени, о которых говорят как о “смешанных режимах” или “смешанной динамике” [9].

Для диагностики в численных расчетах можно провести вычисления в прямом и обратном времени и представить на одном графике разными цветами данные, относящиеся к асимптотическому поведению орбит в обоих случаях [9]. Примеры такой обработки приведены на рис.4, где черным цветом даны точки, отвечающие аттракторам, а серым — точки, полученные при рассмотрении динамики в обратном времени.

Различить визуально ситуацию, когда аттрактор четко отделен от своего симметричного партнера, и ситуацию смешанной динамики в слу-

чае хаоса получается далеко не всегда: зачастую множества траекторий, получаемых при вычислениях в прямом и обратном времени, близко расположены и переплетены. Поэтому кажется уместным огрубить классификацию. Мы будем говорить о странных аттракторах, когда притягивающее хаотическое множество хорошо отделено от симметричного партнера, и о квазиконсервативном хаосе, когда асимптотические в прямом и обратном времени траектории близки в фазовом пространстве. “Смешанная динамика” тогда выступает, как специальная разновидность квазиконсервативного хаоса.

В случае странного аттрактора трехмерного отображения Пуанкаре в спектре показателей Ляпунова должен присутствовать один положительный и два отрицательных показателя, причем их сумма отрицательна, что отвечает локальному сжатию фазового объема, сопровождающему притяжение траекторий к аттрактору. Для квазиконсервативного хаоса положительный и отрицательный показатели одинаковы или почти одинаковы по абсолютной величине, оставшийся показатель близок к нулю, и сумма всех показателей также близка к нулю.

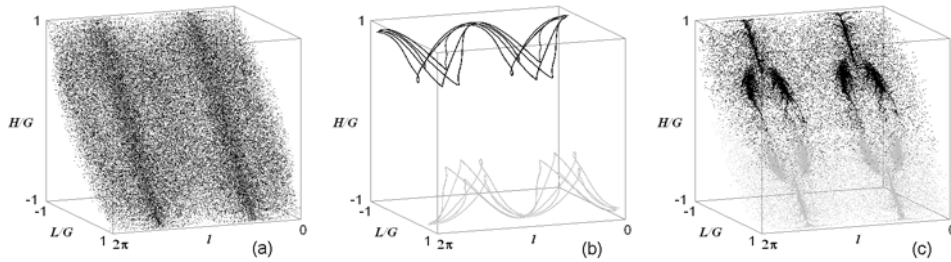


Рис. 4: Иллюстрации динамики кельтского камня с параметрами $I_1 = 5$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $\delta = 0.2$. (a) $E = 320$, “смешанный режим”, $\Lambda = (0.107, 0.000, -0.108)$; (b) $E = 510$, устойчивый цикл периода 5, $\Lambda = (-0.005, -0.015, -0.015)$, и его симметричный партнер; (c) $E = 555$, хаотический аттрактор, $\Lambda = (0.109, -0.007, -0.123)$, и симметричный партнер. Диаграммы (a) и (c) даны для отображения Пуанкаре, а на диаграмме (b) показаны точки на каждом шаге интегрирования дифференциальных уравнений.

Диаграмма (a) на рис.4 отвечает хаотическому “смешанному режиму”. На диаграмме (b) представлен периодический режим — аттрактор в виде цикла с тремя отрицательными показателями Ляпунова, а серая — симметричному партнеру, репеллеру с тремя положительными показателями. Диаграмма (c) относится к режиму, представленному на рис.3d.

Из графика очевидно заметное разделение аттрактора и репеллера, не образующих в данном случае единый объект.

6 Двухпараметрический анализ кельтского камня: карта динамических режимов

Обратимся к методике двухпараметрического исследования динамики, апробированной ранее для диссипативных систем и заключающейся в построении и анализе карт динамических режимов на плоскости параметров [17, 37]. Здесь мы применим ее к отображению Пуанкаре неголономной модели кельтского камня, причем в качестве варьируемых параметров фигурируют полная механическая энергия E и параметр δ , задающий угол поворота осей инерции относительно геометрических осей.

Для построения карты производится сканирование плоскости параметров с некоторым шагом по двум параметрам. В каждой точке делается порядка 10^3 итераций отображения Пуанкаре, и по результатам последних шагов итераций выполняется анализ наличия периода повторения от 1 до 14 с некоторым заданным изначально уровнем допустимой погрешности. При обнаружении периодичности пиксель на диаграмме обозначается определенным цветом (в данном изложении тоном серого цвета), и производится переход к следующей точке на плоскости параметров. В качестве начальных условий в каждой новой точке разумно брать состояние, полученное в итоге итераций в предыдущей точке (“сканирование с наследованием”), что в большинстве случаев способствует ускорению сходимости к установившемуся режиму динамики.

На рис.5 показана карта режимов на плоскости (E, δ) для кельтского камня с главными моментами инерции $I_1 = 1$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, когда картина динамического поведения при вариации оставшихся параметров весьма богатая.⁴ Отметим, что при таком выборе параметров устойчивых перманентных вертикальных вращений нет (рис.2). При построении использовалось сканирование с наследованием в направлениях слева направо и снизу вверх, причем период определялся из динамики переменной M_3 . Белый цвет означает отсутствие идентифицированного с определенностью периода; соответствующие области могут отвечать

⁴Указанный выбор параметров отвечает особой ситуации, когда “тяжелая” часть кельтского камня имеет вид тонкой пластины, прикрепленной к невесомому телу выпуклой формы, обеспечивающему нужные геометрические свойства; “неравенство треугольника”, которому должны удовлетворять компоненты матрицы момента инерции в диагональном представлении, в этом случае вырождается в равенство.

хаотическим или квазипериодическим режимам динамики.

Для иллюстрации динамики в представительных точках, по периферии рисунка приведены фазовые портреты для отображения Пуанкаре в координатах Андуайе – Дебри (см. обозначения осей на диаграмме (а)). Аттрактор в каждом случае показан черным цветом, а серым обозначены репеллеры, предельные объекты, возникающие при итерациях в обратном времени, которые служат симметричными партнерами “черных” объектов относительно операции обращения времени.

Области в левой и верхней части карты, идентифицированные, как области периода 1 для переменной M_3 , с точки зрения динамики полного состояния системы, отвечают периоду 2, но это цикл симметричный относительно замены (9). Таким образом, переход из темно-серой в светло-серую область отвечает фактически не удвоению периода, а бифуркации потери симметрии.

Характерное окаймление хаотических областей сужающимися полосами отвечает бифуркациям удвоения периода. Внутри белой области, занимающей центральную часть карты, можно видеть множество характерных небольших по размерам областей (“shrimps” – “креветки” по терминологии Галласа [34]). Наличие этих образований – признак негиперболической природы хаоса, подобной той, какая имеет место в диссипативных системах, в том числе в отображениях Эно и Икеды [17, 39].

Область в середине нижней части карты, где видна систему отделенных друг от друга серых полос, отвечает квазипериодической динамике, а полосы (разновидность “языков Арнольда”) – режимам синхронизации колебательных составляющих с рациональными отношениями частот.

Комментируя фазовые портреты по периферии рисунка, замечаем, что диаграмма (а) отвечает устойчивому циклу периода 2, симметричным партнером которого является неустойчивый цикл того же периода. Диаграмма (b) представляет странный аттрактор и симметричный ему репеллер. Диаграмма (c) отвечает одному из окон периодичности в области, занятой в основном хаосом. Период устойчивого цикла равен 14, имеется также симметричный ему неустойчивый цикл того же периода. Диаграмма (d) относится к циклу периода 4 недалеко от порога его возникновения через бифуркацию удвоения периода. Имеется также симметричный ему неустойчивый цикл того же периода. Диаграммы (e) и (f) отвечают наличию странного аттрактора и симметричного ему репеллера. Диаграмма (g) представляет объект, симметричный относительно обращения времени. Судя по спектру показателей Ляпунова, содержащему три нулевых (с точностью до погрешности вычислений) показателей, это квазипериодический режим. На диаграмме (h) можно видеть

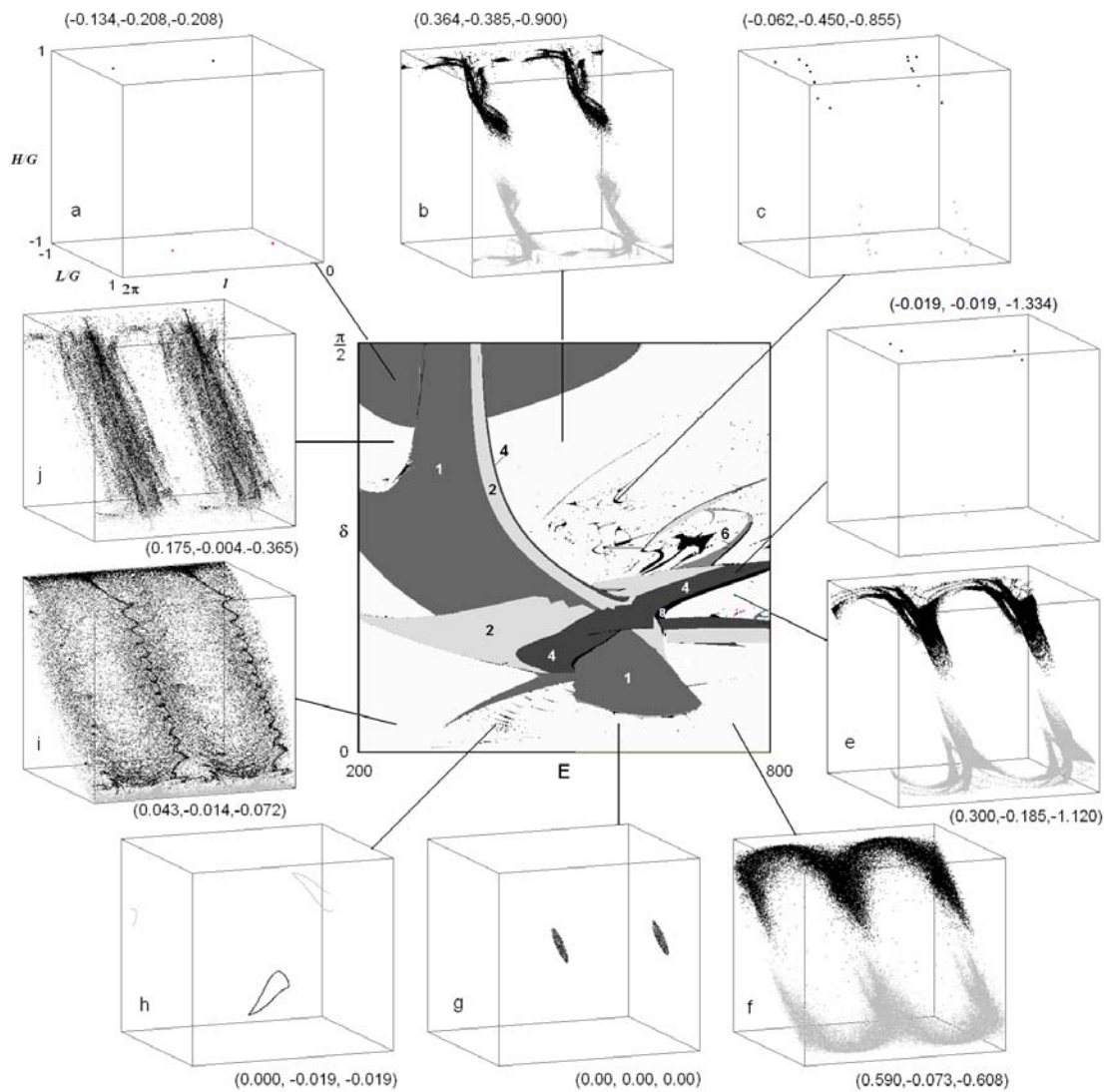


Рис. 5: Карта режимов на плоскости (E, δ) для кельтского камня при $I_1 = 1, I_2 = 6, I_3 = 7, g_0 = 100, a_1 = 9, a_2 = 4, h = 1$ (в центре), и фазовые портреты установившихся режимов динамики в представительных точках для отображения Пуанкаре в переменных Андуайе – Дебри. Около каждого портрета приводится спектр показателей Ляпунова отображения Пуанкаре $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$.

замкнутую притягивающую инвариантную кривую и, в качестве симметричного партнера, – отталкивающую инвариантную кривую. Это соответствует двухчастотному квазипериодическому движению и наличию аттрактора в виде двумерного тора в фазовом пространстве системы с непрерывным временем на энергетической поверхности. Диаграммы (i) и (j) отвечают хаотическим режимам, в которых положительный и отрицательный показатели Ляпунова почти одинаковы по абсолютной величине, а оставшийся показатель близок к нулю. На этом основании их можно интерпретировать как квазиконсервативный хаос. Тем не менее, как показывает внимательное рассмотрение рисунков, говорить о симметрии предельного множества относительно обращения времени все же не приходится: там можно различить множества, занятые преимущественно черными или преимущественно серыми точками, так сказать, переплетенные друг с другом.

На рис.6 показаны однопараметрические бифуркационные диаграммы и графики зависимости показателей Ляпунова от параметра E при $\delta = 3\pi/16$ (левая колонка) и $\delta = \pi/4$ (правая колонка).

На верхних рисунках отложены значения составляющей момента импульса M_3 , реализующиеся при итерациях отображения Пуанкаре в зависимости от энергии E . Величина энергии изменяется шаг за шагом, и при новом ее значении начальные условия для итераций задаются состоянием, найденном из финального состояния при предыдущем значении E пропорциональным пересчетом момента импульса. Данные, полученные при сканировании слева направо даны черным цветом, а справа налево серым цветом.

В левой части диаграмм, отвечающих $\delta = 3\pi/16$, имеет место квазиконсервативный хаос: имеется один положительный показатель Ляпунова, второй показатель близок к нулю, а третий, отрицательный, близок по абсолютной величине к первому показателю.

В левой части диаграмм для $\delta = \pi/4$ и в центральной части для $\delta = 3\pi/16$ имеют место области периодической динамики, которым отвечает число ветвей бифуркационного дерева, определяемое периодом данного режима при итерациях отображения Пуанкаре, и отрицательные показатели Ляпунова. В области периодической динамики можно видеть бифуркации удвоения периода, когда каждая ветвь претерпевает раздвоение, с возникновением периода 4 и 8. В момент такой бифуркации старший показатель Ляпунова обращается в ноль, что также видно на рисунке. Переход к хаосу, по крайней мере, на показанных диаграммах, не такой, как для одномерных отображений: вместо постепенного нарастания нерегулярной составляющей при изменении параметра возникает

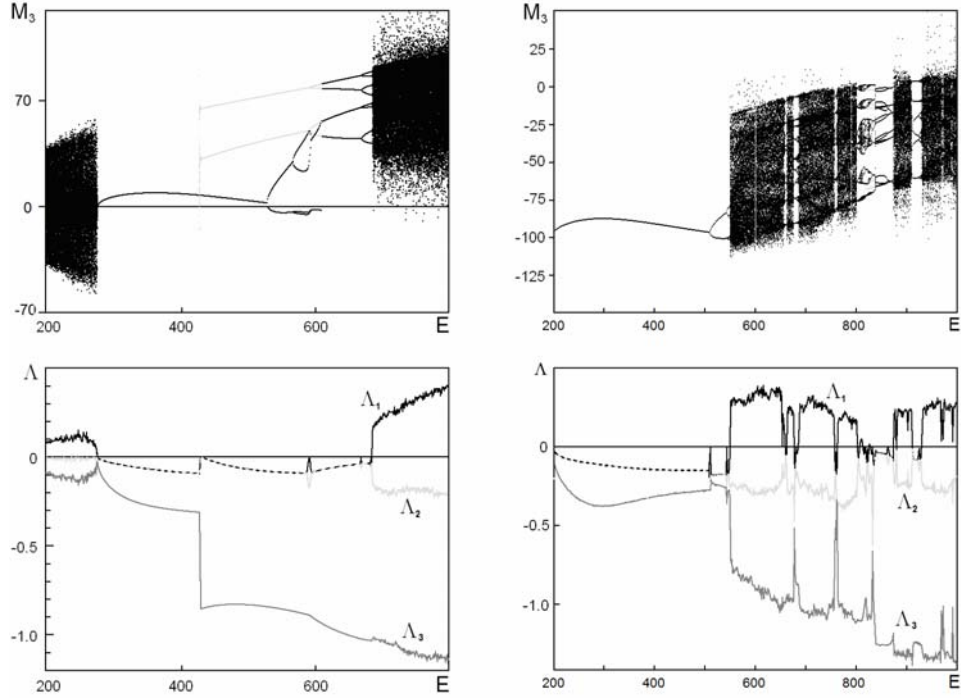


Рис. 6: Бифуркационное дерево и график трех показателей Ляпунова (Λ) для отображения Пуанкаре при $I_1 = 1$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $\delta = 3\pi/16$ (левая колонка) и $\delta = \pi/4$ (правая колонка). Сканирование по энергии E с наследованием слева направо (черный цвет) и справа налево (серый цвет).

сразу достаточно интенсивный хаос (возможность такой ситуации отмечена также в [8]). Отметим присутствие *мультистабильности* (имеется более одного аттрактора при одних и тех же параметрах) и связанного с ней *гистерезиса* (зависимость финального состояния системы от пути, которым к нему пришли — движением слева направо или справа налево), что выражается в несовпадении черных и серых линий на диаграмме.⁵

В правой части диаграмм хаотический режим должен интерпретироваться как ассоциирующийся со странным аттрактором. Имеется один положительный и два отрицательных показателя отображения Пуанкаре, и хорошо определена размерность аттрактора по Каплану – Йорке

⁵Учитывая наличие гистерезиса и жестких переходов, карту режимов можно мыслить как составленную из набора частично перекрывающихся листов, каждому из которых отвечает тот или иной аттрактор [17].

[26, 17]. Аттрактор заведомо не гиперболический: можно наблюдать характерную изрезанность зависимости показателя Ляпунова от параметра (особенно на диаграмме справа), подобную той, что имеет место в логистическом отображении или отображении Эно, с “провалами”, отвечающими окнам периодичности [26, 17, 39]. (На карте режимов это соответствует тому, что маршрут движения по параметру пересекает образования в виде “креветок”.)

7 Странные аттракторы

Рассмотрим несколько *странных аттракторов* в неголомомной модели кельтского камня при $I_1 = 2$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$. Как и в предыдущем случае, устойчивых перманентных вертикальных вращений нет (рис.2с). На рис.7 приведена карта режимов на плоскости параметров E и δ . Система обозначения такая же, как на рис.5. Аттракторы, которые будут рассмотрены, отвечают точкам А, В, С.

Аттрактор типа Фейгенбаума. Если двигаться на плоскости параметров снизу вверх через точку А, то наблюдается переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Бифуркационная диаграмма демонстрирует характерную картину ветвей, раздваивающихся в точках бифуркаций, и заполненные точками области хаоса — “крону” (рис.8). На вставках показаны фрагменты, которые с увеличением масштаба становятся все в большей степени похожими на классическую картину “дерева Фейгенбаума” для одномерных отображений и других сильно диссипативных систем с удвоениями периода [17, 26].

Измеряя на диаграмме расщепление ветвей по горизонтали, и вычисляя их отношения для последовательных уровней удвоения, получаем значения в одном столбце таблицы 1, а определив отношения размеров расщепления ветвей по вертикали, заполним другой столбец. Если переход относится к классу универсальности Фейгенбаума [24, 17, 38, 26], величины отношений должны сходиться к универсальным константам $\delta_F = 4.669201\dots$ и $\alpha_F = -2.502907\dots$. Из таблицы видно, что это предположение подтверждается. Тот факт, что на первых уровнях удвоения оценки констант больше по абсолютной величине, связано с так называемым эффектом кроссовера [41]. На низких уровнях, пока степень сжатия трехмерного фазового объема при динамической эволюции в данной области фазового пространства за характерный период невелика, константы близки к тем, которые отвечают бифуркациям удвоения в консервативных системах ($\delta_H = 8.721\dots$ и $\alpha_H = -4.018\dots$ [22, 38]). Но при

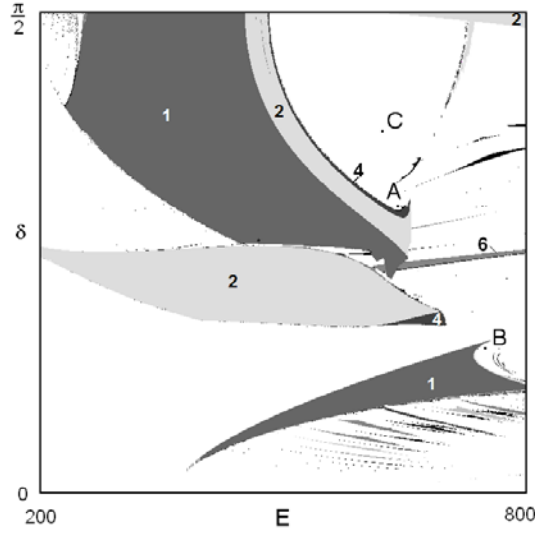


Рис. 7: Карта динамических режимов модели кельтского камня на плоскости параметров для отображения Пуанкаре для случая $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$. Помечены точки с координатами А ($E = 642$, $\delta = 0.922$), В ($E = 752$, $\delta = 0.485$), С ($E = 620$, $\delta = 3\pi/8 = 1.178\dots$)

каждой очередной бифуркации удвоения сжатие фазового объема за характерный период удваивается, и величины отношений асимптотически приближаются к универсальным константам δ_F и α_F .

Таблица 1. Результаты оценки констант Фейгенбаума

(2,4)/(4,8)	6.52	-3.79
(4,8)/(8,16)	5.29	-2.82
(8,16)/(16,32)	4.70	-2.64
(32,64)/(64,128)	4.62	-2.54
Константы Фейгенбаума δ_F и α_F	4.669201	-2.502908

Поскольку приведенные для указанной области параметров результаты определенно указывают на принадлежность системы к классу универсальности Фейгенбаума, можно полагать, что на больших характерных временах описание динамики сводится к одномерному отображению с квадратичным экстремумом (из-за сильного сжатия фазового объема

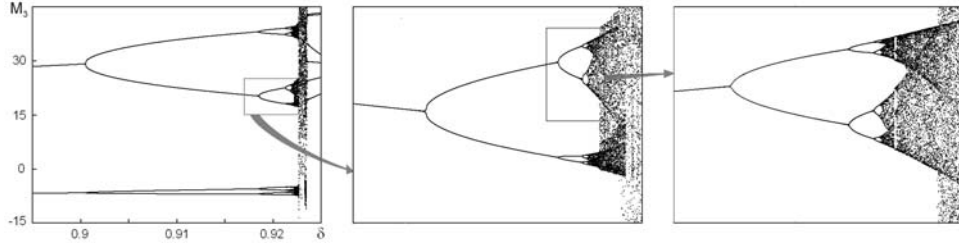


Рис. 8: Бифуркационные деревья в области перехода к хаосу через удвоения периода по Фейгенбауму при $I_1 = 2$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $E = 642$. Сканирование по δ ведется в сторону увеличения с наследованием начальных условий.

трехмерного отображения, в области где расположен аттрактор). Соответственно, в окрестности критической точки должны иметь место феномены, характерные для одномерных отображений. В частности, в области за критической точкой согласно результатам Якобсона [27], должно присутствовать множество положительной меры по параметру, где реализуется хаос. Для исходного трехмерного отображения это отвечает наличию странного аттрактора, подобного отображению Эно при сильной диссипации согласно Бенедиксу и Карлесону [28].

Хаотический аттрактор, возникший в результате каскада бифуркаций удвоения периода показан на рис.9. Это аттрактор трехмерного отображения Пуанкаре, изображенный в проекции на плоскость (M_1 , M_2). Визуально он похож на аттракторы диссипативных отображений сразу за порогом перехода к хаосу через удвоения периода. Рядом показан спектр колебаний переменной M_3 при динамике на аттракторе. Спектр имеет вид, характерный для аттрактора, возникшего через каскад бифуркаций удвоения периода, и содержит набор выделенных пиков с иерархической структурой. Как известно, пики каждого следующего уровня должны быть в среднем на 13.4 дБ ниже предыдущего уровня [26, 17], что разумно согласуется с наблюдаемой картиной. На глубоких уровнях пики разрушены, и имеет место сплошной спектр, т.е. динамика хаотическая.

Рассчитанный для отображения Пуанкаре спектр показателей Ляпунова данного аттрактора $\Lambda_1 = 0.0453$, $\Lambda_2 = -0.0845$, $\Lambda_3 = -0.3112$. Как можно видеть, имеется один положительный показатель и два превышающих его по абсолютной величине отрицательных показателя. При оценке размерности по формуле Каплана – Йорке [26, 17] принимаются

во внимание только первые два показателя:

$$D = m + (\Lambda_1 + \dots + \Lambda_m)/|\Lambda_{m+1}| = 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2| \approx 1.53. \quad (15)$$

(В данном случае число членов суммы, для которого она еще остается положительной, $m = 1$.)

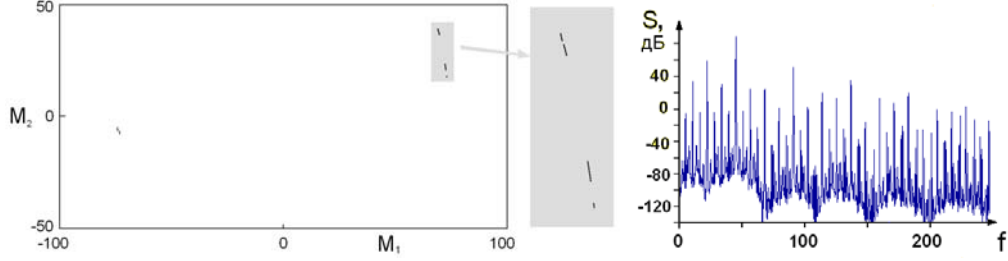


Рис. 9: Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость двух составляющих момента импульса (а) и спектр Фурье составляющей M_3 (b) при $I_1 = 2$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, и $E = 642$, $\delta = 0.922$.

Аттрактор типа Лоренца. Аттрактор Лоренца — это ставший классическим объект нелинейной динамики и теории хаоса. Он относится к классу сингулярно-гиперболических (квазигиперболических) аттракторов. Модель Лоренца много лет оставалась предметом активных и тщательных исследований. Аккуратное математическое обоснование хаотической природы динамики на аттракторе Лоренца было дано сравнительно недавно В. Такером [43] на основе комбинации техники доказательных вычислений (computer assisted proof) и аккуратного аналитического рассмотрения.

В этой связи представляется интересным и замечательным обнаружение довольно общей ситуации, когда аттрактор типа Лоренца рождается в результате определенной последовательности бифуркационных событий в трехмерных отображениях [8]. В частности, это относится к трехмерному отображению Пуанкаре для неголомной модели кельтского камня [26].

Аттрактор типа Лоренца возникает в ситуации, когда после бифуркации удвоения периода вновь возникшая орбита удвоенного периода теряет устойчивость посредством бифуркации Неймарка-Сакера (а не в результате вторичного удвоения), после чего неустойчивое многообразие исходной, потерявшей устойчивость периодической точки, пересекает ее устойчивое двумерное многообразие.

Пример такого аттрактора в трехмерном отображении Пуанкаре, описывающем динамику кельтского камня, показан на рис.10 в проекции на плоскость переменных M_1, M_2 , вместе со спектром колебаний переменной M_3 ; параметры задачи выбраны соответственно указанным в работе [26] и отвечают точке В на рис.7.

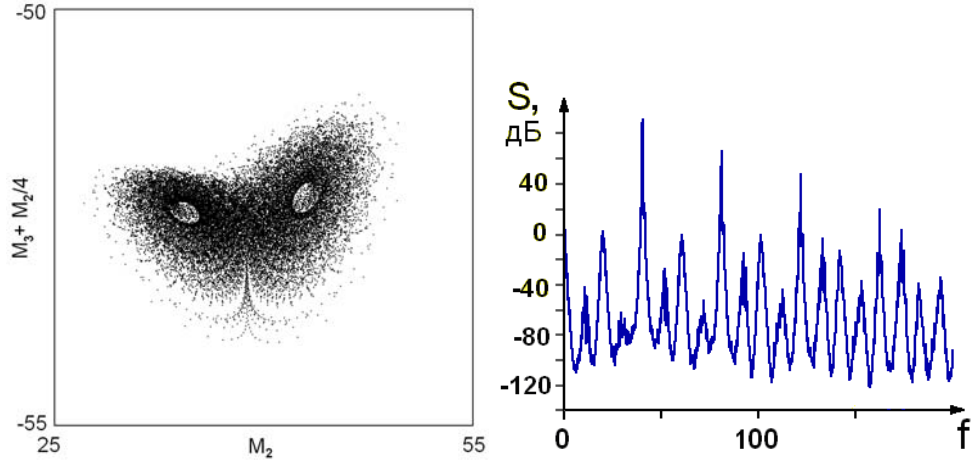


Рис. 10: Портрет аттрактора типа Лоренца в сечении Пуанкаре (а) и спектр Фурье составляющей M_3 (b) для параметров $I_1 = 2, I_2 = 6, I_3 = 7, g_0 = 100, a_1 = 9, a_2 = 4, h = 1$, и $E = 752, \delta = 0.485$

Как можно убедиться, при итерациях отображения Пуанкаре изображающая точка совершает скачки, посещая левый и правый завитки аттрактора. Для отображения, отвечающего двукратной итерации, движение изображающей точки осуществляется хотя и дискретными шагами, но ее последовательные положения можно представить, как приближенно следующие непрерывной траектории некоторой аппроксимирующей потоковой системы с аттрактором Лоренца.

Показатели Ляпунова данного аттрактора трехмерного отображения $\Lambda_1 = 0.0202, \Lambda_2 = 0.0000, \Lambda_3 = -0.1925$.

Первый показатель Ляпунова положительный, что говорит о присутствии хаоса. Об этом можно судить также по характеру спектра на рис.10b, который, очевидно, является сплошным, хотя и сильно изрезанным. Второй показатель близок к нулю, что связано с возможностью описания динамики аппроксимирующей потоковой системой. Третий показатель отрицательный, причем сумма всех показателей тоже отрицательна, что обеспечивает сжатие фазового объема к нулю в процессе

динамики с выходом на аттрактор. Размерность аттрактора в отображении Пуанкаре, оцененная по формуле Каплана – Йорке: $D = 2 + \Lambda_1 + \Lambda_2/|\Lambda_3| \approx 2.10$. немного больше 2, как и для классического аттрактора Лоренца.

Аттрактор высокой размерности. На рис.11 показан портрет хаотического аттрактора в точке С ($E = 620$, $\delta = 3\pi/8$). Показатели Ляпунова для него $\Lambda_1 = 0.282$, $\Lambda_2 = -0.093$, $\Lambda_3 = -0.686$.

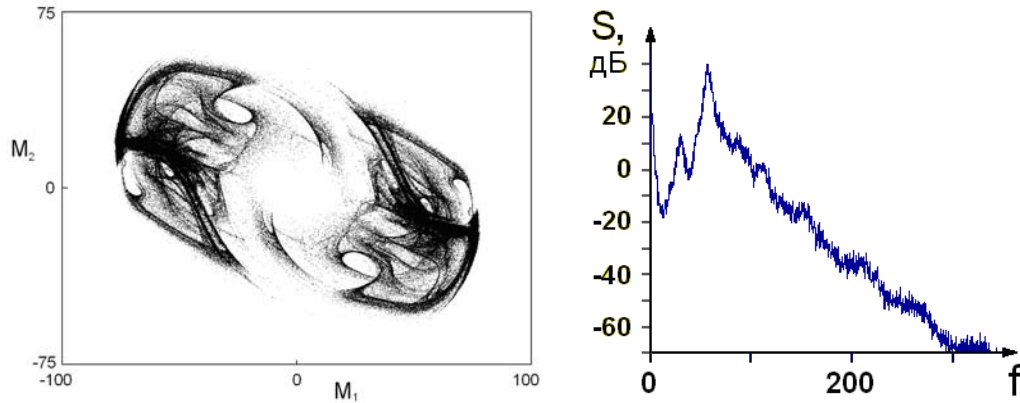


Рис. 11: Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре (а) и спектр Фурье составляющей M_3 (b) для параметров $I_1 = 2$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $E = 620$, $\delta = 1.178$

Как можно видеть, первый показатель Ляпунова положительный, а второй отрицательный, но по абсолютной величине меньше первого. Поэтому размерность по формуле Каплана – Йорке $D = 2 + (\Lambda_1 + \Lambda_2)/|\Lambda_3| \approx 2.26$. оказывается существенно больше 2. Насколько можно судить по имеющимся численным результатам, именно аттракторы такого типа наиболее характерны для неголономной модели кельтского камня (в отличие от многих диссипативных систем с хаосом, где первый отрицательный показатель Ляпунова достаточно сильно удален от нуля). Спектр Фурье с определенностью идентифицируется как сплошной, то есть отвечающий хаотической динамике. Его изрезанность в отличие от спектра на рисунках 9 и 10, незначительна, что свидетельствует об отсутствии каких-либо заметных периодических составляющих движения.

8 Заключение

Представлен обзор результатов, относящихся к неголономной модели кельтского камня, в том числе известных аналитических результатов, а также численного исследования динамики с привлечением ряда методов, использовавшихся ранее исключительно для анализа диссипативных систем.

Построена и интерпретирована карта динамических режимов системы на плоскости параметров полной механической энергии и угла относительного поворота геометрических и динамических главных осей твердого тела. Отмечено присутствие характерных, наблюдавшихся ранее только для диссипативных систем, образований в пространстве параметров, включая формы областей удваивающегося периода у границы хаоса, наличие складок и сборок, островов периодичности внутри области, занимаемой хаосом (“креветки”). Отмечено также присутствие квазипериодических режимов, представленных двумерными и трехмерными торами-аттракторами в фазовом пространстве системы, редуцированной к трехмерному отображению.

Продемонстрирована продуктивность анализа, опирающегося на построение однопараметрических бифуркационных диаграмм (“деревьев”) с точки зрения выявления областей мультистабильности, то есть сосуществования двух и более аттракторов при одних и тех же параметрах.

Разработана и реализована методика вычисления полного спектра показателей Ляпунова. Показано, что на основе анализа показателей Ляпунова среди хаотических режимов неголономной модели выделяются два класса, один отвечает странным аттрактором с положительным и двумя отрицательными показателями Ляпунова, а другой характеризуется близкими по абсолютной величине положительным и отрицательным показателями и близким к нулю оставшимся показателем. Частной разновидностью хаоса второго типа выступает так называемая смешанная динамика, которой отвечает в фазовом пространстве множество траекторий, инвариантное относительно операции обращения времени. Первый тип поведения характерен для области относительно больших, а второй – для области относительно малых значений энергии.

Изучено несколько представителей странных аттракторов в неголономной модели кельтского камня – приведены портреты в сечении Пуанкаре, показатели Ляпунова, спектры Фурье, оценки размерностей. Продемонстрировано, что возникновение одного из этих аттракторов через каскад бифуркаций удвоения периода ассоциируется с классом количественной универсальности Фейгенбаума.

Список литературы

- [1] Астапов И. С. Об устойчивости вращения кельтского камня. Вестн.МГУ, сер. 1, мат., механ., 1980, №2, с. 97–100.
- [2] Борисов А.В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. М.-Иж.: РХД, 2001. 384 с.
- [3] Борисов А.В., Мамаев И.С. Препятствие к гамильтоновости неголомомных систем. Доклады РАН, 2002, т. 387, №6, с. 764–766.
- [4] Борисов А. В., Мамаев И.С., Килин А.А. Новый интеграл в задаче о качении шара по произвольному эллипсоиду. Доклады РАН, 2002, т.385, №3, с. 338–341.
- [5] Борисов А.В., Мамаев И.С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней. УФН, **173**, 2003, №4, с. 407-418.
- [6] Борисов А.В., Мамаев И.С., Килин А.А. Избранные задачи неголомомной механики. Институт компьютерных исследований, препринт, 2005, 289с.
- [7] Борисов А.В., Мамаев И.С., Бизяев И.А.. Иерархия динамики при качении твердого тела без проскальзывания и верчения по плоскости и сфере. Нелинейная динамика, **9**, 2013, №2, 141-202
- [8] А.С. Гонченко, С.В. Гонченко, Л.П. Шильников. К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений. Нелинейная динамика, **8**, 2012, №1, 3-28.
- [9] А.С. Гонченко, С.В. Гонченко, А.О. Казаков. О некоторых новых аспектах хаотической динамики “кельтского камня”. Нелинейная динамика, **8**, 2012, №3, 507-518.
- [10] Гонченко А.С., Гонченко С.В. О существовании аттракторов лоренцевского типа в неголомомной модели “кельтского камня”. Нелинейная динамика, **9**, 2013, №1, 77-89.
- [11] Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Глобальное движение кельтского камня. Механика твердого тела, 2008, вып. 3, 8-16.
- [12] Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978, 512с.

- [13] Карапетян А. В. О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивость кельтских камней. Прикл. Мат. Мех., 1981, т. 45, вып. 1, с. 42–51.
- [14] Карапетян А.В. Бифуркации Хопфа в задаче о движении тяжелого твердого тела по шероховатой плоскости. Изв. АН СССР, Механ.тв. тела, 1985, №2, с. 19–24.
- [15] Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: УРСС, 1998. 165 с.
- [16] Козлов В. В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики. Успехи механики, 1985, т. 8, №3, с. 85–101.
- [17] Кузнецов С.П. Динамический хаос. Москва: Физматлит, 2001, 296с.
- [18] С.П. Кузнецов, А.Ю. Жалнин, И.Р. Сатаев, Ю.В. Седова. Феномены нелинейной динамики диссипативных систем в неголономной механике "кельтского камня". Нелинейная динамика, 8, №4, 2012, 735-762.
- [19] Маркеев А.П. О динамике твердого тела на абсолютно шероховатой плоскости. Прикл. Мат. Механ., 1983, т. 47, вып. 4, с. 575–582.
- [20] Неголономные динамические системы. Интегрируемость, хаос, странные аттракторы. Сборник статей. Под ред. Борисова А.В. и Мамаева И.С. Москва - Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 328с.
- [21] Паскаль М. Асимптотическое решение уравнений движения кельтского камня. Прикл. Мат. Мех., 1983, т. 46, вып. 2, с. 321–329.
- [22] Райхл Л.Е. Переход к хаосу в консервативных классических и квантовых системах. М. - Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2008, 756с.
- [23] Синай Я.Г. Стохастичность динамических систем. В кн. Нелинейные волны, ред. Гапонов–Грехов А.В. М.: Наука, 1979, с. 192-212.
- [24] Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем. УФН, 141, 1983, 343–374.
- [25] Холостова О. В. О некоторых динамических эффектах твердого тела на абсолютно шероховатой сферической поверхности, Изв. АН СССР, Мех. тв. тела, 1986, №6, с. 51–56.

- [26] Шустер Г. Детерминированный хаос. М., Мир, 1988, 253с.
- [27] Якобсон М.В. Инвариантные меры абсолютно непрерывные относительно dx для однопараметрических семейств одномерных отображений. УМН, **35**:4(214), 1980, 215–216
- [28] Benediks M. and Carleson L. Dynamics of the Hénon map. Ann. Math. **133**, 1991, 73-169.
- [29] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part I: Theory. Part II: Numerical application. Meccanica, **15**, 1980, 9–30.
- [30] Borisov A.V., Mamaev I.S. The rolling motion of a rigid body on a plane and a sphere. Hierarchy of dynamics. Regular and Chaotic Dynamics, **7**, 2002, No 2, 177-200.
- [31] Borisov A.V., Mamaev I. S., Kilin A. A. Rolling of a ball on a surface. New integrals and hierarchy of dynamics. Reg. & Chaot. Dyn., 2002, v. 7, No 2, p. 201–220.
- [32] Borisov A.V., Jalnin A.Yu., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Sedova J.V. Dynamical phenomena occurring due to phase volume compression in nonholonomic model of the rattleback. Regular and Chaotic Dynamics, **17**, 2012, No 6, 512-532.
- [33] Broer, H., Simó, C., Vitolo, R., Bifurcations and strange attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing. Nonlinearity, 2002, **15**, pp.1205–1267.
- [34] Gallas J.A.C. Dissecting shrimps: results for some one-dimensional physical systems. Physica A, **202**, 1994, 196-223.
- [35] Hénon M. On the numerical computation of Poincaré maps. Physica D, **5**, 1982, No 2–3, 412–414.
- [36] Kane T.R., Levinson D.A. Realistic mathematical modeling of the rattleback. International Journal Non-Linear Mechanics, 1982, v. 17, №3, p. 175–186.
- [37] Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. and Chua L.O. Multi-parameter criticality in Chua’s circuit at period-doubling transition to chaos. International Journal of Bifurcation and Chaos, **6**, 1996, No 1, 119-148.

- [38] Kuznetsov S.P., Kuznetsov A.P. and Sataev I.R. Multiparameter Critical Situations, Universality and Scaling in Two-Dimensional Period-Doubling Maps. *Journal of Statistical Physics*, **121**, 2005, Nos. 5-6, 697-748.
- [39] Kuznetsov S.P. *Hyperbolic Chaos: A Physicist's View*. Higher Education Press: Beijing and Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, 2012, 336p.
- [40] Linderberg R. E., Longman R.W. On the dynamic behavior of the wobblestone. *Acta mechanica*, 1983, v. 49, №1-2, p. 81-94.
- [41] Reick C. Universal corrections to parameter scaling in period-doubling systems: Multiple scaling and crossover. *Phys. Rev. A*, **45**, 1992, 777-792.
- [42] Sevryuk M.B. *Reversible Systems*. Lect. Notes Math., 1211, Berlin: Springer-Verlag, 1986. 319 p.
- [43] Tucker W. A rigorous ODE solver and Smale's 14th problem. *Comp. Math.*, **2**, 2002, 53-117.
- [44] Walker J. The mysterious "rattleback": a stone spins in one direction and then reverses. *Scientific American*, 1979, №10, p. 144-149.