



Сергей Петрович Кузнецов родился в 1951 году в Москве. С отличием окончил Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского (1973). В 1977 году защитил кандидатскую, а в 1987 году — докторскую диссертацию по специальности «Радиофизика». Сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН (с 1988 года), где руководит лабораторией теоретической нелинейной динамики.

По совместительству является профессором

на базовой кафедре динамических систем факультета нелинейных процессов Саратовского госуниверситета и ведущим научным сотрудником лаборатории нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения на базе Удмуртского госуниверситета.

Автор более 200 научных публикаций в отечественной и зарубежной печати. Автор книги «Hyperbolic Chaos: A Physicist's View», опубликованной в рамках совместной программы издательств *Springer* и *Higher Education Press* (КНР). Автор учебно-научной монографии «Динамический хаос» и соавтор книги «Нелинейные колебания», вышедших в серии «Современная теория колебаний и волн» («Физматлит», Москва). Соавтор книги «Strange Nonchaotic Attractors: Dynamics between Order and Chaos in Quasiperiodically Forced Systems», написанной совместно с немецкими коллегами и вышедшей в издательстве *World Scientific*. Под руководством С. П. Кузнецова защищено 10 кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России, Соросовский профессор, член редакционной коллегии журнала «Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика».

ISBN 978-5-4344-0100-5

Динамический хаос
и гиперболические аттракторы

С. П. Кузнецов



С. П. Кузнецов

Динамический хаос и гиперболические аттракторы

От математики к физике





Лаборатория нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения (<http://lab.ics.org.ru>) создана на базе Удмуртского государственного университета в 2010 году благодаря гранту Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования.

Важнейшей целью деятельности лаборатории являются поиск и реализация новых способов передвижения на суше и в жидкости. С одной стороны, актуальность таких исследований обусловлена растущей необходимостью в увеличении надежности и маневренности существующих транспортных средств. С другой стороны, не менее важной задачей является разработка принципиально новых транспортных устройств для применения в специфических условиях (например, в космосе, на дне океана). Совершенно очевидно, что самые перспективные, действительно прорывные разработки связаны с созданием мобильных роботов, использующих способы перемещения, заимствованные из живой природы (механизмы полета птиц и насекомых, плавания рыб и микроорганизмов, перемещения змей).

Эффективное решение поставленных задач возможно только при условии глубокого понимания физических явлений, а также изучения и обобщения передового мирового опыта в такой наукоемкой области, как робототехника. Именно поэтому неотъемлемой частью работы лаборатории является издание трудов по теоретической и прикладной механике, теории управления, теории вычислительных систем, биомеханике и биомиметике. Большая часть публикаций является переводами наиболее ценных зарубежных материалов и фактически представляет собой прекрасную базу для отечественных научно-исследовательских работ и постановки экспериментов.

С. П. Кузнецов

**ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС
И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ
АТТРАКТОРЫ
ОТ МАТЕМАТИКИ К ФИЗИКЕ**



Москва ♦ Ижевск

2013

УДК 53:51 + 530.1
ББК 22.31+29.05.03+22.311
К891

Интернет-магазин
MAHESSES
<http://shop.rcd.ru>

• физика
• математика
• биология
• нефтегазовые
технологии

Кузнецов С. П.

Динамический хаос и гиперболические аттракторы: от математики к физике. — М.–Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2013. — 488 с.

Книга посвящена рассмотрению возможности реализации в физических системах структурно устойчивого хаоса, обусловленного присутствием однородно гиперболических аттракторов, таких как соленоид Смейла–Вильямса, DA-аттрактор Смейла, аттракторы типа Плыкина. Дается обзор содержательной части гиперболической теории, а также возможных ситуаций появления гиперболических аттракторов. На основе физических принципов конструируются примеры систем с такими аттракторами. Рассмотрены методы компьютерной проверки гиперболичности и даны иллюстрации их применения. Обсуждается моделирование электронных устройств с гиперболическими аттракторами и наблюдение гиперболического хаоса в лабораторных экспериментах. Книга предназначена для студентов, аспирантов, исследователей в области нелинейной динамики и ее приложений.

ISBN 5-93972-???-?

ББК 22.31+29.05.03+22.311

© С. П. Кузнецов, 2013

© Ижевский институт компьютерных исследований, 2013

<http://shop.rcd.ru>
<http://ics.org.ru>

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|----|
| Предисловие | 11 |
| Часть I. Основные понятия и обзор | 19 |
| Глава 1. Динамические системы | 21 |
| 1.1. Динамические системы: основные понятия. Системы с непрерывным и дискретным временем и их взаимосвязь | 22 |
| 1.2. Описание динамики в терминах «фазовой жидкости». Консервативные и диссипативные системы. Аттракторы | 25 |
| 1.3. О динамических системах в механике | 27 |
| 1.4. Показатели Ляпунова и их вычисление | 30 |
| 1.5. Грубые системы и структурная устойчивость | 35 |
| Глава 2. Формальные примеры хаотических аттракторов | 37 |
| 2.1. Хаос в рамках представления о фазовой жидкости и отображение пекаря | 38 |
| 2.2. Соленоид Смейла–Вильямса | 41 |
| 2.3. DA-аттрактор | 42 |
| 2.4. Аттракторы типа Плыкина | 44 |
| Глава 3. Основы гиперболической теории | 47 |
| 3.1. Понятие гиперболичности | 48 |
| 3.2. Содержание и результаты гиперболической теории | 52 |
| 3.2.1. Критерий конусов | 54 |
| 3.2.2. Неустойчивость | 55 |
| 3.2.3. Поперечная канторова структура аттрактора и размерность Каплана–Йорке | 56 |
| 3.2.4. Марковские разбиения и символическая динамика | 57 |
| 3.2.5. Перечисление орбит и топологическая энтропия | 59 |
| 3.2.6. Структурная устойчивость | 59 |
| 3.2.7. Инвариантная мера Синяя–Рюэля–Боуэна | 60 |
| 3.2.8. Отслеживание псевдотракторий и воздействие шума | 62 |
| 3.2.9. Эргодичность и перемешивание | 62 |
| 3.2.10. Энтропия Колмогорова–Синяя | 63 |

| | |
|--|-----|
| Глава 4. Где искать гиперболические аттракторы? | 65 |
| 4.1. Теорема Ньюхауса–Такенса–Рюэля и ее отношение к однородно гиперболическим аттракторам | 66 |
| 4.2. Модель Лоренца и ее модификации | 69 |
| 4.3. Некоторые отображения с однородно гиперболическими аттракторами | 72 |
| 4.4. От DA-аттрактора к аттрактору типа Плыкина | 75 |
| 4.5. Пример Ханта: надстройка аттрактора типа Плыкина | 80 |
| 4.6. Движение по геодезическим линиям на поверхности отрицательной кривизны и механическая система с гиперболической динамикой | 86 |
| 4.7. Возможное возникновение аттрактора Плыкина в модели нейрона типа Хиндмарша–Роуза | 92 |
| 4.8. Катастрофа голубого неба и рождение аттрактора Смейла–Вильямса | 94 |
| 4.9. Машина для вытягивания сахарной ваты | 96 |
| Часть II. Низкоразмерные модели | 99 |
| Глава 5. Механическое движение с толчками | 101 |
| 5.1. Механические модели: движение частицы на плоскости под действием периодических толчков | 102 |
| 5.2. Численное моделирование и наблюдение аттракторов типа соленоида Смейла–Вильямса | 104 |
| Глава 6. Дифференциальные уравнения с периодическими переключениями | 109 |
| 6.1. Система с переключениями, имеющая аттрактор типа Смейла–Вильямса | 110 |
| 6.2. Динамическая система с аттрактором типа Плыкина | 112 |
| 6.2.1. Аттрактор типа Плыкина на сфере | 113 |
| 6.2.2. Аттрактор типа Плыкина на плоскости | 117 |
| Глава 7. Неавтономные системы на основе связанных автоколебательных элементов | 125 |
| 7.1. Осциллятор ван дер Поля | 126 |
| 7.2. Аттрактор Смейла–Вильямса в неавтономной системе попеременно возбуждаемых осцилляторов ван дер Поля | 129 |
| 7.3. Система попеременно возбуждаемых осцилляторов ван дер Поля, описываемая в терминах медленных комплексных амплитуд | 140 |

| | |
|---|-----|
| 7.4. Нерезонансная передача возбуждения | 142 |
| 7.5. Аттрактор типа Плыкина в неавтономной системе связанных осцилляторов | 143 |
| 7.5.1. Представление состояний на сфере и уравнения модели | 144 |
| 7.5.2. Численные результаты для связанных осцилляторов | 147 |
| Глава 8. Автономные системы с однородно гиперболическими аттракторами | 151 |
| 8.1. Автономная система двух связанных осцилляторов с саморегулирующимся попеременным возбуждением | 152 |
| 8.2. Система, построенная на основе модели хищник–жертва | 155 |
| 8.3. Пример катастрофы голубого неба, сопровождающейся рождением аттрактора Смейла–Вильямса | 162 |
| 8.4. Минимальная модель с аттрактором Смейла–Вильямса | 169 |
| Глава 9. Параметрические генераторы гиперболического хаоса | 175 |
| 9.1. Параметрическое возбуждение связанных осцилляторов. Трехчастотный параметрический генератор | 176 |
| 9.2. Гиперболический хаос в параметрическом генераторе с модулированной добротностью и модуляцией накачки | 180 |
| 9.2.1. Динамические уравнения | 181 |
| 9.2.2. Качественное объяснение механизма работы | 183 |
| 9.2.3. Численные результаты | 185 |
| 9.2.4. Численные результаты в рамках метода медленных комплексных амплитуд | 188 |
| 9.3. Параметрический генератор гиперболического хаоса на основе четырех связанных осцилляторов с модуляцией накачки | 190 |
| 9.3.1. Модель, принцип действия и основные уравнения | 192 |
| 9.3.2. Хаотическая динамика: результаты компьютерного моделирования | 194 |
| Глава 10. Гиперболическая динамика в амплитудных уравнениях | 201 |
| 10.1. Амплитудная динамика в терминах угловой переменной, подчиняющейся отображению типа Бернулли | 202 |
| 10.2. Модель двух попеременно возбуждающихся пар осцилляторов ван дер Поля с равными частотами | 208 |
| 10.3. Модель двух попеременно возбуждаемых пар нерезонансных осцилляторов ван дер Поля | 212 |
| 10.4. Описание моделей, построенных на основе осцилляторов ван дер Поля, методом медленно меняющихся амплитуд | 216 |

| | |
|---|-----|
| Часть III. Проверка гиперболичности | 219 |
| Глава 11. Проверка трансверсальности пересечения многообразий | 221 |
| 11.1. Визуализация многообразий | 222 |
| 11.2. Распределение углов пересечения многообразий | 226 |
| Глава 12. Визуализация инвариантных мер | 233 |
| 12.1. Методика визуализации инвариантных мер | 234 |
| 12.2. Численные результаты для гиперболических и негиперболических аттракторов | 235 |
| Глава 13. Критерий конусов | 241 |
| 13.1. Процедура проверки критерия конусов | 242 |
| 13.2. Примеры применения критерия конусов | 249 |
| Часть IV. Многомерные системы и феномены | 261 |
| Глава 14. Системы четырех попеременно возбуждающихся неавтономных осцилляторов | 263 |
| 14.1. Динамика, описываемая отображением «кот Арнольда», в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля | 264 |
| 14.2. Динамика, соответствующая отображениям с гиперхаосом | 272 |
| 14.2.1. Система, реализующая отображение с гиперхаосом на торе | 273 |
| 14.2.2. Модель с каскадной передачей возбуждения вверх по спектру частот | 274 |
| Глава 15. Гиперхаос и синхронизация хаоса в системе связанных неавтономных осцилляторов | 283 |
| 15.1. Уравнения и основные режимы работы | 284 |
| 15.2. Уравнения для медленных комплексных амплитуд | 290 |
| 15.3. Динамика фаз | 292 |
| 15.4. Изрешечивание бассейна и пузырение аттрактора | 293 |
| Глава 16. Автономные системы с динамикой вблизи гетероклинического контура | 301 |
| 16.1. Гетероклинический контур: пример Гукенхеймера и Холмса | 302 |
| 16.2. Аттрактор типа Смейла–Вильямса в системе трех связанных автоколебательных элементов | 304 |
| 16.3. Аттрактор с динамикой, описываемой отображением «кот Арнольда» | 308 |

| | |
|--|-----|
| 16.4. Модель с гиперхаосом | 312 |
| 16.5. Автономная система с аттрактором типа Смейла–Вильямса при резонансной передаче возбуждения в кольцевом массиве осцилляторов ван дер Поля | 315 |
| Глава 17. Системы с запаздывающей обратной связью | 321 |
| 17.1. Некоторые сведения о дифференциальных уравнениях с отклоняющимся аргументом | 322 |
| 17.2. Осциллятор ван дер Поля с запаздывающей обратной связью, модуляцией параметра и вспомогательным сигналом | 326 |
| 17.2.1. Аттрактор типа Смейла–Вильямса в системе с запаздыванием | 327 |
| 17.2.2. Гиперхаос | 331 |
| 17.3. Осциллятор ван дер Поля с двумя петлями запаздывающей обратной связи и модуляцией параметра | 337 |
| 17.4. Автономная система с запаздыванием | 343 |
| 17.5. Параметрический генератор хаоса с запаздывающей обратной связью и модуляцией накачки | 347 |
| Глава 18. Гиперболический хаос структур Тьюринга | 355 |
| 18.1. Структуры Тьюринга и модельные уравнения | 356 |
| 18.2. Гиперболический хаос в модели Свифта–Хохенберга с модуляцией параметров | 358 |
| 18.2.1. Кольцевая система | 359 |
| 18.2.2. Конечномерная модель | 364 |
| 18.2.3. Система с фиксированными граничными условиями | 368 |
| Часть V. Электронные схемы: моделирование и эксперименты | 373 |
| Глава 19. Электронные схемы с гиперболическим хаосом в программной среде Multisim | 375 |
| 19.1. Программный продукт Multisim | 376 |
| 19.2. Системы с аттрактором Смейла–Вильямса | 376 |
| 19.2.1. Система на основе неавтономных осцилляторов ван дер Поля | 376 |
| 19.2.2. Система на основе неавтономного осциллятора ван дер Поля с дополнительной цепью запаздывающей обратной связи | 381 |

| | |
|--|------------|
| 19.2.3. Аналоговое устройство с аттрактором Смейла–Вильямса. Неавтономная система..... | 385 |
| 19.2.4. Аналоговое устройство с аттрактором Смейла–Вильямса. Автономная система..... | 391 |
| 19.3. Аттрактор типа Плыкина в электронном устройстве, моделируемом в программной среде Multisim..... | 396 |
| 19.3.1. Основные уравнения..... | 396 |
| 19.3.2. Схема аналогового устройства и моделирование в среде Multisim..... | 398 |
| 19.3.3. Выявление природы аттрактора..... | 402 |
| Глава 20. Эксперименты с электронными устройствами, имеющими аттрактор типа Смейла–Вильямса..... | 407 |
| 20.1. Экспериментальное устройство в виде двух попеременно возбуждающихся неавтономных осцилляторов..... | 408 |
| 20.2. Электронные устройства с запаздыванием..... | 412 |
| 20.2.1. Система с запаздывающей обратной связью, модуляцией параметра и вспомогательным сигналом..... | 413 |
| 20.2.2. Система с двумя петлями запаздывающей обратной связи и модуляцией параметра..... | 417 |
| Заключение..... | 423 |
| Приложения..... | 427 |
| А. Отображения Эно и Икеды..... | 429 |
| В. Кельтский камень..... | 439 |
| С. Подкова Смейла и гомоклиническое сплетение..... | 453 |
| Д. Размерности и формула Каплана–Йорке..... | 459 |
| Е. Модель Ханга: формальное определение..... | 465 |
| Список литературы..... | 471 |

Предисловие

Изучение сложной динамики и хаоса в нелинейных системах является одним из интенсивно развивающихся направлений научных исследований в течение нескольких последних десятилетий. (См., например, [Рабинович, Трубецков, 1984; Неймарк, Ланда, 1987; Шустер, 1988; Заславский, Сагдеев, 1988; Глас, Мэки, 1991; Argyris et al., 1994; Lorenz, 1995; Robertson and Combs, 1995; Alligood et al., 1996; Nakagawa, 1999; Hilborn, 2001; Strogatz, 2002; Райхл, 2008; Cencini et al., 2009].)

Мы рассматриваем объект как *динамическую систему*, если ее состояние в любой момент времени получается из начального состояния в соответствии с некоторым правилом, заданным для данной системы. Примечательно, что такое определение, хотя и представляет идеал детерминистского описания, не исключает возможность хаотического поведения объекта, когда зависимость состояния от времени выглядит как случайный процесс. Хаос встречается в системах различной природы, например в механике, гидродинамике, электронике, лазерной физике и нелинейной оптике, химической кинетике, в биомедицинских дисциплинах. Основным атрибутом динамического хаоса является чувствительность к малым возмущениям начальных условий, что делает невозможным предсказание будущего состояния на временах больше, чем некоторый характерный масштаб, который обычно зависит логарифмически от неточности начальных условий («горизонт предсказуемости»).

Для диссипативных динамических систем хаос ассоциируется с присутствием в пространстве состояний замечательного объекта, называемого *странным аттрактором*. В настоящее время коллекция модельных систем, обладающих странным аттрактором, достаточно обширна; она включает искусственные математические примеры, а также модели физических, химических, биологических систем (см., например, [Rössler, 1979; Неймарк, Ланда, 1987; Scott, 1993; Sprott, 1994; Анищенко и др., 1999; Haefner, 2005; Fortuna et al., 2009; Спротт, 2012]).

Классическим примером хаотического аттрактора служит *аттрактор Лоренца* [Лоренц, 1981; Sparrow, 1982; Гукенхеймер, Холмс, 2002]. Он имеет место в системе трех дифференциальных уравнений первого порядка, моделирующих конвекцию в жидкости или динамику одномодового лазера. Модель Лоренца много лет оставалась предметом активных и тща-

тельных исследований. Аккуратное математическое обоснование хаотической природы динамики модели Лоренца оказалось непростой и деликатной задачей. Она была анонсирована как 14-я проблема в списке трудных математических проблем, предложенном Стивеном Смейлом в качестве вызова математикам XXI века [Smale, 1998; 2000], подобно проблемам Гильберта, которые адресовались математикам XX века. Решение было дано В. Такером на основе комбинации техники доказательных вычислений (computer assisted proof) и аккуратного аналитического рассмотрения [Tucker, 2002; Stewart, 2000].

Можно посетовать об упущенной возможности для нелинейной науки отыскать иной, менее болезненный путь к открытию физически значимых и математически обоснованных примеров хаотического поведения.

Около 40 лет назад в математических работах был введен в рассмотрение специальный тип хаотических аттракторов, а именно *однородно гиперболические (или равномерно гиперболические) аттракторы*. Они относятся к классу так называемых *систем с аксиомой A* и рассматриваются в *гиперболической теории*, связанной с именами Аносова, Алексеева, Смейла, Вильямса, Синая, Плыкина, Рюэля, Песина, Ньюхауса и других. [Аносов, 1967; Аносов и др., 1991; Смейл, 1970; Williams, 1974; Синай, 1972; 1979; Плыкин, 1974; Ruelle, 1976; Песин, 1977; Newhouse et al., 1978]. Хаотическая природа динамики на однородно гиперболических аттракторах строго доказана. Они обладают свойством *структурной устойчивости*, т. е. устройство фазового пространства, характер динамики и ее статистические характеристики не чувствительны к изменению параметров и функций, присутствующих в уравнениях движения.

Первоначально ожидалось, что однородно гиперболические аттракторы будут соответствовать многим физическим ситуациям возникновения динамического хаоса [Рюэль, Такенс, 1981; Синай, 1979]. Однако с течением времени, по мере того как было предложено и изучено много примеров хаотических систем различной природы, стало ясно, что эти примеры не вписываются в узкие рамки ранней гиперболической теории. Поэтому однородно гиперболические аттракторы стали рассматриваться лишь как рафинированный абстрактный образ хаоса, не имеющий прямого отношения к реальным системам. Усилия математиков оказались перенаправлены на развитие обобщений, применимых к более широкому классам систем. Например, были введены квазигиперболические (сингулярно гиперболические) аттракторы, неоднородно гиперболические аттракторы, частично гиперболические аттракторы, квазиаттракторы, и в их исследовании был достигнут определенный прогресс [Benedicks and Carleson, 1991; Shilnikov, 1997; Pesin, 2004; Bonatti et al., 2005].

Заброшенным на долгие годы и не проясненным до последнего времени оставался вопрос о возможности возникновения динамического поведения, связанного с однородно гиперболическими аттракторами в реальных системах в природе или, по крайней мере, в специально разработанных системах физики и техники.

В учебниках и обзорах по нелинейной динамике однородно гиперболические аттракторы представлены обычно искусственными моделями с дискретным временем, в основе которых лежат определенные геометрические построения, зачастую объясняемые качественно на словах, или с помощью графических образов. Конечно же, для физика это не более чем исходный пункт работы.

Прежде всего, в дополнение к геометрическим конструкциям желательно иметь примеры явно выписанных уравнений, допускающих применение компьютерных методов для анализа динамики и расчета количественных характеристик, интересных для возможных приложений.

Для некоторых физических систем описание в дискретном времени оказывается весьма естественным, и стоило бы рассмотреть возможность возникновения гиперболических аттракторов для отображений, отвечающих таким системам.

Далее, важно обратиться к системам с непрерывным временем, поскольку именно они имеют первостепенное значение в физике и технике.

Желательно иметь четкое представление, как реализовать динамику на однородно гиперболических аттракторах, используя комбинации структурных элементов, известных в контексте теории колебаний и в приложениях (осцилляторы, связанные системы, цепи обратной связи).

Наконец, предлагаемые модели должны быть построены в виде реально функционирующих устройств, например, в электронике, механике, нелинейной оптике, и должны быть указаны технические приложения таких систем с разъяснением их преимуществ по сравнению с альтернативными возможными решениями.

В теории колебаний, начиная с классических работ Андронова и его школы [Andronov and Pontjagin, 1937; Андронов и др., 1959], грубые или структурно устойчивые системы рассматриваются как подлежащие первоочередному теоретическому исследованию и как наиболее важные для практики [Рабинович, Трубецков, 1984; Ланда, 2010; Шильников и др., 2003, 2009]. Казалось бы, то же самое должно относиться естественным образом к системам со структурно устойчивыми однородно гиперболическими аттракторами. Отсутствие физических примеров в этой связи выглядит непонятным и неприемлемым. С методологической точки зрения

ситуация подобна той, которая имела место в начале XX века в отношении предельных циклов, которые уже были известны как математические объекты, но до того, как была установлена их роль как образа автоколебаний. По аналогии можно думать, что однородно гиперболические аттракторы должны найти свое место как математические образы определенных феноменов в реальных системах. Это содействовало бы соединению абстрактной гиперболической теории, развитой математиками, с описанием реального мира и наполнению этой теории физическим содержанием.

Настоящая книга посвящена обзору современного состояния проблемы и состоит из пяти частей.

Часть I служит вводной и содержит четыре главы. В **главе 1** излагаются основные необходимые концепции, включая понятие динамической системы, аттрактора, отображения Пуанкаре, показателей Ляпунова. В **главе 2** вводятся в рассмотрение и обсуждаются классические примеры однородно гиперболических аттракторов: соленоид Смейла–Вильямса, DA-аттрактор Смейла, аттракторы типа Плыкина. В **главе 3** представлен обзор содержательной части гиперболической теории (критерий конусов, структурная устойчивость, марковские разбиения и символическая динамика, меры Синая–Рюэля–Боуэна и т. д.). **Глава 4** содержит обзор работ, касающихся различных возможных ситуаций появления однородно гиперболических аттракторов в динамических системах.

Часть II является основной. Здесь вводится ряд примеров систем, которые допускают физическую реализацию и обладают однородно гиперболическими аттракторами с одномерным неустойчивым многообразием (одним положительным показателем Ляпунова). В **главе 5** обсуждаются системы, функционирующие под действием периодических импульсных толчков. В **главе 6** рассматриваются системы, динамика которых составлена из периодически чередующихся стадий, отвечающих той или иной форме правых частей дифференциальных уравнений. В **главе 7** конструируются и исследуются модели на базе двух автоколебательных элементов, которые возбуждаются по очереди благодаря обусловленной внешним воздействием модуляции параметров и передают колебательное возбуждение друг другу так, что фаза преобразуется в соответствии с растягивающим отображением окружности. **Глава 8** посвящена автономным системам, функционирующим по тому же принципу. В **главе 9** рассмотрены схемы параметрических генераторов хаоса с гиперболическими аттракторами. В **главе 10** рассматриваются системы, в которых растягивающему отображению окружности подчиняется не фаза, а специальная угловая переменная, характеризующая распределение амплитуд между двумя автоколебательными элементами.

Часть III посвящена обсуждению методов компьютерной проверки гиперболической природы аттракторов и иллюстрациям применения этих методов с использованием примеров из части II. В **главе 11** рассматривается техника визуализации взаимного расположения устойчивых и неустойчивых многообразий принадлежащих аттрактору траекторий, а также метод, основанный на статистическом анализе распределения углов их пересечения. В **главе 12** обсуждается визуализация распределений естественной инвариантной меры на аттракторах. В **главе 13** излагается в деталях содержание процедуры компьютерной проверки критерий конусов и приводятся примеры его использования.

Часть IV содержит материал, относящийся к модельным системам, для которых математическое обоснование гиперболической природы аттракторов является более проблематичным из-за высокой размерности. С физической точки зрения эти модели представляются аналогичными рассмотренным в части II, для которых гиперболическость проверена на уровне компьютерных расчетов. В **главе 14** рассматриваются неавтономные системы на основе четырех попеременно возбуждающихся осцилляторов. Среди них присутствует модель, в которой преобразование фаз за период модуляции параметров подчиняется отображению Аносова на торе, и модель, описываемая отображением на торе с динамикой типа гиперхаоса (имеется два положительных показателя Ляпунова). В **главе 15** рассмотрена система, составленная из двух связанных элементов, каждый из которых характеризуется присутствием гиперболического аттрактора. Применительно к этому случаю исследованы некоторые детали перехода к полной хаотической синхронизации. В **главе 16** рассмотрено несколько вариантов автономных систем, функционирующих благодаря динамике вблизи гетероклинического цикла амплитудных уравнений. На этой основе обеспечивается присутствие аттрактора типа Смейла–Вильямса в отображении Пуанкаре, а также аттрактора с циклическими (фазовыми) переменными, подчиняющимися отображению Аносова, и аттрактора, реализующего гиперхаос. **Глава 17** посвящена системам с запаздывающей обратной связью, в которых хаотическое отображение для фаз последовательно генерируемых цугов колебаний обеспечивается благодаря передаче возбуждения от предыдущих стадий активности одиночного автоколебательного или параметрически возбуждаемого элемента к последующим стадиям активности. В **главе 18** рассмотрена распределенная система с периодической модуляцией параметра, в которой пространственная фаза чередующихся длинноволновых и коротковолновых структур типа Тьюринга описывается хаотическим отображением.

Часть V посвящена рассмотрению примеров гиперболических (или гипотетически гиперболических) аттракторов в электронных схемах. В **главе 19** обсуждается конструирование схем и представлены результаты моделирования нескольких вариантов генераторов хаоса с аттракторами типа Смейла–Вильямса и Плькина в программной среде Multisim. В **главе 20** обсуждаются результаты имеющихся к настоящему времени экспериментальных исследований неавтономной системы на основе двух попеременно возбуждающихся автоколебательных элементов с аттрактором типа Смейла–Вильямса и двух вариантов систем с запаздывающей обратной связью.

Приложения включают ряд вопросов, которые существенны для проводимого рассмотрения и иллюстраций, но выпадают из основной структуры изложения данной книги. Рассмотрен вывод отображений Эно и Икеды в для модельных физических систем с импульсными толчками. Обсуждается механическая система со сложной динамикой — «кельтский камень». Излагается математическая конструкция подковы Смейла, доставляющая нетривиальный пример сложного непритягивающего инвариантного множества. Дается введение в теорию размерностей в контексте ее применения для характеристики фрактальных свойств хаотических аттракторов, выводится и поясняется формула Каплана–Йорке, связывающая показатели Ляпунова и оценку фрактальной размерности. Воспроизводится формальное построение модели, предложенной Хантом, которая доставляет пример аттрактора типа Плькина.

Автор старался представить материал в стиле, доступном для студентов и аспирантов нематематических специальностей, и, насколько возможно, сделать изложение самосогласованным, чтобы книга допускала изучение без обращения к другим источникам. Изложение по возможности обходит определения и формулировки, использующие специальную математическую символику, предпочтение отдается интуитивной аргументации на качественном уровне. Возможно, часть математически ориентированных читателей сочтет это недостаточным; им можно рекомендовать обратиться к существующей обширной литературе по математической теории динамических систем. Автор должен предупредить, что изложение общего содержания нелинейной динамики ограничено здесь минимумом, требуемым для понимания содержания книги. Поэтому ее материал не следует рассматривать как замену систематического изложения в рамках общих курсов теории динамических систем, к которым читателю имеет смысл обратиться для этой цели.

Книга может представлять интерес для физиков и инженеров, заинтересованных в практических приложениях динамического хаоса, в особен-

ности в плане получения грубого хаоса, нечувствительного к флуктуациям, помехам, вариациям параметров и характеристик элементов, из которых собирается устройство. Такого рода приложения могут относиться к разным дисциплинам — механике, гидродинамике, электронике, лазерной физике и нелинейной оптике, нейродинамике.

Можно надеяться, что книга будет полезна математикам, заинтересованным в приложениях гиперболической теории. Для них может оказаться полезным посмотреть, как математические концепции преломляются с позиций прикладных дисциплин.

Автор благодарен за полезные дискуссии, помощь и конструктивную критику многим коллегам, в том числе В. С. Анищенко, В. С. Афраймовичу, Б. П. Безручко, В. Н. Белых, И. В. Белых, А. В. Борисову, Е. И. Волкову, А. С. Дмитриеву, А. Ю. Жалнину, А. Ю. Жирову, О. Б. Исаевой, А. П. Кузнецову, П. В. Купцову, Ю. Курцу (J. Kurths), А. Ю. Лоскутову, Р. МакКэю (R. MacKay), Л. А. Мельникову, Э. Мозекилде (E. Mosekilde), В. И. Некоркину, А. С. Пиковскому, В. И. Пономаренко, А. Г. Рожнёву, М. Г. Розенблюму, Н. М. Рыскину, И. Р. Сатаеву, Е. П. Селезнёву, В. Такеру (W. Tucker), Д. В. Трещёву, Д. И. Трубецкову, Л. В. Тюрюкиной, А. Л. Шильникову.

Выражаю признательность коллегам по работе и администрации Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН за многолетнее дружеское сотрудничество, поддержку и творческую атмосферу, способствующую научной деятельности.

Исследования, положенные в основу этой книги, поддержаны грантами РФФИ 06-02-16619, 09-02-00426, 09-02-00707, 12-02-00342 и РФФИ-ННИО 04-02-04011, 08-02-91963, 11-02-91334. Дополнительно автор отмечает помощь со стороны гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, договор № 11.G34.31.0039.

Часть I
**Основные понятия
и обзор**

Глава 1

Динамические системы

Содержанием этой главы является обзор тех понятий теории динамических систем, которые существенны для понимания последующих глав книги. В частности, обсуждается общее определение динамической системы и выделены некоторые важные их специальные классы: системы с непрерывным и дискретным временем, консервативные и диссипативные системы, автономные и неавтономные системы; специальное внимание уделено системам, исследуемым в классической механике. Излагается интерпретация динамики, использующая представление об ансамбле систем и эволюции соответствующего облака изображающих точек в пространстве состояний. Обсуждается понятие аттрактора. Рассмотрены показатели Ляпунова, доставляющие инструмент количественного анализа хаотической и регулярной динамики, и обсуждается методика их вычисления. Кратко изложена идея грубости, или структурной устойчивости, послужившая основой глубокой исследовательской программы в теории нелинейных колебаний и теории динамических систем, выдвинутой в свое время А. А. Андроновым и его научной школой.

1.1. Динамические системы: основные понятия. Системы с непрерывным и дискретным временем и их взаимосвязь

Конечномерная динамическая система — это такой объект, для которого можно определить мгновенное состояние как набор конечного числа N действительных чисел, о котором говорят как о *векторе состояния*. При этом должно быть задано определенное правило, называемое *оператором эволюции*, которое позволяет точно указать вектор состояния, получающийся из начального состояния в любой последующий момент времени [Биркгоф, 1999; Шустер, 1988; Thompson and Stewart, 1986; Strogatz, 2001; Кузнецов, 2001; Каток и Хасселблат, 2005]. Множество всевозможных состояний системы называют *фазовым пространством*, или *пространством состояний*; его размерность равна числу переменных N , требуемых для задания вектора состояния. Иными словами, это пространство с осями координат, каждой из которых отвечает одна переменная из их полного набора в количестве N .

Могут рассматриваться как системы с непрерывным временем, так и системы с дискретным временем. В математической литературе их называют соответственно *потоками* и *каскадами*.

Изменение состояния с течением времени отвечает движению изображающей точки по *фазовой траектории*, или *орбите*. Множество точек в фазовом пространстве называется *инвариантным множеством*, если все принадлежащие этому множеству изображающие точки под действием оператора эволюции переводятся опять в точки того же самого множества.

Динамика в непрерывном времени *автономных систем* описывается дифференциальными уравнениями вида

$$d\mathbf{x} / dt = \mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ представляет собой вектор состояния размерности N и $\mathbf{F} = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_N(\mathbf{x}))$ — некоторая векторная функция. В координатной записи это соответствует системе уравнений

$$\begin{aligned} dx_1 / dt &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_N), \\ dx_2 / dt &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_N), \\ &\dots \\ dx_N / dt &= F_N(x_1, x_2, \dots, x_N). \end{aligned} \quad (1.2)$$

В силу теоремы существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений [Арнольд, 2000], имея заданное состояние в не-

который момент t_0 , можно однозначно определить состояния как в будущем $t > t_0$, так и в прошлом $t < t_0$. Иначе говоря, эволюцию состояния можно отслеживать как вперед, так и назад во времени.

Если функция \mathbf{F} в правой части дифференциального уравнения (1.1) зависит явным образом от времени t , то такую систему называют *неавтономной*. В физике это отвечает системам, функционирующим в присутствии зависящего от времени внешнего воздействия. Чтобы охарактеризовать в этом случае мгновенное состояние, помимо вектора \mathbf{x} , требуется указать также, к какому моменту времени он относится. Поэтому вводят пространство размерности $N+1$ с дополнительной координатной осью t ; о нем в этом контексте говорят как о *расширенном фазовом пространстве*. В данной книге, обращаясь к неавтономным системам, мы всегда будем иметь в виду только системы, у которых функция в уравнении зависит от времени периодическим образом: $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t+T) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$.

Для систем с дискретным временем оператор эволюции задается с помощью *итерируемых отображений*, определяющих преобразование состояния шаг за шагом:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_n). \quad (1.3)$$

Здесь \mathbf{x} есть вектор состояния, а \mathbf{g} представляет собой векторную функцию, конкретизирующую оператор эволюции. В этом случае фазовой траекторией служит дискретная последовательность точек в фазовом пространстве. Эволюция состояния за k шагов соответствует k -кратной итерации отображения, что обозначается как

$$\mathbf{x}_{n+k} = \mathbf{g}^k(\mathbf{x}_n) \equiv \underbrace{\mathbf{g}(\mathbf{g}(\dots \mathbf{g}(\mathbf{x}_n) \dots))}_{k \text{ times}} \equiv \underbrace{\mathbf{g} \circ \mathbf{g} \circ \dots \circ \mathbf{g}}_{k \text{ times}}(\mathbf{x}_n).$$

Системы с непрерывным временем и системы с дискретным временем тесно связаны между собой. Процедура перехода от одного класса систем к другому известна как *построение сечения Пуанкаре*. В фазовом пространстве системы с непрерывным временем выбирается некоторая фиксированная поверхность таким образом, что фазовые траектории пересекают ее раз за разом в процессе эволюции состояния во времени (рис. 1.1а). Далее, вводится функция \mathbf{g} , которая отображает каждую точку секущей поверхности в другую точку при очередном пересечении той же поверхности траекторией, испущенной из начальной точки. Эта функция задает *отображение Пуанкаре*, или *отображение возврата*. Если коэффициенты в дифференциальных уравнениях имеют гладкую зависимость

от динамических переменных, то отображение Пуанкаре является *диффеоморфизмом* — непрерывно дифференцируемой функцией, имеющей однозначно определенную обратную функцию, которая тоже непрерывно дифференцируема.

Для неавтономных систем, заданных дифференциальными уравнениями с правыми частями в виде периодических функций времени, стандартный метод построения отображения Пуанкаре соответствует *стробоскопическому описанию*. А именно, состояния отслеживаются в дискретные моменты времени, следующие друг за другом с периодом T . Это означает выбор сечения в расширенном фазовом пространстве семейством плоскостей $t = nT$, а отображение осуществляется с каждой из них на следующую плоскость семейства (рис. 1.1б). Все эти плоскости можно считать отождествленными благодаря периодичности функции \mathbf{F} во времени, что всегда предполагается в нашем рассмотрении.

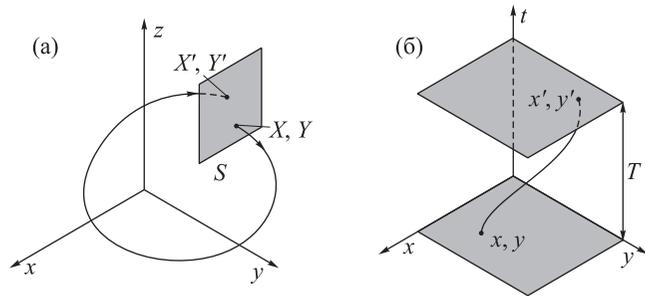


Рис. 1.1. Построение отображения Пуанкаре для трехмерной автономной системы (а) и для неавтономной системы с трехмерным расширенным фазовым пространством (б)

Ситуации, когда отображение Пуанкаре можно выписать в явном виде, довольно редки. Чаще его приходится реализовать как вычислительный алгоритм.

Для неавтономных систем с периодическими правыми частями процедура выполняется очень просто: мы выбираем постоянный шаг интегрирования методом конечных разностей так, что период изменения коэффициентов в дифференциальных уравнениях содержит целое число шагов. Начав с некоторого исходного состояния и отсчитав данное число шагов, мы получим состояние, соответствующее результату преобразования начального состояния под действием стробоскопического отображения Пуанкаре.

В случае автономной динамики нужно предварительно определить сечение Пуанкаре с помощью некоторого соотношения, скажем $S(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0$. Стартуя от начального состояния, которое удовлетворяет этому условию, мы должны выполнить интегрирование уравнений до того момента, когда это же условие будет выполнено снова. Практически, конечно, это произойдет, скорее всего, где-то между последовательными шагами интегрирования; здесь мы должны остановиться и применить какую-либо интерполяционную процедуру. Элегантный рецепт того, как это сделать, обеспечив согласование по точности с используемым методом конечных разностей, был предложен Эно [Hénon, 1982] (см. также [Кузнецов, 2001]). А именно, при обнаружении в процессе вычислений такой ситуации, что перед очередным шагом $S > 0$, а после него $S < 0$, с помощью того же разностного метода делается дополнительный шаг, на котором за независимую переменную принимается S , а величина шага дается полученным перед этим значением S с обратным знаком. Это обеспечивает возвращение изображающей точки на секущую Пуанкаре, притом согласованное по точности с используемой разностной схемой.

Для системы с непрерывным временем, восстановленной по заданному обратимому отображению (служащему для нее отображением Пуанкаре), используют термин *надстройка*¹.

1.2. Описание динамики в терминах «фазовой жидкости». Консервативные и диссипативные системы. Аттракторы

Традиционно различают два класса динамических систем — *консервативные* и *диссипативные*. В физике термин «консервативные» означает «обеспечивающие сохранение энергии». Например, механические колебательные системы без трения относятся к классу консервативных систем. При наличии трения они оказываются диссипативными системами. При этом механическая энергия не сохраняется, но постепенно рассеивается, превращается в тепло, то есть в энергию микроскопического движения молекул самой системы и ее окружения. Строго говоря, в этом случае временная эволюция

¹ Термин *надстройка* предпочтителен для потоковых систем, в которых отображение требуемого вида отвечает фиксированному периоду времени, что соответствует динамике неавтономных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с коэффициентами, периодическими во времени. В общем случае по отношению к системе, для которой данное отображение получается при построении сечения Пуанкаре, используют термин *специальный поток* [Hasselblatt and Pesin, 2008].

должна определяться не только макроскопическим состоянием системы, но и переменными, относящимися к молекулам. Тем не менее во многих случаях описание в рамках теории динамических систем с точки зрения макроскопических переменных остается достаточным, разумным и довольно точным, и мы говорим о диссипативной динамической системе.

Было бы хорошо тем не менее иметь определение, апеллирующее не к определенному классу объектов конкретной физической природы, а к основным понятиям теории динамических систем.

Рассмотрим ансамбль, состоящий из очень большого числа одинаковых невзаимодействующих динамических систем, различающихся только начальными условиями. В фазовом пространстве ансамбль представляется облаком изображающих точек. Это облако эволюционирует во времени, изменяя размер и форму в соответствии с движением составляющих его точек согласно динамическим уравнениям исходной системы (рис. 1.2).

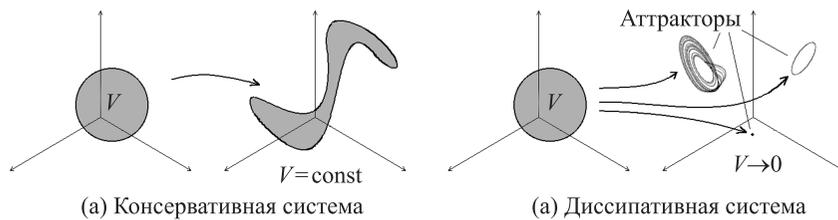


Рис. 1.2. К определению консервативных и диссипативных динамических систем

Может оказаться, что каждый элемент облака конечного размера с течением времени сохраняет свой объем постоянным (по крайней мере при описании с использованием надлежащим образом выбранных переменных). Это случай *консервативных систем*.

В диссипативных системах фазовый объем уменьшается по ходу эволюции во времени, по крайней мере в среднем. Таким образом, облако изображающих точек оседает, в конце концов, на некоторое подмножество в фазовом пространстве, которое называется *аттрактором* (или, возможно, на аттракторы в количестве более одного).

В консервативном случае облако изображающих точек можно мыслить как состоящее из несжимаемой жидкости, в то время как в диссипативном случае его надо представлять себе как сжимаемую субстанцию, наподобие пара, имеющего возможность конденсироваться с существенным уменьшением занимаемого объема.

Аттракторы отвечают устойчивым динамическим режимам в диссипативных системах, возникающим в итоге долговременной эволюции. Простейший пример аттрактора — *устойчивая неподвижная точка*, или устойчивое состояние равновесия. Еще один простой пример — *устойчивый предельный цикл*, замкнутая орбита, представляющая периодические автоколебания. Аттрактор, соответствующий устойчивому квазипериодическому движению в виде композиции составляющих с двумя или более несоизмеримыми частотами, — это *тор* соответствующей размерности. Хаотическим установившимся режимам соответствуют специфические нетривиальные множества в фазовом пространстве, которые называют *странными аттракторами* [Рюэль и Такенс, 1981].

В случае сосуществования двух или более аттракторов в фазовом пространстве говорят о *бистабильности* или *мультистабильности*. Множество состояний в фазовом пространстве, стартуя от которых орбиты приходят к данному аттрактору, называется *бассейном* этого аттрактора.

Оказывается непростой проблемой дать удовлетворительное формальное определение аттрактора, охватывающее всевозможные случаи, которые могут встретиться [Milnor, 1985]. Для целей нашего изложения достаточным будет определение так называемого *максимального аттрактора*, опирающееся на понятие *поглощающей области*.

В случае дискретного времени с оператором эволюции, заданным функцией $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, рассмотрим область D в фазовом пространстве, отображаемую внутрь себя: $\mathbf{g}(D) \subset \text{Int}(D)$. Здесь $\mathbf{g}(D)$ обозначает множество образов, которые получаются применением отображения ко всем точкам, принадлежащим области D . Тогда аттрактор A заведомо располагается в области D и его можно определить как пересечение образов области D , получаемых при различном числе последовательных итераций отображения n , а именно:

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{g}^n(D). \quad (1.4)$$

В случае непрерывного времени понятие максимального аттрактора подразумевает, что имеется связная область D , ограниченная поверхностью V так, что все орбиты пересекают V трансверсально (с ненулевым углом), будучи направленными внутрь области D .

1.3. О динамических системах в механике

Частный, но важный для теории и практики, а также по историческим причинам класс систем — это системы, изучаемые в классической механике.

В этом контексте для консервативных систем, обладающих четной размерностью фазового пространства N , развит формализм Лагранжа и Гамильтона [Ландау и Лифшиц, 1973; Арнольд, 1989]. По традиции, вдвое меньшую величину $N/2$ называют *числом степеней свободы*.

Описание Лагранжа базируется на использовании скалярной функции $L(q_1, \dots, q_{N/2}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{N/2})$, зависящей от обобщенных координат q_i и обобщенных скоростей \dot{q}_i . Для механических систем эта функция имеет смысл разности потенциальной и кинетической энергий. Дифференциальные уравнения получаются из функции Лагранжа стандартным образом и называются *уравнениями Эйлера–Лагранжа*:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, N/2). \quad (1.5)$$

Для учета диссипации формализм Лагранжа дополняют путем введения зависящей от обобщенных скоростей *диссипативной функции Релея* $R(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_2)$ [Гантмахер, 1966; Marsden and Rañiu, 1999]. В простейшем случае линейной диссипации она может иметь вид

$$R(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_2) = \frac{1}{2}(\alpha_1 \dot{x}_1^2 + \alpha_2 \dot{x}_2^2 + \dots + \alpha_{N/2} \dot{x}_{N/2}^2), \quad (1.6)$$

где неотрицательные параметры α_i характеризуют интенсивность диссипации, ассоциирующей с различными степенями свободы. Вместо уравнений Эйлера–Лагранжа в этом случае применяют уравнения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} \quad (i = 1, \dots, N/2). \quad (1.7)$$

Описываемая в терминах переменных (q_i, \dot{q}_i) динамика консервативной системы в пространстве состояний, вообще говоря, не удовлетворяет свойству сохранения элементов объема. Чтобы это свойство выполнялось, надо использовать другой набор переменных. А именно, вместо обобщенных скоростей вводят обобщенные импульсы посредством соотношений вида $p_i = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Чтобы переформулировать описание динамики в терминах канонических переменных (q_i, p_i) , используется функция Гамильтона

$$H(q_1, \dots, q_{N/2}, p_1, \dots, p_{N/2}) = \sum_{i=1}^{N/2} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L, \quad (1.8)$$

а динамика при этом подчиняется *уравнениям Гамильтона*

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N/2. \quad (1.9)$$

В процессе динамической эволюции согласно уравнениям (1.9), в пространстве состояний (q_i, p_i) имеет место сохранение фазового объема, что устанавливается *теоремой Лиувилля*.

Для *неавтономных систем* формализм остается таким же, хотя в этом случае функции Лагранжа и Гамильтона надо считать зависящими дополнительно явным образом от временной переменной t .

В случае *дискретного времени* корректное описание гамильтоновых систем достигается использованием набора неявных уравнений, получаемых из единственной скалярной функции N переменных $F(q_1, \dots, q_{N/2}, q'_1, \dots, q'_{N/2})$, которую называют *производящей функцией*:

$$p_i = -\frac{\partial F(q_1, \dots, q_{N/2}, q'_1, \dots, q'_{N/2})}{\partial q_i}, \quad (1.10)$$

$$p'_i = \frac{\partial F(q_1, \dots, q_{N/2}, q'_1, \dots, q'_{N/2})}{\partial q'_i}, \quad i = 1, \dots, N/2.$$

(Здесь величины, отмеченные штрихом, относятся к следующему шагу дискретного времени.)

В заключение этого параграфа стоит упомянуть, что в механике, помимо систем, описываемых в рамках лагранжева и гамильтонова формализма, выделяют еще специфический класс *систем с неголономными связями*, или, более коротко, *неголономных систем* [Борисов, Мамаев, 2002]. (Собственно термин введен Генрихом Герцем в XIX веке.) К этому классу относятся многие задачи, имеющие большое практическое значение, например, в механике передвижных и летательных аппаратов, робототехнике. История изучения этих систем богата драматическими моментами, в том числе ошибками, которые совершались видными исследователями и лишь затем исправлялись в ходе дальнейшего, более тщательного, анализа.

В целом класс неголономных систем очень широк. В нем имеет место иерархия динамического поведения, подразумевающая систематизацию ситуаций от интегрируемых до неинтегрируемых, в зависимости от количества присущих задаче инвариантов и симметрий [Borisov and Mamaev, 2002].

К граничной ситуации максимальной неинтегрируемости относится задача о «кельтском камне», состоящая в изучении движения твердого тела

с выпуклой гладкой поверхностью на шероховатой плоскости. При этом трение присутствует, но не способно совершать работу, а значит, изменять механическую энергию. Примечательно, что эта и подобные ей неголономные системы занимают в своем роде промежуточное положение между системами консервативными и диссипативными в традиционной трактовке. Хотя сохранение механической энергии имеет место, но свойство сохранения фазового объема отсутствует: локально в пространстве состояний элемент объема в процессе эволюции во времени может претерпевать в одних местах сжатие, а в других растяжение. В такой ситуации, рассматривая движение на выделенной в фазовом пространстве гиперповерхности постоянной энергии, оказывается возможным наблюдать феномены, специфические, казалось бы, только для диссипативной динамики: притягивающие неподвижные точки, предельные циклы [Карапетян, 1981; 1985; Борисов, Мамаев, 2002]. Принципиально важный шаг сделан в работе [Борисов, Мамаев, 2003], где впервые указана возможность реализации в неголономных системах притягивающих инвариантных множеств с хаотической динамикой — странных аттракторов. В фазовом пространстве неголономной системы для каждого притягивающего множества имеется симметричный партнер — объект, составленный из траекторий с точно таким же поведением, но в обратном времени. Кроме того, возможны динамические режимы, которые обладают симметрией по отношению к обращению времени, в том числе хаотические режимы, которые называют смешанной динамикой [Гонченко и др., 2012].

1.4. Показатели Ляпунова и их вычисление

Чтобы различать регулярную и хаотическую динамику на количественном уровне, полезным и конструктивным инструментом служат показатели Ляпунова [Песин, 1977; Рабинович и Трубецков, 1984; Гукенхеймер и Холмс, 2002; Varella and Pesin, 2001; Hilborn, 2001; Анищенко и др., 1999; Ott, 2002; Шустер, 1988; Анищенко и др., 2003].

Для конкретности в приводимых рассуждениях будем иметь в виду автономную систему с непрерывным временем. Обобщение на неавтономный случай и на диффеоморфизмы является простым и непосредственным.

Зададимся некоторой фазовой траекторией $\mathbf{x}(t)$ динамической системы

$$d\mathbf{x} / dt = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (1.11)$$

и рассмотрим, кроме того, ансамбль таких же систем, представленный облаком изображающих точек, изначально имеющим форму маленького шара радиуса ε , centered around the starting point on the given orbit

$\mathbf{x}(t_0)$. Как будет это облако эволюционировать во времени? Пока его размер мал, оно будет иметь форму N -мерного эллипсоида (см. рис. 1.3). Запишем выражения для длин главных полуосей этого эллипсоида в некоторый момент времени t как $\{l_1, l_2, \dots, l_N\} = \{\varepsilon e^{\lambda_1 t}, \varepsilon e^{\lambda_2 t}, \dots, \varepsilon e^{\lambda_N t}\}$. Алгебраически главные полуоси даются сингулярными числами матрицы, задающей эволюцию векторов малых возмущений вдоль опорной траектории [Greene and Kim, 1987]. В пределе малых ε и больших t множество величин $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ определяет *спектр характеристических показателей Ляпунова*. Общепринятым соглашением является их запись в порядке убывания, так что $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$. Каждый показатель можно трактовать как индикатор скорости растяжения (если он положительный) или сжатия (если он отрицательный) для облака изображающих точек по определенному направлению, отвечающему одной из главных осей эллипсоида.

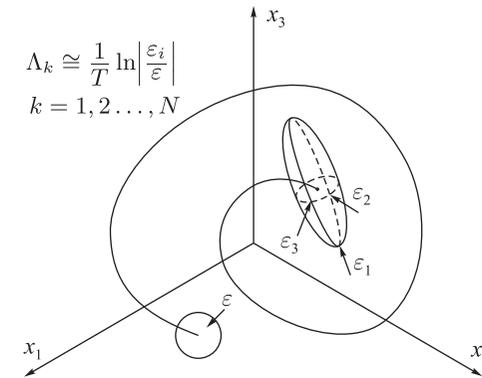


Рис. 1.3. Геометрическая интерпретация спектра показателей Ляпунова: каждый показатель характеризует изменение длины вдоль одной из главных осей эллипсоида, возникающего в результате эволюции бесконечно малого облака изображающих точек, имеющего изначально форму шарика, centered around the starting point of the phase trajectory

Следует иметь в виду, что рассмотренное выше определение относится к показателям Ляпунова *индивидуальной траектории*. Можно ли использовать это понятие в отношении всего аттрактора? Разумеется, это так, если аттрактор представлен одной-единственной орбитой как предельный цикл или устойчивая неподвижная точка. Однако аттракторы более сложной природы составлены из *множества* орбит как тор или странный ат-

трактор. Поэтому вопрос не тривиальный, ибо разные орбиты на аттракторе могут иметь различающиеся показатели Ляпунова.

Как оказывается, желаемое обобщение понятия спектра показателей Ляпунова достижимо и заключается в том, что аттрактору приписывают спектр показателей Ляпунова, полученный для *типичной траектории* на аттракторе. Этот подход находит свое математическое обоснование в так называемой *мультипликативной эргодической теореме* [Оселедец, 1968; Песин, 1977; Raghunathan, 1979; Гуkenхеймер и Холмс, 2002].

Аналитически получить показатели Ляпунова оказывается возможным лишь в редких случаях, так что чаще всего приходится обращаться к их расчету на компьютере.

Вычисления основываются на одновременном решении динамического уравнения (1.11) на относящейся к аттрактору опорной траектории и уравнения для вектора малого возмущения, линеаризованного вблизи этой траектории. Чтобы его вывести, подставим в выражение (1.11) $\mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{x}}(t)$ и разложим правую часть в ряд по возмущению $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N)$, пренебрегая членами выше первого порядка. Это приводит к *уравнению в вариациях*

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t))\tilde{\mathbf{x}}, \quad (1.12)$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{x}(t))$ есть матрица, составленная из частных производных компонент векторной функции $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ по составляющим вектора \mathbf{x} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial x_1} & \frac{\partial F_N}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Матрица \mathbf{A} , вообще говоря, зависит от времени через посредство переменного вектора \mathbf{x} , отвечающего за движение по невозмущенной траектории. Линейное векторное пространство, в котором «живут» векторы возмущения $\tilde{\mathbf{x}}$, относящиеся к каждой точке исходной орбиты \mathbf{x} , называется *касательным пространством*.

Сразу заметим, что при наличии положительного показателя (т. е. как раз в интересном для анализа случае хаоса) вектор возмущения на боль-

ших временах будет претерпевать неограниченное нарастание по норме. Чтобы этого избежать, применяют *алгоритм Бенеттина* [Benettin et al., 1980; Кузнецов, 2001], предусматривающий выполнение по ходу вычислений перенормировки раз за разом вектора возмущения.

Пусть мы производим интегрирование уравнений (1.11) и (1.12) на некотором интервале времени T , стартуя при $t = t_0$ от состояния $\mathbf{x}(t_0)$ и от вектора возмущения $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$ определенной нормы $\|\tilde{\mathbf{x}}(t_0)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N \tilde{x}_i^2(t_0)}$. Поскольку вектор $\tilde{\mathbf{x}}$ удовлетворяет линейному уравнению, эту норму можно взять произвольной, скажем единичной, $\|\tilde{\mathbf{x}}(t_0)\| = 1$.

При $t_1 = t_0 + T$ переопределим возмущения так, чтобы его норма вновь стала равна исходной величине, но направление вектора возмущения не изменилось, и положим $\tilde{\mathbf{x}}^0(t_1) = \tilde{\mathbf{x}}(t_1) / \|\tilde{\mathbf{x}}(t_1)\|$.

Затем продолжим численное решение системы уравнений с начальной точки $\mathbf{x}(t_1)$ и с вектора возмущения $\tilde{\mathbf{x}}^0(t_1)$. В результате получим состояние $\mathbf{x}(t_2)$ в момент $t_2 = t_0 + 2T$ и возмущение $\tilde{\mathbf{x}}(2T)$, которое переопределим как $\tilde{\mathbf{x}}^0(t_2) = \tilde{\mathbf{x}}(t_2) / \|\tilde{\mathbf{x}}(t_2)\|$.

Указанная последовательность действий повторяется многократно (см. рис. 1.4).

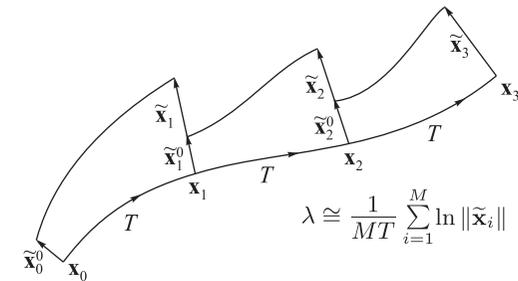


Рис. 1.4. Иллюстрация к оценке старшего показателя Ляпунова с помощью алгоритма Бенеттина (см. текст)

Для M шагов алгоритма результирующий множитель, который характеризует изменение нормы возмущения, будет равен $P_M = \prod_{k=1}^M \|\tilde{\mathbf{x}}_k(t_0 + kT)\|$.

Ясно, что эволюция амплитуды возмущения определяется наибольшим показателем Ляпунова, который можно оценить по формуле

$$\lambda_1 \cong \frac{1}{MT} \ln P_M = \frac{1}{MT} \sum_{k=1}^M \ln \|\tilde{\mathbf{x}}_k(t_0 + kT)\|, \quad (1.14)$$

где M предполагается достаточно большим.

Чтобы вычислить более одного показателя Ляпунова, приходится отслеживать несколько векторов возмущения, эволюционирующих вдоль исходной фазовой траектории (в количестве, равном числу показателей). Однако, если не принять специальных мер, на больших временах у всех векторов будет доминировать составляющая, характеризуемая максимальным показателем Ляпунова, так что оценка всех показателей, кроме наибольшего, окажется невозможной. Поэтому наряду с перенормировкой векторов возмущения на последовательных шагах алгоритма их переопределяют, используя ортогонализацию Грама–Шмидта [Benettin et al., 1980; Кузнецов, 2001].

Алгоритм работает следующим образом. Предположим, что на некотором его шаге векторы возмущения от набора $\tilde{\mathbf{x}}_1^0(t_{k-1}), \tilde{\mathbf{x}}_2^0(t_{k-1}), \tilde{\mathbf{x}}_3^0(t_{k-1}), \dots$ в момент $t_{k-1} = t_0 + (k-1)T$ трансформируются к $\tilde{\mathbf{x}}_1(t_k), \tilde{\mathbf{x}}_2(t_k), \tilde{\mathbf{x}}_3(t_k), \dots$ в момент $t_k = t_0 + kT$. Тогда полагаем

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_1^0(t_k) &= \tilde{\mathbf{x}}_1(t_k) / \|\tilde{\mathbf{x}}_1(t_k)\|, \\ \tilde{\mathbf{x}}_2^0(t_k) &= \mathbf{a}_2 / \|\mathbf{a}_2\|, \quad \mathbf{a}_2 = \tilde{\mathbf{x}}_2(t_k) - \langle \tilde{\mathbf{x}}_2(t_k), \tilde{\mathbf{x}}_1^0(t_k) \rangle \tilde{\mathbf{x}}_1^0(t_k), \\ \tilde{\mathbf{x}}_3^0(t_k) &= \mathbf{a}_3 / \|\mathbf{a}_3\|, \quad \mathbf{a}_3 = \tilde{\mathbf{x}}_3(t_k) - \langle \tilde{\mathbf{x}}_3(t_k), \tilde{\mathbf{x}}_1^0(t_k) \rangle \tilde{\mathbf{x}}_1^0(t_k) - \\ &\quad - \langle \tilde{\mathbf{x}}_3(t_k), \tilde{\mathbf{x}}_2^0(t_k) \rangle \tilde{\mathbf{x}}_2^0(t_k), \\ &\dots, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где угловые скобки обозначают скалярное произведение $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^N u_i v_i$.

Полученные векторы $\tilde{\mathbf{x}}_1^0, \tilde{\mathbf{x}}_2^0, \dots$ используются в качестве исходных для очередного шага алгоритма, начало которого соответствует $t_k = kT$. По ходу вычислений рассчитываются суммы

$$S_m(M) = \sum_{i=1}^M \ln \|\tilde{\mathbf{x}}_m(kT)\| \quad (1.16)$$

и показатели Ляпунова оцениваются из соотношений

$$\lambda_m \approx S_m(M) / MT. \quad (1.17)$$

1.5. Грубые системы и структурная устойчивость

В 1937 году Андронов и Понтрягин ввели представление о *грубых системах* [Andronov and Pontrjagin, 1937; Андронов и др., 1959], позднее оно было переформулировано и развито под именем *структурная устойчивость* [Смейл, 1970; Shilnikov, 1997; Гукенхеймер и Холмс, 2002; Каток и Хасселблат, 1999; Шильников и др., 2003; 2009].

Грубость — это свойство динамической системы сохранять качественное поведение траекторий при малой вариации параметров и функций, фигурирующих в определении оператора эволюции. Более аккуратная формулировка такова: пока упомянутые вариации малы в классе непрерывных функций с первой производной (в общепринятых обозначениях функции класса C^1), система остается эквивалентной исходной в топологическом смысле. Это означает, что существует непрерывная обратимая замена переменных (гомеоморфизм, отображение класса C^0), которая трансформирует направленные фазовые траектории возмущенной системы в направленные траектории исходной системы.

Андронов и Понтрягин указали необходимое и достаточное условие грубости для двумерных потоковых систем, определенных в ограниченной области. (Это наличие конечного числа неподвижных точек и периодических орбит, у которых собственные числа соответствующих линеаризованных задач дистанцированы от нуля, при отсутствии орбит, идущих из одной неподвижной точки типа седла в другую.)

Понятие грубости существенно для физических и технических приложений, поскольку неизбежные на практике мешающие факторы (погрешности изготовления, посторонние воздействия) не будут нарушать характера динамики, по крайней мере пока они остаются достаточно малыми. Именно для грубых систем можно быть уверенным, что математические модели корректно описывают существенные качественные особенности динамического поведения, несмотря на некоторую неточность модели, а также присутствие неустранимых помех и шумов.

Идея грубости, или структурной устойчивости, стала основой мощной исследовательской программы в теории колебаний, выдвинутой и развитой Андроновым и его научной школой [Андронов и др., 1959; Шильников и др., 2003; 2009]. В соответствии с этой программой грубые системы рассматриваются как наиболее типичные и, следовательно, подлежащие

приоритетному теоретическому исследованию и наиболее важные для практики. Следующий шаг состоит в рассмотрении систем первой степени негрубости, которые можно мыслить как пребывающие в пространстве систем на границе, разделяющей разные классы грубых объектов, и это соответствует теории бифуркаций коразмерности один. Далее, можно обратиться к ситуациям, разделяющим системы первой степени негрубости, и это будет теория бифуркаций коразмерности два, и так далее [Kuznetsov Yu., 1998].

Намеченная исследовательская программа оказалась вполне успешной для двумерных потоковых систем, но попытки обобщения на размерность три и выше встретили серьезные затруднения.

Для более высоких размерностей прямое обобщение подхода Андронова и Понтрягина оказалось возможным лишь для ограниченного класса систем, получивших название *систем Морса–Смейла* [Смейл, 1970; Palis, 1969; Гукенхеймер и Холмс, 2002; Devaney, 2003], у которых количество неподвижных точек и периодических орбит в ограниченной области фазового пространства является конечным. За пределами этого класса общая картина для многомерного случая исключительно сложна и концепция грубости уже не представляется столь полезной и продуктивной. В частности, было обнаружено, что в пространстве параметров системы могут существовать целые области, где структурно неустойчивые объекты присутствуют на плотном подмножестве (*области Ньюхауса*) [Newhouse, 1979; Гукенхеймер и Холмс, 2002]. Весь этот круг проблем активно изучался в течение нескольких последних десятилетий.

Однако, в плане нашего изложения, специального внимания заслуживает еще один класс многомерных грубых систем, помимо тех, что относятся к системам Морса–Смейла, — это как раз системы с однородно гиперболическим хаосом. Содержательная теория для них была разработана исключительно математиками [Смейл, 1970; Williams, 1974; Каток и Хасселблат, 1999; Afraimovich and Hsu, 2003; Bonatti et al., 2005; Hasselblatt and Pesin, 2008]. Отсутствие до самого последнего времени физических примеров такого рода систем вызывает чувство серьезной неудовлетворенности. Казалось бы, что общая аргументация, касающаяся теоретического и практического значения грубых систем, должна естественным образом относиться также и к системам с гиперболическим хаосом. Отсюда ясно, что проблема требует проработки в отношении физических систем и технических устройств.

Глава 2

Формальные примеры хаотических аттракторов

В данной главе природа хаоса как феномена, встречающегося в динамических системах, поясняется с помощью интерпретации динамики в терминах фазовой жидкости как эволюции облака точек, представляющих ансамбль идентичных систем в пространстве состояний. В рамках такой трактовки вводятся в рассмотрение и обсуждаются классические примеры однородно гиперболических хаотических аттракторов, в том числе соленоид Смейла–Вильямса, DA-аттрактор Смейла, аттракторы типа Плыкина.

2.1. Хаос в рамках представления о фазовой жидкости и отображение пекаря

Если интерпретировать динамику в терминах ансамбля большого числа идентичных систем, то хаотическое поведение обусловлено тем, что в фазовом пространстве облако изображающих точек по ходу эволюции во времени претерпевает раз за разом деформации растяжения, складывания и поперечного сжатия.

Чтобы прояснить это утверждение, проиллюстрируем его на конкретном примере так называемого *отображения пекаря* в его диссипативном варианте [Manneville, 1995; Шустер, 1988; Tél and Gruiz, 2006] (см. рис. 2.1).

Возьмем единичный квадрат на плоскости (x, y) и подвергнем его деформации, подобной той, какую выполняет пекарь, раскатывая кусок теста, т. е. продольному растяжению и поперечному сплющиванию. Затем разрежем «кусок теста» пополам и поместим половинки одна над другой, вдоль верхней и нижней стороны исходного единичного квадрата, оставив зазор в середине. Будем полагать, что растяжение по горизонтали двукратное, а сжатие по вертикали трехкратное. При этом полная площадь уменьшается, в чем выражается диссипативная природа конструируемого отображения («тесто» в этом случае надо мыслить как сжимаемую субстанцию). При многократном повторении описанного преобразования образуется характерная слоистая структура, содержащая горизонтальные полосы, число которых растет пропорционально 2^n (n — число итераций), в то время как ширина полос по вертикали убывает пропорционально 3^{-n} .

Аттрактор представляет собой объект, возникающий в пределе бесконечно большого числа итераций. В поперечном сечении он имеет структуру множества Кантора, причем распределение «теста» вдоль слоев в данном примере остается однородным.

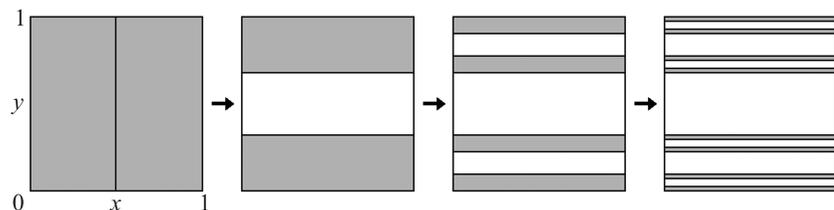


Рис. 2.1. Геометрическая иллюстрация диссипативного отображения пекаря

Стоит подчеркнуть, что индивидуальная динамика частиц «теста» хаотическая. В самом деле, формально преобразование мгновенного состояния для отдельной частицы в координатах (x, y) дается на одном шаге выражениями

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{3}y_n \end{cases} \text{ при } x_n \leq \frac{1}{2}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_{n+1} = \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3} \end{cases} \text{ при } x_n > \frac{1}{2}. \quad (2.1)$$

Представим начальное значение переменной x действительным числом в двоичной системе счисления, скажем 0.01100101101110010110101... Один шаг эволюции во времени соответствует сдвигу бинарной последовательности на одну позицию влево с исключением крайней слева цифры. Обратим внимание, что символ 0 или 1 на первой позиции после разделительной точки означает положение частицы в данный момент в левой или в правой половине единичного квадрата соответственно. При задании начального условия случайным действительным числом из единичного интервала мы имеем случайную последовательность нулей и единиц в двоичной записи, так что частица будет посещать левую и правую половину квадрата в соответствии с предписанной случайной последовательностью цифр.

Несмотря на свою простоту, отображение пекаря демонстрирует многие особенности, общие для хаотических аттракторов, такие как поперечная канторова структура и специфическая комбинация устойчивости, в смысле приближения орбит к предельному множеству в поперечном направлении, и неустойчивости, в смысле взаимного разбегания друг от друга исходно близких изображающих точек вдоль волокон аттрактора.

Естественную неудовлетворенность в отношении описанной конструкции вызывает подразумеваемая в ней процедура «разрезания» куска «теста». Можно было бы попытаться исправить этот момент, предполагая, что вместо разрезания мы складываем растянутый вдоль и сплюснутый в поперечном направлении кусок вдвое, помещая его снова в единичный квадрат (рис. 2.2)¹. В этом случае, как и раньше, на первых шагах наблюдается формирование слоистой структуры. Однако в пределе большого числа итераций равномерного, хотя бы приблизительно, распределения «теста» вдоль волокон не получается! Что реально наблюдается, это тенденция к концентрации субстанции в местах складок с образованием особенностей в распределении плотности. Причина состоит в том, что в местах складывания направление сжатия совпадает с вертикальной касательной на краю сложенного «куска

¹ Такой тип динамического поведения ассоциируется с конструкцией, известной как *подкова Смейла*, которая обсуждается в приложении С.

теста» и его сплющивание приводит к образованию локальной области повышенной плотности. В нелинейных диссипативных системах такие ситуации могут ассоциироваться с негиперболическим хаосом, как в отображении Эно (приложение А), или с оседанием облака точек на регулярные аттракторы (притягивающие точки и циклы).

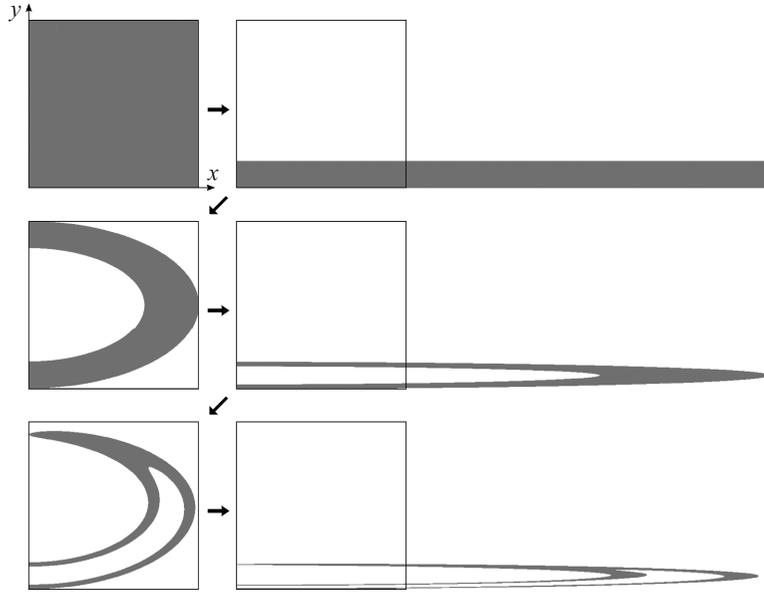


Рис. 2.2. Попытка модификации диссипативного отображения пекаря со складыванием вместо разрезания «теста»; показаны два последовательных шага итераций. Образование слоистой структуры сопровождается в этом случае появлением локальных уплотнений в местах складывания

Гиперболический хаос соответствует ситуациям, когда трансформация облака изображающих точек, включающая продольное растяжение и поперечное сжатие, производится совершенным образом, без разрывов, нарушения непрерывности и формирования локальных уплотнений.

Принципиальную возможность существования аттракторов с такими свойствами можно подкрепить рассмотрением искусственных примеров. Для каждого из них мы сначала определяем фазовое пространство, затем указываем поглощающую область D и формулируем правило эволюции в дискретном времени $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ так, чтобы за один шаг эта область отобража-

лась внутрь себя: $\mathbf{g}(D) \subset \text{Int}(D)$. Тогда аттрактор A обязан быть расположенным внутри этой области и может быть формально определен как $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{g}^n(D)$.

2.2. Соленоид Смейла–Вильямса

Первый пример, к которому мы обратимся, это *аттрактор Смейла–Вильямса* [Смейл, 1970; Williams, 1974; Синай, 1979; Shilnikov, 1997; Гукенхеймер и Холмс, 2002; Каток и Хасселблат, 1999; Afraimovich and Hsu, 2003; Каток и Хассельблат, 2005; Hasselblatt and Pesin, 2008]. Простейшая ситуация, когда он может встретиться, отвечает трехмерному отображению. Рассмотрим область в виде тора в трехмерном пространстве, представив себе для наглядности, что это бублик из пластичного материала. Один шаг преобразования состоит в следующем: мы растягиваем бублик вдвое, производим поперечное сжатие, складываем объект двойной петлей и помещаем эту петлю внутрь исходного тора (рис. 2.3). Чтобы он там поместился, надо принять, что поперечный размер сжался более чем вдвое. На каждом следующем шаге преобразования полный объем объекта уменьшается (это означает, что отображение диссипативно), а число витков удваивается. В пределе бесконечного числа шагов оно стремится к бесконечности, и возникает образование, называемое *соленоидом*². В поперечном направлении соленоид имеет структуру, похожую на канторово множество. Существенный момент построения состоит в том, что угловая координата претерпевает удвоение на каждом шаге дискретного времени: $\theta_{n+1} = 2\theta_n \pmod{2\pi}$ (рис. 2.3).

Очевидным обобщением служит построение, в котором производится складывание петель, имеющей иное целое число оборотов $M > 2$. Это соответствует отображению для угловой координаты вида $\theta_{n+1} = M\theta_n \pmod{2\pi}$. При $M \geq 2$ такое отображение называют *растягивающим отображением окружности*, или *отображением Бернулли*.

² Как топологический объект соленоид был введен в рассмотрение Виеторисом (Vietoris) и ван Данцигом (van Dantzig) [Shilnikov, 1997], но как хаотический аттрактор он появляется у Смейла [Смейл, 1970] и Вильямса [Williams, 1974]. Интересно, что соленоид встречается в динамике потоковых систем также в совсем ином контексте [Vul et al. 1984], как нехаотическое притягивающее множество в критической точке Фейгенбаума, отвечающей накоплению последовательности бифуркаций удвоения периода [Фейгенбаум, 1983]. (В последнем случае формирование каждого нового уровня присущей поперечной фрактальной структуры связано с удвоением рассматриваемого временного масштаба, а не с одним шагом дискретного времени, как для аттрактора Смейла–Вильямса.)

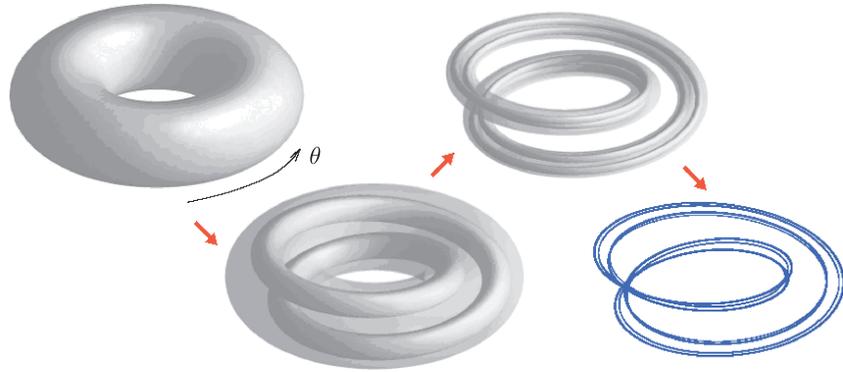


Рис. 2.3. Поглощающая область в виде тора в трехмерном фазовом пространстве, результат ее преобразования за первые две итерации и соленоид Смейла–Вильямса, получающийся после большого числе повторений преобразования (справа)

2.3. DA-аттрактор

Следующий пример — это *DA-аттрактор*, предложенный и названный Смейлом. Аббревиатура DA означает «Derived from Anosov», т. е. объект, выведенный из отображения Аносова. Этот аттрактор имеет место в двумерном отображении, заданном на торе [Смейл, 1970; Shilnikov, 1997; Каток и Хасселблат, 1999].

В качестве отправного пункта берем отображение Аносова, известное также как *отображение кота Арнольда* [Арнольд и Авец, 1999; Аносов и др., 1991; Devaney, 2003]:

$$p_{n+1} = p_n + q_n, \quad q_{n+1} = p_n + 2q_n \pmod{1}, \quad (2.2)$$

где $\phi = 2\pi p$ и $\theta = 2\pi q$ отвечают паре угловых координат на торе. Для графического изображения удобно представлять фазовое пространство единичным квадратом, имея в виду периодическое продолжение всех образований в горизонтальном и вертикальном направлениях (рис. 2.4).

Отображение Аносова (2.2) задает консервативную динамическую систему. Оно имеет в начале координат неподвижную точку типа седла, у которой устойчивое и неустойчивое направления даются векторами $\mathbf{a}_1 = (1, W)$ и $\mathbf{a}_2 = (-W, 1)$, где $W = (\sqrt{5} + 1) / 2$.

Чтобы получить диссипативное отображение, имеющее аттрактор, Смейл предлагает модифицировать отображение посредством, как он выражается,

«хирургии» в небольшой окрестности неподвижной точки. Процедура выполняется так, чтобы движение вдоль неустойчивого направления не подверглось возмущению, а в ортогональном направлении изменилось так, чтобы неподвижная точка стала отталкивающей и, соответственно, поблизости появились две точки седла S_1 и S_2 (рис. 2.4б). За пределами области, подвергнутой «хирургии», отображение не меняется.

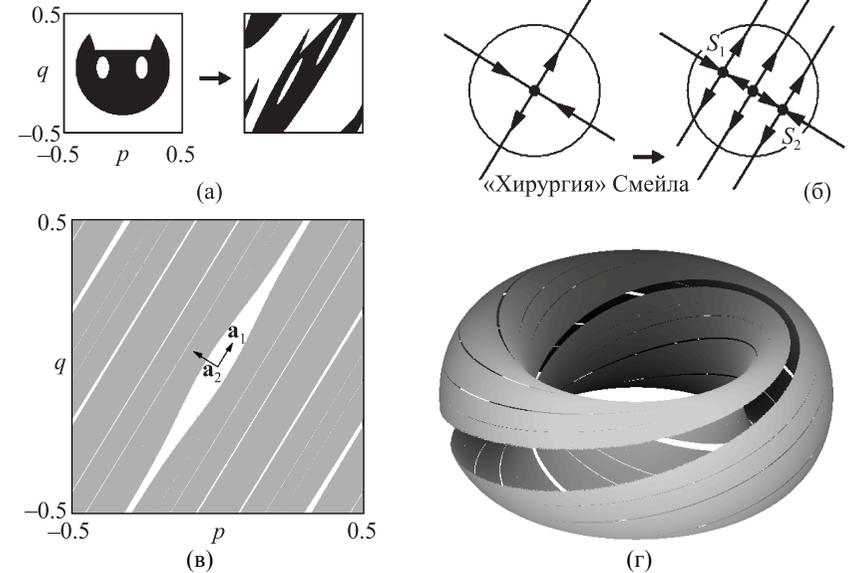


Рис. 2.4. Иллюстрация действия гиперболического отображения Аносова, известного также как отображение кота Арнольда, в единичном квадрате, представляющем развертку тора (а). «Хирургия» Смейла выполняется в окрестности неподвижной точки в начале координат (б). Показаны портреты DA-аттрактора в единичном квадрате (в) и на поверхности тора (г)

При такой постановке задачи поглощающая область представляет собой всю поверхность тора, за исключением вырезанной круглой окрестности начала координат (седла S_1 и S_2 находятся вне этой исключенной окрестности). По ходу итераций вырез в облаке изображающих точек растягивается вдоль вектора \mathbf{a}_1 с одновременным сжатием в поперечном направлении \mathbf{a}_2 , так что он превращается в узкую полосу, вытянутую вдоль неустойчивого направления. Поскольку угловой коэффициент ирра-

циональный, эта полоса плотно покрывает тор (рис. 2.4в, г). Так в данном примере возникает характерная для гиперболического аттрактора поперечная структура, подобная множеству Кантора. Один конкретный вариант DA-аттрактора описывается и визуализируется в статье [Coudene, 2006], посвященной компьютерным иллюстрациям гиперболической теории.

2.4. Аттракторы типа Плыкина

Аттрактор Плыкина имеет место в специальном двумерном отображении на плоскости [Плыкин, 1974; Синай, 1979; Аносов и др., 1991; Каток и Хасселблат, 1999; Shilnikov, 1997; Devaney, 2003]. На рис. 2.5 показана область, составленная из трех полудисков с небольшими полукруглыми вырезами. Подобласти, из которых составлена фигура, покрыты штриховкой, показывающей два определенных на каждой из них поля направлений. Отображение производится таким образом, что его действие на состоянии, представленные точками данной области, производит фигуру, изображенную на рисунке справа. Отметим, что поля направлений после преобразования оказываются совпадающими с исходными. Одно соответствует направлению растяжения, а другое — направлению сжатия. Этим обеспечивается гиперболическая природа аттрактора.

Динамика на аттракторе Плыкина проясняется в свете следующего наблюдения. Рассмотрим точки какого-либо одного отрезка из числа образующих радиальную штриховку, или *слоение*, на первой диаграмме. Нетрудно видеть, что все эти точки будут демонстрировать одну и ту же динамику в том смысле, что, оставаясь принадлежащими одному и тому же сегменту слоения, будут одновременно посещать каждую из подобластей (квадрат и три полудиска) на диаграмме. Мы можем принять соглашение не различать точки, принадлежащие одному и тому же радиальному отрезку. Тогда вместо динамики в двумерном фазовом пространстве можно ограничиться рассмотрением одномерной динамики. Фазовым пространством для этой одномерной динамики служит так называемое одномерное разветвленное многообразие [Williams, 1974]. Его можно мыслить как «резиную нить», которая в рассматриваемом случае аттрактора Плыкина представляет собой петлю с двумя присоединенными малыми петельками. Изначально эта нить натянута на три гвоздика, как показано на рис. 2.5б слева. Одна итерация отображения соответствует выполнению растяжения нити и ее надеванию на те же гвоздики, как показано на рисунке справа.

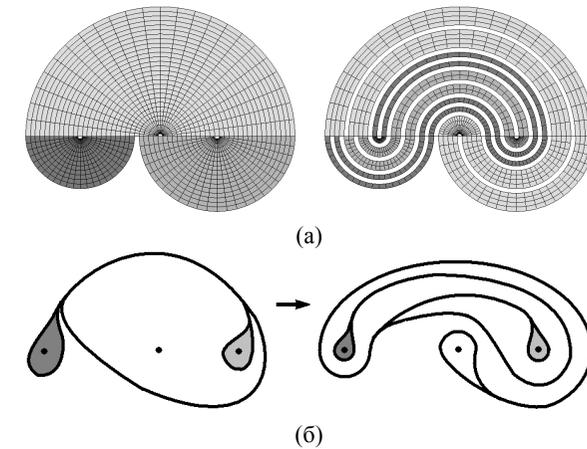


Рис. 2.5. Поглощающая область и ее трансформация под действием отображения (а) и описание динамики с привлечением одномерного разветвленного многообразия (б) для оригинальной конструкции аттрактора Плыкина

Описание динамики с привлечением сужения на разветвленные многообразия было использовано для разработки классификационной схемы для гиперболических аттракторов в ограниченных двумерных областях с тремя или большим числом вырезов. В настоящее время известно, что существует много различных аттракторов такого вида [Williams, 1974; Жиров, 1995; Grines and Zhuzhoma, 2006]. О них говорят как об *аттракторах типа Плыкина*. Один из них, показанный на рис. 2.6, представляет особый интерес для последующего изложения в настоящей книге.

Аттракторы типа Плыкина можно считать расположенными на сфере, а не на плоскости, что иногда бывает полезным. В самом деле, переход с плоскости на сферу и обратно можно выполнить с помощью замены переменных, отвечающей *стереографической проекции*, которая хорошо известна из элементарной геометрии (рис. 2.7).

Чтобы аттрактор Плыкина мог реализоваться, область на сфере, где он находится, должна иметь не менее четырех вырезов. Это согласуется с предыдущим рассмотрением. Действительно, если центр стереографической проекции (точка, отображающаяся в бесконечность) размещен на сфере в одном из вырезов, то после отображения на плоскость как раз и получится аттрактор, расположенный в ограниченной области с тремя вырезами на плоскости.

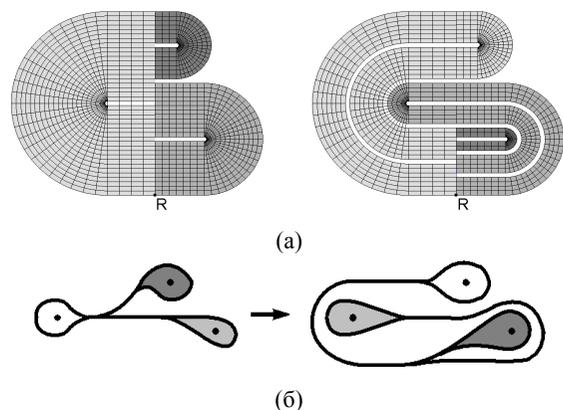


Рис. 2.6. Поглощающая область и ее трансформация при действии отображения (а) и описание динамики с использованием одномерного разветвленного многообразия (б) для аттрактора типа Плыкина, который встретится в дальнейшем изложении. Символом R отмечена принадлежащая аттрактору неустойчивая неподвижная точка

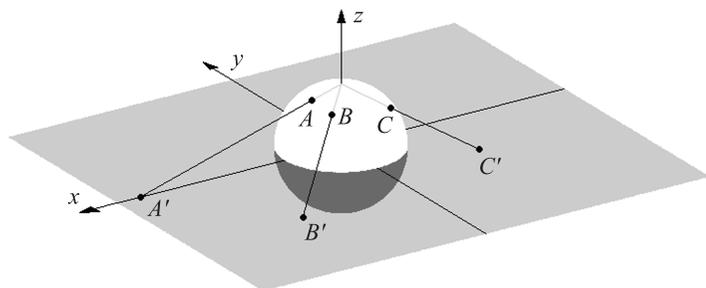


Рис. 2.7. Соответствие точек на сфере A, B, C и точек на плоскости A', B', C' , устанавливаемое посредством стереографической проекции

Глава 3

Основы гиперболической теории

Гиперболическая теория — это раздел теории динамических систем, созданный в основном в 60–70-е годы XX века усилиями математиков, среди которых можно назвать Аносова, Смейла, Вильямса, Алексева, Синая, Плыкина, Рюэля, Боуэна и других. В данной главе дается краткое введение в эту теорию. Обсуждается понятие гиперболической траектории, представление об устойчивых и неустойчивых многообразиях. Излагаются основные понятия гиперболической теории и представлен обзор основных ее выводов и заключений.

3.1. Понятие гиперболичности

Введение в гиперболическую теорию уместно начать с обсуждения неподвижной точки типа *седла*. На рис. 3.1 показаны маятник и его фазовый портрет на плоскости [Андронов и др., 1959; Заславский и Сагдеев, 1988; Рабинович и Трубецков, 1984]. Горизонтальная ось отвечает угловой координате, а вертикальная — мгновенной угловой скорости. Маятник может колебаться около нижнего равновесия $\varphi = 0$, но сейчас для нас интересно неустойчивое состояние $\varphi = \pi$. На фазовой плоскости ему отвечает точка седла A , расположенная на пересечении кривых, называемых *сепаратрисами*. Из состояния равновесия при наличии малого возмущения изображающая точка будет уходить вдоль неустойчивой сепаратрисы U . С другой стороны, пусть маятнику в нижнем положении сообщен точно рассчитанный импульс так, чтобы он достиг верхней точки и остановился. В этом случае изображающая точка идет по устойчивой сепаратрисе S . Точка седла сама по себе служит отдельной фазовой траекторией, и эта траектория *гиперболическая*. Термин связан с тем обстоятельством, что изображенные на плоскости фазовые траектории вблизи седла локально имеют вид гипербол.

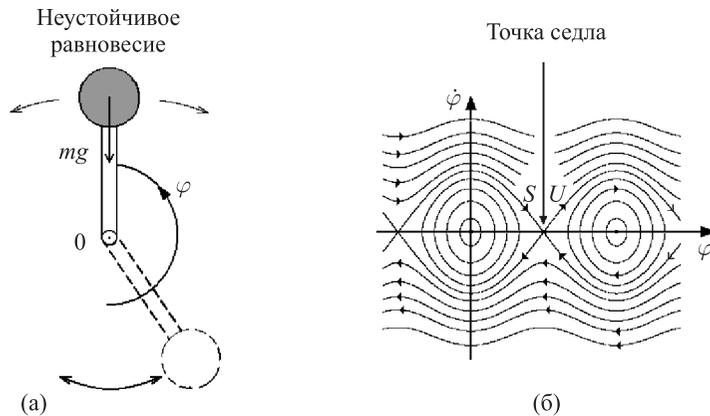


Рис. 3.1. Изображение маятника в неустойчивом верхнем положении равновесия (а) и фазовый портрет системы на плоскости (б). Кривая S есть устойчивая сепаратриса седла, а U , соответственно, неустойчивая сепаратриса. Локально вблизи точки седла траектории выглядят как гиперболы, поэтому о ней говорят как о гиперболической неподвижной точке

Несколько более сложный пример доставляет замкнутая периодическая траектория, или седловая периодическая орбита (рис. 3.2). Это неустойчивый предельный цикл в фазовом пространстве, к которому траектории приближаются по поверхности S , но уходят от нее, будучи расположенными на поверхности U . Если выполнить сечение потока плоскостью, как показано на рисунке, мы увидим две кривые, образованные пересечением плоскости с упомянутыми двумя поверхностями. Точка, где они пересекаются, принадлежит предельному циклу и представляет собой неподвижную точку типа седла для отображения Пуанкаре.

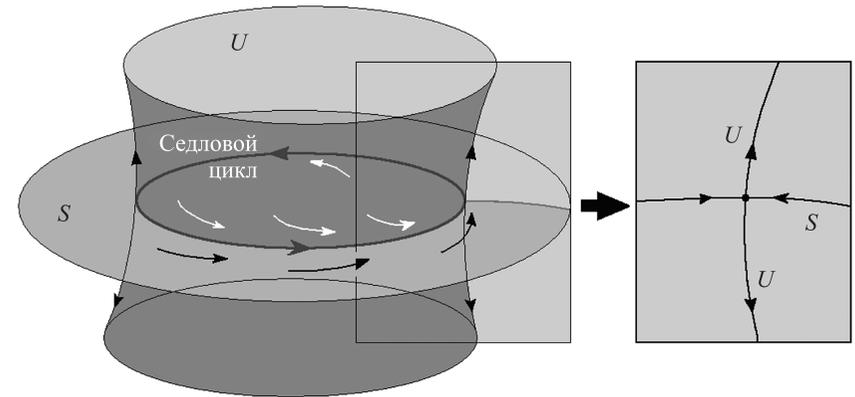


Рис. 3.2. Устройство фазового пространства вблизи седлового цикла. Поверхность S отвечает устойчивому многообразию, а поверхность U — неустойчивому многообразию. Вставка иллюстрирует картину в сечении Пуанкаре

Следующий шаг состоит в обобщении концепции гиперболичности для непериодических фазовых траекторий (рис. 3.3).

Фазовую траекторию называют *гиперболической*, если для каждой ее точки в векторном пространстве всевозможных бесконечно малых возмущений V можно определить подпространство векторов, убывающих по норме при эволюции в прямом времени, и подпространство векторов, убывающих при эволюции в обратном времени. При этом векторы, относящиеся к этим подпространствам V_S или V_U , должны быть ограничены по норме экспоненциальной функцией времени, убывающей соответственно в прямом или в обратном времени. В случае дискретного времени, т. е. для систем, заданных диффеоморфизмами, все векторы в пространстве V должны допускать представление в виде линейной комбинации векторов,

принадлежащих V_S и V_U . Математически это означает, что векторное пространство V представляет собой прямую сумму подпространств V_S и V_U : $V = V_U \oplus V_S$.

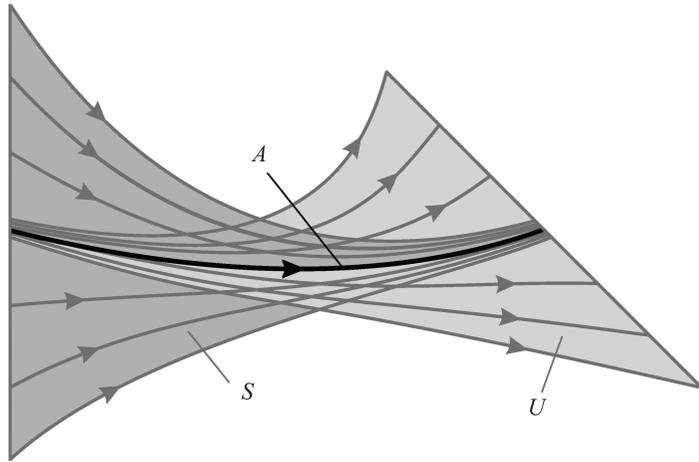


Рис. 3.3. Иллюстрация, поясняющая структуру фазового пространства вблизи седловой фазовой траектории A общего вида; поверхность S представляет собой устойчивое многообразие, а U — неустойчивое многообразие

В потоковых системах должно быть добавлено одномерное нейтральное подпространство V_N , отвечающее возмущениям, направленным вдоль фазовой траектории, которые в среднем не нарастают и не убывают в ходе эволюции во времени. В этом случае мы требуем, чтобы было справедливо представление $V = V_U \oplus V_N \oplus V_S$.

В фазовом пространстве множество траекторий, которые в прямом времени приближаются к данной траектории, называется *устойчивым многообразием*. Соответственно, неустойчивое многообразие представляет собой множество траекторий, приближающихся к опорной орбите в обратном времени. Для гиперболических траекторий эти множества в самом деле являются многообразиями, т. е. это гладкие объекты, как кривые, поверхности или гиперповерхности в фазовом пространстве. Это утверждение является заключением специальной теоремы, известной как *теорема Адамара–Перрона* [Аносов, 1967; Каток и Хасселблат, 1999; Barreira and Pesin, 2001].

Эпитет *однородно (или равномерно) гиперболический* означает, что показатели экспоненциального роста или затухания по норме векторов, принадлежащих неустойчивому или устойчивому многообразиям, ограничены и дистанцированы от нуля посредством некоторых фиксированных констант.

Однородно гиперболические седловые траектории и инвариантные множества, составленные из таких траекторий, могут иметь место в фазовом пространстве как консервативных, так и диссипативных систем. Поскольку в этой книге мы концентрируем внимание на диссипативном случае, то будем иметь дело с таким видом гиперболических инвариантных множеств, как *однородно гиперболические аттракторы*.

Однородно гиперболический аттрактор — это притягивающее инвариантное множество, расположенное в ограниченной области в фазовом пространстве диссипативной системы и составленное исключительно из однородно гиперболических седловых траекторий, причем локально вблизи всех этих траекторий фазовое пространство устроено однотипно. Многообразия обязаны иметь одну и ту же размерность для всех траекторий, относящихся к аттрактору. Пересечения между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями допускаются только под ненулевым углом (касания исключены).

Для рассмотренного выше примера аттрактора Смейла–Вильямса устойчивые многообразия двумерные; они представлены семейством меридиональных плоских сечений тороидальной области (рис. 2.3). С другой стороны, неустойчивые многообразия одномерные; для каждой точки на аттракторе неустойчивое многообразие представляет собой волокно соленоида, содержащее эту точку. Взятое целиком, неустойчивое многообразие в действительности совпадает собственно с аттрактором.

Для DA-аттрактора (рис. 2.4) устойчивые многообразия одномерные, как и неустойчивые многообразия. Неустойчивые многообразия примерно следуют направлению растягивающих векторов \mathbf{a}_1 (с некоторыми отклонениями вблизи области «хирургия»), а устойчивые многообразия располагаются вдоль ортогонального направления, заданного вектором \mathbf{a}_2 .

Для аттракторов типа Плыкина как устойчивые, так и неустойчивые многообразия одномерные. Устойчивые многообразия совпадают с семейством линий, вдоль которых имеет место сжатие фазового объема. Неустойчивые многообразия вытянуты вдоль второго семейства линий, ассоциирующегося с растяжением элементов фазового объема (см. рис. 2.5 и 2.6).

Помимо однородной гиперболичности, надо упомянуть понятие *частичной гиперболичности* как одно из обобщений математической теории

[Pesin, 2004; Bonatti et al., 2005; Pesin, 2007]. Оно относится к ситуации, когда пространство векторов возмущения в точках орбиты допускает представление в виде прямой суммы подпространств $V = V_U \oplus V_S \oplus V_C$, где V_U есть неустойчивое подпространство (отвечающее растяжению), V_S есть устойчивое подпространство (отвечающее сжатию), а V_C называется *центральным подпространством*. Оно может соответствовать как растяжению, так и сжатию, но с показателями в интервале между минимальными показателями расширения в V_U и сжатия в V_S . При анализе динамические свойства, обусловленные присутствием сильного растяжения и сжатия, могут быть рассмотрены отдельно, и они определяют особенности динамики, аналогичные таковым для однородно гиперболических систем. В то же время динамические свойства, связанные с центральным многообразием, могут быть различными в зависимости от специфической природы конкретных систем. Хотя настоящая книга посвящена главным образом однородной гиперболичности, нам понадобится в некоторых случаях ссылаться на частичную гиперболичность в отношении отдельных примеров, обсуждаемых в последующих главах.

3.2. Содержание и результаты гиперболической теории

Обратимся теперь к краткому обзору содержательной части гиперболической теории [Аносов, 1967; Смейл, 1970; Williams, 1974; Синай, 1979; Аносов и др., 1991; Eckmann and Ruelle, 1985; Shilnikov, 1997; Каток и Хасселблат, 1999; Гу-кенхеймер и Холмс, 2002; Afraimovich and Hsu, 2003; Каток и Хасселблат, 2005; Devaney, 2003; Hasselblatt and Pesin, 2008]. Для простоты изложения будем говорить в этом разделе о системах с дискретным временем, представленных отображениями (диффеоморфизмами). На системы с непрерывным временем все обсуждаемые понятия и результаты можно распространить, апеллируя к описанию в терминах отображения Пуанкаре.

Начнем с обсуждения *аксиомы А* — положения, сформулированного Смейлом, которое (вместе с дополнительным требованием строгой трансверсальности) среди динамических систем произвольной конечной размерности позволяет выделить класс систем, характеризуемых структурной устойчивостью.

Точка в фазовом пространстве динамической системы называется *блуждающей*, если она имеет окрестность, в которую стартовавшая из данной точки траектория, начиная с момента времени, превышающего некоторую константу, никогда больше не возвращается. С физической точки зрения такая динамика отвечает переходному процессу. Если это свойство

не выполнено, точка называется *неблуждающей*; такое поведение можно рассматривать как некую предварительную формализацию понятия установившегося или стационарного динамического поведения.

Говорят, что система с дискретным временем, заданная некоторым диффеоморфизмом g , удовлетворяет аксиоме А, если, во-первых, множество неблуждающих точек NW гиперболическое и, во-вторых, периодические точки отображения g образуют плотное подмножество в NW . Последнее означает, что в сколь угодно малой окрестности любой точки множества NW обязательно присутствует точка, относящаяся к какой-либо периодической орбите, принадлежащей тому же множеству¹. Гиперболичность понимается, как объяснялось выше: имеется в виду, что линейное пространство векторов возмущений составлено из подпространств V_U и V_S , отвечающих экспоненциальному растяжению или сжатию векторов в ходе временной эволюции².

Условие строгой трансверсальности требует, чтобы взаимное расположение устойчивых и неустойчивых многообразий для произвольной пары точек, принадлежащих множеству NW , отвечало ситуации общего положения, т. е. пересечения допускаются только под ненулевым углом (касания исключены).

Для систем с аксиомой А имеет место доказанная Смейлом теорема о *спектральной декомпозиции* [Смейл, 1970; Каток и Хасселблат, 1999; Afraimovich and Hsu, 2003]. Она утверждает, что множество неблуждающих точек допускает представление в виде объединения конечного числа непересекающихся инвариантных множеств B_i , обладающих свойством транзитивности (т. е. каждое такое множество включает траекторию, посещающую сколь угодно малую окрестность любой точки множества). Их называют *базисными*, или *локально максимальными*, множествами. Для различных конкретных систем это могут быть устойчивые или неустойчивые неподвижные точки, периодические орбиты, нетривиальные притягивающие, отталкивающие, седловые инвариантные множества. Определение локально максимального множества состоит в том, что оно представляется пересечением образов некоторой окрестности U , содержащей это множе-

¹ Один из частных классов систем с аксиомой А образуют *системы Аносова*, такие как отображение кота Арнольда, специфика которых состоит в том, что множество неблуждающих точек занимает все фазовое пространство.

² Не исключаются ситуации, когда одно из подпространств V_U или V_S является пустым множеством, что, в частности, позволяет включить в рамки базирующейся на аксиоме А картины структурно устойчивые системы с простыми неблуждающими множествами типа неподвижных точек или периодических орбит.

ство, получаемых итерациями отображения *в прямом* и *в обратном времени*: $B = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{g}^n(U)$. Это похоже на определение максимального аттрактора, как пересечения образов поглощающей области при итерациях в прямом времени, и такие аттракторы, естественно, могут иметь место, как разновидность базисных множеств. Далее, каждое базисное множество представимо как объединение конечного числа $k_i \geq 1$ непересекающихся подмножеств $X_{i,j}$, посещаемых по очереди в определенном порядке при итерациях отображения. Каждое множество $X_{i,j}$ является инвариантным множеством для отображения, взятого k_i раз. Однородно гиперболические аттракторы типа Плыкена, соленоид Смейла–Вильямса, DA-аттрактор — все это базисные множества определенных модельных динамических систем с аксиомой А, для которых число $k = 1$, т. е. они не допускают дальнейшей декомпозиции. Если не оговорено специально (часть IV настоящей книги), мы будем иметь в виду только аттракторы с одномерными неустойчивыми многообразиями.

3.2.1. Критерий конусов

Надо заметить, что существует строгий критерий гиперболичности, формулируемый таким образом, что его можно проверить в расчетах на компьютере — *критерий конусов* [Синай, 1979; Hasselblatt and Pesin, 2008].

Предположим, что динамика в дискретном времени задана гладким обратимым отображением $\mathbf{g}(\mathbf{x})$.

Критерий требует, чтобы для каждой точки \mathbf{x} , принадлежащей анализируемому инвариантному множеству, могли быть определены расширяющийся и сжимающийся конусы в пространстве векторов инфинитезимальных возмущений (касательном пространстве) (рис. 3.4). Расширяющийся конус есть множество векторов, норма которых в результате применения отображения увеличивается в γ и более раз, где $\gamma > 1$ — некоторая константа. Сжимающийся конус есть множество векторов, норма которых увеличивается в γ и более раз при действии обратного отображения. Имея в виду гладкую зависимость всех рассматриваемых объектов от положения исходной точки в фазовом пространстве, можно говорить о *полях расширяющихся и сжимающихся конусов*.

Критерий выполняется, если растягивающиеся и сжимающиеся конусы инвариантны для всех точек на анализируемом множестве траекторий в том смысле, что образ расширяющегося конуса расположен всегда

внутри расширяющегося конуса, определенного для точки-образа, а прообраз сжимающегося конуса расположен внутри сжимающегося конуса, определенного для точки-прообраза.

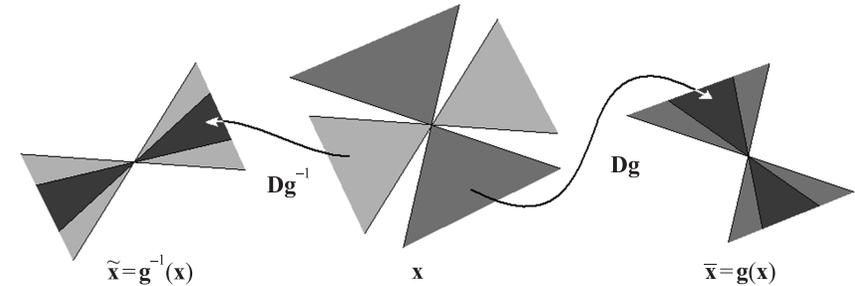


Рис. 3.4. К пояснению критерия гиперболичности. Образ расширяющегося конуса, определенного для точки \mathbf{x} , располагается внутри расширяющегося конуса, определенного для точки-образа $\bar{\mathbf{x}}$, а прообраз сжимающегося конуса — внутри сжимающегося конуса, определенного для точки-прообраза $\tilde{\mathbf{x}}$. Символы $D\mathbf{g}$ и $D\mathbf{g}^{-1}$ обозначают матричные производные прямого и обратного отображения, задающие преобразование векторов возмущения при шаге вперед и назад во времени

В главе 13 будет рассмотрена более детально техника применения этого критерия для проверки гиперболической природы аттракторов в конкретных системах.

3.2.2. Неустойчивость

Принадлежность неустойчивого многообразия любой точки на аттракторе самому аттрактору обеспечивает чувствительность движения на аттракторе к малым возмущениям начальных условий, что является главным атрибутом динамического хаоса. В самом деле, любые две изображающие точки, изначально слегка смещенные одна относительно другой вдоль неустойчивого многообразия, с течением времени будут удаляться друг от друга. Пока возмущение мало, его рост происходит в среднем по экспоненциальному закону, согласно соотношению $\|\Delta\mathbf{x}\| \sim e^{\Lambda n}$, где n — дискретное время, а $\Lambda > 0$ — наибольший показатель Ляпунова.

Если неустойчивые многообразия одномерные, то спектр показателей Ляпунова содержит один положительный показатель, тогда как все остальные показатели отрицательные. Для отображений все показатели Ляпунова

однородно гиперболического аттрактора дистанцированы от нуля. В самом деле, для индивидуальных траекторий на аттракторе положительным показателям отвечают векторы возмущения, принадлежащие определенным в точках этих траекторий расширяющимся конусам. Поскольку снизу степень расширения ограничена фигурирующей в критерии конусов константой $\gamma > 1$, то положительный показатель Ляпунова не меньше положительного числа $\Lambda_{\min}^+ = \ln \gamma$. Это справедливо для всех принадлежащих аттрактору траекторий, значит, такая же оценка верна и для показателя, отвечающего аттрактору в целом. Аналогично, отрицательные показатели Ляпунова, которые ассоциируются с векторами, принадлежащими сжимающимся конусам, ограничены сверху константой $\Lambda_{\max}^- = -\ln \gamma$.

3.2.3. Поперечная канторова структура аттрактора и размерность Каплана–Йорке

Как мы видели из рассмотренных примеров, существенным атрибутом хаотических аттракторов служит присущая им канторова поперечная структура, формирующаяся благодаря последовательным преобразованиям растяжения, складывания и поперечного сжатия фазового объема. Для количественной характеристики этой структуры используют *фрактальную размерность*. Главная идея определения размерности состоит в том, что при покрытии объекта элементами размера ε требуемое их количество растет по степенному закону $N \sim \varepsilon^{-D}$, где D как раз и есть размерность. Такое определение обобщает привычное понятие размерности (1 — для кривых, 2 — для поверхностей, 3 — для объемных объектов). Для таких нетривиальных множеств, какими являются странные аттракторы, размерность D дается обычно нецелым числом (см. приложение D, где приводится более детальное обсуждение). В свое время была предложена формула, позволяющая оценить фрактальную размерность через показатели Ляпунова [Kaplan and Yorke, 1979]:

$$D_{KY} = m + S_m / |\lambda_{m+1}|, \quad S_m = \sum_{i=1}^m \lambda_i. \quad (3.1)$$

Здесь показатели Ляпунова $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \dots, \lambda_N$ считаются занумерованными в порядке убывания и m представляет собой такое целое число, что сумма S_m положительна, в то время как S_{m+1} уже отрицательна. Эмпирически эта формула дает неплохие результаты, близкие к корректно определенной фрактальной размерности аттракторов. Однако математически ее удается обосновать

только для аттракторов двумерных отображений. В этой ситуации соломоново решение, принятое научным сообществом, состоит в том, чтобы рассматривать оценку (3.1) как особого рода размерность, которую называют *размерностью Каплана–Йорке* или *ляпуновской размерностью*. Ценное преимущество этой размерности состоит в том, что для ее вычисления нужно знать только спектр показателей Ляпунова данного аттрактора.

Вывод формулы (3.1), поясняемый в приложении D, базируется на предположении об однородном сжатии и растяжении фазового объема в ходе динамической эволюции. Это допущение лучше всего пригодно как раз для однородно гиперболических аттракторов, где сжатие и растяжение имеет место вдоль трансверсальных друг другу устойчивых и неустойчивых многообразий. Следовательно, можно полагать, что эта формула должна давать наиболее адекватные результаты именно для однородно гиперболических аттракторов. Далее в этой книге она будет достаточно широко использоваться при рассмотрении конкретных примеров аттракторов для оперативной оценки их размерности.

3.2.4. Марковские разбиения и символическая динамика

Благодаря присущей окрестности аттрактора структуре, образованной устойчивыми и неустойчивыми многообразиями, оказывается возможным построить *разбиение* содержащей аттрактор области на *конечное число не перекрывающихся односвязных подобластей, границы которых располагаются вдоль соответствующих этим многообразиям линий или поверхностей*. При выполнении некоторых условий (в частности, образы тех границ, которые проходят по устойчивым многообразиям, при действии отображения должны попадать опять на такие же границы) это разбиение называется *марковским* и его можно положить в основу полного описания движений на аттракторе в терминах *символической динамики*. [Hasselblatt and Young, 2005; Синай, 1979; Аносов и др., 1991; Каток и Хассельблат, 1999; Каток и Хассельблат, 2005; Devaney, 2003].

Обозначая каждый элемент разбиения определенным символом (буквой конечного алфавита), кодируем траекторию последовательностью этих символов в порядке посещения соответствующих областей данной траекторией. Для конкретных аттракторов эти последовательности могут подчиняться определенным ограничениям, «правилам грамматики», которые наглядно можно представить в виде графа с конечным числом вершин и направленных ребер. Графу сопоставляется *матрица смежности*, элементы которой — нули и единицы. При этом единица на позиции (i, j)

означает присутствие ребра, идущего из i -го в j -й узел графа, а ноль — отсутствие такого разрешенного перехода.

Рис. 3.5 иллюстрирует марковские разбиения для аттрактора Смейла–Вильямса и аттрактора типа Плыкина. Там же приведены соответствующие графы, конкретизирующие правила грамматики. В первом случае конфигурация вполне очевидна: один сегмент границы между элементами разбиения представляет собой сечение тора плоскостью, отображающейся на себя, а второй — плоское сечение, отображающееся на первый сегмент. В случае аттрактора типа Плыкина граница между элементами разбиения состоит из вертикальной прямой линии, которая совпадает с устойчивым многообразием неподвижной точки R , принадлежащей аттрактору, и сегментов, отображающихся на эту линию при итерировании отображения.

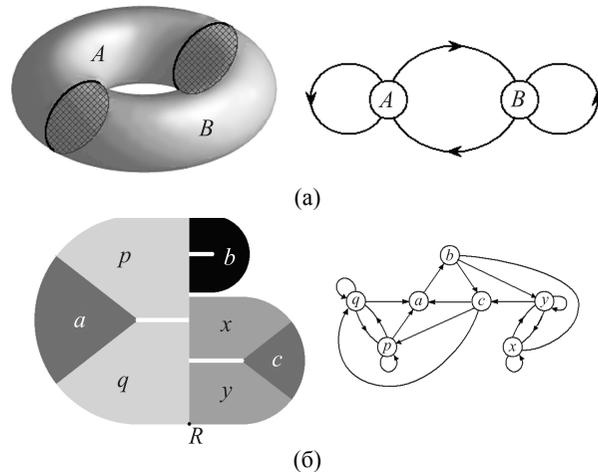


Рис. 3.5. Марковские разбиения и графы разрешенных переходов для аттрактора Смейла–Вильямса (а) и аттрактора типа Плыкина (б). В последнем случае граница между элементами раздела представлена устойчивым многообразием седловой неподвижной точки R

На этих графах, как можно видеть, имеется возможность перехода из каждой вершины в любую другую вдоль направленных ребер за конечное число шагов и при этом присутствуют вершины, из которых исходит более одного ребра³. Последнее означает, что при построении символической

³ Матрица смежности в данном случае обладает свойством транзитивности. Это значит, что при ее возведении в некоторую достаточно большую степень получается матрица, все эле-

последовательности переход из такой вершины можно выбрать случайным образом из представленных альтернатив. При этом любой полученный код обязательно будет отвечать траектории на аттракторе с какими-то начальными условиями. Она будет демонстрировать хаотическое поведение, посещая области разбиения в соответствии с предписанной случайной последовательностью. Это можно интерпретировать как цепь Маркова [Феллер, 1984] — случайный процесс с дискретным временем и конечным дискретным множеством состояний, ассоциирующихся с символами алфавита или элементами разбиения (с чем и связан термин «марковское разбиение»).

3.2.5. Перечисление орбит и топологическая энтропия

Множество траекторий, принадлежащих гиперболическому аттрактору, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всевозможных бесконечных последовательностей, составленных из букв конечного алфавита и допустимых правилами грамматики. Оно имеет мощность континуума. Множество периодических орбит на аттракторе соответствует периодическим символическим последовательностям и имеет мощность счетного множества. С ростом периода рассматриваемых периодических орбит T их количество N увеличивается по экспоненциальному закону $N \sim e^{hT}$, где величина $h > 0$ называется *топологической энтропией* [Adler et al., 1965; Beck and Schlogl, 1993]. Ее интерпретируют как характеристику сложности множества траекторий, принадлежащих аттрактору.

Ясно, что возможность полного символического описания траекторий на однородно гиперболическом аттракторе устанавливает принципиальную связь соответствующей проблематики с теорией информации и кодирования. Этот момент может быть важным с точки зрения использования систем с такими аттракторами в информационных и коммуникационных приложениях.

3.2.6. Структурная устойчивость

Структурная устойчивость однородно гиперболического аттрактора обусловлена тем обстоятельством, что растяжение и сжатие элементов фазового объема осуществляются по направлениям, которые всегда образуют между собой

менты которой ненулевые. В этом случае аттрактор имеет, как говорят, единственную транзитивную компоненту.

ненулевой угол [Смейл, 1970; Williams, 1974; Синай, 1979; Eckmann and Ruelle, 1985; Аносов и др., 1991; Каток и Хасселблат, 1999; Shilnikov, 1997; Гукенхеймер и Холмс, 2002; Afraimovich and Hsu, 2003; Devaney, 2003; Hasselblatt and Young, 2005]. В терминах устойчивых и неустойчивых многообразий это отвечает трансверсальному (без касаний) их взаимному расположению при пересечении. Если варьировать параметры или функции, фигурирующие в определении оператора эволюции, то благодаря трансверсальному пересечению многообразий это «шевеление» не разрушает присущую фазовому пространству топологическую структуру, по крайней мере пока возмущение не слишком велико. То же самое относится к системе линий и поверхностей, используемых при построении марковских разбиений. Это значит, что неизменной остается и символическая динамика.

Более аккуратная формулировка такова: пока рассматривается малое «шевеление» в классе функций, непрерывных с первыми производными (по принятой нотации, функций класса C^1), система допускает приведение к исходному виду посредством взаимно однозначной и взаимно непрерывной замены переменных (класса C^0). То есть она остается топологически эквивалентной исходной системе.

Показатели Ляпунова получаются из уравнений в вариациях, выведенных путем линеаризации исходных уравнений вблизи рассматриваемой траектории, что подразумевает применение операции дифференцирования. Поэтому относительно замены переменных, которая гладкой может не быть, показатели Ляпунова, вообще говоря, не инвариантны. Тем не менее, благодаря структурной устойчивости, относительно их поведения при малых вариациях системы можно сделать определенные заключения. Пока аттрактор остается однородно гиперболическим, сохраняя присущую ему топологическую структуру устойчивых и неустойчивых многообразий, число положительных и отрицательных показателей не может измениться. Более того, те и другие определенно остаются удаленными от нуля (здесь мы говорим об отображениях). По-видимому, должно быть справедливым даже более сильное утверждение, что при малом изменении системы по крайней мере положительный показатель Ляпунова также меняется слабо. Это подтверждается численными данными для моделей с однородно гиперболическими аттракторами, которые обсуждаются в последующих главах, хотя математический результат, на который в данном контексте можно было бы сослаться, автору не известен.

3.2.7. Инвариантная мера Синай–Рюэля–Боуэна

Для однородно гиперболических аттракторов существует *абсолютно непрерывная инвариантная мера Синай–Рюэля–Боуэна* [Синай, 1972; Bowen,

1975; Ruelle, 1976]. Общепринятым является также сокращенное обозначение, *SRB-мера*.

Вернемся к интерпретации динамики как эволюции облака изображающих точек в фазовом пространстве. Предполагая, что вначале ансамбль характеризуется «хорошей» функцией распределения (непрерывной и спадающей быстро на краях), зададимся вопросом о том, каким будет характер распределения на больших временах. Как можно убедиться, даже в самых простых ситуациях распределения становятся сингулярными; например, для устойчивой притягивающей неподвижной точки возникающее в пределе $t \rightarrow \infty$ распределение представляется дельта-функцией Дирака. Обобщение, охватывающее как гладкие, так и сингулярные распределения, достигается привлечением такой математической конструкции, как *мера*. Мэру можно рассматривать как обобщение знакомых понятий длины, площади и объема, относящихся к простым одномерным, двумерным и трехмерным объектам. В контексте динамических систем задать меру — значит приписать каждому подмножеству фазового пространства (не любому, но принадлежащему к достаточно обширному классу измеримых подмножеств) неотрицательное число, меру, причем должны быть выполнены определенные естественные требования (например, объединение непересекающихся измеримых множеств имеет меру, равную сумме мер своих элементов).

Рассмотрим некоторую фазовую траекторию на аттракторе и договоримся приписывать любой области фазового пространства меру, равную вероятности пребывания изображающей точки в этой области, т. е. относительной доле времени пребывания при времени наблюдения, стремящемся к бесконечности. Такая мера называется *естественной инвариантной мерой*. Для однородно гиперболических аттракторов построенная таким образом мера для типичных траекторий, принадлежащих аттрактору, оказывается одной и той же и называется *мерой Синай–Рюэля–Боуэна*. Ее можно представлять как распределение фазовой жидкости на волокнах аттрактора, т. е. на неустойчивых многообразиях. Хотя распределение поперек структуры волокон имеет сингулярный характер, оно описывается непрерывной функцией координаты, отсчитываемой вдоль волокон. Иными словами, субстанция распределена вдоль волокон плавным образом, без выраженных локальных уплотнений.

Еще одно замечание касается меры Синай–Рюэля–Боуэна в отношении систем, подвергающихся действию шума. При наличии шума вместо сингулярных распределений получают гладкие распределения. Скажем, вблизи устойчивой неподвижной точки вместо дельта-функции Дирака

будет иметь место распределение Гаусса конечной ширины. Оказывается, что распределение, возникающее в системах с однородно гиперболическими аттракторами при воздействии небольшого шума, в пределе нулевой его интенсивности приближается точно к тому, которое дается мерой Синая–Рюэля–Боуэна. Таким образом, эти меры следует рассматривать как правильно передающие вероятностные распределения применительно к физической постановке задачи.

3.2.8. Отслеживание псевдотраекторий и воздействие шума

Траектории на однородно гиперболических аттракторах обладают замечательным свойством *отслеживания псевдотраекторий* (английский термин «shadowing» иногда переводят как «затенение») [Гукенхеймер и Холмс, 2002; Каток и Хасселблат, 1999; Palmer, 2009]. Речь идет о связи между истинной траекторией на аттракторе и псевдотраекторией — приближенной траекторией, полученной, скажем, в присутствии небольшого шума ограниченной величины или в расчетах с округлением с конечной точностью. Отслеживание зашумленной траектории понимается в том смысле, что среди истинных орбит непременно есть такая, которая остается близкой к ней сколь угодно долго. Для динамики в присутствии шума этот результат был доказан в свое время Кифером [Кифер, 1974]. Это показывает, что стохастическое поведение динамического происхождения доминирует в некотором смысле над стохастичностью, вызванной действием малых случайных внешних сил.

3.2.9. Эргодичность и перемешивание

Движение на однородно гиперболическом аттракторе (с одной транзитивной компонентой) характеризуется свойствами *эргодичности* и *перемешивания* [Синай, 1979; Eckmann and Ruelle, 1985; Аносов и др., 1991; Каток и Хасселблат, 1999; Shilnikov, 1997; Гукенхеймер и Холмс, 2002; Afraimovich and Hsu, 2003; Devaney, 2003; Hasselblatt and Young, 2005]. Эргодичность означает, что типичная траектория на аттракторе посещает по ходу эволюции во времени любую окрестность любой точки на аттракторе. Это соответствует эквивалентности усреднения по времени и усреднения по инвариантной мере и дает основание для статистического подхода к анализу установившихся режимов динамики. Свойство перемешивания является более сильным. Оно означает, что для любого элемента фазового объема за достаточно длительное время облако изображающих точек

распределится по всему аттрактору. Свойство перемешивания позволяет описать статистически процесс приближения ансамбля к состоянию, соответствующему инвариантному распределению. Свойство перемешивания также ассоциируется с затуханием корреляций: корреляционная функция, рассчитанная для сигнала, порождаемого динамикой системы с дискретным временем на однородно гиперболическом аттракторе, характеризуется экспоненциальным спадом. (Для систем с непрерывным временем, представляющих собой надстройки диффеоморфизмов с однородно гиперболическими аттракторами, вопрос о соотношении свойств перемешивания и затухания корреляций требует специального анализа в каждом конкретном случае, так как оно зависит от характера распределения времен возврата в сечение Пуанкаре.)

3.2.10. Энтропия Колмогорова–Синая

Рассмотрим множество всех «слов», встречающихся в символической записи траекторий на аттракторе и содержащих n символов. Для каждого i -го слова определим вероятность его появления p_i . Эту величину можно толковать как меру Синая–Рюэля–Боуэна для множества точек в фазовом пространстве, которым отвечают траектории, посетившие за предыдущие n шагов обозначенные соответствующими символами элементы марковского разбиения. Теперь определим сумму $S_n = \sum p_i \log p_i$ по всем допустимым грамматикой словам, отнесем ее к величине n и рассмотрим переход к пределу $n \rightarrow \infty$. Величина $h_{KS} = -\lim_{n \rightarrow \infty} S_n / n$ называется *метрической энтропией*, или *энтропией Колмогорова–Синая* [Колмогоров, 1959; Синай, 1959]. Как видно из определения, ее можно интерпретировать как количество информации, порождаемой при динамике на аттракторе в расчете на единицу времени. Что существенно, определение апеллирует к определенной на аттракторе инвариантной мере.

Положительность энтропии h_{KS} служит критерием хаотической природы аттрактора. Метрическая энтропия h_{KS} и топологическая энтропия h связаны неравенством $h \geq h_{KS}$. Результат, доказанный Песиным, соотносит энтропию Колмогорова–Синая и спектр показателей Ляпунова [Песин, 1977]. В общем случае сумма всех положительных показателей Ляпунова представляет собой оценку сверху для энтропии Колмогорова–Синая. Для однородно гиперболических аттракторов в формуле Песина имеет место случай равенства: $h_{KS} = \sum_{\Lambda_i > 0} \Lambda_i$.

Глава 4

Где искать гиперболические аттракторы?

В этой главе дается обзор ряда ситуаций, рассмотренных или упомянутых в литературе, которые могут иметь отношение к появлению однородно гиперболических аттракторов в динамических системах, заданных отображениями или дифференциальными уравнениями, в том числе возникающих естественным образом в приложениях. Обсуждаемые подходы развиты к настоящему моменту в разной мере. Лишь немногие из них проработаны до такой степени, что допускают иллюстрации на уровне численных расчетов. Тем не менее собранный материал имеет несомненное значение с точки зрения перспектив для поиска систем с однородно гиперболическими аттракторами в реальном мире или для конструирования физических и технических устройств, функционирующих благодаря присутствию таких аттракторов.

4.1. Теорема Ньюхауса–Такенса–Рюэля и ее отношение к однородно гиперболическим аттракторам

В начале 70-х годов XX века Рюэль и Такенс предложили свой сценарий возникновения турбулентности, хотя их рассуждения носили столь общий характер, что могли быть отнесены, по существу, к любым многомерным диссипативным нелинейным системам со сложной динамикой. Согласно этому сценарию, при изменении управляющего параметра (числа Рейнольдса в гидродинамике) переход к хаосу наступает после возникновения небольшого числа колебательных составляющих движения и обусловлен появлением странного аттрактора [Рюэль и Такенс, 1981]. Детальное описание и критическая оценка этой концепции выходят далеко за рамки нашего обзора, однако стоит здесь подчеркнуть, что речь у этих авторов шла не просто о странном аттракторе в широком смысле, как теперь этот термин повсеместно употребляется, а конкретно и определенно об однородно гиперболическом аттракторе. Поэтому интересно обсудить, в какой мере их аргументация может быть полезной для построения конкретных примеров динамических систем с такими аттракторами.

Основная математическая теорема Ньюхауса, Рюэля и Такенса [Newhouse et al., 1978] устанавливает возможность появления хаотического однородно гиперболического аттрактора для автономных дифференциальных уравнений, получаемых сколь угодно малым возмущением уравнений, задающих квазипериодическое движение на торе размерности $n \geq 3$ или $n \geq 4$.

Здесь мы сконцентрируем внимание на их промежуточном результате. Теорема формулируется применительно к трем ситуациям. А именно, для диффеоморфизмов на двумерном компактном многообразии (а), на двумерном торе (б) и на компактном многообразии размерности $m \geq 3$ (в).

В случае (а) доказано, что имеющее гиперболический аттрактор отображение можно отыскать сколь угодно близко к тождественному отображению в классе C^1 (функций с первой производной). В случае (б) справедливо аналогичное утверждение, но в смысле близости в классе C^2 (функций с двумя производными), а в случае (в) — в классе бесконечно дифференцируемых функций C^∞ .

В качестве отправной точки рассуждения авторы используют факт существования двумерного отображения $\mathbf{F}(\mathbf{X})$, имеющего однородно гиперболический аттрактор в некоторой ограниченной области пространства состояний, в предположении, что оно допускает представление в виде

композиции преобразований, близких к тождественному отображению:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}_{1/N}^{(N-1)} \circ \mathbf{F}_{1/N}^{(N-2)} \circ \dots \circ \mathbf{F}_{1/N}^{(0)}(\mathbf{X}), \quad (4.1)$$

где N — большое целое число, и

$$\mathbf{F}_{1/N}^{(k)}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + N^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{1/N}^{(k)}(\mathbf{X}). \quad (4.2)$$

В случае (а) авторы предлагают рассмотреть кольцевую область ширины $2\pi/N$, разбитую на N секторов (рис. 4.1а). Используя сдвиг и пересчет масштаба, можно расположить область локализации аттрактора отображения $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ в секторе $k=0$. Далее, строится отображение кольца в себя так, чтобы каждый сектор с номером k отображался в сектор $k+1$. Это отображение получается из функции $\mathbf{F}_{1/N}^{(k)}$ гладкими заменами переменных для образов и прообразов, с пересчетом масштаба на фактор N . Кроме того, накладываются определенные условия, чтобы обеспечить гладкое сшивание на границах секторов. Полученное в результате отображение имеет однородно гиперболический аттрактор. В самом деле, в результате N итераций орбита, стартующая из сектора $k=0$, после посещения всех остальных секторов возвращается в исходный. При этом соответствующее составное отображение по построению эквивалентно первоначальному отображению \mathbf{F} (с точностью до замены переменных).

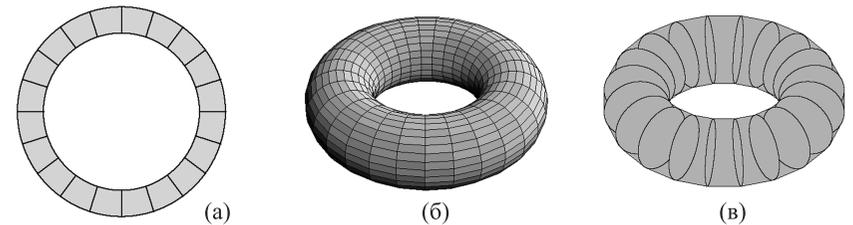


Рис. 4.1. Геометрическая иллюстрация конструкций, рассматриваемых для случаев (а), (б) и (в) теоремы Ньюхауса, Рюэля и Такенса

Отображение из k -го в $k+1$ -ый сектор содержит, помимо тривиальной части, аддитивный возмущающий член, который после пересчета масштабов выглядит как $N^{-2} \tilde{\mathbf{F}}_{1/N}^{(k)}(N\xi)$, где ξ — вектор состояния, преобразованный в результате замены переменных. Возмущение имеет порядок величины N^{-2} , а его производная, соответственно, порядок N^{-1} . Следовательно,

увеличением N можно сделать возмущение произвольно малым вместе с его первой производной. Если число N достаточно велико, то отображение, определенное на кольце, оказывается сколь угодно близким к тождественному отображению в классе функций C^1 , в то время как N -кратная композиция эквивалентна отображению \mathbf{F} , имеющему однородно гиперболический аттрактор.

Обращаясь к случаю (б), рассмотрим поверхность двумерного тора, разбитую на $N = M^2$ областей, маленьких «квадратиков» (рис. 4.1б). Снова построим отображение, которое обеспечивает посещение орбитой последовательно всех элементов разбиения таким образом, что после полного обхода, занимающего M^2 шагов, результирующее преобразование эквивалентно отображению (4.1). Для этого представим отображение, эквивалентное \mathbf{F} , как композицию M^2 отображений. Каждое из них отличается от тождественного отображения на возмущающий член, выражающийся в перенормированных переменных как $M^{-3}\tilde{\mathbf{F}}_{1/M^2}^{(k)}(M\xi)$, где $k = 0, 1, \dots, M^2 - 1$. Этот член имеет порядок величины M^{-3} , а его первая и вторая производные соответственно порядок M^{-2} и M^{-1} . Увеличивая число M , можно сделать возмущение сколь угодно малым в классе C^2 .

В заключение обратимся к ситуации (в). Ограничившись для простоты трехмерным случаем $m = 3$, рассмотрим тор, разбитый набором меридиональных плоских сечений на N равных секторов (рис. 4.1в). Предположим, что динамика по угловой координате описывается одномерным отображением, которое трансформирует каждый сектор в соседний ему с номером на единицу большим. Отображение для остальных координат, как предполагается, соответствует (4.1), где \mathbf{X} определяет положение изображающей точки в поперечном сечении. При N -кратном действии отображения траектория снова прибывает в сектор, откуда она стартовала, и результирующее отображение эквивалентно \mathbf{F} в отношении переменных, задающих координаты в поперечном сечении.

В последнем случае пересчет масштаба динамических переменных не требуется, поэтому в пределе $N \rightarrow \infty$ аддитивные возмущающие члены $N^{-1}\tilde{\mathbf{F}}_{1/N}^{(k)}$ стремятся к нулю вместе со всеми производными, т. е. становятся сколь угодно малыми в классе функций C^∞ .

Что можно сказать о потенциальной применимости этих рассуждений для практического конструирования физически реализуемых моделей

с однородно гиперболическими аттракторами? Определенно, такие перспективы сомнительны. Поскольку рассмотрение начинается с заданного отображения с однородно гиперболическим аттрактором, это, очевидно, не поможет в отыскании конкретных примеров таких отображений. Более того, математические построения, по крайней мере для ситуаций (а) и (б), выглядят абсолютно нефизическими из-за привлечения к определению динамической системы функций, имеющих предельно малые характерные масштабы в фазовом пространстве.

4.2. Модель Лоренца и ее модификации

Одной из самых известных систем в контексте нелинейной динамики и хаоса является *модель Лоренца* [Лоренц, 1981; Афраймович и др., 1977; Sparrow, 1982; Гукенхеймер и Холмс, 2002; Alligood et al., 1996; Ott, 2002; Шустер, 1988; Кузнецов, 2001]:

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy. \quad (4.3)$$

Здесь x, y, z — динамические переменные, а σ, r, b — параметры. Эти уравнения возникают в задаче конвекции в слое жидкости, подогреваемом снизу, в теории одномодового лазера, в модели водяного колеса, в диссипативном осцилляторе с инерционным возбуждением и некоторых других задачах.

В работе, опубликованной в 1963 году, Лоренц сообщил о наблюдении неперiodических установившихся колебаний при численном решении этих уравнений и правильно интерпретировал эти режимы как связанные с собственной сложной динамикой системы. В частности, автор подчеркивал важность чувствительности траекторий к малым возмущениям начальных условий. Аттрактор системы Лоренца показан на рис. 4.2. К настоящему времени благодаря глубокому и всеобъемлющему анализу, вклад в который внесли многие авторы, динамическая природа хаоса в модели Лоренца изучена исчерпывающим образом. Финальным шагом долгих исследований стало полученное с применением компьютера математическое доказательство, опубликованное Такером [Tucker, 2002; Stewart, 2000].

Исторически важный этап в объяснении многих качественных аспектов хаотической динамики модели Лоренца связан с построением упрощенной модели, так называемого *геометрического аттрактора Лоренца* [Sparrow, 1982; Гукенхеймер и Холмс, 2002] (см. рис. 4.2б).

С точки зрения организации структуры потока в фазовом пространстве системы Лоренца, существенное значение имеет седловая точка O в начале

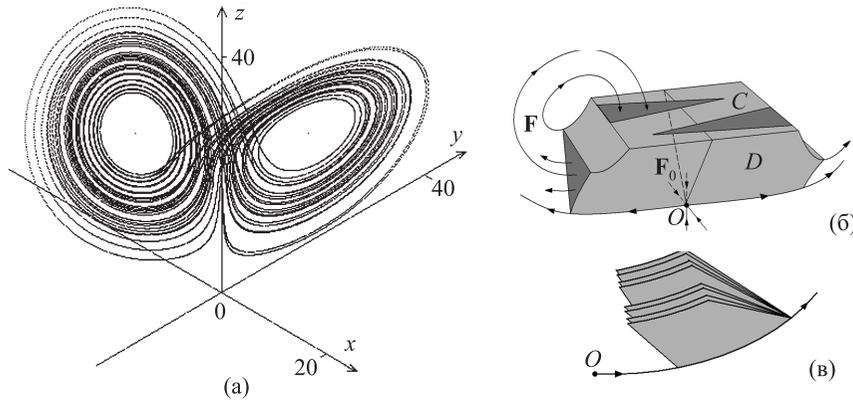


Рис. 4.2. Портрет аттрактора Лоренца, полученный в результате численного решения уравнений (4.3) при $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ (а), геометрическая модель (б) и иллюстрация поперечной структуры аттрактора, «канторова книга» (в)

координат. Эта точка характеризуется присутствием одной положительной (неустойчивой) и двух отрицательных (устойчивых) собственных величин линеаризованных уравнений, что означает наличие одномерного неустойчивого многообразия и двумерного устойчивого многообразия. Эта точка принадлежит аттрактору вместе со своим одномерным неустойчивым многообразием. В области D , показанной на рис. 4.2б серым цветом, поток определен как соответствующий линеаризации системы Лоренца вблизи начала координат. Посредством этого потока F_0 две половины «потолка» C области D отображаются в пару криволинейных треугольников по бокам этой области. Далее, потоком, который вне области D определен надлежащим векторным полем F , эти боковые фигуры преобразуются в два узких вытянутых треугольника, расположенных внутри прямоугольника C . Это соответствует одному шагу отображения Пуанкаре. В отображении Пуанкаре растяжение производится вдоль упомянутых вытянутых треугольников, а сжатие имеет место в направлении поперек них. Конструкция устроена так, что направление сжатия остается инвариантным относительно действия отображения. Аттрактор не является однородно гиперболическим из-за специфического поведения траекторий вблизи особой орбиты, представляющей собой неустойчивое многообразие точки O . В сечении Пуанкаре особая орбита отвечает остриям треугольных областей. Если рассматривать траектории, проходящие все ближе и ближе к особой траектории, то время возврата стремится к бесконечности. Канторова поперечная структура аттрактора вблизи особой траектории устроена так, как

показано на рис. 4.2в, с образованием так называемой «канторовой книги». Аттрактор в геометрической модели классифицируется как *квазигиперболический* или *сингулярно гиперболический*. Он не обладает структурной устойчивостью в обычном смысле. Марковское разбиение можно построить, но придется использовать бесконечный алфавит. Согласно результату Такера [Tucker, 2002], аттрактор исходной системы уравнений Лоренца (4.3) имеет такую же природу.

Зададимся теперь вопросом — можно ли модифицировать данную систему так, чтобы она имела однородно гиперболический аттрактор? Позитивный ответ был дан Моралесом, впрочем, пока это сделано только на уровне геометрических конструкций [Mogales, 1996].

Обратимся к модели, в которой неподвижная точка O претерпевает своего рода седло-узловую бифуркацию, тогда как в других отношениях система не отличается от геометрической модели Лоренца. В области параметра до бифуркации имеется пара неустойчивых неподвижных точек. Одна из них аналогична неподвижной точке в модели Лоренца и имеет одно неустойчивое и два устойчивых направления, а вторая имеет одно устойчивое и два неустойчивых направления. Если параметр изменять, обе эти точки сближаются, совпадают в момент бифуркации и затем исчезают. В области сосуществования пары неподвижных точек система имеет аттрактор типа Лоренца. В области, где пара исчезла, имеет место один из двух вариантов, в зависимости от устройства векторного поля в отдаленных частях фазового пространства, через которые проходит траектория. Первый вариант состоит в возникновении негиперболической динамики (подобно той, что имеет место в отображении Эно), а второй соответствует появлению в отображении Пуанкаре аттрактора типа Плькина. На рис. 4.3 показаны картинка в сечении Пуанкаре для обычного аттрактора Лоренца (а) и для двух случаев (б) и (с), указанных Моралесом. Последние два изображения отвечают динамике, реализующейся после слияния и исчезновения пары неподвижных точек.

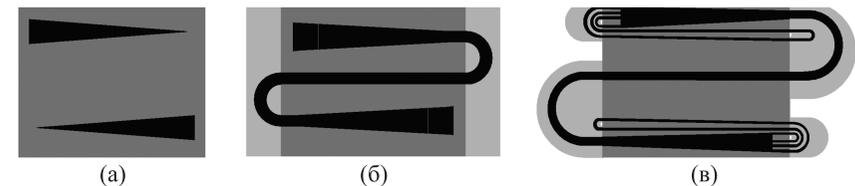


Рис. 4.3. Качественные иллюстрации действия отображения Пуанкаре для исходного геометрического аттрактора Лоренца (а) и для модифицированной модели согласно работе Моралеса (б), (в). Вариант (б) соответствует возникновению динамики, подобной отображению Эно, а вариант (в) — образованию аттрактора типа Плькина

Возможность возникновения аттрактора типа Пльикина в модифицированной модели Лоренца кажется очень интересной в плане поиска физических примеров, поскольку сама модель Лоренца, безусловно, имеет отношение к ряду конкретных систем различной природы. Тем не менее до сих пор не предложено построенных на этой основе в явном виде модельных систем с однородно гиперболическим хаосом.

4.3. Некоторые отображения с однородно гиперболическими аттракторами

Нетрудно записать в явном виде отображение, имеющее аттрактор типа Смейла–Вильямса; этот пример можно найти во многих учебниках (например, [Каток и Хасселблат, 1999]). При выводе отображения удобно использовать сначала переменные (ϕ, X, Y) , имеющие простой геометрический смысл: X и Y отвечают декартовым координатам в меридиональном сечении тора в предположении $X^2 + Y^2 \leq 1$, а ϕ — это угловая координата, определяющая данное сечение. Координаты точки в трехмерном пространстве выражаются тогда как

$$x = (R + X) \cos \phi, \quad y = (R + X) \sin \phi, \quad z = Y, \quad (4.4)$$

где R — дополнительный параметр, конкретизирующий геометрию. Теперь определим отображение за один шаг дискретного времени соотношениями

$$\phi_{n+1} = 2\phi_n, \quad X_{n+1} = \frac{3}{10} X_n + \frac{1}{2} \cos \phi_n, \quad Y_{n+1} = \frac{3}{10} Y_n + \frac{1}{2} \sin \phi_n.$$

В координатах (x, y, z) его можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \left(\frac{7}{10} R + \frac{3}{10} \sqrt{x_n^2 + y_n^2} + \frac{1}{2} \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \right) \frac{x_n^2 - y_n^2}{x_n^2 + y_n^2}, \\ y_{n+1} &= \left(\frac{7}{10} R + \frac{3}{10} \sqrt{x_n^2 + y_n^2} + \frac{1}{2} \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \right) \frac{2x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2}, \\ z_{n+1} &= \frac{3}{10} z_n + \frac{1}{2} \frac{y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

На рис. 4.4 показана тороидальная поглощающая область, граница которой в исходных переменных дается соотношением $X^2 + Y^2 = 1$, и портрет

рет аттрактора, полученный итерациями отображения (4.5) при $R = 2$. Можно отметить видимую поперечную канторову структуру, характерную для соленоида Смейла–Вильямса. Показатели Ляпунова для этого аттрактора таковы: $\Lambda_1 = \ln 2 = 0.6931\dots$, $\Lambda_{2,3} = \ln(3/10) = -1.2039\dots$, поскольку один шаг итераций сопровождается двукратным растяжением вдоль волокон аттрактора, т. е. по угловой координате ϕ , и сжатием по двум ортогональным направлениям на фактор $3/10$. Размерность этого аттрактора по Каплану–Йорке равна $D_{KY} = 1 + \Lambda_1 / |\Lambda_2| \approx 1.576$.

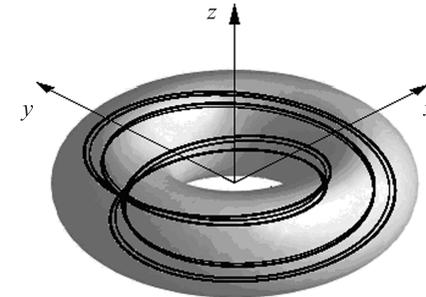


Рис. 4.4. Портрет аттрактора типа Смейла–Вильямса, полученный итерациями отображения (4.5) при $R = 2$ и изображенный на фоне тороидальной поглощающей области, показанной серым цветом

К сожалению, приходится заметить, что топологически это *не тот* аттрактор, который мог бы возникнуть в отображении Пуанкаре потоковой системы [Каток и Хасселблат, 1995].

Геометрическая конструкция, реально связанная с отображением (4.5), может быть описана следующим образом. Возьмем замкнутую трубку, представляющую поверхность тора, разрежем ее в каком-то месте меридиональной плоскостью, затем растянем по длине вдвое, сожмем по толщине, сложим двойной петлей и склеим края точно на месте сделанного ранее разреза [Ильяшенко, 2005].

Если попытаться выполнить деформацию тора непрерывно, без разрезания (например, с реальной резиновой трубкой), то можно заметить, что трубка неизбежно претерпевает дополнительное азимутальное кручение. Так что склеивать края мы должны были бы не напрямую, а выполнив их относительный поворот на угол 2π . Следовательно, отображение (4.5) *не годится* в качестве отправной точки для построения физической потоко-

вой системы, доставляющей надстройку аттрактора Смейла–Вильямса, и для этой цели надо развить какие-то иные подходы.

Рассмотрим теперь пример системы с дискретным временем, имеющей DA-аттрактор на торе [Кузнецов, 2009]. Для начала заметим, что отображение кота Арнольда (1.9) можно представить в виде композиции двух последовательно выполняемых отображений, которые естественно трактовать как отвечающие половине временного шага. А именно, если

$$p_{n+\frac{1}{2}} = p_n + q_n, \quad q_{n+\frac{1}{2}} = q_n \quad (4.6)$$

и

$$p_{n+1} = p_{n+\frac{1}{2}}, \quad q_{n+1} = p_{n+\frac{1}{2}} + q_{n+\frac{1}{2}}, \quad (4.7)$$

то на целом шаге получаем $p_{n+1} = p_n + q_n$, $q_{n+1} = p_n + 2q_n$. (Символ $\text{mod } 1$ здесь опущен для краткости.)

В качестве альтернативы «хирургии Смейла» выполним DA-модификацию, добавив в правые части (4.6) и (4.7) члены, выражающиеся аналитическими функциями. На первом полушаге член, добавляемый в первое уравнение (4.6), полагаем зависящим только от p . Чтобы сохранилась неподвижная точка в начале координат, эта функция должна обращаться в ноль при $p = 0$, и мы считаем ее нечетной. Далее, поскольку рассматривается динамика на торе, естественно потребовать, чтобы эта функция имела период 1, и представить ее в виде ряда Фурье. Учитывая только первую и вторую гармоники, выберем их амплитуды так, чтобы функция была по возможности близка к нулю в середине единичного интервала, т. е. зададим ее как $\sin 2\pi p + \frac{1}{2}\sin 4\pi p$. На втором полушаге аналогичная модификация выполняется симметричным образом, путем добавления функции, зависящей от переменной q , во второе уравнение. Комбинируя оба полушага, приходим к отображению

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + q_n + \varepsilon(\sin 2\pi p_n + \frac{1}{2}\sin 4\pi p_n) / 2\pi(\text{mod } 1), \\ q_{n+1} &= p_n + 2q_n + \varepsilon(\sin 2\pi p_n + \frac{1}{2}\sin 4\pi p_n + \sin 2\pi q_n + \frac{1}{2}\sin 4\pi q_n) / 2\pi(\text{mod } 1). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь параметр ε характеризует относительную величину добавленных членов. Матрица Якоби отображения (4.8)

$$\mathbf{M}(p, q) = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon(\cos 2\pi p + \cos 4\pi p) & 1 \\ 1 + \varepsilon(\cos 2\pi p + \cos 4\pi p) & 2 + \varepsilon \cos 2\pi q + \varepsilon \cos 4\pi q \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

имеет определитель строго положительный и нигде не обращающийся в ноль, пока $\varepsilon < \frac{1}{9}$. Следовательно, при этом условии отображение остается обратимым (диффеоморфизмом).

Отображение (4.8) имеет неподвижную точку в начале координат, и для матрицы линеаризации в этой точке $\mathbf{DM}(0, 0)$ собственные числа, называемые мультипликаторами, таковы:

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2}(3 + 4\varepsilon) \pm \sqrt{\frac{5}{4} + 2\varepsilon}. \quad (4.10)$$

При $\varepsilon = 0$ имеем $\mu_1 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) > 1$ и $\mu_2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) < 1$, так что это седло.

При увеличении ε оба мультипликатора растут, и второй из них становится больше единицы, если $\varepsilon > \varepsilon_1 = \frac{1}{2}$. Это соответствует тому, что неподвижная точка приобретает природу, требуемую от «хирургии Смейла». Следовательно, мы должны взять $\frac{1}{2} < \varepsilon < \frac{1}{9}$.

Вычисления показывают, что аттрактор отображения (4.8) является однородно гиперболическим, например, при $\varepsilon = 0.7$. На рис. 4.5 приводятся портреты аттрактора в единичном квадрате (а) и на поверхности тора (б). На рисунках можно видеть поперечную канторову структуру, присущую DA-аттрактору. Показатели Ляпунова, вычисленные с помощью алгоритма Бенетина, равны $\Lambda_1 = 0.9618$, $\Lambda_2 = -1.3445$. Наибольший показатель близок к величине $\ln \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 0.9624$, соответствующей отображению кота Арнольда.

Размерность Каплана–Йорке составляет $D_{KY} = 1 + \Lambda_1 / |\Lambda_2| \approx 1.715$.

Еще один способ строить в явном виде отображения с равномерно гиперболическими аттракторами был указан Лопесом [Lopez, 1983]. Автор задается вопросом, какова может быть степень алгебраических полиномов, определяющих двумерное отображение с аттрактором типа Плыкина. Фактический пример, который он рассматривает, содержит функции в виде композиций многочленов степени до 9, так что результат представляется полиномами очень высокого порядка (свыше 10^5). По мнению автора, однако, нижний предел порядка полиномов, которые могут задавать отображения с аттракторами типа Плыкина, дается числом 7.

К сожалению, ни один из приведенных выше примеров не указывает простого способа построения систем с непрерывным временем, отвечающих надстройке однородно гиперболических аттракторов.

4.4. От DA-аттрактора к аттрактору типа Плыкина

Оказывается, что можно прийти к аттрактору типа Плыкина на плоскости или на сфере, отправляясь от DA-аттрактора Смейла [Каток и Хасселблат, 1999; Hunt, 2000; Coudene, 2006]. Первым шагом является введе-

ние дополнительной симметрии таким образом, что портрет аттрактора оказывается состоящим из четырех копий оригинальной версии, как показано на рис. 4.6 слева. Для этого в отображении

$$p_{n+1} = p_n + q_n + f(p_n, q_n), \quad q_{n+1} = p_n + 2q_n + g(p_n, q_n), \quad (4.11)$$

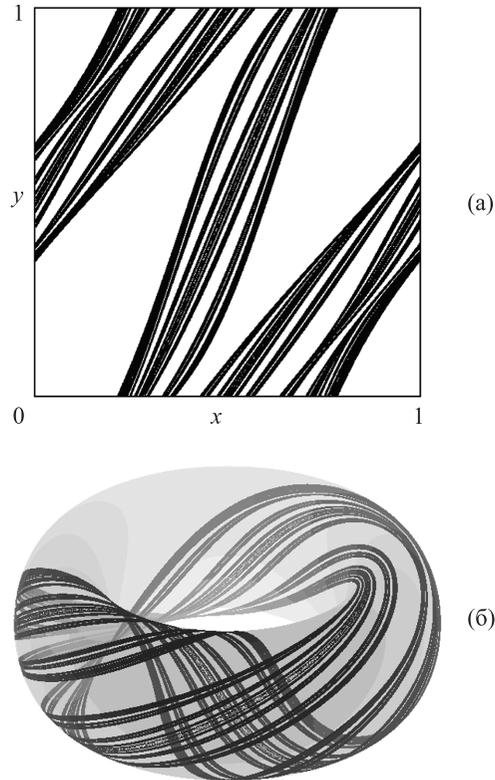


Рис. 4.5. Аттрактор отображения (4.8) при $\varepsilon = 0.7$, представленный в единичном квадрате (развертка тора) (а) и на поверхности тора (б)

которое получается в результате «хирургии Смейла», расширим область определения в координатах (p, q) до квадрата 2×2 . Пусть именно этот квадрат представляет теперь развертку тора. Иначе говоря, величины p и q полагаем определенными по модулю 2, а функции f и g вычисляем, как и раньше, считая их аргументы определенными по модулю 1. Выполним

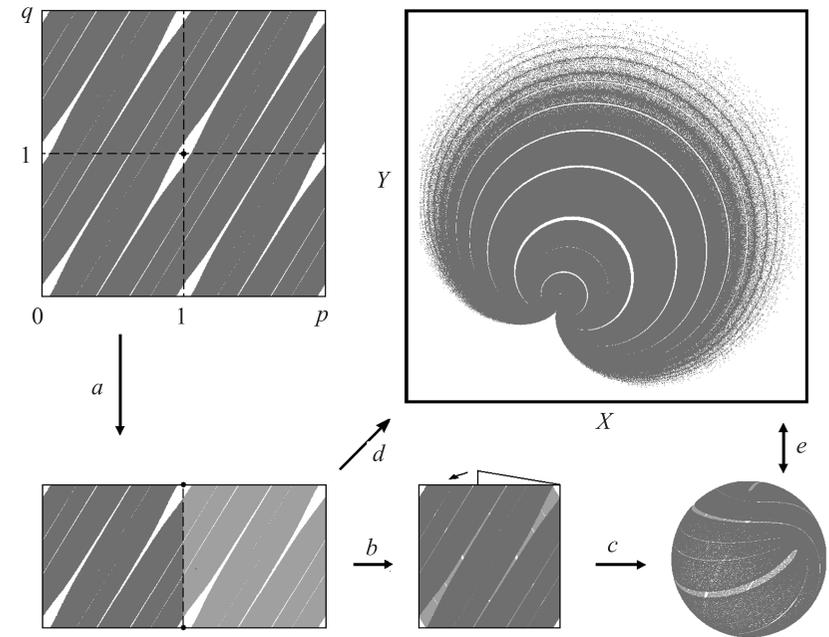


Рис. 4.6. Превращение DA-аттрактора на торе (слева сверху) в аттрактор Пльикина на плоскости (справа сверху). Выбор прямоугольника, представляющего собой верхнюю половину квадрата 2×2 (а); складывание вдвое (б); надувание «конверта» с превращением его в сферу (с); переход на плоскость заменой переменных через функцию Вейерштрасса (d); отображение плоскости на сферу или обратно с использованием стереографической проекции (e)

теперь последовательность шагов, иллюстрируемых на рис. 4.6. Сначала возьмем половинку изображения, верхнюю или нижнюю (а). Представляя картинку нарисованной на прозрачной пленке, согнем ее пополам по вертикальной линии посередине и склеим по левому, верхнему и нижнему краям (б). В силу симметрии при таком склеивании волокна аттрактора аккуратно и правильно соединятся. Далее, надуваем получившийся квадратный «конверт», как воздушный шарик, и превращаем его в сферу (с). (Заметим, что угловые особенности попадают в «дырки», так что они не имеют значения для динамики на аттракторе.) Так мы приходим к аттрактору типа Пльикина на сфере. Завершающий шаг состоит в использовании стереографической проекции, чтобы получить аттрактор на плоскости (e).

Обратимся к более формальному описанию. Поскольку квадрат $2 \circ 2$ представляет собой развертку тора, замена переменных должна выражаться через функцию комплексной переменной $Z = p + iq$, имеющую фундаментальные периоды 2 и $2i$. Как известно, периодические по двум направлениям аналитические функции комплексной переменной относятся к классу эллиптических функций [Абрамовиц и Стиган, 1979; Ахиезер, 1970]. В частности, функция Вейерштрасса \wp с периодами $2\omega_1$ и $2\omega_2$ определяется как

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{\substack{m, n = -\infty \\ (m, n) \neq (0, 0)}}^{\infty} \left[(z - 2\omega_1 m - 2\omega_2 n)^{-2} - (2\omega_1 m + 2\omega_2 n)^{-2} \right]. \quad (4.12)$$

Вычисление этой функции представляет собой обратную операцию к операции нахождения эллиптического интеграла

$$z = \int_{\wp}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}. \quad (4.13)$$

Здесь g_2 и g_3 выступают как параметры, называемые инвариантами, и их величины выбираются так, чтобы обеспечить требуемые периоды. В частности, полупериоды $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 = i$ получаются, если $g_2 = 11.817045$ и $g_3 = 0$.

Замена переменных

$$X + iY = \frac{2}{\sqrt{g_2}} \wp(p + iq) \quad (4.14)$$

отображает нижнюю половину квадрата $2 \circ 2$ на плоскость (X, Y) . Неподвижная точка в начале координат переводится на бесконечность, а три специальные точки отображения (4.11), представляющие орбиту периода три $\dots \rightarrow (0, 1) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1, 1) \rightarrow \dots$, переходят соответственно в точки $(-1, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 0)$. В новых переменных отображение формально записывается в аналитическом виде как

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \frac{2}{\sqrt{g_2}} \operatorname{Re} \left[\wp((1+i)p + (1+2i)q + \varepsilon(1+i)f(p, q) + \varepsilon i f(p, q)) \right], \\ Y_{n+1} &= \frac{2}{\sqrt{g_2}} \operatorname{Im} \left[\wp((1+i)p + (1+2i)q + \varepsilon(1+i)f(p, q) + \varepsilon i f(p, q)) \right], \\ p &= \operatorname{Re} \left[\wp^{-1} \left(\frac{\sqrt{g_2}}{2} (X_n + iY_n) \right) \right], \quad q = \operatorname{Im} \left[\wp^{-1} \left(\frac{\sqrt{g_2}}{2} (X_n + iY_n) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Здесь \wp^{-1} обозначает функцию, обратную к функции Вейерштрасса \wp .¹ Разумеется, аналитическое выражение выглядит довольно громоздким. Практически легче проводить итерации в переменных p и q и конвертировать их для графического представления посредством замены (4.14). На рис. 4.6 это соответствует шагу (d). Окончательно с помощью замены

$$x + iy = 2\wp(Z) / (1 + |\wp(Z)|^2), \quad z = (1 - |\wp(Z)|^2) / (1 + |\wp(Z)|^2) \quad (4.16)$$

мы можем представить картину в координатах x, y, z , удовлетворяющих условию $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, и рассматривать аттрактор как расположенный на сфере; это соответствует шагу (e) на рис. 4.6.²

Возможно, о топологической природе аттрактора затруднительно судить на основе плоской картинке, показанной на рис. 4.6 справа, поскольку тонкие детали неразличимы. Все же аккуратный анализ показывает, что этот аттрактор топологически эквивалентен аттрактору типа Плыкина, изображенному на рис. 2.6.

Явное конструирование надстройки для полученного отображения с аттрактором типа Плыкина не является тривиальным, как было отмечено в диссертации на степень доктора философии Ханта [Hunt, 2000]. На основе этой конструкции задача не была им решена, но Хант предложил альтернативный подход к реализации надстройки аттрактора типа Плыкина, который обсуждается в следующем разделе.

Проведенное рассмотрение и замену переменных (4.14) можно естественным образом применить с тем же успехом к отображению (4.8). Тогда мы получаем неявно определенное аналитическое отображение, имеющее аттрактор типа Плыкина той же самой разновидности на плоскости. Его

¹ Надо заметить, что \wp^{-1} — это двузначная функция (если мы рассматриваем квадрат $2 \circ 2$ как область определения для функции \wp). При заданном аргументе $Z = X + iY$ функция \wp^{-1} дает два образа, один в верхней, а другой в нижней части квадрата $2 \circ 2$, которые связаны соотношениями симметрии $(p, q) \leftrightarrow (2 - p, 2 - q)$. При дополнительном соглашении не различать эти точки указанная особенность не является существенной с точки зрения динамики системы.

² Интересно, что соответствие между точками на сфере и на торе, использованное в ходе приведенных рассуждений, получило применение в картографии. На нем основана так называемая проекция Гюйо (Guycou), посредством которой земная поверхность отображается на прямоугольник с отношением сторон 2:1 или на плоскость в виде периодически повторяющейся картины, соответствующей развертке тора. Может быть, кому-то покажется забавной игрушка — глобус в форме тора (!). Между прочим, искажения в сравнении с истинной конфигурацией географических объектов будут на нем весьма малы, за исключением четырех особых точек (которые имеет смысл разместить где-то в океане).

портрет показан на рис. 4.7. Показатели Ляпунова и размерность Каплана–Йорке для этого аттрактора не отличаются от аналогичных величин для DA-аттрактора отображения (4.8) (в силу гладкости замены переменных) и составляют $\Lambda_1 = 0.9618$, $\Lambda_2 = -1.3445$ и $D_{KY} = 1.715$.

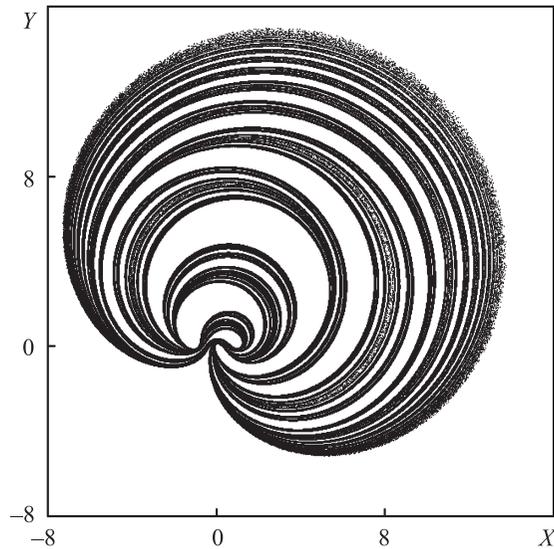


Рис. 4.7. Аттрактор типа Плыкина, полученный заменой через функцию Вейерштасса (4.14) из аналитического отображения с DA-аттрактором (4.8) при $\epsilon = 0.7$

4.5. Пример Ханта: надстройка аттрактора типа Плыкина

Модель Ханта представляет собой неавтономную систему, описываемую дифференциальными уравнениями относительно двух переменных x и y , с правыми частями, зависящими от x , y и времени t :

$$dx/dt = f_*(x, y, t), \quad dy/dt = g_*(x, y, t). \quad (4.17)$$

Фигурирующие здесь функции f_* и g_* — непрерывно дифференцируемые и имеют период 2π по аргументу t . Формальное описание модели Ханта и математические соотношения для вычисления функций f_* и g_* приведены в приложении Е.

Качественно действие оператора эволюции, построенного Хантом, поясняется на рис. 4.8. Панель (а) показывает начальную конфигурацию

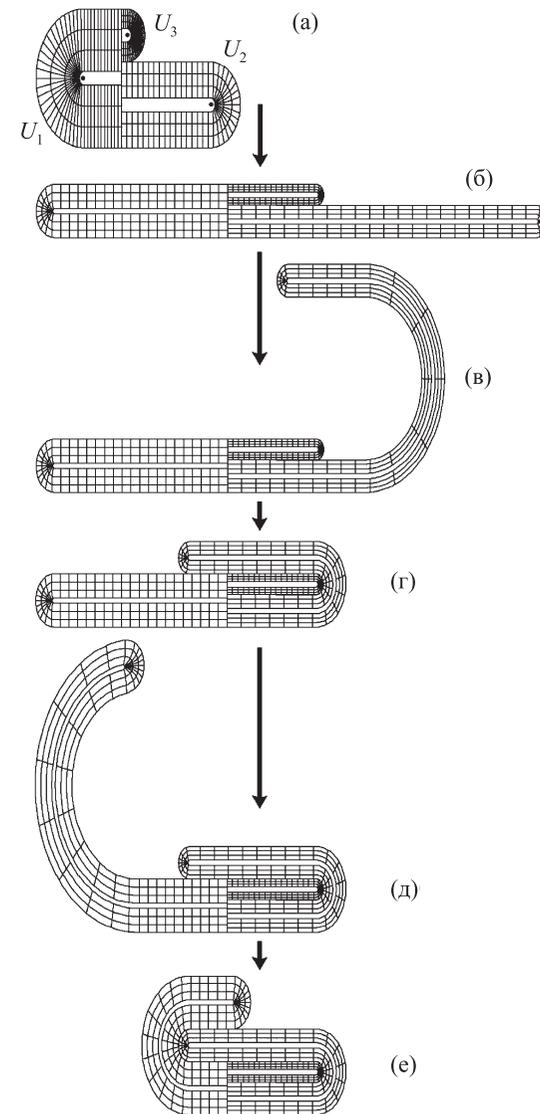


Рис. 4.8. Эволюция области $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ за один период $\Delta t = 2\pi$ для модели Ханта

поглощающей области U , которая состоит из трех подобластей U_i . В каждой из них определены специальные криволинейные координаты $(r, \theta)^i$ ($i = 1, 2, 3$). Соответствующие семейства координатных линий показаны на рисунке. Заполненные черные кружочки на панели (а) указывают положения начала для криволинейных координат.

Облако изображающих точек, занимающее изначально область U , эволюционирует во времени, как показано на рисунке. На одном временном периоде 2π динамика составлена из трех последовательных стадий, каждая продолжительности $2\pi/3$. На первой стадии область U претерпевает вертикальное сжатие и горизонтальное растяжение (см. панель (б)). (Более точно, сжатие имеет место вдоль координатных линий криволинейной системы координат $\theta = \text{const}$, а растяжение — вдоль линий $r = \text{const}$.) На второй стадии расположенная справа подобласть U_2 плавно изгибается вверх, влево и вниз (в), так что в итоге оказывается расположенной вдоль границы области U_3 (г). На третьей стадии расположенная слева область U_1 претерпевает аналогичную деформацию, изгибаясь вверх, вправо и вниз (д). В результате ее нижняя граница располагается по краю области U_2 , трансформированной на предыдущей стадии (см. панель (е)). Вся деформированная область располагается в итоге в исходной фигуре. При этом координатные линии в их новом положении проходят вдоль исходных координатных линий.

Описанная деформация составляет, так сказать, основное содержание динамики. Кроме того, в модель заложены поправки, благодаря которым точки начала отсчета криволинейных координат становятся отталкивающими, а поперечное сжатие элементов фигуры оказывается несколько более сильным, так что в итоге трансформации она попадает *внутрь* исходной области. Степень сглаживания определяется параметром ε (подробности см. в приложении Е). Также в модели предусмотрено определение векторного поля, отвечающего правым частям уравнений $(f_i(x, y, t), g_i(x, y, t))$ за пределами деформирующейся области $U(t)$.

Формальное определение модели Ханта является весьма сложным и громоздким, и кажется очень сомнительным, чтобы модель можно было сконструировать как реальное физическое устройство. В работе [Айдарова и Кузнецов, 2008] эта модель использовалась для тестирования вычислительных методов, применяемых для анализа динамики на гиперболических аттракторах; были представлены и обсуждены результаты компьютерного моделирования, причем замечена и исправлена техническая неточность в компьютерной программе в работе Ханта.

На рис. 4.9 показаны графики зависимости величин x и y от времени, полученные при численном решении уравнений модели Ханта. Нерегулярное поведение кривых указывает на хаотический характер динамики. Зависимости характеризуются наличием переходящих друг в друга участков различного поведения — горизонтальных плато и резких всплесков. Это объясняется тем, что в силу специфики модели динамика составлена на каждом периоде 2π из сменяющих друг друга трех разных стадий.

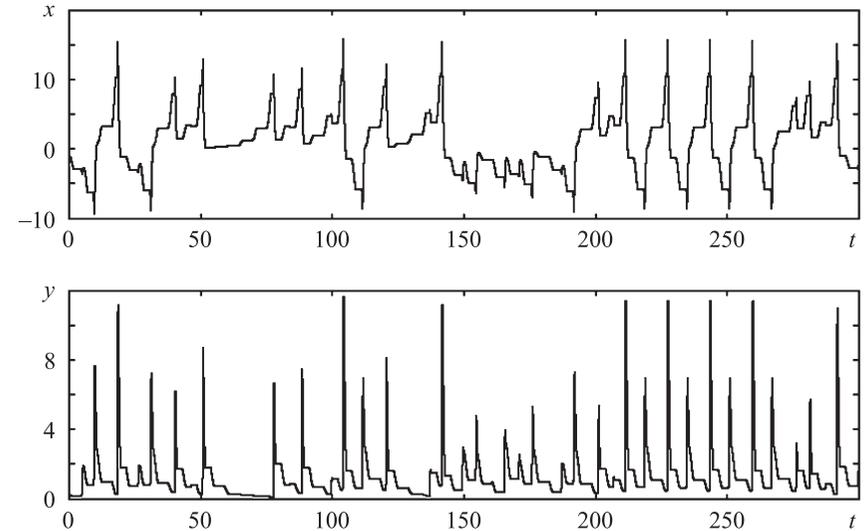


Рис. 4.9. Динамические переменные x и y в зависимости от времени для модели Ханта при значении параметра $\varepsilon = 0.17$

На рис. 4.10 показан вид аттрактора модели Ханта в расширенном фазовом пространстве. Рисунок 4.11 показывает тот же аттрактор в проекции на плоскость (x, y) . Подобно аттрактору Лоренца, он составлен из двух «крыльев бабочки», которые, однако, асимметричны. За их формирование отвечают вторая и третья стадии динамики модели Ханта, содержанием которых является деформация и поворот боковых подобластей.

На рис. 4.12 приводится портрет аттрактора в сечении Пуанкаре. На нем хорошо видны несколько первых уровней поперечной фрактальной структуры: объект составлен из полос, каждая из которых содержит полосы следующего уровня и так далее. Этот же объект можно видеть на рис. 4.9 сверху в сечении фигуры плоскостью. В соответствии с построением опе-

ратора эволюции по Ханту это аттрактор типа Плькина, подобный показанному на рис. 2.6.

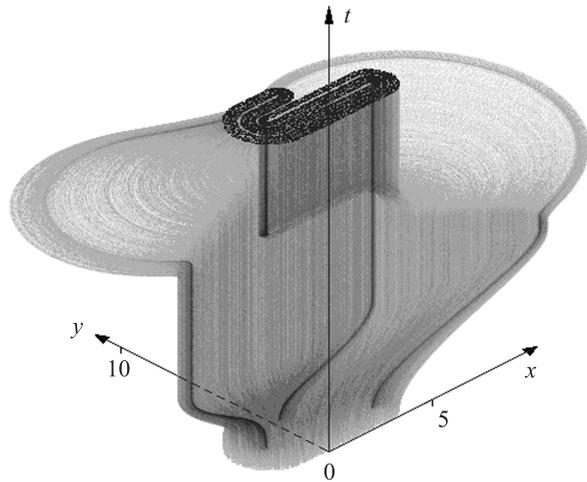


Рис. 4.10. Аттрактор модели Ханта в расширенном фазовом пространстве; значение параметра $\varepsilon = 0.17$

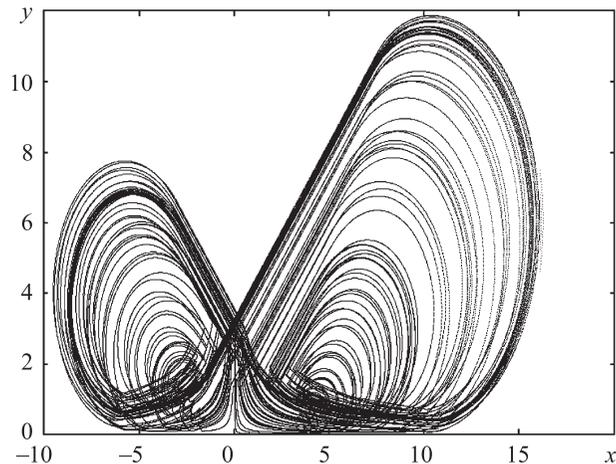


Рис. 4.11. Аттрактор модели Ханта в проекции на плоскость динамических переменных x и y ; значение параметра $\varepsilon = 0.17$

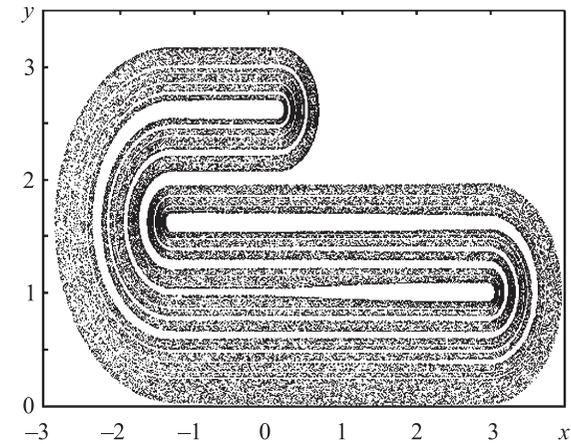


Рис. 4.12. Аттрактор модели Ханта в проекции на плоскость динамических переменных x и y ; значение параметра $\varepsilon = 0.17$

Из-за сложности формального определения модели для вычисления показателей Ляпунова удобно применить вариант алгоритма Бенеттина, основанный на численном решении нескольких комплектов идентичных систем дифференциальных уравнений для близко расположенных фазовых траекторий вместо использования уравнений в вариациях. А именно, интегрируются три системы уравнений вида (4.17). Одна отвечает опорной траектории, а две других — близким орбитам с фиксированной начальной нормой вектора возмущения $\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} = \varepsilon_0 \ll 1$, $i = 1, 2$. По истечении каждого нового временного интервала протяженности 2π программа выполняет ортогонализацию векторов отклонения от опорной траектории с помощью процедуры Грама–Шмидта. Кроме того, производится их нормализация так, чтобы получить снова величины норм ε_0 , и две возмущенные системы запускаются по измененным соответствующим образом траекториям.

Показатели Ляпунова вычисляются как средние скорости роста или убывания для накапливающихся сумм логарифмов отношений норм в конце и в начале циклов повторения стадий. Вычисления дают $\lambda_1 = 0.1532$, $\lambda_2 = -0.1930$. Показатели Ляпунова для стробоскопического отображения Пуанкаре выражаются как $\Lambda_{1,2} = 2\pi\lambda_{1,2}$, так что $\Lambda_1 = 0.9625$, $\Lambda_2 = -1.213$.

Отметим, что наибольший показатель согласуется с оценкой $\Lambda \equiv \ln[(3 + \sqrt{5})/2] = 0.9624$, которую можно получить непосредственно из процедуры построения модели Ханта. Сумма показателей Ляпунова отрицательна, что соответствует экспоненциальному убыванию объема облака изображающих точек в ходе временной эволюции при оседании на аттрактор. Оценка фрактальной размерности аттрактора отображения Пуанкаре по формуле Каплана Йорке дает $d_L = 1 + \lambda_1 / |\lambda_2| \approx 1.79$. Для аттрактора как объекта в расширенном фазовом пространстве размерность на единицу больше: $D_L \approx 2.79$.

4.6. Движение по геодезическим линиям на поверхности отрицательной кривизны и механическая система с гиперболической динамикой

Свободное механическое движение частицы в пространстве с кривизной осуществляется, как известно, по *геодезическим линиям* метрики, заданной положительно определенной квадратичной формой с гладко зависящими от координат коэффициентами. В двумерном случае квадрат инфинитезимального смещения дается выражением

$$ds^2 = E(x, y)dx^2 + F(x, y)dxdy + G(x, y)dy^2. \quad (4.18)$$

Через коэффициенты квадратичной формы можно найти *гауссову кривизну*, используя *формулу Бриоски* [Struik, 1988]:

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{yy} + F_{xy} - \frac{1}{2}G_{xx} & \frac{1}{2}E_x & F_x - \frac{1}{2}E_y \\ F_y - \frac{1}{2}G_x & E & F \\ \frac{1}{2}G_y & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_y & \frac{1}{2}G_x \\ \frac{1}{2}E_y & E & F \\ \frac{1}{2}G_x & F & G \end{vmatrix}. \quad (4.19)$$

В случае отрицательной кривизны движение по геодезическим линиям характеризуется неустойчивостью по отношению к поперечным возмущениям. Поэтому если движение происходит в ограниченной области, то оно оказывается хаотическим. Анализ динамики в этой ситуации восходит к Адамару; данный предмет был одним из главных источников вдохновения для создания гиперболической теории [Аносов, 1967].

Проиллюстрируем основные свойства движения на компактном многообразии отрицательной кривизны на конкретном примере, следуя работе [Balazs and Voros, 1986].

Поверхность постоянной отрицательной кривизны (плоскость Лобачевского, или псевдосферу) можно представить моделью Пуанкаре, в ко-

торой точки поверхности изображаются точками в единичном круге, а прямые (т. е. геодезические) — дугами окружностей, ортогональными краю диска (рис.4.13а). Метрика в модели Пуанкаре задается выражением

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{1 - x^2 - y^2}, \quad (4.20)$$

и ей соответствует постоянная отрицательная кривизна $K = -1$, что можно проверить с помощью формулы (4.19).

Функция Лагранжа свободной частицы массы μ содержит только член кинетической энергии, который, с учетом (4.20), представляется как

$$L = W = \frac{2\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}. \quad (4.21)$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа, задающие движение частицы, получаются отсюда стандартным образом и имеют вид

$$\ddot{x} = 2 \frac{x\dot{y}^2 - x\dot{x}^2 - 2y\dot{x}\dot{y}}{(1 - x^2 - y^2)^2}, \quad \ddot{y} = 2 \frac{y\dot{x}^2 - y\dot{y}^2 - 2x\dot{x}\dot{y}}{(1 - x^2 - y^2)^2}. \quad (4.22)$$

При движении в соответствии с этими уравнениями сохраняется кинетическая энергия $W = 4\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(1 - x^2 - y^2)^{-2}$, так что движение имеет место по геодезическим линиям метрики, заданной выражением (4.20). Скорость как производная по времени от расстояния, отсчитываемого по геодезической линии, дается выражением

$$\dot{s}^2 = \frac{4(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2} = 2W\mu^{-1}. \quad (4.23)$$

Рассмотрим движение частицы внутри восьмиугольника D , ограниченного дугами окружностей (рис. 4.13б). Из-за симметрии, присущей псевдосфере, восьмиугольник может рассматриваться как эквивалентный каждой из восьми областей, присоединенных к его сторонам, которые в модели Пуанкаре имеют вид искаженных восьмиугольников меньшего размера. Замены переменных, соответствующие преобразованию каждой из этих областей к восьмиугольнику D , даются выражением

$$x' + iy' = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}(x + iy) + e^{i\pi m/4} \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{1 + \sqrt{2}} - \sqrt{2 + \sqrt{2}} e^{-i\pi m/4} (x + iy)}, \quad (4.24)$$

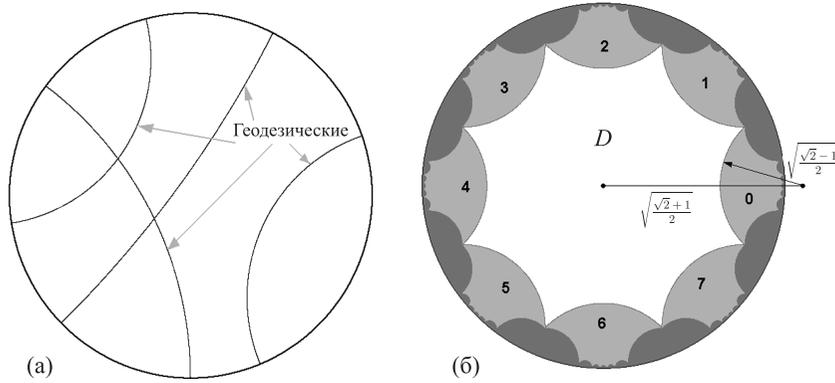


Рис. 4.13. Единичный диск, представляющий плоскость Лобачевского в модели Пуанкаре с изображенными на нем представителями семейства геодезических линий (а). Область D , в которой рассматривается движение частицы, и множество эквивалентных областей, получаемых из области D заменой переменных (4.24) при $m = 0, 1, \dots, 7$ (б)

где m — индекс соответствующей области. По ходу движения частицы каждый раз, когда она пересекает границу восьмиугольника D , можно представлять ее как появляющуюся на противоположной стороне с координатами, пересчитанными в соответствии с (4.24), и компонентами скорости, полученными как производные от этого выражения:

$$\dot{x}' + i\dot{y}' = \frac{(3 + 3\sqrt{2})(\dot{x} + i\dot{y})}{\left(\sqrt{1 + \sqrt{2}} - \sqrt{2 + \sqrt{2}}e^{-i\pi m/4}(x + iy)\right)^2}. \quad (4.25)$$

Точки двух противоположных участков границы области D можно отождествить, представляя себе эти участки как подклеенные друг к другу. С точки зрения топологии, получившийся в результате объект отвечает бублику с двумя дырками или сфере с двумя приклеенными ручками и, согласно принятой классификации, представляет собой многообразие рода 2.

На рис. 4.14 показана траектория свободного движения частицы в области D , полученная посредством численного решения дифференциальных уравнений (4.22) с добавлением правил пересечения границ (4.24) и (4.25). При большом времени наблюдения орбита плотно покрывает всю область.

Показатели Ляпунова можно получить численно методом Бенетина из совместного решения уравнений движения (4.22) и четырех комплектов

линеаризованных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}} &= 2 \frac{\tilde{x}\dot{y}^2 + 2x\dot{y}\dot{y}' - \tilde{x}\dot{x}^2 - 2x\dot{x}\dot{x}' - 2\tilde{y}\dot{x}\dot{y}' - 2y\dot{x}\dot{y}' - 2y\dot{x}\dot{y}'}{(1-x^2-y^2)^2} + \\ &+ 4 \frac{(x\dot{y}^2 - x\dot{x}^2 - 2y\dot{x}\dot{y}')(x\tilde{x} + y\tilde{y})}{(1-x^2-y^2)^3}, \\ \ddot{\tilde{y}} &= 2 \frac{\tilde{y}\dot{x}^2 + 2y\dot{x}\dot{x}' - \tilde{y}\dot{y}^2 - 2y\dot{y}\dot{y}' - 2\tilde{x}\dot{x}\dot{y}' - 2x\dot{x}\dot{y}' - 2x\dot{x}\dot{y}'}{(1-x^2-y^2)^2} + \\ &+ 4 \frac{(y\dot{x}^2 - y\dot{y}^2 - 2x\dot{x}\dot{y}')(x\tilde{x} + y\tilde{y})}{(1-x^2-y^2)^3}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Однако благодаря специфике данной конкретной задачи показатели Ляпунова удастся найти явно. Если представить вектор $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}, \tilde{y})$ в локально определенном базисе $(\mathbf{e}_{\parallel}, \mathbf{e}_{\perp})$, где \mathbf{e}_{\parallel} — единичный вектор, направленный вдоль геодезической линии, а \mathbf{e}_{\perp} — ортогональный к нему единичный вектор, то, записав вектор инфинитезимального возмущения в виде $\tilde{\mathbf{x}} = J_{\parallel}\mathbf{e}_{\parallel} + J_{\perp}\mathbf{e}_{\perp}$, можно вывести уравнения для коэффициентов

$$\ddot{J}_{\parallel} = 0, \quad \ddot{J}_{\perp} = -K\dot{s}^2 J_{\perp}, \quad (4.27)$$

где K — гауссова кривизна. (Эти уравнения справедливы для общего случая свободного движения частицы в метрике (4.18) с произвольной гладкой зависимостью коэффициентов от координат; при этом величину K надо понимать как локальную кривизну, зависящую от мгновенных координат x, y согласно формуле (4.19).)

Общее решение первого уравнения (4.27) является линейной комбинацией функций 1 и t . Таким образом, его вклад в спектр показателей Ляпунова состоит в появлении двух нулевых показателей. Что касается второго уравнения, то для рассматриваемой системы величина \dot{s}^2 равна удвоенному отношению постоянной кинетической энергии частицы к ее массе (см. (4.20)). При постоянной отрицательной кривизне K фундаментальные решения будут $e^{\sqrt{KW}\mu^{-1}t}$ и $e^{-\sqrt{KW}\mu^{-1}t}$. Таким образом, спектр показателей Ляпунова содержит один положительный показатель, два нулевых и один отрицательный, а именно:

$$\lambda_1 = \sqrt{2KW\mu^{-1}}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = -\sqrt{2KW\mu^{-1}}. \quad (4.28)$$

Присутствие положительного показателя говорит о хаотическом характере динамики. То обстоятельство, что сумма всех показателей нулевая, отражает консервативную природу рассматриваемой системы.

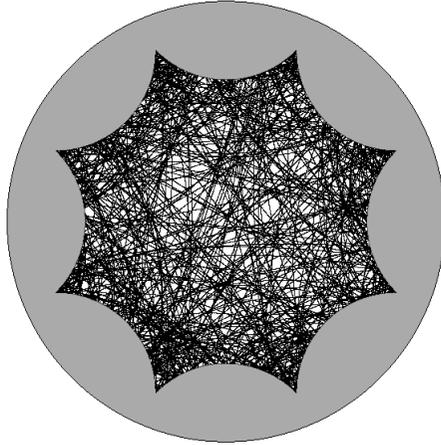


Рис. 4.14. Типичная траектория свободного движения частицы на поверхности постоянной отрицательной кривизны. Движение описывается уравнениями (4.22), дополненными правилами пересечения границ (4.24) и (4.25)

Результаты прямого численного расчета показателей Ляпунова хорошо согласуются с теоретическим результатом (4.28). Например, для траектории с начальными условиями $x = 0, y = 0, \dot{x} = 0.6, \dot{y} = 0.8$ имеем $W = 2\mu$ и, с учетом того, что $K = -1$, получаем $\sqrt{2KW\mu^{-1}} = 2$. Результат вычисления показателей по методу Бенеттина на временном интервале $\Delta t = 1000$ таков:

$$\lambda_1 = 2.0004, \lambda_2 = 0.0038, \lambda_3 = -0.0038, \lambda_4 = -2.0004. \quad (4.29)$$

Очевидно, отклонения от результата (4.28) надо интерпретировать как погрешность вычислений.

Тип динамики, подобный рассмотренному примеру, оказывается возможным реализовать в технически несложной механической системе — шарнирном механизме «тройное соединение», обсуждавшемся в свое время в научно-популярной математической статье Тёрстона и Уикса [Тёрстон и Уикс, 1984] (см. рис. 4.15). Гиперболическая природа динамики этой системы установлена в работах МакКэя и Ханта [Hunt and MacKay, 2003; Hunt, 2000; MacKay, 2005].

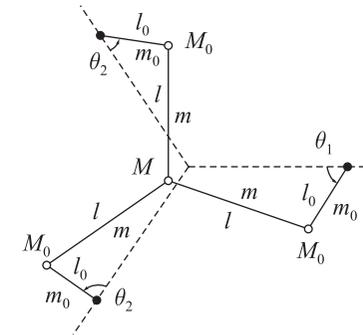


Рис. 4.15. Механическая система Тёрстона и Уикса. «Тройное соединение»

Механизм составлен из трех шарниров, закрепленных в вершинах равностороннего треугольника (черные кружки на рисунке), вокруг которых могут свободно вращаться присоединенные к ним концами идентичные стержни. Каждый стержень на другом конце имеет подвижный шарнир, и к этим трем шарнирам прикреплены другие три одинаковых стержня, противоположные концы которых соединены вместе посредством еще одного подвижного шарнира. (Подвижные шарниры обозначены незаполненными кружками.) Мгновенная конфигурация шарнирного механизма задается угловыми переменными $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, но только две из них являются независимыми в силу наложенных механических связей. Таким образом, конфигурационное пространство представляет собой двумерное многообразие. Топологически, как указали Тёрстон и Уикс, это поверхность рода 3 («крендель с тремя дырками»).

В отсутствие трения и внешних сил движение происходит по инерции, с сохранением кинетической энергии. Кинетическая энергия выражается как квадратичная форма, через обобщенные скорости — временные производные локальных координат на двумерном многообразии. Эта квадратичная форма, коэффициенты которой зависят от соотношения длин и масс элементов конструкции, задает метрику на двумерном многообразии, причем движение имеет место по геодезическим линиям этой метрики. Перебором вариантов был найден набор параметров, при котором метрика характеризуется отрицательной кривизной во всем конфигурационном пространстве (на двумерном многообразии), а при этом, как известно [Аносов, 1967; Balazs and Vörös, 1986], имеет место гиперболический хаос в его консервативной версии. Типичная траектория, полученная при численном решении механических уравнений

движения, показана на рис. 4.16 на трехмерном графике в пространстве $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Вычисления выполнены при выборе длин и масс, при которых, согласно анализу МакКэя и Ханта, гиперболичность должна иметь место вследствие глобально отрицательной кривизны метрики на многообразии.

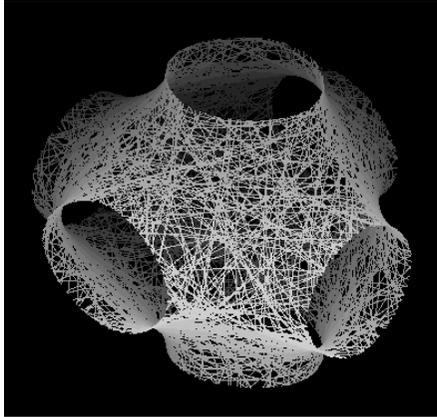


Рис. 4.16. Траектория в трехмерном пространстве $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, полученная для системы Тёрстона и Уикса при величинах длин и масс $l = \frac{41}{40}$, $l_0 = \frac{7}{40}$, $m = \frac{9}{100}$, $M = \frac{13}{100}$, $M_0 = \frac{1}{5}$, $m_0 = 0$. Согласно результатам МакКэя и Ханта, при этих параметрах движение гиперболическое вследствие глобально отрицательной кривизны метрики на двумерном многообразии в конфигурационном пространстве

Как утверждают МакКэй и Хант, при добавлении трения, потенциального поля и надлежащего управления посредством механизма обратной связи можно получить систему с гиперболическим аттрактором. Пока, однако, не проведено конкретного исследования, в рамках которого такой аттрактор был бы в явном виде продемонстрирован на уровне компьютерного моделирования или в эксперименте.

4.7 Возможное возникновение аттрактора Плыкина в модели нейрона типа Хиндмарша–Роуза

В бурно развивающейся нейронауке весьма популярной и хорошо изученной является модель Хиндмарша–Роуза [Hindmarsh and Rose, 1984; Gonzalez-Miranda, 2007; Shilnikov and Kolomiets, 2008], описывающая многие особенности динамики отдельного нейрона. Она представляется в виде ав-

тономной системы трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - x^3 + 3x^2 - z, \\ \dot{y} &= 1 - 5x^2 - y, \\ \dot{z} &= \mu[4(x - c) - z - \delta]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Здесь x, y, z — динамические переменные, а δ, μ, c — параметры. При фиксированных величинах μ и c (например, $\mu = 0.005$, $c = -1.56$) модель может демонстрировать различные режимы в зависимости от параметра δ . В некотором диапазоне $\delta < \delta_1$, имеют место относительно долгопериодические автоколебания, о которых говорят как о *берстовой активности*. В другом диапазоне $\delta > \delta_2$, имеют место относительно быстрые, короткопериодические осцилляции, что называют генерацией *спайков*. В промежуточном интервале $\delta_1 < \delta < \delta_2$ спайки наблюдаются на фоне берстов (рис. 4.17), и это как раз та область параметров, где могут возникать нетривиальные динамические феномены.

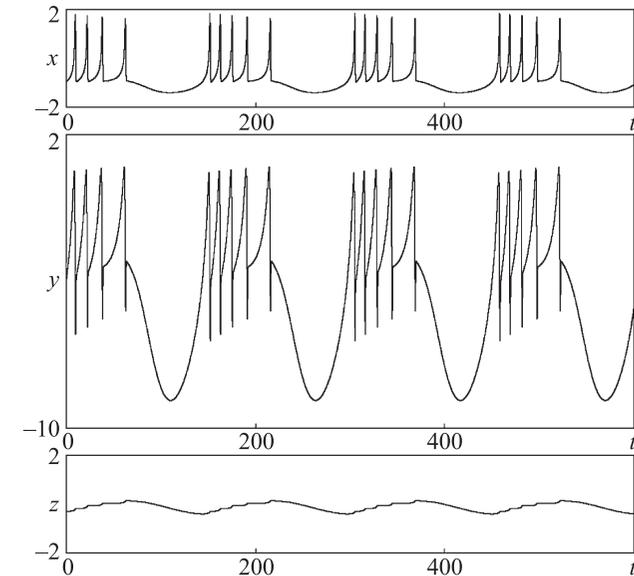


Рис. 4.17. Берсты и спайки на графике зависимости динамических переменных от времени в модели Хиндмарша–Роуза при $\mu = 0.005$, $c = -1.56$, $\delta = 4.8$

В работе В. Белых, И. Белых и Э. Мозекильде [Belykh et al., 2005] высказывается аргументация в пользу присутствия аттрактора типа Плыкина в отображении Пуанкаре системы такого рода. Фактически авторы рассматривают уравнения более формального обобщенного вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, z), \quad \dot{z} = \mu[Z(\mathbf{x}) - z - \delta].$$

Здесь \mathbf{x} — двумерный вектор, а функции $\mathbf{X}(\mathbf{x}, z)$ и $Z(\mathbf{x})$ конкретизированы только на качественном уровне, чтобы были оправданы проводимые рассуждения.

Авторы указывают способ определить отображение Пуанкаре, обеспечивающий адекватное описание динамики в представляющем интерес диапазоне изменения параметров, где берстовая и спайковая активность сосуществуют. Согласно проведенному качественному анализу, в этом интервале параметров двумерное отображение Пуанкаре действует в области в виде диска с несколькими вырезами (дырками). В частности, может реализоваться ситуация отображения, определенного на диске с тремя дырками, что является основным нетривиальным условием для появления аттрактора типа Плыкина. Общий вывод состоит в том, что в соответствующей области параметров аттрактор трехмерной потоковой системы может быть гиперболическим, возникая как результат вторичной бифуркации двойной гомоклинической петли седла.

Эти результаты интересны, поскольку они относятся к системе естественного происхождения (модели нейрона), что дает основание строить предположения о возможном значении однородной гиперболичности для информационных процессов в нейродинамике. К сожалению, однако, до сих пор в явном виде не представлено уравнений, выражений для функций, конкретных рекомендаций по выбору параметров, отвечающих ситуации появления однородно гиперболического аттрактора. Очевидна потребность постановки специальных исследований, которые включали бы обнаружение и демонстрацию однородно гиперболических аттракторов в численном счете, оценку их количественных характеристик (таких как показатели Ляпунова, размерности и т. д.), проверку критерия конусов. До настоящего времени таких исследований проведено не было.

4.8. Катастрофа голубого неба и рождение аттрактора Смейла–Вильямса

Шильников и Тураев [Шильников и Тураев, 1995; Shilnikov and Turaev, 1997] указали на возможность появления аттрактора типа Смейла–Вильямса

са в сечении Пуанкаре системы с непрерывным временем, претерпевающей разновидность так называемой *катастрофы голубого неба*.

В простейшем варианте катастрофа голубого неба происходит в трехмерном фазовом пространстве. В момент бифуркации в фазовом пространстве имеется седло-узловой предельный цикл, от которого траектории уходят вдоль неустойчивого многообразия и затем возвращаются к нему снова, но с противоположной стороны (рис. 4.18а). При смещении по управляющему параметру в одном направлении седло-узловой цикл превращается в пару близких предельных циклов, из которых один устойчивый, а другой неустойчивый. При смещении по параметру в обратном направлении седло-узловой цикл исчезает, а вместо него возникает предельный цикл большого размера, содержащий спиралевидные витки в области исчезнувшего седло-узлового цикла.

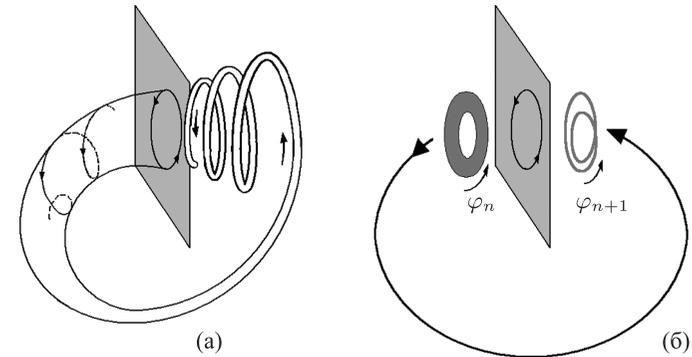


Рис. 4.18. Устройство фазового пространства в случае катастрофы голубого неба в простейшем случае трех измерений (а) и схематическое представление ситуации рождения аттрактора Смейла–Вильямса, возможного в фазовом пространстве размерности 4 и выше (б)

Если первоначально угловая координата изображающей точки вблизи седло-узлового цикла имела значение φ , то после путешествия вдоль неустойчивого многообразия и последующего возврата угловая координата будет выражаться соотношением, содержащим в общем случае аддитивный член $m\varphi$, где целое число m для трехмерного случая может быть равно 0 или 1. Однако в случае более высокой размерности может иметь место любой целочисленный коэффициент. В частности, $m = 2$ соответствует рождению гиперболического странного аттрактора, представленного

в сечении Пуанкаре соленоидом Смейла–Вильямса (рис. 4.18б). Авторы подчеркивают, что в результате такой бифуркации система, относящаяся к классу Морса–Смейла, сразу превращается в систему со сложной динамикой, ассоциирующейся со структурно устойчивым гиперболическим хаотическим аттрактором.

Насколько известно автору, до недавнего времени конкретных систем, где реализовался бы последний вариант катастрофы голубого неба, в литературе рассмотрено не было. Примеры были приведены только для случая трехмерного фазового пространства [Gavrilov and Shilnikov, 1999; Shilnikov and Symbalyuk, 2005; Glyzin et al., 2008], где переход к аттрактору Смейла–Вильямса невозможен. Система дифференциальных уравнений четвертого порядка, где такой аттрактор действительно возникает, предложена недавно автором [Kuznetsov, 2010] и обсуждается ниже в главе 8.

4.9. Машина для вытягивания сахарной ваты

Забавную демонстрацию осуществимости непрерывной деформации растяжения сплошной среды, без разрезов и формирования локальных уплотнений, что требуется для однородно гиперболического аттрактора, доставляет *машина для вытягивания сахарной ваты* (по-английски — *taffy-pulling machine*), показанная на рис. 4.19. [MacKay, 2001; Halbert and Yorke, 2003; Haselblatt and Katok, 2003]. Благодаря вращательному движению системы поперечных стержней субстанция претерпевает непрерывное растяжение и складывание с образованием слоистой перемешанной структуры.

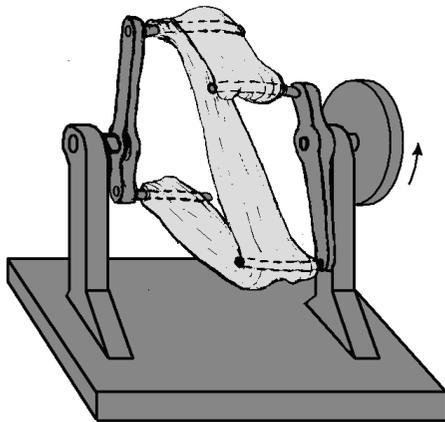


Рис. 4.19. Машина для приготовления сахарной ваты. Читатель может найти фотографии и видеоролики, иллюстрирующие действие этой машины, в сети Интернет, используя для поиска ключевые слова «taffy-pulling machine»

В работе Халберта и Йорке была построена математическая модель в виде отображения, описывающего динамику частицы среды в процессе деформации [Halbert and Yorke, 2003]. Как заявлено авторами, такую машину можно рассматривать как вариант физической реализации гиперболического аттрактора. Следует, однако, заметить, что это физическая ситуация совсем не из тех, которые имеются в виду в нашем изложении в настоящей книге. На самом деле все устройство в данном случае *не есть* маломерная динамическая система, а содержит сплошную среду, претерпевающую определенные деформации, в то время как ее локальные элементы совершают движения, описываемые отображением с гиперболической динамикой. Иными словами, здесь мы имеем дело с динамикой реальной субстанции в реальном пространстве, а не с динамикой фазовой жидкости в фазовом пространстве маломерной динамической системы.

Часть II
**Низкоразмерные
модели**

Глава 5

Механическое движение с толчками

Некоторые физические системы допускают очень естественное описание в дискретном времени. Например, это относится к механическим или электронным системам, функционирующим благодаря присутствию периодических импульсных толчков. Вместо того чтобы рассматривать движение в непрерывном времени, можно построить отображение, которое выражает переменные состояния перед очередным толчком (или после него) через состояние перед предыдущим толчком (или после него). В рамках такого подхода в статьях и учебниках по нелинейной динамике строятся и исследуются, например, отображения Эно и Икеда (приложение А), а также Чирикова–Тейлора–Заславского [Heagy, 1992; Kuznetsov et al., 2008; Заславский и Сагдеев, 1988]. Могут ли однородно гиперболические аттракторы реализоваться для диффеоморфизмов, возникающих при описании систем с периодическими толчками? В этой главе вводится несколько простых физически мотивированных моделей, динамика которых описывается отображениями, имеющими аттракторы типа Смейла–Вильямса.

5.1. Механические модели: движение частицы на плоскости под действием периодических толчков

Обратимся к механической задаче, где получается отображение с аттрактором типа Смейла–Вильямса [Кузнецов и Тюрюкина, 2008].

Рассмотрим движение частицы единичной массы на плоскости (x, y) при наличии силы трения, пропорциональной мгновенной скорости, причем движение происходит в стационарном потенциальном поле. Потенциальная функция $U(x, y) = -\frac{1}{2}\mu(x^2 + y^2) + \frac{1}{4}\mu(x^2 + y^2)^2$ обладает вращательной симметрией относительно начала координат с минимумом на единичной окружности. Примем, что с периодом T на короткое время включается дополнительное силовое поле, величина и направление которого зависят от мгновенного положения частицы. Пусть получаемый при толчке импульс дается выражением $\mathbf{P} = \{P_x(x, y), P_y(x, y)\}$, где x и y — мгновенные координаты частицы, а функции $P_{x,y}(x, y)$ описывают пространственное распределение составляющих силового поля. Полагая для простоты коэффициент трения равным единице, запишем уравнения движения в виде

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \dot{x} &= \mu x(1 - x^2 - y^2) + P_x(x, y) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \\ \ddot{y} + \dot{y} &= \mu y(1 - x^2 - y^2) + P_y(x, y) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).\end{aligned}\quad (5.1)$$

Чтобы подобрать конфигурацию силового поля $\mathbf{P}(x, y)$, рассуждаем следующим образом. Пусть в начальный момент имеем кольцо из частиц, покоящихся на единичной окружности, с координатами $x = \cos \phi$ и $y = \sin \phi$, где $0 \leq \phi < 2\pi$. После толчка со стороны силового поля каждая частица, характеризуемая начальным углом ϕ , получит импульс с компонентами $P_x(x, y)$ и $P_y(x, y)$, что приведет через некоторое время к изменению ее положения на плоскости. Если пока не учитывать потенциальное поле ($\mu = 0$), частица остановится из-за трения в точке с координатами

$$x' = x + P_x(x, y), \quad y' = y + P_y(x, y).\quad (5.2)$$

Подберем теперь функции $P_x(x, y)$ и $P_y(x, y)$, потребовав, чтобы частицы расположились опять по единичной окружности, но так, чтобы однократный обход исходного кольца отвечал M -кратному обходу при новом их размещении с целым коэффициентом M . Иными словами, угловая координата должна претерпевать умножение на M . Для этого координаты

частицы в конце пути

$$x' = x + P_x(x, y), \quad y' = y + P_y(x, y)\quad (5.2)$$

должны удовлетворять соотношениям

$$x' = \cos \phi' = \cos M\phi, \quad y' = \sin \phi' = \sin M\phi.\quad (5.4)$$

Это будет так, если выбрать функции следующим образом:

$$\begin{aligned}P_x(x, y) &= x' - x = \cos M\phi - \cos \phi = \operatorname{Re}(e^{iM\phi} - e^{i\phi}), \\ P_y(x, y) &= y' - y = \sin M\phi - \sin \phi = \operatorname{Im}(e^{iM\phi} - e^{i\phi}).\end{aligned}\quad (5.5)$$

Принимая во внимание связь декартовых координат с угловой координатой на единичной окружности, $x = \cos \phi$ и $y = \sin \phi$, получаем

$$P_x(x, y) + iP_y(x, y) = (x + iy)^M - (x + iy).\quad (5.6)$$

В соотношениях для функций $P_{x,y}(x, y)$ можно выразить четные степени одной переменной через другую, поскольку на единичной окружности имеем $y^2 = 1 - x^2$. В результате получаем для $M = 2$

$$P_x(x, y) = 2x^2 - x - 1, \quad P_y(x, y) = 2xy - y\quad (5.7)$$

и для $M = 3$

$$P_x(x, y) = 4x^3 - 4x, \quad P_y(x, y) = -4y^3 + 2y.\quad (5.8)$$

Обратим внимание, что во втором случае импульсное силовое поле потенциальное. Более того, его x -компонента и y -компонента зависят только от соответствующей координаты, что можно рассматривать как достоинство данной версии модели с точки зрения ее реализации.

Параметр μ можно взять относительно малым по величине, чтобы за характерное время, в течение которого происходит движение частицы вследствие импульсного толчка, смещение под действием потенциального поля $U(x, y)$ было невелико. С другой стороны, интервал времени между толчками T примем достаточно большим, чтобы за это время частица успела подойти к минимуму потенциального поля. Эти условия не очень жесткие, и их достаточно обеспечить хотя бы в грубом приближении (благодаря структурной устойчивости аттрактора, который мы намерены получить).

5.2. Численное моделирование и наблюдение аттракторов типа соленоида Смейла–Вильямса

Задав начальное состояние в момент непосредственно перед n -м импульсом, $\mathbf{x}_n = \{x, \dot{x}, y, \dot{y}\}_{t=nT-0}$, можно определить состояние перед следующим $n+1$ -ым импульсом из решения уравнений (5.1) на периоде T

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \dot{x} &= \mu x(1 - x^2 - y^2), \\ \ddot{y} + \dot{y} &= \mu y(1 - x^2 - y^2),\end{aligned}\quad (5.9)$$

с начальными условиями, определяемыми состоянием сразу после толчка,

$$\begin{aligned}x|_{t=nT+0} &= x_n, \quad \dot{x}|_{t=nT+0} = \dot{x}_n + P_x(x_n, y_n), \\ y|_{t=nT+0} &= y_n, \quad \dot{y}|_{t=nT+0} = \dot{y}_n + P_y(x_n, y_n).\end{aligned}\quad (5.10)$$

Выпишем, кроме этого, уравнение в вариациях, линеаризованное около опорной траектории, что требуется для вычисления показателей Ляпунова. Подставляя в уравнение (5.9) $(x + \tilde{x}, y + \tilde{y})$, для малых возмущений \tilde{x}, \tilde{y} получаем уравнения

$$\begin{aligned}\ddot{\tilde{x}} + \dot{\tilde{x}} &= \mu \tilde{x} - \mu(y^2 \tilde{x} + 3x^2 \tilde{x} + 2xy\tilde{y}), \\ \ddot{\tilde{y}} + \dot{\tilde{y}} &= \mu \tilde{y} - \mu(x^2 \tilde{y} + 3y^2 \tilde{y} + 2xy\tilde{x}),\end{aligned}\quad (5.11)$$

которые следует дополнить вытекающими из (5.10) начальными условиями в момент сразу после толчка:

$$\begin{aligned}\tilde{x}|_{t=nT+0} &= \tilde{x}_n, \quad \dot{\tilde{x}}|_{t=nT+0} = \dot{\tilde{x}}_n + \tilde{x}_n \partial_x P_x(x_n, y_n) + \tilde{y}_n \partial_y P_x(x_n, y_n), \\ \tilde{y}|_{t=nT+0} &= \tilde{y}_n, \quad \dot{\tilde{y}}|_{t=nT+0} = \dot{\tilde{y}}_n + \tilde{x}_n \partial_x P_y(x_n, y_n) + \tilde{y}_n \partial_y P_y(x_n, y_n).\end{aligned}\quad (5.12)$$

Соотношения (5.9) и (5.10) приводят к *четырёхмерному отображению Пуанкаре* $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$. Это отображение обратимое, поскольку обратимой является трансформация состояния, производимая как действием толчков, так и при эволюции в непрерывном времени, описываемой дифференциальными уравнениями. Хотя отображение не получается в аналитическом виде, его действие легко можно воспроизвести, решая численно дифференциальные уравнения (5.9) посредством компьютерной программы.

Что существенно для возникновения аттрактора Смейла–Вильямса, так это топологическое свойство ансамбля частиц после преобразования, а именно появление конфигурации в виде петли, охватывающей начало

координат два или три раза. Сжатие в поперечном направлении в фазовом пространстве осуществляется за счет трения, пока под действием потенциального поля частица дрейфует в направлении потенциального минимума на единичной окружности. В отличие от классического построения в главе 2, в этих моделях аттракторы типа Смейла–Вильямса вложены в четырёхмерное фазовое пространство отображений Пуанкаре, а не в трехмерное.

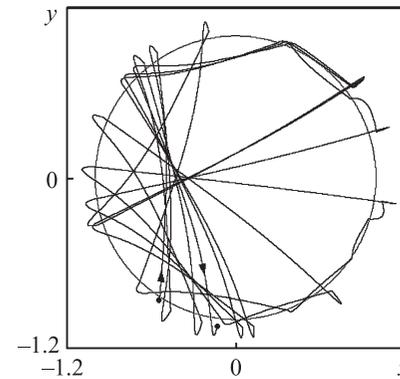


Рис. 5.1. Траектория частицы на плоскости (x, y) в модели, заданной соотношениями (5.1), (5.7), при $\mu = 0.44$, $T = 5$ за 30 периодов воздействия. Стрелки показывают направление движения

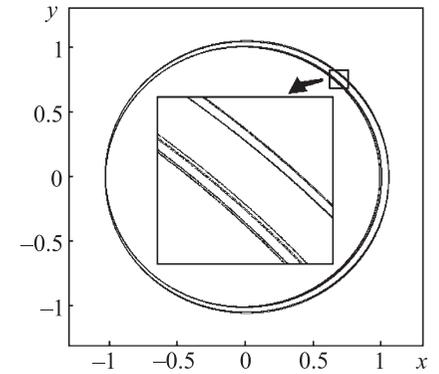


Рис. 5.2. Портрет аттрактора системы, заданной соотношениями (5.1), (5.7), в проекции на плоскость (x, y) в стробоскопическом сечении при $\mu = 0.44$, $T = 5$. Отдельно показан с увеличением фрагмент, позволяющий различить поперечную канторову структуру объекта

На рис. 5.1–5.4 представлены иллюстрации, полученные путем численного решения уравнений движения частицы под действием импульсной силы для случая $M = 2$ при зависимости силового поля от пространственных координат, заданной соотношением (5.7). На рис. 5.1 показана траектория частицы в процессе ее движения на плоскости (x, y) , отвечающего пребыванию системы на аттракторе. Портрет аттрактора в стробоскопическом сечении приводится на рис. 5.2 в проекции на плоскость (x, y) . Он с очевидностью выглядит похожим на соленоид Смейла–Вильямса. На вставке приведен увеличенный фрагмент картинка, на котором различима канторова поперечная структура. На рис. 5.3 показана итерационная диаграмма для угловой координаты $\phi_n = \arg(x(nT-0) + iy(nT-0))$, определенной непосредственно перед каждым очередным толчком. Можно видеть, что угловая координата ведет себя в соответствии с растягивающим

отображением окружности, или отображением Бернулли. Один обход окружности для прообраза отвечает двум обходам для образа.

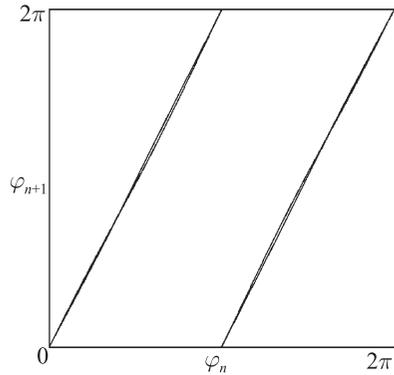


Рис. 5.3. Итерационная диаграмма для угловой координаты, полученной в результате численного решения уравнений (5.1), при распределении силового поля (5.7) для $\mu = 0.44$, $T = 5$

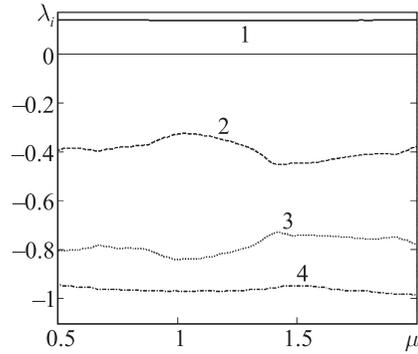


Рис. 5.4. График показателей Ляпунова модели (5.1), (5.7) в зависимости от параметра μ при $T = 5$

На рис. 5.4 показаны графики показателей Ляпунова в зависимости от параметра μ при фиксированном периоде T . Показатели Ляпунова вычислялись путем совместного численного решения уравнения (5.9) для опорной орбиты с учетом соотношений (5.10), отвечающих толчкам, и четырех комплектов уравнений в вариациях (5.11) с учетом соотношений (5.12) для толчков. После каждого толчка проводились ортогонализация векторов по Граму–Шмидту и их перенормировка. Заметим, что старший показатель Ляпунова остается приблизительно постоянным и для стробоскопического отображения он очень близок к величине $\Lambda_1 \approx \ln 2$, которая соответствует отображению Бернулли, приближенно описывающему динамику угловой переменной. Остальные показатели Ляпунова отрицательные. Оценка фрактальной размерности аттрактора в сечении Пуанкаре при $\mu = 0.44$ дает $D = 1.328$.

На рис. 5.5–5.8 иллюстрации, аналогичные описанным выше, представлены для случая $M = 3$, когда силовое поле задано соотношениями (5.8). На рис. 5.5 показана траектория частицы на плоскости (x, y) . На рис. 5.6 приведен портрет аттрактора в стробоскопическом сечении. Это разновидность соленоида Смейла–Вильямса с утроением числа витков на каждом

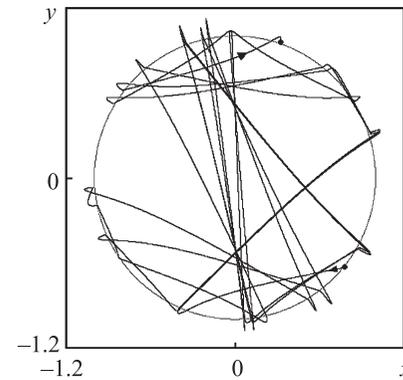


Рис. 5.5. Траектория частицы на плоскости (x, y) в модели, заданной соотношениями (5.1), (5.8), при $\mu = 0.22$, $T = 8$ за 30 периодов воздействия. Стрелки показывают направление движения

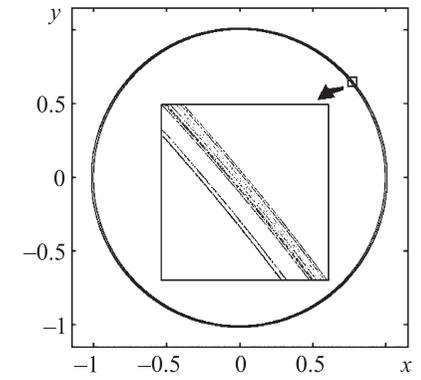


Рис. 5.6. Портрет аттрактора системы, заданной соотношениями (5.1), (5.8), в проекции на плоскость (x, y) в стробоскопическом сечении при $\mu = 0.22$, $T = 8$. Отдельно показан с увеличением фрагмент, позволяющий различить поперечную канторову структуру объекта

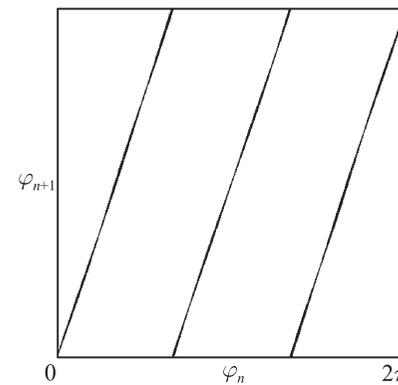


Рис. 5.7. Итерационная диаграмма для угловой координаты, полученной в результате численного решения уравнений (5.1), при распределении силового поля (5.8) для $\mu = 0.22$, $T = 8$

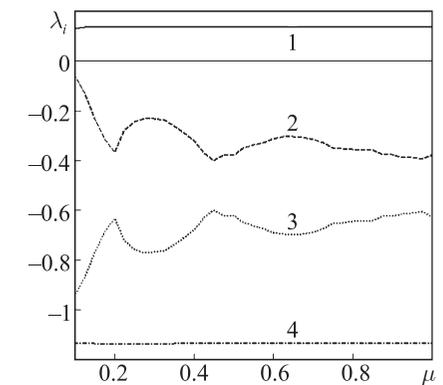


Рис. 5.8. График показателей Ляпунова модели (5.1), (5.8) в зависимости от параметра μ при $T = 8$

очередном шаге построения. У него имеет место характерная канторова поперечная структура, которая различима на вставке. На рис. 5.7 показана итерационная диаграмма для угловой координаты частицы, определенной непосредственно перед каждым толчком. Она хорошо согласуется с отображением трехкратного однородного растяжения окружности. На рис. 5.8 приведен график показателей Ляпунова от параметра μ при фиксированном периоде T . Наибольший показатель Ляпунова остается приблизительно постоянным в широком диапазоне изменения параметра. Для стробоскопического отображения он очень близок к оценке $\Lambda_1 \approx \ln 3$. Другие показатели Ляпунова отрицательные. Оценка фрактальной размерности аттрактора в сечении Пуанкаре при $\mu = 0.22$ дает $D = 1.47$.

Достоинством описанных в этой главе механических моделей является их простота, почти тривиальность. Однако размерность фазового пространства для них на единицу больше минимальной размерности, требуемой для отображений с аттрактором типа Смейла–Вильямса.

Глава 6

Дифференциальные уравнения с периодическими переключениями

Возможный подход к построению неавтономных систем с однородно гиперболическими аттракторами состоит в том, чтобы организовать эволюцию во времени как периодически повторяющуюся последовательность определенных стадий, на каждой из которых правые части дифференциальных уравнений, описывающих систему, заданы по-своему. Иными словами, правые части представлены кусочно-непрерывными и периодическими во времени функциями. Их можно назвать *дифференциальными уравнениями с периодическими переключениями*. Фактически именно подход, основанный на уравнениях с периодическими переключениями, был применен Хантом [Hunt, 2000] для построения надстройки аттрактора типа Плыкина, как упоминалось в главе 4 (см. также приложение E). Здесь мы рассмотрим другие, намного более простые модели с аттракторами типа Смейла–Вильямса и Плыкина, описываемые уравнениями с кусочно-непрерывными во времени правыми частями.

6.1. Система с переключениями, имеющая аттрактор типа Смейла–Вильямса

Построим неавтономную систему, мгновенное состояние которой описывается трехмерным вектором (x, y, z) , а расширенное фазовое пространство четырехмерное. Рассмотрим четыре периодически повторяющихся стадии непрерывных преобразований, каждая из которых занимает единичный интервал времени и которые описываются следующими дифференциальными уравнениями.

I. Дифференциальное вращение вокруг оси x :

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = -\frac{\pi}{2}xz, \quad \dot{z} = \frac{\pi}{2}xy. \quad (6.1)$$

II. Неравномерный сдвиг со сжатием вдоль оси y :

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = -d_1(y - 2x^2 + 1), \quad \dot{z} = 0. \quad (6.2)$$

III. Поворот на угол $\pi/2$ вокруг оси y :

$$\dot{x} = -\frac{\pi}{2}z, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = \frac{\pi}{2}x. \quad (6.3)$$

IV. Сжатие в направлении единичной окружности, расположенной в плоскости $z = 0$:

$$\dot{x} = \mu x(1 - x^2 - y^2), \quad \dot{y} = \mu y(1 - x^2 - y^2), \quad \dot{z} = -d_2 z. \quad (6.4)$$

Динамические уравнения можно представить в виде единой записи:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\pi}{2}zf_3(t) + \mu x(1 - x^2 - y^2)f_4(t), \\ \dot{y} &= -\frac{\pi}{2}xf_1(t) - d_1(y - 2x^2 + 1)f_2(t) + \mu y(1 - x^2 - y^2)f_4(t), \\ \dot{z} &= \frac{\pi}{2}xyf_1(t) + \frac{\pi}{2}xf_3(t) - d_2zf_4(t), \end{aligned} \quad (6.5)$$

где $f_k(t) = 1$, если $k-1 \leq t - 4[t/4] < k$, и 0 — в иных случаях. Рассматривая по отдельности последовательно все четыре стадии, на которых решение уравнений (6.1)–(6.4) находится в аналитическом виде, получаем отображение

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{b}(\mathbf{x}_n), \quad (6.6)$$

где

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{e^{\mu} z}{\sqrt{1 + (e^{2\mu} - 1) \left\{ z^2 + \left[e^{-d_1} (y \cos \frac{\pi}{2} x - z \sin \frac{\pi}{2} x) + (2x^2 - 1)(1 - e^{-d_1}) \right]^2 \right\}}} \\ \frac{e^{\mu - d_1} (y \cos \frac{\pi}{2} x - z \sin \frac{\pi}{2} x) + e^{\mu} (2x^2 - 1)(1 - e^{-d_1})}{\sqrt{1 + (e^{2\mu} - 1) \left\{ z^2 + \left[e^{-d_1} (y \cos \frac{\pi}{2} x - z \sin \frac{\pi}{2} x) + (2x^2 - 1)(1 - e^{-d_1}) \right]^2 \right\}}} \\ e^{-d_2} x \end{pmatrix}.$$

Обратное отображение также можно явно записать:

$$\mathbf{b}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{ze^{d_2}}{ye^{d-\mu} \cos(\frac{\pi}{2}e^{d_2}z) - xe^{-\mu} \sin(\frac{\pi}{2}e^{d_2}z) + (2z^2e^{2d_2} - 1)(1 - e^d) \cos(\frac{\pi}{2}e^{d_2}z)} \\ \frac{-ye^{d-\mu} \sin(\frac{\pi}{2}e^{d_2}z) - xe^{-\mu} \cos(\frac{\pi}{2}e^{d_2}z) - (2z^2e^{2d_2} - 1)(1 - e^d) \sin(\frac{\pi}{2}e^{d_2}z)}{\sqrt{1 + (x^2 + y^2)(e^{-2\mu} - 1)}} \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

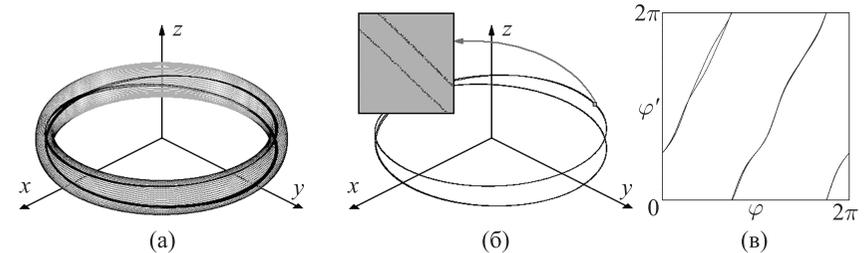


Рис. 6.1. Поглощающая область в фазовом пространстве и ее образ при действии отображения (6.6) (а); портрет аттрактора (б) и итерационная диаграмма для угловой координаты (в). Значения параметров: $d_1 = d_2 = 2$, $\mu = 2$

На рис. 6.1а показана эмпирически подобранная поглощающая область для случая $d_1 = d_2 = 2$, $\mu = 2$, которая задается неравенством $(p\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + qz^2 \leq 1$, $p = 12.5$, $q = 25$, а также ее образ при действии отображения Пуанкаре (6.6). Действие отображения качественно соответствует конструкции Смейла–Вильямса. На диаграмме (б) приведен портрет аттрактора, причем на вставке можно видеть поперечную канторову структуру составляющих его волокон. Хотя локальные направления растяжения не вполне совпадают с направлениями вдоль волокон, а локальное сжатие происходит не ортогонально волокнам, с углами, зависящими от положения в фазовом пространстве, степень соответствия с геометрической конструкцией Смейла–Вильямса оказывается достаточной для существования однородно гиперболического аттрактора. Рисунок (в) иллюстрирует итерационную диаграмму для угловой координаты, определенной для каждой очередной итерации отображения с номером n как $\phi_n = \arg(x_n + iy_n)$. Его вид соответствует растягивающему отображению окружности — слегка деформированному отображению Бернулли: изменение аргумента на величину 2π отвечает изменению функции на величину 4π .

Показатели Ляпунова получаются равными $\Lambda_1 = 0.661$, $\Lambda_2 = -2.601$, $\Lambda_3 = -2.650$, а размерность Каплана–Йорке для аттрактора $D_L \approx 1 + \Lambda_1 / |\Lambda_2| \approx 1.25$. Численные расчеты подтверждают выполнение критерия конусов во всей поглощающей области.

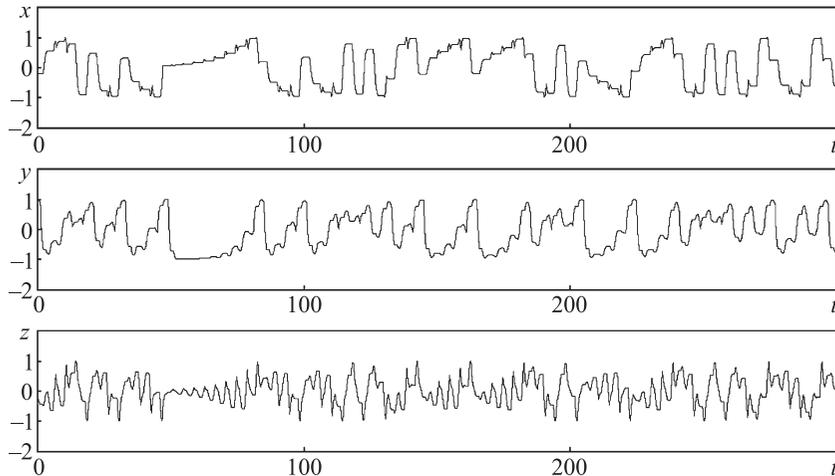


Рис. 6.2. Зависимости от времени для динамических переменных x , y , z , полученные в результате численного решения уравнений (6.5) при $d_1 = d_2 = 2$, $\mu = 2$

На рис. 6.2 и 6.3 иллюстрируются некоторые особенности динамики в непрерывном времени согласно дифференциальным уравнениям (6.5). На рис. 6.2 показаны зависимости динамических переменных от времени, демонстрирующие очевидно хаотическое поведение. На рис. 6.3 показан аттрактор в расширенном фазовом пространстве системы с непрерывным временем в трехмерной проекции. Изображение представлено тонами серого цвета: глубина тона показывает относительную продолжительность пребывания фазовых траекторий в соответствующих пикселях. В поперечном сечении объекта гиперплоскостью $t = \text{const}$ имеет место соленоид, показанный на рис. 6.1б.

6.2. Динамическая система с аттрактором типа Плыкина

Перейдем к построению в явном виде неавтономной потоковой системы с аттрактором типа Плыкина [Kuznetsov, 2009; Кузнецов, 2009]. Отправной

точкой служит отображение, составленное из последовательно повторяющихся четырех стадий, каждая из которых соответствует геометрически очевидным непрерывным преобразованиям на двумерной сфере.

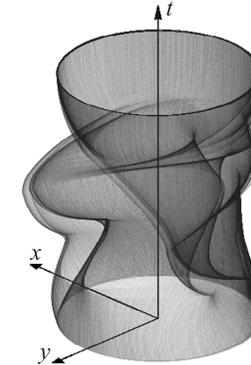


Рис. 6.3. Портрет аттрактора системы с непрерывным временем (6.5) в четырехмерном расширенном фазовом пространстве в трехмерной проекции. Тона серого цвета обозначают относительную продолжительность пребывания фазовых траекторий в соответствующих пикселях

6.2.1. Аттрактор типа Плыкина на сфере

Рассмотрим сферу единичного радиуса (рис. 6.4). Точку на сфере можно задать в угловых координатах (θ, ϕ) или в декартовых координатах

$$x = \cos \phi \sin \theta, \quad y = \sin \phi \sin \theta, \quad z = \cos \theta, \quad (6.8)$$

удовлетворяющих соотношению $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Как доказано Плыкиным, отображение сферы в себя может иметь гиперболический аттрактор при наличии не менее четырех дырок — односвязных областей, не посещаемых принадлежащими аттрактору траекториями. В нашей конструкции эту роль будут играть окрестности четырех точек A, B, C, D с координатами $(x, y, z) = (\pm 1/\sqrt{2}, 0, \pm 1/\sqrt{2})$. Северный и южный полюса сферы обозначены соответственно N и S.

Рассмотрим последовательность четырех выполняемых друг за другом непрерывных преобразований.

I. Сток по параллели — смещение изображающих точек вдоль параллелей от меридианов $NABS$ и $NCBS$ к равноудаленной от них меридио-

нальной окружности. В декартовых координатах это описывается уравнениями

$$\dot{x} = -\varepsilon xy^2, \quad \dot{y} = \varepsilon x^2 y, \quad \dot{z} = 0, \quad (6.9)$$

где ε — некоторый параметр.

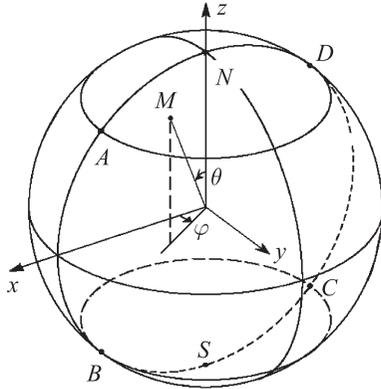


Рис. 6.4. Единичная сфера с отмеченными точками A, B, C, D , окрестности которых отвечают дырам, не посещаемым траекториями на аттракторе. Северный и южный полюсы обозначены соответственно N и S . Поясняется смысл угловых координат некоторой точки M , изображены также оси декартовой системы координат x, y, z

II. Дифференциальное вращение вокруг оси z с угловой скоростью, линейно зависящей от z , так что изображающие точки на параллели, проходящей через B и C , остаются неподвижными, а на параллели, проходящей через A и D , совершают поворот на 180° согласно уравнениям

$$\dot{x} = \pi(z/\sqrt{2} + 1/2)y, \quad \dot{y} = -\pi(z/\sqrt{2} + 1/2)x, \quad \dot{z} = 0. \quad (6.10)$$

III. Сток к экватору — смещение изображающих точек по окружностям с центрами на оси x на сфере от большого круга $ABCD$ к экватору:

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = \varepsilon y z^2, \quad \dot{z} = -\varepsilon y^2 z. \quad (6.11)$$

IV. Дифференциальное вращение вокруг оси x с угловой скоростью, линейно зависящей от x , так что в плоскости, ортогональной оси x и проходящей через точку C , изображающие точки неподвижны, а в сечении, содержащем точку B , претерпевают поворот на 180° :

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = -\pi(x/\sqrt{2} + 1/2)z, \quad \dot{z} = \pi(x/\sqrt{2} + 1/2)y. \quad (6.12)$$

Процедура симметрична в том смысле, что стадии I–II в точности аналогичны стадиям III–IV с обменом ролями между осями x и z .

Интуитивно представляется правдоподобным, что такая последовательность преобразований породит поток, формирующий вытянутые волокна с тонкой поперечной структурой, присутствие которых характерно для аттракторов типа Плыкина.

Динамические уравнения можно представить в виде единой записи:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\varepsilon xy^2 f_1(t) + \pi(z/\sqrt{2} + 1/2)y f_2(t), \\ \dot{y} &= \varepsilon x^2 y f_1(t) - \pi(z/\sqrt{2} + 1/2)x f_2(t) + \varepsilon y z^2 f_3(t) - \pi(x/\sqrt{2} + 1/2)z f_4(t), \\ \dot{z} &= -\varepsilon y^2 z f_3(t) - \pi(x/\sqrt{2} + 1/2)y f_4(t), \end{aligned} \quad (6.13)$$

где $f_k(t) = 1$, если $k-1 \leq t - 4[t/4] < k$, и 0 — в иных случаях.

Отображение Пуанкаре, которое определяет преобразование вектора состояния $\mathbf{x}_n = (x_n, y_n, z_n)$ за период $T = 4$, можно найти в явном виде. Проводя последовательно решение дифференциальных уравнений (6.9)–(6.12) и учитывая упомянутую симметрию задачи, можно выразить результирующий вектор состояния \mathbf{x}_{n+1} как

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}_\pm(\mathbf{f}_\mp(\mathbf{x}_n)) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \quad (6.14)$$

где

$$\mathbf{f}_\pm(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \pm z \\ \frac{ye^{\frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)} \cos \frac{\pi}{2}(z\sqrt{2}+1) \pm xe^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)} \sin \frac{\pi}{2}(z\sqrt{2}+1)}{\sqrt{\operatorname{ch} \varepsilon(x^2+y^2) + \varepsilon(y^2-x^2)} \frac{\operatorname{sh} \varepsilon(x^2+y^2)}{\varepsilon(x^2+y^2)}} \\ \frac{ye^{\frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)} \sin \frac{\pi}{2}(z\sqrt{2}+1) \mp xe^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)} \cos \frac{\pi}{2}(z\sqrt{2}+1)}{\sqrt{\operatorname{ch} \varepsilon(x^2+y^2) + \varepsilon(y^2-x^2)} \frac{\operatorname{sh} \varepsilon(x^2+y^2)}{\varepsilon(x^2+y^2)}} \end{pmatrix}.$$

Соотношение (6.14) определяет отображение единичной сферы в себя \mathbf{f} , причем для этого отображения C служит неподвижной точкой, а точки A, B и D составляют неустойчивую орбиту периода 3: $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A$. Отображение \mathbf{f} обратимое. Обратное отображение получается в результате тех же преобразований, выполняемых в обратном порядке и с инвертированными направлениями поворотов.

На рис. 6.5 показан аттрактор отображения \mathbf{f} при $\varepsilon = 0.77$. Следует отметить характерную фрактальную структуру аттрактора: объект как бы составлен из полосок, каждая из которых содержит полоски следующего уровня, и так далее.

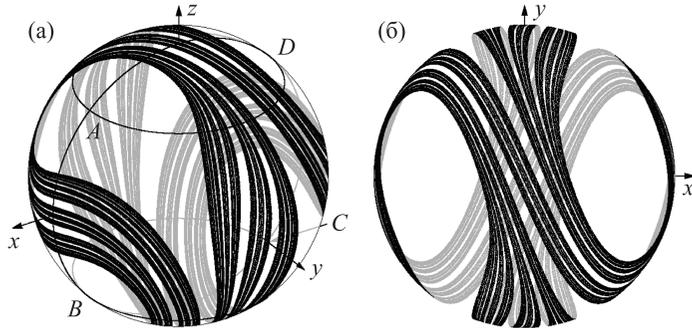


Рис. 6.5. Аттрактор отображения (6.14) при $\varepsilon = 0.77$ на единичной сфере, представленной в аксонометрической проекции (а) и в полярной азимутальной проекции (б)

На рис. 6.6 показана зависимость двух показателей Ляпунова отображения от параметра ε . Процедура вычислений основана на алгоритме Бенетина (см. главу 1) и состоит в совместных итерациях отображения (6.14) и двух комплектов соответствующих уравнений в вариациях

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{f}'_+(\mathbf{f}_-(\mathbf{x}_n))\mathbf{f}'_-(\mathbf{x}_n)\tilde{\mathbf{x}}_n, \quad (6.15)$$

с ортогонализацией векторов возмущения к радиус-вектору (x, y, z) и друг к другу и их нормировкой на фиксированную константу.

В области $\varepsilon < \varepsilon_c \approx 2.03$ один из двух показателей Ляпунова положительный, что говорит о наличии хаоса, а второй отрицательный. При $\varepsilon > \varepsilon_c$ (сильная диссипация на стадиях I и III) хаос исчезает. Отметим плавную зависимость положительного показателя Ляпунова от параметра, на графике которой нет провалов, характерных для многих систем с негиперболическими аттракторами (приложение А). На рисунке показан также график для размерности аттрактора, рассчитанной по формуле Каплана–Йорке, которая в данном случае имеет вид $D_{KY} = 1 + \Lambda_1 / |\Lambda_2|$. Видно, что в области хаоса с ростом параметра ε размерность плавно убывает от 2, что соответствует исчезающе малой диссипации, примерно до 1. В частно-

сти, при $\varepsilon = 0.77$ показатели Ляпунова равны $\Lambda_1 = 0.959$ и $\Lambda_2 = -1.141$, так что размерность Каплана–Йорке $D_{KY} \approx 1.84$.

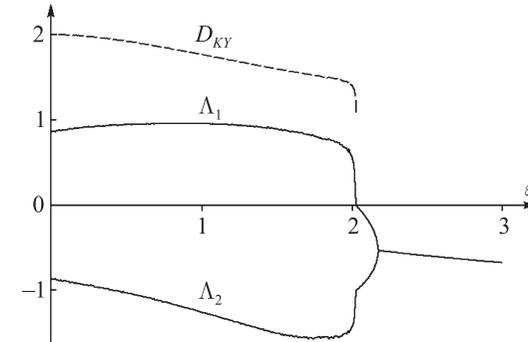


Рис. 6.6. Зависимость от параметра ε показателей Ляпунова (сплошные линии) и размерности аттрактора, вычисленной по формуле Каплана–Йорке (пунктир), для отображения сферы (6.14). Область гиперболического хаоса, согласно результатам проверки критерия конусов, приблизительно $0.35 < \varepsilon < 2$. В области $\varepsilon > \varepsilon_c \approx 2.023$ хаоса нет и динамика становится периодической

Численная проверка критерия конусов подтверждает гиперболическую природу аттрактора в интервале значений параметра $0.35 < \varepsilon < 2$ [Kuznetsov, 2009; Кузнецов, 2009]. Рис. 6.7 иллюстрирует, как эволюционирует структура аттрактора при изменении параметра в этом диапазоне: полосы, образующие поперечную канторову структуру, выглядят толстыми при малых значениях параметра ε и становятся все уже по мере его увеличения.

6.2.2. Аттрактор типа Плыкина на плоскости

Описание динамики можно переформулировать так, чтобы мгновенные состояния системы представлялись точками на плоскости. Подходящей для этого является следующая замена переменных:

$$W = X + iY = \frac{x - z + iy\sqrt{2}}{x + z + \sqrt{2}}. \quad (6.16)$$

Это соответствует стереографической проекции со сферы на плоскость при взятии за центр проецирования точки $C(-1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$. Эта точка

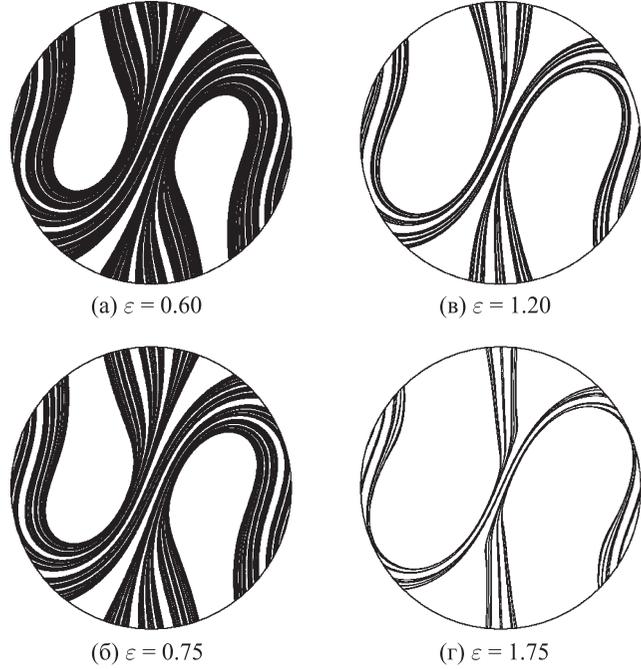


Рис. 6.7. Портреты аттракторов отображения (6.14), представленные в полярной азимутальной проекции северного полушария для разных величин параметра ε в области гиперболичности (карты для южного полушария выглядят аналогично; они получаются зеркальным отражением картинки относительно вертикальной оси)

не принадлежит аттрактору (находится в «дырке»), поэтому аттрактор на плоскости оказывается расположенным в ограниченной области. Обратная замена переменных выражается соотношениями

$$x = \frac{1 - |W|^2 + 2\operatorname{Re}W}{\sqrt{2}(1 + |W|^2)}, \quad y = \frac{2\operatorname{Im}W}{1 + |W|^2}, \quad z = \frac{1 - |W|^2 - 2\operatorname{Re}W}{\sqrt{2}(1 + |W|^2)}. \quad (6.17)$$

Теперь уравнения динамики (6.9)–(6.12) можно переписать в новых переменных, достоинство которых состоит в том, что третья, избыточная, переменная оказывается исключенной. Для этого вычисляем производные по времени от выражений (6.17), подставляем производные от старых переменных согласно (6.9)–(6.12) и выражаем результат через X и Y . Для четырех стадий динамики получаем следующее.

Стадия I:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \varepsilon Y^2 \frac{(1 + 2X - X^2 - Y^2)(X - 1)}{(1 + X^2 + Y^2)^2}, \\ \dot{Y} &= \varepsilon Y \frac{(1 + 2X - X^2 - Y^2)(1 + 2X - X^2 + Y^2)}{2(1 + X^2 + Y^2)^2}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Стадия II:

$$\dot{X} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{Y(1 - X)^2}{1 + X^2 + Y^2}, \quad \dot{Y} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{(1 - X)(1 + 2X - X^2 + Y^2)}{1 + X^2 + Y^2}. \quad (6.19)$$

Стадия III:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \varepsilon Y^2 \frac{(1 - 2X - X^2 - Y^2)(X + 1)}{(1 + X^2 + Y^2)^2}, \\ \dot{Y} &= \varepsilon Y \frac{(1 - 2X - X^2 - Y^2)(1 - 2X - X^2 + Y^2)}{2(1 + X^2 + Y^2)^2}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Стадия IV:

$$\dot{X} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{Y(1 + X)^2}{1 + X^2 + Y^2}, \quad \dot{Y} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{(1 + X)(1 - 2X - X^2 + Y^2)}{1 + X^2 + Y^2}. \quad (6.21)$$

Динамические уравнения можно представить в виде единой записи:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \left[\varepsilon Y^2 \frac{1 + 2X - X^2 - Y^2}{1 + X^2 + Y^2} f_1(x) + \frac{\pi Y(X - 1)}{\sqrt{2}} f_2(x) \right] \frac{X - 1}{1 + X^2 + Y^2} + \\ &+ \left[\varepsilon Y^2 \frac{1 - 2X - X^2 - Y^2}{1 + X^2 + Y^2} f_3(x) - \frac{\pi Y(1 + X)}{\sqrt{2}} f_4(x) \right] \frac{X + 1}{1 + X^2 + Y^2}, \\ \dot{Y} &= \left[\varepsilon Y \frac{1 + 2X - X^2 - Y^2}{1 + X^2 + Y^2} f_1(x) - \frac{\pi(1 - X)}{\sqrt{2}} f_2(x) \right] \frac{1 + 2X - X^2 + Y^2}{2 + 2X^2 + 2Y^2} + \\ &+ \left[\varepsilon Y \frac{1 - 2X - X^2 - Y^2}{1 + X^2 + Y^2} f_3(x) - \frac{\pi(1 + X)}{\sqrt{2}} f_4(x) \right] \frac{1 - 2X - X^2 + Y^2}{2 + 2X^2 + 2Y^2}, \end{aligned} \quad (6.22)$$

где $f_k(t) = 1$, если $k - 1 \leq t - 4[t/4] < k$, и $f_k(t) = 0$ — в иных случаях.

На рис. 6.8 показан аттрактор в трехмерном расширенном фазовом пространстве (X, Y, t) . Чтобы сделать видимой присущую объекту структуру,

картина представлена в технике кодирования тонами серого цвета. Более темные тона отвечают относительно большей вероятности посещения соответствующих пикселей траекторией на аттракторе. Интервал времени, представленный по вертикальной оси, соответствует в точности периоду изменения коэффициентов в уравнениях. В сечении горизонтальной плоскостью можно видеть объект с поперечной фрактальной структурой.

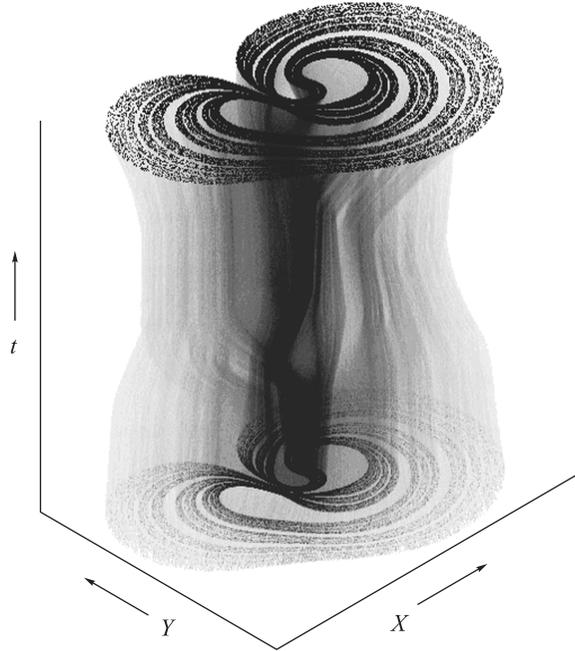


Рис. 6.8. Портрет аттрактора системы (6.22) при $\varepsilon = 0.77$ в расширенном трехмерном фазовом пространстве. Использована техника представления тонами серого цвета: более темные тона отвечают относительно большей вероятности посещения соответствующих пикселей траекторией на аттракторе

Отображение Пуанкаре можно вывести либо произведя аналитическое решение уравнений динамики (последовательно для четырех стадий), либо выполнив в (6.14) замену переменных согласно соотношениям (6.16) и (6.17). Полученное отображение представляется следующим образом:

$$\mathbf{W}_{n+1} = \mathbf{T}_+(\mathbf{T}_-(\mathbf{W}_n)) \equiv \mathbf{T}(\mathbf{W}_n), \quad (6.23)$$

$$\mathbf{T}_{\pm}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \frac{\pm(1-|W|^2-2X) - \frac{2\sqrt{2}Ye^{\rho/2} \sin \Phi \mp (1-|W|^2+2X)e^{-\rho/2} \cos \Phi}{\sqrt{\text{ch } \rho + \gamma \text{sh } \rho / \rho}}}{\pm(1-|W|^2-2X) + \frac{2\sqrt{2}Ye^{\rho/2} \sin \Phi \mp (1-|W|^2+2X)e^{-\rho/2} \cos \Phi}{\sqrt{\text{ch } \rho + \gamma \text{sh } \rho / \rho}} + 2 + 2|W|^2} \\ \sqrt{2} \frac{2\sqrt{2}Ye^{\rho/2} \cos \Phi \pm (1-|W|^2+2X)e^{-\rho/2} \sin \Phi}{\sqrt{\text{ch } \rho + \gamma \text{sh } \rho / \rho}} \\ \pm(1-|W|^2-2X) + \frac{2\sqrt{2}Ye^{\rho/2} \sin \Phi \mp (1-|W|^2+2X)e^{-\rho/2} \cos \Phi}{\sqrt{\text{ch } \rho + \gamma \text{sh } \rho / \rho}} + 2 + 2|W|^2 \end{pmatrix},$$

где

$$|W|^2 = X^2 + Y^2, \quad \rho = \varepsilon \frac{8Y^2 + (1-|W|^2-2X)^2}{2(1+|W|^2)^2},$$

$$\gamma = \varepsilon \frac{8Y^2 - (1-|W|^2-2X)^2}{2(1+|W|^2)^2}, \quad \Phi = \pi \frac{1-X}{1+|W|^2}.$$

Портрет аттрактора на плоскости, полученный итерациями отображения (6.22) при $\varepsilon = 0.77$, показан на рис. 6.9а. Это тот же самый объект, который можно видеть в сечении на рис. 6.8.

Чтобы убедиться, что это аттрактор типа Плыкина, и подтвердить, что он однородно гиперболический, были построены на графике устойчивое и неустойчивое слоения в области D , содержащей аттрактор (рис. 6.9б).¹ Устойчивые и неустойчивые многообразия располагаются вдоль черных и серых кривых соответственно. Как можно видеть из рисунка, неустойчивые многообразия расположены вдоль волокон аттрактора, тогда как устойчивые многообразия расположены поперек них. Взаимное расположе-

¹ Метод построения состоит в следующем. Сначала для некоторой точки \mathbf{x} находим образ при итерациях отображения Пуанкаре $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^N(\mathbf{x})$ и прообраз путем итераций обратного отображения $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^{-N}(\mathbf{x})$, где N – эмпирически выбранное целое число. Затем, используя случайные начальные условия $\tilde{\mathbf{y}}$ в малой окрестности $\tilde{\mathbf{x}}$, проводим итерации отображения Пуанкаре и получаем множество точек $\mathbf{y} = \mathbf{f}^N(\tilde{\mathbf{y}})$, которые прорисовывают неустойчивое многообразие. Точно так же, стартуя от начальных условий $\bar{\mathbf{y}}$ в малой окрестности $\bar{\mathbf{x}}$ и проводя итерации обратного отображения, прорисовываем устойчивое многообразие точками $\mathbf{y} = \mathbf{f}^{-N}(\bar{\mathbf{y}})$. Точность, с которой получается график, быстро увеличивается с ростом N . Фактически $N = 6$ уже вполне достаточно для того, чтобы иметь столь малую погрешность, что на графике она визуально неразличима.

ние устойчивых и неустойчивых многообразий в области D определенно исключает касания.

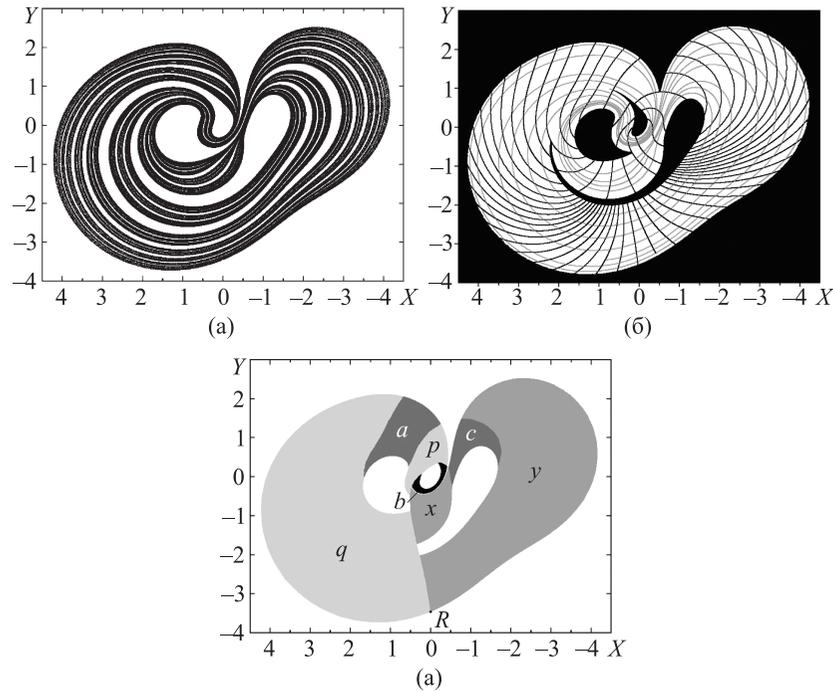


Рис. 6.9. (а) Портрет аттрактора отображения (6.23) при $\varepsilon = 0.77$. (б) Устойчивое и неустойчивое слоения, построенные вычислениями на компьютере в поглощающей области D , которая показана белым. Устойчивые и неустойчивые многообразия располагаются вдоль черных и серых кривых соответственно. (в) Марковское разбиение: границы между подобластями проходят по устойчивому многообразию неподвижной точки R , принадлежащей аттрактору. Это разбиение можно сравнить с тем, которое показано на рис. 3.5б, что свидетельствует о принадлежности обоих объектов к одному и тому же классу аттракторов типа Плыкина. Для более наглядного сравнения, направление горизонтальной координатной оси инвертировано, и использованы идентичные цвета и символы для обозначения подобластей здесь и на рис. 3.5б

Далее, можно построить марковское разбиение области D (рис. 6.9в). Пограничная кривая, разделяющая элементы разбиения, представляет собой устойчивое многообразие неподвижной точки типа седла R , которая

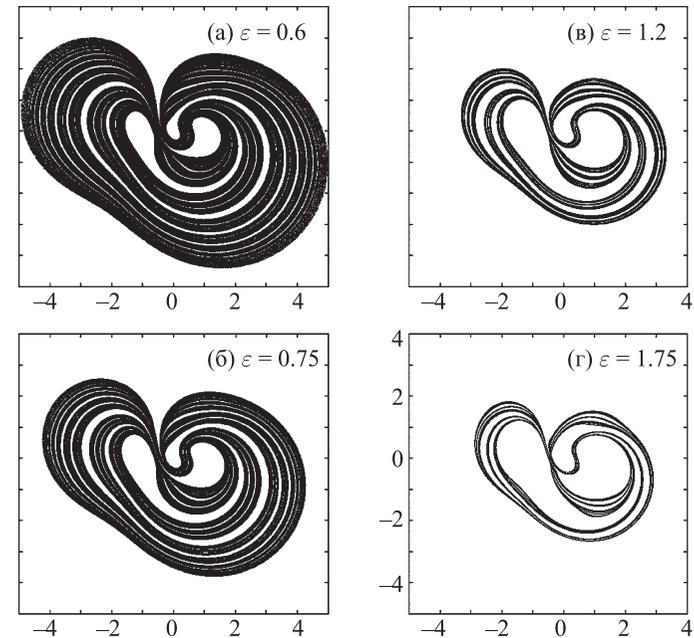


Рис. 6.10. Вид аттрактора отображения (6.23) на плоскости для разных значений параметра ε в области гиперболичности

принадлежит аттрактору (при $\varepsilon = 0.77$ она имеет координаты $X = 0$, $Y = -3.45524253$). Сравнение взаимного расположения подобластей с тем, которое было приведено на рис. 3.5б для аттрактора типа Плыкина, с очевидностью показывает, что данный аттрактор относится к тому же самому классу. Соответственно, аттрактор отображения (6.14) должен интерпретироваться как аттрактор типа Плыкина на сфере.

Оба представления, на сфере и на плоскости, связаны гладкой заменой переменных. Поэтому показатели Ляпунова для аттрактора на плоскости, приведенного на рис. 6.9, в точности те же, что и для аттрактора на сфере, показанного на рис. 6.5. Аттрактор является однородно гиперболическим, по крайней мере в интервале по параметру $0.35 < \varepsilon < 2$, как это следует из компьютерной проверки критерия конусов. Рис. 6.10 иллюстрирует трансформацию структуры портретов аттрактора на плоскости при изменении параметра в этом интервале.

Можно было бы возразить, что с точки зрения классической гиперболической теории потоков приведенный пример не выглядит вполне удовлетворительным, поскольку скорость изменения вектора состояния во времени определяется функциями, претерпевающими разрыв в момент переключения от одной стадии к другой. Тем не менее эволюция на временном интервале, равном периоду повторения стадий, задается *диффеоморфизмом*, представляющим собой композицию диффеоморфизмов, относящихся к каждой стадии. Поэтому как пример оператора эволюции в дискретном времени с гиперболическим аттрактором он адекватен. С другой стороны, оказывается возможным слегка «подправить» оператор эволюции так, чтобы исключить разрывы в определении потока. Если изменение системы в каком-то смысле невелико, можно ожидать, что изменение стробоскопического отображения тоже мало и, в силу структурной устойчивости, у отображения однородно гиперболический аттрактор сохранится. Соответствующая модификация рассмотренной здесь системы указана в работе [Кузнецов, 2009].

Глава 7

Неавтономные системы на основе связанных автоколебательных элементов

В этой главе будут рассматриваться модели, построенные на основе связанных элементов, каждый из которых в отдельности представляет собой автоколебательную систему, т. е. систему, имеющую в фазовом пространстве предельный цикл. Изложение начинается с обсуждения отдельного осциллятора ван дер Поля, в частности внимание уделено его описанию в рамках метода медленно меняющихся комплексных амплитуд. Такой осциллятор можно использовать как строительный блок для конструирования моделей с гиперболическими аттракторами. В частности, будет рассмотрена предложенная автором несколько лет назад допускающая физическую реализацию система, у которой отображение Пуанкаре обладает аттрактором типа Смейла–Вильямса [Kuznetsov, 2005]. Система составлена из двух осцилляторов ван дер Поля, которые становятся активными по очереди благодаря внешней периодической модуляции параметра, ответственного за возникновение предельного цикла, и при этом передают возбуждение друг другу таким образом, что за полный цикл фаза колебаний претерпевала преобразование, соответствующее растягивающему отображению окружности. В последнем разделе будет показано, как можно реализовать динамику, ассоциирующуюся с аттрактором типа Плькина, на основе системы двух связанных автоколебательных элементов, описываемых в терминах комплексных амплитуд.

7.1. Осциллятор ван дер Поля

Начнем с обсуждения осциллятора ван дер Поля, используемого в качестве строительного блока для систем, рассматриваемых в основной части настоящей главы. Это модель хорошо известная, популярная и имеющая большое значение в нелинейной науке как простейший пример автоколебательной системы, т. е. системы, способной демонстрировать самоподдерживающиеся колебания, у которых величина периода и форма сигнала определяются самой системой, а не внешним воздействием. Первоначально эта модель была разработана голландским физиком и радиоинженером Б. ван дер Полем в приложении к электронному генератору незатухающих колебаний радиочастотного диапазона. В дальнейшем она приобрела статус универсальной модели теории колебаний и широко привлекается для описания систем различной физической природы [Андронов и др., 1959; Davis, 1962; Хаяси, 1968; Рабинович и Трубецков, 1984; Кузнецов и др., 2002; Ланда, 2010; Strogatz, 2001; Пиковский и др., 2003].

Осциллятор ван дер Поля — это система, описываемая дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x} - (A - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (7.1)$$

Здесь ω_0 — характеристическая частота осциллятора, A — управляющий параметр, от которого зависит тип динамического поведения системы. Мгновенное состояние задается двумя динамическими переменными, обобщенной координатой x (ее конкретный физический смысл зависит от рассматриваемой задачи; скажем, в электронике это может быть некоторое зависящее от времени напряжение) и обобщенной скоростью \dot{x} . Таким образом, состояния представляются точками на фазовой плоскости (x, \dot{x}) .

При $A < 0$ система имеет единственный аттрактор на фазовой плоскости — устойчивую неподвижную точку в начале координат (рис. 7.1а). При $A > 0$ точка в начале координат становится неустойчивой и поблизости появляется притягивающая замкнутая траектория — предельный цикл, соответствующий автоколебаниям в системе. При малых положительных значениях параметра A колебания близки по форме к синусоиде, имеют частоту, приблизительно равную ω_0 , и амплитуду, пропорциональную \sqrt{A} (рис. 7.1б). С ростом параметра A форма колебаний становится сильно отличной от простой синусоиды, но они остаются периодическими (рис. 7.1в); в этом случае говорят о *релаксационных колебаниях*. Заметим, что основная частота претерпевает уменьшение с ростом параметра A . Фе-

номен рождения предельного цикла при переходе параметра A через нулевое значение представляет собой частный случай *нормальной* (или *суперкритической*) *бифуркации Андронова–Хопфа* [Андронов и др., 1959; Кузнецов, 1998; Кузнецов и др., 2002].

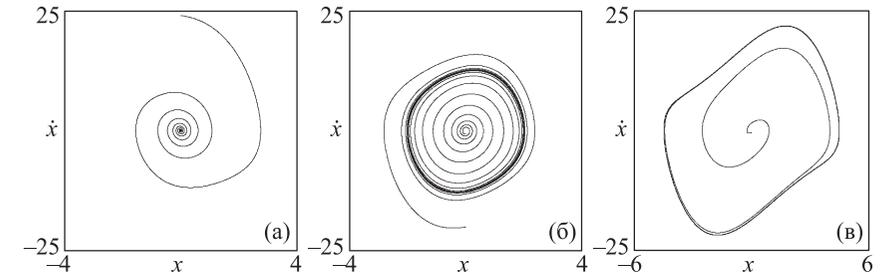


Рис. 7.1. Портреты траекторий на фазовой плоскости осциллятора ван дер Поля (7.1) при $\omega_0 = 2\pi$, $A = -1$ (а), $A = 1$ (б) и $A = 5$ (в). Траектории, отвечающие переходному процессу, показаны серым цветом, а аттрактор (устойчивая неподвижная точка на первой и предельные циклы на второй и третьей картинках) представлен черным

Полезный и проясняющий дело подход к аналитическому описанию модели основывается на *методе медленно меняющихся комплексных амплитуд*. Ранняя версия этого метода разработана самим ван дер Полем, а в дальнейшем важный вклад был сделан Андроновым, Боголюбовым и Митропольским и другими авторами [Андронов и др., 1959; Найфэ, 1986; Grebenikov, 2004]. Рассмотрим содержание этого метода в том варианте, который будет использоваться в дальнейшем изложении [Кузнецов и др., 2002].

Запишем выражение для совершающей колебания обобщенной координаты осциллятора в виде

$$x = a(t)e^{i\omega_0 t} + a^*(t)e^{-i\omega_0 t}, \quad (7.2)$$

где $a(t)$ — комплексная функция времени, а звездочка означает комплексное сопряжение, и положим

$$\dot{x} = i\omega_0 a e^{i\omega_0 t} - \omega_0 a^* e^{-i\omega_0 t}. \quad (7.3)$$

Соотношения (7.2) и (7.3) совместимы, если

$$\dot{a}e^{i\omega_0 t} + \dot{a}^*e^{-i\omega_0 t} = 0. \quad (7.4)$$

(Постулируя соотношение (7.2), мы вводим две неизвестные функции времени, действительную и мнимую части комплексной амплитуды, вместо од-

ной вещественной функции $x(t)$; следовательно, мы вправе наложить одно дополнительное функциональное соотношение между ними, в качестве которого выступает выражение (7.4).) Учитывая (7.2), (7.3) и (7.4), получаем

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = i\omega_0 \dot{a} e^{i\omega_0 t} - i\omega_0 \dot{a}^* e^{-i\omega_0 t} = 2i\omega_0 \dot{a} e^{i\omega_0 t}. \quad (7.5)$$

Следовательно, уравнение (7.1) переписывается через комплексные амплитуды таким образом:

$$\dot{a} = \frac{1}{2} [A - (a e^{i\omega_0 t} + a^* e^{-i\omega_0 t})^2] (a e^{i\omega_0 t} - a^* e^{-i\omega_0 t}) e^{-i\omega_0 t}. \quad (7.6)$$

До этого момента все алгебраические преобразования были точными, но теперь мы намерены обратиться к приближению, основанному на предположении, что комплексные амплитуды являются *медленно меняющимися функциями времени*. Чтобы учесть это обстоятельство, выполним в уравнении (7.6) усреднение по периоду быстрых осцилляций частоты ω_0 . Практически это можно сделать, просто опуская члены в правой части уравнения, содержащие временные зависимости в виде комплексной экспоненты типа $e^{\pm i\omega_0 t}$, $e^{\pm 2i\omega_0 t}$ и т. д. В результате получается так называемое *амплитудное уравнение*, или *укороченное уравнение ван дер Поля*,

$$\dot{a} = \frac{1}{2} (A - |a|^2) a. \quad (7.7)$$

Преимущество перед исходной моделью состоит в том, что последнее уравнение решается аналитически. А именно, если начальная комплексная амплитуда при $t = 0$ равна a_0 , то явное решение выражается в виде

$$a(t) = \frac{a_0 e^{At/2}}{\sqrt{1 + |a_0|^2 (e^{At} - 1)/A}}. \quad (7.8)$$

Заметим, что согласно этому соотношению в пределе $t \rightarrow \infty$ решение при отрицательных значениях параметра A затухает к нулю, а при положительных испытывает насыщение на уровне $|a| = \sqrt{A}$, что соответствует устойчивому предельному циклу.

Уравнение (7.7) можно рассматривать не только как аппроксимацию исходной системы (7.1), но также как самостоятельный объект для изучения и анализа. Зачастую подобные уравнения могут возникать в гораздо более широком контексте, чем само по себе уравнение ван дер Поля. Хороший пример — так называемое уравнение Ландау–Стюарта, используемое для описания начальных стадий усложнения динамики жидкости, предшествующих развитию турбулентности [Ландау и Лифшиц, 1953; Kuramoto, 1984; Strogatz, 2001].

7.2. Аттрактор Смейла–Вильямса в неавтономной системе попеременно возбуждаемых осцилляторов ван дер Поля

Чтобы мог возникнуть аттрактор Смейла–Вильямса, принципиальное значение имеет наличие некоторой угловой переменной, которая претерпевала бы при действии отображения Пуанкаре удвоение, утроение или умножение на какое-то большее целое число, в то время как по другим направлениям элемент фазового объема подвергался бы сжатию.

Предположим, что угловая переменная, о которой идет речь, — это фаза некоторого колебательного процесса. Можно ли построить неавтономную систему, в которой фаза за каждый очередной период изменения коэффициентов в дифференциальных уравнениях испытывала бы растягивающее преобразование в два или большее число раз? Это не столь тривиальная задача, поскольку преобразования сигналов, обычно рассматриваемые, скажем, в радиотехнике или акустике, сопровождаются лишь изменением формы колебаний и сдвигом фазы основной спектральной составляющей, так что реализация растягивающего отображения окружности представляется проблематичной. Тем не менее решение все же есть. Мы можем использовать два или больше колебательных элементов, которые передают возбуждение друг другу так, что требуемое преобразование фазы осуществляется за полный цикл передачи¹. Подчеркнем, что в этой ситуации каждый из участвующих осцилляторов не может быть охарактеризован фазой глобально, на протяжении всего процесса, в противном случае растягивающее отображение для фазы было бы невозможно.

Рассмотрим два связанных осциллятора ван дер Поля с частотами ω_0 и $2\omega_0$ соответственно, динамика которых описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{x} - [A \cos(2\pi t/T) - x^2] \dot{x} + \omega_0^2 x &= \varepsilon y \cos \omega_0 t, \\ \ddot{y} - [-A \cos(2\pi t/T) - y^2] \dot{y} + 4\omega_0^2 y &= \varepsilon x^2. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Обобщенные координаты x и y относятся к первой и второй подсистеме, которые становятся активными по очереди, благодаря обусловленной

¹ На основе той же самой идеи были предложены физически осуществимые системы, реализующие некоторые феномены сложной динамики, обсуждавшиеся до этого только на уровне абстрактных конструкций. Это грубый странный нехаотический аттрактор Ханга и Отта [Hunt and Ott, 2001; Kim et al., 2003], рассмотренный в работе [Жалнин и Кузнецов, 2007], и феномены комплексной аналитической динамики, такие как множества Мандельброта и Жюлиа [Devaney, 2003], рассмотренные в работах [Исаева и др., 2007; Isaeva et al., 2008].

внешним воздействием модуляции параметра, отвечающего за бифуркацию рождения предельного цикла в одиночном осцилляторе. Амплитуда модуляции задана параметром A . Взаимодействие между подсистемами характеризуется коэффициентом связи ε . Первый осциллятор воздействует на второй через квадратичную нелинейность, посредством члена εx^2 , фигурирующего в правой части второго уравнения. Обратное воздействие второго осциллятора на первый вводится посредством произведения динамической переменной и вспомогательного сигнала частоты ω_0 (член в правой части первого уравнения). Предполагается, что период модуляции параметра содержит целое число периодов вспомогательного сигнала $T = 2\pi N / \omega_0$. Таким образом, коэффициенты в уравнении характеризуются общим временным периодом T , и мы вправе использовать описание с помощью стробоскопического отображения Пуанкаре, определенного за этот период.

Уравнения (7.9) можно переписать как систему четырех уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \omega_0 u, \\ \dot{u} &= [A \cos(2\pi t/T) - x^2]u - \omega_0 x + \varepsilon \omega_0^{-1} y \cos \omega_0 t, \\ \dot{y} &= 2\omega_0 v, \\ \dot{v} &= [-A \cos(2\pi t/T) - y^2]v - 2\omega_0 y + \frac{1}{2} \varepsilon \omega_0^{-1} x^2,\end{aligned}\quad (7.10)$$

где переменные u и v представляют собой нормированные обобщенные скорости двух осцилляторов. Чтобы ввести отображение Пуанкаре, предположим, что состояние в момент $t = t_n = nT$ задано вектором $\mathbf{x}_n = \{x(nT), u(nT), y(nT), v(nT)\}$. Решение уравнений (7.10) на интервале времени T с начальным вектором состояния \mathbf{x}_n дает новый вектор \mathbf{x}_{n+1} , так что мы определяем четырехмерное отображение $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_n)$. Геометрически, в пятимерном расширенном фазовом пространстве неавтономной системы $\{x, u, y, v, t\}$ это соответствует сечению потока траекторий семейством четырехмерных гиперплоскостей $t = t_n = nT$.

На качественном уровне функционирование системы протекает следующим образом. Пусть первый осциллятор имеет на стадии активности некоторую фазу φ : $x \sim \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Тогда квадрат динамической переменной x^2 содержит вторую гармонику, как это очевидно из тригонометрического тождества

$$x^2 \sim \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 t + 2\varphi), \quad (7.11)$$

и фаза этой составляющей равна 2φ . Когда полупериод модуляции подходит к концу, член x^2 обеспечивает возбуждение второго осциллятора. При этом колебания переменной y получают фазу 2φ . Еще через полупериод модуляции сигнал, производимый в результате смещения этих колебаний со вспомогательным сигналом, стимулирует возбуждение первого осциллятора, который теперь получает фазу 2φ . Таким образом, на последовательных периодах модуляции параметра фаза первого осциллятора подчиняется в некотором приближении соотношению

$$\varphi_{n+1} = 2\varphi_n + \text{const} \pmod{2\pi}. \quad (7.12)$$

Постоянная добавка учитывает сдвиги фазы по ходу передачи возбуждения от одного осциллятора к другому; этот член можно устранить смещением начала координат для фазовой переменной. Соотношение (7.12) представляет собой растягивающее отображение окружности, или отображение Бернулли.

Стоит подчеркнуть, что для каждого отдельного осциллятора системы (7.9) о фазе как функции времени на всем интервале T говорить не приходится. Действительно, на стадии, когда колебания одного из осцилляторов подавлены, его амплитуда мала и фаза не является хорошо определенной величиной.

Механизм действия, который мы описали, действительно имеет место в широком диапазоне параметров рассматриваемой системы. На рис. 7.2 показана типичная реализация временных зависимостей для переменных x и y , полученная при численном решении уравнений (7.9) для набора параметров $\omega_0 = 2\pi$, $T = 6$, $A = 5$, $\varepsilon = 0.5$. Процесс, состоящий в попеременном возбуждении и подавлении первого и второго осцилляторов, фактически отвечает хаотической динамике. Хаос проявляется в вариации фаз колебаний на последовательных стадиях активности. Более аккуратный анализ показывает, что эти вариации фаз подчиняются отображению типа Бернулли (в некотором разумном приближении). На рис. 7.3 показана полученная при вычислениях диаграмма для фаз, определенных на последовательных стадиях возбуждения первого осциллятора согласно формуле $\varphi_n = \arg(x(nT) - iu(nT))$ и представленных на графике за достаточно большое число основных периодов. С уверенностью можно заключить, что отображение для фазы выглядит в топологическом смысле эквивалентным отображению Бернулли (7.12). Некоторые деформации связаны с несовершенством приведенных выше качественных рассуждений и определения фазы; соответствие с отображением Бернулли улучшается с ростом отношения периодов N . Принципиальное значение имеет топологическая при-

рода преобразования фазы: один полный обход окружности для прообраза φ_n (т. е. изменение на величину 2π) соответствует двукратному обходу для образа φ_{n+1} .

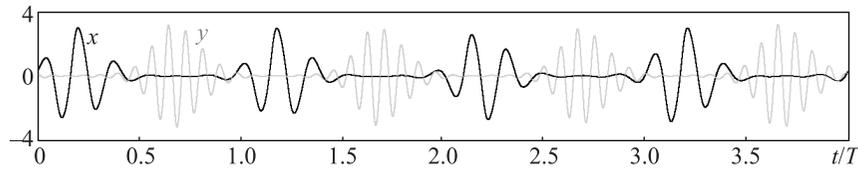


Рис. 7.2. Типичная зависимость обобщенных координат x и y от времени, полученная численным решением уравнений (7.9) при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 6$, $A = 5$, $\varepsilon = 0.5$

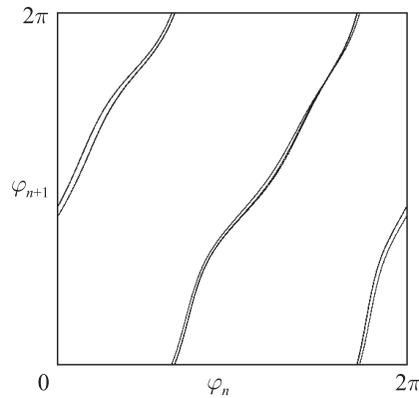


Рис. 7.3. Диаграмма, иллюстрирующая преобразование фазы первого осциллятора за период, полученная в результате численного решения уравнений (7.9) при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 6$, $A = 5$, $\varepsilon = 0.5$

Чтобы найти спектр показателей Ляпунова, проводим численное решение уравнений (7.10) конечно-разностным методом совместно с набором из четырех комплектов уравнений в вариациях

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \omega_0 \tilde{u}, \\ \dot{\tilde{u}} &= [A \cos(2\pi t/T) - x^2] \tilde{u} - 2x\tilde{u} - \omega_0 \tilde{x} + \varepsilon \omega_0^{-1} \tilde{y} \cos \omega_0 t, \\ \dot{\tilde{y}} &= 2\omega_0 \tilde{v}, \\ \dot{\tilde{v}} &= [-A \cos(2\pi t/T) - y^2] \tilde{v} - 2y\tilde{v} - 2\omega_0 \tilde{y} + \varepsilon \omega_0^{-1} x\tilde{x}, \end{aligned} \quad (7.13)$$

причем процедура дополняется нормализацией и ортогонализацией четырех векторов возмущения (как объясняется в главе 1) на каждом периоде T . Показатели Ляпунова получаются как средние скорости роста или убывания накапливающихся сумм логарифмов норм для векторов возмущения перед нормализацией. Согласно результатам вычислений, показатели Ляпунова для аттрактора отображения Пуанкаре при указанных параметрах составляют

$$\Lambda_1 = 0.6832, \quad \Lambda_2 = -2.602, \quad \Lambda_3 = -4.605, \quad \Lambda_4 = -6.538. \quad (7.14)$$

Наличие положительного показателя Λ_1 указывает на хаотическую природу динамики. Его величина близка к константе $\ln 2 = 0.693\dots$, что хорошо согласуется с приближенным описанием эволюции фазовой переменной отображением Бернулли (7.12). Оценка размерности Каплана–Йорке по спектру показателей Ляпунова дает для данного аттрактора $D \approx 1.263$.

Действие отображения Пуанкаре \mathbf{T} в четырехмерном пространстве сопровождается растяжением по направлениям, локально связанным с угловой переменной (фазой), в соответствии с (7.12), и сжатием по остальным трем направлениям. Эмпирически можно подобрать тороидальную поглощающую область D , которая представляет собой прямое произведение одномерной окружности и трехмерного шара. Однократная итерация отображения Пуанкаре применительно к точкам этой области порождает объект $\mathbf{T}(D)$ в виде замкнутой «трубки», растянутой в длину, сжатой по ширине и вложенной в виде двойной петли в исходную тороидальную область. Это в точности соответствует конструкции Смейла–Вильямса, но в четырехмерном фазовом пространстве

Чтобы записать аналитическое выражение для области D , удобно переопределить систему координат и ввести новые переменные $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} x_0 &= x/r_0, \quad x_1 = (u - c_{ux}x)/r_1, \\ x_2 &= y - c_{yx}x - c_{yu}u, \quad x_3 = v - c_{vx}x - c_{vu}u - c_{vy}y, \end{aligned} \quad (7.15)$$

где c_{ux} , c_{yx} , c_{yu} , c_{vx} , c_{vu} , c_{vy} , r_0 , r_1 — некоторые константы, которые конкретизируются для заданного режима функционирования системы из следующих соображений. Сначала, выполняя решение уравнений (7.9) на компьютере, накапливаем достаточно большое число точек $\{x, u, y, v\}$ на аттракторе в сечении Пуанкаре. Затем применяем метод наименьших квадратов для минимизации среднеквадратичных величин $\langle (u - c_{ux}x)^2 \rangle$,

$\langle (y - c_{yx}x - c_{yu}u)^2 \rangle$, $\langle (v - c_{vx}x - c_{vu}u - c_{vy}y)^2 \rangle$. Геометрически это соответствует выбору координатных осей, отвечающих направлениям главных осей эллипсоида, грубо аппроксимирующего аттрактор. Кроме того, нормируем первые две переменные x_0 и x_1 на факторы r_0 и r_1 так, чтобы иметь $\langle x_0^2 \rangle = \langle x_1^2 \rangle \approx 1/2$. В частности, для набора параметров $\omega_0 = 2\pi$, $T = 6$, $A = 5$, $\varepsilon = 0.5$ было получено

$$c_{ux} = 0.438, c_{yx} = -0.042, c_{yu} = 0.226, c_{vx} = -0.218,$$

$$c_{vu} = 0.029, c_{vy} = -0.118, r_0 = 0.812, r_1 = 0.721.$$

В новых координатах поглощающая область D определяется неравенством

$$\left[\left(\sqrt{x_0^2 + x_1^2} - r \right) / d_r \right]^2 + (x_2 / d)^2 + (x_3 / d)^2 \leq 1. \quad (7.16)$$

Здесь эмпирически подобранные константы $r = 0.94$, $d_r = 0.4$, $d = 0.15$.

На рис. 7.4 приводится трехмерная проекция четырехмерных объектов, дающая представление о том, как образ $\mathbf{T}(D)$ вложен внутри исходной тороидальной области D . Взаимное расположение областей D и $\mathbf{T}(D)$ аналогично тому, которое получается на первом шаге построения аттрактора Смейла–Вильямса. Область $\mathbf{T}(D)$ выглядит как узкая лента из-за сильного поперечного сжатия элементов фазового объема по ходу эволюции за один период модуляции параметра.

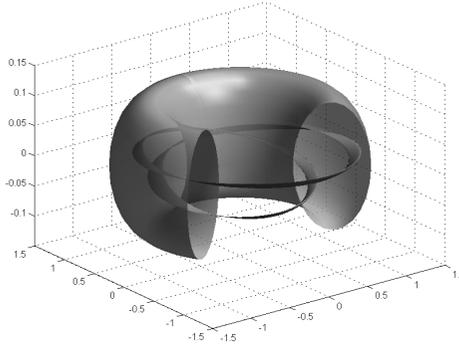


Рис. 7.4. Поглощающая область D и ее образ $\mathbf{T}(D)$ при действии отображения Пуанкаре, представленные в трехмерной проекции

Интересно задаться вопросом о том, как именно в потоковой системе осуществляется трансформация, приводящая за период воздействия к вложению образа в виде двойной петли внутрь исходной тороидальной поглощающей области. Представление об этом дает полученная в численных расчетах серия диаграмм на рис. 7.5. Каждая картинка показывает трехмерную

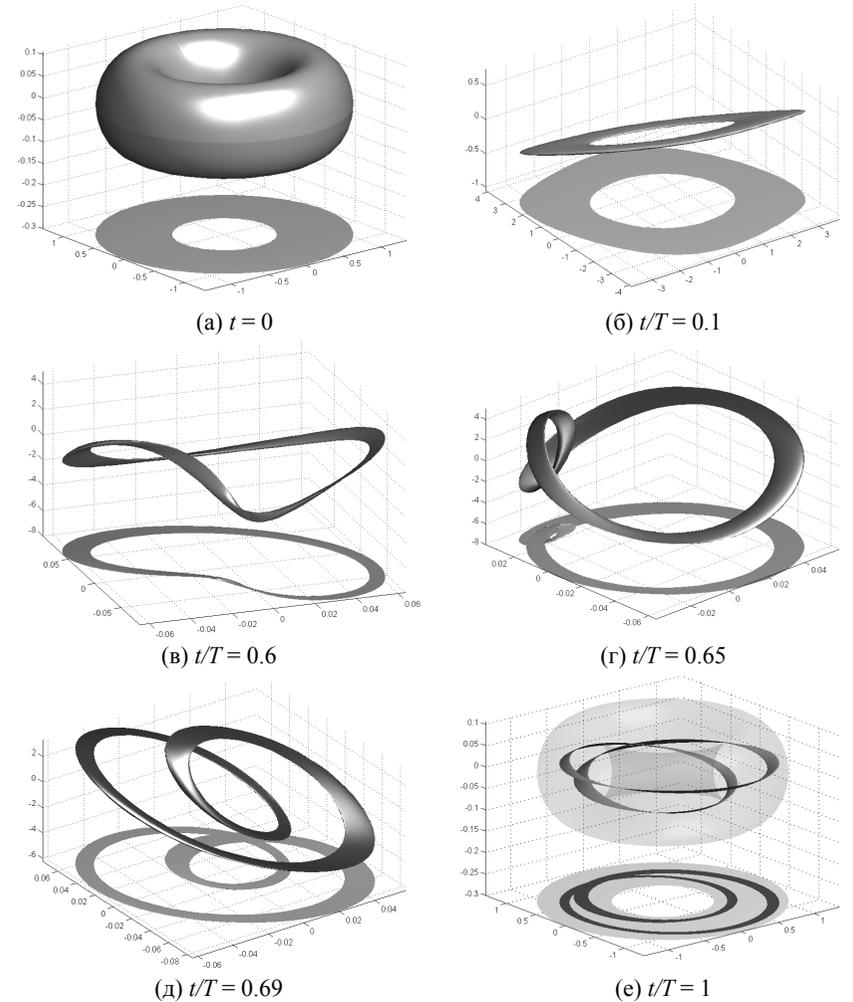


Рис. 7.5. Трансформация образа исходной поглощающей области в процессе эволюции за период воздействия T . Каждая картинка представляет собой трехмерную проекцию четырехмерного объекта в пространство переменных $\{x_0, x_1, x_2\}$ вдоль оси четвертой переменной x_3 . Обратите внимание на существенно различающийся масштаб по осям координат на диаграммах

проекцию четырехмерного объекта в пространство переменных $\{x_0, x_1, x_2\}$ вдоль оси четвертой переменной x_3 . Первая диаграмма (а) отвечает начальному моменту времени $t = 0$ и изображает исходную область в форме тороида. Далее этот тороид сжимается по поперечным направлениям (б), а затем испытывает относительное растяжение в продольном направлении и деформируется так, что образуется двойная петля (в, г). На последней стадии эта петля растягивается и в итоге оказывается вложенной в исходную область (д, е). Это, в сущности, воспроизводит ту последовательность непрерывных деформаций пластичного бублика в трехмерном пространстве, посредством которой дается популярное описание одного шага в процедуре построения аттрактора Смейла–Вильямса.

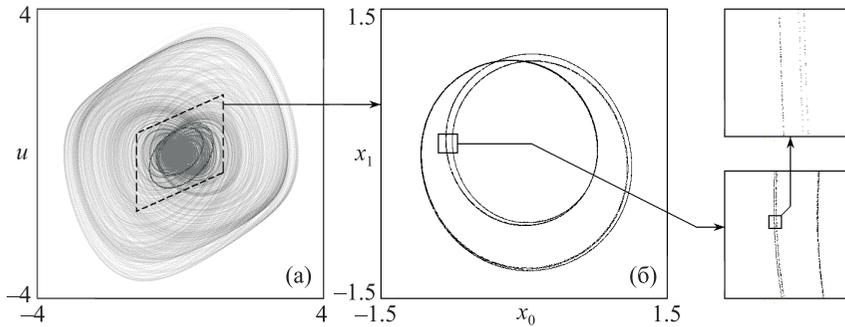


Рис. 7.6. Аттрактор системы связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля в проекции из пятимерного расширенного фазового пространства на фазовую плоскость первого осциллятора в исходных переменных (а). Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре на плоскости переопределенных координат (x_0, x_1) (б). Поперечная канторова структура аттрактора иллюстрируется на вставках

На рис. 7.6 показаны портреты аттрактора в проекции на фазовую плоскость первого осциллятора. На первой панели (а) показана проекция аттрактора из пятимерного расширенного фазового пространства на фазовую плоскость первого осциллятора в исходных переменных (x, u) . Аттрактор представлен в технике кодирования тонами серого цвета (насыщенность тона определяется относительной частотой пребывания изображающей точки в соответствующем пикселе). Черным отмечены точки, отвечающие сечению Пуанкаре, т. е. моментам времени $t_n = nT$. Вторая панель (б) изображает аттрактор в сечении Пуанкаре на плоскости переопределенных координат (x_0, x_1) (см. (7.15)) и соответствует фрагмен-

ту диаграммы (а) внутри пунктирного параллелограмма. Обратим внимание на очевидное визуальное сходство с аттрактором Смейла–Вильямса (рис. 2.3). Поперечная канторова структура аттрактора иллюстрируется отдельно на панелях (в) и (г), где показаны фрагменты исходной картинки с возрастающим увеличением.

Чтобы на количественном уровне охарактеризовать фрактальную структуру аттрактора в сечении Пуанкаре, была рассчитана корреляционная размерность с помощью алгоритма Грассбергера–Прокаччия [Grassberger and Procaccia, 1983; Tong, 1994; Шустер, 1988; Hilborn, 2000; Ott, 2002]. Для этого в ходе численного моделирования был накоплен четырехкомпонентный временной ряд $\mathbf{x}_n = \{x_0(t_n), x_1(t_n), x_2(t_n), x_3(t_n)\}$ ($n = 1 \div M$, $M = 40000$), отвечающий последовательным итерациям отображения Пуанкаре. Полученный для размерности результат $D_2 \approx 1.252$ можно сравнить с оценкой по формуле Каплана–Йорке $D \approx 1.263$.

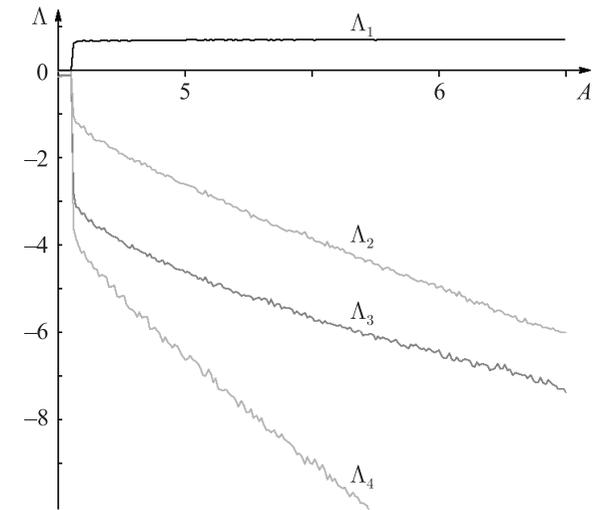


Рис. 7.7. Показатели Ляпунова отображения Пуанкаре для системы (7.9) в зависимости от амплитуды модуляции A при фиксированных остальных параметрах $\omega_0 = 2\pi$, $T = 6$, $\varepsilon = 0.5$

На рис. 7.7 все четыре показателя Ляпунова представлены графически в зависимости от амплитуды модуляции A при фиксированных остальных параметрах. Как можно видеть, наибольший показатель остается почти по-

стоянным в широком интервале по параметру, сохраняя величину, близкую к $\ln 2 = 0.693\dots$, что соответствует отображению Бернулли. Такое поведение положительного показателя Ляпунова, отвечающего за хаотический характер динамики, находится в соответствии со структурной устойчивостью гиперболического аттрактора, который сохраняет свою природу в данном интервале по параметру. (Для сравнения можно посмотреть на графики показателей Ляпунова для систем с негиперболическими аттракторами, не обладающими структурной устойчивостью, в приложении А.) Оставшиеся показатели Ляпунова отрицательные. Они соответствуют сильному сжатию фазового объема по трем из четырех измерений фазового пространства отображения Пуанкаре.

Для системы (7.9) при рассмотренном наборе параметров были проведены вычисления для подтверждения гиперболичности (см. главу 13). Было показано, что критерий конусов выполняется в тороидальной области фазового пространства отображения Пуанкаре, содержащей аттрактор [Кузнецов и Сатаев, 2006; Kuznetsov and Sataev, 2007]. Недавно гиперболическая природа аттрактора в этой системе была обоснована строго, на основе доказательных вычислений (computer assisted proof) [Wilczak, 2010].

На рис. 7.8 показаны спектры мощности двух осцилляторов, составляющих систему (7.9), которые построены по результатам обработки временных рядов для переменных x и y , полученных при численном моделировании динамики на аттракторе. Спектр рассчитывается в соответствии с методом статистической оценки спектральной плотности мощности, рекомендуемом в теории случайных процессов [Дженкинс и Ваттс, 1971; 1972]. Он состоит в том, что временной ряд разбивается на отрезки определенной длины, на каждом из которых производится умножение на функцию, плавно спадающую к нулю на концах отрезка (так называемое «окно»), выполняется преобразование Фурье для каждого отрезка и производится усреднение квадратов амплитуд спектральных компонент по всем отрезкам. Длина отрезка обратно пропорциональна разрешающей способности анализа по частоте, а увеличение количества отрезков обеспечивает уменьшение статистической погрешности (дисперсии) оценки спектральной плотности. На диаграмме (а) показан график для квадратного корня из спектральной плотности в зависимости от частоты, а на диаграмме (б) — график спектральной плотности в логарифмической шкале в традиционно используемых децибелах (10 дБ соответствуют 10-кратному отношению сопоставляемых уровней мощности).²

² Первая форма представления выбрана для удобства сравнения с экспериментальными данными в главе 20, которые представлены именно для этой величины, а вторая форма пред-

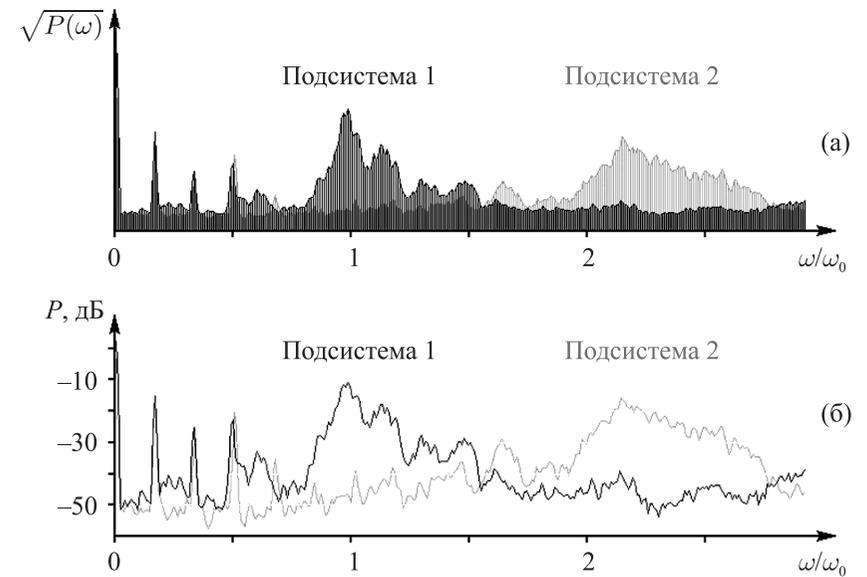


Рис. 7.8. Спектры мощности для системы (7.9) при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 6$, $\varepsilon = 0.5$, полученные обработкой данных численного моделирования: квадратный корень из спектральной плотности мощности (а) и спектральная плотность мощности в логарифмическом масштабе (б)

Как можно видеть из рисунка, спектр одного осциллятора по большей части концентрируется около его естественной частоты ω_0 , а у второго осциллятора — около удвоенной частоты $2\omega_0$. Наличие непрерывной составляющей в спектре мощности — один из важных атрибутов хаотической динамики. Дискретные пики в левой части спектра обусловлены присутствием периодической составляющей в динамике системы вследствие медленной модуляции параметра.

Как было обнаружено, в рассмотренной системе в достаточно широкой области параметров можно наблюдать жесткое возбуждение и гистерезис. Чтобы продемонстрировать этот феномен более наглядно, добавим в уравнения (7.9) еще один параметр h , который управляет относительной про-

ставления делает наглядным визуальное сравнение с данными, относящимися к системам с запаздыванием в эксперименте, обсуждаемом в главе 20, и в численном счете в главе 17.

должительностью стадий возбуждения и подавления осцилляторов:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - [h + A \cos(2\pi t/T) - x^2] \dot{x} + \omega_0^2 x &= \varepsilon y \cos \omega_0 t, \\ \ddot{y} - [h - A \cos(2\pi t/T) - y^2] \dot{y} + 4\omega_0^2 y &= \varepsilon x^2. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Описанный выше механизм функционирования системы подразумевает стимуляцию возбуждения второго осциллятора при вступлении в стадию активности со стороны партнера. Соответствующая вынуждающая сила пропорциональна квадрату амплитуды осциллятора — партнера на предыдущей стадии его активности. Если задать начальные условия с достаточно малой характерной амплитудой, то из-за пренебрежимо низкой величины квадрата амплитуды колебания не развиваются и возбуждение всей системы не наступает. Режим генерации можно восстановить путем увеличения параметра h , т. е. увеличением доли периода модуляции, на протяжении которого один и другой осциллятор линейно неустойчивы. При постепенном увеличении параметра h в какой-то момент наблюдается резкий переход к хаотическим колебаниям большой амплитуды. Если теперь начать уменьшать параметр h , это не приведет немедленно к срыву колебаний, поскольку возбуждение в системе передается между осцилляторами, совершающими на стадии активности колебания достаточно большой амплитуды. Только при некоторой достаточно большой отрицательной величине параметра h колебания пропадут. Таким образом, наблюдается гистерезис, иллюстрируемый на рис. 7.9. (При проведении вычислений, по результатам которых строился рисунок, на каждом шаге интегрирования добавлялось малое случайное возмущение на уровне $\Delta x \sim 0.0001$, чтобы обеспечить уход системы из тривиального стационарного состояния в нуле, когда оно становится неустойчивым.) На вставках показаны портреты аттракторов в сечении Пуанкаре в характерных точках петли гистерезиса, из которых можно видеть, что тип аттрактора соответствует соленоиду Смейла–Вильямса.

7.3. Система попеременно возбуждаемых осцилляторов ван дер Поля, описываемая в терминах медленных комплексных амплитуд

В предположении, что $N = \omega_0 T / 2\pi \gg 1$ и параметры A и ε не слишком велики, задачу можно переформулировать с помощью метода медленно меняющихся комплексных амплитуд, что позволяет уменьшить число существенных параметров, от которых зависит динамика. Для этого

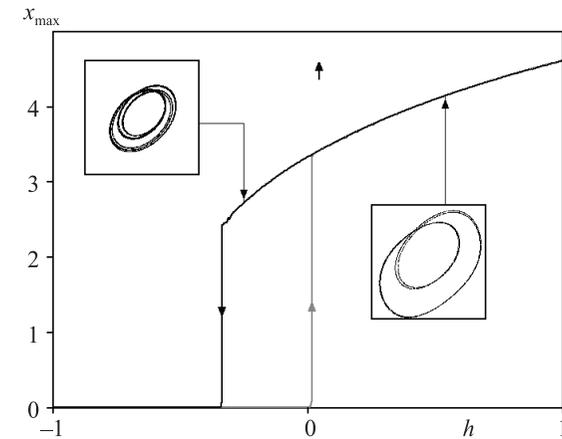


Рис. 7.9. Диаграмма, иллюстрирующая жесткое возбуждение и гистерезис в системе. Показана зависимость максимальной за период модуляции амплитуды первого осциллятора системы (7.17) от h при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 6$, $A = 5$, $\varepsilon = 0.5$. Параметр h изменяется сначала в сторону увеличения, что соответствует движению слева направо, по нижней ветви петли гистерезиса, а потом в сторону уменьшения, что соответствует движению справа налево по верхней ветви

полагаем

$$\begin{aligned} x &= ae^{i\omega_0 t} + a^* e^{-i\omega_0 t}, \quad \dot{x} = i\omega_0 a e^{i\omega_0 t} - i\omega_0 a^* e^{-i\omega_0 t}, \\ y &= be^{2i\omega_0 t} + b^* e^{-2i\omega_0 t}, \quad \dot{y} = 2i\omega_0 b e^{2i\omega_0 t} - 2i\omega_0 b^* e^{-2i\omega_0 t}, \end{aligned} \quad (7.18)$$

и после подстановки в уравнения (7.9) и усреднения имеем

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{1}{2}[aA \cos(2\pi t/T) - |a|^2 a] - i\bar{\varepsilon} b, \\ \dot{b} &= \frac{1}{2}[-bA \cos(2\pi t/T) - |b|^2 b] - i\bar{\varepsilon} a^2, \end{aligned} \quad (7.19)$$

где $\bar{\varepsilon} = \varepsilon / 4\omega_0$. Исследование этой системы было предпринято в работе [Kuptsov et al., 2008]. Было показано, что в широкой области параметра стробоскопическое отображение Пуанкаре характеризуется присутствием аттрактора типа Смейла–Вильямса, в частности, это имеет место при $A = 3$, $T = 10$, $\bar{\varepsilon} = 0.05$.

Можно думать, что такие уравнения будут возникать в более широком контексте, нежели приближенное описание конкретной модели, из которой мы исходили. Аргументируя в духе теории возникновения турбу-

лентности Ландау и Хопфа [Ландау и Лифшиц, 1953; Hopf, 1948], можно представить себе примерно такую ситуацию. Предположим, у нас есть некоторая пространственно распределенная система, в которой имеется две колебательных моды с отношением частот близким к 1:2 на фоне дополнительного медленного периодического движения. Пусть они при этом попеременно выходят за порог возбуждения и обратно и, благодаря нелинейным взаимодействиям, передают возбуждение одна другой. Тогда возникают условия для реализации гиперболического аттрактора типа Смейла–Вильямса.

7.4. Нерезонансная передача возбуждения

Как уже упоминалось, модель (7.9) сконструирована так, чтобы члены, отвечающие за связь между подсистемами, содержали частотные составляющие в резонансе с осциллятором, которому передается возбуждение. Оказывается, однако, что аттрактор типа Смейла–Вильямса может реализоваться в системе попеременно активирующихся осцилляторов и при *нерезонансной* передаче возбуждения [Кузнецов и др., 2007]. В самом деле, учитывая конечное характерное время передачи возбуждения, спектр отвечающего за это сигнала занимает некоторую полосу частот около центральной частоты, имея спадающие «хвосты» по сторонам. Если, скажем, центральная частота равна $2\omega_0$, а собственная частота возбуждаемого осциллятора ω_0 , то при определенных условиях присутствие частотных составляющих на хвосте спектрального распределения около частоты ω_0 может оказаться достаточным для передачи возбуждения, особенно с учетом того обстоятельства, что на стадии активности, при конечном превышении над порогом, нарастание возмущения экспоненциальное. Разумеется, в этом случае условия на параметры системы оказываются в гораздо большей мере ограничительными.³

Для примера рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} - [A \cos(2\pi t/T) - x^2] \dot{x} + \omega_0^2 x &= \varepsilon y, \\ \dot{y} - [-A \cos(2\pi t/T) - y^2] \dot{y} + 4\omega_0^2 y &= \varepsilon x^2, \end{aligned} \quad (7.20)$$

³ По-видимому, во многих приложениях, скажем в микроволновой электронике, лазерной физике, нелинейной оптике, резонансный механизм надо рассматривать как предпочтительный. Действительно, кажется проблематичным, что нерезонансная передача возбуждения может быть обеспечена на уровне существенно выше шумов при частотах на порядок и более высоких, чем частота модуляции.

которая, в отличие от системы (7.9), функционирует без вспомогательного сигнала. Согласно результатам численного моделирования при $T = 10$, $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.5$, $A = 6$ в стробоскопическом отображении Пуанкаре этой системы имеет место аттрактор типа Смейла–Вильямса, хотя передача возбуждения от второго осциллятора к первому носит нерезонансный характер.

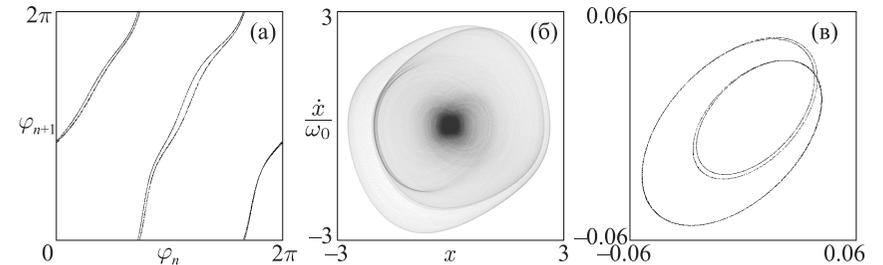


Рис. 7.10. Диаграмма для фаз, определенных по формуле $\varphi = \arg(x - i\dot{x} / \omega_0)$ для последовательных моментов времени $t = nT$ (а), аттрактор в проекции на фазовую плоскость первого осциллятора (б) и портрет аттрактора в сечении Пуанкаре (в) для системы с нерезонансной передачей возбуждения, описываемой уравнениями (7.20), при $T = 10$, $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.5$, $A = 6$

На рис. 7.10 показана итерационная диаграмма для фаз колебаний на последовательных стадиях активности первого осциллятора, аттрактор в проекции из расширенного фазового пространства на плоскость (x, \dot{x}) и портрет аттрактора в стробоскопическом сечении Пуанкаре. Показатели Ляпунова, найденные численно для отображения Пуанкаре в этом режиме, составляют $\Lambda_1 = 0.6808$, $\Lambda_2 = -3.625$, $\Lambda_3 = -8.326$, $\Lambda_4 = -17.633$, а оценка размерности по формуле Каплана–Йорке дает $D_{KY} = 1.188$.

7.5. Аттрактор типа Плыкина в неавтономной системе связанных осцилляторов

В настоящем разделе будет показано, как можно реализовать динамику, соответствующую аттрактору типа Плыкина, в системе связанных неавтономных осцилляторов [Kuznetsov, 2009a].

7.5.1. Представление состояний на сфере и уравнения модели

Начнем с системы двух автоколебательных элементов, в которых компенсация потерь осуществляется из общего источника энергии, так что уравнения для комплексных амплитуд a и b имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{1}{2}\mu(1 - |a|^2 - |b|^2)a, \\ \dot{b} &= \frac{1}{2}\mu(1 - |a|^2 - |b|^2)b,\end{aligned}\quad (7.21)$$

где μ — положительный параметр, и положим

$$b = \sqrt{\rho}e^{i\phi/2+i\psi} \sin(\theta/2), \quad a = \sqrt{\rho}e^{-i\phi/2+i\psi} \cos(\theta/2). \quad (7.22)$$

Ясно, что в установившемся режиме автоколебаний должно выполняться равенство $\rho = |a|^2 + |b|^2 = 1$. Если принять соглашение не различать состояния системы, отличающиеся только на общий для двух комплексных переменных фазовый сдвиг, то, учитывая условие $\rho = 1$, можно ассоциировать множество состояний с точками единичной сферы (рис. 6.4). Также можно ввести декартовы координаты

$$x = \rho \cos \phi \sin \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta. \quad (7.23)$$

Они выражаются через комплексные амплитуды следующим образом:

$$x + iy = 2a^*b, \quad z = |a|^2 - |b|^2. \quad (7.24)$$

Теперь мы хотим модифицировать модель (7.21) так, чтобы получилась система уравнений с коэффициентами, периодически изменяющимися во времени, а в стробоскопическом отображении Пуанкаре реализовался бы аттрактор типа Плыкина.

Рассмотрим последовательность непрерывных преобразований на сфере, эквивалентных тем, которые описаны в разделе 6.2. Для упрощения уравнений, записываемых для комплексных амплитуд, нам удобнее здесь провести эти преобразования не в четыре, а в шесть этапов. Продолжительность каждого этапа примем равной единичному временному интервалу.

I. Сток по параллели — на этой стадии полагаем, что угловая скорость движения изображающих точек на сфере пропорциональна величине $\sin 2\varphi$. Подходящая форма дифференциальных уравнений для амплитуд такова:

$$\dot{a} = -i\varepsilon a \operatorname{Im}(a^*b)^2, \quad \dot{b} = i\varepsilon b \operatorname{Im}(a^*b)^2. \quad (7.25)$$

В самом деле, подставляя $b = e^{i\varphi/2+i\psi} \sin(\theta/2)$, $a = e^{-i\varphi/2+i\psi} \cos(\theta/2)$, после несложных преобразований получаем $\dot{\varphi} = \frac{1}{2}\varepsilon \sin^2 \theta \sin 2\varphi$, $\dot{\theta} = 0$. С физической точки зрения члены в правых частях уравнений (7.25) отвечают за частотный сдвиг противоположного знака для двух осцилляторов. Величина этого сдвига пропорциональна амплитуде низкочастотного сигнала, производимого при смешении второй гармоники колебаний одного и другого осцилляторов на квадратичном нелинейном элементе.

II. Дифференциальное вращение вокруг оси z с угловой скоростью, линейно зависящей от z . На этой стадии полагаем

$$\dot{a} = -\frac{1}{4}i\pi(\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}|a|^2)a, \quad \dot{b} = -\frac{1}{4}i\pi(\sqrt{2}+1-2\sqrt{2}|b|^2)b. \quad (7.26)$$

В угловых координатах (φ, θ) эти уравнения сводятся к виду $\dot{\varphi} = -\frac{1}{2}\pi(\sqrt{2}\cos\theta+1)$, $\dot{\theta} = 0$. Заметим, что угловая скорость $\dot{\varphi}$ зависит линейно от величины $z = \cos\theta$ и обращается в ноль при $z = -1/\sqrt{2}$. На этой стадии обе подсистемы ведут себя как несвязанные классические неизохронные осцилляторы. При малых амплитудах они имеют расстройку относительно опорной частоты на $\Delta\omega_{a,b} = -\frac{1}{4}i\pi(\sqrt{2}\mp 1)$. С увеличением амплитуд частоты претерпевают сдвиг, пропорциональный квадрату амплитуды для обеих подсистем.

III. Поворот на 90° вокруг оси y согласно уравнениям

$$\dot{a} = \frac{1}{4}\pi b, \quad \dot{b} = -\frac{1}{4}\pi a. \quad (7.27)$$

Это соответствует консервативной системе связанных осцилляторов с равными частотами и коэффициентом связи такой величины, что время обмена энергией между парциальными осцилляторами в точности равно продолжительности этой стадии.

IV. Сток по параллели, как на первой стадии:

$$\dot{a} = -i\varepsilon a \operatorname{Im}(a^*b)^2, \quad \dot{b} = i\varepsilon b \operatorname{Im}(a^*b)^2. \quad (7.28)$$

V. Обратное дифференциальное вращение вокруг оси z

$$\dot{a} = \frac{1}{4}i\pi(\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}|a|^2)a, \quad \dot{b} = \frac{1}{4}i\pi(\sqrt{2}+1-2\sqrt{2}|b|^2)b. \quad (7.29)$$

VI. Обратный поворот на 90° вокруг оси y :

$$\dot{a} = -\frac{1}{4}\pi b, \quad \dot{b} = \frac{1}{4}\pi a. \quad (7.30)$$

Процедура симметрична в том смысле, что стадии I и IV идентичны, а стадии II и III отличаются от стадий V и VI только направлениями вращения.

Теперь можно записать уравнения для комплексных амплитуд, охватывающие весь временной период $T = 6$. Для этого мы составляем правые части уравнений в виде комбинаций членов (7.25), (7.26), (7.27), которые полагаем включающимися и выключающимися на соответствующих стадиях эволюции во времени. Что касается членов в уравнении (7.21), то их учитываем только на стадиях вращения. (Их исключение на остальных стадиях не принципиально, но в этом случае упрощается вывод отображения Пуанкаре, которое удастся представить в явной форме.) Таким образом, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -i\varepsilon a \operatorname{Im}(a^*b)^2 [f_1(t) + f_4(t)] + \frac{1}{4}i\pi(\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}|a|^2)a[f_5(t) - f_2(t)] + \\ &\quad + \frac{1}{4}\pi b[f_3(t) - f_6(t)] + \frac{1}{2}\mu a(1 - |a|^2 - |b|^2)[f_3(t) + f_6(t)], \\ \dot{b} &= i\varepsilon b \operatorname{Im}(a^*b)^2 [f_1(t) + f_4(t)] + \frac{1}{4}i\pi(\sqrt{2}+1-2\sqrt{2}|b|^2)b[f_5(t) - f_2(t)] + \\ &\quad + \frac{1}{4}\pi a[f_6(t) - f_3(t)] + \frac{1}{2}\mu b(1 - |a|^2 - |b|^2)[f_3(t) + f_6(t)], \end{aligned} \quad (7.31)$$

где $f_k(t) = 1$, если $k-1 \leq t - 6[t/6] < k$, и $f_k(t) = 0$ — в иных случаях.

Выведем отображение Пуанкаре, которое определяет преобразование мгновенного состояния системы за период $T = 6$ и обеспечивает стробоскопическое описание временной эволюции. Пусть начальные условия для уравнений (7.31) в момент $t_n = nT$ заданы вектором состояния $\mathbf{X}_n = (a_n, b_n)$. Решая уравнения на каждом последовательном единичном интервале времени аналитически, можно представить отображение в явном виде:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{G}_+(\mathbf{G}_-(\mathbf{X})) \equiv \mathbf{G}(\mathbf{X}), \quad (7.32)$$

где

$$\mathbf{G}_\pm(\mathbf{X}) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{aD(a,b)e^{\pm\frac{1}{4}i\pi(\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}|a|^2)} \mp bD^*(a,b)e^{\pm\frac{1}{4}i\pi(\sqrt{2}+1-2\sqrt{2}|b|^2)}}{\sqrt{1+(|a|^2+|b|^2)(e^\mu-1)}} e^{\frac{1}{2}\mu} \\ \frac{\pm aD(a,b)e^{\pm\frac{1}{4}i\pi(\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}|a|^2)} + bD^*(a,b)e^{\pm\frac{1}{4}i\pi(\sqrt{2}+1-2\sqrt{2}|b|^2)}}{\sqrt{1+(|a|^2+|b|^2)(e^\mu-1)}} e^{\frac{1}{2}\mu} \end{array} \right\} \quad (7.33)$$

и

$$D(a,b) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{|a|^2|b|^2 - (a^*b)^2 \tanh(2\varepsilon|a|^2|b|^2)}{|a|^2|b|^2 - (ab^*)^2 \tanh(2\varepsilon|a|^2|b|^2)} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (7.34)$$

7.5.2. Численные результаты для связанных осцилляторов

На рис. 7.11 показаны графики зависимости от времени для амплитуд связанных осцилляторов $|a|$ и $|b|$, полученные при численном решении дифференциальных уравнений (7.31). В качестве начальных условий были взяты некоторые малые по абсолютной величине и случайные по фазе комплексные амплитуды a и b , так что график изображает переходный процесс, предшествующий возникновению установившегося режима хаотических колебаний. В правой части графика зависимости выглядят уже как реализации стационарного случайного процесса, что ассоциируется с динамикой на хаотическом аттракторе. На графике можно наблюдать некоторые специфические особенности, связанные с кусочно-непрерывной природой эволюции, составленной из последовательных стадий. В частности, горизонтальные плато относятся к стадиям I, II, IV, V, на которых амплитуды $|a|$ и $|b|$ остаются постоянными. Заметим, что зависимости для амплитуд $|a|$ и $|b|$ взаимосвязаны: в установившемся режиме они удовлетворяют соотношению $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

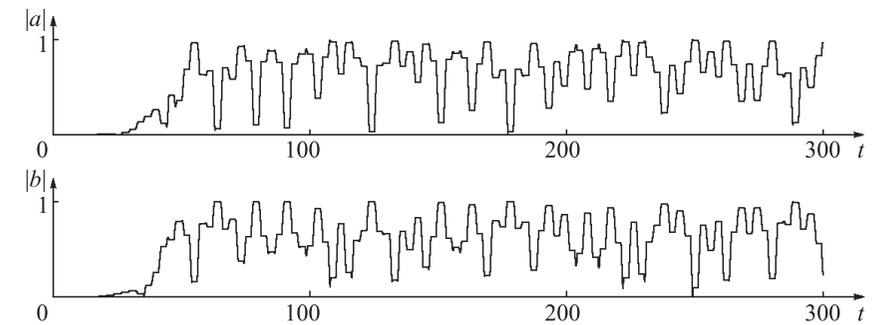


Рис. 7.11. Зависимости амплитуд $|a|$ и $|b|$ от времени в переходном процессе, полученные при численном решении дифференциальных уравнений (7.31) для $\varepsilon = 0.77$ и $\mu = 1$

На рис. 7.12а показан аттрактор стробоскопического отображения Пуанкаре, отвечающего моментам времени $t_n = nT$, $T = 6$. Чтобы сделать видимой присущую аттрактору поперечную канторову структуру, использованы специальные координаты $\text{Re}(a^*b)$, $\text{Im}(a^*b)$. Точки показаны черным цветом, если амплитуда первого осциллятора в данный момент больше, чем амплитуда второго, и серым цветом — в противном случае. Как видно из выражений (7.22), такой способ визуализации отвечает определенной плоской проекции аттрактора на сфере. Как можно убедиться, этот аттрактор в точности соответствует аттрактору формальной модели из предыдущей главы (читатель может сравнить рис. 7.12а и 6.5б).

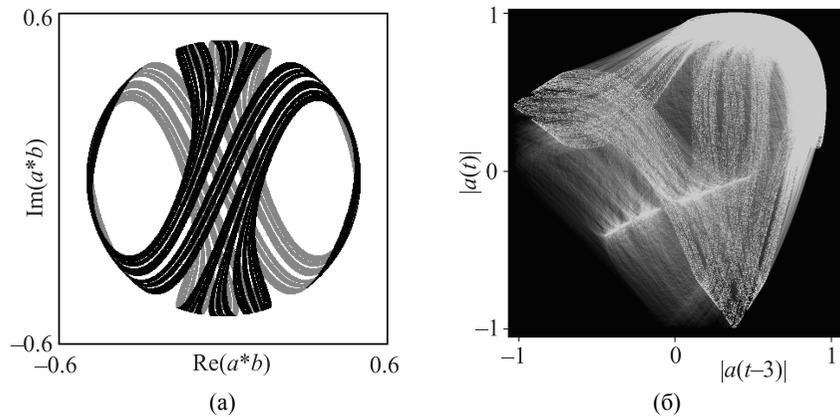


Рис. 7.12. Портрет аттрактора отображения Пуанкаре (7.32) в координатах $\text{Re}(a^*b)$, $\text{Im}(a^*b)$ (а) и аттрактора системы с непрерывным временем (7.31) на плоскости, где по осям координат отложены вещественные амплитуды одного и того же осциллятора, разделенные интервалом времени $T/2 = 3$ (б). Последняя диаграмма представлена тонами серого цвета: более яркие тона отвечают более высокой вероятности посещения пикселей принадлежащей аттрактору орбитой. Значения параметров $\varepsilon = 0.77$, $\mu = 1$

На рис. 7.12б представлен портрет аттрактора для системы с непрерывным временем (7.31). Поскольку размерность пространства состояний довольно велика (вектор $\mathbf{X} = (a, b)$ четырехмерный, а расширенное фазовое пространство неавтономной системы пятимерное), графическое представление, делающее видимой тонкую фрактальную поперечную структуру аттрактора, представляет собой нетривиальную задачу. Портрет аттрактора показан

на плоскости двух переменных, в качестве которых фигурируют значения амплитуд $|a(t)|$ и $|a(t-3)|$, относящихся к моментам времени, разделенным полупериодом вариации коэффициентов в уравнениях (7.31). Использовано представление объекта тонами серого цвета: более яркие тона отвечают пикселям, посещаемым изображающей точкой с большей вероятностью. При таком представлении удастся различить фрактальную структуру, наличие которой связано с динамикой на аттракторе типа Плыкина. Эта методика визуализации может оказаться полезной при экспериментах с системами, относящимися к рассматриваемому классу.

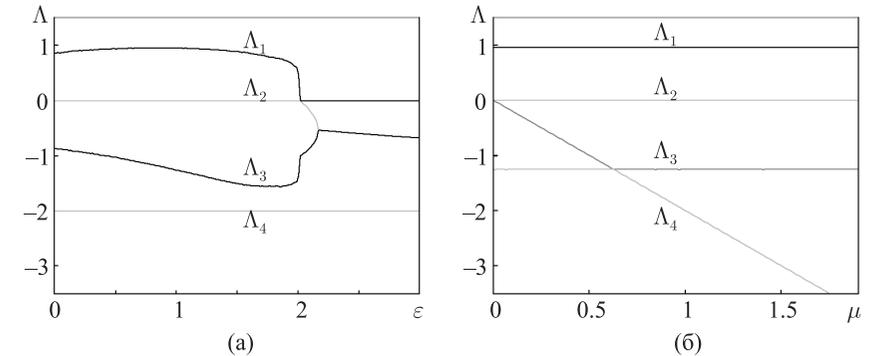


Рис. 7.13. Четыре показателя Ляпунова в зависимости от параметра ε при $\mu = 1$ (а) и в зависимости от параметра μ при $\varepsilon = 1$ (б) для отображения Пуанкаре, записанного для комплексных амплитуд. Нулевой показатель возникает из-за инвариантности уравнений по отношению к одновременному одинаковому фазовому сдвигу в обоих осцилляторах

Два показателя Ляпунова для отображения Пуанкаре в точности равны показателям для отображения (6.14). Помимо этого, имеется нулевой показатель, ассоциирующийся с возмущением типа одновременного фазового сдвига для обоих осцилляторов, и отрицательный показатель, соответствующий приближению траекторий к инвариантному множеству $|a|^2 + |b|^2 = 1$. На рис. 7.13 результаты расчета показателей Ляпунова представлены графически. Первая диаграмма (а) показывает зависимость четырех показателей Ляпунова от параметра ε при фиксированной величине $\mu = 1$. В диапазоне $\varepsilon < \varepsilon_c \approx 2.03$ один из показателей положительный, что означает присутствие хаоса. Из остальных показателей один нулевой (с точностью до вычислительной погрешности) и два отрицательных. От-

метим гладкую зависимость наибольшего показателя от параметра в указанном интервале. Для больших значений параметра ε (т. е. при сильной диссипации, вносимой на стадиях I и IV) хаос исчезает. Вторая диаграмма (б) показывает зависимость показателей Ляпунова от параметра μ при $\varepsilon = 1$. Как можно видеть, изменение параметра μ заметно влияет только на один показатель, который соответствует, очевидно, приближению траекторий к инвариантной сфере. Присутствие нулевого показателя отражает инвариантность уравнений по отношению к одинаковому сдвигу фаз осцилляторов. Разумеется, результаты вычислений согласуются с данными предыдущей главы: при одинаковых значениях ε два ненулевых показателя совпадают (с точностью до вычислительной погрешности) с величинами, полученными для двумерного отображения.

Следует оговориться, что формально в системе уравнений для комплексных амплитуд аттрактор непосредственно не может интерпретироваться как однородно гиперболический из-за наличия в пространстве состояний нейтрального направления, отвечающего общей фазе. Он должен быть отнесен к классу *частично гиперболических аттракторов* [Брин и Песин, 1974; Bonatti et al., 2005; Pesin, 2007]. Для рассмотренной модели это замечание не принципиально, поскольку инвариантность по отношению к сдвигу фазы точная, и правомерно соглашение не различать состояния, отличающиеся только общей фазой.⁴ Однако в системах, для которых представление посредством медленных комплексных амплитуд будет служить лишь приближенным способом описания, может проявиться специфика частично гиперболического аттрактора. Если поправки, обусловленные отклонением от приближенного описания, невелики, можно предположить, что общая фаза будет совершать медленное случайное блуждание, тогда как динамика остальных переменных сохранит свой характер в силу присущей ей грубости.

В заключение уместно упомянуть, что в механике и физике известны и другие ситуации, когда состояния естественным образом ассоциируются с точками сферы. Простой пример — задача о движении твердого тела с одной неподвижной точкой в вязкой среде. Другие примеры — это представление двухуровневых систем в частности, частиц со спином $1/2$, на сфере Блоха [Mark Fox, 2006] и представление поляризации света параметрами Стокса [Goldstein and Collet, 2003]. Можно предположить, что при определенных манипуляциях с такими системами в них тоже можно реализовать динамику, отвечающую аттрактору типа Плькина.

⁴ Аналогичные соображения используются для уменьшения размерности фазового пространства во многих моделях, рассматриваемых в литературе, включая вывод знаменитой модели Лоренца.

Глава 8

Автономные системы с однородно гиперболическими аттракторами

Идею манипуляции фазами в ходе передачи возбуждения между попеременно активными осцилляторами можно использовать для построения автономных систем с гиперболическим хаосом. Для этого нужно обеспечить в системе самоподдерживающуюся модуляцию, выражающуюся в попеременной активации и подавлении автоколебаний в двух взаимодействующих подсистемах. В настоящей главе будет рассмотрено несколько примеров такого рода. Один из них может служить иллюстрацией интригующей проблемы сценариев возникновения гиперболических аттракторов при вариации параметров системы; это относится к рождению аттрактора Смейла–Вильямса в результате так называемой «катастрофы голубого неба» в соответствии с механизмом, который предложили Шильников и Тураев. Системы, которые здесь рассматриваются, используют нерезонансный механизм передачи возбуждения; в каком-то плане это недостаток, делающий проблематичной реализацию таких моделей, при больших отношениях характерных частот автоколебаний и самоподдерживающейся модуляции, скажем, в электронике и нелинейной оптике.

8.1. Автономная система двух связанных осцилляторов с саморегулирующимся попеременным возбуждением

Попробуем сконструировать автономную систему с непрерывным временем, имеющую аттрактор Смейла–Вильямса в отображении Пуанкаре, управляясь от связанных попеременно возбуждающихся осцилляторов, рассмотренных в предыдущей главе.

В уравнениях (7.9) присутствует два рода временных зависимостей коэффициентов, делающих систему неавтономной. Во-первых, это медленная периодическая модуляция параметра, отвечающего за бифуркацию Андронова–Хопфа, и во-вторых, наличие вспомогательного сигнала частоты ω_0 . В усредненных уравнениях для комплексных амплитуд (7.17) второй вид временной зависимости исключен. Так что формально для получения автономных дифференциальных уравнений нам нужно сделать всего лишь один шаг: ввести вместо внешнего периодического воздействия подходящим образом изменяющуюся во времени дополнительную действительную динамическую переменную z , которая входит в уравнения для двух осцилляторов с противоположным знаком:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{1}{2}(z - |a|^2)a - i\varepsilon b, \\ \dot{b} &= \frac{1}{2}(-z - |b|^2)b - i\varepsilon a^2, \end{aligned} \quad (8.1)$$

и дополнить систему уравнением для этой переменной. Она должна симметричным образом уменьшаться, когда активен первый осциллятор, и увеличиваться, когда активен второй. Запишем для переменной z дифференциальное уравнение первого порядка, где правая часть содержит разность квадратов амплитуд второго и первого осцилляторов и линейный член с положительным коэффициентом:

$$\dot{z} = \alpha z + |b|^2 - |a|^2. \quad (8.2)$$

Теперь, полагая в уравнениях (8.1) и (8.2) $a = X + iY$, $b = U + iV$, приходим к уравнениям относительно пяти действительных переменных:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \frac{1}{2}(z - X^2 - Y^2)X + \varepsilon V, \\ \dot{Y} &= \frac{1}{2}(z - X^2 - Y^2)Y - \varepsilon U, \\ \dot{U} &= \frac{1}{2}(-z - U^2 - V^2)U + 2\varepsilon XY, \\ \dot{V} &= \frac{1}{2}(-z - U^2 - V^2)V - \varepsilon(X^2 - Y^2), \\ \dot{z} &= \alpha z + U^2 + V^2 - X^2 - Y^2. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Это пример автономной системы дифференциальных уравнений, обладающей аттрактором типа Смейла–Вильямса в отображении Пуанкаре.

На рис. 8.1 показаны в зависимости от времени амплитуды и фазы, полученные при численном моделировании динамики системы при параметрах, выбранных подходящим образом. На графике можно видеть самоподдерживающийся процесс попеременного возбуждения первого и второго парциальных осцилляторов. Как будет в дальнейшем показано, они сопровождаются преобразованием фаз такого же характера, как для системы-прототипа, отвечающем растягивающему отображению окружности на каждом цикле осцилляций переменной z .

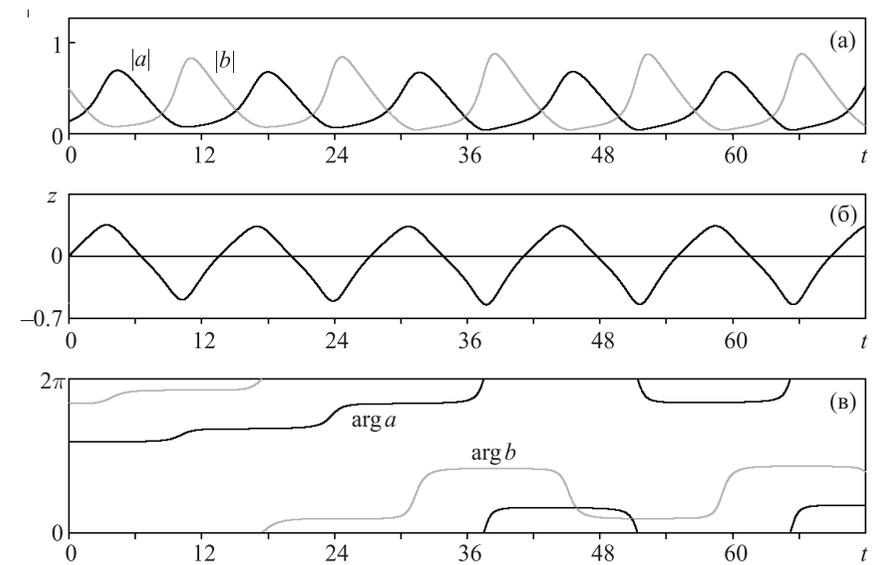


Рис. 8.1. Графики амплитуд $|a|$, $|b|$ и фаз $\arg a$, $\arg b$ в зависимости от времени, полученные при численном решении уравнений (8.3) для $\varepsilon = 0.1$ и $\alpha = 0.6$

Чтобы двигаться дальше, нам надо определить сечение Пуанкаре в пятимерном фазовом пространстве. Для этой цели подходит гиперплоскость $z = 0$, пересечение орбит с которой будем учитывать, скажем, в направлении увеличения переменной z , т. е. при выполнении дополнительного условия $\dot{z} > 0$.

На рис. 8.2 показан портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость переменных одной из поочередно возбуждающихся подсистем.

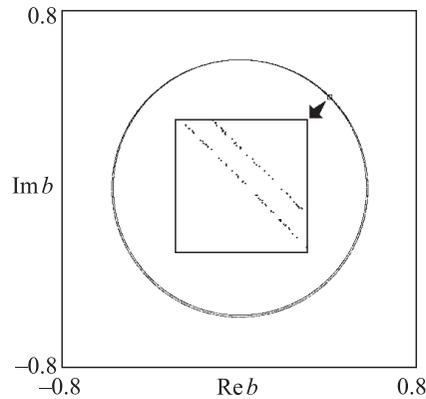


Рис. 8.2. Портрет аттрактора системы (8.3) в проекции на плоскость (U, V) в сечении Пуанкаре гиперплоскостью $z = 0$, проходимой орбитами в направлении $\dot{z} > 0$. Значения параметров $\varepsilon = 0.1$ и $\alpha = 0.6$. На вставке показан в увеличенном виде фрагмент, на котором различима поперечная канторова структура объекта. Среднее время между последовательными прохождениями секущей Пуанкаре составляет $\langle T \rangle \approx 13.77$

Это аттрактор в виде соленоида Смейла–Вильямса, вложенный в четырехмерное фазовое пространство отображения Пуанкаре. На вставке приводится в увеличенном виде фрагмент картинки, делающий различимой присутствующую поперечную канторову структуру волокон аттрактора. На рис. 8.3 показана диаграмма, иллюстрирующая преобразование угловой координаты, или фазы, для второй подсистемы в моменты последовательных возвратов на секущую Пуанкаре, $\varphi_n = \arg(U + iV)|_{z=0, \dot{z}>0}$. Как можно видеть, для циклической координаты φ имеет место растягивающее отображение окружности, которое с хорошей точностью отвечает удвоению фазы. По другим направлениям в пространстве состояний фазовый объем претерпевает сжатие.

Вычисление показателей Ляпунова для аттрактора потоковой системы (8.3) при $\varepsilon = 0.1$ и $\alpha = 0.6$ дает

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.05036, \lambda_2 = 0.00000, \lambda_3 = -0.3351, \\ \lambda_4 &= -0.3933, \lambda_5 = -0.4787. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Поскольку средний период передачи возбуждения от одной подсистемы к другой и обратно составляет в данном случае $T_{av} \approx 13.77$, для отображения

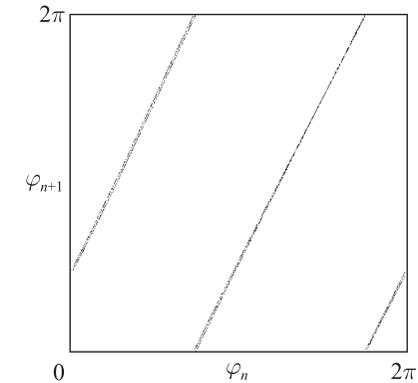


Рис. 8.3. Итерационная диаграмма для фазы второго частичного осциллятора $\varphi_n = \arg(U + iV)|_{z=0, \dot{z}>0}$, полученная при численном решении уравнений (8.3) для $\varepsilon = 0.1$ и $\alpha = 0.6$

Пуанкаре наибольший показатель Ляпунова $\Lambda_1 = \lambda_1 T_{av} \approx 0.6934$. Это хорошо согласуется с оценкой, основанной на отображении Бернулли, $\Lambda_1 = \ln 2$. Второй показатель λ_2 нулевой (с точностью до погрешности вычислений). Он соответствует вектору возмущения, направленному вдоль опорной траектории, как это всегда имеет место в автономных системах. Все остальные показатели Ляпунова отрицательные и отвечают за сжатие фазового объема и приближение фазовых траекторий к аттрактору. Оценка размерности Каплана–Йорке для аттрактора, вложенного в пятимерное расширенное фазовое пространство системы уравнений (8.3), дает $D_{KY} = 2 + (\lambda_1 + \lambda_2) / |\lambda_3| \approx 2.15$.

Результаты численного моделирования динамики согласуются с ожидаемым свойством структурной устойчивости аттрактора. Качественно то же самое поведение, отвечающее отображению типа Бернулли для фазы на последовательных стадиях активности, сохраняется в широкой области на плоскости параметров системы (рис. 8.4).

8.2. Система, построенная на основе модели хищник–жертва

Ряд примеров автономных систем с гиперболическими аттракторами предложен в совместной работе автора с Пиковским [Kuznetsov and Pi-

kovsky, 2007]. Рассмотрим одну из них, характеризующуюся минимальной размерностью фазового пространства, допускающей существование аттрактора Смейла–Вильямса (другие примеры будут обсуждаться в главе 16).

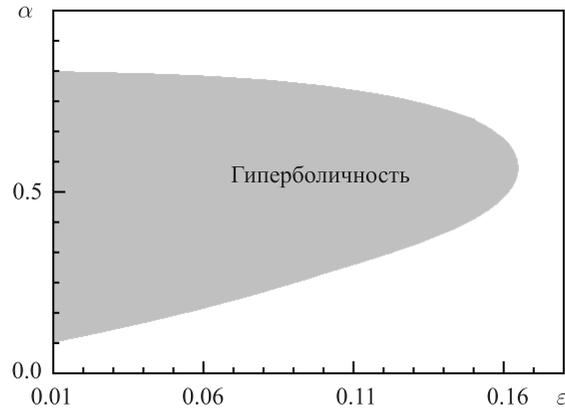


Рис. 8.4. Область сохранения динамики, ассоциирующей с преобразованием фаз типа отображения Бернулли, для последовательных стадий активности подсистем модели (8.3), показанная серым цветом на плоскости параметров

Начнем с двумерной системы типа «хищник–жертва», мгновенное состояние которой задается парой неотрицательных переменных r_1, r_2 :

$$\dot{r}_1 = 2(1 - r_2 + \frac{1}{2}r_1 - \frac{1}{50}r_1^2)r_1, \quad \dot{r}_2 = 2(r_1 - 1)r_2. \quad (8.5)$$

У этой системы имеется предельный цикл, который проходит очень близко к точке седла в начале координат, обходит вокруг неустойчивого фокуса A (неподвижная точка с координатами $r_1 = 1, r_2 = \frac{37}{25}$), проходит мимо второй седловой точки B (при $r_1 = 26.86, r_2 = 0$) и затем замыкается. (Фазовый портрет на плоскости переменных $\sqrt{r_1}$ и $\sqrt{r_2}$ показан на рис. 8.5а.) По ходу этого процесса коэффициенты роста, даваемые факторами $m_1 = 1 - r_2 + \frac{1}{2}r_1 - \frac{1}{50}r_1^2$ и $m_2 = r_1 - 1$ в уравнениях (8.5) попеременно меняют знак.

Давайте теперь трактовать r_1 и r_2 как возведенные в квадрат амплитуды двух осцилляторов одной и той же частоты ω_0 , представим их как $r_1 = x^2 + u^2$ и $r_2 = y^2 + v^2$. Новые переменные x, u и y, v соответствуют действительной и мнимой частям двух комплексных амплитуд: $a_1 = x + iu$

и $a_2 = y + iv$. Для них запишем уравнения

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -i\omega_0 a_1 + m_1(|a_1|, |a_2|)a_1, \\ \dot{a}_2 &= -i\omega_0 a_2 + m_2(|a_1|, |a_2|)a_2, \end{aligned} \quad (8.6)$$

или

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega_0 u + m_1(x^2 + u^2, y^2 + v^2)x, \\ \dot{u} &= -\omega_0 x + m_1(x^2 + u^2, y^2 + v^2)u, \\ \dot{y} &= \omega_0 v + m_2(x^2 + u^2, y^2 + v^2)y, \\ \dot{v} &= -\omega_0 y + m_2(x^2 + u^2, y^2 + v^2)v. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Мы получили систему двух осцилляторов, претерпевающих по очереди возбуждение и подавление, причем их фазы никак не связаны. Теперь дополним первое и третье уравнения (8.7) членами, описывающими связь, которые пропорциональны соответственно vu и x , в результате чего приходим к следующей модели:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega_0 u + [1 - (y^2 + v^2) + \frac{1}{2}(x^2 + u^2) - \frac{1}{50}(x^2 + u^2)^2]x + \varepsilon yv, \\ \dot{u} &= -\omega_0 x + [1 - (y^2 + v^2) + \frac{1}{2}(x^2 + u^2) - \frac{1}{50}(x^2 + u^2)^2]u, \\ \dot{y} &= \omega_0 v + (x^2 + u^2 - 1)y + \varepsilon x, \\ \dot{v} &= -\omega_0 y + (x^2 + u^2 - 1)v. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Здесь ε — константа связи. В обсуждаемых ниже вычислениях приняты фиксированные значения параметров $\omega_0 = 2\pi, \varepsilon = 0.3$.

Если $\varepsilon = 0$, то уравнения для переменных $r_1 = |a_1|^2 = x^2 + u^2$ и $r_2 = |a_2|^2 = y^2 + v^2$ точно совпадают с соотношениями (8.5). При достаточно малых ε движение изображающей точки на плоскости r_1, r_2 приблизительно следует предельному циклу, как показано на рис.8.5а, посещая раз за разом окрестность начала координат. Качественно на каждом очередном проходе можно выделить следующие стадии: возбуждение первого осциллятора (i), возбуждение второго осциллятора (ii), подавление первого осциллятора (iii) и более медленное подавление второго осциллятора (iv). Активация второго осциллятора имеет место в присутствии воздействия со стороны партнера благодаря наличию связи, описываемой членом, пропорциональным ε во втором уравнении, так что он получает ту же фазу, какая была у первого осциллятора (с точностью до несущественного

постоянного сдвига). Во время стадии подавления второго осциллятора его остаточные колебания стимулируют первый осциллятор. Соответствующий член в первом уравнении εv специально задан так, чтобы стимуляция определялась второй гармоникой колебаний. Действительно, если $y \sim \sin(\omega_0 t + \varphi)$ и $v \sim \cos(\omega_0 t + \varphi)$, то $y_k v_k \sim \sin(\omega_0 t + \varphi) \cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t + 2\varphi)$. В результате первый осциллятор на стадии активности получит удвоенную фазу 2φ . (Заметим, что частота воздействия существенно отличается от естественной частоты возбуждаемого осциллятора, это, соответственно, $2\omega_0$ и ω_0 , так что мы говорим о нерезонансной передаче возбуждения.) Когда наступает время подавления первого осциллятора, он успевает передать возбуждение обратно второму осциллятору, и так далее. Этот процесс последовательного обмена возбуждением повторяется снова и снова, и каждый полный цикл его отвечает растягивающему отображению окружности, или отображению Бернулли, для фазовой переменной $\varphi_{n+1} = 2\varphi_n + \text{const}$, по крайней мере в грубом приближении. Несмотря на нерезонансную природу передачи возбуждения на определенной стадии, все работает, и динамика, соответствующая описанному механизму, четко наблюдается в вычислениях, по крайней мере пока параметр частоты ω_0 задан не слишком большим.¹

На рис. 8.5б показан портрет аттрактора в проекции на плоскость тех же переменных, какие использовались для изображения предельного цикла исходной версии уравнений (8.5).

На рис. 8.6 на диаграмме (а) приведены временные зависимости для переменных x и y , относящихся соответственно к первому и второму осциллятору. Можно видеть, что стадии активности парциальных осцилляторов перемежаются со стадиями подавления. Согласно вычислениям, средний временной период повторения стадий для данного режима равен $\langle T \rangle = 7.248$.

На диаграмме (б) показан портрет аттрактора в виде трехмерной проекции в координатах (y, v, ρ) , где $\rho = \sqrt{x^2 + u^2}$. Вращение траектории приблизительно в горизонтальной плоскости соответствует эпохам возбуждения и медленного затухания второго осциллятора и подавления первого осциллятора. Возбуждение первого осциллятора сопровождается уходом вверх от начала координат с последующим возбуждением второго осциллятора, его затуханием и новым возвращением в окрестность начала координат.

¹ Расчеты с различными начальными условиями показывают, что всегда наблюдается выход системы на один и тот же аттрактор; мультистабильность отмечена не была. При этом качественно один и тот же тип динамики имеет место в довольно широком диапазоне параметров.

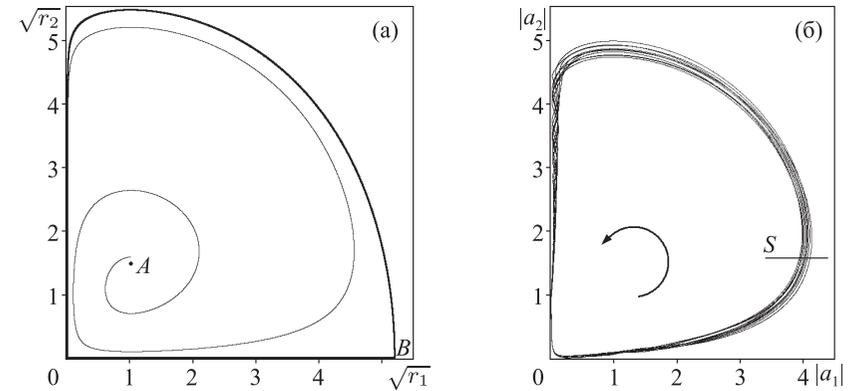


Рис. 8.5. Траектории на фазовой плоскости для уравнения (8.5) в координатах $\sqrt{r_1}$ и $\sqrt{r_2}$ (а) и траектория на аттракторе для модели (8.8) при $\omega_0 = 2\pi$ и $\varepsilon = 0.3$, показанная на плоскости аналогичных переменных, представляющих собой абсолютные величины комплексных амплитуд (б). Стрелка показывает направление движения. Сегмент S соответствует гиперповерхности, использованной в определении отображения Пуанкаре

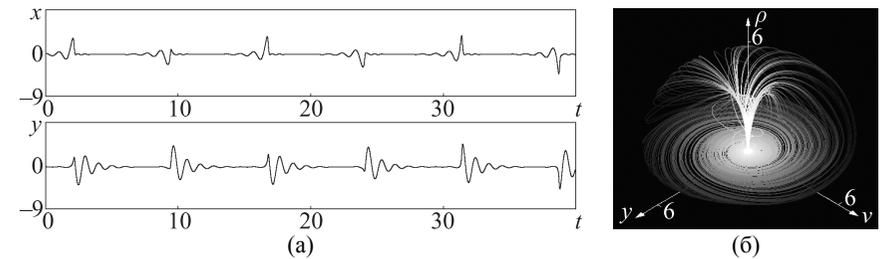


Рис. 8.6. Графики зависимости от времени осциллирующих переменных x и y , относящихся соответственно к первому и второму осциллятору (а), и портрет аттрактора в трехмерном изображении (б) для модели (8.8) при $\omega_0 = 2\pi$ и $\varepsilon = 0.3$

В качестве следующего шага введем отображение Пуанкаре в четырехмерном фазовом пространстве системы (x, u, y, v) . Из рисунка 8.5б можно усмотреть, что подходящий способ определить отображение Пуанкаре состоит в том, чтобы выполнить сечение гиперповерхностью, заданной уравнением $r_2^2 = c$, то есть $y^2 + v^2 = c$, принимая во внимание пересечения в направлении увеличения r_2 . При используемых здесь параметрах подхо-

дющий выбор константы $c = 2.5$. На рис. 8.5б это соответствует горизонтальному сегменту S . В этом трехмерном сечении удобно работать с координатами $\{x, u, z\}$, где x и u — переменные, присутствующие в исходных уравнениях, а третья переменная определена соотношением

$$z = \arg(y + iv) - \arg(x + iu), \quad (8.9)$$

так что $z \in (-\pi, \pi]$.

Процедура вычисления отображения Пуанкаре для заданного начального вектора $\mathbf{x} = \{x, u, z\}$ организована как компьютерная программа, выполняющая численное решение дифференциальных уравнений (8.8) и дополненная интерполяционным методом Эно, согласованным по точности с используемой конечно-разностной схемой [Hénon, 1982]. После того как сегмент траектории, стартующий и финиширующий на поверхности сечения Пуанкаре, вычислен, получаются величины $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}, \bar{u}, \bar{z}) = \mathbf{T}(\mathbf{x})$, определенные для конечной точки.

Проводя вычисления для некоторой опорной траектории на аттракторе, мы можем определить последовательность фаз при пересечении поверхности S в моменты t_n с помощью соотношения $\varphi_n = \arg(x(t_n) + iu(t_n))$ и проверить соответствие с отображением Бернулли, ожидаемое согласно изложенной выше качественной аргументацией. На рис. 8.7 показана диаграмма для этих фаз, полученных при итерациях отображения Пуанкаре \mathbf{T} в процессе вычислений для модели (8.8) при $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.3$. Заметим, что результат действительно близок к отображению Бернулли. Существенной является присущая отображению топологическая природа: один обход полной окружности для прообраза соответствует двукратному обходу для образа. Это дает основание полагать, что отображение Пуанкаре характеризуется присутствием аттрактора типа Смейла–Вильямса, поскольку оно обеспечивает двукратное растяжение по угловой координате φ и сжатие по остальным направлениям для эволюционирующих в соответствии с динамическими уравнениями элементов фазового объема.

Рассмотрим область D в форме тора в трехмерном фазовом пространстве отображения Пуанкаре $\mathbf{T}(\mathbf{x})$, заданную в параметрическом виде следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= (r + pb \sin \vartheta) \cos \psi, \\ u &= (r + pb \sin \vartheta) \sin \psi, \\ z &= \rho d \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (8.10)$$

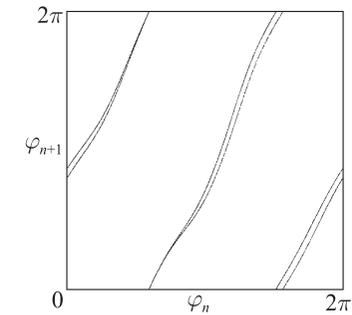


Рис. 8.7. Итерационная диаграмма для фаз первого частичного осциллятора при последовательных прохождении орбиты на аттракторе через секущую Пуанкаре $\varphi_n = \arg(x + iu)|_{z=0, z>0}$, полученная на основании численного решения уравнений (8.8) при $\omega_0 = 2\pi$ и $\varepsilon = 0.3$

где $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \psi < 2\pi$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$ и константы равны $r = 4.05$, $b = 0.3$, $d = 0.1$. Как проверено в расчетах, это поглощающая область для отображения Пуанкаре $\mathbf{T}(\mathbf{x})$. На рис. 8.8 показан эта область и ее образ при однократном применении отображения Пуанкаре. Как можно видеть, образ выглядит в точности так, как этого требует построение аттрактора Смейла–Вильямса: это узкая двойная петля, вложенная внутри тороидальной поглощающей области. На рис. 8.9 показан портрет аттрактора для отображения Пуанкаре, представленный в проекции на фазовую плоскость первого осциллятора (x, u) . На вставке, где показан увеличенный фрагмент, можно различить характерную для соленоида Смейла–Вильямса поперечную канторову структуру.

Вычисление показателей Ляпунова для модели (8.7) с помощью алгоритма Бенеттина дает

$$\lambda_1 = 0.0918, \lambda_2 = 0.0000, \lambda_3 = -0.982, \lambda_4 = -1.330. \quad (8.11)$$

Учитывая, что система автономная, естественно заключить, что показатель λ_2 точно равен нулю. Далее, как отмечалось, средний интервал времени между прохождением секущей Пуанкаре $T_{av} = 7.248$, поэтому, если исходить из отображения Бернулли, наибольший показатель Ляпунова должен быть равен $T_{av}^{-1} \ln 2 \approx 0.096$. Это находится в разумном соответствии с величиной λ_1 , полученной в результате численных расчетов. Оценка размерности аттрактора по формуле Каплана–Йорке дает $D_L = 2 + (\lambda_1 + \lambda_2) / \lambda_3 \approx 2.094$.

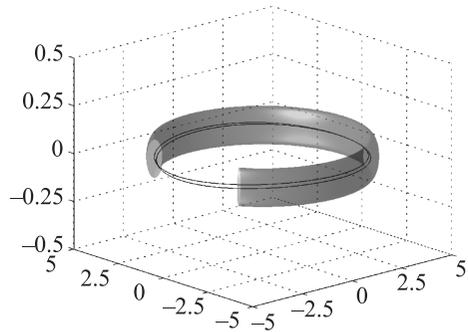


Рис. 8.8. Поглощающая область, заданная уравнениями (8.10), и ее образ в трехмерном фазовом пространстве отображения Пуанкаре системы (8.8) при $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.3$

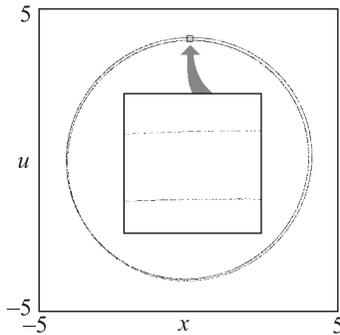


Рис. 8.9. Аттрактор отображения Пуанкаре системы (8.8) при $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.3$ в проекции на фазовую плоскость первого осциллятора (x, u)

Для аттрактора отображения Пуанкаре системы (8.8) при указанных выше параметрах были проведены расчеты, подтвердившие его гиперболическую природу в силу выполнения критерия конусов на аттракторе (см. главу 13) и в тороидальной области, содержащей аттрактор (см. работу [Kuznetsov et al., 2007]).

8.3. Пример катастрофы голубого неба, сопровождающейся рождением аттрактора Смейла–Вильямса

Как отмечалось в главе 4, аттракторы типа Смейла–Вильямса в отображении Пуанкаре систем с непрерывным временем при изменении па-

раметра могут возникать в результате так называемой катастрофы голубого неба [Шильников и Тураев, 1995; Shilnikov and Turaev, 1997].

Чтобы построить систему, где было бы возможно рождение аттрактора Смейла–Вильямса, нужно иметь размерность фазового пространства, равную по меньшей мере четырем (что отвечает трехмерному отображению Пуанкаре). Поток траекторий в фазовом пространстве должен быть организован таким образом, чтобы некоторая тороидальная область, изначально расположенная вблизи седло-узловой цикла, в ходе эволюции и при возвращении в окрестность этого цикла образовала бы двойную петлю с более тонкими витками. Чтобы это осуществить, можно использовать модель из предыдущего раздела с некоторыми модификациями.

Изменим систему-прототип (8.5) следующим образом [Kuznetsov, 2010]:

$$\dot{r}_1 = 2(1 - r_2 + \frac{1}{2}r_1 - \frac{1}{50}r_1^2)r_1, \quad \dot{r}_2 = 2(r_1 - \mu + \frac{1}{2}r_2 - \frac{1}{50}r_2^2)r_2. \quad (8.12)$$

Эти уравнения отличаются от (8.5) дополнительными нелинейными членами во втором уравнении («хищники») и содержат новый управляющий параметр μ . Если его величина немного меньше, чем $\mu_0 = 3\frac{1}{8}$, орбиты на фазовой плоскости r_1, r_2 выглядят, как показано на рис. 8.10а. Здесь имеется четыре неподвижных точки: неустойчивый фокус A , седла B и C_1 и узел C_2 . При увеличении μ неподвижные точки C_1 и C_2 движутся навстречу друг другу, встречаются при $\mu = \mu_0$, после чего исчезают (см. диаграммы (б) и (в) соответственно). На месте имевшейся ранее пары неподвижных точек возникает область относительно медленного движения, а аттрактором становится предельный цикл, проходящий вблизи начала координат и седла B .

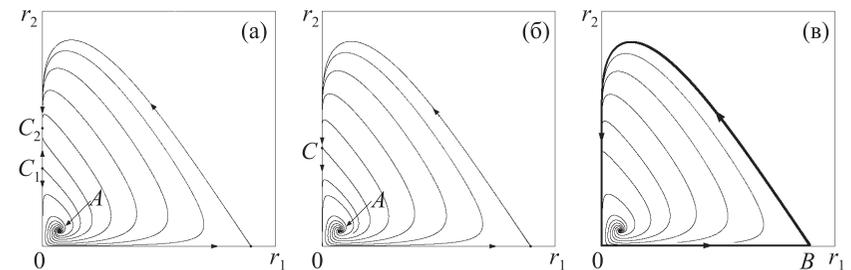


Рис. 8.10. Фазовые портреты системы (8.12); диаграммы от (а) до (в) отвечают увеличению параметра μ . При этом имеющиеся вначале две неподвижные точки, устойчивый узел C_2 и седло C_1 (а) сближаются и сливаются в момент бифуркации (б), после чего появляется предельный цикл, представленный жирной кривой линией (в)

Как и в предыдущем разделе, припишем величинам r_1, r_2 смысл квадрата модуля комплексных амплитуд двух осцилляторов и введем дополнительно связь между ними. Уравнения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega_0 u + [1 - (y^2 + v^2) + \frac{1}{2}(x^2 + u^2) - \frac{1}{50}(x^2 + u^2)^2]x + \varepsilon yv, \\ \dot{u} &= -\omega_0 x + [1 - (y^2 + v^2) + \frac{1}{2}(x^2 + u^2) - \frac{1}{50}(x^2 + u^2)^2]u, \\ \dot{y} &= \omega_0 v + (x^2 + u^2 - \mu + \frac{1}{2}(y^2 + v^2) - \frac{1}{50}(y^2 + v^2)^2)y + \varepsilon x, \\ \dot{v} &= -\omega_0 y + (x^2 + u^2 - \mu + \frac{1}{2}(y^2 + v^2) - \frac{1}{50}(y^2 + v^2)^2)v. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Для $\varepsilon = 0$ уравнения для величин $r_1 = |a_1|^2 = x^2 + u^2$ и $r_2 = |a_2|^2 = y^2 + v^2$, которые без труда получаются из (8.13), точно совпадают с (8.12). При достаточно малых ε и величинах μ , заметно меньших, чем μ_0 , установившийся режим динамики модели (8.12), представленный графически на плоскости r_1, r_2 , отвечает области вблизи узла C_2 . При ненулевых величинах ε это предельный цикл такого вида, что при наличии у второго осциллятора заметной амплитуды, у первого амплитуда очень мала. Помимо этого, имеется замкнутая неустойчивая орбита, близкая к C_1 . При постепенном увеличении параметра, оба цикла сближаются и сливаются при некотором $\mu = \mu_c(\varepsilon) \approx \mu_0$, образуя полуустойчивый предельный цикл, а при $\mu > \mu_c(\varepsilon)$ они исчезают. Теперь движение изображающей точки на плоскости r_1, r_2 приблизительно следует замкнутой большой петле, как на рис. 8.10в, посещая раз за разом окрестность начала координат. Как было объяснено в предыдущем разделе, преобразование фазы на каждом новом проходе в этом режиме будет приближенно соответствовать отображению Бернулли $\varphi_{n+1} = 2\varphi_n + \text{const}$.

Согласно проведенным рассуждениям, в точке $\mu = \mu_c$ происходит бифуркация «катастрофа голубого неба», причем та ее разновидность, которая соответствует случаю $m = 2$ (см. раздел 4.8). Таким образом, согласно аргументации Шильникова и Тураева [Shilnikov and Turaev, 1997], она должна сопровождаться рождением гиперболического аттрактора, который в сечении Пуанкаре представляет собой соленоид Смейла–Вильямса.

На рис. 8.11 показаны фазовые траектории в проекции на плоскость. По осям координат отложены амплитуды двух осцилляторов по результатам численного решения уравнений (8.13) при задании параметров $\omega_0 = 2\pi$ и $\varepsilon = 0.5$.

Учитывая конфигурацию аттрактора, в суперкритической области $\mu > \mu_c$ подходящим выбором для секущей Пуанкаре является гиперповерхность в четырехмерном фазовом пространстве, заданная уравнением $|a_2| = c$, например, при $c = 2.5$, при условии, что учитываются только пересечения траекториями в направлении увеличения $|a_2|$ (см. горизонтальный сегмент S и стрелку на диаграмме (б) рисунка 8.11).

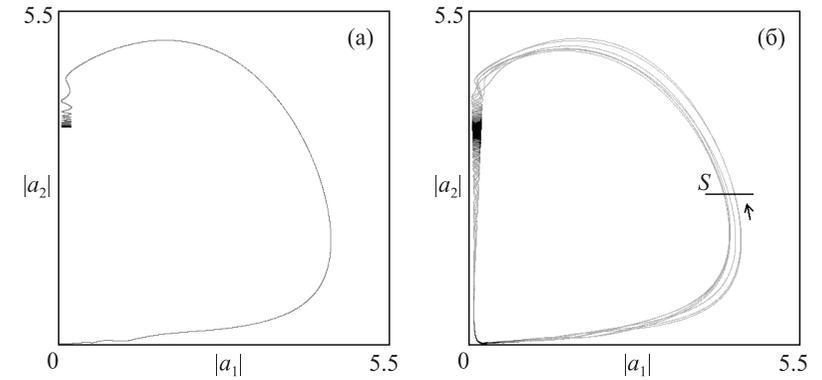


Рис. 8.11. Траектория, отвечающая переходному процессу (серый цвет) и предельный цикл (черный цвет) — до бифуркации, при $\mu = 3.14$ (а), и портрет аттрактора после бифуркации, при $\mu = 3.1442$ (б) в проекции на плоскость амплитуд двух осцилляторов $|a_1|$ и $|a_2|$. Остальные параметры $\omega_0 = 2\pi$ и $\varepsilon = 0.5$

Как отмечается в работе Шильникова и Тураева [Shilnikov and Turaev, 1997], вблизи бифуркации характерное время возврата на секущую Пуанкаре зависит от управляющего параметра обратно пропорционально квадратному корню из надкритичности, т. е. $T(\mu) \sim 1/\sqrt{\mu - \mu_c}$. Полученные в численных расчетах результаты хорошо согласуются с этим соотношением. В этом можно убедиться, представив на графике обратный квадрат усредненного времени возврата от параметра μ , как показано на рис. 8.12. Порог бифуркации отвечает пересечению кривой с осью абсцисс, и локально зависимость выглядит как линейная (пунктир). Экстраполируя, можно определить точку бифуркации с достаточно высокой точностью $\mu_c \approx 3.144196$.

На рис. 8.13 показаны диаграммы трансформации фаз при последовательных проходах секущей Пуанкаре S при динамике на аттракторе. Фаза Φ_n

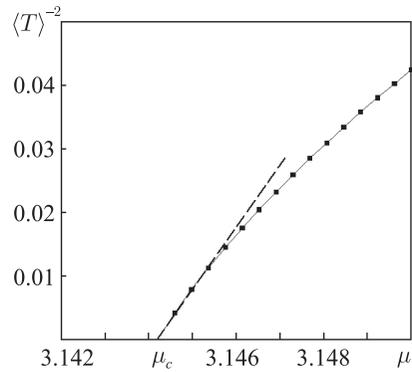


Рис. 8.12. Обратный квадрат усредненного времени возврата на секущую Пуанкаре в зависимости от параметра μ , метка μ_c отвечает бифуркации «катастрофа голубого неба». Остальные параметры $\omega_0 = 2\pi$ и $\varepsilon = 0.5$

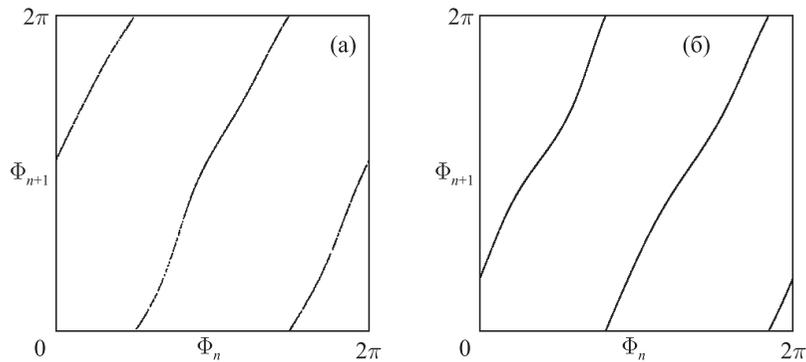


Рис. 8.13. Итерационные диаграммы для фаз первого осциллятора, отвечающих прохождению секущей Пуанкаре S . Значения параметров $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.5$, $\mu = 3.1442$ (а) и $\mu = 3.15$ (б)

относится к первому осциллятору и моменту времени $t = t_n$, отвечающему n -му пересечению орбитой гиперповерхности S в правильном направлении, и определена как $\Phi_n = \arg(x(t_n) + iu(t_n))$. Заметим, что в топологическом смысле эволюция от шага к шагу соответствует отображению Бернулли, и такая природа отображения сохраняется в широком диапазоне изменения параметра μ за порогом бифуркации. Это подтверждает, что

здесь имеет место именно случай $m = 2$, ассоциирующийся с возникновением структурно устойчивого гиперболического аттрактора, соленоида Смейла–Вильямса в отображении Пуанкаре. На рис. 8.14 показан аттрактор в сечении Пуанкаре в проекции на фазовую плоскость первого осциллятора. Хотя объект выглядит просто как замкнутая кривая, увеличение разрешения выявляет наличие у него поперечной канторовой структуры.

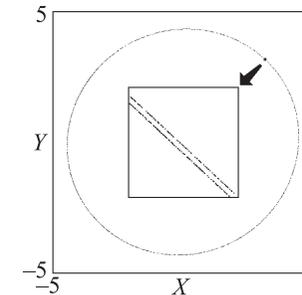


Рис. 8.14. Аттрактор системы (8.13) при $\mu = 3.15$ в сечении Пуанкаре, представленный в проекции на фазовую плоскость первого осциллятора. Поперечная канторова структура становится видна при увеличении, что показано на вставке

На рис. 8.15 показан график показателей Ляпунова в зависимости от параметра в широком интервале, включающем бифуркацию «катастрофы голубого неба», которая имеет место в точке $\mu = \mu_c$ (панель (а)). В левой части графика наибольший показатель Ляпунова нулевой, а три остальных отрицательные. В качестве аттрактора здесь выступает устойчивый предельный цикл, аналогичный тому, что показан на рис. 8.11а. В момент бифуркации два самых больших показателя обращаются в ноль, тогда как два других остаются отрицательными. После бифуркации имеется один положительный показатель, увеличивающийся с ростом параметра μ . Второй показатель остается нулевым, а третий и четвертый отрицательные, причем по абсолютной величине они постепенно уменьшаются. В этой области аттрактор сохраняет свой тип, оставаясь соленоидом Смейла–Вильямса.

В частности, при $\mu = 3.15$ показатели Ляпунова таковы:

$$\lambda_1 = 0.0434, \lambda_2 = 0.0000, \lambda_3 = -8.75, \lambda_4 = -8.85. \quad (8.14)$$

Второй показатель нулевой (с точностью до вычислительной погрешности) и должен интерпретироваться как связанный с нейтральным инфинитезимальным возмущением вдоль траектории на аттракторе. Оценка

размерности аттрактора по формуле Каплана–Йорке (приложение D) дает $D_L = 2 + \lambda_1 / |\lambda_3| \approx 2.005$.

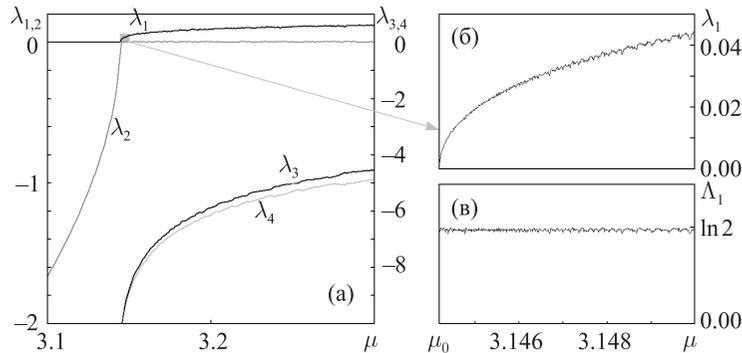


Рис. 8.15. Показатели Ляпунова системы (8.13) в зависимости от параметра μ (а), увеличенный фрагмент графика для наибольшего показателя у порога бифуркации в закритической области (б) и график показателя Ляпунова для отображения Пуанкаре (в). Как можно видеть, показатель Ляпунова для отображения Пуанкаре остается близким к постоянной величине $\ln 2$, соответствующей отображению Бернулли

Рост положительного показателя Ляпунова при увеличении параметра в области $\mu > \mu_c$ обусловлен уменьшением характерного временного масштаба при удалении от точки бифуркации (см. панель (б)).

В закритической области можно определить три показателя Ляпунова для отображения Пуанкаре $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$. Нулевой показатель исключается, а остальные находятся в очевидном соотношении с показателями, определенными для системы дифференциальных уравнений, а именно $\Lambda_1 = \lambda_1 \langle T \rangle$, $\Lambda_2 = \lambda_3 \langle T \rangle$, $\Lambda_3 = \lambda_4 \langle T \rangle$. Здесь $\langle T \rangle$ — время возврата на секущую Пуанкаре, усредненное по траекториям на аттракторе. Заметим, что положительный показатель для отображения Пуанкаре остается приблизительно постоянным в широком интервале изменения параметра (с точностью до флуктуаций, обусловленных погрешностями вычислений). При этом он близок к величине $\ln 2$, что соответствует отображению Бернулли (см. панель (в) на рис. 8.15).

Представленная модель естественным образом дополняет коллекцию известных примеров систем с катастрофой голубого неба [Gavrilov and Shilnikov, 1999; Shilnikov and Symbalyuk, 2005; Glyzin et al., 2008]. Эта

коллекция до последнего времени ограничивалась ситуациями, вовлекающими только регулярные аттракторы — предельные циклы. Предложенная здесь система и другие подобные примеры могут представлять интерес для понимания разнообразных типов динамического поведения, в том числе в нейродинамике. В самом деле, некоторые из описанных в литературе систем с катастрофой голубого неба относятся именно к этой дисциплине [Shilnikov and Symbalyuk, 2005; Shilnikov and Kolomiets, 2008], равно как и гипотетический пример однородно гиперболического аттрактора типа Плькина, обсуждавшийся в работе [Belykh et al., 2005].

8.4. Минимальная модель с аттрактором Смейла–Вильямса

Отправляясь от результатов раздела 8.2, можно попытаться отыскать более простой вариант сходных по структуре дифференциальных уравнений, реализующих надстройку аттрактора Смейла–Вильямса.

Если взять за основу модель (8.8), но не стремиться к ее физической интерпретации как построенной из связанных осцилляторов, то в уравнениях можно исключить члены, содержащие параметр частоты ω_0 . Далее, пересмотрев вид членов, определяющих связь двух подсистем, оказывается возможным устранить также и члены, содержащие четвертую степень амплитуды. В модели (8.8) они отвечали за ограничение колебаний первого парциального осциллятора; в модифицированной системе эту функцию будут выполнять по совместительству нелинейные члены, отвечающие за взаимодействие подсистем.

Дифференциальные уравнения в новом варианте запишем для комплексных переменных a и b следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= (1 + |a|^2 - |b|^2)a + \varepsilon b, \\ \dot{b} &= (|a|^2 - 1)b + a^2 \end{aligned} \quad (8.15)$$

или, вводя вещественные переменные так, что $a = x + iu$, $b = y + iv$, в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1 + x^2 + u^2 - y^2 - v^2)x + \varepsilon y, \\ \dot{u} &= (1 + x^2 + u^2 - y^2 - v^2)u + \varepsilon v, \\ \dot{y} &= (x^2 + u^2 - 1)y + x^2 - u^2, \\ \dot{v} &= (x^2 + u^2 - 1)v + 2xu. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Уравнения (8.16) с очевидностью проще, чем (8.8), содержат меньше нелинейных членов, и их степень ниже, что является несомненным достоинством с точки зрения возможной реализации системы, например, в виде электронного устройства. Динамика предлагаемой модели очень похожа на ту, что имеет место в системе (8.8), с той разницей, что удвоение циклической переменной осуществляется при передаче возбуждения от первой подсистемы ко второй, а не наоборот. Численное решение уравнений показывает, что в достаточно широком интервале по параметру ε модель характеризуется наличием аттрактора типа Смейла–Вильямса в сечении Пуанкаре.

На рис. 8.16 приведены графики зависимости от времени динамических переменных, полученные при численном решении уравнений (8.16) для $\varepsilon = 0.02$. Можно видеть, что стадии активности одной и другой подсистем перемежаются со стадиями подавления. Согласно вычислениям, средний временной период повторения стадий для данного режима равен $\langle T \rangle = 5.811$.

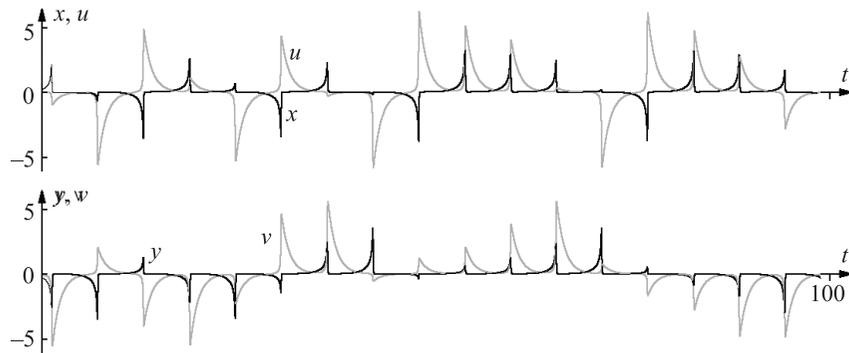


Рис. 8.16. Зависимости от времени динамических переменных, полученные при численном решении уравнений (8.16) для $\varepsilon = 0.02$

На рис. 8.17 показан портрет аттрактора в проекции на плоскость амплитудных переменных подсистем $(|a|^2, |b|^2) = (x^2 + u^2, y^2 + v^2)$. Возбуждение первой подсистемы соответствует уходу траектории от начала координат вправо, возбуждение второй — уходу вверх с последующим подавлением сначала первой, а затем второй подсистемы и новым возвращением в окрестность начала координат.

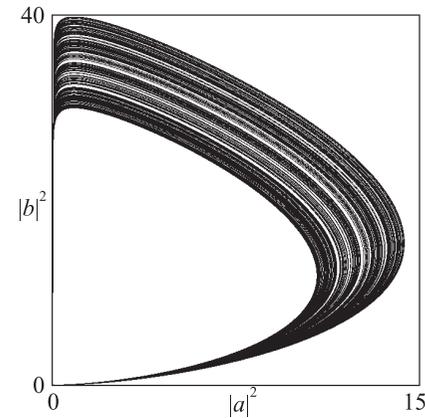


Рис. 8.17. Портрет аттрактора системы (8.16) при $\varepsilon = 0.02$ в проекции на плоскость амплитудных переменных первой и второй подсистем

Для задания секущей Пуанкаре используем соотношение $|a|^2 = c_0^2$, $c_0 = 0.8$, учитывая проходы траекторий в направлении уменьшения амплитуды $|a|$.

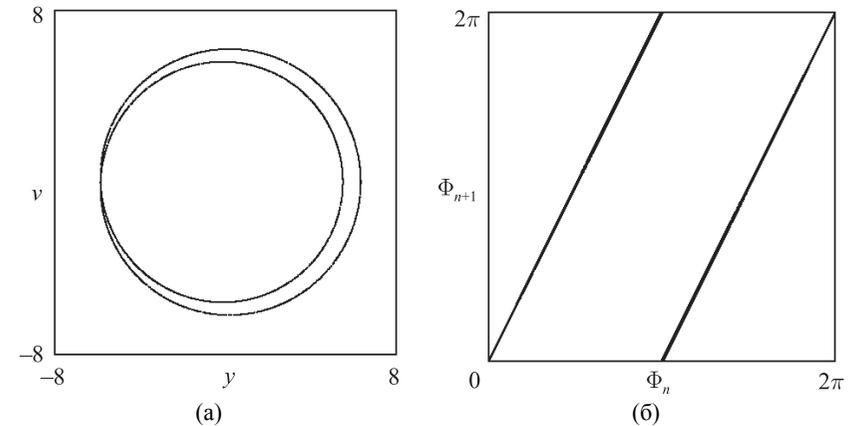


Рис. 8.18. Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость переменных второй подсистемы (а) и диаграмма, иллюстрирующая преобразование циклической переменной — аргумента комплексной амплитуды второй подсистемы при последовательных проходах секущей Пуанкаре (б) для системы (8.16) при $\varepsilon = 0.02$

На рис. 8.18 показаны портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость переменных второй подсистемы и диаграмма, иллюстри-

рующая преобразование циклической переменной — аргумента комплексной амплитуды второй подсистемы при последовательных проходах секущей Пуанкаре. Как можно видеть, оно с замечательной точностью соответствует отображению Бернулли.

Показатели Ляпунова, рассчитанные для данного аттрактора, составляют

$$\lambda_1 = 0.11928, \lambda_2 = 0.00000, \lambda_3 = -2.0449, \lambda_4 = -2.7150. \quad (8.17)$$

Учитывая, что средний период прохода секущей Пуанкаре $\langle T \rangle = 5.811$, для старшего показателя отображения Пуанкаре получаем $\Lambda_1 = \lambda_1 \langle T \rangle = 0.6931$, что прекрасно согласуется с ожидаемым значением $\ln 2 = 0.69314\dots$. Второй показатель нулевой, с точностью до погрешности вычислений, и должен интерпретироваться как связанный с вектором возмущения типа сдвига вдоль опорной траектории. Остальные показатели отрицательные. Размерность Каплана–Йорке $D_{KY} \approx 1.06$.

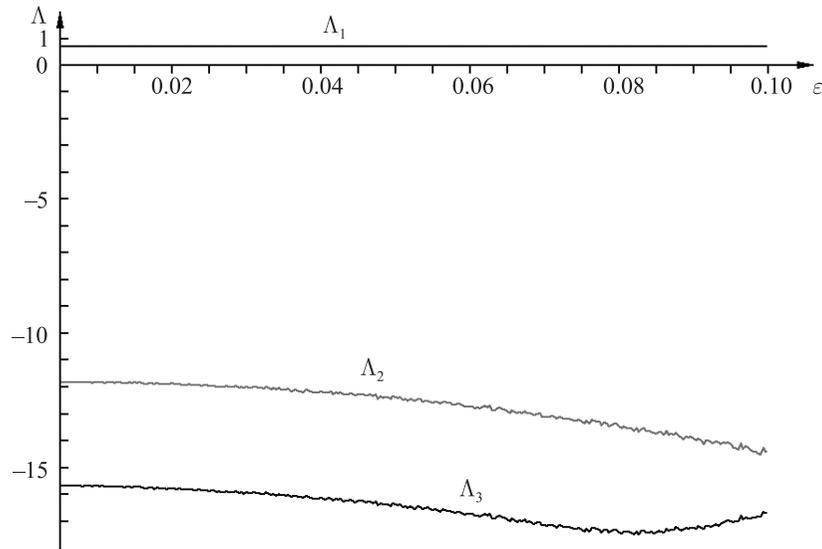


Рис. 8.19. Показатели Ляпунова для отображения Пуанкаре системы (8.16) в зависимости от параметра ε

На рис. 8.19 показан график зависимости показателей Ляпунова, рассчитанных для отображения Пуанкаре, от параметра ε . Старший показате-

ль остается практически постоянным и близким к величине $\ln 2$ в широком диапазоне по параметру.

Представленные численные результаты аналогичны тем, которые получены для других систем с аттрактором типа Смейла–Вильямса в отображении Пуанкаре, что говорит о наличии такого аттрактора также и у предложенной простой автономной системы (8.16).

Глава 9

Параметрические генераторы гиперболического хаоса

Передача возбуждения между попеременно активными осцилляторами с преобразованием фазы, описываемым хаотическим отображением, как в предыдущих главах, можно рассматривать как некоторый общий принцип построения систем с аттракторами типа Смейла–Вильямса. Подходящим и удобным для применения этого принципа, несомненно, является класс параметрических колебательных систем [Мандельштам, 1955; Люиселл, 1963; Ахманов и Хохлов, 1966; Рабинович и Трубецков, 1984; Damgov, 2004]. Этот термин относится к системам, в которых возбуждение осцилляторов обусловлено периодическим изменением какого-либо параметра. Параметрические колебания встречаются в механике, электронике, акустике, нелинейной оптике и других дисциплинах. Общеизвестный пример относится к раскачиванию на качелях, когда человек постепенно увеличивает амплитуду колебаний, изменяя положение тела, что соответствует периодической вариации эффективной длины эквивалентного маятника (рис. 9.1а, б). В электрическом колебательном контуре амплитуду колебаний можно повышать шаг за шагом, периодически изменяя емкость конденсатора. Для этого нужно раздвигать пластины конденсатора в моменты времени, отвечающие максимальному запасенному заряду, и уменьшать до прежнего значения в моменты максимального тока в индуктивности, когда заряд конденсатора близок к нулю (рис. 9.1в). Ясно, что механическая работа против силы притяжения заряженных пластин конденсатора друг к другу в ходе процесса конвертируется в энергию электромагнитных колебаний контура, так что их амплитуда постепенно растет. Основная часть данной главы начинается с рассмотрения *трехчастотного*, или *двухконтурного*, *параметрического генератора* [Люиселл, 1963], в котором возбуждение двух связанных осцилляторов с частотами ω_1 и ω_2 имеет место благодаря периодическому изменению коэффициента связи этих осцилляторов на частоте накачки $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Насыщение колебаний можно обеспечить, введя в схему нелинейное затухание, что обеспечивает установле-

ние стационарного регулярного режима периодической генерации. После этого мы обращаемся к рассмотрению устройств, в которых осцилляторы с параметрическим возбуждением претерпевают за некоторый период времени преобразование фаз, отвечающее растягивающему отображению окружности, при сжатии фазового объема в пространстве состояний по остальным направлениям; это системы с аттракторами типа Смейла–Вильямса в отображении Пуанкаре. В системах, которые здесь рассматриваются, манипуляция фазами колебаний осуществляется в ситуации, когда передача колебательного возбуждения от одного осциллятора к другому сопровождается обменом запасенной энергией. В этом состоит существенное отличие от систем, обсуждавшихся в предыдущих главах, где определяющее значение в принятых за основу автоколебательных элементах имел не обмен энергией, а восполнение потерь в каждом из осцилляторов за счет внешнего неколебательного источника энергии.

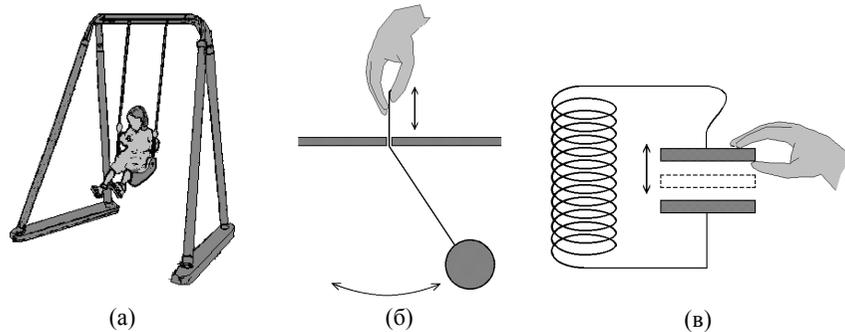


Рис. 9.1. Простые примеры параметрического возбуждения: (а) ребенок увеличивает амплитуду колебаний на качелях, изменяя положение тела, что эквивалентно периодическому изменению эффективной длины маятника (б); в колебательном контуре электромагнитные колебания нарастают по амплитуде благодаря периодическому изменению емкости конденсатора (в)

9.1. Параметрическое возбуждение связанных осцилляторов. Трехчастотный параметрический генератор

Рассмотрим систему из двух осцилляторов с частотами ω_1 и ω_2 (рис. 9.2), взаимодействующих через линейный элемент, характеризующийся коэффициентом связи, периодически изменяющимся во времени с частотой ω_3 ,

причем частоты подчиняются соотношению

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2. \quad (9.1)$$

Величины ω_1 и ω_2 называют частотой сигнала и холостой частотой, а ω_3 — это частота накачки. Соотношение (9.1) представляет собой *условие параметрического резонанса*.

Чтобы вывести дифференциальные уравнения для систем той или иной физической природы, используют соотношения, специфические для каждой конкретной дисциплины, скажем уравнения Ньютона в механике, уравнения Кирхгофа для электрических цепей и т. д. Альтернативой может служить обращение к формализму, разработанному для общего описания консервативной динамики, такому как метод Лагранжа или Гамильтона. При этом уравнения получаются элегантно и непосредственно в правильной и общей форме. Чтобы применить их к конкретным параметрическим системам, нужно только установить физический смысл использованных динамических переменных и параметров.

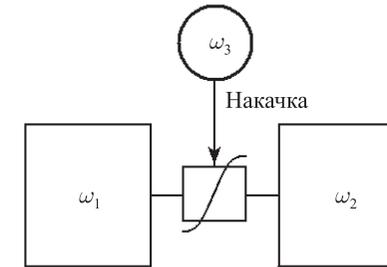


Рис. 9.2. Блок-схема двухконтурного параметрического генератора. Пометки ω_1 и ω_2 обозначают осцилляторы с соответствующей собственной частотой, квадратик с волнообразной чертой — элемент связи, не вносящий потерь энергии, с параметром, осциллирующим с частотой накачки ω_3

В нашем случае функция Лагранжа составлена из членов $\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\omega_1^2 x^2$ и $\frac{1}{2}\dot{y}^2 - \frac{1}{2}\omega_2^2 y^2$, имеющих вид разности кинетической и потенциальной энергии для двух парциальных осцилляторов, выраженной через обобщенные координаты и скорости, и члена, отвечающего за взаимодействие осцилляторов, содержащего произведение их обобщенных координат и сигнала накачки на частоте ω_3 :

$$L(x, \dot{x}, y, \dot{y}, t) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega_1^2 x^2 - \omega_2^2 y^2) + \kappa xy \sin \omega_3 t. \quad (9.2)$$

Здесь параметр κ характеризует величину связи и интенсивность накачки. Наличие явной зависимости функции Лагранжа от времени показывает, что мы имеем дело с неавтономной системой.

Дифференциальные уравнения, описывающие динамику системы (уравнения Эйлера–Лагранжа), получаются стандартным образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Используя функцию Лагранжа (9.2), отсюда получаем линейные уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_1^2 x &= \kappa y \sin \omega_3 t, \\ \ddot{y} + \omega_2^2 y &= \kappa x \sin \omega_3 t. \end{aligned} \quad (9.4)$$

При наличии параметрической неустойчивости амплитуда колебаний в этой системе будет нарастать неограниченно. Чтобы этого избежать, нужно усовершенствовать модель, введя некоторый фактор, обеспечивающий насыщение. Простейший и физически оправданный способ состоит в том, чтобы добавить нелинейное затухание; это имеет резон еще и потому, что нам желательно работать с диссипативной системой, чтобы в ее пространстве состояний мог присутствовать аттрактор.

Для учета диссипации формализм Лагранжа дополняют путем введения в рассмотрение диссипативной функции Релея [Гантмахер, 1966; Marsden and Rañiu, 1999], которую применительно к нашему случаю зададим в виде

$$R(\dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\alpha_1 \dot{x}^2 + \alpha_2 \dot{y}^2) + \frac{1}{4}(\beta_1 \dot{x}^4 + \beta_2 \dot{y}^4). \quad (9.5)$$

В этой записи параметры $\alpha_{1,2}$ и $\beta_{1,2}$ будут отвечать за линейную и нелинейную диссипацию соответственно. Теперь вместо уравнений (9.3) мы должны использовать систему

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} &= -\frac{\partial R}{\partial \dot{y}}, \end{aligned} \quad (9.6)$$

что дает

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_1^2 x &= \kappa y \sin \omega_3 t - \alpha_1 \dot{x} - \beta_1 \dot{x}^3, \\ \ddot{y} + \omega_2^2 y &= \kappa x \sin \omega_3 t - \alpha_2 \dot{y} - \beta_2 \dot{y}^3. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Для иллюстрации динамики этой модели на рис. 9.3 приведены результаты численного решения уравнений (9.7). При этом значения частот заданы равными $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, $\omega_3 = 6\pi$, т. е. за единицу времени принят собственный период колебаний первого осциллятора, и условие параметрического резонанса с очевидностью выполнено. Остальные параметры таковы: $\kappa = 35$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.6$, $\beta_1 = \beta_2 = 0.1$. На рисунке представлены величины x , y и сигнал накачки $\kappa \sin \omega_3 t$ в зависимости от времени. Можно видеть насыщение колебаний в итоге переходного процесса, заканчивающегося установлением стационарного режима параметрической генерации с определенными постоянными амплитудами сигнального и холостого осцилляторов. При описании с помощью стробоскопического отображения Пуанкаре аттрактором служит устойчивая неподвижная точка. Кроме нее, имеется неустойчивая неподвижная точка в начале координат: уход орбит от этой точки с приходом на аттрактор соответствует переходному процессу установления колебаний.

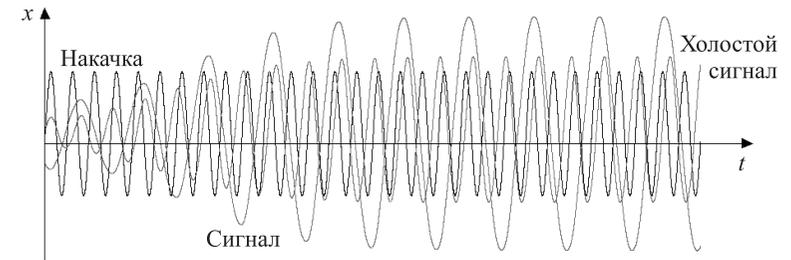


Рис. 9.3. Графики зависимости от времени динамических переменных и сигнала накачки $\kappa \sin \omega_3 t$ для модели (9.7) при $\kappa = 35$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.6$, $\beta_1 = \beta_2 = 0.1$, $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, $\omega_3 = 6\pi$

Полезным подходом к описанию динамики является метод медленных комплексных амплитуд, аналогичный упоминавшемуся в главе 7. Для параметрических систем этот метод широко используется в литературе и приводит к специальной, легко узнаваемой, форме уравнений, которая является общей для параметрических систем различной физической природы. Здесь мы объясняем содержание этого метода в применении к системе (9.7).

Положим

$$x = ae^{i\omega_1 t} + a^* e^{-i\omega_1 t}, \quad y = be^{i\omega_2 t} + b^* e^{-i\omega_2 t}, \quad (9.8)$$

где $a(t) = a' + ia''$ и $b(t) = b' + ib''$ — комплексные функции времени, подчиненные дополнительным условиям

$$\dot{a}e^{i\omega_1 t} + \dot{a}^* e^{-i\omega_1 t} = 0, \quad \dot{b}e^{i\omega_2 t} + \dot{b}^* e^{-i\omega_2 t} = 0. \quad (9.9)$$

Подставим эти выражения в уравнения (9.7), умножим первое из них на фактор $e^{-i\omega_1 t}$, а второе — на фактор $e^{-i\omega_2 t}$ и, учитывая принятое соотношение частот (условие параметрического резонанса), после усреднения за период быстрых колебаний получим

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\kappa}{4\omega_1} b^* - \frac{1}{2}\alpha_1 a - \frac{3}{2}\omega_1^2 \beta_1 a |a|^2, \\ \dot{b} &= -\frac{\kappa}{4\omega_2} a^* - \frac{1}{2}\alpha_2 b - \frac{3}{2}\omega_2^2 \beta_2 b |b|^2. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Для демонстрации параметрической неустойчивости рассмотрим эти уравнения для случая равных коэффициентов линейной диссипации ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$) и в отсутствие нелинейной диссипации ($\beta_{1,2} = 0$). В этом случае уравнения решаются аналитически, что дает

$$\begin{aligned} a &= (C_+ e^{\kappa t/4\sqrt{\omega_1 \omega_2}} + C_- e^{-\kappa t/4\sqrt{\omega_1 \omega_2}}) e^{-\alpha t}, \\ b &= -\sqrt{\omega_2 / \omega_1} (C_+^* e^{\kappa t/4\sqrt{\omega_1 \omega_2}} + C_-^* e^{-\kappa t/4\sqrt{\omega_1 \omega_2}}) e^{-\alpha t}, \end{aligned}$$

где C_+ и C_- — комплексные постоянные, которые определяются из начальных условий. Имеется определенный порог неустойчивости: в области $\kappa > 4\alpha\sqrt{\omega_1 \omega_2}$ реализуется неограниченный рост одновременно обеих амплитуд $|a|$ и $|b|$. Насыщение и стабилизация неустойчивости будут иметь место только при учете нелинейных диссипативных членов в уравнениях.

9.2. Гиперболический хаос в параметрическом генераторе с модулированной добротностью и модуляцией накачки

Обратимся к системе, подобной рассмотренной в предыдущем разделе, но с периодической модуляцией параметров — амплитуды накачки и параметров диссипации обоих осцилляторов [Кузнецов и др., 2010]. Система состоит из двух осцилляторов с частотами ω_1 и $\omega_2 = 2\omega_1$, а параметрическое возбуждение обеспечивается импульсами накачки на частоте $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = 3\omega_1$, следующими друг за другом с периодом $T \gg 1/\omega_3$.

С тем же периодом T модулируются добротности осцилляторов, а также коэффициент нелинейной (квадратичной) связи между ними. Для простоты и определенности в конструируемой модели будем рассматривать модуляцию по «прямоугольному» закону как мгновенное переключение параметров от одной величины к другой в определенные моменты времени. Иными словами, эволюцию во времени полагаем состоящей из четырех периодически повторяющихся стадий равной продолжительности, составляющей целое число высокочастотных периодов сигнала накачки, т. е. $T/4 = 2\pi N / \omega_3$.

9.2.1. Динамические уравнения

Пусть x и y — обобщенные координаты двух осцилляторов с частотами ω_1 и $\omega_2 = 2\omega_1$, а частота накачки $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = 3\omega_1$.

Обратимся к описанию динамики системы, основываясь на функциях Лагранжа и Релея.

На первой стадии имеет место параметрическое возбуждение вследствие осцилляций параметра связи на частоте накачки и присутствует нелинейная диссипация, обеспечивающая насыщение параметрической неустойчивости; при этом функция Лагранжа $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega_1^2 x^2 - \omega_2^2 y^2) + \kappa xy \sin \omega_3 t$, а функция Релея $R = \frac{1}{4}(\beta_1 \dot{x}^4 + \beta_2 \dot{y}^4)$.

На второй стадии взаимодействие осцилляторов выключается, и включается линейное затухание второго осциллятора, что соответствует $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega_1^2 x^2 - \omega_2^2 y^2)$ и $R = \frac{1}{2}\alpha_2 \dot{y}^2$.

На третьей стадии диссипация выключена, а осцилляторы связаны через квадратичный нелинейный элемент. Здесь мы учитываем член вида $x^2 y$ в функции Лагранжа и полагаем $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega_1^2 x^2 - \omega_2^2 y^2) + \varepsilon x^2 y$ и $R = 0$.

На четвертой стадии связь между осцилляторами отсутствует и имеется линейное затухание первого осциллятора, что соответствует $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega_1^2 x^2 - \omega_2^2 y^2)$ и $R = \frac{1}{2}\alpha_1 \dot{x}^2$.

Продолжительность всех стадий принимаем одинаковой и считаем, что она содержит целое число высокочастотных осцилляций сигнала накачки, т. е. $T/4 = 2\pi N / \omega_3$, где N — целое число. Уравнения динамики для каждой из четырех стадий, согласно (9.6), выглядят следующим образом.

I. Стадия параметрического возбуждения:

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = \kappa y \sin \omega_3 t - \beta_1 \dot{x}^3, \quad \ddot{y} + \omega_2^2 y = \kappa x \sin \omega_3 t - \beta_2 \dot{y}^3. \quad (9.11)$$

II. Стадия затухания второго осциллятора:

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \omega_2^2 y = -\alpha_2 \dot{y}. \quad (9.12)$$

III. Стадия взаимодействия через квадратичную нелинейность:

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = 2\varepsilon xy, \quad \ddot{y} + \omega_2^2 y = \varepsilon x^2. \quad (9.13)$$

IV. Стадия затухания первого осциллятора:

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = -\alpha_1 \dot{x}, \quad \ddot{y} + \omega_2^2 y = 0. \quad (9.14)$$

Динамику можно также описать единой неавтономной системой двух дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_1^2 x &= f_1(t)(\kappa y \sin \omega_3 t - \beta_1 \dot{x}^3) - \alpha_1 f_4(t) \dot{x} + 2\varepsilon f_3(t) xy, \\ \ddot{y} + \omega_2^2 y &= f_1(t)(\kappa x \sin \omega_3 t - \beta_2 \dot{y}^3) - \alpha_2 f_2(t) \dot{y} + \varepsilon f_3(t) x^2, \end{aligned} \quad (9.15)$$

где $f_k(t) = 1$, если $k - 1 \leq 4\{t/T\} < k$, и 0 — в противном случае (фигурными скобками обозначена дробная часть числа). Параметр κ определяет интенсивность накачки на частоте $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = 3\omega_1$, а ε — нелинейную (квадратичную) связь между осцилляторами. Параметры $\alpha_{1,2}$ отвечают за линейную, а $\beta_{1,2}$ — за нелинейную диссипацию соответственно в первом и втором осцилляторах.

Мгновенное состояние системы в фиксированный момент времени t задается четырехмерным вектором $\mathbf{x} = (x, u, y, v)$, где $u = \dot{x}/\omega_1, v = \dot{y}/\omega_2$ — нормированные обобщенные скорости осцилляторов. Трансформация этого вектора за полный период изменения коэффициентов в уравнениях, т. е. за время от $t = nT$ до $t = (n+1)T$, отвечает *стробоскопическому отображению*, или *отображению Пуанкаре*,

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n). \quad (9.16)$$

Это отображение можно реализовать в виде компьютерной программы, обеспечивающей решение дифференциальных уравнений (9.15) на периоде T конечно-разностным методом. (Естественно выбрать шаг интегрирования так, чтобы каждая стадия отвечала целому числу шагов.)

В ситуации, когда период модуляции параметров намного больше периода высокочастотных колебаний, $N \gg 1$, можно переформулировать задачу, воспользовавшись методом комплексных амплитуд такого же типа, как рассмотренный в разделе 7.1. Для этого полагаем

$$x = ae^{i\omega_1 t} + a^* e^{-i\omega_1 t}, \quad \dot{x} = i\omega_1 a e^{i\omega_1 t} - i\omega_1 a^* e^{-i\omega_1 t}, \quad (9.17)$$

и

$$y = be^{i\omega_2 t} + b^* e^{-i\omega_2 t}, \quad \dot{y} = i\omega_2 b e^{i\omega_2 t} - i\omega_2 b^* e^{-i\omega_2 t}. \quad (9.18)$$

После подстановки этих выражений в соотношения (9.11)–(9.14), умножения уравнений на экспоненту $e^{-i\omega_1 t}$ (в уравнениях для a) и на $e^{-i\omega_2 t}$ (в уравнениях для b) и усреднения по периоду быстрых колебаний, с учетом принятого соотношения частот (9.1), получаем усредненные уравнения для медленно меняющихся комплексных амплитуд на четырех стадиях динамики в следующем виде

$$\begin{aligned} \text{Стадия I. } \dot{a} &= -(\kappa/4\omega_1)b^* - \frac{3}{2}\beta_1\omega_1^2 |a|^2 a, \quad \dot{b} = -(\kappa/4\omega_2)a^* - \\ & - \frac{3}{2}\beta_2\omega_2^2 |b|^2 b. \end{aligned}$$

$$\text{Стадия II. } \dot{a} = 0, \quad \dot{b} = -\frac{1}{2}\alpha_2 b.$$

$$\text{Стадия III. } \dot{a} = -i\varepsilon\omega_1^{-1}a^*b, \quad \dot{b} = -\frac{1}{2}i\varepsilon\omega_2^{-1}a^2.$$

$$\text{Стадия IV. } \dot{a} = -\frac{1}{2}\alpha_1 a, \quad \dot{b} = 0.$$

Эквивалентным образом это можно представить в виде единой системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -(\kappa/4\omega_1)b^* f_1(t) - \frac{3}{2}f_1(t)\beta_1\omega_1^2 |a|^2 a - if_3(t)\varepsilon\omega_1^{-1}a^*b - \frac{1}{2}f_4(t)\alpha_1 a, \\ \dot{b} &= -(\kappa/4\omega_2)a^* f_1(t) - \frac{3}{2}f_1(t)\beta_2\omega_2^2 |b|^2 b - \frac{1}{2}if_3(t)\varepsilon\omega_2^{-1}a^2 - \frac{1}{2}f_2(t)\alpha_2 b, \end{aligned} \quad (9.19)$$

где вновь $f_k(t) = 1$, если $k - 1 \leq 4\{t/T\} < k$, и 0 — в противном случае.

9.2.2. Качественное объяснение механизма работы

На первой стадии происходит параметрическая раскачка обоих осцилляторов, в результате которой их амплитуды колебаний нарастают, а фазы оказываются в определенном соотношении. Поясним этот момент, приняв пока для простоты, что диссипация отсутствует. Тогда для комплексных амплитуд получаем уравнения $\dot{a} = -\kappa b^*/4\omega_1, \dot{b} = -\kappa a^*/4\omega_2$, а их решение

имеет вид $a = -\frac{\omega_1}{\omega_2} (C_+^* e^{kt/4\sqrt{\omega_1\omega_2}} + C_-^* e^{-kt/4\sqrt{\omega_1\omega_2}})$, $b = C_+ e^{kt/4\sqrt{\omega_1\omega_2}} + C_- e^{-kt/4\sqrt{\omega_1\omega_2}}$.

Постоянные $C_+ = R e^{i\phi}$ и $C_- = R e^{-i\phi}$ определяются условиями в начале стадии. Второй член затухает, и через некоторое время будет доминировать первый член, т. е. $b \sim R \cdot e^{i\phi} e^{kt/4\sqrt{\omega_1\omega_2}}$ и $a \sim -\sqrt{\omega_1/\omega_2} R \cdot e^{-i\phi} e^{kt/4\sqrt{\omega_1\omega_2}}$. Отсюда $y \sim R \cdot e^{kt/4\sqrt{\omega_1\omega_2}} \cos(\omega_2 t + \phi)$ и $x \sim R \cdot \sqrt{\omega_1/\omega_2} e^{kt/4\sqrt{\omega_1\omega_2}} \cos(\omega_1 t - \phi - \pi)$.

Таким образом, возникшие в результате развития параметрической неустойчивости колебания на первой и второй гармониках основной частоты ω_1 имеют фазу, определяемую единственной константой ϕ , которая зависит от начальных условий. При учете нелинейной диссипации амплитуда колебаний будет претерпевать насыщение, но указанное фазовое соотношение сохранится.

На второй стадии осцилляторы не связаны, причем первый совершает незатухающие колебания, а во втором происходит затухание колебаний до некоторого малого уровня, так что при приближенном рассмотрении остаточными колебаниями можно пренебречь. Фаза первого осциллятора остается приблизительно постоянной, так что $a \sim -e^{-i\phi}$ и $x \sim \cos(\omega_1 t - \phi - \pi)$.

На третьей стадии имеет место взаимодействие осцилляторов через квадратичную нелинейность. Второй осциллятор раскачивается воздействием второй гармоники колебаний первого осциллятора резонансным образом в силу выбранного соотношения частот $\omega_2 = 2\omega_1$. Как видно из уравнения $\dot{b} = -\frac{1}{2} i \varepsilon \omega_2^{-1} a^2$, если для первого осциллятора $a \sim -e^{-i\phi}$, то будем иметь $b \sim -ia^2 = -ie^{-2i\phi}$ и $y \sim \cos(\omega_2 t - 2\phi - \pi/2)$. Так что фаза колебаний второго осциллятора оказывается удвоенной по отношению к исходной фазе с точностью до знака и постоянного сдвига.

На четвертой стадии колебания первого осциллятора затухают до пренебрежимо малого уровня, тогда как у второго амплитуда не меняется и фаза остается приблизительно постоянной, т. е. $b \sim -ie^{-2i\phi}$ и $y \sim \cos(\omega_2 t - 2\phi - \pi/2)$. По окончании стадии этим определяются начальные условия для новой стадии параметрического возбуждения.

Новые значения коэффициентов в выражении для решения, определяющего нарастание колебаний на очередной стадии параметрического возбуждения, C_+^{\prime} и C_-^{\prime} , получаются из соотношений $b = C_+^{\prime} + C_-^{\prime} \sim -ie^{-2i\phi}$, $a \sim C_+^{\prime} - C_-^{\prime} \approx 0$. Таким образом, $C_+^{\prime} = R' e^{i\phi'} \sim -ie^{-2i\phi}$, а это значит, что ме-

жду новым и старым значениями ϕ имеется соотношение

$$\phi' = -2\phi - \pi/2. \quad (9.20)$$

Итак, преобразование состояния системы за полный период, содержащий четыре стадии, отвечает растягивающему вдвое отображению для фазы. Оно относится к классу растягивающих отображений окружности, или отображений типа Бернулли, и характеризуется хаотическим поведением. За один шаг абсолютная величина возмущения переменной ϕ умножается на 2, так что присутствует положительный показатель Ляпунова $\Lambda = \ln 2$.

На каждой итерации отображения Пуанкаре, описывающего эволюцию системы за период изменения коэффициентов, в фазовом пространстве имеют место двукратное растяжение по циклической координате, ассоциирующейся с фазовой переменной ϕ , и сжатие по остальным направлениям. Это соответствует, как можно предположить, наличию аттрактора типа Смейла–Вильямса в отображении Пуанкаре.

9.2.3. Численные результаты

Обратимся к результатам численного моделирования динамики системы. Удобно принять $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, $\omega_3 = 6\pi$, что соответствует выбору периода собственных колебаний первого осциллятора за единицу времени. На рис. 9.4 приводятся типичные образцы временных зависимостей в установившемся режиме параметрической генерации, полученные в результате решения уравнений (9.15) на компьютере конечно-разностным методом при задании параметров

$$T = 16, \alpha_1 = \alpha_2 = 1.6, \beta_1 = \beta_2 = 0.02, \varepsilon = 2.2, \kappa = 25. \quad (9.21)$$

Представлен интервал времени, содержащий три периода модуляции накачки, график сигнала которой показан на верхней диаграмме (а). Как можно видеть из диаграммы (б), каждый из двух осцилляторов, составляющих систему, выдает сигнал в виде импульсов, имеющих высокочастотное заполнение и следующих с периодом модуляции накачки. Однако сигнал в целом непериодический: фаза высокочастотного заполнения меняется от импульса к импульсу хаотически. Это хорошо видно из диаграммы (в), где на одном графике наложены несколько последовательных участков реализации.

На рис. 9.5а показана полученная при численном решении уравнений (9.15) итерационная диаграмма для фаз, отвечающих моментам

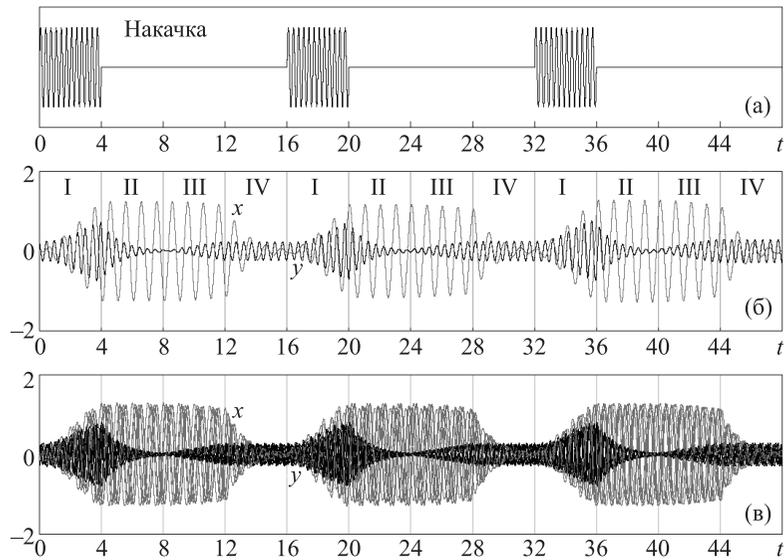


Рис. 9.4. График зависимости от времени сигнала накачки (а) и сигналов, порождаемых составляющими систему осцилляторами, в режиме установившихся колебаний (б). Римскими цифрами обозначены четыре стадии эволюции. Присутствие хаоса проявляется в том, что фаза заполнения в последовательно формирующихся импульсах генерации изменяется нерегулярным образом, как видно при наложении на одном графике нескольких реализаций процесса (в)

выключения импульсов накачки. Значения фазы вычисляются для первого осциллятора по формуле $\phi = \arg(x - iu)$ и приводятся к интервалу $[0, 2\pi)$.

Вид диаграммы для фаз хорошо согласуется с качественным описанием в предыдущем разделе. Действительно, из рисунка хорошо видно, что один полный обход окружности отвечает двум обходам (в обратном направлении) для точки-образа. На рис. 9.5б показан портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на фазовую плоскость первого осциллятора (x, u) , который по виду соответствует ожидаемому соленоиду типа Смейла–Вильямса. На рисунке заметна характерная тонкая поперечная фрактальная структура. Гиперболическая природа этого аттрактора была проверена численно с использованием техники, описанной в главе 13 [Кузнецов и др., 2010].

Чтобы получить свидетельство присутствия хаоса на количественном уровне, обратимся к расчету показателей Ляпунова. Для этого используем

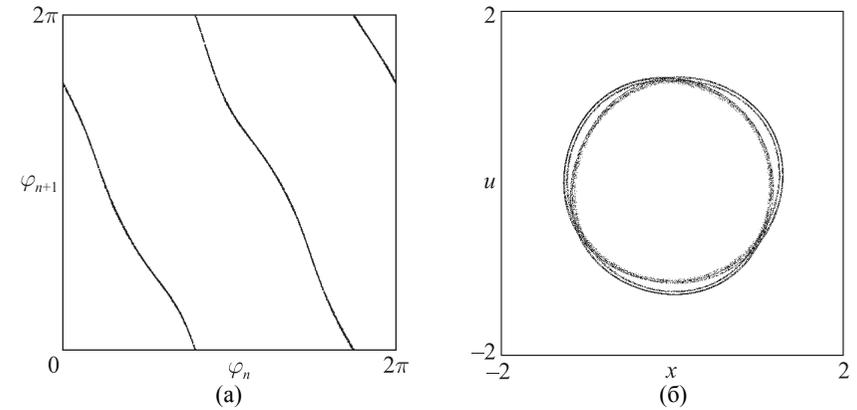


Рис. 9.5. Итерационная диаграмма для фаз колебаний первого осциллятора в конце стадии параметрического возбуждения (а) и портрет аттрактора в сечении Пуанкаре (стробоскопическом сечении), отвечающем тем же моментам времени (б)

стандартную методику, описанную в главе 1, проводя совместное решение уравнений (9.15) и четырех комплектов уравнений в вариациях

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}} + \omega_1^2 \tilde{x} &= f_1(t)(\kappa \tilde{y} \sin \omega_3 t - 3\beta_1 \dot{\tilde{x}}^2 \tilde{x}) - \alpha_1 f_4(t) \dot{\tilde{x}} + 2\epsilon f_3(t)(\tilde{x}y + x\tilde{y}), \\ \ddot{\tilde{y}} + \omega_2^2 \tilde{y} &= f_1(t)(\kappa \tilde{x} \sin \omega_3 t - 3\beta_2 \dot{\tilde{y}}^2 \tilde{y}) - \alpha_2 f_2(t) \dot{\tilde{y}} + 2\epsilon f_3(t)x\tilde{x}. \end{aligned} \quad (9.22)$$

Это сопровождается ортогонализацией Грама–Шмидта и перенормировкой векторов возмущения $\tilde{\mathbf{x}}_i = \{\tilde{x}_i, \dot{\tilde{x}}_i, \tilde{y}_i, \dot{\tilde{y}}_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Показатели Ляпунова определяются как средние скорости роста или уменьшения накапливающихся сумм логарифмов от норм векторов возмущения (после ортогонализации, но перед нормализацией). Полный спектр показателей Ляпунова для аттрактора при значениях параметров (9.21), согласно результатам расчетов, следующий:

$$\lambda_1 \approx 0.0402, \lambda_2 \approx -0.0631, \lambda_3 \approx -0.559, \lambda_4 \approx -0.675. \quad (9.23)$$

Для отображения Пуанкаре показатели Ляпунова выражаются соотношением $\Lambda_k = \lambda_k T$. Отсюда получаем $\Lambda_1 = 0.643$, что удовлетворительно согласуется с оценкой $\Lambda \approx \ln 2 = 0.693\dots$, получаемой при приближенном описании эволюции фазовой переменной одномерным отображением Бернулли.

Наличие положительного показателя Λ_1 служит количественным подтверждением присутствия хаоса. Остальные показатели $\Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$ от-

рицательные. Отсюда следует, что элемент фазового объема претерпевает растяжение по одному направлению и сжатие по трем остальным направлениям в фазовом пространстве отображения Пуанкаре. Размерность аттрактора в отображении Пуанкаре, оцененная по формуле Каплана–Йорке (приложение D), составляет $D = 1 + \Lambda_1 / |\Lambda_2| \approx 1.64$.

9.2.4. Численные результаты в рамках метода медленных комплексных амплитуд

Уравнения, полученные в параграфе 9.2.1 для комплексных амплитуд, можно рассматривать не только как приближение для исходной системы (9.15), но также и как самостоятельный объект исследования. Именно такая формулировка выявляет универсальную природу модели: присутствующие комбинации комплексных амплитуд и сопряженных величин характерны для уравнений, описывающих параметрические системы различной физической природы. Заметим, что количество существенных параметров в этой формулировке меньше, чем в исходных уравнениях, поскольку абсолютное значение основной частоты ω_1 более не фигурирует, кроме как в комбинации с другими параметрами. Уравнения можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\bar{\kappa} b^* f_1(t) - \frac{3}{2} f_1(t) \bar{\beta}_1 |a|^2 a - i f_3(t) \bar{\varepsilon} a^* b - \frac{1}{2} f_4(t) \alpha_1 a, \\ \dot{b} &= -\frac{1}{2} \bar{\kappa} a^* f_1(t) - \frac{3}{2} f_1(t) \bar{\beta}_2 |b|^2 b - \frac{1}{4} i f_3(t) \bar{\varepsilon} a^2 - \frac{1}{2} f_2(t) \alpha_2 b, \end{aligned} \quad (9.24)$$

где $\bar{\kappa} = \kappa / 4\omega_1$, $\bar{\beta}_{1,2} = \beta_{1,2}\omega_{1,2}^2$, $\bar{\varepsilon} = \varepsilon / \omega_1$. Параметры выберем так, чтобы они соответствовали режиму, обсуждавшемуся в предыдущем разделе, а именно:

$$T = 16, \alpha_1 = \alpha_2 = 1.6, \beta_1 = 0.7896, \beta_2 = 3.1583, \varepsilon = 0.3501, \kappa = 0.9947. \quad (9.25)$$

На рис. 9.6 приводятся временные зависимости для амплитуд и фаз комплексных переменных a и b , полученные путем численного решения уравнений (9.24). Как можно видеть, ход зависимостей амплитуд от времени соответствует огибающей для графиков колебаний двух осцилляторов на рис. 9.4. Зависимость фаз от времени носит нерегулярный характер (панель (б)). Как можно убедиться, фаза трансформируется за период повторения стадий в хорошем соответствии с отображением типа Бернулли. Это видно из диаграммы, приведенной на рис. 9.7а, которую следует сравнить с рис. 9.5а. Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре представлен на рис. 9.7б и демонстрирует очевидное соответствие с рис. 9.5б.

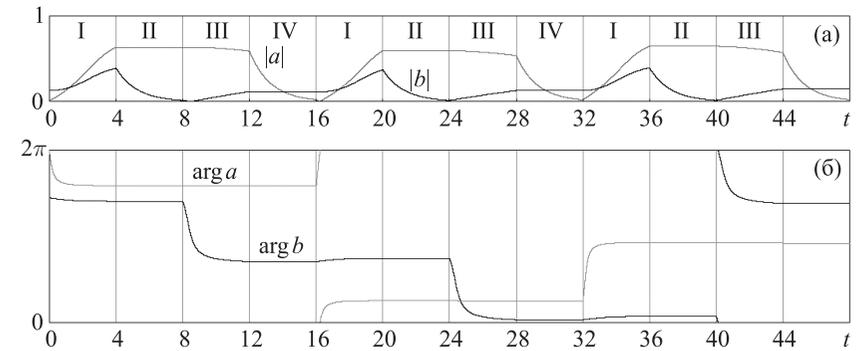


Рис. 9.6. Графики зависимости от времени амплитуд (а) и фаз (б) комплексных переменных для двух составляющих систему осцилляторов, полученные при численном решении уравнений (9.24). Римскими цифрами обозначены четыре стадии эволюции

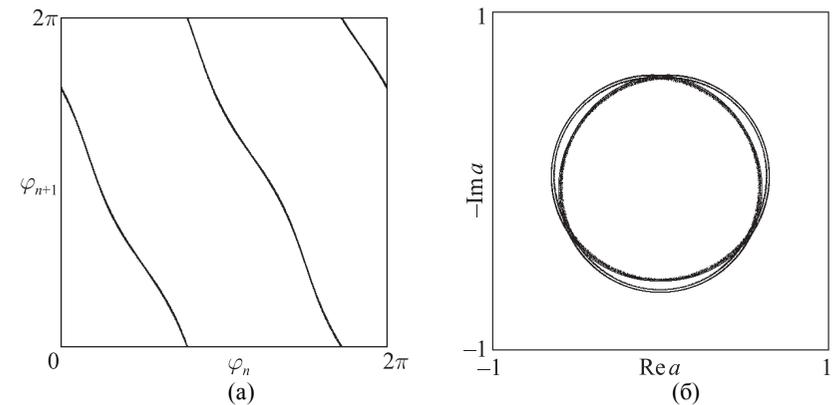


Рис. 9.7. Итерационная диаграмма для фаз колебаний первого осциллятора в конце стадии параметрического возбуждения (а) и портрет аттрактора в сечении Пуанкаре (б), полученные путем численного решения уравнений для комплексных амплитуд (9.24)

Расчет показателей Ляпунова для рассматриваемого режима по методу Бенеттина на основе решения уравнений для медленных амплитуд, дополненных соответствующими линеаризованными уравнениями для малых возмущений фазовой траектории, дает спектр показателей Ляпунова

$$\lambda_1 \approx 0.0413, \lambda_2 \approx -0.0656, \lambda_3 \approx -0.558, \lambda_4 \approx -0.685, \quad (9.26)$$

что находится в хорошем соответствии с результатом (9.23). Заметим, что старший показатель Ляпунова для отображения Пуанкаре $\Lambda_1 = \lambda_1 T \approx 0.661$ близок к величине $\ln 2$, отвечающей приближенному описанию динамики фазы отображением типа Бернулли.

На рис. 9.8 показан график зависимости показателей Ляпунова для отображения Пуанкаре от параметра интенсивности накачки $\bar{\kappa}$. Как можно видеть из графика, старший показатель Ляпунова в широком интервале по параметру остается почти постоянным, близким к величине $\ln 2$. Такой характер зависимости находится в соответствии с предполагаемым наличием у системы структурно устойчивого гиперболического аттрактора.

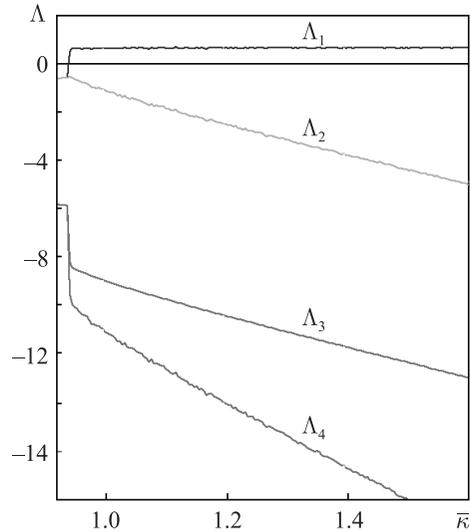


Рис. 9.8. Показатели Ляпунова для отображения Пуанкаре в зависимости от параметра интенсивности накачки для системы (9.24) при $T=16$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.6$, $\beta_1 = 0.7896$, $\beta_2 = 3.1583$, $\varepsilon = 0.3501$

9.3 Параметрический генератор гиперболического хаоса на основе четырех связанных осцилляторов с модуляцией накачки

Рассмотрим систему, состоящую из двух подсистем А и В, каждая из которых представляет собой параметрический генератор, построенный по

обсуждавшейся в разделе 9.1 схеме на основе связанных осцилляторов с частотами ω_1 и $\omega_2 = 2\omega_1$ [Кузнецов, 2008]. Блок-схема устройства приведена на рис. 9.9. Частота накачки считается равной $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = 3\omega_1$, так что условие параметрического резонанса выполнено. Осциллятор частоты ω_1 связан с осциллятором частоты ω_2 другой подсистемы через элемент с квадратичной нелинейностью. Накачка попеременно включается и выключается в обеих подсистемах, так что параметрические колебания возбуждаются и затухают в них по очереди. Каждый раз возбуждение одной подсистемы стимулируется второй гармоникой колебаний другой подсистемы. В связи с этим фаза колебаний при каждой передаче возбуждения умножается на два, так что за полный период модуляции накачки она претерпевает умножение на коэффициент 4. В результате система генерирует последовательность цугов колебаний, следующих друг за другом с периодом модуляции, причем фаза заполнения меняется от импульса к импульсу в соответствии с хаотическим отображением.

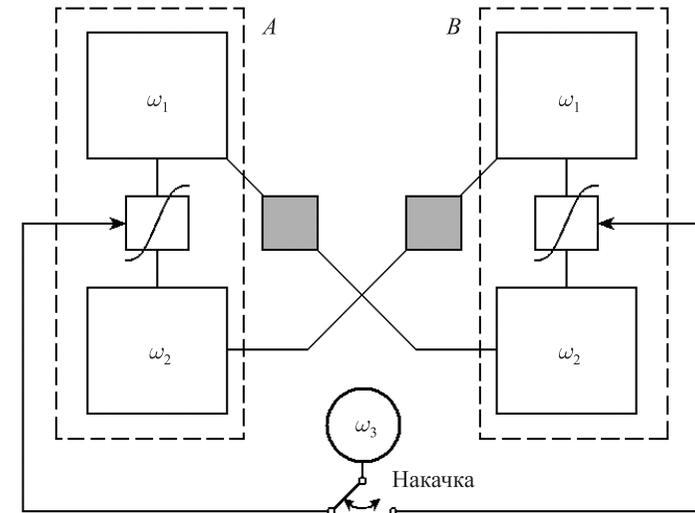


Рис. 9.9. Блок-схема параметрического генератора хаоса. Блоки с пометками ω_1 и ω_2 обозначают осцилляторы с соответствующей собственной частотой, квадратики с волнообразной чертой — бездиссипативные элементы связи с параметром, осциллирующим с частотой накачки ω_3 , квадратики серого цвета — элементы связи, характеризуемые квадратичной нелинейностью

9.3.1. Модель, принцип действия и основные уравнения

Пусть система характеризуется функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 - \omega_1^2 x_1^2 - \omega_2^2 x_2^2 - \omega_1^2 y_1^2 - \omega_2^2 y_2^2) + \kappa[x_1 x_2 f(t) + y_1 y_2 g(t)] \sin \omega_3 t + \varepsilon(x_1^2 y_2 + y_1^2 x_2), \quad (9.27)$$

где $x_{1,2}$ и $y_{1,2}$ — обобщенные координаты, а $\dot{x}_{1,2}$ и $\dot{y}_{1,2}$ — обобщенные скорости двух пар осцилляторов, имеющих собственные частоты ω_1 и $\omega_2 = 2\omega_1$. Параметр κ определяет интенсивность накачки на частоте $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = 3\omega_1$, а функции $f(t)$ и $g(t)$ задают медленную зависимость амплитуды накачки от времени для двух пар осцилляторов. Параметр ε отвечает за нелинейную связь между осцилляторами, относящимися к разным подсистемам.

Для введения нелинейной диссипации, призванной обеспечить насыщение параметрической неустойчивости и возможность существования аттрактора, зададим диссипативную функцию Релея следующим образом:

$$R = \frac{1}{2}(\alpha_1 \dot{x}_1^2 + \alpha_2 \dot{x}_2^2 + \alpha_1 \dot{y}_1^2 + \alpha_2 \dot{y}_2^2) + \frac{1}{4}(\beta_1 \dot{x}_1^4 + \beta_2 \dot{x}_2^4 + \beta_1 \dot{y}_1^4 + \beta_2 \dot{y}_2^4), \quad (9.28)$$

где $\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}$ — положительные константы. Динамические уравнения системы

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{\partial R}{\partial \dot{y}_i}, \quad i = 1, 2, \quad (9.29)$$

записываются тогда в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= \kappa x_2 f(t) \sin \omega_3 t + 2\varepsilon x_1 y_2 - \alpha_1 \dot{x}_1 - \beta_1 \dot{x}_1^3, \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= \kappa x_1 f(t) \sin \omega_3 t + \varepsilon y_1^2 - \alpha_2 \dot{x}_2 - \beta_2 \dot{x}_2^3, \\ \ddot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 &= \kappa y_2 g(t) \sin \omega_3 t + 2\varepsilon y_1 x_2 - \alpha_1 \dot{y}_1 - \beta_1 \dot{y}_1^3, \\ \ddot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 &= \kappa y_1 g(t) \sin \omega_3 t + \varepsilon x_1^2 - \alpha_2 \dot{y}_2 - \beta_2 \dot{y}_2^3. \end{aligned} \quad (9.30)$$

Выберем функции $f(t)$ и $g(t)$ так, чтобы для двух пар осцилляторов амплитуда накачки совершала медленные периодические колебания в противофазе:

$$f(t) = \sin^2(\pi t / T), \quad g(t) = \cos^2(\pi t / T). \quad (9.31)$$

Период модуляции будем считать кратным периоду основной частоты накачки, т. е. $T = 2\pi N / \omega_3$, где N — целое. Это условие означает, что (9.30) есть система уравнений с периодическими коэффициентами (периода T), и ее динамику можно строго описать стробоскопическим отображением Пуанкаре, используя сечение Пуанкаре в расширенном фазовом пространстве семейством гиперплоскостей с временным шагом T .

В случае $N \gg 1$, следуя стандартной технике метода медленно меняющихся амплитуд, полагаем

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 e^{i\omega_1 t} + A_1^* e^{-i\omega_1 t}, \quad x_2 = A_2 e^{i\omega_2 t} + A_2^* e^{-i\omega_2 t}, \\ y_1 &= B_1 e^{i\omega_1 t} + B_1^* e^{-i\omega_1 t}, \quad y_2 = B_2 e^{i\omega_2 t} + B_2^* e^{-i\omega_2 t}, \end{aligned} \quad (9.32)$$

где $A_{1,2}(t) = A'_{1,2} + iA''_{1,2}$ и $B_{1,2}(t) = B'_{1,2} + iB''_{1,2}$ — медленно меняющиеся комплексные функции времени, удовлетворяющие дополнительным условиям

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 e^{i\omega_1 t} + \dot{A}_1^* e^{-i\omega_1 t} &= 0, \quad \dot{A}_2 e^{i\omega_2 t} + \dot{A}_2^* e^{-i\omega_2 t} = 0, \\ \dot{B}_1 e^{i\omega_1 t} + \dot{B}_1^* e^{-i\omega_1 t} &= 0, \quad \dot{B}_2 e^{i\omega_2 t} + \dot{B}_2^* e^{-i\omega_2 t} = 0. \end{aligned} \quad (9.33)$$

В результате подстановки этих выражений в соотношения (9.30), умножения уравнений на экспоненту $e^{-i\omega_1 t}$ (для A_1, B_1) и $e^{-i\omega_2 t}$ (для A_2, B_2) и усреднения по периоду быстрых колебаний, с учетом принятого соотношения частот $\omega_{1,2,3}$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= -\frac{\kappa}{4\omega_1} f(t) A_2^* - i \frac{\varepsilon}{\omega_1} A_1^* B_2 - \frac{1}{2} \alpha_1 A_1 - \frac{3}{2} \omega_1^2 \beta_1 A_1 |A_1|^2, \\ \dot{A}_2 &= -\frac{\kappa}{4\omega_2} f(t) A_1^* - i \frac{\varepsilon}{2\omega_2} B_1^2 - \frac{1}{2} \alpha_2 A_2 - \frac{3}{2} \omega_2^2 \beta_2 A_2 |A_2|^2, \\ \dot{B}_1 &= -\frac{\kappa}{4\omega_1} g(t) B_2^* - i \frac{\varepsilon}{\omega_1} B_1^* A_2 - \frac{1}{2} \alpha_1 B_1 - \frac{3}{2} \omega_1^2 \beta_1 B_1 |B_1|^2, \\ \dot{B}_2 &= -\frac{\kappa}{4\omega_2} g(t) B_1^* - i \frac{\varepsilon}{2\omega_2} A_1^2 - \frac{1}{2} \alpha_2 B_2 - \frac{3}{2} \omega_2^2 \beta_2 B_2 |B_2|^2. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Если $\varepsilon = 0$, то система распадается на две изолированные подсистемы, A и B , каждая из которых образована двумя осцилляторами с параметрической связью. Рассмотрим одну из этих подсистем. При постоянной амплитуде накачки, как объяснялось в предыдущем разделе, параметрические колебания на частотах ω_1 и $\omega_2 = 2\omega_1$ характеризуются общей константой фазового сдвига φ , зависящей от начальных условий.

Перейдем к ситуации, когда имеет место попеременное действие накачки на обе подсистемы A и B при наличии связи между ними, определяемой отличным от нуля параметром ε .

Возбуждение каждой подсистемы при включении накачки будет происходить в присутствии воздействия на ее парциальный осциллятор со стороны подсистемы-партнера. Воздействие на осциллятор, имеющий собственную частоту $\omega_2 = 2\omega_1$, осуществляется посредством порождаемой на нелинейном элементе второй гармоники сигнала от осциллятора, совершающего колебания на частоте ω_1 . Эта вторая гармоника имеет удвоенную фазу, и ее же унаследуют колебания возбуждаемого осциллятора, стимулированные этим воздействием. На следующем полупериоде модуляции накачки обе подсистемы A и B меняются ролями и фаза передаваемого возбуждения претерпевает еще одно удвоение. Поэтому за полный период модуляции накачки трансформация фазы будет приближенно определяться отображением $\phi_{new} = 4\phi_{old} + \text{const} \pmod{2\pi}$. Оно относится к семейству отображений Бернулли, его динамика хаотическая и характеризуется показателем Ляпунова $\Lambda = \ln 4 \approx 1.386$.

Для более аккуратного описания динамики системы в дискретном времени следует обратиться к отображению Пуанкаре. Рассмотрим последовательность моментов времени $t_n = nT$. Пусть в момент t_n состояние системы задано набором переменных — восьмимерным вектором \mathbf{X}_n . Решая уравнения (9.30) или (9.34) на интервале времени T с начальными условиями \mathbf{X}_n , получим набор переменных, отвечающий новому состоянию \mathbf{X}_{n+1} . Введем функцию, отображающую восьмимерное пространство в себя

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{X}_n). \quad (9.35)$$

Это стробоскопическое отображение Пуанкаре для системы дифференциальных уравнений, правые части которой — гладкие ограниченные функции в конечной области фазового пространства. В силу теоремы существования, единственности, непрерывности и дифференцируемости решений системы отображение \mathbf{T} представляет собой диффеоморфизм [Арнольд, 2000].

9.3.2. Хаотическая динамика: результаты компьютерного моделирования

На рис. 9.10 приводятся типичные образцы временных зависимостей в установившемся режиме параметрической генерации, полученные при

численном решении уравнений (9.30) для динамических переменных x и y , а также показаны графики для сигнала накачки в одной и другой подсистемах на диаграмме (а). Заданные при этом параметры таковы:

$$\omega_1 = 2\pi, \quad \omega_2 = 4\pi, \quad \omega_3 = 6\pi, \quad T = 40, \quad \kappa = 35, \quad a = 0.6, \quad b = 0.01. \quad (9.36)$$

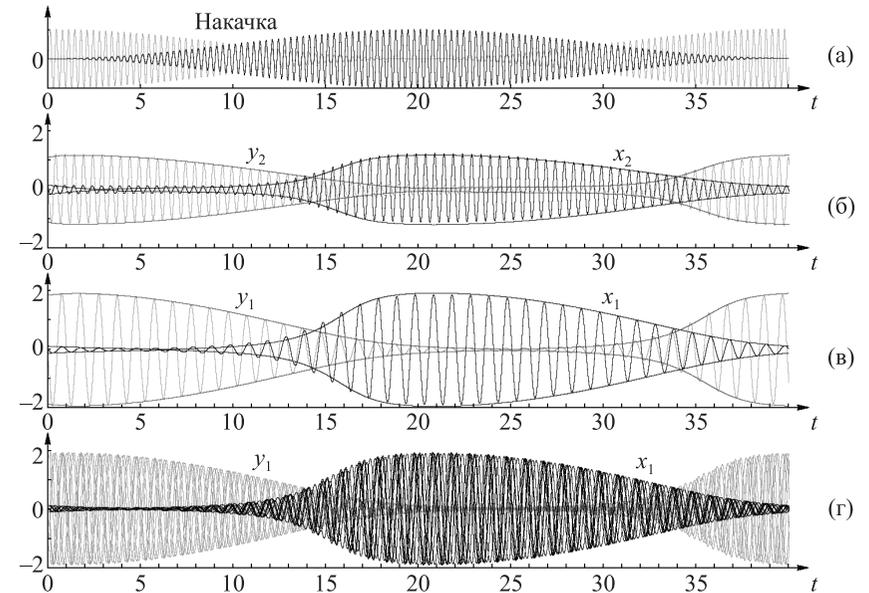


Рис. 9.10. Типичные образцы временной зависимости для динамических переменных, полученной из численного решения уравнений (9.30) при выборе параметров в соответствии с (9.36). На диаграмме (а) показан сигнал накачки. На диаграммах (б) и (в) показана одна реализация, а на диаграмме (г) — восемь наложенных друг на друга реализаций — участков одного и того же сигнала, что иллюстрирует неперiodический (фактически хаотический) характер динамики. На рисунках (б) и (в) огибающая построена на основе численного решения уравнений для комплексных амплитуд (9.34)

Как можно видеть, по ходу эволюции во времени подсистемы становятся активными поочередно, в соответствии с действием накачки. Каждая подсистема выдает сигнал, представляющий собой последовательность импульсов, имеющих высокочастотное заполнение и следующих с периодом модуляции накачки, однако сигнал не является периодическим: фаза несущей изменяется нерегулярным образом от импульса к импульсу. На

качественном уровне это хорошо видно из диаграммы (г), где представлены на одном графике несколько реализаций — участков сигнала, относящихся к последовательным периодам модуляции накачки. На диаграммах (б) и (в) приводятся также зависимости от времени амплитуд осцилляторов, полученные численным решением уравнений для медленных амплитуд (9.34).¹ Видно, что согласие между методом медленных амплитуд и точным решением хорошее.

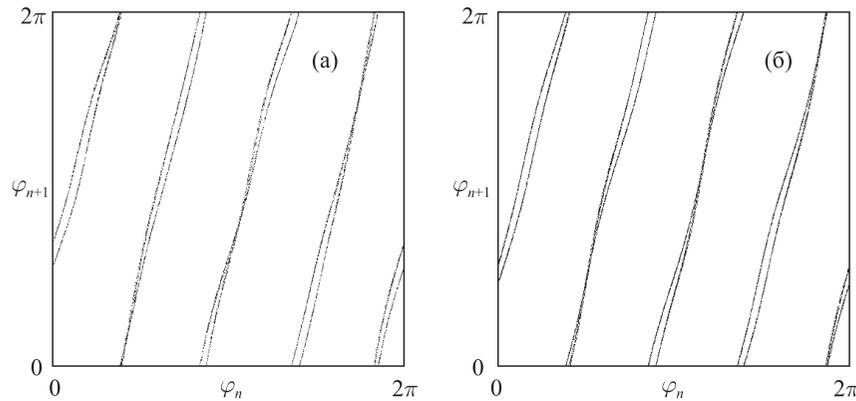


Рис. 9.11. Итерационные диаграммы для фазы на стадии активности одной из подсистем, построенные на основании численного решения исходных уравнений (9.30) (а) и уравнений для комплексных амплитуд (9.34) (б) при выборе параметров в соответствии с (9.36)

На рис. 9.11 показаны диаграммы для фаз, отвечающих последовательным стадиям возбуждения одной из подсистем. По горизонтальной оси отложена фаза колебаний в подсистеме B , относящаяся к моменту времени $t_n = nT$, а по вертикали — к моменту времени t_{n+1} . График (а) построен на основании численного решения уравнений (9.30), а график (б) — на основании решения амплитудных уравнений (9.34). При этом в первом случае фаза определяется по формуле $\phi_n = \arg[y_1(t_n) + \dot{y}_1(t_n)/i\omega_1]$, а во втором — как $\phi_n = \arg B_1(t_n)$. Подчеркнем, что определение фазы относится к активной стадии рассматриваемой подсистемы, когда амплитуда заведомо от-

¹ Начальные условия в момент времени, принятый за ноль, пересчитаны из соответствующего мгновенного состояния системы (9.30) на аттракторе с помощью соотношений (9.32), (9.33).

лична от нуля.² Как видно из рисунка, однократный обход окружности для прообраза, т. е. вариация фазы ϕ_n от нуля до 2π , соответствует четырехкратному обходу для образа ϕ_{n+1} . Это значит, что отображение для фазы относится к тому же топологическому классу, что и отображение Бернулли $\phi_{new} = 4\phi_{old} \pmod{2\pi}$. (Слабое расщепление ветвей графика несущественно, и им в определенном приближении можно пренебречь.)

Учитывая наблюдаемое хорошее соответствие между решениями исходных и амплитудных уравнений, в дальнейшем ограничимся рассмотрением результатов, относящихся только к амплитудным уравнениям.

Чтобы получить свидетельство присутствия хаоса на количественном уровне, обратимся к расчету показателей Ляпунова. Для этого используем стандартную процедуру, основанную на методе Бенеттина (см. главу 1). Проводится совместное решение уравнений (9.34) и восьми комплектов уравнений в вариациях

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{A}}_1 &= -\frac{\kappa}{4\omega_1} f(t)\tilde{A}_2^* - i\frac{\varepsilon}{\omega_1}(\tilde{A}_1^*B_2 + A_1^*\tilde{B}_2) - \frac{1}{2}\alpha_1\tilde{A}_1 - \frac{3}{2}\omega_1^2\beta_1A_1^*\tilde{A}_1^* - 3\omega_1^2\beta_1A_1^*A_1\tilde{A}_1, \\ \dot{\tilde{A}}_2 &= -\frac{\kappa}{4\omega_2} f(t)\tilde{A}_1^* - i\frac{\varepsilon}{\omega_2}B_1\tilde{B}_1 - \frac{1}{2}\alpha_2\tilde{A}_2 - \frac{3}{2}\omega_2^2\beta_2A_2^*\tilde{A}_2^* - 3\omega_2^2\beta_2A_2^*A_2\tilde{A}_2, \\ \dot{\tilde{B}}_1 &= -\frac{\kappa}{4\omega_1} f(t)\tilde{B}_2^* - i\frac{\varepsilon}{\omega_1}(A_2\tilde{B}_1^* + B_1^*\tilde{A}_2) - \frac{1}{2}\alpha_1\tilde{B}_1 - \frac{3}{2}\omega_1^2\beta_1B_1^*\tilde{B}_1^* - 3\omega_1^2\beta_1B_1^*B_1\tilde{B}_1, \\ \dot{\tilde{B}}_2 &= -\frac{\kappa}{4\omega_2} f(t)\tilde{B}_1^* - i\frac{\varepsilon}{\omega_2}A_1\tilde{A}_1 - \frac{1}{2}\alpha_2\tilde{B}_2 - \frac{3}{2}\omega_2^2\beta_2B_2^*\tilde{B}_2^* - 3\omega_2^2\beta_2B_2^*B_2\tilde{B}_2. \end{aligned} \quad (9.37)$$

Каждый раз после определенного числа шагов разностной схемы при решении уравнений выполняются ортогонализация Грама–Шмидта и нормализация для векторов возмущения $\{\tilde{A}_1', \tilde{A}_1'', \tilde{A}_2', \tilde{A}_2'', \tilde{B}_1', \tilde{B}_1'', \tilde{B}_2', \tilde{B}_2''\}$. (Штрих и двойной штрих означают действительную и мнимую части, соответственно.) Показатели Ляпунова определяются как средние скорости роста или уменьшения накапливающихся сумм логарифмов от норм векторов возмущения (после ортогонализации, но перед нормализацией). Полный

² Глобально определить фазу на всей временной оси нельзя, поскольку в промежутках времени между активными стадиями амплитуда колебаний в подсистеме становится близкой к нулю. Если бы такое определение было возможно, то нельзя было бы обеспечить принадлежность отображения для фазы к нужному топологическому классу.

спектр показателей Ляпунова для аттрактора, реализующегося при значениях параметров (9.36), согласно результатам расчетов, следующий:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.03456, \lambda_2 = -0.1320, \lambda_3 = -0.2247, \lambda_4 = -0.5220, \\ \lambda_5 &= -0.6826, \lambda_6 = -0.9012, \lambda_7 = -1.4189, \lambda_8 = -2.3248. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Соответственно, показатели Ляпунова для стробоскопического отображения Пуанкаре определяются согласно (9.38) как $\Lambda_k = \lambda_k T$. В частности, $\Lambda_1 = 1.3823$, что находится в хорошем соответствии с величиной $\ln 4 = 1.3862\dots$, полученной из отображения типа Бернулли $\phi_{n+1} = 4\phi_n + \text{const} \pmod{2\pi}$. Присутствие положительного показателя Λ_1 служит индикатором хаоса. Все остальные показатели $\Lambda_2 \dots \Lambda_8$ отрицательные. Отсюда следует, что элемент фазового объема претерпевает растяжение по одному направлению и сжатие по семи остальным направлениям в фазовом пространстве отображения Пуанкаре. На рис. 9.12 показан график двух наибольших показателей Ляпунова отображения Пуанкаре в зависимости от параметра связи между подсистемами ε при фиксированных остальных параметрах. Во всей рассматриваемой области один показатель положительный, а остальные отрицательные. Зависимость от параметра для положительного показателя, отвечающего за присутствие хаоса, гладкая, без каких-либо резких изменений («провалов»), обычно характерных для негиперболических аттракторов (для сравнения см. рис. А.4 и А.7 в приложении А). Из рисунка видно, что в широкой области изменения параметра ε величина Λ_1 остается близкой к числу $\ln 4$.

Оценка фрактальной размерности аттрактора, имеющего показатели Ляпунова (9.38), по формуле Каплана–Йорке дает для аттрактора в отображении Пуанкаре

$$D = 1 + \Lambda_1 / |\Lambda_2| \approx 1.26 \quad (9.39)$$

(поскольку $\Lambda_1 > 0$ и $\Lambda_1 + \Lambda_2 < 0$). Соответственно, для аттрактора исходной системы, вложенного в девятимерное расширенное фазовое пространство, размерность составляет $D' = D + 1 \approx 2.26$.

На рис. 9.13а показан портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость динамических переменных осциллятора ω_1 подсистемы В. На вставке, представляющей фрагмент исходной картинке в увеличенном виде, можно видеть некоторые детали тонкой поперечной фрактальной структуры аттрактора. На панели (б) приводится аналогичный портрет при выборе параметра связи вблизи порога существования хаотического ат-

трактора, где поперечная фрактальная структура становится лучше различимой.

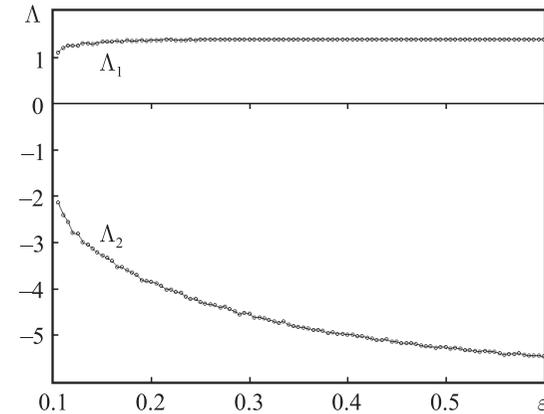


Рис. 9.12. Два наибольших показателя Ляпунова отображения Пуанкаре в зависимости от параметра ε при $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, $\omega_3 = 6\pi$, $T = 40$, $\kappa = 35$, $a = 0.6$, $b = 0.01$. Наибольший показатель хорошо согласуется с оценкой $\Lambda_1 \approx \ln 4$

Механизм, лежащий в основе параметрического генератора хаоса, а также численные результаты, подтверждающие реализацию этого механизма, позволяют предположить, что наблюдаемый аттрактор является однородно гиперболическим. Интерпретируя действие отображения Пуанкаре геометрически, мы можем представить себе тороид, вложенный в восьмерное пространство (то есть прямое произведение одномерной окружности и семимерного шара) и ассоциировать одну итерацию отображения с продольным растяжением и поперечным сжатием объекта, который затем вкладывается в исходную область в виде петли из четырех витков. На каждом этапе повторения этой процедуры имеющееся число витков объекта увеличивается в четыре раза. В пределе получается соленоид с бесконечным числом витков и канторовой поперечной структурой, который является одним из вариантов аттрактора типа Смейла–Вильямса. Подтверждение принадлежности к этому классу однородно гиперболических аттракторов могло бы основываться на использовании вычислительных процедур, описанных в главе 13, хотя в данном случае размерность фазового пространства достаточно высока и проблема требует значительных вычислительных ресурсов.

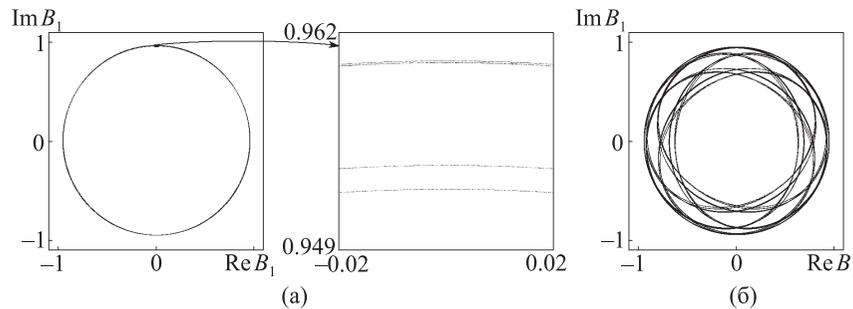


Рис. 9.13. Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость комплексной переменной, отвечающей амплитуде первого осциллятора второй подсистемы при $\varepsilon = 0.5$ (а) и $\varepsilon = 0.125$ (б)

Несмотря на гипотетический характер заключения о гиперболической природе хаотического аттрактора в последней модели, схемы параметрических генераторов хаоса, рассмотренные в настоящей главе, определенно открывают возможности для генерации грубого хаоса, нечувствительного к изменению параметров и характеристик элементов, например, в системах радиотехники и электроники, механики, акустики, нелинейной оптике.

Глава 10

Гиперболическая динамика в амплитудных уравнениях

В этой главе, следуя работе [Isaeva et al., 2011], рассматривается подход к построению осуществимых на практике динамических систем с гиперболическими хаотическими аттракторами, функционирование которых состоит в последовательной передаче возбуждения между попеременно активными парами автогенераторов. При этом угловая переменная, которая определяет соотношение мгновенных амплитуд для двух осцилляторов из каждой пары, на каждом очередном цикле процесса подвергается преобразованию в соответствии с растягивающим отображением окружности.

10.1. Амплитудная динамика в терминах угловой переменной, подчиняющейся отображению типа Бернулли

Рассмотрим пару автоколебательных элементов, у которых потери энергии компенсируются из общего источника, и предположим, что уравнения для комплексных амплитуд $a_{1,2}$ имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &= (1 - |a_1|^2 - |a_2|^2)a_1, \\ \dot{a}_2 &= (1 - |a_1|^2 - |a_2|^2)a_2.\end{aligned}\quad (10.1)$$

Насыщение амплитуд определяется, очевидно, условием $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$. Имеющееся распределение энергии между осцилляторами можно охарактеризовать угловой переменной θ , определенной так, что амплитуды удовлетворяют требуемому условию: $|a_1|^2 = \cos^2 \theta$, $|a_2|^2 = \sin^2 \theta$.

Пусть теперь имеем две пары осцилляторов, каждая из которых описывается уравнениями типа (10.1) с периодической модуляцией параметра, производимой внешним воздействием, так, что возбуждение одной и другой пары чередуются на последовательных полупериодах модуляции. Кроме того, дополним уравнения членами, вводящими связь между осцилляторами, относящимися к одной и другой попеременно активирующимся подсистемам. Конкретный вид этих дополнительных членов выбирается так, чтобы передача возбуждения на каждом периоде модуляции сопровождалась преобразованием угловой переменной θ в соответствии с растягивающим отображением утроения. (Здесь и далее мы рассматриваем преобразование утроения.) В результате динамика амплитуд в системе будет соответствовать аттрактору типа Смейла–Вильямса в стробоскопическом отображении.

Рассмотрим модельные уравнения, записанные для комплексных амплитуд в следующей форме:

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &= \frac{1}{2} [A \cos(2\pi t / T) - |a_1|^2 - |a_2|^2] a_1 + \frac{1}{2} \varepsilon b_1, \\ \dot{a}_2 &= \frac{1}{2} [A \cos(2\pi t / T) - |a_1|^2 - |a_2|^2] a_2 + \frac{1}{2} \varepsilon b_2, \\ \dot{b}_1 &= \frac{1}{2} [-A \cos(2\pi t / T) - |b_1|^2 - |b_2|^2] b_1 + \frac{1}{2} \varepsilon a_1 (|a_1|^2 - 3|a_2|^2), \\ \dot{b}_2 &= \frac{1}{2} [-A \cos(2\pi t / T) - |b_1|^2 - |b_2|^2] b_2 + \frac{1}{2} \varepsilon a_2 (3|a_1|^2 - |a_2|^2).\end{aligned}\quad (10.2)$$

Здесь $a_{1,2}$ и $b_{1,2}$ — комплексные переменные, относящиеся к двум подсистемам, каждая из которых представляет собой пару осцилляторов, воспол-

няющих потери энергии от источника, отдельного для одной и другой подсистемы. Благодаря противофазной модуляции параметра, управляющего автоколебаниями в подсистемах a и b , они становятся активными попеременно. Амплитуда модуляции характеризуется параметром A , а величина T задает период модуляции. Члены, пропорциональные константе ε , отвечают за связь попарно взаимодействующих осцилляторов из разных подсистем; их конкретная форма выбрана с учетом желаемого режима функционирования, как объяснено ниже.

Предположим, что на полупериоде активности первой пары осцилляторов ($A \cos 2\pi t / T > 0$) величины $a_{1,2}$ характеризуются приблизительно постоянными во времени амплитудами, соответствующими некоторой угловой координате θ . $a_1 \sim \cos \theta$, $a_2 \sim \sin \theta$. В начале стадии активности второй пары ($A \cos 2\pi t / T < 0$) возбуждение колебаний стимулируется воздействием, описываемым членами связи в третьем и четвертом уравнениях (10.2). Используя известные тригонометрические тождества, можно видеть, что

$$\begin{aligned}(|a_1|^2 - 3|a_2|^2)a_1 &\sim (\cos^2 \theta - 3\sin^2 \theta)\cos \theta = \cos 3\theta, \\ (3|a_1|^2 - |a_2|^2)a_2 &\sim (3\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\sin \theta = \sin 3\theta.\end{aligned}\quad (10.3)$$

Следовательно, соотношение амплитуд для комплексных переменных $b_{1,2}$ будет определяться утроенной угловой переменной 3θ . Далее, когда подойдет к концу стадия активности второй пары, возбуждение передается снова первой паре. В соответствии с видом членов связи в первом и втором уравнениях (10.2) это происходит без изменения величины θ . Таким образом, на полном периоде модуляции эта переменная претерпевает преобразование утроения: $\theta_{n+1} \approx 3\theta_n$.

Заметим, что уравнения (10.2) инвариантны по отношению к двум фазовым сдвигам, т. е. по отношению к заменам переменных $a_1, b_1 \rightarrow a_1 e^{i\varphi_1}, b_1 e^{i\varphi_1}$ и $a_2, b_2 \rightarrow a_2 e^{i\varphi_2}, b_2 e^{i\varphi_2}$, где φ_1 и φ_2 — произвольные постоянные. Мы можем ограничиться описанием исключительно амплитудной динамики модели, используя уравнения в действительных переменных:

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &= \frac{1}{2} [A \cos(2\pi t / T) - a_1^2 - a_2^2] a_1 + \frac{1}{2} \varepsilon b_1, \\ \dot{a}_2 &= \frac{1}{2} [A \cos(2\pi t / T) - a_1^2 - a_2^2] a_2 + \frac{1}{2} \varepsilon b_2, \\ \dot{b}_1 &= \frac{1}{2} [-A \cos(2\pi t / T) - b_1^2 - b_2^2] b_1 + \frac{1}{2} \varepsilon a_1 (a_1^2 - 3a_2^2), \\ \dot{b}_2 &= \frac{1}{2} [-A \cos(2\pi t / T) - b_1^2 - b_2^2] b_2 + \frac{1}{2} \varepsilon a_2 (3a_1^2 - a_2^2).\end{aligned}\quad (10.4)$$

(Здесь принимается, что переменные $a_{1,2}$ и $b_{1,2}$ могут быть иметь любой знак, так что истинные амплитуды осцилляторов отвечают их абсолютным величинам.)

Вместо рассмотрения динамики в непрерывном времени можно обратиться к описанию в дискретном времени с привлечением стробоскопического отображения Пуанкаре. В нашем случае отображение $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_n)$ оперирует с векторами $\mathbf{x}_n = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}_{t=nT}$. Хотя аналитически вывести его не удастся, отображение можно реализовать в вычислениях путем решения дифференциальных уравнений на периоде T . Применительно к исходным уравнениям (10.2) отображение восьмимерное (учитывая, что переменные $a_{1,2}$ и $b_{1,2}$ комплексные), но для уравнений, записанных для амплитуд (10.4), оно четырехмерное.

В обсуждаемом режиме работы, согласно приведенной аргументации, можно определить угловую переменную, претерпевающую утроения на последовательных итерациях стробоскопического отображения. Из-за сжатия фазового объема по остальным направлениям четырехмерного пространства состояний отображения Пуанкаре в модели (10.4), аттрактор этого отображения будет представлять собой разновидность соленоида Смейла–Вильямса, построение которого отвечает утроению числа витков на каждом следующем шаге конструкции. Это будет однородно гиперболический аттрактор, вложенный в пространство состояний четырехмерного отображения Пуанкаре с одномерным неустойчивым многообразием и трехмерным устойчивым многообразием принадлежащих ему орбит.

Для иллюстрации функционирования модели в соответствии с приведенным описанием обратимся к результатам вычислений на компьютере.

На рис. 10.1 показаны зависимости от времени действительных амплитуд, полученные при численном решении уравнений (10.4) при значениях параметров $T = 10, A = 3, \varepsilon = 0.06$. Как можно видеть, наблюдается попеременная активность первой и второй пар осцилляторов. Как показано ниже, трансформация угловой переменной, отвечающей за распределение амплитуд в каждой паре осцилляторов, за период модуляции соответствует отображению типа Бернулли.

На рис. 10.2 показан портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость переменных, относящихся к одной из двух попеременно возбуждающихся подсистем, и диаграммы, иллюстрирующие преобразование угловой переменной, которая характеризует распределение амплитуд между составляющими подсистему осцилляторами, на последовательных периодах модуляции. Аттрактор действительно выглядит как

проекция соленоида Смейла–Вильямса, демонстрируя тонкую канторову структуру волокон. Угловая переменная вычислялась в последовательные моменты времени $t_n = nT$ как $\theta_n = \arg(a_1(nT) + ib_1(nT))$. Как можно убедиться, для циклической координаты θ имеет место отображение окружности, отвечающее утроению переменной: один обход окружности для прообраза отвечает трехкратному обходу для образа.

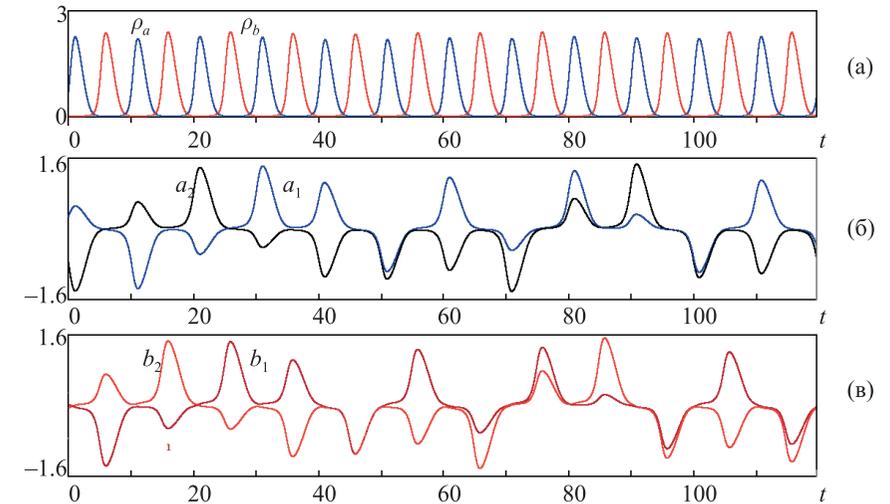


Рис. 10.1. Типичные временные зависимости амплитуд четырех осцилляторов, полученные при численном решении уравнений (10.4) при $T = 10, A = 3, \varepsilon = 0.06$: (а) величины сумм квадратов амплитуд каждой пары осцилляторов, $\rho_a = a_1^2 + a_2^2$ и $\rho_b = b_1^2 + b_2^2$, и графики для амплитуд первой (б) и второй (в) пар осцилляторов

Вычисление показателей Ляпунова для модели (10.4) основывается на совместном решении этих уравнений и набора из четырех комплектов линейризованных уравнений в вариациях, вдоль опорной траектории на аттракторе, с ортогонализацией по Граму–Шмидту и перенормировкой соответствующих векторов возмущения по ходу выполнения процедуры (алгоритма Бенеттина, глава 1).

На рис. 10.3 на диаграмме (а) все четыре показателя Ляпунова для отображения Пуанкаре представлены графически в зависимости от параметра глубины модуляции A при фиксированных остальных параметрах $\varepsilon = 0.06$,

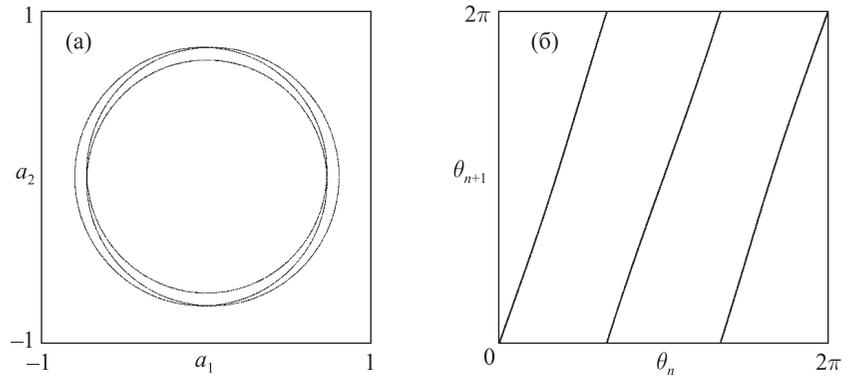


Рис. 10.2. Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в двумерной проекции на плоскость действительных амплитуд первых двух осцилляторов (а) и диаграмма для угловой переменной, вычисляемой в последовательные моменты времени $t = nT$ (б) для системы (10.4) при $T = 10$, $\varepsilon = 0.06$, $A = 3$

$T = 10$. Диаграммы (б) и (в) представляют собой аналогичные графики зависимости показателей Ляпунова от параметра связи ε (при $A = 3$ и $T = 10$) и от периода модуляции T (при $A = 3$ и $\varepsilon = 0.06$). Как можно видеть, старший показатель Ляпунова остается практически постоянным в широком диапазоне изменения параметра, оставаясь близким к величине $\ln 3 = 1.0986\dots$, что прекрасно согласуется с приближением, основанным на отображении утроения Бернулли. Такое поведение старшего показателя, отвечающего за хаотическую природу динамического поведения, косвенно подтверждает структурную устойчивость аттрактора, который, как предполагается, остается гиперболическим в этой области параметров. Остальные три показателя все отрицательны и отвечают за сжатие фазового объема по направлениям поперек волокон соленида Смейла–Вильямса.

В частности, при $A = 3$, $\varepsilon = 0.06$, $T = 10$ показатели Ляпунова для отображения Пуанкаре таковы:

$$\Lambda_1 = 1.095, \quad \Lambda_2 = -4.172, \quad \Lambda_3 = -7.712, \quad \Lambda_4 = -10.690. \quad (10.5)$$

Оценка фрактальной размерности аттрактора в сечении Пуанкаре по формуле Каплана–Йорке дает $D = 1 + \Lambda_1 / |\Lambda_2| \approx 1.26$; наличие ненулевой дробной части говорит о фрактальной структуре аттрактора.

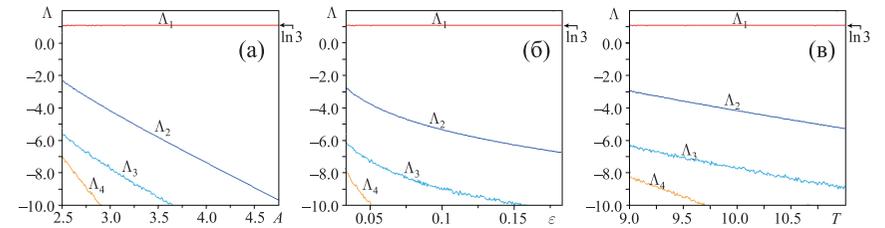


Рис. 10.3. Показатели Ляпунова для отображения Пуанкаре системы (10.4), представленные в зависимости от параметров: (а) амплитуды модуляции A при $T = 10$, $\varepsilon = 0.06$, (б) параметра связи ε при $A = 3$, $T = 10$, (в) периода модуляции T при $A = 3$, $\varepsilon = 0.06$

Для исходных уравнений в комплексных амплитудах (10.2) вычисление показателей Ляпунова дает

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = 1.097, \quad \Lambda_2 = 0.000, \quad \Lambda_3 = 0.000, \quad \Lambda_4 = -4.166, \\ \Lambda_6 = -5.366, \quad \Lambda_7 = -5.365, \quad \Lambda_8 = -7.556, \quad \Lambda_9 = -10.637. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Старший показатель такой же, как и в уравнениях для действительных амплитуд, и близок к величине $\ln 3$. Вторым и третьим показателями нулевыми (с точностью до погрешности вычислений); они ассоциируются, очевидно, с нейтральными возмущениями типа упомянутых выше двух фазовых сдвигов, относительно которых уравнения инвариантны. Остальные показатели отрицательны, причем Λ_8 и Λ_9 совпадают с определенными показателями из спектра четырехмерной системы, тогда как Λ_6 и Λ_7 являются специфическими для версии модели с комплексными амплитудами.

Оценка фрактальной размерности аттрактора в сечении Пуанкаре по формуле Каплана–Йорке дает $D = 3 + (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3) / |\Lambda_4| \approx 3.26$. Этот аттрактор, вложенный в восьмимерное пространство состояний отображения Пуанкаре, следует отнести к классу частично гиперболических аттракторов из-за присутствия нейтрального подпространства, связанного с фазовыми переменными φ_1 и φ_2 и соответствующими двумя нулевыми показателями Ляпунова. Для рассматриваемой модели это обстоятельство не является очень существенным: инвариантность уравнений (10.2) по отношению к фазовым сдвигам точная, а это значит, что правомерным будет соглашение не различать состояния, отличающиеся только фазами. Тогда динамику можно рассматривать как истинно однородно гиперболическую. Однако в системах, для которых описание в терминах медленных ком-

плексных амплитуд приближенное (как те, что обсуждаются в двух следующих параграфах), можно ожидать особенностей поведения, связанных с природой частично гиперболического аттрактора. Если отклонения от приближения, основанного на методе медленных амплитуд, невелики, то следует ожидать, что динамика амплитудных переменных сохранит свой характер вследствие грубости, присущей гиперболическому аттрактору.

10.2. Модель двух попеременно возбуждающихся пар осцилляторов ван дер Поля с равными частотами

Обратимся теперь к модельным системам, построенным на основе осцилляторов ван дер Поля. Осциллятор ван дер Поля — это хорошо известная, популярная и значимая модель — парадигма автоколебательной системы (см. вводный раздел главы 7). Его можно рассматривать в контексте, например, электрических, механических, химических колебаний; то же самое можно сказать в отношении составных систем, базирующихся на таких элементах.

Предположим сначала, что все парциальные осцилляторы, используемые для построения составной системы, имеют одну и ту же частоту ω_0 , и рассмотрим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - [A \cos(2\pi t / T) - x_1^2 - x_2^2] \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= \varepsilon \dot{y}_1, \\ \ddot{x}_2 - [A \cos(2\pi t / T) - x_1^2 - x_2^2] \dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 &= \varepsilon \dot{y}_2, \\ \dot{y}_1 - [-A \cos(2\pi t / T) - y_1^2 - y_2^2] \dot{y}_1 + \omega_0^2 y_1 &= \varepsilon (x_1^2 - 3x_2^2) \dot{x}_1, \\ \dot{y}_2 - [-A \cos(2\pi t / T) - y_1^2 - y_2^2] \dot{y}_2 + \omega_0^2 y_2 &= \varepsilon (3x_1^2 - x_2^2) \dot{x}_2. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Здесь представлены две пары автоколебательных элементов. Каждая пара характеризуется обобщенными координатными переменными $x_{1,2}$ и $y_{1,2}$ соответственно и, как предполагается, восполняет потери энергии из общего источника, своего для каждой пары, что видно из структуры выражений в квадратных скобках. Обе пары становятся активными по очереди вследствие периодической модуляции параметров, ответственных за бифуркацию Андронова–Хопфа в осцилляторах ван дер Поля. Интенсивность модуляции характеризуется параметром A , а ее период дается константой T . Члены, описывающие связь и пропорциональные константе ε , обеспечивают передачу возбуждения между первыми и вторыми осцилляторами одной и другой пары; их структура подобна постулированной

в предыдущем разделе. Заметим, что передача возбуждения имеет место в условиях резонанса собственной частоты осцилляторов и первой гармоники воздействия, заданного правыми частями уравнений.

При использовании аппроксимации, основанной на методе медленных амплитуд, система сводится к форме, точно соответствующей уравнениям (10.4) (см. раздел 10.4). Следовательно, функционирование системы, как можно ожидать, должно быть подобно модели из предыдущего раздела в силу структурной устойчивости гиперболического аттрактора модели (10.4).

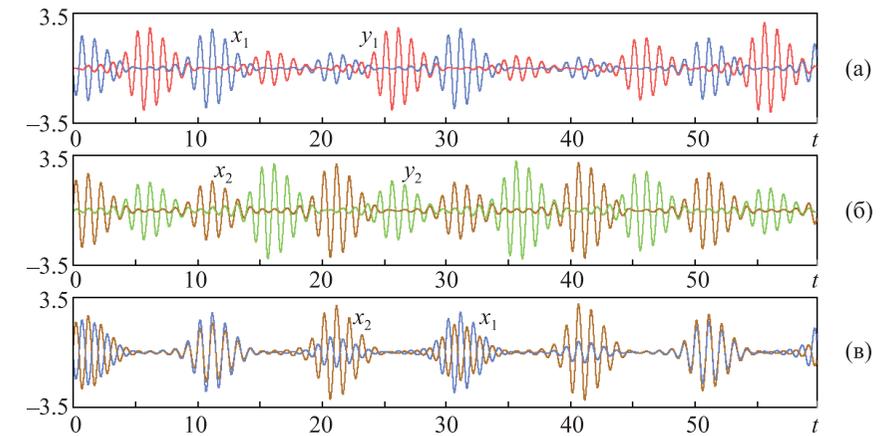


Рис. 10.4. Сигналы, порождаемые парциальными осцилляторами системы (10.7) при $A = 3$, $T = 10$, $\varepsilon = 0.06$, $\omega_0 = 2\pi$

На рис. 10.4 показаны временные зависимости динамических переменных, полученные при численном решении уравнений (10.7) для $A = 3$, $T = 10$, $\varepsilon = 0.06$, $\omega_0 = 2\pi$. Панели (а) и (б) представляют собой графики для попарно связанных осцилляторов. Заметим, что первая и вторая подсистемы активны по очереди, а распределение интенсивностей колебаний меняется существенным образом на последовательных стадиях активности. Панель (в) демонстрирует колебания двух осцилляторов, относящихся к одной и той же подсистеме. Можно заметить, что фазы обоих осцилляторов практически одинаковы, по крайней мере насколько различимо на графике. (На самом деле эта фаза медленно меняется на больших масштабах времени и представляет собой специфическую переменную, не участ-

вующую в гиперболической структуре; в связи с этим обстоятельством аттрактор в стробоскопическом отображении данной системы, очевидно, должен быть отнесен к классу частично гиперболических, а не равномерно гиперболических в обычном смысле аттракторов.)

Удобно ввести описание с привлечением стробоскопического отображения Пуанкаре. Теперь отображение $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_n)$ оперирует с восьмимерными векторами $\mathbf{x}_n = \{x_1, u_1, x_2, u_2, y_1, v_1, y_2, v_2\}_{t=nT}$, где $u_{1,2} = \dot{x}_{1,2} / \omega_0$ и $v_{1,2} = \dot{y}_{1,2} / \omega_0$ представляют собой нормированные обобщенные скорости соответствующих осцилляторов. Отображение Пуанкаре выполняется при вычислениях на компьютере путем решения дифференциальных уравнений (10.7) на интервале времени T .

Чтобы двигаться дальше, необходимо ввести угловую переменную, характеризующую распределение амплитуд осцилляторов, составляющих одну подсистему, и выразить ее через динамические переменные $x_{1,2}, u_{1,2}$. В рамках данной модели это более тонкий момент, чем для системы (10.4). В самом деле, простое определение как $\arctg[\sqrt{x_2^2 + u_2^2} / \sqrt{x_1^2 + u_1^2}]$ не является удовлетворительным, поскольку оно годится только для одного из четырех квадрантов угловой переменной, в то время как для представления соленоида Смейла–Вильямса угловая переменная должна иметь возможность принимать значения, соответствующие полной окружности. Подходящим оказалось следующее определение. Сначала выберем пару (x_1, u_1) или (x_2, u_2) , характеризуемую большим значением $r_i^2 = x_i^2 + u_i^2$. Далее, если $|x_i| > |u_i|$, то полагаем $s = \text{sgn}(x_i)$, в противном случае $s = \text{sgn}(u_i)$, и находим $\xi = sx_i / r_i$, $\eta = sx_i / r_i$. Используя эти определения до и после каждого шага отображения Пуанкаре, вычисляем $X = \xi x_1 + \eta u_1$, $Y = \xi x_2 + \eta u_2$ и $X' = \xi x'_1 + \eta u'_1$, $Y' = \xi x'_2 + \eta u'_2$, где штрих обозначает обновленные значения переменных. (Коэффициенты ξ и η принимаются одинаковыми при вычислении как X, Y , так X', Y' .) Наконец, полагаем $\theta = \arg(X + iY)$ и $\theta' = \arg(X' + iY')$, после чего откладываем эти величины по осям координат на графике.

На рис. 10.5 показаны портрет аттрактора в сечении Пуанкаре на плоскости переменных X, Y (панель (а)) и итерационная диаграмма для угловой переменной θ (панель (б)). По сравнению с рис. 10.2 портрет аттрактора выглядит как образование, уширенное в направлении поперек витков

соленоида. Это связано с тем, что в рассматриваемой системе имеется медленно эволюционирующая фазовая переменная, как уже было сказано выше. Тем не менее некоторую тонкую структуру, унаследованную от канторова устройства соленоида, на графике можно различить. Что касается диаграммы для угловой переменной, то благодаря удачно выбранному ее определению график выглядит очень похожим на рис. 10.2б, который отвечал истинно равномерно гиперболическому аттрактору. Таким образом, можно утверждать, что гиперболическая составляющая имеет место: благодаря присущей структурной устойчивости она не разрушается возмущениями, возникающими из-за динамики фазовой переменной.

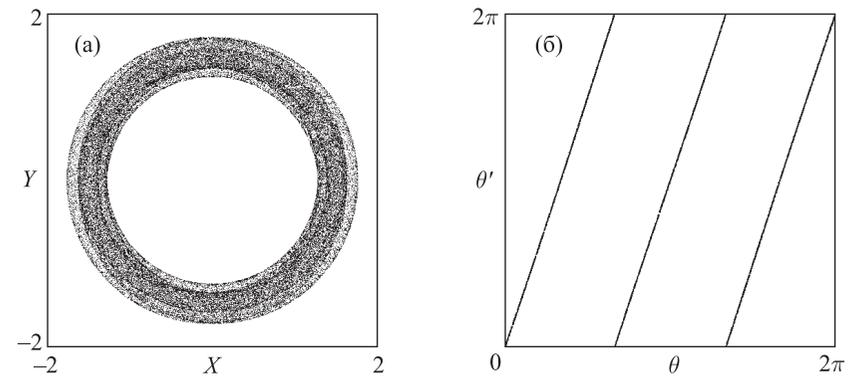


Рис. 10.5. Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в двумерной проекции на плоскость вспомогательных переменных, введенных в тексте и характеризующих амплитуды первых двух осцилляторов (а), и диаграммы для угловых переменных в последовательные моменты $t = nT$ (б) для системы (10.7) при $T = 10$, $\varepsilon = 0.06$, $A = 3$, $\omega_0 = 2\pi$

На рис. 10.6 представлены результаты расчета спектра показателей Ляпунова для отображения Пуанкаре системы (10.7). На диаграмме (а) приводится их зависимость от параметра интенсивности модуляции A при фиксированных остальных параметрах $T = 10$, $\varepsilon = 0.06$, $\omega_0 = 2\pi$. Диаграммы (б) и (в) представляют собой аналогичные графики, где показана зависимость от параметра связи ε (при $A = 3$, $T = 10$, $\omega_0 = 2\pi$) и от периода модуляции T (при $A = 3$, $\varepsilon = 0.06$, $\omega_0 = 2\pi$). Заметим, что старший показатель остается близким к $\ln 3$ в широком диапазоне изменения параметров, что подтверждает грубый характер динамики, обусловленной гиперболи-

ческой компонентой. Второй показатель не обнаруживает отличия от нуля и, очевидно, связан с медленно эволюционирующей фазовой переменной. Остальные показатели отрицательные. В частности, при $A = 3$, $T = 10$, $\varepsilon = 0.06$, $\omega_0 = 2\pi$ имеем

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = 1.099, \quad \Lambda_2 = 0.000, \quad \Lambda_3 = -3.373, \quad \Lambda_4 = -4.198, \\ \Lambda_6 = -6.326, \quad \Lambda_7 = -7.097, \quad \Lambda_8 = -11.041, \quad \Lambda_9 = -12.020. \end{aligned} \quad (10.8)$$

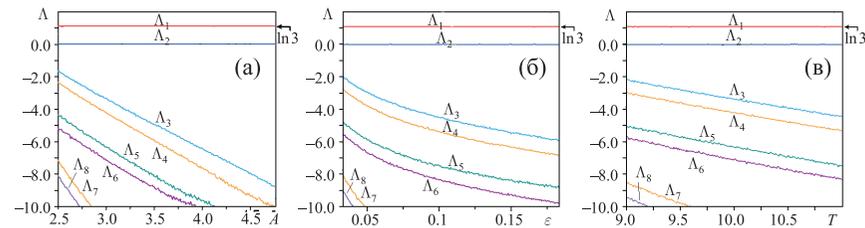


Рис. 10.6. Показатели Ляпунова для отображения Пуанкаре системы (10.7) в зависимости от параметров: (а) амплитуды модуляции A при $T = 10$, $\varepsilon = 0.06$, $\omega_0 = 2\pi$; (б) параметра связи ε при $A = 3$, $T = 10$, $\omega_0 = 2\pi$; (в) периода модуляции T при $A = 3$, $\varepsilon = 0.06$, $\omega_0 = 2\pi$

Интересно сравнить эти результаты с данными для однородно гиперболического аттрактора четырехмерной системы для действительных амплитуд. (Напомним, что уравнения (10.7) сводятся к ним в приближении медленно меняющихся амплитуд, см. раздел 10.4.) Как можно видеть, значения $\Lambda_1, \Lambda_4, \Lambda_7, \Lambda_8$ из списка (10.8) хорошо согласуются со значениями $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$ из списка (10.5). Размерность аттрактора отображения Пуанкаре по формуле Каплана–Йорке в данном случае составляет $D = 2 + (\Lambda_1 + \Lambda_2) / |\Lambda_3| \approx 2.33$. Целая часть отличается от оценки в предыдущем разделе из-за присутствия фазовой переменной, а дробная часть отличается, потому что показатель Λ_3 не имеет аналога в списке (10.5).

10.3. Модель двух попеременно возбуждаемых пар нерезонансных осцилляторов ван дер Поля

Рассмотрим еще один вариант системы, составленной из осцилляторов ван дер Поля, который более точно соответствует исходной модели (10.2),

и задается системой уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - [A \cos(2\pi t / T) - x_1^2 - \frac{1}{2} x_2^2] \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= \varepsilon \dot{y}_1, \\ \ddot{x}_2 - [A \cos(2\pi t / T) - \frac{1}{2} x_1^2 - x_2^2] \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= \varepsilon \dot{y}_2, \\ \ddot{y}_1 - [-A \cos(2\pi t / T) - y_1^2 - \frac{1}{2} y_2^2] \dot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 &= \varepsilon (x_1^2 - \frac{3}{2} x_2^2) \dot{x}_1, \\ \ddot{y}_2 - [-A \cos(2\pi t / T) - \frac{1}{2} y_1^2 - y_2^2] \dot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 &= \varepsilon (\frac{3}{2} x_1^2 - x_2^2) \dot{x}_2. \end{aligned} \quad (10.9)$$

В отличие от модели (10.7), первый и второй осцилляторы попеременно возбуждаемых подсистем характеризуются различными собственными частотами, которые предполагаются не удовлетворяющими резонансным условиям низкого порядка. Факторы $\frac{1}{2}$ введены при некоторых членах для того, чтобы обеспечить соответствие системы (10.2) в приближении, отвечающем методу медленных комплексных амплитуд в нерезонансной ситуации (см. раздел 10.4). Тем не менее передача возбуждения между первыми и вторыми осцилляторами одной и другой подсистем благодаря членам связи в правых частях уравнений является резонансной, поскольку собственные частоты осцилляторов, отмеченных одним и тем же индексом 1 или 2, совпадают в обеих подсистемах. Функционирование системы аналогично предыдущим моделям. При приближенном описании на основе вещественных уравнений для амплитуд (10.4) получаем гиперболический аттрактор типа Смейла–Вильямса в стробоскопическом отображении. В силу его грубости, естественно ожидать, что грубый хаос в динамике амплитуд сохранится также в системе (10.9), хотя аттрактор полной системы уравнений будет относиться к классу частично гиперболических аттракторов.

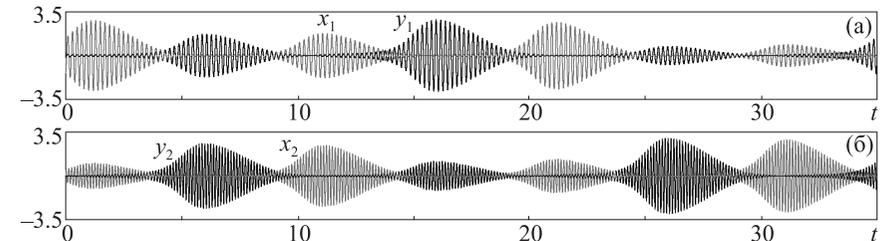


Рис. 10.7. Типичный образец зависимости от времени для координатных переменных четырех осцилляторов, полученный при численном решении уравнений (10.9) при $T = 10$, $A = 3$, $\varepsilon = 0.06$, $\omega_1 = 10\pi$, $\omega_2 = 16\pi$

Для иллюстрации динамики зададим параметры $A = 3$, $T = 10$, $\varepsilon = 0.06$, как и в предыдущих случаях. Что касается собственных частот ω_1 и ω_2 ,

уместно выбрать их в отношении, даваемом двумя последовательными числами Фибоначчи, чтобы избежать по крайней мере резонансов низкого порядка. Конкретно, положим $\omega_1 = 5\omega_0$, $\omega_2 = 8\omega_0$, где $\omega_0 = 2\pi$.

На рис. 10.8 показаны зависимости динамических переменных от времени, полученные из численного решения уравнений (10.9). Панели (а) и (б) представляют собой графики для обобщенных координат попарно связанных осцилляторов. Первая и вторая подсистемы активны поочередно, и интенсивности колебаний изменяются на последовательных стадиях активности хаотическим образом.

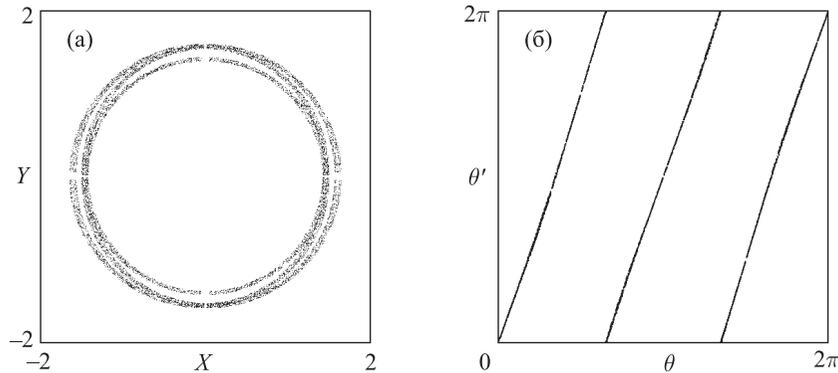


Рис. 10.8. Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в двумерной проекции на плоскость вспомогательных переменных, введенных в тексте и характеризующих амплитуды первых двух осцилляторов (а), и диаграммы для угловых переменных в последовательные моменты $t = nT$ (б) для системы (10.9) при $T = 10$, $\varepsilon = 0.06$, $A = 3$, $\omega_1 = 10\pi$, $\omega_2 = 16\pi$

Как и в предыдущем разделе, приходится уделить специальное внимание определению подходящей угловой координаты, чтобы проиллюстрировать связь амплитудной динамики с аттрактором Смейла–Вильямса. Определение должно быть выработано так, чтобы исключить непосредственное влияние на угловую переменную фаз осцилляторов, помеченных индексами 1 и 2. Подходящей оказывается следующая процедура. Для $i = 1, 2$, если $|x_i| > |u_i|$, полагаем $s_i = \text{sgn}(x_i)$, в противном случае — $s_i = \text{sgn}(u_i)$. Далее перед каждым шагом отображения Пуанкаре и после него вычисляем $X = s_1 \sqrt{x_1^2 + u_1^2}$, $Y = s_2 \sqrt{x_2^2 + u_2^2}$ и $X' = s_1 \sqrt{x_1'^2 + u_1'^2}$,

$Y = s_2 \sqrt{x_2'^2 + u_2'^2}$, где штрихами обозначены обновленные переменные. (Факторы $s_{1,2}$ считаются одинаковыми при вычислении как X, Y , так и X', Y' .) Окончательно, полагаем $\theta = \arg(X + iY)$ и $\theta' = \arg(X' + iY')$.

На рис. 10.8 показан портрет аттрактора в сечении Пуанкаре на плоскости переменных X, Y (панель (а)) и итерационная диаграмма для угловой переменной θ (панель (б)). Аттрактор демонстрирует сходство с тем, который был приведен на рис. 10.2, с некоторым поперечным уширением, возникающим, очевидно, из-за медленной эволюции фазовых переменных. Диаграмма для угловой переменной очень похожа на рис. 10.2б, который отвечал однородно гиперболическому аттрактору Смейла–Вильямса.

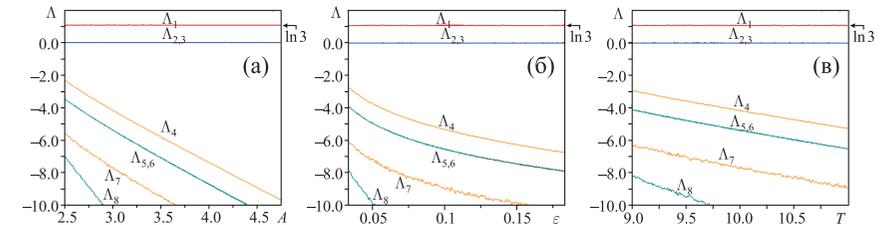


Рис. 10.9. Показатели Ляпунова для отображения Пуанкаре системы (10.9) в зависимости от параметров: (а) амплитуды модуляции A при $T = 10$, $\varepsilon = 0.06$, $\omega_1 = 10\pi$, $\omega_2 = 16\pi$; (б) параметра связи ε при $A = 3$, $T = 10$, $\omega_1 = 10\pi$, $\omega_2 = 16\pi$; (в) периода модуляции T при $A = 3$, $\varepsilon = 0.06$, $\omega_1 = 10\pi$, $\omega_2 = 16\pi$

На рис. 10.9 приводятся показатели Ляпунова для отображения Пуанкаре системы (10.9) в зависимости от параметра интенсивности модуляции A (а), параметра связи ε (б) и периода модуляции T (в) при фиксированных остальных параметрах. Вновь старший показатель близок к $\ln 3$ в широком диапазоне изменения параметров. Второй и третий показатели приблизительно нулевые и ассоциируются, очевидно, с двумя медленно эволюционирующими фазовыми переменными. Остальные показатели отрицательные. В частности, при $A = 3$, $T = 10$, $\varepsilon = 0.06$ имеем

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 1.081, & \Lambda_2 &= 0.000, & \Lambda_3 &= 0.000, & \Lambda_4 &= -4.173, \\ \Lambda_6 &= -5.385, & \Lambda_7 &= -5.386, & \Lambda_8 &= -7.717, & \Lambda_9 &= -10.632. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Эти результаты замечательно близки к данным, полученным при описании системы в рамках метода медленно меняющихся комплексных амплитуд (см. (10.6)). Оценка размерности по формуле Каплана–Йорке дает $D \approx 3.26$.

10.4. Описание моделей, построенных на основе осцилляторов ван дер Поля, методом медленно меняющихся амплитуд

При рассмотрении моделей на базе уравнений ван дер Поля и обсуждении численных результатов было упомянуто их соответствие уравнениям (10.4) при описании в рамках метода медленных амплитуд. Ниже приведены выкладки, подкрепляющие это утверждение.

Начнем с применения метода медленно меняющихся комплексных амплитуд (см. раздел 7.1) к системе (10.9). Для этого положим

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 e^{i\omega_1 t} + a_1^* e^{-i\omega_1 t}, & x_2 &= a_2 e^{i\omega_2 t} + a_2^* e^{-i\omega_2 t}, \\ y_1 &= b_1 e^{i\omega_1 t} + b_1^* e^{-i\omega_1 t}, & y_2 &= b_2 e^{i\omega_2 t} + b_2^* e^{-i\omega_2 t}, \end{aligned} \quad (10.11)$$

и

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= i\omega_1 a_1 e^{i\omega_1 t} - i\omega_1 a_1^* e^{-i\omega_1 t}, & \dot{x}_2 &= i\omega_2 a_2 e^{i\omega_2 t} - i\omega_2 a_2^* e^{-i\omega_2 t}, \\ \dot{y}_1 &= i\omega_1 b_1 e^{i\omega_1 t} - i\omega_1 b_1^* e^{-i\omega_1 t}, & \dot{y}_2 &= i\omega_2 b_2 e^{i\omega_2 t} - i\omega_2 b_2^* e^{-i\omega_2 t}, \end{aligned} \quad (10.12)$$

где $a_{1,2}(t)$, $b_{1,2}(t)$ — комплексные амплитуды, которые будем считать зависящими от времени. Одновременное выполнение соотношений (10.11) и (10.12) означает, что должны быть справедливы условия

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 e^{i\omega_1 t} + \dot{a}_1^* e^{-i\omega_1 t} &= 0, & \dot{a}_2 e^{i\omega_2 t} + \dot{a}_2^* e^{-i\omega_2 t} &= 0, \\ \dot{b}_1 e^{i\omega_1 t} + \dot{b}_1^* e^{-i\omega_1 t} &= 0, & \dot{b}_2 e^{i\omega_2 t} + \dot{b}_2^* e^{-i\omega_2 t} &= 0. \end{aligned} \quad (10.13)$$

(Поскольку мы вводим четыре комплексных переменных вместо четырех действительных, наложение этих дополнительных условий правомерно.)

Теперь подставим выражения для x и y через комплексные амплитуды в уравнения (10.9) и, учитывая соотношения (10.13), заменим производные от сопряженных переменных через сами комплексные амплитуды, например $\dot{a}_1^* e^{-i\omega_1 t} = -\dot{a}_1 e^{i\omega_1 t}$ и т. д. Полученная система уравнений является точным представлением исходных уравнений в новых переменных a_1 , a_2 , b_1 , b_2 . Следующий шаг состоит в учете медленности изменения комплексных амплитуд. Умножим уравнения для переменных a_1 и b_1 на $e^{-i\omega_1 t}$, а уравнения для a_2 и b_2 — на $e^{-i\omega_2 t}$ и выполним усреднение по быстрым осцилляциям. Учитывая отсутствия резонансов низкого порядка (соотношений типа $p\omega_1 = q\omega_2$ с целыми коэффициентами, меньшими 4), это соответствует просто исключению всех членов уравнения, содержащих экспо-

нциальные множители. После очевидных, хотя и громоздких, алгебраических преобразований получим в точности уравнения (10.2) для комплексных амплитуд a_1 , a_2 , b_1 , b_2 .

Применим теперь тот же метод к уравнениям (10.7). В этом случае все собственные частоты осцилляторов одинаковые, и мы используем соотношения (10.11)–(10.13), полагая $\omega_{1,2} = \omega_0$. После подстановки в уравнения (10.7) находим, что в усредненных уравнениях некоторые дополнительные члены сохраняются, и система уравнений получается в виде

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= \frac{1}{2} \left[A \cos(2\pi t / T) a_1 - |a_1|^2 a_1 - 2 |a_2|^2 a_1 + a_1^* a_2^2 \right] + \frac{1}{2} \varepsilon b_1, \\ \dot{a}_2 &= \frac{1}{2} \left[A \cos(2\pi t / T) a_2 - 2 |a_1|^2 a_2 + a_1^2 a_2^* - |a_2|^2 a_2 \right] + \frac{1}{2} \varepsilon b_2, \\ \dot{b}_1 &= \frac{1}{2} \left[-A \cos(2\pi t / T) b_1 - |b_1|^2 b_1 - 2 |b_2|^2 b_1 + b_1^* b_2^2 \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \varepsilon (|a_1|^2 a_1 - 6 |a_2|^2 a_1 + 3 a_1^* a_2^2), \\ \dot{b}_2 &= \frac{1}{2} \left[-A \cos(2\pi t / T) b_2 - 2 |b_1|^2 b_2 + b_1^2 b_2^* - |b_2|^2 b_2 \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \varepsilon (6 |a_1|^2 a_2 - 3 a_1^2 a_2^* - |a_2|^2 a_2). \end{aligned} \quad (10.14)$$

Хотя эти уравнения отличаются от исходной модели (10.2), их структура не противоречит предположению, что все амплитуды действительные, а в этом случае они сводятся к уравнениям (10.4).

Показатели Ляпунова, вычисленные для аттрактора стробоскопического отображения Пуанкаре системы (10.14) при $A = 3$, $T = 10$, $\varepsilon = 0.06$, таковы:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 1.097, & \Lambda_2 &= 0.000, & \Lambda_3 &= -3.414, & \Lambda_4 &= -4.167, \\ \Lambda_6 &= -6.204, & \Lambda_7 &= -7.584, & \Lambda_8 &= -10.834, & \Lambda_9 &= -11.845. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Они хорошо согласуются с данными (10.8), что подтверждает применимость метода медленных амплитуд к режиму функционирования системы, который здесь рассмотрен.

Итак, в настоящей главе рассмотрен подход к конструированию систем с аттрактором типа Смейла–Вильямса в стробоскопическом отображении для амплитуд осцилляторов, образующих систему, который основан на манипуляции угловой переменной, описывающей распределение амплитуд для автогенераторов, питающихся от общего источника энергии. За каждый период модуляции параметра, обусловленной внешним периодическим воздействием, эта переменная подвергается растягивающему отображению окружности. Предлагаемый принцип может быть реализован,

например, в системах электроники и нелинейной оптики для генерации грубого хаоса.

Тонкий момент состоит в том, что реализуемые примеры систем на основе осцилляторов ван дер Поля в разделах 10.2 и 10.3 сводятся к уравнениям с однородно гиперболическими аттракторами только в некотором приближении, соответствующем описанию в терминах действительных амплитуд и в пренебрежении фазами. При учете фаз аттракторы должны рассматриваться (предположительно) как относящиеся к классу частично гиперболических аттракторов. Тем не менее из-за структурной устойчивости аттрактора в амплитудных уравнениях естественно ожидать, что динамика амплитуд не нарушается влиянием динамики фаз и, следовательно, сохраняет свойства, присущие равномерно гиперболическому аттрактору. Данные численного моделирования, как представляется, подтверждают это предположение, но его математическое обоснование было бы, конечно, желательно.

В заключение отметим, что описанный выше подход к построению генераторов хаоса с гиперболическими аттракторами можно применить также к параметрическим системам [Кузнецов, 2012]. При этом, в отличие от схем, рассмотренных в главе 9, в качестве угловой переменной, претерпевающей кратное увеличение за характерный период, будет выступать не фаза параметрических колебаний, а величина, характеризующая распределение амплитуд двух колебательных элементов при параметрическом возбуждении от общего источника накачки.

Часть III

Проверка гиперболичности

Глава 11

Проверка трансверсальности пересечения многообразий

Физические и технические устройства обычно не приспособлены для облегчения математических доказательств в отношении описывающих их уравнений. Поэтому для проверки аттракторов, которые являются или потенциально могут быть равномерно гиперболическими, жизненно важным становится применение вычислительного инструментария. Обоснование гиперболичности необходимо для того, чтобы иметь возможность опираться в исследованиях и приложениях на соответствующие выводы математической теории, которые могут иметь существенное практическое значение, как, например, структурная устойчивость, или возможность описания динамики с использованием марковских разбиений с конечным алфавитом. Настоящая глава посвящена подходам к проверке трансверсальности взаимного расположения устойчивых и неустойчивых многообразий для орбит, принадлежащих аттрактору. Первый подход основан на визуализации многообразий путем их графического представления. Он годится в случае двумерных отображений Пуанкаре, когда нетривиальный аттрактор имеет один положительный и один отрицательный показатель Ляпунова. Второй подход, более общий, базируется на вычислении углов между векторами, касательными к устойчивым и неустойчивым многообразиям для представительного множества точек на аттракторе, с последующим анализом статистического распределения этих углов. Если равномерная гиперболичность имеет место, все наблюдаемые углы должны быть удалены от нуля.

11.1. Визуализация многообразий

Одно из главных свойств, непременно присущих гиперболическому инвариантному множеству, состоит в том, что для всех принадлежащих ему орбит взаимное расположение устойчивых и неустойчивых многообразий трансверсальное [Смейл, 1970; Williams, 1974; Синай, 1979; Shilnikov, 1997; Гукенхеймер и Холмс, 2002; Каток и Хасселблат, 1999; Afraimovich and Hsu, 2003; Каток и Хасселблат, 2005; Hasselblatt and Pesin, 2008]. Это означает, что пересечения между многообразиями могут иметь место исключительно под ненулевыми углами, без касания (или же пересечения вовсе отсутствуют, но этот случай не встречается для тех аттракторов, с которыми мы здесь имеем дело).

Простой и убедительный в качественном отношении способ проверки трансверсальности многообразий состоит в том, чтобы построить вычислительную процедуру их нахождения и представить многообразия графически, так, чтобы картина их расположения стала визуально наглядной и очевидной.

Рассмотрим диссипативную систему с дискретным временем, заданную отображением $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$, либо это может быть отображение Пуанкаре для системы с непрерывным временем. Отображение полагаем диффеоморфизмом с нетривиальным аттрактором A . Наше рассмотрение исходит из того, что отображение допускает вычисление с помощью компьютерной программы, как и соответствующее обратное отображение.

Чтобы иметь возможность простого графического представления результатов, ограничимся пока двумерными отображениями, считая, что для аттрактора A устойчивое и неустойчивое многообразия — одномерные: $N_S = 1$ и $N_U = 1$; при этом один показатель Ляпунова отрицательный и один положительный.

Чтобы нарисовать устойчивые и неустойчивые многообразия с помощью компьютера, поступаем следующим образом. Сначала для произвольно взятой точки на аттракторе $\mathbf{x} \in A$ находим образ, полученный N -кратным применением отображения, $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^N(\mathbf{x})$, и прообраз, полученный N -кратным применением обратного отображения $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^{-N}(\mathbf{x})$, где N — некоторое эмпирически подобранное целое число. Далее, задавая случайные начальные условия $\tilde{\mathbf{y}}$ в малой окрестности точки $\tilde{\mathbf{x}}$, прямыми итерациями отображения получаем множество точек $\mathbf{y} = \mathbf{f}^N(\tilde{\mathbf{y}})$, близких к неустойчивому многообразию исходной точки \mathbf{x} , которые прорисовывают это мно-

гообразии, будучи изображенными на графике. Аналогичным образом, используя случайные начальные условия $\bar{\mathbf{y}}$ в малой окрестности точки $\bar{\mathbf{x}}$, получаем изображение устойчивого многообразия, прорисованного набором точек $\mathbf{y} = \mathbf{f}^{-N}(\bar{\mathbf{y}})$. Формально говоря, точность, с которой рисуются многообразия, быстро увеличивается с ростом N , однако фактический выбор этого числа определяется компромиссом между повышением графической точности и численными ошибками, возникающими, если N слишком велико.¹

В ситуации, которую мы сейчас обсуждаем, неустойчивые многообразия одномерные и совпадают с волокнами аттрактора. Поэтому для заключения о трансверсальности достаточно на фоне портрета аттрактора изобразить лишь *устойчивые многообразия* для некоторого представительного множества точек. Рисунки, получаемые таким путем, оказываются обычно наглядными и убедительными для заключения о присутствии или отсутствии касания многообразий и, соответственно, о присутствии или отсутствии однородной гиперболичности. (Это, впрочем, не отменяет необходимость строгого математического доказательства.)

Диаграммы, представленные на рис. 11.1, относятся к двум однородно гиперболическим аттракторам, упомянутым в предыдущих главах. Панели (а) и (б) отвечают соответственно аттрактору типа Плыкина в отображении на плоскости (6.23) и DA-аттрактору отображения на торе (4.8). Собственно аттракторы представлены серым цветом, тогда как семейства устойчивых многообразий изображены на этом фоне черным цветом. Наглядно видна трансверсальность пересечений (с ненулевыми углами) устойчивых многообразий с волокнами аттрактора. Отметим, что семейства устойчивых многообразий визуальнo выглядят представительными: можно легко представить вид недостающих промежуточных кривых семейства.

Для сравнения на рис. 11.2 показаны диаграммы для хаотических аттракторов иной природы, не относящихся к классу однородно гиперболических. Первый из них — это аттрактор отображения Эно (а), а второй — аттрактор отображения Икеды (б) при задании параметров, отвечающих хаотической динамике с одним положительным и одним отрицательным показателем Ляпунова. Вычислительная процедура, использованная для построения этих диаграмм, в точности та же, как объясненная выше. Вновь

¹ Работая с этой картиной, вряд ли имеет смысл пытаться получить разрешение лучше, чем один пиксель изображения, а это легко достигается с помощью описанного простого метода. (Существуют, впрочем, и более аккуратные методы, см. [Krauskopf, 2005].)

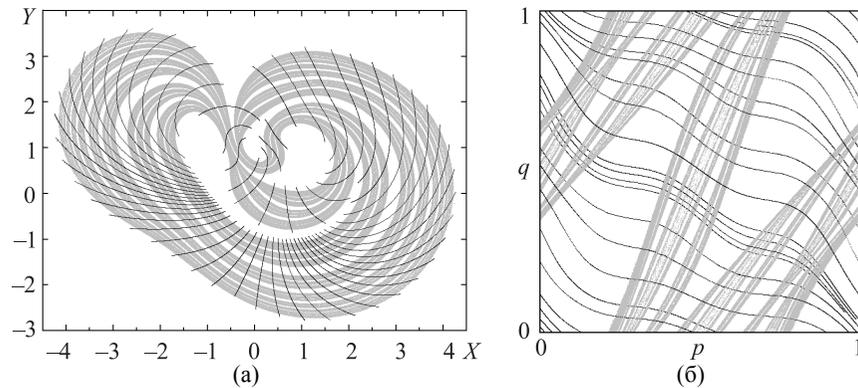


Рис. 11.1. Портреты хаотических однородно гиперболических аттракторов, показанные серым цветом, и семейства устойчивых многообразий, вычисленных, как описано в тексте, и представленных черным цветом. Из рисунков очевидна трансверсальность устойчивых многообразий (глобально на всем аттракторе) к волокнам, образующим его структуру. Диаграмма (а) относится к аттрактору типа Пликина отображения (6.23) при $\varepsilon = 0.77$, а диаграмма (б) соответствует DA-аттрактору отображения (4.8) при $\varepsilon = 0.7$

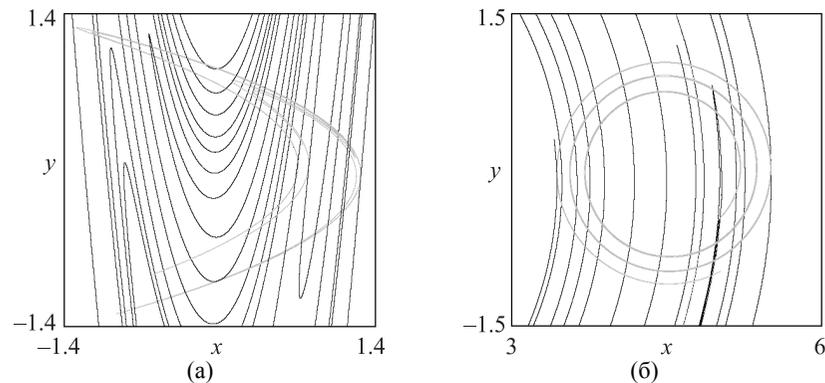


Рис. 11.2. Портреты хаотических аттракторов отображения Эно (A.4) при $a = 1.4$, $b = 0.3$ и отображения Икеды (A.16) при $A = 4.5$, $B = 0.2$, показанные серым цветом, и семейства устойчивых многообразий, рассчитанные, как объяснено в тексте, и показанные черным. Можно видеть касания, которые с очевидностью имеют место либо для показанных, либо для дополняемых мысленно кривых семейства устойчивых многообразий

семейства устойчивых многообразий выглядят представительными; легко можно мысленно дополнить их недостающими кривыми. Однако теперь характер их расположения существенно иной в сравнении с тем, что наблюдалось для случая однородной гиперболичности. А именно, устойчивые многообразия расположены так, что касания с волокнами аттрактора неизбежно присутствуют.

Интересно рассмотреть такую же процедуру в применении к аттрактору Лоренца, который занимает особое положение как относящийся к классу квазигиперболических или сингулярно гиперболических аттракторов. На рис. 11.3 соответствующая диаграмма показана для аттрактора системы Лоренца (4.3) при традиционном выборе параметров $r = 28$, $b = 8/3$, $\sigma = 10$. Для построения сечения Пуанкаре используется плоскость $z = r - 1$. На приведенной диаграмме не обнаруживается видимых касаний, но здесь присутствует особая ситуация взаимного расположения аттрактора и устойчивых многообразий вблизи краев двух кривых сегментов, которыми в сечении Пуанкаре представлены два лепестка аттрактора. Это та самая специфика, которая не позволяет отнести аттрактор Лоренца к классу однородно гиперболических аттракторов.

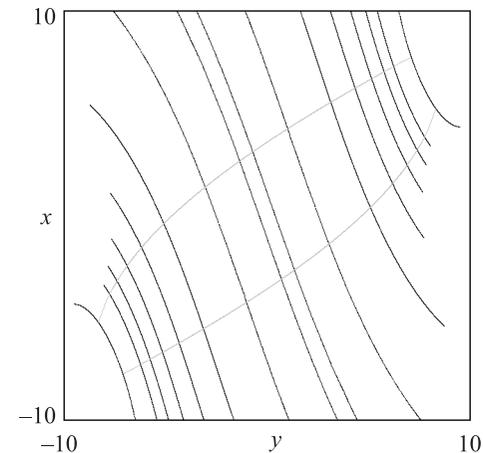


Рис. 11.3. Аттрактор Лоренца для системы (4.3) при $r = 28$, $b = 8/3$, $\sigma = 10$ в сечении Пуанкаре (показан серым цветом) и семейство устойчивых многообразий (черные кривые). Сечение Пуанкаре построено с использованием плоскости $z = r - 1$, причем учитываются пересечения орбит с плоскостью в направлении уменьшения переменной z

11.2. Распределение углов пересечения многообразий

Насколько известно автору, идея проверки гиперболичности на основе анализа статистического распределения углов между локальными устойчивыми и неустойчивыми многообразиями для седловых инвариантных множеств была предложена в работе [Lai et al., 1993]. Она использовалась применительно к некоторым седловым гиперболическим множествам [Hirata et al., 1999] и к аттракторам, не относящимся к классу однородно гиперболических [Anishchenko et al., 2000; Ginelli, 2007]. Позднее методика была развита в применении к аттрактору типа Смейла–Вильямса для стробоскопических отображений связанных неавтономных осцилляторов и модифицирована с тем, чтобы охватить случай высокой размерности устойчивого многообразия [Kuznetsov, 2005; Кузнецов и Селезнев, 2006]. Более продвинутый вариант методики основан на вычислении ковариантных ляпуновских векторов и главных углов между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями, которые могут иметь произвольную размерность [Kuptsov and Kuznetsov, 2009; Kuptsov, 2012].

Углы между подпространствами векторов малых возмущений определяются в точках одной и той же траектории, проходимой вперед и назад во времени. Если множество найденных величин углов не содержит значений близких к нулю, то это указывает на гиперболичность инвариантного множества. Если распределение свидетельствует о конечной положительной вероятности нулевых углов, то касания между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями присутствуют, и это значит, что гиперболичности нет. Эти касания могут говорить в пользу наличия квазиаттрактора в рассматриваемой диссипативной системе, представляющего собой сложно устроенное множество, содержащее, помимо хаотических орбит, также долгопериодические устойчивые циклы с весьма узкими областями притяжения [Shilnikov, 1997].

В случае двумерного отображения $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ процедура реализуется довольно просто. Сначала путем итераций отображения генерируем достаточно протяженную орбиту \mathbf{x}_n , относящуюся к анализируемому аттрактору. Затем, взяв случайные начальные условия, из уравнений в вариациях получаем две последовательности векторов возмущения, одну путем итерирования в прямом времени, $\tilde{\mathbf{u}}_{n+1} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)\tilde{\mathbf{u}}_n$, а вторую итерациями в обратном времени, $\tilde{\mathbf{v}}_n = (\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n))^{-1}\tilde{\mathbf{v}}_{n+1}$, где $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)$ обозначает матричную производную отображения, а $(\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n))^{-1}$ представляет собой обратную матрицу.

Чтобы исключить переполнение регистров при вычислениях, векторы на каждом шаге подвергаются нормализации: $\tilde{\mathbf{u}}'_{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}_{n+1} / \|\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}\|$ и $\tilde{\mathbf{v}}'_n = \tilde{\mathbf{v}}_n / \|\tilde{\mathbf{v}}_n\|$. Угол между каждой парой векторов $\tilde{\mathbf{u}}_n$ и $\tilde{\mathbf{v}}_n$ определяется из их скалярного произведения: $\theta_n = \arccos(\tilde{\mathbf{u}}_n \cdot \tilde{\mathbf{v}}_n)$. Далее, для накопленного множества углов $\{\theta_n\}$ строится гистограмма, позволяющая судить, имеется или нет статистически значимое присутствие углов вблизи нуля.

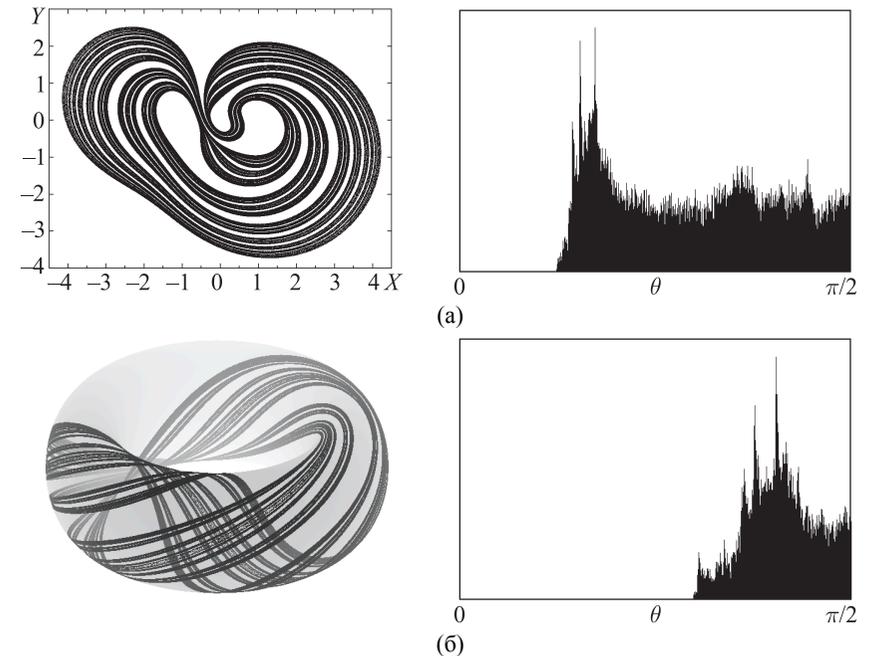


Рис. 11.4. Однородно гиперболические аттракторы и гистограммы углов пересечения локальных устойчивых и неустойчивых многообразий: (а) аттрактор типа Пльикина в отображении (6.23) при $\varepsilon = 0.77$ и (б) DA-аттрактор на торе для отображения (4.8) при $\varepsilon = 0.7$

На рис. 11.4 показаны гистограммы, полученные в результате вычислений для однородно гиперболических аттракторов, одна — для аттрактора типа Пльикина в отображении (6.23), другая — для DA-аттрактора отображения на торе (4.8). На обоих графиках можно видеть хорошо выраженный зазор, отделяющий область наблюдаемых углов от нуля.

Поучительно сравнить эти диаграммы с теми, которые получаются для аттракторов, не являющихся однородно гиперболическими (рис. 11.5). Одна гистограмма получена для аттрактора Эно в отображении (A.4), а другая — для аттрактора отображения Икеды (A.16) при выборе параметров, отвечающих хаотической динамике при наличии одного положительного и одного отрицательного показателя Ляпунова (приложение А).

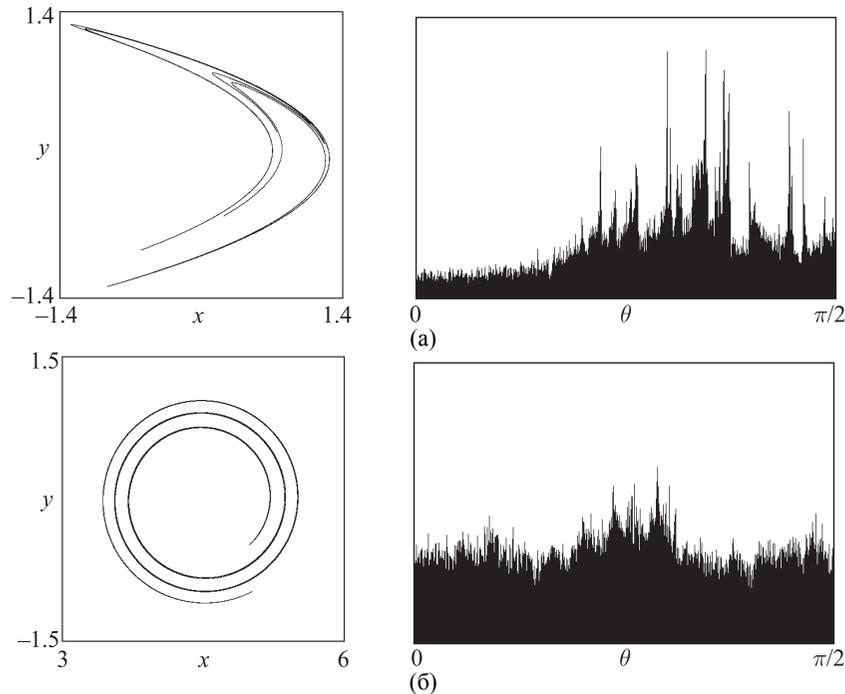


Рис. 11.5. Негиперболические хаотические аттракторы и гистограммы углов пересечений устойчивого и неустойчивого многообразий. Приведены данные для отображения Эно (A.4) при $a = 1.4$, $b = 0.3$ (а) и для отображения Икеды (A.16) при $A = 4.5$, $B = 0.2$ (б). Обратите внимание на явно отличную от нуля вероятность появления углов в области нуля

Еще один интересный для сравнения объект — это аттрактор Лоренца, классифицируемый как квазигиперболический, или сингулярно гиперболический. Вычисления выполнялись для отображения Пуанкаре, полученного численным решением уравнений Лоренца (4.3) для классического на-

бора параметров $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ с привлечением интерполяционной процедуры для точного определения моментов прохода через секущую поверхность, предложенной Эно [Hénon, 1982].

Сначала была получена достаточно длинная опорная траектория, принадлежащая аттрактору Лоренца, а затем проводилось решение соответствующих линеаризованных уравнений вдоль этой орбиты вперед и назад во времени для получения нормированных векторов возмущения, отвечающих моменту прохода сечения Пуанкаре — плоскости $z = r - 1$ в фазовом пространстве. Гистограмма распределения углов показана на рис. 11.6. Видно, что в этом случае распределение выглядит удаленным от нуля, так же как в рассмотренных выше случаях однородно гиперболических аттракторов, и контрастирует с негиперболическими ситуациями, отвечающими рисунку 11.5. Так что данный метод не дает возможности убедительно отличить аттрактор Лоренца от однородно гиперболического аттрактора.

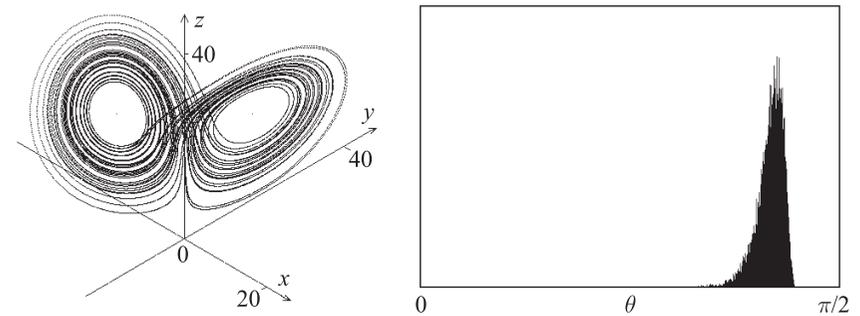


Рис. 11.6. Аттрактор Лоренца и гистограмма распределения углов пересечения локальных устойчивого и неустойчивого многообразий для этого сингулярно гиперболического аттрактора в сечении Пуанкаре. Модель задана уравнениями (4.3) при $r = 28$, $b = 8/3$, $\sigma = 10$. Сечение Пуанкаре задается плоскостью $z = r - 1$, причем учитываются только пересечения, сопровождающиеся уменьшением переменной z

Обратимся теперь к обобщению метода, пригодному для более высоких размерностей устойчивых многообразий. В этом случае техника вычисления локальных устойчивых многообразий и определения образуемых углов с неустойчивыми многообразиями нуждается в пересмотре. Примерами, для которых такая потребность возникает, могут служить описанные в предыдущих главах системы с аттракторами типа Смейла–Вильямса. Например, в отображении Пуанкаре моделей (7.9) и (8.3) устойчивые многообразия трехмерные, т. е. $N_s = 3$, а для моделей (6.6) и (8.8) они двумерные, $N_s = 2$.

Начнем снова с вычисления опорной орбиты $\mathbf{x}(t)$ на аттракторе за достаточно большой временной интервал. Затем берем линеаризованные уравнения для возмущений и интегрируем их вдоль опорной траектории, вначале вперед во времени, с нормировкой вектора на каждом шаге на некоторую фиксированную величину, чтобы исключить расходимость. В результате получаем набор векторов $\{\mathbf{u}_n\}$. Далее выполняем решение линеаризованных уравнений вдоль той же опорной траектории назад во времени для совокупности из N_S штук векторов возмущения. Для них на каждом шаге, отвечающем одной обратной итерации отображения Пуанкаре, производим ортогонализацию по Граму–Шмидту и процедуру нормировки векторов (точно так же, как при вычислении показателей Ляпунова), что позволяет избежать расходимости и доминирования одного из векторов. В результате получаем набор векторов $\{\mathbf{v}_n^{(1)}, \mathbf{v}_n^{(2)}, \dots, \mathbf{v}_n^{(N_S)}\}$. Теперь при каждом n вектор \mathbf{u}_n определяет локальное неустойчивое направление, а линейное векторное пространство, натянутое на векторы $\{\mathbf{v}_n^{(1)}, \mathbf{v}_n^{(2)}, \dots, \mathbf{v}_n^{(N_S)}\}$, отвечает локальному N_S -мерному устойчивому многообразию. Чтобы вычислить угол θ_n между ними, вначале определяем вектор \mathbf{z}_n , ортогональный к устойчивому многообразию из решения линейной системы N_S уравнений

$$\mathbf{z}_n \cdot \mathbf{v}_n^{(1)} = 0,$$

$$\mathbf{z}_n \cdot \mathbf{v}_n^{(2)} = 0,$$

...

$$\mathbf{z}_n \cdot \mathbf{v}_n^{(N_S)} = 0.$$

Затем вычисляем угол $\beta_n \in [0, \pi/2]$ между векторами \mathbf{u}_n и \mathbf{z}_n , используя соотношение $\cos \beta_n = |\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{z}_n| / (|\mathbf{u}_n| |\mathbf{z}_n|)$, и окончательно полагаем $\theta_n = \pi/2 - \beta_n$.² Представляя теперь графически гистограммы для углов θ_n ,

² Замечательный способ упрощения вычислений указан в работе [Kuptsov, 2012]. В соответствии с этим предложением в обратном времени вычисляется набор векторов, определяющих ортогональное дополнение к устойчивому подпространству, путем решения вдоль опорной траектории системы линейных уравнений, полученных из обычных уравнений в вариациях применением операции сопряжения. В ситуациях, рассматриваемых в данной главе, при вычислениях в обратном времени требуется иметь дело всего лишь с одним-единственным вектором! При этом получаемые результаты совпадают с описанным в тексте методом в пределах машинной точности. Преимущество указанного способа с точки зрения экономии вычислительных ресурсов становится особенно значительным для систем высокой размерности, где большая часть измерений пространства состояний отвечает за сжатие фазового объема.

можно визуально оценить, является ли распределение удаленным от нуля или имеется ненулевая вероятность появления близких к нулю углов, что означает отсутствие гиперболичности.

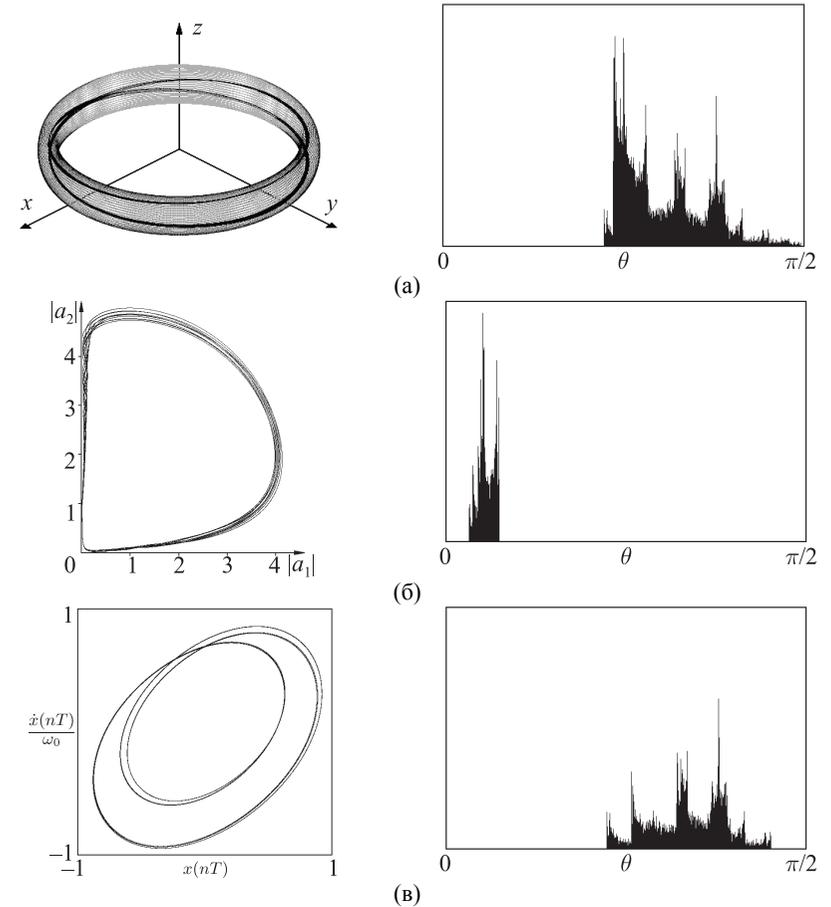


Рис. 11.7. Аттракторы и гистограммы распределений углов между устойчивым и неустойчивым многообразиями. Модельное отображение (6.6) при $d_1 = d_2 = 2$, $\mu = 2$ (а); трехмерное отображение Пуанкаре автономной модели (8.8) (б); стробоскопическое отображение для попеременно возбуждаемых неавтономных осцилляторов (7.9) при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 6$, $A = 5$, $\varepsilon = 0.5$ (в); отображение Пуанкаре модели (8.3) при $\varepsilon = 0.1$, $a = 0.6$, $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.3$ (г)

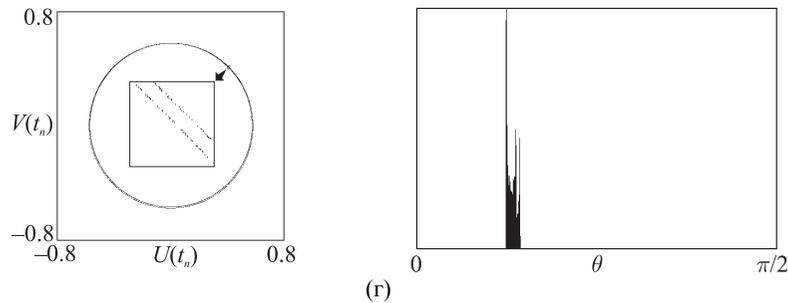


Рис. 11.7. (продолжение)

Примеры представлены на рис. 11.7, где панели (а) и (б) соответствуют моделям с трехмерными отображениями Пуанкаре, а панели (в), (г) — моделям с четырехмерными отображениями Пуанкаре.

Панель (а) относится к модели с аттрактором Смейла–Вильямса, построенной в разделе 6.1, как пример потоковой системы, описываемой системой переключаемых дифференциальных уравнений третьего порядка. Стробоскопическое отображение Пуанкаре при этом выражается в явном виде соотношением (6.6). Значения параметров $d_1 = d_2 = 2$, $\mu = 2$.

На панели (б) представлены данные для аттрактора Смейла–Вильямса в трехмерном отображении Пуанкаре автономной модели, построенной на основе системы «хищник–жертва» в работе [Kuznetsov and Pikovsky, 2008] и обсужденной в разделе 8.2 (см. уравнения (8.8)). Значения параметров $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.3$.

Панель (в) отвечает описываемой уравнениями (7.9) модели двух неавтономных попеременно возбуждающихся осцилляторов ван дер Поля, передающих возбуждение друг другу поочередно с трансформацией фазы, приближенно описываемой растягивающим отображением окружности. Стробоскопическое отображение Пуанкаре четырехмерное. Значения параметров $\omega_0 = 2\pi$, $T = 6$, $A = 5$, $\varepsilon = 0.5$.

Панель (г) относится к автономной системе с аттрактором типа Смейла–Вильямса, введенной в разделе 8.1 (см. уравнения (8.3)). Отображение Пуанкаре четырехмерное. Значения параметров $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.3$.

Как можно видеть, все гистограммы на рис. 11.7 с определенностью демонстрируют наличие зазора, отделяющего распределение от области близких к нулю углов. Это свидетельствует об отсутствии касаний устойчивых многообразий с неустойчивыми, что согласуется с гиперболической природой этих аттракторов и с другими методами их анализа.

Глава 12

Визуализация инвариантных мер

Одно из свойств однородно гиперболических аттракторов состоит в том, что с ними ассоциируются абсолютно непрерывные инвариантные меры Синяя–Рюэля–Боуэна. Имея в виду аттракторы с единственным положительным показателем Ляпунова, ситуацию качественно можно пояснить так, что аттрактор характеризуется распределением фазовой жидкости, плавно меняющимся вдоль образующих его волокон, без локальных уплотнений (сингулярностей). В настоящей главе рассматривается техника визуализации естественных инвариантных мер на волокнах аттракторов, использование которой позволяет судить о наличии или отсутствии сингулярностей, а значит, для проверки на качественном уровне наличия или отсутствия гиперболичности.

12.1. Методика визуализации инвариантных мер

Когда динамика диссипативной динамической системы интерпретируется как эволюция облака изображающих точек в фазовом пространстве, стационарное распределение, возникающее в пределе больших времен наблюдения, согласно принятой терминологии, отвечает инвариантной мере, ассоциирующейся с данным аттрактором. Согласно теореме Крылова и Боголюбова [Аносов, 1994], естественную инвариантную меру как относительную вероятность пребывания представительной орбиты на измеримом множестве в фазовом пространстве можно ввести при очень широких допущениях. Однако для негиперболических аттракторов соответствующие распределения характеризуются присутствием локальных сингулярностей. Гиперболический хаос, с другой стороны, отвечает ситуациям, когда эволюция облака точек в фазовом пространстве, включающая растяжение, складывание и сжатие, осуществляется совершенным образом, без разрывов, изломов и появления локальных уплотнений. В этих случаях мы имеем дело с инвариантными мерами Синая–Рюэля–Боуэна [Синай, 1972; Bowen, 1975; Ruelle, 1976]. Они являются, как принято говорить, абсолютно непрерывными, что отвечает плавному распределению фазовой жидкости вдоль волокон аттрактора. На основании сказанного можно полагать, что визуализация распределений инвариантных мер будет полезным и наглядным инструментом для распознавания гиперболических и негиперболических аттракторов.

Простейший способ визуализировать инвариантную меру состоит в том, чтобы ввести сетку из ячеек в области фазового пространства, содержащей аттрактор, и по ходу вычислений на компьютере накапливать массив величин, характеризующих относительное время пребывания в этих ячейках. Затем полученные вероятности пребывания в ячейках представляются графически с использованием подходящей системы координат [Tél and Gruiz, 2006]. Недостатком этого метода при практическом его применении является относительно большая величина статистических флуктуаций оценок вероятностей. Из-за этого визуальное различие между графиками, построенными для гладких и сингулярных распределений, подчас не выглядит впечатляющим. По этой причине стоит обратиться к модификации метода, рассмотренной ниже. Здесь она будет изложена применительно к аттрактору с одномерными неустойчивыми многообразиями.

Модифицированный подход состоит в графическом представлении распределения вероятностей вдоль одномерного неустойчивого многообразия, то есть вдоль одного из волокон, образующих аттрактор. В применении к некоторому отображению $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, соответствующему системе с дис-

кретным временем или отображению Пуанкаре системы с непрерывным временем, алгоритм строится следующим образом.¹

1. Выбираем точку на аттракторе $\mathbf{x}_0^{(0)}$ и близкую к ней точку $\mathbf{x}_0^{(1)}$ на малом расстоянии $\|\Delta\mathbf{x}\| = \varepsilon_0$ (скажем, $\varepsilon_0 \sim 0.001$).

2. Проводим итерации отображения $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, начиная от обеих начальных точек, пока расстояние между образами не станет больше, чем $10\varepsilon_0$; результирующие точки обозначим $\mathbf{x}_n^{(0)}$ и $\mathbf{x}_n^{(1)}$.

3. Теперь переопределим исходную пару точек, полагая $\mathbf{x}_0^{(0)} = \mathbf{x}_n^{(0)}$ и $\mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{x}_n^{(0)} + \varepsilon_0 (\mathbf{x}_n^{(1)} - \mathbf{x}_n^{(0)}) / \|\mathbf{x}_n^{(1)} - \mathbf{x}_n^{(0)}\|$.

4. Повторим шаги 2 и 3 достаточно много раз (скажем, порядка 10^3); тогда обе начальных точки окажутся практически на одном и том же общем неустойчивом многообразии.

5. Разделим сегмент между начальными точками на некоторое большое число малых сегментов, добавляя промежуточные точки (их количество может быть взято, скажем, порядка 10^5).

6. Проводим итерации отображения, стартуя из всех этих точек, пока для какой-либо пары смежных точек максимальное расстояние не превысит заданную величину, скажем $50\varepsilon_0$.

7. Каждому из сегментов приписываем число, обратное его длине, которое пропорционально плотности распределения меры на этом интервале.

8. Для визуализации результирующие величины нормируются к наибольшей из них, так что получаются числа в единичном интервале от 0 до 1, и представляются графически в подходящей системе координат в пропорциональном или логарифмическом масштабе.

Построенный график можно считать репрезентативным, если охваченный в итоге сегмент неустойчивого многообразия, занимаемый рассмотренными точками, достаточно длинный, чтобы покрыть аттрактор много раз, выявляя его тонкую поперечную фрактальную структуру до достаточного глубокого уровня.

12.2. Численные результаты для гиперболических и негиперболических аттракторов

Диаграммы, полученные с использованием описанной выше схемы вычислений для однородно гиперболических аттракторов в модельных системах, обсуждавшихся в предыдущих главах, представлены на рис. 12.1–12.3.

¹ Алгоритм предложен и реализован И. Р. Сатаевым.

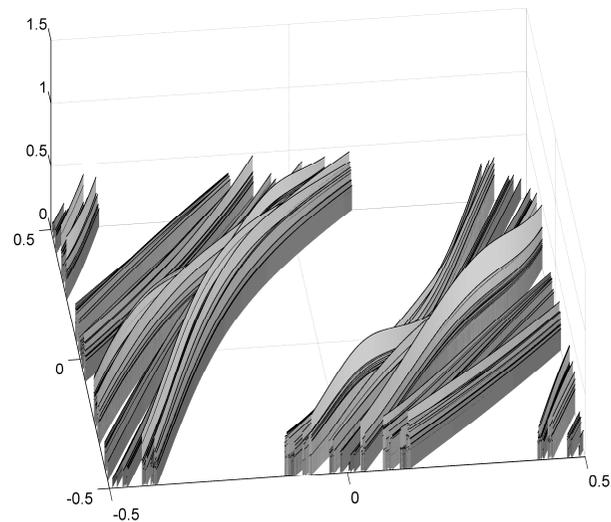


Рис. 12.1. Диаграмма, иллюстрирующая распределение инвариантной меры Синая–Рюэля–Боуэна вдоль неустойчивых многообразий однородно гиперболического аттрактора типа DA для отображения (4.8) при $\varepsilon = 0.7$

Рис. 12.1 показывает распределение инвариантной меры на DA-аттракторе отображения (4.8) при $\varepsilon = 0.7$. Единичный квадрат на горизонтальной плоскости соответствует развертке поверхности тора, на которой определено отображение. Рис. 12.2 относится к аттрактору типа Плыкина на плоскости для модели, описываемой отображением (6.23) при $\varepsilon = 0.77$. Рис. 12.3 соответствует аттрактору типа Смейла–Вильямса в стробоскопическом отображении Пуанкаре системы двух попеременно возбуждающихся неавтономных осцилляторов ван дер Поля (7.9) при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 6$, $A = 5$, $\varepsilon = 0.5$. В этом случае отображение Пуанкаре четырехмерное, так что распределение инвариантной меры показано для проекции аттрактора на плоскость двух динамических переменных $(x, \dot{x} / \omega_0)$. Во всех этих случаях вдоль волокон аттракторов имеет место гладкое распределение плотности вероятности, что при использованном методе визуализации видно очень хорошо.

Для сравнения обсудим результаты для негиперболических аттракторов, например для отображений Эно и Икеды. Диаграммы, полученные для этих систем с применением той же самой описанной выше схемы вычислений, приведены на рис. 12.4 и 12.5. Распределения вероятности вдоль

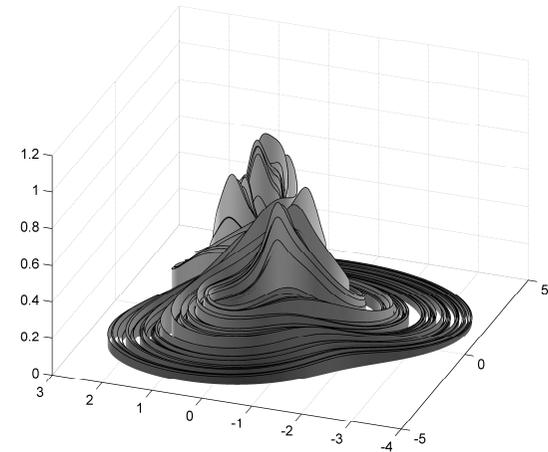


Рис. 12.2. Диаграмма, иллюстрирующая распределение инвариантной меры Синая–Рюэля–Боуэна вдоль неустойчивых многообразий аттрактора типа Плыкина на плоскости, полученное для отображения (6.23) при $\varepsilon = 0.77$

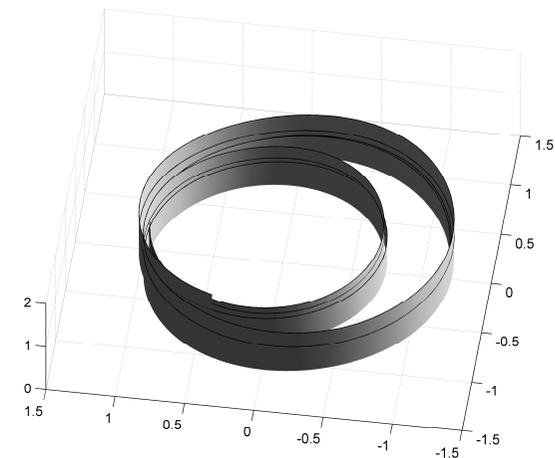


Рис. 12.3. Диаграмма, иллюстрирующая распределение инвариантной меры Синая–Рюэля–Боуэна вдоль неустойчивых многообразий аттрактора типа Смейла–Вильямса для стробоскопического отображения Пуанкаре в системе двух попеременно возбуждающихся неавтономных осцилляторов ван дер Поля (7.9) при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 6$, $A = 5$, $\varepsilon = 0.5$

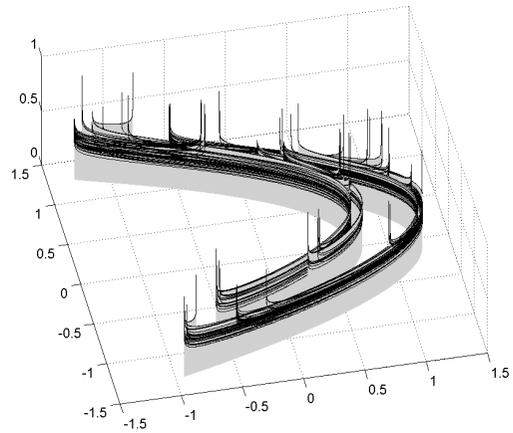


Рис. 12.4. Диаграмма, иллюстрирующая распределение инвариантной меры для аттрактора отображения Эно (A.4) при $a = 1.4$, $b = 0.3$. По вертикальной оси использован логарифмический масштаб, чтобы сделать более наглядным представление как сингулярной, так и несингулярной компонент распределения

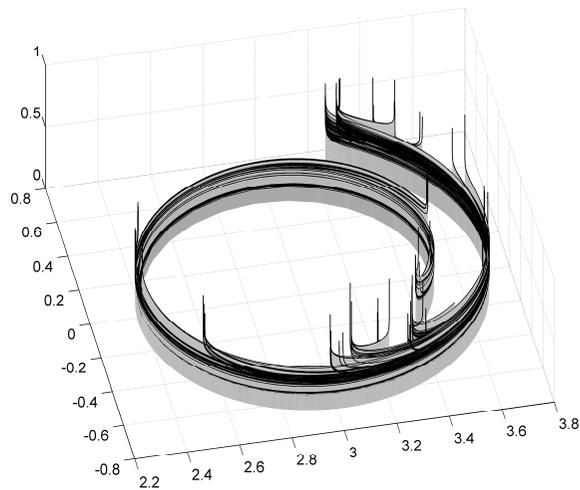


Рис. 12.5. Диаграмма, иллюстрирующая распределение инвариантной меры для аттрактора отображения Икеды (A.16) при $A = 4.5$, $B = 0.2$. По вертикальной оси использован логарифмический масштаб, чтобы сделать более наглядным представление как сингулярной, так и несингулярной компонент распределения

волокон этих аттракторов выглядят сильно неоднородными и содержат особенности в виде резких и высоких пиков. Чтобы их представить в соизмеримом масштабе с остальной частью распределения, по вертикальной оси на графиках использована логарифмическая шкала. Эти диаграммы представляют впечатляющий контраст в сравнении с ситуацией однородно гиперболических аттракторов.

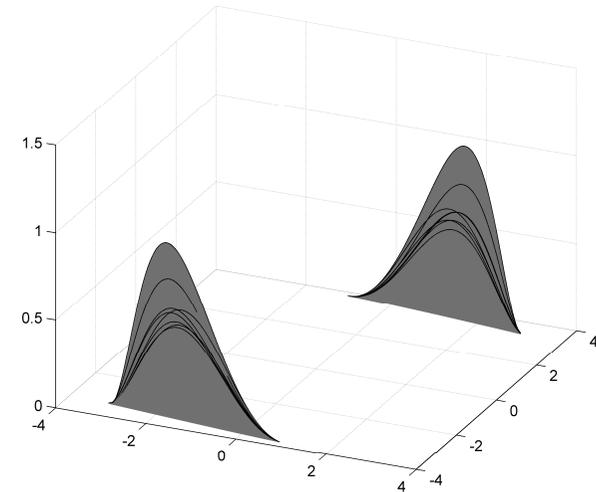


Рис. 12.6. Диаграмма, иллюстрирующая распределение инвариантной меры для аттрактора Лоренца в модели (4.3) при $r = 28$, $b = 8/3$, $\sigma = 6$ в сечении Пуанкаре плоскостью $z = r - 1$

Наконец, интересно рассмотреть специальный случай квазигиперболического (или сингулярно гиперболического) аттрактора Лоренца. Соответствующая диаграмма показана на рис. 12.6. Она получена для двумерного отображения Пуанкаре модели Лоренца (4.3) при величинах параметров $r = 28$, $b = 8/3$, $\sigma = 6$. В качестве сечения Пуанкаре взята плоскость $z = r - 1$, причем учитываются прохождения траекторий через эту поверхность в направлении уменьшения переменной z . В этом случае построение не выявляет сингулярностей в распределении инвариантной меры, как в двух предыдущих примерах. Однако здесь присутствует заметное отличие в сравнении с однородно гиперболическими аттракторами. Оно состоит в обращении в нуль функции плотности распределения в определенных концевых точках фрагментов, представляющих неустойчивое многообра-

зие в сечении Пуанкаре. Для однородно гиперболических аттракторов распределения локально гладкие и не приближаются к нулю нигде, вдоль всего неустойчивого многообразия.

В качестве заключения можно сказать, что развитая техника доставляет довольно эффективный инструмент распознавания гиперболической или негиперболической природы аттракторов на основании численных расчетов, по крайней мере на качественном уровне.

Глава 13

Критерий конусов

В главе 3, где проводился обзор содержания и результатов гиперболической теории, кратко рассказывалось о критерии конусов [Синай, 1979; Hasselblatt and Pesin, 2008], который доставляет необходимое и достаточное условие гиперболичности инвариантного множества, пригодное для проверки на компьютере. Первая известная попытка применения этого критерия в компьютерных вычислениях была представлена в работе Синай и Вул для системы Лоренца [Sinai and Vul, 1981]. В последнее время этот критерий применялся для компьютерного обоснования гиперболичности в моделях, предложенных в главах 5–10 [Кузнецов и Сатаев, 2006; Kuznetsov and Sataev, 2007; Kuznetsov et al., 2007; Кузнецов, 2009; Kuznetsov, 2009; Кузнецов и др., 2010]. В данной главе мы вернемся к этому предмету и рассмотрим критерий конусов в более подробном и конструктивном ключе, а также разьясим конкретное содержание вычислительных процедур.

13.1. Процедура проверки критерия конусов

Будем обсуждать здесь критерий конусов только для аттракторов с единственным положительным показателем Ляпунова для отображений, являющихся диффеоморфизмами. Их можно полагать относящимися либо к описанию динамики в дискретном времени, либо к системам с непрерывным временем, описываемым в терминах сечений Пуанкаре.

Пусть имеем диссипативное отображение $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_n)$, где \mathbf{x} — N -мерный вектор, и пусть у него имеется аттрактор A , который должен быть проанализирован. Наряду с этим мы рассматриваем линейное отображение $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{g}'(\mathbf{x}_n)\mathbf{u}_n$, описывающее эволюцию инфинитезимальных возмущений. Здесь $\mathbf{g}'(\mathbf{x})$ представляет собой матричную производную отображения \mathbf{g} в точке \mathbf{x} ; это квадратная матрица размера $N \times N$, которую называют матрицей Якоби. В наших рассуждениях предполагается, что отображение \mathbf{g} и матрицы $\mathbf{g}'(\mathbf{x})$ допускают вычисление для анализируемой динамической системы посредством компьютерной программы.

Рассмотрим подробно процедуру проверки критерия конусов в некоторой опорной точке фазового пространства \mathbf{x} . Для дальнейшего нам понадобятся также точка образа $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ и точка прообраза $\tilde{\mathbf{x}}$, такая, что $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}})$. Пусть γ — некоторая фиксированная константа, превышающая 1.

Матричная производная отображения \mathbf{g} в опорной точке $\mathbf{v} = \mathbf{g}'(\mathbf{x})$ действует в линейном пространстве векторов $\mathbf{u} = \{u_0, u_2, \dots, u_{N-1}\}$, которое называется касательным пространством в точке \mathbf{x} . С использованием вспомогательной симметричной матрицы $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{v}^T \mathbf{v}$ квадрат евклидовой нормы вектора $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{v}\mathbf{u}$ можно записать как

$$\|\bar{\mathbf{u}}\|^2 = \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{b}} \mathbf{u}, \quad (13.1)$$

где верхний индекс T означает транспонирование. Множество векторов

$$S_{\mathbf{x}} = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{b}} \mathbf{u} \geq \gamma^2 \mathbf{u}^T \mathbf{u} \right\} \quad (13.2)$$

есть по определению расширяющийся конус в точке \mathbf{x} . Используя ту же самую матрицу $\hat{\mathbf{b}}$, можно определить множество

$$C'_{\bar{\mathbf{x}}} = \left\{ \mathbf{u} \mid \gamma^2 \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{b}} \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^T \mathbf{u} \right\}. \quad (13.3)$$

Это множество есть прообраз сжимающегося конуса, определенного в точке $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$.

Теперь рассмотрим матричную производную обратного отображения $\mathbf{w} = (\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}))'$. Заметим, что эту матрицу можно найти, не прибегая к вычислению обратного отображения как такового, через обратную матрицу для матрицы-производной отображения \mathbf{g} в точке прообраза $\tilde{\mathbf{x}}$: $\mathbf{w} = (\mathbf{g}'(\tilde{\mathbf{x}}))^{-1}$. Вводя симметричную матрицу $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{w}^T \mathbf{w}$, запишем квадрат нормы вектора $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{w}\mathbf{u}$ как

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|^2 = \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{a}} \mathbf{u}. \quad (13.4)$$

С помощью матрицы $\hat{\mathbf{a}}$ можно определить множество

$$C_{\mathbf{x}} = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{a}} \mathbf{u} \geq \gamma^2 \mathbf{u}^T \mathbf{u} \right\}, \quad (13.5)$$

которое представляет собой сжимающийся конус в точке \mathbf{x} , и множество

$$S'_{\tilde{\mathbf{x}}} = \left\{ \mathbf{u} \mid \gamma^2 \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{a}} \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^T \mathbf{u} \right\}, \quad (13.6)$$

которое отвечает образу расширяющегося конуса, определенного в точке $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x})$.

В вычислениях должны быть проверены, во-первых, существование непустых конусов, удовлетворяющих приведенным определениям, и, во-вторых, инвариантность конусов, то есть справедливость вложений $S'_{\tilde{\mathbf{x}}} \subset S_{\mathbf{x}}$ и $C'_{\bar{\mathbf{x}}} \subset C_{\mathbf{x}}$.

Требуемые вложения можно переформулировать в терминах квадратичных форм, ассоциирующихся с матрицами $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{b}} - \Gamma^2 \hat{\mathbf{c}}$ и $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}} - \Gamma^{-2} \hat{\mathbf{c}}$, где $\hat{\mathbf{c}}$ — единичная матрица, и постоянный множитель Γ считается равным величине γ или $1/\gamma$ в зависимости от того, рассматриваем ли мы расширяющиеся или сжимающиеся конусы. Очевидно, уравнения

$$\sum_{m,n=0}^{N-1} b_{mn} u_m u_n = 0 \quad (13.7)$$

и

$$\sum_{m,n=0}^{N-1} a_{mn} u_m u_n = 0 \quad (13.8)$$

определяют границы конусов.

Матрица $\hat{\mathbf{b}}$ размера $N \times N$ является симметричной и положительно определенной (как произведение двух взаимно транспонированных матриц). Собственные числа этой матрицы все положительные, и можно определить соответствующий ортогональный базис, состоящий из единичных векторов $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{N-1}$. Будем считать, что собственные числа занумерованы в убывающем порядке. Используя матрицу $\mathbf{D} = (\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{N-1})$, преобразуем матрицу $\hat{\mathbf{b}}$ к диагональному виду:

$$\mathbf{D}^T \hat{\mathbf{b}} \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \Lambda_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Lambda_1^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Lambda_{N-1}^2 \end{pmatrix}. \quad (13.9)$$

В случае, который здесь рассматривается, должно присутствовать одно растягивающее направление, а остальные должны быть сжимающими, так что $\Lambda_0^2 > \Gamma^2$, $\Lambda_1^2, \dots, \Lambda_{N-1}^2 < \Gamma^2$. Если это так, то матрица

$$\mathbf{D}^T (\hat{\mathbf{b}} - \Gamma^2 \hat{\mathbf{e}}) \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \Lambda_0^2 - \Gamma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Lambda_1^2 - \Gamma^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_{N-1}^2 - \Gamma^2 \end{pmatrix} \quad (13.10)$$

имеет на главной диагонали один положительный и остальные отрицательные элементы. Дополнительной заменой масштаба по осям координат эта матрица преобразуется к канонической форме,

$$\mathbf{S}^T \mathbf{D}^T (\hat{\mathbf{b}} - \Gamma^2 \hat{\mathbf{e}}) \mathbf{D} \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (13.11)$$

где

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\Lambda_0^2 - \Gamma^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\Gamma^2 - \Lambda_1^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{\Gamma^2 - \Lambda_{N-1}^2} \end{pmatrix}. \quad (13.12)$$

В новых переменных $\mathbf{u}' = \mathbf{S}^T \mathbf{D}^T \mathbf{u}$ квадратичная форма (13.7) сводится к виду

$$u_0'^2 - u_1'^2 - \dots - u_{N-1}'^2 = 0. \quad (13.13)$$

Применяя те же самые преобразования к уравнению (13.8), получаем

$$\sum_{m,n=0}^{N-1} a'_{mn} u'_m u'_n = 0, \quad (13.14)$$

где a'_{mn} — элементы матрицы $\mathbf{a}' = \mathbf{S} \mathbf{D}^T (\hat{\mathbf{a}} - \Gamma^{-2} \hat{\mathbf{e}}) \mathbf{D} \mathbf{S}$.

Рассмотрим векторы вида $\mathbf{u}' = \{1, c_1, c_2, \dots, c_{N-1}\}$. Соотношение (13.13) определяет единичную сферу в пространстве $N-1$ коэффициентов: $c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_{N-1}^2 = 1$. С другой стороны, выражение (13.14) для таких векторов принимает вид

$$a'_{00} + \sum_{m=1}^{N-1} (a'_{0m} c_m + a'_{m0} c_m) + \sum_{m,n=1}^{N-1} a'_{mn} c_m c_n = 0. \quad (13.15)$$

Требуемое включение конусов означает, что последнее уравнение должно определять поверхность в виде эллипсоида, расположенную внутри единичной сферы. Мы предпочитаем, однако, использовать достаточное условие выполнения такой ситуации, простое для формулировки и применения.

Прежде всего, определим центральную точку $\bar{\mathbf{c}}$ для гиперповерхности второго порядка из системы уравнений

$$\begin{aligned} a'_{11} \bar{c}_1 + a'_{12} \bar{c}_2 + \dots + a'_{1,N-1} \bar{c}_{N-1} &= -a'_{10}, \\ a'_{21} \bar{c}_1 + a'_{22} \bar{c}_2 + \dots + a'_{2,N-1} \bar{c}_{N-1} &= -a'_{20}, \\ \dots & \\ a'_{N-1,1} \bar{c}_1 + a'_{N-1,2} \bar{c}_2 + \dots + a'_{N-1,N-1} \bar{c}_{N-1} &= -a'_{N-1,0} \end{aligned} \quad (13.16)$$

и вычислим ее расстояние от центра единичной сферы:

$$\rho = \sqrt{\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2 + \dots + \bar{c}_{N-1}^2}. \quad (13.17)$$

Переносим начало координат в точку $\bar{\mathbf{c}}$, перепишем уравнение (13.15) в переменных $\tilde{c}_m = c_m - \bar{c}_m$, как

$$\sum_{m,n=1}^{N-1} a'_{mn} \tilde{c}_m \tilde{c}_n = R^2. \quad (13.18)$$

Для симметричной матрицы

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1,N-1} \\ a'_{21} & a'_{21} & \cdots & a'_{2,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{N-1,1} & a'_{N-1,1} & \cdots & a'_{N-1,N-1} \end{pmatrix} \quad (13.19)$$

размера $(N-1) \times (N-1)$ все собственные числа l_1, l_2, \dots, l_{N-1} действительные. Пусть $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{N-1}$ будут соответствующие собственные векторы. Тогда диагональное представление этой матрицы получается ортогональным преобразованием координат, а именно, полагаем $\mathbf{h}' = \mathbf{Q}^T \mathbf{h} \mathbf{Q}$ и $\mathbf{c}' = \mathbf{Q}^T \mathbf{c}$, где $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{N-1})$. Тогда уравнение (13.15) сводится к

$$\sum_{m=1}^{N-1} l_m c'_m{}^2 = H, \quad (13.20)$$

где

$$H = -a'_{00} - \sum_{m=1}^{N-1} (a'_{0m} \bar{c}_m + a_{m0} \bar{c}_m) - \sum_{m,n=1}^{N-1} a'_{mn} \bar{c}_m \bar{c}_n. \quad (13.21)$$

Если все собственные числа l_m имеют такой же знак, как и величина H , то уравнение (13.20) определяет эллипсоид, наибольшая полуось которого выражается через минимальное по абсолютной величине собственное число l_{\min} ; ее длина составляет $\sqrt{H/l_{\min}}$. Достаточное условие того, что эллипсоид принадлежит внутренности единичной сферы, дается неравенством

$$\rho + \sqrt{H/l_{\min}} < 1. \quad (13.22)$$

Если все указанные выше условия выполнены одновременно для случая $\Gamma = \gamma$ и $\Gamma = 1/\gamma$ при некотором выборе константы $\gamma > 1$, то можно сделать заключение, что надлежащее вложение имеет место как для расширяющихся, так и для сжимающихся конусов в опорной точке \mathbf{x} .

В самом деле, в переменных \mathbf{c}' сечение расширяющегося конуса $S_{\mathbf{x}}$ представляет собой единичный шар в пространстве размерности $N-1$, а сечение конуса $S'_{\mathbf{x}}$ представляет собой замыкание внутренней части малого эллипсоида, полученного для случая $\Gamma = \gamma$. Поэтому требуемое вло-

жение $S'_{\mathbf{x}} \subset S_{\mathbf{x}}$ выполняется, как показано схематически на рис. 13.1а. С другой стороны, сечение сжимающегося конуса $C_{\mathbf{x}}$ представляется как замыкание множества, лежащего вне малого эллипсоида, полученного для случая $\Gamma = 1/\gamma$. Сечение конуса $C'_{\mathbf{x}}$ отвечает замыканию множества точек вне единичной сферы. Следовательно, справедливо вложение $C'_{\mathbf{x}} \subset C_{\mathbf{x}}$, что иллюстрируется на рис. 13.1б.

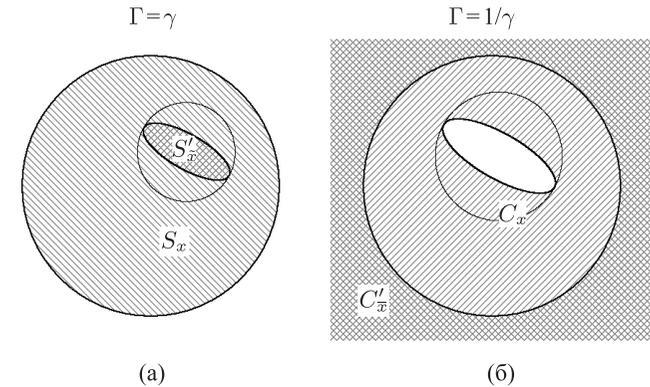


Рис. 13.1. Схематическая иллюстрация взаимного расположения сечений для расширяющихся конусов $S'_{\mathbf{x}} \subset S_{\mathbf{x}}$ (а) и для сжимающихся конусов $C'_{\mathbf{x}} \subset C_{\mathbf{x}}$ (б). Окружность, описанная вокруг эллипса, должна попадать внутрь единичной окружности, чтобы выполнялось достаточное условие (13.22)

В частном случае двумерных отображений ($N=2$) финальная часть процедуры существенно упрощается. В этой ситуации сечения конусов отвечают одномерным интервалам, для которых условия вложения сводятся к простым неравенствам. Матрица \mathbf{h} вырождается в одно действительное число a'_{11} , и при этом $l_{\min} = l_1 = a'_{11}$. Условие (13.22) доставляет тогда необходимое и достаточное условие для того, чтобы выполнялись требуемые вложения.

Описанная выше процедура относится к одиночной опорной точке \mathbf{x} , тогда как проверка на самом деле должна быть проведена для всех точек аттрактора A .

Один способ организации вычислений можно использовать, если на основе предварительного анализа или вычислений определена поглощаю-

шая область D такая, что $\mathbf{g}(D) \subset \text{Int } D$ и $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathbf{g}^m(D)$. Тогда можно провести сканирование этой области D на сетке в N -мерном фазовом пространстве, выполняя описанную выше вычислительную процедуру в каждом узле, с одним и тем же выбором константы $\gamma > 1$. Существенный момент состоит в том, что размер ячеек должен быть достаточно малым чтобы все вовлеченные в расчет числовые характеристики (элементы матриц, собственные числа и собственные векторы) были приблизительно постоянными на масштабе одной ячейки. Если все требуемые условия выполняются во всех узлах сетки, покрывающей область D , то можно быть уверенным, что они выполнены и на аттракторе A , поскольку он принадлежит этой области. Один недостаток этого метода связан с необходимостью предварительного нахождения поглощающей области. Другой — это быстрое нарастание объема вычислений с ростом размерности N .

Альтернативный подход состоит в проверке условий критерия конусов для представительного множества точек собственно на аттракторе. Эти точки получают шаг за шагом из итераций отображения \mathbf{g} . В этом случае нам не надо заранее находить поглощающую область и процедура без проблем применима к системам высокой размерности N .

На первый взгляд второй способ может показаться существенно менее убедительным и строгим. Однако практика расчетов показывает, что, будучи заметно проще в обращении, он позволяет не менее надежно распознавать ситуации гиперболического хаоса, нежели первый подход. Это обстоятельство можно пояснить так. Для гладких систем, которые мы здесь только и имеем в виду, используемые при формулировке критерия конусов объекты (матрицы, их собственные числа и собственные векторы) гладким образом зависят от переменных состояния, поскольку определяются динамикой на конечных временах. Отсюда следует, что выполнение в некоторой точке \mathbf{x} условий с отделенной от 1 константой γ означает также выполнение критерия конусов в ее конечной окрестности (тем большей, чем больше величина $|\gamma - 1|$). Поэтому положительный результат теста на гиперболичность для представительного множества точек на аттракторе говорит о выполнении критерия конусов также и на всем аттракторе, если обеспечено полное покрытие аттрактора объединением упомянутых окрестностей. Практически такая ситуация достигается увеличением числа итераций отображения и, соответственно, количества тестируемых точек на аттракторе.

Стоит отметить, что в некоторых случаях вычислительную процедуру лучше использовать для k -кратной итерации отображения, где k — некото-

рое целое число больше единицы, поскольку обнаружение гиперболичности часто облегчается с увеличением k . С другой стороны, при больших числах k операции линейной алгебры становятся плохо обусловленными. (Из-за сочетания сходимости и расходимости для орбит вблизи гиперболической траектории.) Таким образом, наиболее подходящий выбор k может потребовать определенного компромисса.

13.2. Примеры применения критерия конусов

Обратимся к конкретным примерам применения компьютерной проверки критерия конусов для модельных систем, рассмотренных в предыдущих главах. Во всех случаях результаты представляются в единой форме, причём в основу положены расчеты на репрезентативном множестве точек на аттракторе. Для некоторых моделей были выполнены также вычисления в технике сканирования поглощающей области на заданной сетке; эти результаты изложены в работах [Кузнецов и Сатаев, 2006; Kuznetsov and Sataev, 2007; Kuznetsov et al., 2007; Кузнецов, 2009; Kuznetsov, 2009].

Рассмотрим сначала систему, описываемую переключаемыми дифференциальными уравнениями, с аттрактором Смейла–Вильямса, которая была введена в разделе 6.1. Для применения вычислительной процедуры это относительно простой пример, поскольку стробоскопическое отображение Пуанкаре записывается в явном виде, как и обратное отображение (см. формулы (6.6) и (6.7)). Отображение трехмерное, и это соответствует минимальной размерности, в которой аттрактор типа Смейла–Вильямса может иметь место. Матричные производные также можно найти аналитически:

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial z_n} \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial z_n} \\ \frac{\partial z_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial z_{n+1}}{\partial y_n} & \frac{\partial z_{n+1}}{\partial z_n} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}))' = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial y_n} & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial z_n} \\ \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial y_n} & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial z_n} \\ \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x_n} & \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y_n} & \frac{\partial z_{n-1}}{\partial z_n} \end{pmatrix},$$

хотя явные выражения получаются слишком громоздкими и здесь опущены для краткости.

На рис. 13.2 приводятся результаты для всех существенных составляющих процедуры проверки критерия конусов. Представленные на

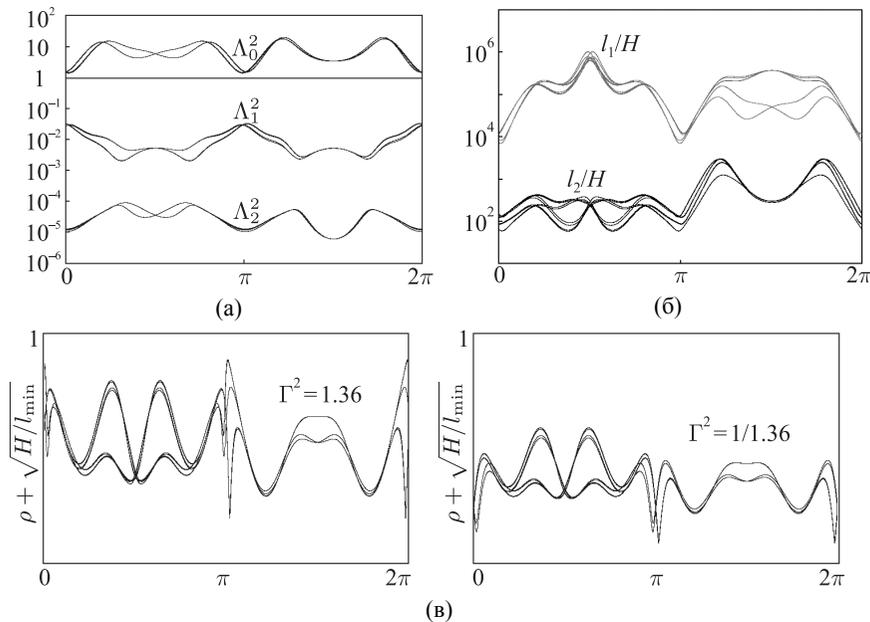


Рис. 13.2. Существенные для проверки критерия конусов величины, полученные в результате вычислений, в виде зависимостей от угловой координаты, отсчитываемой вдоль обмотки соленоида, для трехмерного отображения (6.6). Собственные числа симметричной матрицы, используемой в определении конусов (а). Собственные числа вспомогательной матрицы, используемой для анализа взаимного положения сечений конусов (б). Расстояние, которое должно быть меньше 1 при выполнении достаточного условия вложения для расширяющихся конусов (левая диаграмма) и сжимающихся конусов (правая диаграмма) (в). Значения параметров: $d = d_2 = 2$, $\mu = 2$

графиках величины получены в ходе вычислений на множестве последовательно посещаемых точек аттрактора в установившемся хаотическом режиме. По горизонтальной оси отложена угловая координата, отсчитываемая вокруг области в форме тора, содержащей аттрактор (см. рис. 6.1). На диаграмме (а) можно видеть график для трех собственных чисел матрицы $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{v}^T \mathbf{v} = \mathbf{g}^T \mathbf{g}'$. Отметим, что одно собственное число строго больше 1 на всем аттракторе, тогда как остальные строго меньше 1. Это говорит о присутствии растяжения по одному измерению и сжатия по двум измерениям в фазовом пространстве и свидетельствует, что на аттракторе можно опре-

делить семейства растягивающихся и сжимающихся конусов. На диаграмме (б) представлены собственные числа вспомогательной матрицы \mathbf{h} (см. (13.19)), которая в данном случае имеет размер 2×2 . Заметим, что отношения собственных чисел к величине H (см. (13.20)) положительны для них обоих на всем аттракторе; это значит, что сечения конусов отвечают эллипсам. Хотя диаграмма изображена для случая $\Gamma = 1$, все волокна, наблюдаемые на графике, с очевидностью отделены от нуля, поэтому ситуация будет качественно такой же для величин Γ , слегка больших или меньших 1. Наконец, диаграмма (в) свидетельствует о правильном вложении конусов. Здесь представлена графически величина $\rho + \sqrt{H/l_{\min}}$ (см. (13.22)), которая представляет собой максимальное расстояние между центром единичного круга и точкой на малом эллипсе, который для выполнения критерия должен располагаться внутри круга. Заметим, что эта положительная величина всюду строго меньше 1. Такая ситуация имеет место как для $\Gamma = \gamma$, так и для $1/\gamma$ при некотором выборе $\gamma > 1$. Из приведенных данных следует, что требуемые вложения для расширяющихся и сжимающихся конусов имеют место при $\gamma = \sqrt{1.36} > 1$.

На рис. 13.3 портрет аттрактора в стробоскопическом сечении Пуанкаре показан вместе с расположенными по периферии диаграммами, иллюстрирующими для нескольких точек на аттракторе взаимное расположение расширяющегося конуса и образа для конуса, определенного в предыдущей точке орбиты. Расширяющийся конус представлен сечением, имеющим в используемых координатах вид единичного круга. Образ расширяющегося конуса из предыдущей точки имеет вид маленького эллипса внутри этого диска. Описанная около эллипса окружность также попадает внутрь единичного круга, что составляет содержание достаточного условия (13.22).

Следующий пример — это **модельное отображение с ДА-аттрактором** (4.8). Это двумерное отображение для вектора состояния $\mathbf{x}_n = \{p_n, q_n\}$. Матричная производная находится аналитически:

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Как можно проверить, в области $\varepsilon < \%$ определитель Якоби является всюду положительным. Следовательно, отображение обратимо (хотя выражение для обратного отображения записать в аналитической форме не удается).

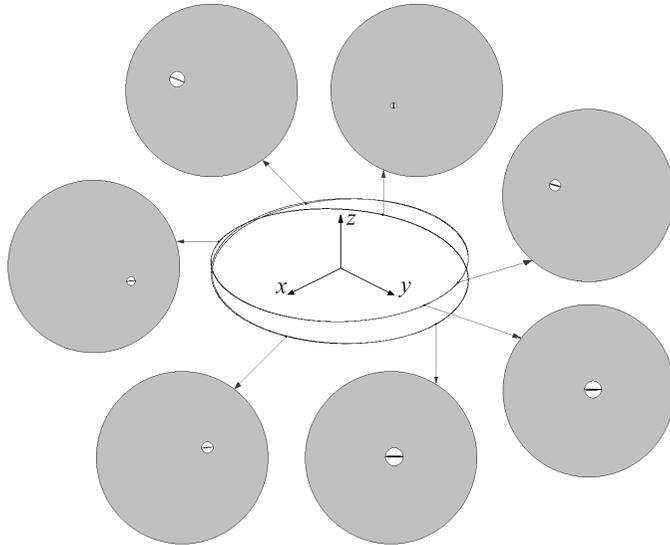


Рис. 13.3. Иллюстрация выполнения критерия для расширяющихся конусов для $\gamma^2 = 1.36$, проверенного в семи репрезентативных точках на аттракторе отображения (6.6), показанного в центре. Значения параметров $d = d_2 = 2$, $\mu = 2$. Расширяющийся конус в каждой точке представлен сечением в виде единичного круга, а образ расширяющегося конуса из предыдущей точки изображается маленьким эллипсом внутри этого круга. Описанная около эллипса окружность используется при формулировке достаточного условия правильного вложения конусов (13.22)

На рис. 13.4 представлены данные, относящиеся к компьютерной процедуре проверки критерия конусов для отображения (4.8) при $\varepsilon = 0.7$. Ось абсцисс отвечает координате p , отсчитываемой вокруг тора, на котором определено отображение. На диаграмме (а) можно видеть графики для двух собственных чисел матрицы $\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{v}^T \mathbf{v} = \mathbf{g}'^T \mathbf{g}'$. Первое собственное число всегда строго больше 1, а второе строго меньше 1. В двумерном случае вместо матрицы \mathbf{h} мы имеем одно число l_1 ; его отношение к величине H (см. (13.20)) представлено на графике (б). Заметим, что оно положительно на всем аттракторе. Диаграммы (в) и (г) свидетельствуют о выполнении требуемого вложения конусов. Величина $\rho + \sqrt{H/l_{\min}}$ в этом случае есть не что иное, как максимальное расстояние от центра интервала $[-1, 1]$,

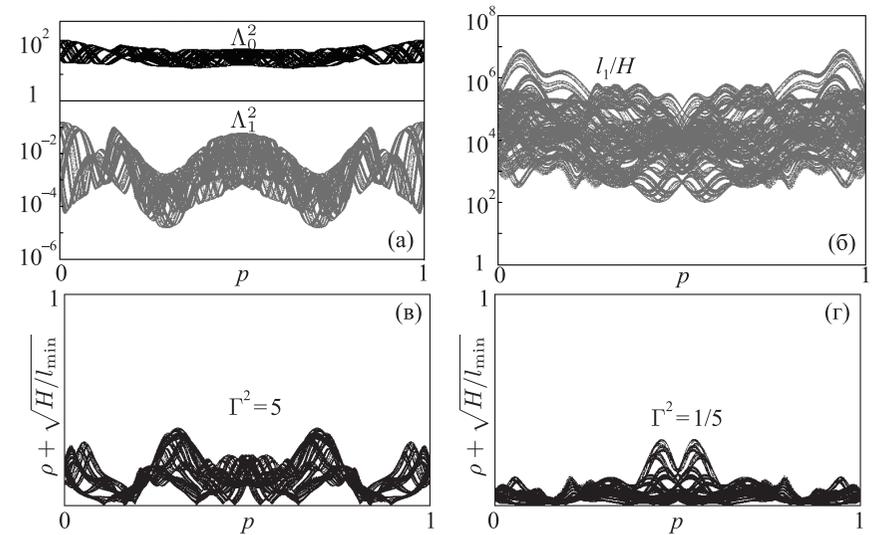


Рис. 13.4. Существенные для проверки критерия конусов величины, полученные в результате вычислений, в виде зависимостей от угловой координаты, отсчитываемой вокруг тора, для системы, описываемой отображением (4.8) при $\varepsilon = 0.7$. Два собственных числа симметричной матрицы, используемой в определении конусов (а). Вспомогательная величина, используемая для анализа взаимного интервалов, представляющих собой сечения двумерных конусов (б). Расстояние, которое должно быть меньше 1 при выполнении достаточного условия вложения для расширяющихся конусов (в) и сжимающихся конусов (г)

представляющего сечение расширяющегося конуса, до одного из двух краев интервала, представляющего сечение образа расширяющегося конуса из предыдущей точки орбиты. Для выполнения критерия он должен располагаться внутри интервала $[-1, 1]$. Такая ситуация реализуется как для случая $\Gamma = \gamma$, так и для $1/\gamma$, например при выборе $\gamma^2 = 5$, как видно из диаграмм (в) и (г).

Рассмотрим теперь **аттрактор типа Плыкина на плоскости**, имеющий место в двумерном отображении, введенном в разделе 6.2. В этом случае отображение опять-таки имеет аналитическое выражение (6.23). Обратное отображение также может быть записано в аналитическом виде, как и матричные производные \mathbf{T}' и $(\mathbf{T}')^{-1}$. В ходе вычислений, выполненных при $\varepsilon = 0.77$, обнаруживается, что степень неоднородности преобразования

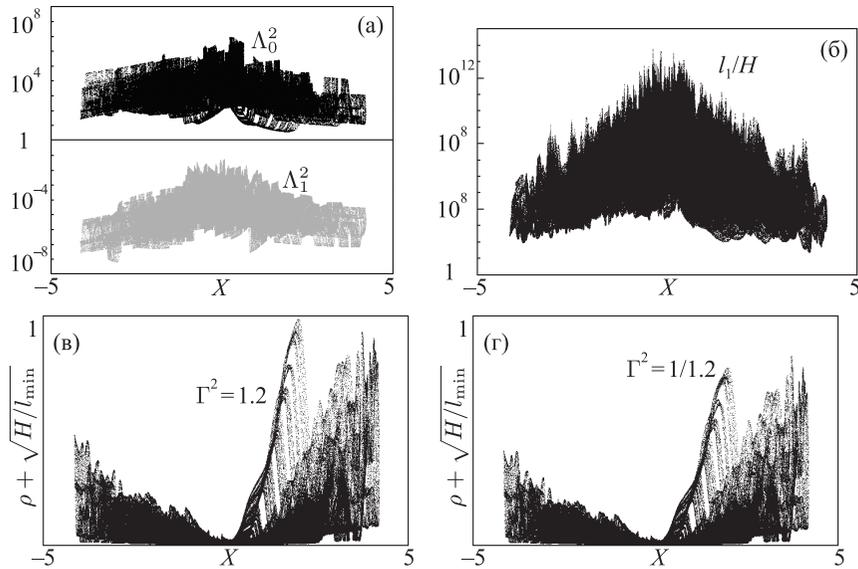


Рис. 13.5. Существенные для проверки критерия конусов величины, построенные в зависимости от одной из переменных для аттрактора типа Пльыкина в отображении (6.23) при $\varepsilon = 0.77$. Два собственных числа симметричной матрицы, используемой в определении конусов (а). Вспомогательная величина, используемая для анализа взаимных интервалов, представляющих собой сечения двумерных конусов (б). Расстояние, которое должно быть меньше 1 при выполнении достаточного условия вложения для расширяющихся конусов (в) и сжимающихся конусов (г)

на аттракторе в представлении на плоскости довольно велика. Процедура проверки критерия конусов в изложенной версии оказывается успешной для четырехкратной (по меньшей мере) итерации исходного отображения. На рис. 13.5 диаграмма (а) изображает график для двух собственных чисел матрицы $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{v}^T \mathbf{v} = \mathbf{g}'^T \mathbf{g}'$, где $\mathbf{g} = \mathbf{T}^4$, а по оси абсцисс отложена координата X , используемая в определении отображения. Заметим, что первое собственное число всегда строго больше 1, а второе всегда строго меньше 1. Отношение вспомогательных величин l и H представлено на диаграмме (б) и оказывается положительным на всем аттракторе. Наконец, диаграммы (в) и (г) свидетельствуют о выполнении требуемых вложений конусов. Величина $\rho + \sqrt{H/l_{\min}}$ оказывается строго меньше 1 как для случая $\Gamma = \gamma$, так и для $1/\gamma$, в частности при $\gamma^2 = 1.2$.

Обратимся теперь к более сложным примерам, для которых отображение Пуанкаре и матрицы производных приходится получать в процессе вычислений на основе численного интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений.

Модель, построенная на основе уравнений хищник–жертва, была введена в совместной работе с А. Пиковским [Kuznetsov and Pikovsky, 2007] и обсуждалась в главе 8. Она задается уравнениями (8.8) для действительных переменных x, u, y, v . Значения параметров $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.3$. Как отмечалось в главе 8, сечение Пуанкаре можно задать гиперповерхностью в четырехмерном фазовом пространстве, отвечающей уравнению $y^2 + v^2 = c$, при учете ее пересечения траекториями в направлении увеличения $y^2 + v^2$. В представляющем интерес диапазоне параметров подходящий выбор константы $c = 2.8$. На трехмерной секущей гиперповерхности удобно использовать координаты $\{x, u, z\}$, где $z = (2\pi)^{-1} \arg[(y + iv)/(x + iu)]$. Процедура вычисления отображения Пуанкаре реализована как компьютерная программа, выполняющая численное решение дифференциальных уравнений (8.8) и дополненная интерполяционной схемой Эно, согласованной по точности с применяемым конечно-разностным методом [Hénon, 1982]. Начальные условия формулируются в терминах переменных $\{x, u, z\}$ в сечении Пуанкаре. Когда часть траектории, стартующая и финиширующая на сечении Пуанкаре, вычислена, получаем преобразованные величины $\bar{x}, \bar{u}, \bar{z}$. Затем вдоль той же траектории интегрируются уравнения в вариациях с начальными условиями. После возврата в сечение Пуанкаре получается трансформированный вектор возмущения, из которого вычитается компонента, отвечающая за сдвиг вдоль траектории. Результирующий вектор выражается в переменных $\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{z}$.

Для вычисления матрицы производных процедура вычисления выполняется трижды вдоль одной и той же опорной траектории с начальными условиями для вариаций $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$. Три результирующих вектора образуют три столбца матрицы производных.

Рис. 13.6 иллюстрирует проверку критерия конусов для аттрактора типа Смейла–Вильямса в отображении Пуанкаре системы (8.8). На диаграмме (а) представлены графически три собственных числа матрицы $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{v}^T \mathbf{v}$. Одно из них строго больше 1, а остальные строго меньше 1. На диаграмме (б) приводятся собственные числа вспомогательной матрицы \mathbf{h} , имеющей в данном случае размер 2×2 . Отношения собственных чисел к величине H положи-

тельны на всем аттракторе. Диаграмма представлена для $\Gamma = 1$, но все наблюдаемые волокна наблюдаемого на картинке образования четко отделены от нуля, так что ситуация будет такой же для значений Γ , слегка больших или меньших 1. Диаграмма (в) показывает, что величина $\rho + \sqrt{H/l_{\min}}$ строго меньше 1. Это имеет место как при задании $\Gamma^2 = 1.3$, так и при $\Gamma^2 = 1/1.3$. Тем самым, требуемые вложения для растягивающихся и сжимающихся конусов справедливы при выборе константы $\gamma = \sqrt{1.3} > 1$.

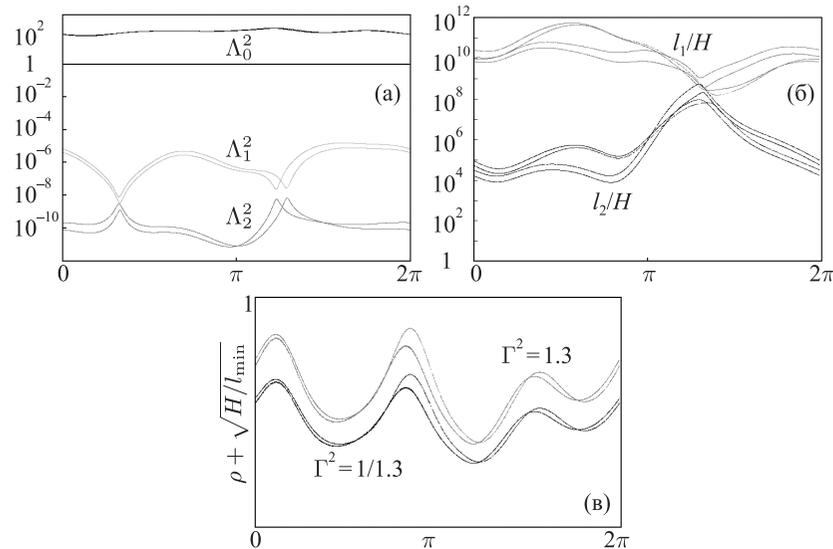


Рис. 13.6. Существенные для проверки критерия конусов величины, полученные в результате вычислений, в виде зависимостей от угловой координаты, отсчитываемой вдоль обмотки соленоида, для системы, описываемой дифференциальными уравнениями (8.8). Собственные числа симметричной матрицы, используемой в определении конусов (а). Собственные числа вспомогательной матрицы, используемой для анализа взаимного положения сечений конусов (б). Расстояние, которое должно быть меньше 1 при выполнении достаточного условия вложения для расширяющихся конусов и сжимающихся конусов (в). Значения параметров: $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.3$

В работе [Kuznetsov et al., 2007] критерий конусов для данной модели был проверен методом сканирования поглощающей области на сетке с малым размером ячеек и было показано, что он выполняется при $\gamma = 1.3$.

Очередной пример — это **система двух связанных попеременно возбуждающихся неавтономных осцилляторов**, введенная автором в работе [Kuznetsov, 2005]. Она описывается уравнениями (7.9). Значения параметров, выбранные для детального анализа динамики системы $\omega_0 = 2\pi$, $A = 5$, $T = 6$, $\varepsilon = 0.8$. Все зависящие от времени коэффициенты в уравнениях имеют наименьший общий период T . Поэтому динамику можно описывать в терминах стробоскопического отображения Пуанкаре, трансформирующего начальный четырехмерный вектор $\mathbf{x}_n = (x, \dot{x}/\omega_0, y, \dot{y}/\omega_0)|_{t=nT} = (x, u, y, v)|_{t=nT}$ в вектор состояния $\mathbf{x}_{n+1} = (x, u, y, v)|_{t=(n+1)T}$. Это отображение нетрудно выполнить путем численного решения дифференциальных уравнений стандартным методом конечных разностей Рунге–Кутты, полагая, что временной интервал T содержит целое число шагов разностной схемы. Вместе с основными уравнениями вдоль опорной орбиты проводится также интегрирование четырех комплектов линеаризованных уравнений для переменных $(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{y}, \tilde{v})$ с начальными условиями $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ и $(0, 0, 0, 1)$ для получения столбцов матрицы производных для стробоскопического четырехмерного отображения.

Как отмечалось в разделе 7.2, аттрактор отображения Пуанкаре при заданных параметрах представляет собой разновидность соленоида Смейла–Вильямса, который вложен в четырехмерное пространство состояний. Рис. 13.7 иллюстрирует проверку критерия конусов для представительного множества точек на аттракторе, полученных последовательными итерациями отображения Пуанкаре системы (7.9). На диаграмме (а) показан график для четырех собственных чисел матрицы $\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{v}^T \mathbf{v}$, одно из которых строго больше 1, а три других строго меньше 1. На диаграмме (б) приводятся собственные числа матрицы \mathbf{h} , имеющей в данном случае размер 3×3 . Заметим, что отношения собственных чисел к величине H положительны на всем аттракторе. Диаграммы (в) и (г) показывают, что величина $\rho + \sqrt{H/l_{\min}}$ строго меньше 1 при задании $\Gamma^2 = 1.35$ и $\Gamma^2 = 1/1.35$. Таким образом, критерий конусов выполняется при выборе $\gamma = \sqrt{1.35} > 1$.

Для данного аттрактора была найдена поглощающая область (см. формулу (7.16) и рис. 7.4). Для расширяющихся конусов критерий был проверен на сетке, покрывающей область D , а для сжимающихся конусов — для области $\Gamma^2(D)$ [Кузнецов и Сатаев, 2006; Kuznetsov and Sataev, 2007]. Было показано, что он выполняется, в частности, при $\gamma^2 = 1.1$.

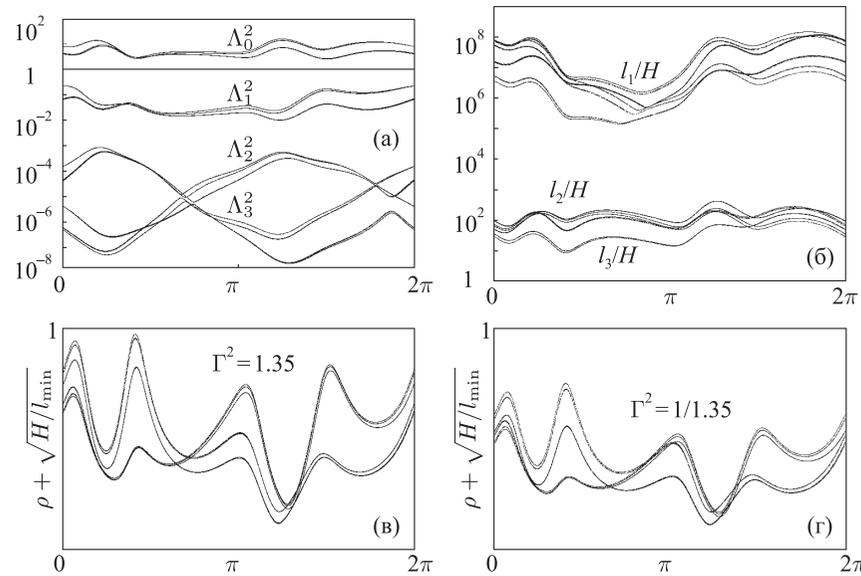


Рис. 13.7. Существенные для проверки критерия конусов величины, полученные в результате вычислений, в виде зависимостей от угловой координаты, отсчитываемой вдоль обмотки соленоида, для системы, описываемой дифференциальными уравнениями (7.9). Собственные числа симметричной матрицы, используемой в определении конусов (а). Собственные числа вспомогательной матрицы, используемой для анализа взаимного положения сечений конусов (б). Расстояние, которое должно быть меньше 1 при выполнении достаточного условия вложения для расширяющихся (в) и сжимающихся (г) конусов. Значения параметров: $A = 5$, $T = 6$, $\varepsilon = 0.5$, $\omega_0 = 2\pi$

Заключительный пример аттрактора типа Смейла–Вильямса относится к **пятимерной автономной системе**, введенной в разделе 8.1 и описываемой дифференциальными уравнениями (8.3). Отображение Пуанкаре четырехмерное, как и в предыдущем примере, но из-за того, что система автономная, его построение при вычислениях требует несколько больших усилий. Вычисления производятся с помощью программы, реализующей численное решение дифференциальных уравнений (8.3) и дополненной интерполяционной процедурой Эно [Hénon, 1982]. Начальные условия задаются переменными $\{X, Y, U, V\}$ при $z = 0$. Когда часть траектории, стартовая и финиширующая на сечении Пуанкаре, вычислена, тем самым преобразованные величины переменных получены. Затем вдоль той же траектории интегрируются уравнения в вариациях; при этом отслеживает-

ся набор из четырех векторов, каждый из которых дает столбец матрицы производных для отображения Пуанкаре. После возврата в сечение Пуанкаре из каждого вектора возмущения вычитается составляющая, отвечающая за сдвиг вдоль траектории, так, чтобы обратилась в нуль вариация переменной z . Рис. 13.8 иллюстрирует проверку критерия конусов для представительного множества точек на аттракторе, полученных последовательными итерациями отображения Пуанкаре. Представленные графики имеют такой же смысл, как для предыдущей системы. Диаграмма (в) свидетельствует, что требуемые условия вложения конусов выполняются при выборе $\gamma = \sqrt{3} > 1$.

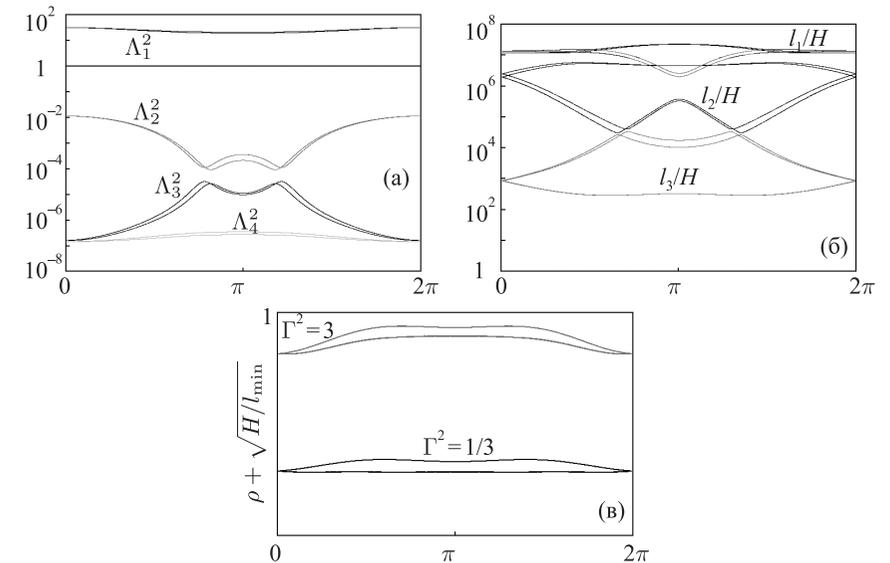


Рис. 13.8. Существенные для проверки критерия конусов величины, полученные в результате вычислений, в виде зависимостей от угловой координаты, отсчитываемой вдоль обмотки соленоида, для системы, описываемой дифференциальными уравнениями (8.3). Собственные числа симметричной матрицы, используемой в определении конусов (а). Собственные числа вспомогательной матрицы, используемой для анализа взаимного положения сечений конусов (б). Расстояние, которое должно быть меньше 1 при выполнении достаточного условия вложения для расширяющихся и сжимающихся конусов (в). Значения параметров: $\alpha = 0.6$, $\varepsilon = 0.1$

Часть IV
**Многомерные системы
и феномены**

Глава 14

Системы четырех попеременно возбуждающихся неавтономных осцилляторов

Эта глава посвящена неавтономным моделям, генерирующим последовательности цугов колебания с фазой, изменяющейся хаотически от одного цуга к другому. В отличие от главы 7, здесь будет рассматриваться динамика в фазовом пространстве больших размерностей и модели строятся на основе четырех осцилляторов, которые становятся активными по очереди (обычно попарно). В частности, мы рассмотрим модели, в которых эволюция фазы в последовательные периоды активности описывается отображением «кот Арнольда» и отображением с гиперхаосом на торе, имеющим два положительных показателя Ляпунова. Будет также обсуждаться модель с передачей возбуждения вверх по спектру частот, имеющая источником идею, лежащую в основе понимания гидродинамической турбулентности (каскадная передача энергии по спектру от крупномасштабных пространственно-временных образований к мелкомасштабным).

14.1. Динамика, описываемая отображением «кота Арнольда», в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля

Как уже отмечалось в этой книге, хорошо изученный специальный класс объектов с хаотической динамикой — гиперболические автоморфизмы Аносова на торе [Арнольд и Авец, 1999; Аносов и др., 1991; Devaney, 2003]. Популярным примером служит отображение, известное как «кот Арнольда»:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + q_n \pmod{1}, \\ q_{n+1} &= p_n + 2q_n \pmod{1}. \end{aligned} \quad (14.1)$$

Для графического представления действия отображения удобно использовать единичный квадрат, интерпретируемый как развертка тора, считая противоположные пары сторон отождествленными (см. рис. 2.4а). Отображение (14.1) является консервативной системой: любая область на плоскости (p, q) (скажем, «голова кота») сохраняет свою площадь при итерациях.

Известно, что отображение (14.1) демонстрирует хаотическую динамику в смысле гиперболической теории со всеми атрибутами, такими как существование абсолютно непрерывной инвариантной меры, возможность описания в терминах конечных марковских разбиений и символической динамики, положительность топологической и метрической энтропии [Devaney, 2003]. Два показателя Ляпунова отображения (14.1) выражаются через собственные значения ассоциирующей с ним матрицы, а именно:

$$\Lambda_1 = \ln(3 + \sqrt{5}) / 2 \approx 0.9624, \quad \Lambda_2 = -\ln(3 + \sqrt{5}) / 2 \approx -0.9624. \quad (14.2)$$

Старший показатель положительный, что отражает присутствие хаоса, характеризующегося экспоненциальной чувствительностью по отношению к начальным условиям.

Отображение «кот Арнольда» можно представить в виде двукратной композиции более простого отображения:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= q_n \pmod{1}, \\ q_{n+1} &= p_n + q_n \pmod{1}. \end{aligned} \quad (14.3)$$

Исключая одну переменную, можно описать динамику соотношением $p_{n+1} = p_n + p_{n-1}$, которое называют отображением Фибоначчи.

Рассмотрим теперь следующую систему связанных неавтономных уравнений ван де Поля [Isaeva et al., 2006]:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - [A \cos(2\pi t/T) - x^2] \dot{x} + \omega_0^2 x &= \varepsilon z \cos \omega_0 t, \\ \ddot{y} - [A \cos(2\pi t/T) - y^2] \dot{y} + \omega_0^2 y &= \varepsilon w, \\ \ddot{z} - [-A \cos(2\pi t/T) - z^2] \dot{z} + 4\omega_0^2 z &= \varepsilon xy, \\ \ddot{w} - [-A \cos(2\pi t/T) - w^2] \dot{w} + \omega_0^2 w &= \varepsilon x. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Три из четырех составляющих систему осцилляторов, которым отвечают переменные x, y и w , имеют одинаковые собственные частоты ω_0 , а оставшийся осциллятор z имеет частоту $2\omega_0$. Управляющий параметр, отвечающий за бифуркацию Андронова–Хопфа в парциальных системах, принудительно варьируется относительно медленно, с некоторым периодом T . На каждом полупериоде в начале стадии активности одной или другой пары осцилляторов, (x, y) или (z, w) , другая пара стимулирует ее возбуждение благодаря присутствию связи, описываемой членами в уравнениях, пропорциональными параметру ε . При этом один из них содержит множитель, отвечающий вспомогательному сигналу на частоте ω_0 . Предполагается, что период медленной модуляции параметра содержит целое число периодов вспомогательного сигнала $N_0 = \omega_0 T / 2\pi$, так что внешнее воздействие на систему периодическое.

Выведем приближенные соотношения, описывающие преобразование фаз колебаний в ходе функционирования системы. Пусть первый и второй осцилляторы на стадии активности характеризуются некоторыми начальными фазами:

$$x \sim \cos(\omega_0 t + \varphi_x), \quad y \sim \cos(\omega_0 t + \varphi_y). \quad (14.5)$$

Член в третьем уравнении, описывающий связь, содержит произведение xy , и его можно представить как

$$\cos(\omega_0 t + \varphi_x) \cos(\omega_0 t + \varphi_y) = \frac{1}{2} \cos(\varphi_x - \varphi_y) + \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 t + \varphi_x + \varphi_y). \quad (14.6)$$

Последний аддитивный член в этом выражении определяет резонансное воздействие на осциллятор z , стимулирующее его возбуждение в начале стадии активности. Следовательно, третий осциллятор унаследует фазу $\varphi_z \approx \varphi_x + \varphi_y + \text{const}$, тогда как четвертый просто воспримет фазу от первого осциллятора: $\varphi_w \approx \varphi_x + \text{const}$. На следующей стадии активности первой

пары осцилляторов член в первом уравнении вида

$$z \cos \omega_0 t \sim \cos(2\omega_0 t + \phi_z) \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [\cos(3\omega_0 t + \phi_x + \phi_y + \text{const}) + \cos(\omega_0 t + \phi_x + \phi_y + \text{const})], \quad (14.7)$$

определяющий связь, стимулирует возбуждение осциллятора x , и он получает фазу $\phi'_x \approx \phi_z + \text{const} \approx \phi_x + \phi_y + \text{const}$. В то же время осциллятор y наследует фазу от осциллятора w : $\phi'_y \approx \phi_w \approx \phi_x + \text{const}$. Таким образом, отображение для фаз имеет вид

$$\begin{aligned} \phi'_x &= \phi_x + \phi_y + \text{const}, \\ \phi'_y &= \phi_x + \text{const}. \end{aligned} \quad (14.8)$$

Учитывая, что фазы определены на интервале от 0 до 2π , и используя нормировку $q = \phi_x / 2\pi$ и $p = \phi_y / 2\pi$, получаем отображение (14.3) с точностью до аддитивных констант. За период $2T$ в рамках приближения, отвечающего нашему качественному рассмотрению, получается отображение «кот Арнольда».

Чтобы подкрепить сделанные выводы, обратимся к прямому численному моделированию динамики на основе системы неавтономных дифференциальных уравнений (14.4). На рис. 14.1 показаны зависимости от времени для динамических переменных системы (14.4) при задании параметров

$$\omega_0 = 2\pi, N_0 = T = 20, A = 2, \varepsilon = 0.4. \quad (14.9)$$

Как можно видеть, система функционирует в соответствии с обсуждавшимся выше механизмом. Хаос проявляет себя в случайном изменении фаз несущей по отношению к огибающей на последовательных периодах медленной модуляции.

Чтобы продемонстрировать соответствие преобразования фаз в системе осцилляторов отображению «кот Арнольда», выполним следующую процедуру. В ходе численного интегрирования уравнений (14.4) мы определяем фазы для первого и второго осцилляторов в середине стадии активности¹:

$$\phi_x = \arg(x + i\omega_0^{-1}\dot{x}), \phi_y = \arg(y + i\omega_0^{-1}\dot{y}). \quad (14.10)$$

¹ Фазы ϕ_x и ϕ_y нельзя определить глобально, на всем временном интервале T : они относятся к стадии возбуждения данной пары осцилляторов и могут быть использованы в контексте описания динамики в дискретном времени. В самом деле, вне периода активности амплитуды малы, и фазы не определены.

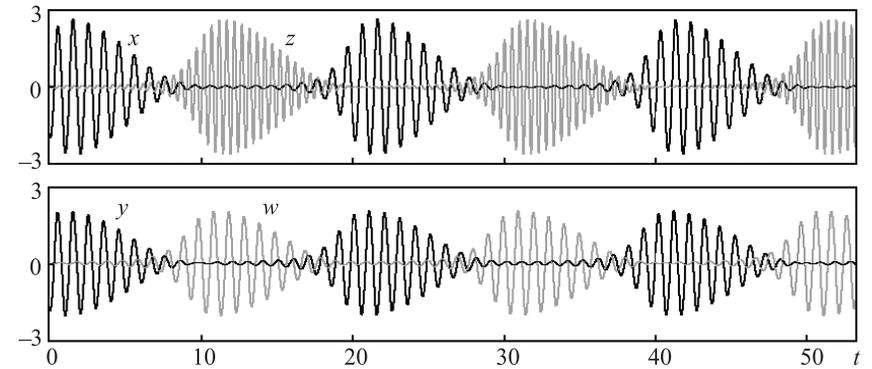


Рис. 14.1. Временные зависимости динамических переменных системы (14.4) при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 20$, $A = 2$, $\varepsilon = 0.4$

В случае, если точка $(q, p) = (\phi_x / 2\pi, \phi_y / 2\pi)$ попадает в область «головы кота», нарисованной в единичном квадрате, мы отмечаем ее точкой на графике, и также отмечаем точками на двух последующих диаграммах ее образы через интервалы времени $2T$ и $4T$, после чего переходим к следующей итерации. Если точка не попадает в область, она игнорируется и выполняется переход к следующей итерации. После накопления достаточно большого числа точек прорисовывается «голова кота» на первой диаграмме и результат ее преобразования за одну и две итерации отображения на второй и третьей диаграмме соответственно (рис. 14.2а).

Построенные картинку можно сравнить с теми, которые получаются непосредственно для отображения «кот Арнольда». Чтобы сделать соответствие по возможности точным, нужно учесть аддитивные постоянные члены в уравнениях для фаз, которые появляются в ходе передачи возбуждения от осцилляторов к их партнерам. Подобрал эти константы эмпирически для конкретного рассматриваемого режима (см. (14.9)), получаем

$$\begin{aligned} p' &= p + q + 0.07 \pmod{1}, \\ q' &= p + 2q - 0.38 \pmod{1}. \end{aligned} \quad (14.11)$$

Графики, иллюстрирующие эволюцию «головы кота» при действии этого отображения, показаны на рис. 14.2б. Можно видеть хорошее соответствие динамики фаз в системе неавтономных осцилляторов (14.4) и модифицированного отображения (14.11).

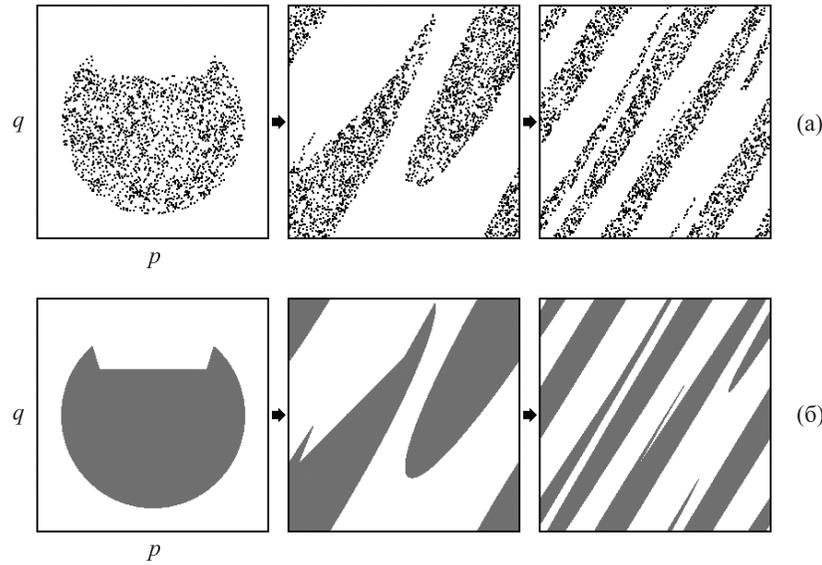


Рис. 14.2. Преобразование области в виде «головы кота» на плоскости фазовых переменных системы (14.4), отвечающее интервалу времени $2T$ и $4T$ (а), и аналогичные картинки, полученные для отображения (14.10) (б)

Для более аккуратного описания в дискретном времени обратимся к стробоскопическому отображению Пуанкаре. Если состояние системы в момент времени $t_n = 2nT$ задано вектором $\mathbf{x}_n = \{x, \dot{x}/\omega_0, y, \dot{y}/\omega_0, z, \dot{z}/2\omega_0, w, \dot{w}/\omega_0\}$, то из решения дифференциальных уравнений (14.4) с начальным состоянием \mathbf{x}_n на временном интервале протяженности $2T$ можно получить новый вектор \mathbf{x}_{n+1} , определив тем самым функцию, отображающую восьмимерное пространство в себя:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_n). \tag{14.12}$$

Геометрически, в девятимерном расширенном фазовом пространстве рассматриваемой неавтономной системы $\{\mathbf{x}, t\}$ мы имеем сечение потока семейством восьмимерных гиперплоскостей $t = t_n = 2nT$. Отображение Пуанкаре \mathbf{T} представляет собой диффеоморфизм в пространстве \mathbb{R}^8 , взаимно однозначное дифференцируемое отображение класса C^∞ [Арнольд, 2000].

На рис. 14.3 показан портрет аттрактора в проекции из расширенного фазового пространства на плоскость переменных первого осциллятора (x, \dot{x}) . Аттрактор показан тонами серого цвета, передающими относительную длительность пребывания изображающей точки в соответствующих пикселях. Черные точки относятся к сечению Пуанкаре, т. е. к моментам времени, удовлетворяющим условию $t_n = 2nT$ с целыми n .

Спектр показателей Ляпунова рассчитывается с помощью алгоритма, описанного в главе 1, путем совместного численного решения уравнений (14.1) и восьми комплектов линеаризованных уравнений для возмущений:

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}} + 2x\dot{\tilde{x}} - [A \cos(2\pi t/T) - x^2] \dot{\tilde{x}} + \omega_0^2 \tilde{x} &= \varepsilon \tilde{z} \cos \omega_0 t, \\ \ddot{\tilde{y}} + 2y\dot{\tilde{y}} - [A \cos(2\pi t/T) - y^2] \dot{\tilde{y}} + \omega_0^2 \tilde{y} &= \varepsilon \tilde{w}, \\ \ddot{\tilde{z}} + 2z\dot{\tilde{z}} - [-A \cos(2\pi t/T) - z^2] \dot{\tilde{z}} + 4\omega_0^2 \tilde{z} &= \varepsilon (\tilde{x}y + x\tilde{y}), \\ \ddot{\tilde{w}} + 2w\dot{\tilde{w}} - [-A \cos(2\pi t/T) - w^2] \dot{\tilde{w}} + \omega_0^2 \tilde{w} &= \varepsilon \tilde{x}. \end{aligned} \tag{14.13}$$

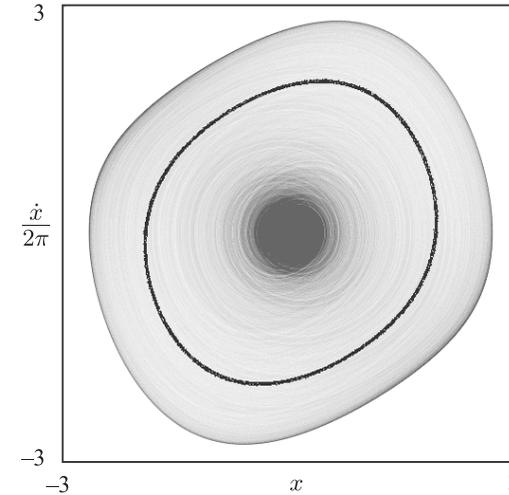


Рис. 14.3. Портрет аттрактора системы (14.4): проекция расширенного фазового пространства на плоскость переменных (x, \dot{x}) и сечение Пуанкаре, отвечающее моментам времени $t_n = 2nT$ (черные точки), которое выглядит как проекция узкого двумерного тора. Параметры: $\omega_0 = 2\pi$, $T = 6$, $A = 6.5$, $\varepsilon = 0.4$

По ходу решения, на каждом новом периоде $2T$, производится ортогонализация Грама–Шмидта и нормировка набора восьмимерных векторов $\tilde{\mathbf{x}} = \{\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}/\omega_0, \tilde{y}, \dot{\tilde{y}}/\omega_0, \tilde{z}, \dot{\tilde{z}}/2\omega_0, \tilde{w}, \dot{\tilde{w}}/\omega_0\}$. Показатели Ляпунова вычисляются как средние скорости нарастания или убывания накапливающихся сумм для отношений норм и, согласно расчетам, при задании параметров (14.9) для отображения Пуанкаре составляют²

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 0.962, \quad \Lambda_2 = -0.970, \quad \Lambda_3 = -15.525, \quad \Lambda_4 = -19.074, \\ \Lambda_5 &= -20.053, \quad \Lambda_6 = -21.315, \quad \Lambda_7 = -32.444, \quad \Lambda_8 = -32.898. \end{aligned} \quad (14.14)$$

На рис. 14.4 показан график восьми показателей Ляпунова в зависимости от амплитуды медленной модуляции при фиксированных остальных параметрах. Как видно, два наибольших показателя остаются почти постоянными в широком диапазоне по параметру и близки к значениям, характерным для отображения «кот Арнольда» (14.2). Остальные показатели — это большие по абсолютной величине отрицательные числа. Они соответствуют сильному сжатию фазового объема по шести оставшимся направлениям в фазовом пространстве отображения Пуанкаре.

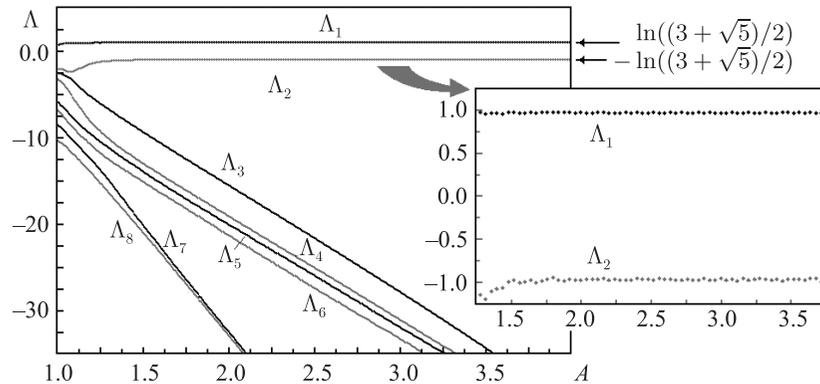


Рис. 14.4. Показатели Ляпунова системы (14.4) в зависимости от амплитуды модуляции параметра при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 20$, $\varepsilon = 0.4$

На рис. 14.5 показано распределение точек на аттракторе при большом числе итераций на плоскости двух фазовых переменных, используемых

² Величина $2T$ принята за характерный временной интервал при определении показателей Ляпунова для того, чтобы имело место соответствие с отображением «кот Арнольда».

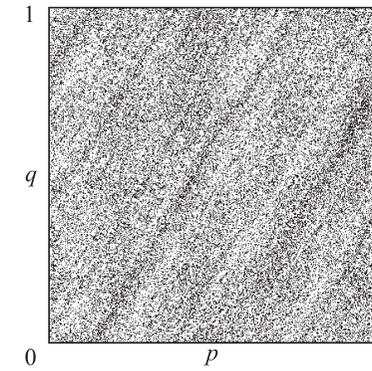


Рис. 14.5. Распределение точек на аттракторе в проекции на плоскость фазовых переменных первой пары осцилляторов в сечении Пуанкаре, полученные при численных расчетах для системы отображения (14.4)

для изображения «головы кота». Здесь можно увидеть присущую распределению плотности структуру, которая появляется из-за некоторого отклонения отображения Пуанкаре от линейного автоморфизма тора. Такие распределения обсуждались в контексте проблемы так называемых «нестранных хаотических аттракторов» [Farmer et al., 1983; Анищенко и др., 2003]. На самом деле аттрактор в отображении Пуанкаре нашей системы, по-видимому, не является «нестранным», поскольку имеет поперечную фрактальную структуру в восьмимерном фазовом пространстве. Тем не менее распределение инвариантной меры по тору примерно соответствует аттрактору такого вида, который предполагался в качестве образа «нестранный хаоса».

Чтобы иметь количественные характеристики фрактальной инвариантной меры на аттракторе, была проведена оценка корреляционной размерности по алгоритму Грассбергера–Прокаччия [Grassberger and Procaccia, 1983] путем обработки двухкомпонентного временного ряда, составленного из значений фаз (14.10), накопленных в результате 10^5 итераций отображения Пуанкаре при численном решении уравнений (14.4) (рис. 14.6). Для заданных параметров (14.18) получена размерность $D_2 = 1.98$, совсем немного отличающееся от значения 2, которое соответствовало бы равномерному распределению плотности вероятности на поверхности двумерного тора. Оценка по формуле Каплана–Йорке (приложение D) с помощью показателей Ляпунова (14.19) дает $D_L = 1 + \Lambda_1 / |\Lambda_2| \approx 1.99$.

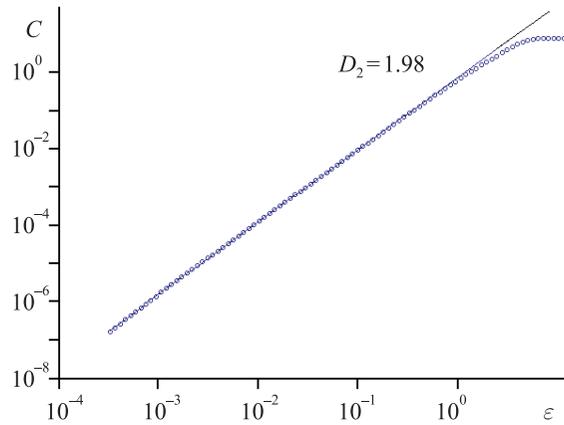


Рис. 14.6. График корреляционного интеграла в зависимости от размера ячеек разбиения в двойном логарифмическом масштабе, полученный обработкой двухкомпонентного временного ряда из 10^5 пар значений фаз (14.10) в сечении Пуанкаре по результатам численного решения уравнений (14.4). Оценка корреляционной размерности отвечает наклону графика в области линейной зависимости

Рассматриваемая система четырех связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля доставляет реалистичный пример динамики, приближенно описываемой гиперболическим отображением на торе. Фактически мы имеем дело с аттрактором в восьмимерном фазовом пространстве отображения Пуанкаре. Из-за сильного сжатия фазового объема оно сводится приблизительно к двумерному отображению «кот Арнольда». Можно предположить, что аттрактор отображения Пуанкаре однородно гиперболический и, следовательно, структурно устойчивый, хотя аккуратная проверка этого предположения, как представляется, будет непростой из-за большой размерности фазового пространства.

14.2. Динамика, соответствующая отображениям с гиперхаосом

Термин *гиперхаос* ввел Рёсслер для динамических режимов, характеризующихся двумя или более положительными показателями Ляпунова [Rössler, 1979; Matsumoto et al., 1986; Stoop et al., 1989; Reiterer et al., 1998; Letellier and Rössler, 2007]. Убедительных причин для того, чтобы известные в литературе примеры гиперхаоса можно было связать с присутствием

однородно гиперболических аттракторов, на сегодняшний день не просматривается. В настоящем разделе мы обратимся к рассмотрению новых моделей, которые могут быть претендентами в плане присутствия в них однородно гиперболического гиперхаоса.

14.2.1. Система, реализующая отображение с гиперхаосом на торе

Рассмотрим вначале систему четырех связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - [A \cos(2\pi t/T) - x^2] \dot{x} + \omega_0^2 x &= \varepsilon z \cos \omega_0 t, \\ \ddot{y} - [A \cos(2\pi t/T) - y^2] \dot{y} + \omega_0^2 y &= \varepsilon w \cos 2\omega_0 t, \\ \ddot{z} - [-A \cos(2\pi t/T) - z^2] \dot{z} + 4\omega_0^2 z &= \varepsilon xy, \\ \ddot{w} - [-A \cos(2\pi t/T) - w^2] \dot{w} + 9\omega_0^2 w &= \varepsilon x^3. \end{aligned} \quad (14.15)$$

Два из них имеют собственные частоты ω_0 , а третий и четвертый соответственно частоты вдвое и втрое большие, а именно $2\omega_0$ и $3\omega_0$. Управляющие параметры, отвечающие за бифуркацию Андронова–Хопфа в парциальных системах подвергаются медленной периодической модуляции во времени. На первом полупериоде модуляции первая пара осцилляторов активна, а вторая подавлена. На втором полупериоде ситуация обратная.

Предположим, что первый осциллятор на стадии активности характеризуется начальной фазой φ_x , а второй — фазой φ_y , т. е. соответствующие динамические переменные колеблются как $x \sim \cos(\omega_0 t + \varphi_x)$ и $y \sim \cos(\omega_0 t + \varphi_y)$. Когда активной становится вторая пара, третий осциллятор стимулируется воздействием, описываемым членом в уравнении вида

$$xy \sim \cos(\omega_0 t + \varphi_x) \cos(\omega_0 t + \varphi_y) = \frac{1}{2} \cos(\varphi_x - \varphi_y) + \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 t + \varphi_x + \varphi_y).$$

Тогда он получает фазу $\varphi_z = \varphi_x + \varphi_y + \text{const}$, которой характеризуется последний член в данном выражении, являющийся резонансным с возбуждаемым осциллятором. Четвертый осциллятор, в свою очередь, получает утроенную фазу от первого осциллятора, что выводится из соотношения

$$x^3 \sim \cos^3(\omega_0 t + \varphi_x) = \frac{3}{4} \cos(\omega_0 t + \varphi_x) + \frac{1}{4} \cos(3\omega_0 t + 3\varphi_x),$$

поскольку резонансное возбуждение имеет место на утроенной частоте и отвечает последнему члену в выражении. Таким образом, мы имеем

$\varphi_w = 3\varphi_x + \text{const}$. Далее, при следующей передаче возбуждения эти фазы получают первый и второй осцилляторы на следующей стадии их активности. Таким образом, трансформация фаз на полном периоде модуляции описывается выражениями

$$\varphi'_x = \varphi_x + \varphi_y + \text{const}, \quad \varphi'_y = 3\varphi_x + \text{const}, \quad (14.16)$$

где аддитивные константы можно устранить сдвигом начала координат на плоскости (φ_x, φ_y) . Учитывая, что фазы определены по модулю 2π , для нормированных переменных $q = \varphi_x / 2\pi$ и $p = \varphi_y / 2\pi$ получаем

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + q_n \pmod{1}, \\ q_{n+1} &= 3p_n \pmod{1}, \end{aligned} \quad (14.17)$$

или

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_n. \quad (14.18)$$

Собственные числа фигурирующей здесь матрицы равны $(1 \pm \sqrt{13})/2$. Соответственно, показатели Ляпунова для данного отображения

$$\Lambda_1 = \ln(\sqrt{13} + 1)/2 = 0.834, \quad \Lambda_2 = \ln(\sqrt{13} - 1)/2 = 0.264. \quad (14.19)$$

Оба они положительные, так что отображение генерирует гиперхаос.

На рис. 14.7 показан хаотический аттрактор в стробоскопическом сечении в проекции из восьмимерного фазового пространства на плоскость фазовых переменных (φ_x, φ_y) . Заметим, что точки заполняют единичный квадрат приблизительно равномерно. На рис. 14.8 представлены показатели Ляпунова данного аттрактора в зависимости от параметра модуляции. В широком диапазоне по параметру два старших показателя Ляпунова остаются примерно постоянными и близкими к величинам (14.19). Это косвенно подтверждает грубую природу предположительно гиперболического аттрактора.

14.2.2. Модель с каскадной передачей возбуждения вверх по спектру частот

Наш следующий пример имеет источником идею, лежащую в основе понимания развитой гидродинамической турбулентности. Речь идет о каскадной

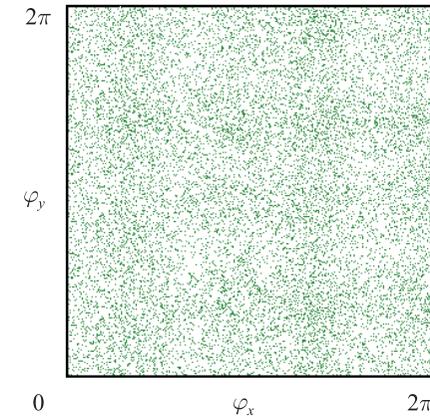


Рис. 14.7. Стробоскопическое сечение орбиты на гиперхаотическом аттракторе модели (14.15) на плоскости фазовых переменных (φ_x, φ_y) при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 20$, $A = 2.5$, $\varepsilon = 0.5$

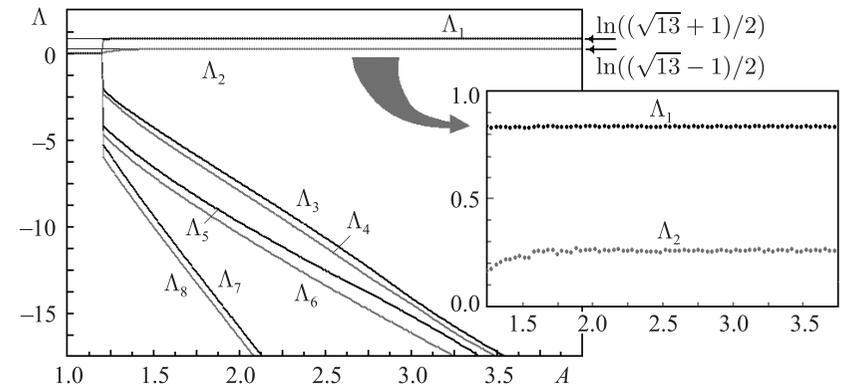


Рис. 14.8. Показатели Ляпунова для отображения Пуанкаре модели (14.15) при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 20$, $A = 2.5$, $\varepsilon = 0.5$

передаче энергии по спектру, от крупномасштабных пространственно-временных образований к мелкомасштабным [Ландау и Лифшиц, 1953;

Монин и Яглом, 1965; 1967]. Сама по себе эта идея выглядит имеющей общий характер, и, по-видимому, было бы естественно использовать ее как руководящий принцип при конструировании систем с хаотической динамикой даже в таких ситуациях, когда уравнения не похожи на гидродинамические.

Рассмотрим систему четырех осцилляторов ван дер Поля с собственными частотами $\omega_0, 2\omega_0, 4\omega_0, 8\omega_0$, показанную схематически на рис. 14.9 [Кузнецов, Соха, 2010]. Ее функционирование подразумевает передачу возбуждения от одного осциллятора к другому с последовательным удвоением частоты. Параметр, управляющий бифуркацией Андронова–Хопфа, в каждом осцилляторе полагаем медленно изменяющимся во времени с амплитудой A и периодом $T = 2\pi/\Omega$, где $\Omega \ll \omega_0$, причем модуляция параметра производится в одной фазе для первого и третьего осцилляторов и в противоположной фазе для второго и четвертого. Подходящей моделью служит система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (A \cos \Omega t - x^2) \dot{x} + \omega_0^2 x &= \varepsilon w \cos 7\omega_0 t, \\ \ddot{y} - (-A \cos \Omega t - y^2) \dot{y} + 4\omega_0^2 y &= \varepsilon x^2, \\ \ddot{z} - (A \cos \Omega t - z^2) \dot{z} + 16\omega_0^2 z &= \varepsilon y^2, \\ \ddot{w} - (-A \cos \Omega t - w^2) \dot{w} + 64\omega_0^2 w &= \varepsilon z^2, \end{aligned} \quad (14.20)$$

где переменные x, y, z, w представляют собой обобщенные координаты осцилляторов соответственно с первого по четвертый. Считаем, что имеет место соотношение $\omega_0 T = 2\pi N$, где N — целое число, так что неавтономная система уравнений имеет периодические во времени коэффициенты.

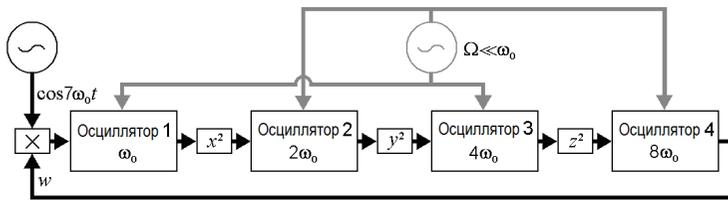


Рис. 14.9. Блок-схема исследуемой системы с каскадной передачей возбуждения с удвоением частоты

Благодаря принятому способу модуляции параметра активными по очереди становятся две пары осцилляторов. Стимуляция возбуждения в нача-

ле каждой новой стадии активности для второго, третьего и четвертого осцилляторов осуществляется передачей возбуждения от осциллятора вдвое меньшей частоты через квадратичный нелинейный элемент. При этом преобразование сигнала на квадратичной нелинейности сопровождается появлением второй гармоники, благодаря чему стимуляция носит резонансный характер. При передаче возбуждения величина, определяющая фазовый сдвиг, удваивается. Действительно, при квадратичном преобразовании сигнала $\cos(\omega t + \varphi)$ имеем $\cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t + 2\varphi)$, где надо принимать во внимание только составляющую на второй гармонике, поскольку именно она попадает в резонанс с возбуждаемым осциллятором. От четвертого осциллятора к первому возбуждение передается посредством составляющей разностной частоты, которая получается смешением сигнала на квадратичной нелинейности со вспомогательным сигналом частоты $7\omega_0$. При этом фаза колебаний передается без изменения. В самом деле, $\cos(8\omega_0 t + \theta) \cos 7\omega_0 t = \frac{1}{2} \cos(\omega_0 t + \theta) + \dots$, где опущено нерезонансное слагаемое, несущественное с точки зрения стимуляции возбуждения осциллятора с рабочей частотой ω_0 .

Чтобы яснее представить преобразование фаз в процессе функционирования системы, обратимся к таблице 14.1.

Таблица 14.1. Преобразование фаз осцилляторов с номерами 1–4 на последовательных стадиях активности

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 0 | φ_0 | | θ_0 | |
| $\frac{1}{2}$ | | $2\varphi_0 + \text{const}$ | | $2\theta_0 + \text{const}$ |
| 1 | $2\theta_0 + \text{const}$ | | $4\varphi_0 + \text{const}$ | |
| $\frac{3}{2}$ | | $4\theta_0 + \text{const}$ | | $8\varphi_0 + \text{const}$ |
| 2 | $8\varphi_0 + \text{const}$ | | $8\theta_0 + \text{const}$ | |

Столбцы таблицы отвечают осцилляторам с первого по четвертый, а строки — последовательным полупериодам медленной модуляции параметра. Начальная строка соответствует стадии активности первого и третьего осцилляторов, характеризующихся фазами φ_0 и θ_0 . Второй и четвертый осцилляторы на этом этапе неактивны и не имеют хорошо определенной фазы, так что соответствующие ячейки оставлены пустыми. Они оказываются воз-

бужденными на следующем полупериоде и, как следует из приведенных выше пояснений, получают фазы, соответственно, $2\phi_0$ и $2\theta_0$ (с точностью до постоянной добавки). Далее процесс повторяется. В таблице для большей ясности приведено несколько строк, отвечающих последовательным шагам преобразования.

Как можно видеть из таблицы, за один период медленной модуляции параметров трансформация фаз двух изначально активных осцилляторов определяется соотношениями

$$\begin{aligned}\phi_{n+1} &= 2\theta_n + \text{const} \pmod{2\pi}, \\ \theta_{n+1} &= 4\phi_n + \text{const} \pmod{2\pi}.\end{aligned}\quad (14.21)$$

Иными словами, двумерный вектор $\mathbf{v}_n = (\phi_n, \theta_n)$, компоненты которого определены по модулю 2π , отображается в другой вектор $\mathbf{v}_{n+1} = (\phi_{n+1}, \theta_{n+1})$ такого же типа, т. е. имеет место отображение, определенное на двумерном торе. Оно обладает специфическим вырождением, а именно, полная последовательность фаз ϕ_n или θ_n составлена из двух независимых подпоследовательностей, характеризующихся хаотической динамикой, так что в процессе временной эволюции их члены чередуются. За два шага малые возмущения для каждой из них увеличиваются восьмикратно. Поэтому отображение (14.21) имеет два одинаковых положительных показателя Ляпунова $\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \ln 8 \approx 1.0397$.

Результаты численного решения дифференциальных уравнений (14.20) показывают, что ожидаемый тип динамики действительно имеет место в широком диапазоне параметров системы. Для детального анализа выбран случай $\omega_0 = 2\pi$, $T = 8$, $A = 4.5$, $\varepsilon = 0.6$. На рис. 14.10 показаны зависимости динамических переменных для четырех осцилляторов от времени. Каждый осциллятор генерирует последовательность радиопульсов, следующих друг за другом регулярно через интервал времени T . Частоты заполнения соответствуют рабочей частоте осцилляторов. Хаос выражается в том, что фаза заполнения от импульса к импульсу меняется хаотическим образом. Присутствие хаоса обусловлено описанным выше механизмом передачи фазы между осцилляторами и от предыдущих стадий процесса к последующим.

На рис. 14.11 показаны итерационные диаграммы для фаз, из которых видно, что их динамика согласуется в известном приближении с отображением (14.21). Фазы, отвечающие каждой очередной стадии активности первого и третьего осциллятора, определяются в момент времени, фиксированный по отношению к сигналу, обеспечивающему медленную моду-

ляцию параметра, по формулам

$$\phi_n = \arg(x - i\dot{x} / \omega_0), \quad \theta_n = \arg(z - i\dot{z} / \omega_0). \quad (14.22)$$

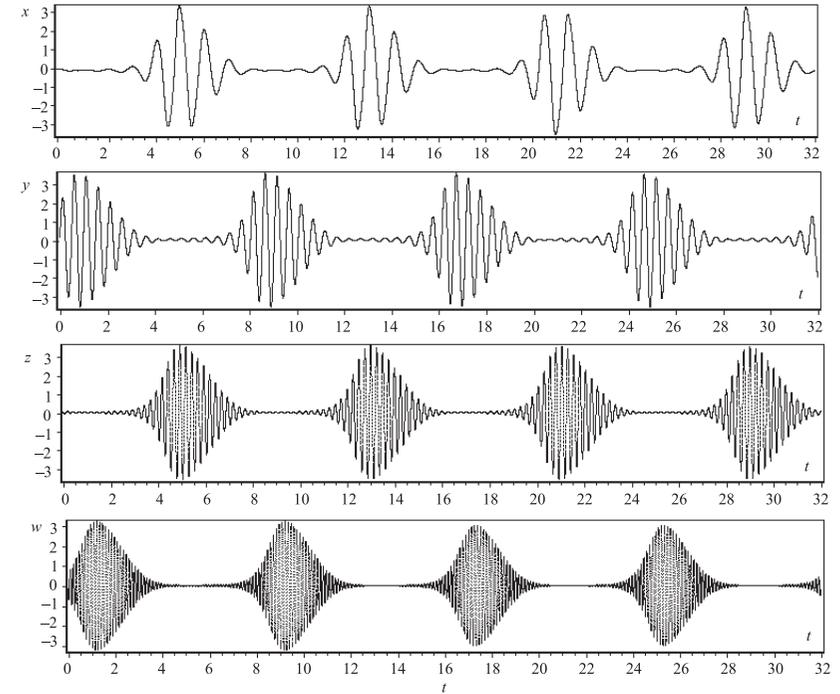


Рис. 14.10. Зависимости динамических переменных для составляющих систему четырех осцилляторов от времени при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 8$, $A = 4.5$, $\varepsilon = 0.6$

На рис. 14.12 показан портрет аттрактора в проекции из расширенного восьмимерного фазового пространства на фазовую плоскость первого осциллятора (x, \dot{x}) . Изображение представлено тонами серого цвета, так что более светлые пиксели отвечают относительно большей вероятности пребывания изображающей точки. Белым цветом выделены точки, отвечающие максимуму значения бифуркационного параметра в первом осцилляторе, которые образуют портрет аттрактора в сечении Пуанкаре.

Для оценки показателей Ляпунова используется компьютерная программа, выполняющая отображение Пуанкаре с помощью численного решения

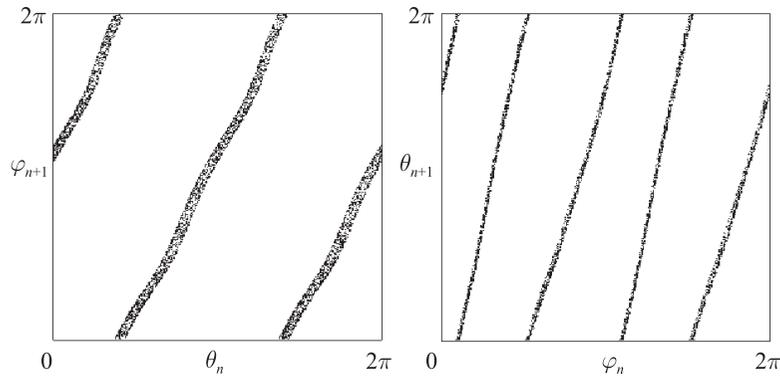


Рис. 14.11. Итерационные диаграммы для фаз первого и третьего осцилляторов, обозначенных соответственно φ_n и θ_n на последовательных стадиях их активности при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 8$, $A = 4.5$, $\varepsilon = 0.6$

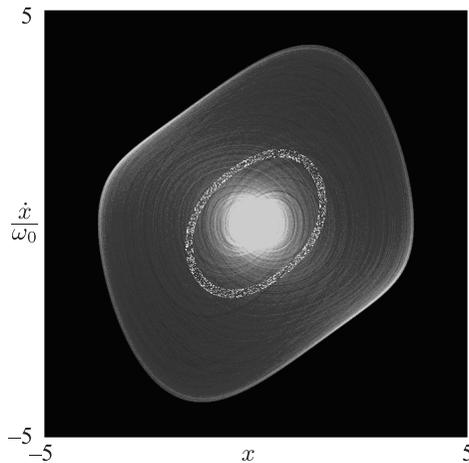


Рис. 14.12. Портрет аттрактора в проекции из расширенного восьмимерного фазового пространства на фазовую плоскость первого осциллятора (x, \dot{x}) при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 8$, $A = 4.5$, $\varepsilon = 0.6$

уравнений (14.20) и вычисляющая матрицу Якоби на основе совместного решения восьми комплектов линеаризованных уравнений в вариациях. Для нескольких итераций отображения эволюция восьми векторов малых воз-

мущений отслеживается путем умножения матриц Якоби. После каждого шага итерации применяются процесс ортогонализации Грама–Шмидта и нормировка всех восьми векторов (раздел 1.4). Показатели Ляпунова определяются как средние коэффициенты роста или уменьшения накопленной суммы логарифмов норм векторов.

На рис. 14.13 показана зависимость показателей Ляпунова от параметра глубины модуляции A при фиксированных остальных параметрах. В широком интервале изменения параметра два наибольших показателя остаются почти постоянными и близкими к величине $(\ln 8)/2$. В частности, при $A = 4.5$ показатели Ляпунова составляют

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = 1.038, \quad \Lambda_2 = 1.037, \quad \Lambda_3 = -4.622, \quad \Lambda_4 = -5.077, \\ \Lambda_5 = -7.914, \quad \Lambda_6 = -8.403, \quad \Lambda_7 = -10.335, \quad \Lambda_8 = -10.722, \end{aligned} \quad (14.23)$$

а размерность аттрактора в сечении Пуанкаре по Каплану–Йорке равна 2.449.

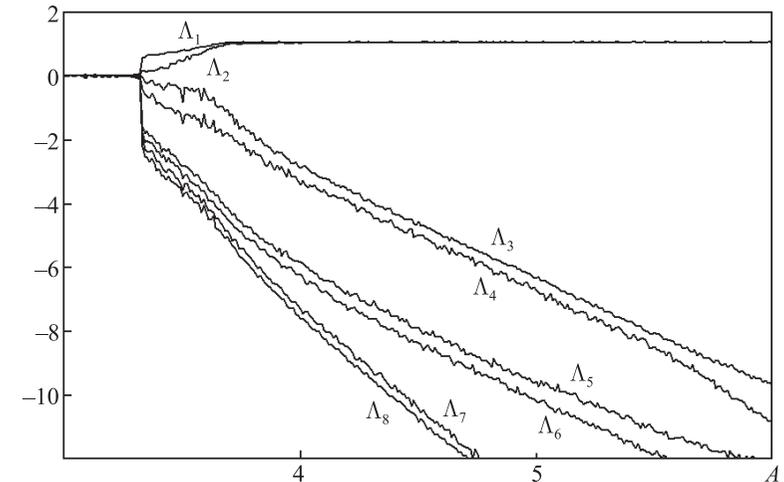


Рис. 14.13. Зависимость показателей Ляпунова от параметра глубины модуляции A при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 8$, $\varepsilon = 0.6$

На рис. 14.14 показан спектр генерируемого системой сигнала, в качестве которого рассматривалась сумма переменных, относящихся ко всем четырем осцилляторам, $X = x + y + z + w$. Спектр, как можно видеть, сплошной, что отражает хаотическую природу динамики на аттракторе. Присут-

ствует четыре хорошо выраженных пика на частотах четырех составляющих систему осцилляторов. Дискретная компонента, заметная в левой части спектра, отвечает частоте медленной периодической модуляции параметров.

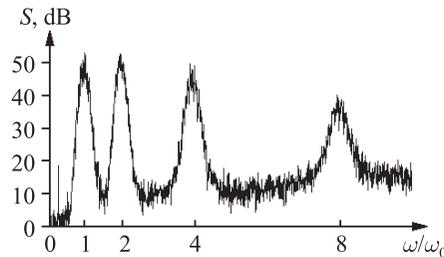


Рис. 14.14. Спектр мощности сигнала $X = x + y + z + w$, генерируемого системой, при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 8$, $A = 4.5$, $\varepsilon = 0.6$

Подводя итог, вновь подчеркнем интересный момент, состоящий в том, что рассматриваемая схема имеет в качестве отправного пункта одну из ключевых идей теории гидродинамической турбулентности — каскадную передачу энергии по спектру. Конечно, аналогия носит не более чем качественный и эвристический характер: в нашем случае речь идет о передаче возбуждения вдоль цепочки осцилляторов, которые становятся активными попеременно, с последовательным удвоением частоты. Особенностью системы является достаточно широкая общая полоса частот генерируемого сигнала. Это связано с наличием набора осцилляторов с существенно отличающимися собственными частотами. Количество осцилляторов в цепочке можно увеличить, что будет способствовать дальнейшему расширению полосы частот генерируемого хаотического сигнала. В широком диапазоне параметров динамика характеризуется наличием двух положительных показателей Ляпунова, которые близки по величине и слабо зависят от параметров. Схема, очевидно, может быть реализована как электронное устройство.

Глава 15

Гиперхаос и синхронизация хаоса в системе связанных неавтономных осцилляторов

С точки зрения возможных приложений для скрытой коммуникации принципиальный интерес представляет вопрос о синхронизации хаоса [Yang, 2001; 2004; Дмитриев и Панас, 2002; Argyris et al., 2006; Короновский и др., 2009]. Одна из широко обсуждаемых схем подразумевает использование синхронизованных между собой генераторов хаоса в передатчике и в приемнике, благодаря чему возникает возможность кодировать или маскировать передаваемый сигнал с последующим декодированием на приемном конце. Использование для этой цели систем с гиперболическим хаосом может оказаться предпочтительным в силу присущей им структурной устойчивости, т. е. нечувствительности к погрешностям изготовления, помехам и т. п. В связи с этим интересен вопрос о синхронизации и десинхронизации хаоса в подсистемах, когда в каждой из них реализуется одномерно гиперболический аттрактор. Здесь важно выявить специфические особенности феномена, связанные с гиперболическостью, поскольку принимавшиеся до сих пор исследования имели дело не с гиперболическим хаосом. С другой стороны, в плане фундаментальных исследований в нелинейной динамике традиционно уделяется внимание анализу решетчатых моделей, построенных из элементов, или «клеток», демонстрирующих тот или иной тип динамического поведения. Это представляет интерес в плане таких принципиальных сложных проблем, как обоснование статистической механики или возникновения турбулентности. В этом контексте можно отметить пионерскую работу Ферми, Паста и Улама [Ford, 1992], клеточные автоматы, рассматривавшиеся Вольфрамом и другими [Wolfram, 1986]; решетки связанных отображений, предложенные и изученные Канеко и другими авторами [Kaneko, 1993]. Как непосредственно связанные с предметом настоящей книги следует отметить работы Бунимовича и Синая и других [Bunimovich and Sinai, 1988; 1993; Bricmont and

Kurjaainen, 1997; Järvenpää, 2005], посвященные исследованию решеток, составленных из элементов с гиперболическим хаосом. В частности, это могут быть решетки связанных одномерных растягивающих отображений или решетки, составленные из систем с однородно гиперболическими аттракторами. Было показано, что гиперболический характер хаоса и сильные хаотические свойства, такие как существование абсолютно непрерывной меры Синая–Рюэля–Боуэна, положительная топологическая и метрическая энтропия, сохраняются в связанных системах, пока взаимодействие не слишком велико. Эти результаты становятся существенными и актуальными теперь, когда мы имеем возможность работать с физически реализуемыми системами с однородно гиперболическими хаотическими аттракторами. Для начала естественно обратиться к ситуации минимального количества связанных подсистем, демонстрирующих гиперболический хаос [Купцов, Кузнецов, 2008]. Здесь мы рассмотрим модель, состоящую из двух пар неавтономных поочередно возбуждающихся осцилляторов ван дер Поля, обсуждавшихся в главе 7.

15.1. Уравнения и основные режимы работы

Рассмотрим систему двух связанных элементов, каждый из которых представляет собой пару попеременно возбуждающихся осцилляторов ван дер Поля, т. е. модель (7.9). Пусть динамика описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - [A \cos(2\pi t/T) - x_1^2] \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= \varepsilon y_1 \cos \omega_0 t + d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \\ \ddot{y}_1 - [-A \cos(2\pi t/T) - y_1^2] \dot{y}_1 + 4\omega_0^2 y_1 &= \varepsilon x_1^2 + d(\dot{y}_2 - \dot{y}_1), \\ \ddot{x}_2 - [A \cos(2\pi t/T) - x_2^2] \dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 &= \varepsilon y_2 \cos \omega_0 t + d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ \ddot{y}_2 - [-A \cos(2\pi t/T) - y_2^2] \dot{y}_2 + 4\omega_0^2 y_2 &= \varepsilon x_2^2 + d(\dot{y}_2 - \dot{y}_1), \end{aligned} \quad (15.1)$$

где переменные, относящиеся к двум подсистемам, помечены индексами 1 и 2 соответственно и d есть параметр связи подсистем. Как обычно, предполагаем, что период модуляции параметров T отличается в целое число раз от периода вспомогательного сигнала $2\pi/\omega_0$.

Связь в уравнениях (15.1) определена так, что члены, отвечающие за взаимодействие подсистем, обращаются в нуль при совпадении их мгновенных состояний. Это условие определяет инвариантное многообразие симметричных движений в фазовом пространстве объединенной системы. Оно содержит инвариантное подмножество, которое идентично по структуре аттрактору парциальной системы (7.9), т. е. представляет собой надстройку соленоида Смейла–Вильямса.

Далее, подчеркнем, что члены в уравнениях (15.1), описывающие связь между подсистемами, пропорциональны разностям «своих» временных производных (обобщенных скоростей). Ее уместно именовать *диссипативной связью* в том смысле, что она способствует сближению и выравниванию мгновенных состояний взаимодействующих подсистем. Поскольку индивидуальные подсистемы хаотические, динамика составной системы определяется конкуренцией двух факторов. Первый — это расхождение орбит подсистем вследствие присущей чувствительности к вариации начальных условий, а второй — тенденция к сближению состояний из-за наличия связи. При нулевой или достаточно малой величине параметра связи d первый фактор доминирует и хаотическая динамика подсистем независима или слабо коррелирована. При больших величинах параметра связи превалирует второй фактор и возникает режим *полной хаотической синхронизации* [Пиковский и др., 2003]. При этом обе подсистемы эволюционируют во времени хаотически, но совершенно синхронно, так что состояния подсистем в каждый момент времени идентичны.

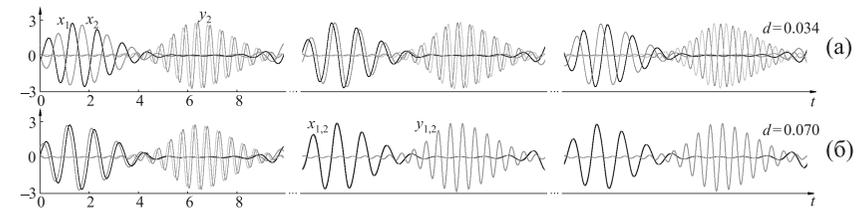


Рис. 15.1. Фрагменты типичных временных зависимостей динамических переменных модели (15.1), иллюстрирующие поведение в несинхронном (а) и синхронном (б) хаотических режимах при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 10$, $A = 3$, $\varepsilon = 0.5$

На рис. 15.1 иллюстрируется динамика модели (15.1) при задании $\omega_0 = 2\pi$, $T = 10$, $\varepsilon = 0.5$, $A = 3$ для двух значений параметра связи d . Меньшая его величина соответствует хаотическому, в грубом приближении взаимно независимому, движению обеих подсистем (диаграмма (а)), а большая — возникновению синхронизации хаоса (диаграмма (б)). Существенные особенности процесса проявляют себя на больших временных масштабах, так что на рисунке приводятся фрагменты зависимостей, разделенные достаточно большими интервалами времени (обозначены многоточием). Заметим, что на диаграмме (а) разности фаз между одновременно активными осцилляторами — представителями двух подсистем — флуктуируют от одного к другому фрагменту реализации. Во втором случае

разность фаз приближается к нулю в ходе эволюции во времени и движения подсистем становятся в конце концов синхронными.

На рис. 15.2 показаны графики показателей Ляпунова для восьмимерного отображения Пуанкаре рассматриваемой системы в зависимости от параметра связи. Эти результаты получены путем вычислений на основе алгоритма Бенеттина, а именно численного решения уравнений (15.1) совместно с восемью комплектами линеаризованных уравнения для векторов возмущения, подвергаемых ортогонализации и нормировке на каждом периоде модуляции параметров (раздел 4.1). Заметим, что старший показатель Ляпунова во всем рассмотренном диапазоне по параметру остается практически постоянным и приблизительно равен $\ln 2 = 0.693\dots$. Второй показатель Ляпунова имеет такую же величину при нулевой связи, но постепенно уменьшается с ростом параметра d . Его переход через ноль ассоциируется с переходом от несинхронного поведения к синхронному режиму примерно при $d_c = 0.069$. Другие показатели Ляпунова всюду отрицательны.

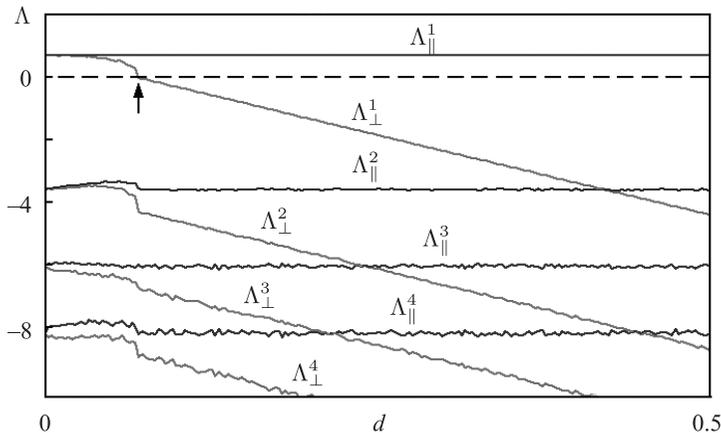


Рис. 15.2. Показатели Ляпунова системы (15.1) в зависимости от параметра величины диссипативной связи. Значения параметров $\omega_0 = 2\pi$, $T = 10$, $\varepsilon = 0.5$, $A = 3$. Нижние индексы (\parallel , \perp) обозначают показатели, относящиеся к симметричной и антисимметричной (трансверсальной) частям спектра. Переход синхронизации — десинхронизация помечен стрелкой

Хаотические аттракторы в составной системе (15.1) можно с уверенностью отнести к классу однородно гиперболических в двух предельных случаях.

Прежде всего, это заведомо так при нулевой связи. Здесь система распадается на две независимых подсистемы, каждая из которых обладает гиперболическим аттрактором типа Смейла–Вильямса в стробоскопическом отображении, и аттрактор объединенной системы также однородно гиперболический. В силу структурной устойчивости такая природа аттрактора единой системы должна сохраняться и при ненулевой связи, по крайней мере, пока она достаточно мала. Такой же вывод вытекает из работ Бунимовича и Синай [Bunimovich and Sinai, 1988; 1993].

При большой связи в ситуации синхронного хаотического движения аттрактор составной системы имеет ту же структуру, как и аттрактор индивидуальной подсистемы, который является однородно гиперболическим. Единственное отличие состоит в присутствии дополнительных направлений в пространстве состояний удвоенной размерности, ассоциирующихся с сильным сжатием.

На пути от первой ситуации ко второй, при постепенном увеличении параметра связи, гиперболическость где-то нарушается, поскольку переход от одного к другому типу динамики подразумевает изменение размерности устойчивых и неустойчивых многообразий. Этот переход составляет самостоятельный предмет для изучения.

Согласно главе 7, динамика индивидуальной подсистемы проясняется, если отследить преобразование фаз на последовательных стадиях активности осцилляторов. Тот же прием оказывается полезным для связанных систем.

На рис. 15.3 в верхнем ряду показаны портреты аттракторов системы (15.1) в стробоскопическом сечении в проекции на плоскость фазовых переменных (φ_1, φ_2) , вычисленных для осцилляторов частоты ω_1 из первой и второй подсистем. Приведенные диаграммы отвечают четырем значениям параметра связи d , указанным в надписях; остальные параметры — $\omega_0 = 2\pi$, $T = 20$, $A = 2$, $\varepsilon = 0.5$. Диаграммы (а), (б), (в) относятся к режимам несинхронной динамики, а панель (г) — к режиму синхронного хаоса.

Учитывая симметрию модели по отношению к перестановке индексов 1 и 2, уместно ввести вместо двух фаз φ_1 и φ_2 симметричные и антисимметричные переменные, определенные по модулю 2π , которые характеризуют пару одновременно активных осцилляторов, представляющих одну и другую подсистемы, а именно:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \psi = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (15.2)$$

На рис. 15.3 в нижнем ряду показаны гистограммы распределения фазовых сдвигов ψ между подсистемами согласно численным результатам для

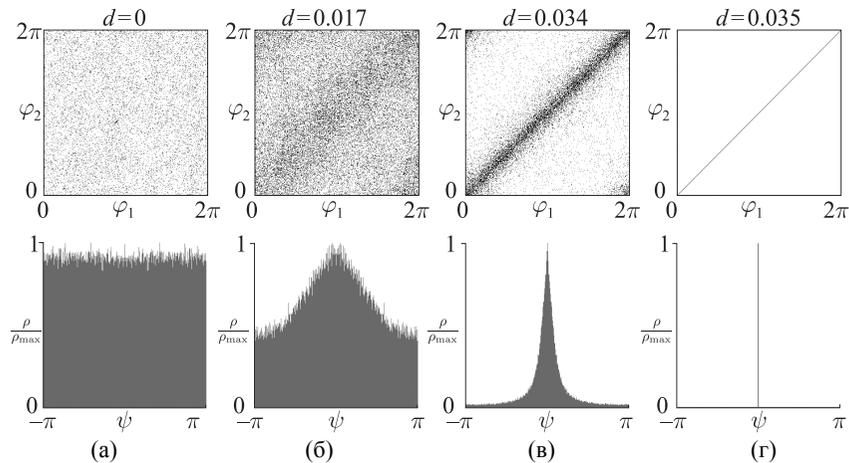


Рис. 15.3. Портреты аттракторов и гистограммы распределения фазовых сдвигов между подсистемами, полученные в результате численных расчетов для модели (15.1) в несинхронных хаотических режимах (а), (б), (в) и в синхронном режиме (г) при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 20$, $A = 2$, $\varepsilon = 0.5$

модели (15.1) при тех же самых параметрах, как на рисунках верхнего ряда. Можно видеть формирование распределения с хорошо выраженным максимумом в нуле при постепенном увеличении связи в несинхронном режиме и появление распределения в виде дельта функции Дирака после перехода к синхронизации.

На рис. 15.4 показаны итерационные диаграммы для фазовых переменных ϕ и ψ . В верхнем ряду показаны графики для симметричной и антисимметричной переменной при величине связи ниже критической. Это режим гиперхаоса, в котором обе переменные при описании в дискретном времени изменяются в соответствии с отображениями типа Бернулли. При этом два показателя Ляпунова положительны. Во втором ряду приведены диаграммы для антисимметричной переменной. Та, что слева, отвечает приблизительно критической ситуации, а та, что справа, — уровню связи, превышающему критическую величину. (В последнем случае для построения графика использовалась специальная процедура, включающая обработку данных для переходных процессов; аттрактор соответствующего синхронного режима в этих координатах изображается точкой в начале координат, которая показана стрелкой.)

Немного ниже порога синхронизации по параметру связи реализуется динамическое поведение, получившее название *перемежаемость on-off*

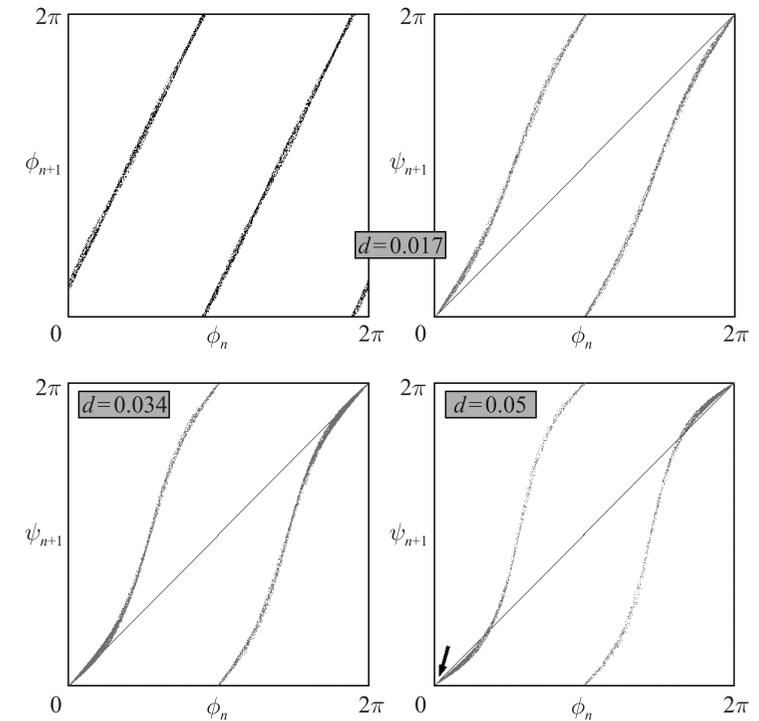


Рис. 15.4. Итерационные диаграммы для модели (15.1) при трех различных значениях параметра связи d для $\omega_0 = 2\pi$, $T = 20$, $A = 2$, $\varepsilon = 0.5$. Верхний ряд отвечает диаграммам для симметричной и антисимметричной фазовой переменной, определенной согласно (15.2) при $t_n = nT$ для связи меньше критической. Нижний ряд — это диаграммы для антисимметричной переменной в критической ситуации (слева) и в случае связи, превышающей критическую величину (справа). На последней диаграмме аттрактор синхронного хаотического режима отвечает точке в начале координат, показанной стрелкой

(«перемежаемость включение–выключение») [Platt et al., 1993; Hilborn, 2000; Mosekilde et al., 2002; Шустер, 1988]. Система проводит большую часть времени очень близко к синхронному состоянию, но время от времени оказывается далеко от него; эти периоды занимают относительно малую долю времени, тем меньшую, чем мы ближе находимся к точке перехода. На рис. 15.5 приводится иллюстрация этого феномена для модели (15.1) на графике разности фаз между подсистемами в зависимости от времени.

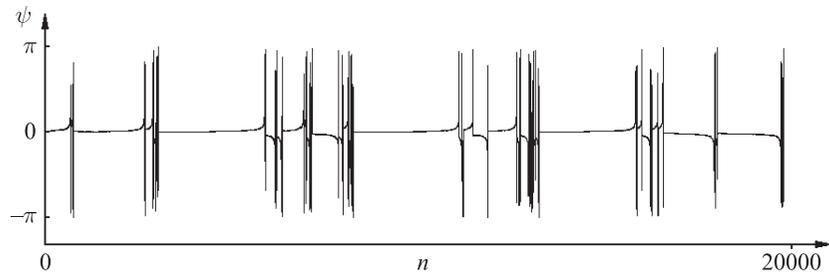


Рис. 15.5. Перемежаемость on-off в модели (15.1) при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 20$, $A = 2$, $\varepsilon = 0.5$ и $d = 0.0347$. Показана зависимость разности фаз между двумя подсистемами в последовательные моменты времени nT

Помимо перемежаемости on-off, переход от синхронного к несинхронному хаосу сопровождается рядом других специфических явлений, таких как изрешечивание бассейнов (riddling) и пузырение (bubbling) аттрактора, которые обсуждаются в литературе в контексте синхронизации хаоса. При этом известные примеры относятся к связанным системам с негиперболическими аттракторами [Анищенко и др., 1999; Mosekilde et al., 2002; Ott, 2002; Ashwin, 2005]. Ясно, что вопрос нуждается в пересмотре для выявления особенностей, которые могут быть характерны для ситуации, когда в подсистемах при выключенной связи имеет место однородно гиперболический хаос.

15.2. Уравнения для медленных комплексных амплитуд

Более удобную для анализа модель можно получать, переформулировав задачу в рамках метода медленно меняющихся комплексных амплитуд. Применяя этот подход к уравнениям (15.1) по схеме, описанной в разделах 7.1 и 7.3, можно получить следующую систему укороченных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &= \frac{1}{2}[A \cos(2\pi t/T) - |a_1|^2]a_1 - \frac{1}{4}i\varepsilon\omega_0^{-1}b_1 + \frac{1}{2}d(a_2 - a_1), \\ \dot{b}_1 &= \frac{1}{2}[-A \cos(2\pi t/T) - |b_1|^2]b_1 - \frac{1}{4}i\varepsilon\omega_0^{-1}a_1^2 + \frac{1}{2}d(b_2 - b_1), \\ \dot{a}_2 &= \frac{1}{2}[A \cos(2\pi t/T) - |a_2|^2]a_2 - \frac{1}{4}i\varepsilon\omega_0^{-1}b_2 + \frac{1}{2}d(a_1 - a_2), \\ \dot{b}_2 &= \frac{1}{2}[-A \cos(2\pi t/T) - |b_2|^2]b_2 - \frac{1}{4}i\varepsilon\omega_0^{-1}a_2^2 + \frac{1}{2}d(b_1 - b_2).\end{aligned}\quad (15.3)$$

Вычисления показывают, что динамика, описываемая этими уравнениями, хорошо согласуется с исходной моделью (по крайней мере при выборе па-

раметров, принятом в предыдущем разделе). Поэтому мы можем использовать эту новую версию модели для объяснения существенных качественных особенностей наблюдаемого поведения.

Начнем с обсуждения показателей Ляпунова для симметричного инвариантного множества S , на котором справедливы соотношения $a_1 \equiv a_2$, $b_1 \equiv b_2$ и которое представляет собой аттрактор составной системы, ассоциирующийся с синхронным хаотическим режимом при большой связи. В стробоскопическом сечении Пуанкаре это множество представляет собой соленоид Смейла–Вильямса. В докритической области параметра связи множество S тоже имеет место, но не является притягивающим.

Полагая $a_{1,2}(t) = a(t) + \tilde{a}_{1,2}(t)$, $b_{1,2}(t) = b(t) + \tilde{b}_{1,2}(t)$, в линейном приближении для возмущений опорной траектории получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{a}}_1 &= \frac{1}{2}[A \cos(2\pi t/T) - 3|a|^2]\tilde{a}_1 - a^2\tilde{a}_1^* - \frac{1}{4}i\varepsilon\omega_0^{-1}\tilde{b}_1 + \frac{1}{2}d(\tilde{a}_2 - \tilde{a}_1), \\ \dot{\tilde{b}}_1 &= \frac{1}{2}[-A \cos(2\pi t/T) - 3|b|^2]\tilde{b}_1 - b^2\tilde{b}_1^* - \frac{1}{2}i\varepsilon\omega_0^{-1}a\tilde{a}_1 + \frac{1}{2}d(\tilde{b}_2 - \tilde{b}_1), \\ \dot{\tilde{a}}_2 &= \frac{1}{2}[A \cos(2\pi t/T) - 3|a|^2]\tilde{a}_2 - a^2\tilde{a}_2^* - \frac{1}{4}i\varepsilon\omega_0^{-1}\tilde{b}_2 + \frac{1}{2}d(\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2), \\ \dot{\tilde{b}}_2 &= \frac{1}{2}[-A \cos(2\pi t/T) - 3|b|^2]\tilde{b}_2 - b^2\tilde{b}_2^* - \frac{1}{2}i\varepsilon\omega_0^{-1}a\tilde{a}_2 + \frac{1}{2}d(\tilde{b}_1 - \tilde{b}_2).\end{aligned}\quad (15.4)$$

Их можно переписать для симметричных переменных $\tilde{a}_{\parallel} = \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2$, $\tilde{b}_{\parallel} = \tilde{b}_1 + \tilde{b}_2$ в виде

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{a}}_{\parallel} &= \frac{1}{2}[A \cos(2\pi t/T) - 3|a|^2]\tilde{a}_{\parallel} - a^2\tilde{a}_{\parallel}^* - \frac{1}{4}i\varepsilon\omega_0^{-1}\tilde{b}_{\parallel}, \\ \dot{\tilde{b}}_{\parallel} &= \frac{1}{2}[-A \cos(2\pi t/T) - 3|b|^2]\tilde{b}_{\parallel} - b^2\tilde{b}_{\parallel}^* - \frac{1}{2}i\varepsilon\omega_0^{-1}a\tilde{a}_{\parallel}\end{aligned}\quad (15.5)$$

и для антисимметричных величин $\tilde{a}_{\perp} = \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2$, $\tilde{b}_{\perp} = \tilde{b}_1 - \tilde{b}_2$ в виде

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{a}}_{\perp} &= \frac{1}{2}[A \cos(2\pi t/T) - 3|a|^2]\tilde{a}_{\perp} - a^2\tilde{a}_{\perp}^* - \frac{1}{4}i\varepsilon\omega_0^{-1}\tilde{b}_{\perp} - d\tilde{a}_{\perp}, \\ \dot{\tilde{b}}_{\perp} &= \frac{1}{2}[-A \cos(2\pi t/T) - 3|b|^2]\tilde{b}_{\perp} - b^2\tilde{b}_{\perp}^* - \frac{1}{2}i\varepsilon\omega_0^{-1}a\tilde{a}_{\perp} - d\tilde{b}_{\perp}.\end{aligned}\quad (15.6)$$

Отсюда видно, что спектр показателей Ляпунова состоит из двух частей, одна отвечает симметричным возмущениям и описывается уравнениями (15.5), а другая — антисимметричным и определяется уравнениями (15.6).

Уравнения для симметричных возмущений (15.5) в точности совпадают с соответствующими уравнениями для одной подсистемы (7.19). Таким образом, показатели Ляпунова просто равны значениям, полученным для индивидуальной исходной системы.

Что касается второй части спектра, то можно заметить, что замена $\tilde{a}_\perp = \tilde{a}e^{-dt}$, $\tilde{b}_\perp = \tilde{b}e^{-dt}$ преобразует (15.6) в точности в (15.5). Это означает, что трансверсальные показатели Ляпунова связаны с теми, которые относятся к симметричным возмущениям, соотношениями $\lambda_\perp^i = \lambda_\parallel^i - d$, или, для отображения Пуанкаре, $\Lambda_\perp^i = \Lambda_\parallel^i - dT$, где T — период модуляции, а i — индекс, нумерующий показатели Ляпунова от 1 до 4. Зависимость Λ_\perp^i от параметра связи линейная, что хорошо видно на рис. 15.2.

Наблюдаемый при уменьшении параметра связи d переход от синхронного к несинхронному хаосу соответствует нулю показателя Λ_\perp^1 . Поэтому критическое значение параметра связи дается выражением $d_c = \Lambda_\parallel^1 / T$. Учитывая, что $\Lambda_\parallel^1 \approx \ln 2$, получаем приближенную оценку $d_c \approx 0.693 / T$, что хорошо согласуется с результатами численного моделирования.

15.3. Динамика фаз

Выведем приближенно отображение, описывающее динамику фазовых переменных. Для этого заметим, что действие связи проявляется на временном масштабе порядка T , тогда как удвоение фазы отдельных подсистем происходит на существенно меньших характерных временах. Таким образом, удвоение фаз можно описывать, пренебрегая наличием связи, так, как если бы это происходило независимо в обеих подсистемах.

Относительно медленный процесс эволюции разности фаз между подсистемами для каждой пары одновременно активных осцилляторов можно описать следующим образом. Имея в виду идентичную временную зависимость модуляции параметра в связанных парах осцилляторов a_1 и a_2 , разумно предположить, что их амплитуды приблизительно одинаковы на всей стадии активности: $a_1 \approx A(t)e^{i\phi}$, $a_2 \approx A(t)e^{i\theta}$. Подставим эти выражения в соответствующие уравнения (15.3), умножим их на экспоненты $e^{-i\phi}$, $e^{-i\theta}$, вычтем одно из другого и возьмем мнимую часть. В результате получается уравнение, описывающее временную эволюцию антисимметричной фазовой переменной $\psi = \phi - \theta$ в виде

$$\dot{\psi} = -d \sin \psi. \quad (15.7)$$

Его можно решить аналитически; удобное представление решения имеет вид $\psi = \psi_0 + \arctg \frac{(1-e^{-dt})\text{tg} \psi_0}{1+e^{-dt}\text{tg}^2 \psi_0}$, где ψ_0 обозначает начальное значение пере-

менной ψ . То же самое справедливо для второй половины периода модуляции в отношении комплексных амплитуд b_1 и b_2 .

Резюмируя, преобразование фазы на одном периоде модуляции состоит в медленной эволюции антисимметричной переменной согласно уравнению (15.7), имеющей полную продолжительность T , и из быстрого события удвоения обеих фаз ϕ и θ . Таким образом, мы должны записать

$$\begin{aligned} \phi_{n+1} &= 2 \left(\phi_n + \frac{1}{2} \arctg \frac{(1-e^{-dT})\text{tg}(\theta_n - \phi_n)}{1+e^{-dT}\text{tg}^2(\theta_n - \phi_n)} \right) + c \pmod{2\pi}, \\ \theta_{n+1} &= 2 \left(\theta_n + \frac{1}{2} \arctg \frac{(1-e^{-dT})\text{tg}(\phi_n - \theta_n)}{1+e^{-dT}\text{tg}^2(\theta_n - \phi_n)} \right) + c \pmod{2\pi}, \end{aligned} \quad (15.8)$$

где c — некоторая константа.¹

На рис. 15.6 показаны графики для антисимметричной переменной $\psi_n = \phi_n - \theta_n$, полученные из соотношений (15.8). Их можно сравнить с эмпирическими итерационными диаграммами, приводившимися на рис. 15.4. Можно видеть, что вид кривых изменяется с ростом параметра связи в соответствии с приведенными качественными объяснениями и численными результатами. При малой связи отображение для антисимметричной фазы выглядит как отображение Бернулли: наклон кривой в начале координат здесь превышает 1. В критической ситуации $d = d_c$ кривая касается биссектрисы, а в случае $d > d_c$ имеет место дополнительная точка пересечения кривой с биссектрисой. Начало координат при этом становится устойчивой неподвижной точкой, которая ассоциируется с режимом полной фазовой синхронизации. На рис. 15.7 показан график, иллюстрирующий режим перемежаемости on-off вблизи критической величины параметра связи в упрощенной модели (15.8). Как можно видеть, качественное соответствие с рис. 15.5 хорошее.

15.4. Изрешечивание бассейна и пузырение аттрактора

Надо иметь в виду, что модель (15.8) несовершенна, поскольку не охватывает некоторые тонкие детали перехода между синхронной и несинхронной динамикой, такие как изрешечивание бассейнов. При использовании

¹ Из проведенного анализа можно без труда заключить, как строить модель цепочки систем из элементарных блоков в виде решетки связанных отображений, подобной изученной Бунимовичем и Синаем [Bunimovich and Sinai, 1988; 1993].

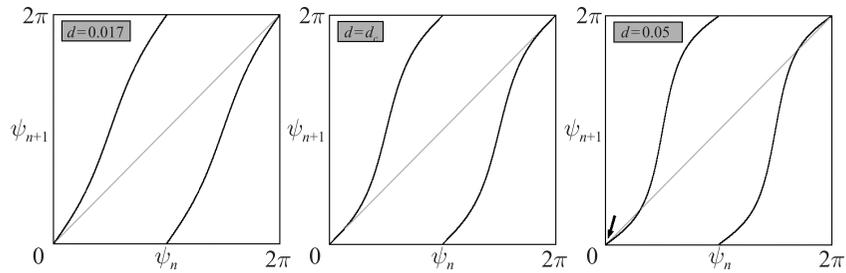


Рис. 15.6. Графики приближенного отображения для антисимметричной фазы, заданного соотношениями (15.8), для трех значений параметра связи d при $T=20$. Левая диаграмма отвечает докритической ситуации (синхронизация отсутствует), а правая — закритической ситуации (синхронизация имеет место и ассоциируется с неподвижной точкой, показанной стрелкой). Диаграмма в центре относится к критической ситуации

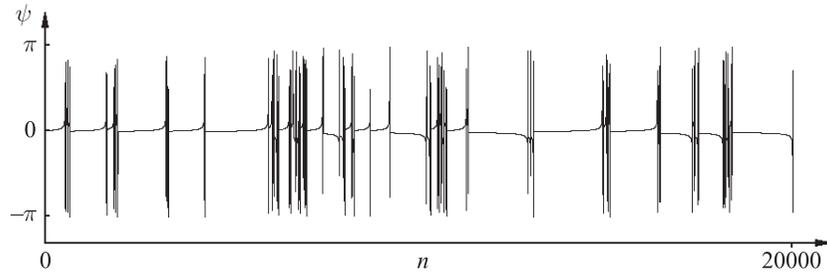


Рис. 15.7. Переमेжаемость on-off в отображении (15.8) при $T=20$ и $d=0.03462$. На графике показана зависимость антисимметричной фазовой переменной в зависимости от дискретного времени n

в качестве связанных элементов систем с гиперболическими аттракторами этот феномен не очень хорошо выражен и требует для своего выявления рассмотрения очень узкой области по параметру вблизи точки перехода. Чтобы его проиллюстрировать, обратимся к вычислениям на основе уравнений (15.3).

Напомним, что в фазовом пространстве системы присутствует симметричное инвариантное множество S , представляющее собой солениод Смейла–Вильямса в стробоскопическом сечении Пуанкаре. Оно содержит инвариантные подмножества, включая, в частности, периодические орбиты разных периодов (циклы). При этом степень неустойчивости или ус-

тойчивости этих подмножеств по отношению к трансверсальным возмущениям, вообще говоря, отличается. Соответственно, показатели Ляпунова этих подмножеств могут быть отличны от величин, усредненных по всему множеству S .² Вблизи порога синхронизации это обстоятельство определяет эффекты изрешечивания бассейнов, а также появление так называемого пузырящегося аттрактора.

В качестве конкретного примера в компьютерных вычислениях были найдены в некотором количестве периодические орбиты для модели (15.3) при $T=4$, $\varepsilon=0.2\pi$, $A=8$. (Относительно малый период модуляции T выбран для того, чтобы сделать рассматриваемые эффекты лучше выраженными.) Для этих орбит вычислялись мультипликаторы Флоке μ и показатели Ляпунова λ , которые связаны с ними соотношением $\lambda = P^{-1} \ln \mu$, где $P = pT$ — период орбиты.

На рис. 15.8 показаны графики наибольшего трансверсального показателя Ляпунова для периодических орбит с $p=1 \div 7$.

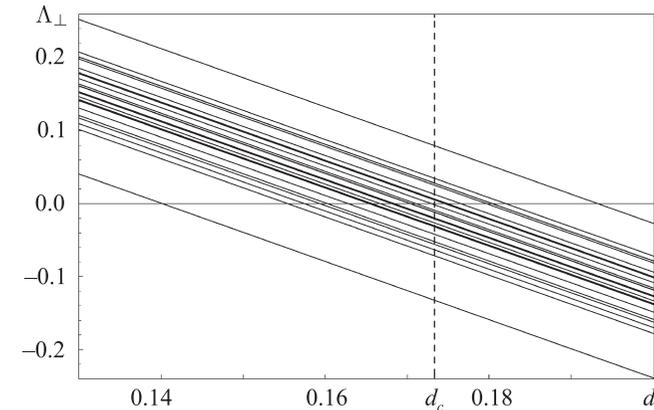


Рис. 15.8. Старшие показатели Ляпунова для циклов периода от 1 до 7 в зависимости от параметра связи при $A=8$, $T=2$, $\varepsilon=0.05$. Пунктирной линией помечен порог синхронизации

Заметим, что с уменьшением параметра связи периодические орбиты теряют устойчивость по отношению к антисимметричному возмущению около критической точки при несколько различающихся значениях пара-

² В приближенной модели (15.38) эта разница игнорируется.

метра связи, сама же критическая точка отвечает потере устойчивости принадлежащей множеству S типичной траекторией. В области чуть выше порога синхронизации в связи с существованием трансверсально неустойчивых инвариантных подмножеств бассейн притяжения для симметричного аттрактора изрешечен [Mosekilde и др., 2002; Ashwin, 2005]. Чтобы визуализировать этот бассейн, рассматривается двумерное сечение фазового пространства, где точки, принадлежащие и не принадлежащие бассейну, отмечаются соответственно белым и черным цветом. Для этого мы сканируем область на плоскости переменных $\text{Re } a_1$ и $\text{Re } a_2$, присвоив переменным некоторые фиксированные значения, отвечающие произвольно выбранной точке на симметричном инвариантном множестве. На графике диагональ $\text{Re } a_1 = \text{Re } a_2$ представляет симметричный аттрактор. Для каждого пикселя вычисления выполняются для достаточно большого числа шагов итераций стробоскопического отображения Пуанкаре и наличие или отсутствие синхронизации диагностируется путем контроля нормы разности векторов состояния для подсистем, начиная с определенного шага итераций.³

Обнаружить с достаточной уверенностью эффект изрешечивания бассейна симметричного аттрактора системы (15.3) удастся лишь в очень малой окрестности перехода к синхронному режиму. На рис. 15.9 показаны результаты, полученные применением описанной выше процедуры визуализации эффекта при $d = 0.173$. Как можно видеть, характерная особенность бассейна состоит в отсутствии каких-либо областей заметного размера, которые не содержали бы точек, заведомо относящихся или не относящихся к бассейну. При увеличении разрешения процедуры распознавания каждый элемент картинки распадается на меньшие несвязные элементы и так далее. Такую структуру можно объяснить низкой плотностью инвариантных подмножеств симметричного аттрактора, отвечающих за возникновение изрешечивания. Это, в свою очередь, связано с гиперболической природой аттрактора индивидуальной подсистемы.

Рассмотрим теперь эффект «пузырящегося» аттрактора, который также связан с присутствием трансверсальной неустойчивости инвариантных подмножеств множества S [Анищенко и др., 1999; Mosekilde et al., 2002; Ott, 2002]. Предположим, что мы находимся в закритической области недалеко от порога синхронизации. Выберем начальные условия так, чтобы

³ Реально говоря, указанная процедура обеспечивает распознавание сходимости или ухода от симметричного аттрактора с некоторой вероятностью, не давая абсолютно достоверного результата. Однако для качественных иллюстраций, которые нам здесь нужны, этого достаточно.

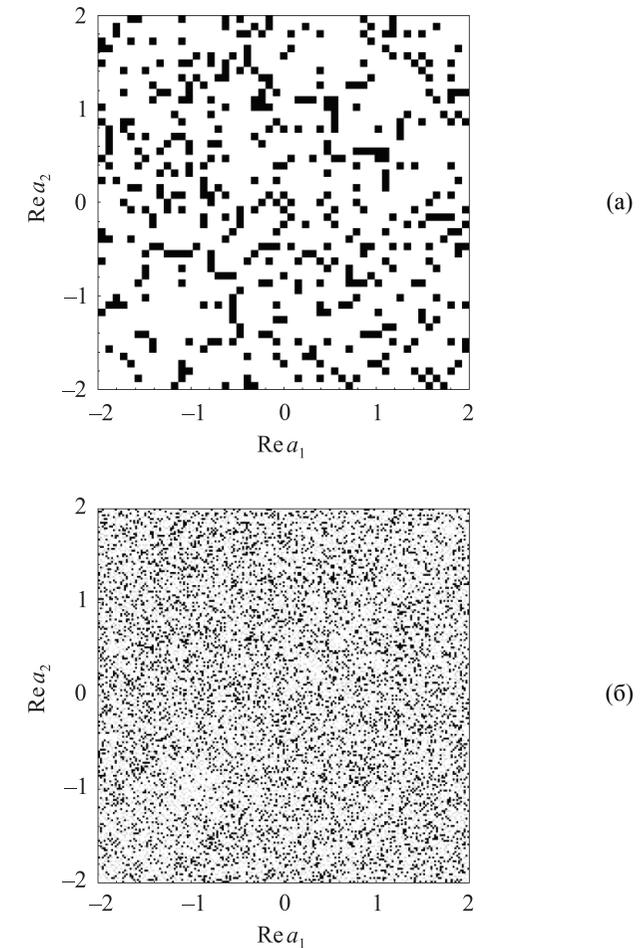


Рис. 15.9. Изрешеченный бассейн притяжения симметричного аттрактора системы (15.3), представленный с низким (а) и высоким (б) разрешением процедуры распознавания. Белым цветом помечены точки, где обнаруживается прибытие системы к симметричному аттрактору, а черным — точки, где она не приходит к нему. Значения параметров: $A = 8$, $T = 2$, $\varepsilon = 0.05$, $d = 0.173$. $\text{Im } a_1(0) = \text{Im } a_2(0) = 0.37$, $b_1(0) = b_2(0) = -0.05 + 0.07i$

система попадала на симметричный аттрактор, т. е. расстояние между подсистемами $\sqrt{|a_1 - a_2|^2 + |b_1 - b_2|^2}$ уменьшалось бы на достаточно больших временах наблюдения. Далее, берем те же начальные условия, но в процессе численного решения уравнений добавляем к вычисляемым переменным малый случайный шум. Под его влиянием система может попасть в окрестность трансверсально неустойчивого подмножества, и это вызовет всплеск несинхронных колебаний. Через какое-то время система вернется к симметричному аттрактору, пока не случится следующий случайный сдвиг, ведущий к следующему всплеску.

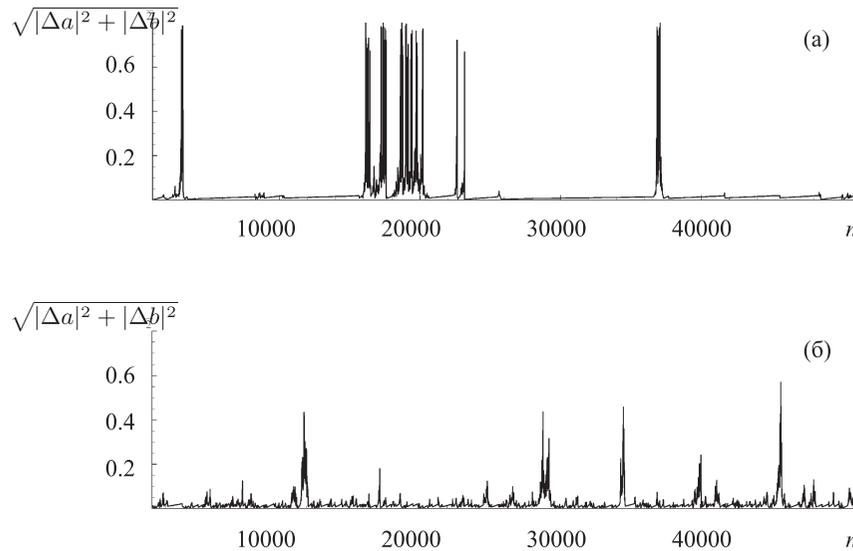


Рис. 15.10. Эффект «пузырящегося» аттрактора. По вертикальной оси отложено расстояние между состояниями подсистем в модели (15.3), а по горизонтальной — число шагов дискретного времени отображении Пуанкаре при $A = 8$, $T = 2$, $\varepsilon = 0.05$. По ходу численного интегрирования уравнений к каждой переменной добавляется шум с амплитудой порядка 0.001. Значения параметра связи $d = 0.173$ (а) и $d = 0.174$ (б)

Эффект «пузырения» иллюстрируется на рис. 15.10. Из диаграммы (а) можно видеть, что присутствие шума малой амплитуды (порядка 0.001) вызывает всплески колебаний, амплитуда которых превышает уровень шума на много порядков. Однако система достаточно редко оказывается в окрестности трансверсально неустойчивых инвариантных множеств. Как

видно из диаграммы (б), небольшое увеличение параметра связи приводит к существенному уменьшению вероятности появления всплесков, и пики на этом рисунке заметно ниже, чем на предыдущем. Другими словами, также как это имеет место в отношении изрешечивания, эффект пузырящегося аттрактора быстро пропадает при увеличении параметра связи d .

Глава 16

Автономные системы с динамикой вблизи гетероклинического контура

Настоящая глава посвящена автономным системам, генерирующим последовательность цугов колебаний с изменяющейся хаотической фазой, которые конструируются на основе динамического поведения, ассоциирующегося с гетероклиническими циклами. Этот принцип был предложен в совместной работе автора с А. Пиковским [Kuznetsov and Pikovsky, 2007]. Гетероклинический цикл, или гетероклиническая петля, состоит из нескольких седловых неподвижных точек и соединяющих их траекторий. Пример, который можно считать парадигмой гетероклинического цикла [Guckenheimer and Holmes, 1988], обсуждается в разделе 16.1. Для целей настоящего исследования эта система будет фигурировать как уравнения для амплитуд взаимодействующих осцилляторов. К ним добавляются члены, вносящие дополнительную связь определенного вида так, что попеременное возбуждение осцилляторов в циклическом порядке сопровождается преобразованием фазы колебаний в соответствии с некоторым хаотическим отображением. Осцилляторов может быть три или больше, так что для моделей, построенных в рамках этого подхода, минимальная размерность фазового пространства равна шести. В разделах с 16.2 по 16.4 обсуждаются три модели. Одна имеет аттрактор типа Смейла–Вильямса, вторая — аттрактор, динамика на котором описывается отображением «кот Арнольда», и третья доставляет пример гиперхаоса, характеризуемого наличием двух положительных показателей Ляпунова. Все примеры построены на базе уравнений для комплексных амплитуд и используют нерезонансный механизм передачи возбуждения между попеременно возбуждающимися осцилляторами. В заключительном разделе 16.5 предложена система в виде кольца, составленного из большого числа осцилляторов ван дер Поля. Вследствие постепенного изменения собственных частот осцилляторов вдоль кольца оказывается возможным использовать резонансный механизм передачи возбуждения, поэтому такая система может иметь перспективу для реализации генераторов хаоса в диапазоне высоких частот.

16.1. Гетероклинический контур: пример Гукенхеймера и Холмса

Нормированное уравнение для комплексной амплитуды одиночного осциллятора ван дер Поля за порогом бифуркации Андронова–Хопфа имеет вид $\dot{a} = (1 - |a|^2)a$, а соответствующее уравнение для квадрата амплитуды — $\dot{r} = 2(1 - r)r$, где $r = |a|^2$. Рассмотрим симметричную систему из нескольких элементов такого типа, соединенных в кольцо. Пусть их взаимодействие друг с другом осуществляется через посредство зависящих от амплитуд множителей в уравнениях так, что значительная по величине амплитуда одного осциллятора способствует подавлению предыдущего и следующего элемента в кольце в разной степени. Простой пример — система трех осцилляторов, описываемая уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= 2(1 - r_1 - \frac{1}{2}r_3 - 2r_2)r_1, \\ \dot{r}_2 &= 2(1 - r_2 - \frac{1}{2}r_1 - 2r_3)r_2, \\ \dot{r}_3 &= 2(1 - r_3 - \frac{1}{2}r_2 - 2r_1)r_3. \end{aligned} \quad (16.1)$$

Это в точности соответствует модели Гукенхеймера и Холмса [Guckenheimer and Holmes, 1988], записанной для квадратичных величин с конкретным выбором коэффициентов.

Качественно поведение системы можно объяснить следующим образом. Допустим, что первоначально все три переменные относительно малы, но, скажем, r_1 является наибольшей. В соответствии с первым уравнением она растет, достигает величины порядка 1 и испытывает насыщение. Теперь действие со стороны первого осциллятора обеспечивает сильное подавление переменной r_3 (поскольку r_1 входит в третье уравнение с коэффициентом 2), но это не сдерживает рост переменной r_2 (так как во втором уравнении r_1 присутствует с коэффициентом $\frac{1}{2}$). На следующем этапе, переменная r_2 растет, испытывает насыщение и подавляет переменную r_1 , но не препятствует росту r_3 , и так далее. Таким образом, элементы становятся активными попеременно в циклическом порядке. Каждое очередное повторение процесса занимает все больше и больше времени в силу того, что последовательные подавления осцилляций становятся все более глубокими.

В фазовом пространстве системы (16.1) имеется три неподвижные точки типа седла, $(r_1, r_2, r_3) = (1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$. Они соединены контуром, состоящим из трех гладких сегментов, каждый из которых представ-

ляет собой исходящую сепаратрису одного седла и входящую сепаратрису другого (рис. 16.1а). Движение вблизи этого *гетероклинического контура*, или *гетероклинического цикла*, соответствует обходу всех трех сегментов с посещением малых окрестностей седел; вблизи них движение очень медленное, так что временная протяженность последовательных проходов постепенно растет и стремится к бесконечности (рис. 16.1б).

Разумеется, конкретные коэффициенты в уравнениях типа (16.1) могут быть другими. С тем же успехом аналогичная динамика может быть организована для большего числа элементов и, соответственно, вовлеченных седловых точек.

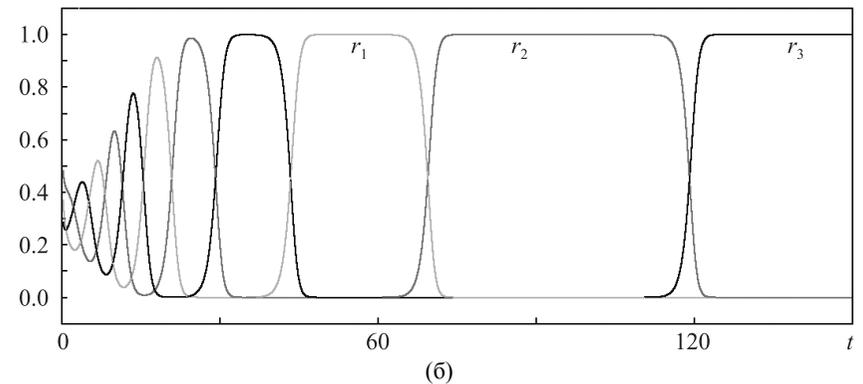
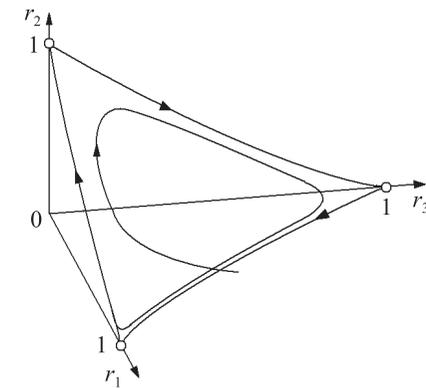


Рис. 16.1. Гетероклинический цикл в фазовом пространстве системы (16.1) (а) и зависимости амплитуд $r_{1,2,3}$ от времени, демонстрирующие осцилляции с постепенно увеличивающимся масштабам времени (б)

В настоящее время существует обширная литература, посвященная динамическим явлениям, связанным с гетероклиническими циклами, и их приложениям, в том числе к задачам конвекции, биологическим популяциям, нейродинамике (см., например, [Mercader et al., 2002; Huisman and Weissing, 2001; Rabinovich et al., 2006]).

Придерживаясь интерпретации переменных r_1, r_2, r_3 как квадратов амплитуд трех осцилляторов, $r_k = |a_k|^2$, $k=1, 2, 3$, запишем уравнения для комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 + i\omega_1 a_1 &= (1 - |a_1|^2 - \frac{1}{2}|a_3|^2 - 2|a_2|^2)a_1, \\ \dot{a}_2 + i\omega_2 a_2 &= (1 - |a_2|^2 - \frac{1}{2}|a_1|^2 - 2|a_3|^2)a_2, \\ \dot{a}_3 + i\omega_3 a_3 &= (1 - |a_3|^2 - \frac{1}{2}|a_2|^2 - 2|a_1|^2)a_3,\end{aligned}\quad (16.2)$$

где $\omega_{1,2,3}$ — параметры частот. Эти уравнения будут приняты за основу для построения моделей, исследуемых в следующих трех разделах.

16.2. Аттрактор типа Смейла–Вильямса в системе трех связанных автоколебательных элементов

Модифицируем уравнения (16.2) так, чтобы получилась автономная система с аттрактором типа Смейла–Вильямса в отображении Пуанкаре [Kuznetsov and Pikovsky, 2007]. Обратимся к симметричному случаю, взяв $\omega_{1,2,3} = \omega_0$, и введем в уравнения дополнительные члены, имеющие второй порядок по динамическим переменным. При этом должна быть обеспечена передача возбуждения каждому следующему осциллятору в кольце после стадии подавления от его предыдущего соседа. Полагая $a_k = x_k + iy_k$, для действительных и мнимых частей запишем

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \omega_0 y_1 + \left(1 - (x_1^2 + y_1^2) - \frac{1}{2}(x_3^2 + y_3^2) - 2(x_2^2 + y_2^2)\right)x_1 + \varepsilon x_3 y_3, \\ \dot{y}_1 &= -\omega_0 x_1 + \left(1 - (x_1^2 + y_1^2) - \frac{1}{2}(x_3^2 + y_3^2) - 2(x_2^2 + y_2^2)\right)y_1, \\ \dot{x}_2 &= \omega_0 y_2 + \left(1 - (x_2^2 + y_2^2) - \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) - 2(x_3^2 + y_3^2)\right)x_2 + \varepsilon x_1 y_1, \\ \dot{y}_2 &= -\omega_0 x_2 + \left(1 - (x_2^2 + y_2^2) - \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) - 2(x_3^2 + y_3^2)\right)y_2, \\ \dot{x}_3 &= \omega_0 y_3 + \left(1 - (x_3^2 + y_3^2) - \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) - 2(x_1^2 + y_1^2)\right)x_3 + \varepsilon x_2 y_2, \\ \dot{y}_3 &= -\omega_0 x_3 + \left(1 - (x_3^2 + y_3^2) - \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) - 2(x_1^2 + y_1^2)\right)y_3.\end{aligned}\quad (16.3)$$

Здесь ε представляет собой коэффициент дополнительной связи. В процессе динамики добавленные члены создают начальное возмущение для возбуждения каждого очередного осциллятора в начале его периода активности. Это происходит при прохождении орбиты около седловых неподвижных точек гетероклинического цикла. Осцилляторы становятся активными в следующем порядке: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$. Каждая новая передача возбуждения сопровождается удвоением фазы. В самом деле, пусть $x_k \sim \sin(\omega_0 t + \phi)$, $y_k \sim \cos(\omega_0 t + \phi)$, тогда член связи в уравнении для следующего по очереди осциллятора содержит удвоенную фазу: $x_k y_k \sim \sin(\omega_0 t + \phi) \cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t + 2\phi)$. Этот осциллятор претерпевает возбуждение в присутствии указанной возбуждающей силы, и поэтому наследует удвоенную фазу соседа. Далее процесс передачи возбуждения с удвоением фазы по кольцу продолжается, вовлекая по очереди все парциальные осцилляторы. Механизм передачи возбуждения нерезонансный, поскольку частота возбуждающей силы вдвое больше, чем собственная частота осциллятора. Тем не менее механизм успешно работает, по крайней мере пока параметр частоты ω_0 выбран относительно небольшим.

Чтобы проиллюстрировать функционирование модели в численных расчетах, фиксируем $\omega_0 = 1$ и $\varepsilon = 0.03$. При этих значениях параметров для всех тестируемых различных начальных условий в системе всегда наблюдался один и тот же аттрактор.

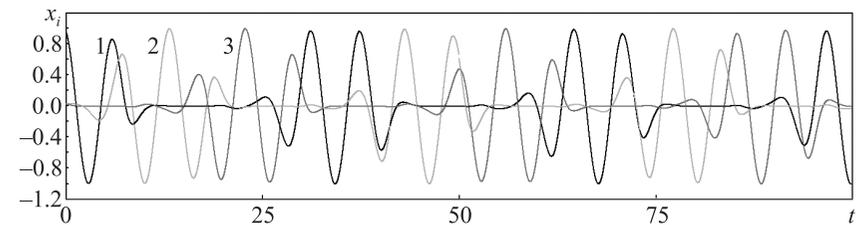


Рис. 16.2. Временные зависимости для x_1 (черная кривая), x_2 (светло-серый тон) и x_3 (темно-серый тон), полученные при численном решении уравнений (16.3) при $\omega_0 = 1$ и $\varepsilon = 0.03$

На рис. 16.2 показаны типичные временные зависимости для переменных x_1, x_2 и x_3 , полученные при решении уравнений (16.3) на компьютере. Можно видеть, что по ходу процесса три осциллятора возбуждаются

по очереди в соответствии с приведенным выше качественным описанием. Процесс не является периодическим, хотя средний характерный период амплитудной динамики хорошо определен (в отличие от модели без добавленных членов связи, см. рис. 16.1).

Чтобы убедиться в наличии удвоенной фазы, что принципиально с точки зрения реализации аттрактора типа Смейла–Вильямса, построим отображение Пуанкаре. Это уместно сделать специальным образом, принимая во внимание симметрию системы. А именно, в шестимерном фазовом пространстве $\{x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3\}$ определим три секущих гиперповерхности, заданных уравнениями

$$\begin{aligned} S_1 &= x_1^2 + y_1^2 - x_3^2 + y_3^2 = 0, \\ S_2 &= x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 + y_1^2 = 0, \\ S_3 &= x_3^2 + y_3^2 - x_2^2 + y_2^2 = 0, \end{aligned} \quad (16.4)$$

и рассмотрим последовательные их пересечения траекториями в направлении увеличения S_j . Прохождение траекторией поверхности $S_j = 0$ соответствует условию, что нарастающая амплитуда одного из осцилляторов (x_j, y_j) становится больше, чем амплитуда его партнера, возбужденного перед этим. Пересечения следуют одно за другим в циклическом порядке $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow \dots$. Заданная точка на поверхности $S_j = 0, j = 1, 2, 3$, отвечает пятимерному вектору \mathbf{v}_n . При каждом пересечении поверхности семейства (16.4) траекторией, стартовавшей из состояния \mathbf{v}_n , получаем следующий вектор; тем самым определяется отображение $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{v}_n)$. Пространства образов и прообразов можно отождествить в силу циклической симметрии системы. Обычное отображение Пуанкаре соответствует, очевидно, трехкратной итерации отображения \mathbf{T} .

При каждом пересечении траекторией поверхности $S_j = 0$ в момент времени t_n определим фазу j -го осциллятора с помощью соотношения $\phi_n = \arg[x_j(t_n) + iy_j(t_n)]$ и построим график зависимости ϕ_{n+1} от ϕ_n . Полученная диаграмма показана на рис. 16.3. Присутствие удвоения фазы очевидно из рисунка: диаграмма топологически не отличается от растягивающего отображения окружности $\phi_{n+1} = 2\phi_n \pmod{2\pi}$.

На рис. 16.4 показаны проекции аттрактора в сечении Пуанкаре на три плоскости переменных (x_j, y_j) , соответствующих трем парциальным осцилляторам. Вследствие сильного поперечного сжатия элементов объема в фазовом пространстве фрактальная структура аттрактора не различима на диаграммах (а) и (в), которые относятся к осцилляторам, имеющим равную

амплитуду в момент прохождения сечения Пуанкаре, но ее вполне можно разглядеть на диаграмме (б) соответствующей осциллятору с наименьшей в данный момент амплитудой.

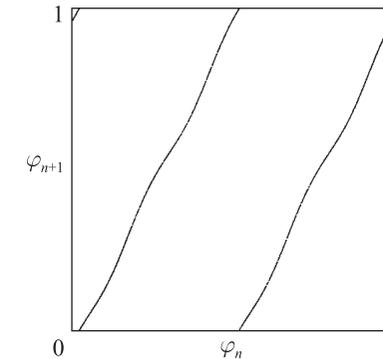


Рис. 16.3. Итерационная диаграмма для фаз, полученная при численном моделировании системы (16.3) для $\omega_0 = 1$ и $\varepsilon = 0.03$; фазы определяются при каждом пересечении семейства поверхностей S_j (см. текст)

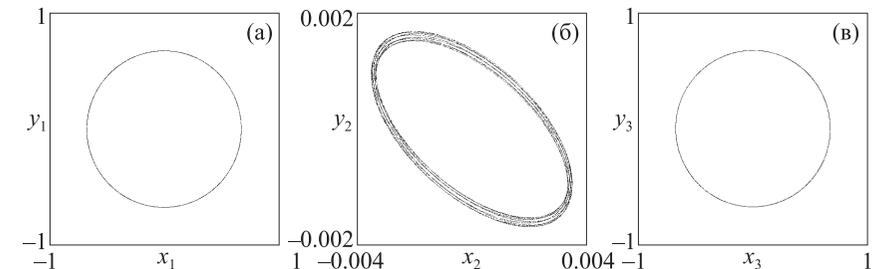


Рис. 16.4. Портреты аттракторов модели (16.3) в сечении фазового пространства поверхностью $S_1 = 0$ (см. (16.4)), представленные в проекциях на плоскости переменных (x_1, y_1) (а), (x_2, y_2) (б) и (x_3, y_3) (в) при $\omega_0 = 1$ и $\varepsilon = 0.03$

Вычисление спектра показателей Ляпунова аттрактора в соответствии с алгоритмом Бенеттина требует одновременного численного решения уравнений (16.3) вместе с шестью комплектами линеаризованных уравнений в вариациях для векторов возмущения. Это сопровождается ортогонализацией по Граму–Шмидту и нормировкой этих векторов на последовательных шагах алгоритма. Показатели Ляпунова получают оценку скорости изменения величин, представляющих собой накапливающиеся

суммы логарифма отношения норм для шести векторов (раздел 1.4). В рассматриваемом динамическом режиме получаем

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.06305, \lambda_2 = 0.00000, \lambda_3 = -0.2101, \\ \lambda_4 &= -0.2259, \lambda_5 = -0.3395, \lambda_6 = -1.99993. \end{aligned} \quad (16.5)$$

Один показатель Ляпунова положительный, следующий близок к нулю (он соответствует, очевидно, возмущению, направленному вдоль опорной траектории), а оставшиеся четыре показателя отрицательны.

Для отображения \mathbf{T} показатели Ляпунова можно найти через ненулевые показатели потоковой системы с помощью соотношения $\Lambda_m = T_{av} \lambda_m$, где T_{av} представляет собой средний временной интервал между последовательными пересечениями поверхностей (16.4). Как следует из результатов численного моделирования, в рассматриваемом динамическом режиме $T_{av} \approx 10.96$. Отсюда получаем $\Lambda_1 \approx 0.691$, что хорошо согласуется с величиной $\ln 2 \approx 0.693$, ожидаемой на основе приближенного рассмотрения, сводящегося к растягивающему отображению окружности.

Вычисление размерности аттрактора по формуле Каплана–Йорке (приложение D) дает для потоковой системы $D_{KY} = 2 + \lambda_1 / |\lambda_3| \approx 2.30$.

16.3. Аттрактор с динамикой, описываемой отображением «кот Арнольда»

Обратимся снова к системе (16.2) при равных собственных частотах осцилляторов $\omega_{1,2,3} = \omega_0$, но вводимые дополнительные члены связи зададим теперь в иной форме, а именно, так, чтобы для каждого осциллятора воздействие обеспечивалось членом в виде произведения переменных, относящихся к двум другим осцилляторам. Итак, рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \omega_0 y_1 + \left(1 - (x_1^2 + y_1^2) - \frac{1}{2}(x_3^2 + y_3^2) - 2(x_2^2 + y_2^2)\right) x_1 + \varepsilon(x_2 y_3 + x_3 y_2), \\ \dot{y}_1 &= -\omega_0 x_1 + \left(1 - (x_1^2 + y_1^2) - \frac{1}{2}(x_3^2 + y_3^2) - 2(x_2^2 + y_2^2)\right) y_1, \\ \dot{x}_2 &= \omega_0 y_2 + \left(1 - (x_2^2 + y_2^2) - \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) - 2(x_3^2 + y_3^2)\right) x_2 + \varepsilon(x_1 y_3 + x_3 y_1), \\ \dot{y}_2 &= -\omega_0 x_2 + \left(1 - (x_2^2 + y_2^2) - \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) - 2(x_3^2 + y_3^2)\right) y_2, \\ \dot{x}_3 &= \omega_0 y_3 + \left(1 - (x_3^2 + y_3^2) - \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) - 2(x_1^2 + y_1^2)\right) x_3 + \varepsilon(x_2 y_1 + x_1 y_2), \\ \dot{y}_3 &= -\omega_0 x_3 + \left(1 - (x_3^2 + y_3^2) - \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) - 2(x_1^2 + y_1^2)\right) y_3. \end{aligned} \quad (16.6)$$

Добавленные члены заданы в симметричной форме, чтобы исключить присутствие неосциллирующих компонент, которые могли бы нарушить требуемую передачу фазы. Для иллюстрации динамики фиксируем параметры $\omega_0 = 1$ и $\varepsilon = 0.03$. Вычисления показывают, что в этом случае наблюдается единственный аттрактор, независимо от выбора начальных условий.

Осцилляторы становятся активными в циклическом порядке $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. При каждой новой передаче возбуждения новая фаза получается как сумма двух предыдущих фаз. В самом деле, представим себе, что два осциллятора, передающие возбуждение третьему, совершают колебания $x_j \sim \sin(\omega_0 t + \phi)$, $y_j \sim \cos(\omega_0 t + \phi)$ и $x_k \sim \sin(\omega_0 t + \phi)$, $y_k \sim \cos(\omega_0 t + \phi)$. Тогда соответствующий член, отвечающий за воздействие на третий осциллятор, содержит сумму фаз:

$$\begin{aligned} x_j y_k + x_k y_j &\sim \\ &\sim \sin(\omega_0 t + \phi) \cos(\omega_0 t + \phi) + \sin(\omega_0 t + \phi) \cos(\omega_0 t + \phi) = \sin(2\omega_0 t + \phi + \phi). \end{aligned}$$

Поскольку возбуждение осуществляется в присутствии такой стимулирующей силы, становящийся активным осциллятор унаследует в качестве фазы величину, представленную суммой двух предыдущих фаз, так что последовательные преобразования будут описываться выражением $\phi_{n+1} = \phi_n + \phi_{n-1} \pmod{2\pi}$, т. е. отображением Фибоначчи. За два шага итераций оно соответствует отображению «кот Арнольда». Действительно, полагая $q_n = 2\pi\phi_n$, $p_n = 2\pi\phi_{n-1}$, имеем $p_{n+1} = q_n$, $q_{n+1} = p_n + q_n \pmod{1}$ и за два шага получаем

$$p_{n+2} = p_n + q_n, \quad q_{n+2} = p_n + 2q_n \pmod{1}. \quad (16.7)$$

Рис. 16.5 иллюстрирует эволюцию переменных x_1 , x_2 и x_3 как функций времени, полученных при численном решении уравнений (16.6) после завершения переходных процессов. Заметим, что в целом поведение хаотическое, но последовательное возбуждение парциальных осцилляторов происходит в определенном правильном порядке с некоторым характерным временным периодом.

Отображение Пуанкаре можно строить таким же образом, как в предыдущем разделе. А именно, в шестимерном фазовом пространстве $\{x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3\}$ определим три поверхности, заданные уравнениями (16.6), и рассмотрим последовательные пересечения траектории с этими поверхностями. Это приводит к пятимерному отображению $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{v}_n)$. При этом вектор-образ \mathbf{v}_n отвечает точке на поверхности S_j , а вектор-образ \mathbf{v}_{n+1} —

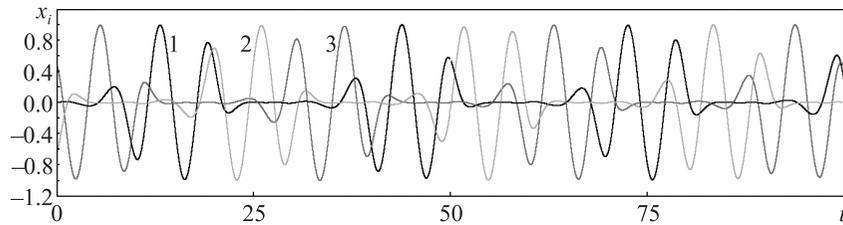


Рис. 16.5. Зависимости от времени переменной x_1 (черная кривая), x_2 (светлый серый тон) и x_3 (темный серый тон), полученные при численном решении на компьютере уравнений (16.6) при $\omega_0 = 1$ и $\varepsilon = 0.03$

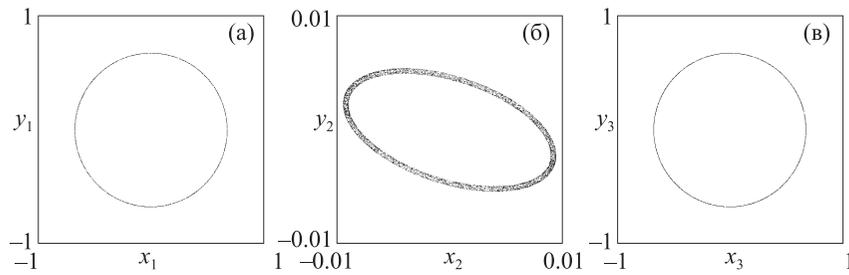


Рис. 16.6. Портреты аттракторов модели (16.6) в сечении фазового пространства поверхностью $S_j = 0$ (см. (16.4)), представленные в проекции на плоскости переменных (x_j, y_j) (а), (x_{j+1}, y_{j+1}) (б) и (x_{j+2}, y_{j+2}) (в) при $\omega_0 = 1$ и $\varepsilon = 0.03$

точке на следующей пересекаемой поверхности $S_k = 0$, и пересечения следуют в порядке $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow \dots$. Как и в предыдущем разделе, пространства образов и прообразов можно отождествить в силу симметрии системы. На рис. 16.6 показаны проекции аттрактора в сечении Пуанкаре на три плоскости переменных (x_j, y_j) , соответствующих трем парциальным осцилляторам.

Для последовательности пересечений поверхностей $S_j = 0$ мы можем определить фазы колебаний из выражения $\phi_n = \arg[x_j(t_n) + iy_j(t_n)]$.

Рис. 16.7 показывает, что они действительно подчиняются с хорошей точностью отображению Фибоначчи $\phi_{n+1} = \phi_n + \phi_{n-1} + \text{const}$. Как отмечалось, двукратная итерация отображения Фибоначчи соответствует отображению «кот Арнольда». На рис. 16.8 действие отображения, получаемого при численном решении уравнений (16.6), иллюстрируется традиционной картинкой, изображающей преобразование области в виде «головы кота». Ее можно сравнить с рис. 2.4 и рис. 14.2.

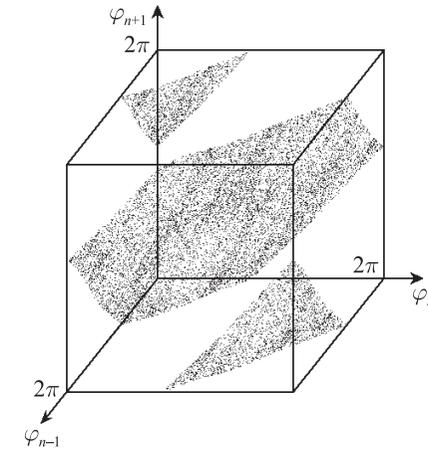


Рис. 16.7. Трехмерный график зависимости ϕ_{n+1} от ϕ_n и ϕ_{n-1} в модели (16.6) при $\omega_0 = 1$ и $\varepsilon = 0.03$

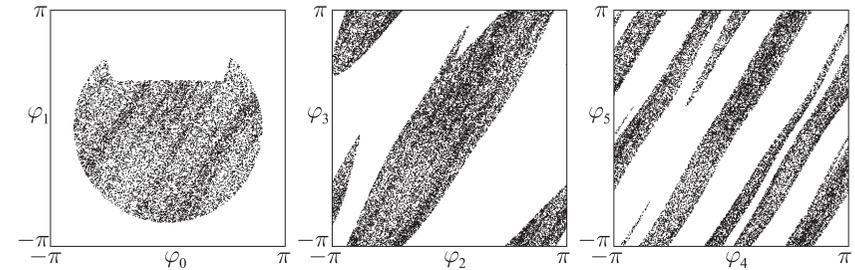


Рис. 16.8. Диаграмма на плоскости фаз парциальных осцилляторов для модели (16.6) при $\omega_0 = 1$ и $\varepsilon = 0.03$, изображающая последовательные шаги эволюции облака изображающих точек, имевшего в начальный момент вид «головы кота»

Вычисление показателей Ляпунова дает

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 0.04786, \quad \lambda_2 = 0.00000, \quad \lambda_3 = -0.04840, \\ \lambda_4 = -0.3184, \quad \lambda_5 = -0.3673, \quad \lambda_6 = -2.00002. \end{aligned} \quad (16.8)$$

Здесь присутствуют один положительный показатель, один нулевой, связанный с возмущением типа сдвига вдоль опорной траектории, и остальные отрицательные. Учитывая, что среднее время между пересечениями поверхностей $S_j = 0$ при заданных параметрах составляет приблизительно

$T_{av} \approx 9.94$, можно вычислить показатели Ляпунова для отображения $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{v}_n)$ как $\Lambda_m = T_{av} \lambda_m$. Отсюда получаем $\Lambda_1 \approx 0.476$ и $\Lambda_3 \approx -0.481$. Эти числа следует сравнить с логарифмом квадратного корня собственных чисел отображения (16.7): $\ln \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 0.481$ и $\ln \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx -0.481$. Заметим, что для отображения «кот Арнольда» сумма показателей Ляпунова равна нулю. Для отображения Пуанкаре системы (16.6) аттрактор концентрируется вблизи поверхности двумерного тора, динамика на котором приближенно описывается отображением «кот Арнольда». Это утверждение согласуется с наблюдением, что сумма двух наибольших ненулевых показателей Ляпунова очень мала: $\lambda_1 + \lambda_3 \approx -0.0005$. Фактически из-за погрешностей вычислений ее трудно отличить от нуля. Таким образом, мы заключаем, что ляпуновская размерность аттрактора близка к 3, а размерность аттрактора отображения Пуанкаре близка к 2. Этим объясняется отсутствие видимой фрактальной структуры на рис. 16.6.

16.4. Модель с гиперхаосом

Гиперхаос — это динамический режим, характеризуемый присутствием двух или более положительных показателей Ляпунова [Rössler, 1979; Matsumoto et al., 1986; Stoop et al., 1989; Reiterer et al., 1998; Letellier and Rössler, 2007]. Сконструируем систему с гиперхаотическим аттрактором, базируясь на трех взаимодействующих осцилляторах, динамика которых осуществляется вблизи гетероклинического цикла. В отличие от двух предыдущих моделей, эта система не будет симметричной. В уравнениях (16.2) положим $\omega_1 = 3\omega_0$, $\omega_{2,3} = \omega_0$ и введем дополнительную связь между подсистемами, характеризующуюся константами $\varepsilon_{1,2,3}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3\omega_0 y_1 + \left(1 - (x_1^2 + y_1^2) - \frac{1}{2}(x_3^2 + y_3^2) - 2(x_2^2 + y_2^2)\right) x_1 + \varepsilon_1 x_2^2 y_2, \\ \dot{y}_1 &= -3\omega_0 x_1 + \left(1 - (x_1^2 + y_1^2) - \frac{1}{2}(x_3^2 + y_3^2) - 2(x_2^2 + y_2^2)\right) y_1, \\ \dot{x}_2 &= \omega_0 y_2 + \left(1 - (x_2^2 + y_2^2) - \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) - 2(x_3^2 + y_3^2)\right) x_2 + \varepsilon_2 x_3, \\ \dot{y}_2 &= -\omega_0 x_2 + \left(1 - (x_2^2 + y_2^2) - \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) - 2(x_3^2 + y_3^2)\right) y_2, \\ \dot{x}_3 &= \omega_0 y_3 + \left(1 - (x_3^2 + y_3^2) - \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) - 2(x_1^2 + y_1^2)\right) x_3 + \varepsilon_3 (x_1 y_2 + x_2 y_1), \\ \dot{y}_3 &= -\omega_0 x_3 + \left(1 - (x_3^2 + y_3^2) - \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) - 2(x_1^2 + y_1^2)\right) y_3. \end{aligned} \quad (16.9)$$

При проведении вычислений примем, что $\omega_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.004$, $\varepsilon_3 = 0.1$; при этом, как наблюдается при численном моделировании, система для разных начальных условий приходит к одному и тому же аттрактору. На рис. 16.9 показаны зависимости переменных x_1 , x_2 и x_3 от времени, полученные при численном решении на компьютере уравнений (16.9) после завершения переходных процессов. Последовательное возбуждение парциальных осцилляторов осуществляется, как и в предыдущих моделях, в циклическом порядке:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots$$

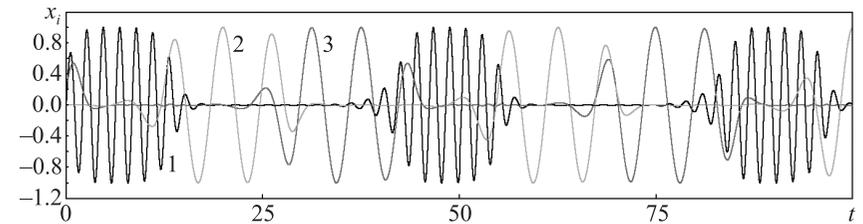


Рис. 16.9. Временные зависимости для x_1 (черная кривая), x_2 (светло-серый тон) и x_3 (темно-серый тон), полученные при численном решении на компьютере уравнений (16.9) при $\omega_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0.004$, $\varepsilon_2 = 0.1$

Рассмотрим фазы, которыми обладают осцилляторы при пересечении фазовой траекторией системы поверхностей, определяемых условиями (16.4), и запишем их в виде последовательности

$$\phi_1 \rightarrow \phi_2 \rightarrow \phi_3 \rightarrow \phi'_1 \rightarrow \phi'_2 \rightarrow \phi'_3 \rightarrow \dots$$

Возбуждение осциллятора 1 стимулируется вынуждающей силой, пропорциональной $x_2^2 y_2$. Доминирующий вклад определяется третьей гармоникой основной частоты ω_0 , поскольку она находится в резонансе с осциллятором 1. Следовательно, при своей активизации осциллятор 1 получает фазу

$$\phi'_1 = 3\phi_2 + \text{const}. \quad (16.10)$$

Стимуляция возбуждения осциллятора 2 осуществляется резонансным образом благодаря воздействию, пропорциональному x_3 , так что он получает фазу от осциллятора 3:

$$\phi'_2 = \phi_3 + \text{const}. \quad (16.11)$$

Наконец, для осциллятора 3 стимуляция в начале стадии активности осуществляется нерезонансным образом, под действием сигнала $x_1 y_2 + x_2 y_1$ (именно по этой причине параметр связи ε_3 взят относительно большим). В результате он получает фазу

$$\phi_3' = \phi_1 + \phi_2 + \text{const.} \quad (16.12)$$

Рис. 16.10 свидетельствует, что указанные фазовые соотношения качественно верно соответствуют имеющим место согласно численным расчетам в динамике, описываемой уравнениями (16.9).

Константы, фигурирующие в соотношениях (16.9)–(16.11), можно устранить сдвигом начала отсчета переменных $\phi_{1,2,3}$ и записать соотношение между парами переменных (ϕ_3, ϕ_2) и (ϕ_3', ϕ_2') в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \phi_3' \\ \phi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_3 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (16.13)$$

Фигурирующая здесь матрица имеет два собственных числа, превышающие 1, а именно,

$$s_1 = (\sqrt{13} + 1) / 2 = 2.30277\dots, \quad s_2 = (\sqrt{13} - 1) / 2 = 1.30277\dots \quad (16.14)$$

Поэтому отображение Пуанкаре, соответствующее полному обходу гетероклинического контура, должно иметь два положительных показателя Ляпунова, ассоциирующихся с динамикой фазовых переменных.

Показатели Ляпунова для модели (16.9), полученные при численных расчетах, следующие:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.01878, \quad \lambda_2 = 0.00621, \quad \lambda_3 = 0.00000, \\ \lambda_4 &= -0.3680, \quad \lambda_5 = -0.4313, \quad \lambda_6 = -2.00003. \end{aligned} \quad (16.15)$$

Наличие двух положительных показателей Ляпунова говорит о присутствии гиперхаоса. Третий показатель близок к нулю и должен интерпретироваться как связанный с возмущением инфинитезимального сдвига вдоль опорной траектории. Остальные показатели отрицательные и отвечают за приближение траекторий к аттрактору.

В рассматриваемом случае все последовательные преобразования $\phi_1 \rightarrow \phi_2 \rightarrow \phi_3 \rightarrow \phi_1$ разные, так что имеет смысл рассматривать в качестве отображения Пуанкаре преобразование, реализующееся при полном обходе и возврате, скажем, в сечение $S_1 = 0$. Согласно оценкам по данным вычислений при заданных параметрах, среднее время между последователь-

ными возвратами составляет $T_{\text{av}} \approx 41.475$. Старшие показатели Ляпунова для отображения Пуанкаре оцениваются как $\Lambda_1 = T_{\text{av}} \lambda_1 \approx 0.779$ и $\Lambda_2 = T_{\text{av}} \lambda_2 \approx 0.258$. Их можно сравнить с оценками, полученными из качественных рассуждений, которые составляют $\ln s_1 = 0.834$ и $\ln s_2 = 0.265$. Очевидно, имеет место достаточно неплохое соответствие.

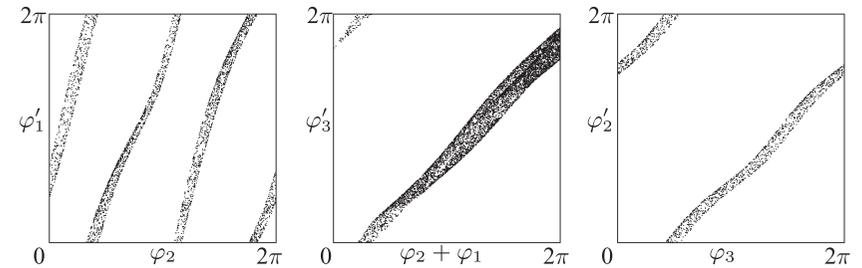


Рис. 16.10. Графики преобразования фаз, полученные при численных расчетах для модели (16.9) при задании параметров $\omega_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0.004$, $\varepsilon_2 = 0.1$

Оценка размерности аттрактора по формуле Каплана–Йорке дает 3.068.

Можно полагать, что аттрактор в сечении Пуанкаре рассмотренной модели гиперболический, но проверка этого предположения потребовала бы переформулировать алгоритм проверки критерия конусов, рассмотренный в главе 13, поскольку неустойчивые многообразия для этого аттрактора двумерные.

16.5. Автономная система с аттрактором типа Смейла–Вильямса при резонансной передаче возбуждения в кольцевом массиве осцилляторов ван дер Поля

Примеры, рассмотренные в разделах 16.2–16.4, сконструированы из уравнений взаимодействующих осцилляторов, записанных для комплексных амплитуд. Если мы намерены реализовать соответствующую динамику практически, это можно было бы сделать на базе высокочастотных колебаний в ситуации применимости их описания в рамках метода медленно меняющихся амплитуд. С другой стороны, нерезонансный механизм передачи возбуждения между попеременно активными осцилляторами способен обеспечить удвоение фазы или другие хаотические отображения для фаз только при относительно низких собственных частотах осцилляторов. Эти два условия противоречивы, так что практическая реализация пробле-

матична. Один из возможных путей преодолеть это затруднение состоит в том, чтобы рассмотреть большое число осцилляторов, расположенных в виде кольца так, что собственная частота изменяется от соседа к соседу незначительно, не нарушая возможности резонансной передачи возбуждения, но на полном протяжении структуры уменьшается вдвое. Передача возбуждения на финальной стадии при замыкании цепочки осуществляется через квадратичный нелинейный элемент и сопровождается удвоением частоты и фазы колебаний. В настоящем разделе эта идея рассматривается применительно к кольцевой модели, составленной из осцилляторов ван дер Поля, которая введена в работе [Kruglov and Kuznetsov, 2011].

Как отмечалось в главе 7, одиночный осциллятор ван дер Поля описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} - (A - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где ω_0 есть собственная частота. При положительных величинах параметра A модель демонстрирует автоколебания, ассоциирующиеся с притягивающим предельным циклом. Рассмотрим следующую кольцевую систему, составленную из $N+1$ связанных осцилляторов ван дер Поля:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 - (A + \frac{3}{2}x_N^2 + x_0^2 - 2S)\dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 &= \varepsilon x_N, \\ \ddot{x}_1 - (A + \frac{3}{2}x_0^2 + x_1^2 - 2S)\dot{x}_1 + 2^{-2/N}\omega_0^2 x_1 &= \varepsilon x_0, \\ \ddot{x}_2 - (A + \frac{3}{2}x_1^2 + x_2^2 - 2S)\dot{x}_2 + 2^{-4/N}\omega_0^2 x_2 &= \varepsilon x_1, \\ &\dots \\ \ddot{x}_N - (A + \frac{3}{2}x_{N-1}^2 + x_N^2 - 2S)\dot{x}_N + 2^{-2}\omega_0^2 x_N &= \varepsilon x_{N-1}, \end{aligned} \quad (16.16)$$

$$S = \sum_{k=0}^N x_k^2.$$

Структура множителей при первых производных такова, что обеспечивается ситуация, когда каждый данный осциллятор вносит вклад в сильное подавление всех остальных, кроме одного, занумерованного индексом на единицу большим. Поэтому в системе имеет место циклическое распространение локализованного возбуждения по кольцу в направлении возрастания индекса в соответствии с механизмом, объясненным в разделе 16.1. В силу присутствия дополнительной связи, характеризуемой параметром ε , возбуждение каждого j -го осциллятора стимулируется колебаниями предыдущего партнера с номером $(j-1)$. Если число N достаточно большое, собственные частоты соседних осцилляторов близки и стимуляция является практически резонансной. Только на конце цепочки передача возбужде-

ния от N -го к нулевому осциллятору организована иначе: один имеет собственную частоту вдвое меньше другого и резонансная стимуляция производится второй гармоникой воздействия, пропорционального x_N^2 , как видно из первого уравнения (16.16).

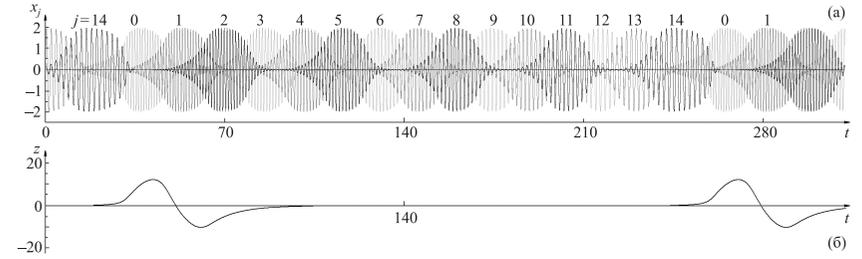


Рис. 16.11. Временные зависимости переменных $x_j, j = 0, \dots, N$, (а) и вспомогательной переменной z , используемой для построения отображения возврата (б), согласно результатам численного решения уравнений (16.16) на компьютере при $N = 14, A = 1, \omega_0 = 2\pi, \varepsilon = 0.2$

На рис. 16.11, на диаграмме (а), показаны временные зависимости для переменных, относящихся ко всем осцилляторам кольцевой структуры из $N = 14$ элементов, которые получены при численном решении уравнений (16.16) после завершения переходных процессов.

В соответствии с заложенной в основу идеей колебательное возбуждение должно претерпевать удвоение фазы при каждом обходе кольца. Это свойство имеет решающее значение для реализации аттрактора типа Смейла–Вильямса, и его желательно проиллюстрировать результатами численных расчетов.

Как оказывается, подходящее для указанной цели отображение Пуанкаре в данном случае не так просто правильно сконструировать: простые определения, аналогичные соотношению (16.4), не приводят к успеху. Дело в том, что индивидуальный осциллятор ван дер Поля не столь уж близок к совершенной симметрии амплитудных уравнений. Поэтому оказывается проблематичным локализовать момент прохода сечения по отношению к огибающей процесса с точностью существенно лучшей, чем период собственных колебаний, и получить хорошее определение фазы.

Чтобы преодолеть эту трудность, введем вспомогательную переменную z , удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\dot{z} + \gamma z = +x_0^2 + \omega_0^{-2} \dot{x}_0^2 - x_1^2 - 2^{2/N} \omega_0^{-2} \dot{x}_1^2. \quad (16.17)$$

Здесь правая часть представляет собой разность квадратов амплитуд осцилляторов 0 и 1 и γ есть положительная константа. Поведение переменной z иллюстрируется на диаграмме (б) рисунка 16.11, где взято $\gamma = 0.1$. Величина z нарастает в течение периода активности осциллятора 0, потом уменьшается и становится отрицательной в период активности осциллятора 1, а затем затухает практически до нуля до тех пор, пока подойдет время следующего периода активности осциллятора 0. Для записи состояний, для которых выполняется вычисление фаз $\phi = \arg(x_0 + i\dot{x}_0 / \omega_0)$, берем последовательность моментов времени, отвечающих переходу вспомогательной переменной от положительных к отрицательным значениям.

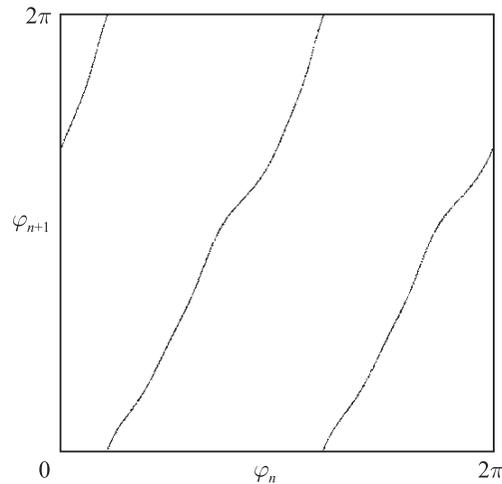


Рис. 16.12. Итерационная диаграмма для фаз, полученная при численном решении уравнений модели (16.16) при $N = 14$, $A = 1$, $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.2$. Фаза вычисляется в момент прохождения вспомогательной переменной z , определяемой уравнением (16.17), от положительных к отрицательным величинам

На рис. 16.12 показан график зависимости φ_{n+1} от φ_n . Как можно видеть, он выглядит соответствующим отображению Бернулли: один полный обход для прообраза отвечает двум обходам для образа. Учитывая сильное сжатие по остальным направлениям в фазовом пространстве (исключая нейтральное направление вдоль фазовой траектории), это дает основание для предположения о наличии гиперболического аттрактора, соответствующего надстройке соленоида Смейла–Вильямса.

На рис. 16.13 показаны портреты аттрактора в проекции на фазовую плоскость осциллятора $j = 0$. На панели (а) изображен аттрактор потоковой системы в проекции из фазового пространства размерности $2(N+1)$. На диаграмме (б) представлен аттрактор в сечении, определенном с использованием вспомогательной переменной. Это не что иное, как изображение соленоида; присущую ему тонкую поперечную канторову структуру можно различить, используя увеличение, что показано на вставке.

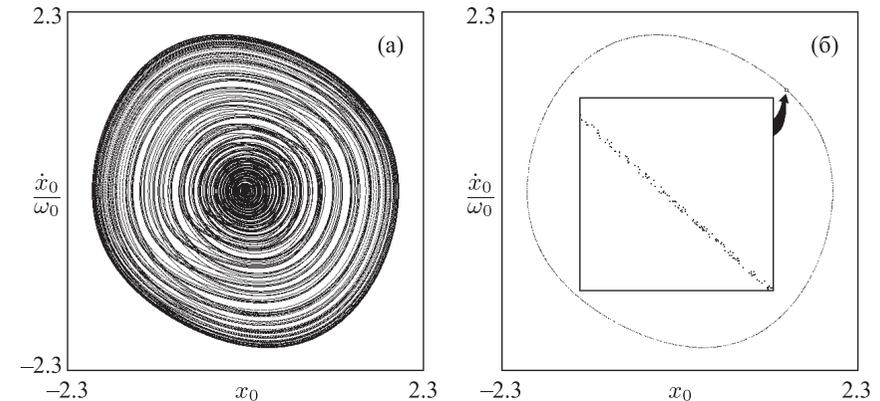


Рис. 16.13. Аттрактор модели (16.16) при $N = 14$, $A = 1$, $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.2$ в проекции на фазовую плоскость осциллятора $j = 0$ из многомерного фазового пространства потоковой системы (а) и в сечении, построенном с использованием вспомогательной переменной z , как поясняется в тексте (б)

На рис. 16.14 показаны портреты аттрактора потоковой системы в других проекциях, где оси координат отвечают динамическим переменным, относящимся к соседним осцилляторам. Первая диаграмма на плоскости (x_N, \dot{x}_0) имеет особый вид, тогда как остальные качественно подобны друг другу. Это связано с тем, что передача возбуждения от N -го к нулевому осциллятору организована через квадратичный член и вторую гармонику, а все остальные стимулируются непосредственно линейным воздействием со стороны предшественника.

С помощью алгоритма Бенеттина (раздел 1.4), примененного к системе уравнений (16.16) и соответствующим уравнениям в вариациях, были вычислены несколько наибольших показателей Ляпунова:

$$\lambda_1 = 0.003044, \lambda_2 = 0.000002, \lambda_3 = -0.3353, \lambda_4 = -0.6318 \dots \quad (16.18)$$

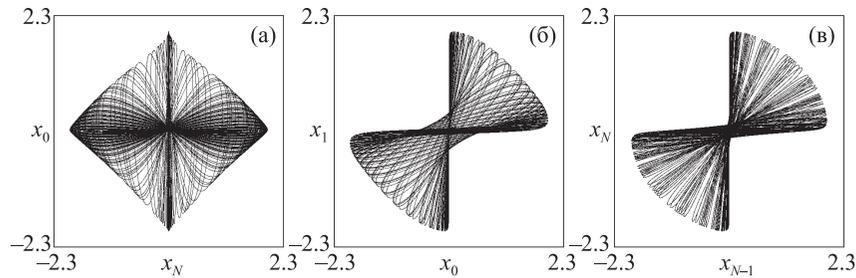


Рис. 16.14. Портреты аттрактора модели (16.16) при $N = 14$, $A = 1$, $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.2$ в проекциях из многомерного фазового пространства потоковой системы на плоскости обобщенных координат соседних осцилляторов кольцевой системы: N и 0 (а), 0 и 1 (б), $N-1$ и N (в). Для других пар соседей диаграммы выглядят подобно показанным на панелях (б) и (в)

Старший показатель положительный, что свидетельствует о хаотической природе динамического режима. Принимая во внимание, что переход от положительных к отрицательным значениям вспомогательной величины z имеет место в среднем с периодом $T_{av} = 227.85$, уместно рассмотреть нормированный на этот временной интервал показатель Ляпунова. Это дает $\Lambda_1 = \lambda_1 T_{av} \approx 0.6934$, что хорошо согласуется с оценкой на основании отображения Бернулли $\ln 2 \approx 0.6931$. Итак, мы интерпретируем старший показатель как ассоциирующийся с циклической координатой в фазовом пространстве размерности $2(N+1)$, по которой имеет место двукратное растяжение. Второй показатель близок к нулю с точностью до вычислительной погрешности и должен рассматриваться как связанный с возмущением типа сдвига вдоль опорной фазовой траектории в автономной системе. Третий показатель отрицательный, и его абсолютная величина достаточно велика для того, чтобы можно было оценить размерность по формуле Каплана–Йорке $D_{KY} \approx 2.009$ (для потоковой системы). Хотя полный спектр показателей Ляпунова содержит $2(N+1)$ величин, как представляется, нет необходимости вычислять их все, поскольку оставшиеся показатели отвечают столь сильному сжатию в фазовом пространстве, что даже не влияют на оценку размерности аттрактора.

Как можно полагать, основываясь на сходных кольцевых системах с другими способами введения связи, можно с тем же успехом реализовать динамику, описываемую отображением «кот Арнольда» и другими хаотическими отображениями на торе по аналогии с предыдущими разделами настоящей главы.

Глава 17

Системы с запаздывающей обратной связью

Помимо попеременно возбуждающихся осцилляторов, принцип манипуляции фазами по ходу передачи возбуждения можно применить к *системам с запаздывающей обратной связью*. В этом случае достаточно иметь единственный автоколебательный элемент, демонстрирующий попеременно стадии активности и подавления, в то время как передача возбуждения, сопровождающаяся желаемым преобразованием фазы, производится сигналом, прошедшим через цепь запаздывающей обратной связи, т. е. от одной стадии активности к другой. На практике такие системы могут оказаться даже проще по конструкции, чем попеременно возбуждающиеся осцилляторы. Однако с математической точки зрения они сложнее, поскольку присутствие запаздывания означает формально бесконечную размерность пространства состояний. Аккуратный математический анализ аттракторов таких систем, включая строгое обоснование гиперболичности, представляет собой особую проблему, выходящую далеко за рамки этой книги. В начале настоящей главы будут рассмотрены некоторые необходимые сведения относительно природы дифференциальных уравнений с запаздыванием. Следующие два раздела посвящены моделям систем с запаздыванием, генерирующим импульсы с высокочастотным заполнением, фаза которого преобразуется от импульса к импульсу в соответствии с растягивающим отображением окружности. Сначала обсуждаются неавтономные системы, функционирующие благодаря обеспечиваемой внешним воздействием модуляции параметров, при наличии или в отсутствие вспомогательного опорного сигнала. Затем рассматривается автономная система с запаздыванием. На физическом уровне рассуждений представляется убедительным предположение, что хаотические аттракторы в этих системах имеют такую же природу, как аттракторы в системах на основе попеременно возбуждающихся осцилляторов, ассоциирующиеся с растягивающим отображением определенной циклической переменной (фазы). В частности, можно полагать, что генерируемый хаос структурно устойчивый. Гипотетически аттракторы

в этих системах, рассматриваемые с позиций описания в дискретном времени, что соответствует отображению Пуанкаре, относятся к классу соленоидов Смейла–Вильямса, которые вложены в бесконечномерное пространство состояний систем с запаздыванием.

17.1. Некоторые сведения о дифференциальных уравнениях с отклоняющимся аргументом

Запаздывание во времени приходится рассматривать во многих ситуациях, встречающихся в природе и технике, например в теории автоматического управления, электронике, нелинейной оптике, физиологии и т. д. [Кузнецов, 1982; Vallee et al., 1984; Glass and Mackey, 1988; Hu and Wang, 2002; Chiasson and Loiseau, 2007]. Анализ систем с запаздыванием имеет, таким образом, как теоретическое, так и практическое значение. В отличие от систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, системы с запаздыванием характеризуются бесконечной размерностью пространства состояний.

Естественным математическим аппаратом для описания систем с запаздыванием служит теория дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом [Беллман и Кук, 1967; Мышкис, 1972; Эльсгольц и Норкин, 1971; Hu and Wang, 2002]. В самом общем виде это уравнения, связывающие подлежащую определению векторную функцию и производные этой функции для различных значений аргумента. Достаточная для наших целей форма записи уравнений такова:

$$\mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{f}[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}(t - \tau_0), \mathbf{x}^{(1)}(t - \tau_1), \dots, \mathbf{x}^{(m)}(t - \tau_m)], \quad (17.1)$$

где \mathbf{x} — вектор конечной размерности N , \mathbf{f} — векторная функция, $\mathbf{x}^{(k)}(t)$ обозначает производную $d^k \mathbf{x} / dt^k$, вычисленную в момент времени t . Величины $\tau_i, i = 0, \dots, m$, считаются положительными постоянными.

Уравнение (17.1) относят к *запаздывающему типу*, если порядок производной в левой части уравнения выше, чем максимальный порядок производных со сдвигом аргумента, т. е. $n > m \geq 0$. Если $n = m$, то говорят об уравнении *нейтрального типа*, а в случае $n < m$ — об уравнении *опережающего типа*. Лучшее всего изучены уравнения запаздывающего типа, несколько меньше известно об уравнениях нейтрального типа. Что касается уравнений опережающего типа, то для них построение состоятельной теории вызывает трудности: постановка начальной задачи оказывается

плохо обусловленной. Здесь мы будем иметь дело только с уравнениями запаздывающего типа.

Чтобы пояснить основную особенность систем с запаздыванием, рассмотрим простой частный случай задачи (17.1), когда $N = 1, n = 1, m = 0$:

$$\dot{x} = f[x(t), x(t - \tau)]. \quad (17.2)$$

Чтобы начать процесс интегрирования при $t = 0$ и продолжать его до момента времени $0 < t \leq \tau$, понадобится вычислять шаг за шагом правую часть уравнения в запаздывающие моменты времени, принадлежащие интервалу $[-\tau, 0]$. Следовательно, неизвестная функция $x(t)$ должна быть каким-то образом задана на интервале $[-\tau, 0]$. *Эту функцию следует рассматривать как своего рода начальное условие.* Те же соображения справедливы для любой другой точки на временной оси t , начиная с которой мы хотим продолжать решение. С точки зрения теории динамических систем мы должны принять, что *мгновенное состояние системы* (17.2) *в момент времени t задается функцией, определенной на временном интервале продолжительности равной, времени запаздывания:* $x(t')|_{t' \in [t-\tau, t]} = \xi(t')$.

Таким образом, фазовое пространство данной системы — это пространство функций, заданных на интервале протяженности τ . Это пространство бесконечномерное. В самом деле, эти функции можно мыслить как векторы, компонентами которых служат значения функции на множестве точек интервала длины τ .

Интегрирование уравнения вперед во времени выполняется без затруднений и в принципе сводится к решению шаг за шагом последовательности обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1, \xi), & 0 \leq t \leq \tau, \\ \dot{x}_2 &= f(x_2, x_1), & \tau \leq t \leq 2\tau, \\ \dot{x}_3 &= f(x_3, x_2), & 2\tau \leq t \leq 3\tau \end{aligned} \quad (17.3)$$

и так далее. (Если присутствует несколько запаздываний, то для определения длины интервала, задающего область определения начальных функций, нужно использовать наибольшее из этих времен.)

Численное решение уравнений запаздывающего типа организуется подобно тому, как это делается для обыкновенных дифференциальных уравнений. Особенность состоит только в том, что здесь нам приходится иметь дело с массивом величин, задающих искомую функцию *на конечном временном интервале* на сетке с шагом, равным шагу интегрирования. Дан-

ные из этого массива используются при вычислении правой части уравнения на каждом шаге. При этом можно применять методы, аналогичные методам Эйлера или Рунге–Кутты различного порядка. Кроме того, если есть необходимость, при вычислениях с данными из массива используется интерполяционная процедура, согласованная по точности с конечно-разностной схемой. Когда очередной шаг сделан, массив обновляется, и процедура продолжается.¹

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, реально трудной проблемой является отслеживание динамики *назад* во времени, что сводится к решению уравнения опережающего типа, т. е. задачи, которая, как было отмечено, является плохо обусловленной.

Возможно ли обобщение гиперболической теории, которое позволило бы говорить об однородно гиперболических аттракторах в системах, описываемых дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом? По-видимому, этот вопрос не рассматривался в математической литературе, но он определенно заслуживает внимания математиков. С другой стороны, учитывая близкую связь дифференциальных уравнений с запаздыванием и обыкновенных дифференциальных уравнений, выражающуюся в «методе шагов» (17.3), а также применимость подходов, развитых при построении систем с гиперболическими аттракторами в предыдущих главах и систем с запаздыванием ниже в настоящей главе, можно полагать, что ответ на поставленный вопрос положительный.

Чтобы получить представление о возможном поведении соседних орбит в системах с запаздыванием, что имеет отношение к определению показателей Ляпунова, рассмотрим частный вопрос об анализе устойчивости неподвижной точки в модели (17.2). Пусть имеем решение в виде неподвижной точки $x = x_0$, что подразумевает выполнение равенства $f(x_0, x_0) = 0$. Чтобы рассмотреть динамику вблизи этой точки, полагаем в уравнении (17.2) $x(t) = x_0 + \tilde{x}(t)$, где $\tilde{x}(t)$ — малая добавка, и получаем

$$\dot{\tilde{x}} = a\tilde{x}(t) + b\tilde{x}(t - \tau). \quad (17.4)$$

Здесь $a = f_1'(x_0, x_0)$ и $b = f_2'(x_0, x_0)$ — производные функции f по первому и второму аргументам, вычисленные при значениях этих аргументов, равных x_0 . Экспоненциальная подстановка $\tilde{x}(t) \sim e^{\lambda t}$ в (17.4) приводит

¹ На практике удобнее не обновлять весь массив, а заменять один самый старый элемент самым новым и переопределить надлежащим образом правило нумерации (принцип «кольцевой буфер»).

к трансцендентному характеристическому уравнению

$$\lambda = a + be^{-\lambda\tau}. \quad (17.5)$$

Это уравнение может иметь в случае системы запаздывающего типа только ограниченное количество корней в правой полуплоскости комплексной переменной λ , ассоциирующихся с неустойчивостью. В то же время присутствует бесконечно много комплексных корней в левой полуплоскости, у которых действительные части асимптотически стремятся к $-\infty$.² Это значит, что неподвижная точка типа седла в системе с запаздыванием будет иметь конечномерное неустойчивое подпространство и бесконечномерное устойчивое подпространство. Аналогичной будет структура других орбит седлового типа в системах с запаздыванием.

Методы вычисления показателей Ляпунова для систем с запаздыванием обсуждались в ряде работ [Farmer, 1982; Giacomelli and Politi, 1996; Le Berre et al., 1987; Lepri et al., 1994; Балякин и Рыскин, 2007; Pazó and López, 2010]. Показатели Ляпунова определяются, по существу, тем же способом, как для обыкновенных дифференциальных уравнений. Скажем, для системы (17.2) наибольший показатель получается из одновременного численного решения этого уравнения на опорной траектории и уравнения в вариациях

$$\dot{\tilde{x}} = f_1'[x(t), x(t - \tau)]\tilde{x}(t) + f_2'[x(t), x(t - \tau)]\tilde{x}(t - \tau). \quad (17.6)$$

Вектор возмущения в некоторый момент t при вычислениях на основе разностной схемы представляется набором величин $(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_M)$, где $\tilde{x}_k = \tilde{x}(t - kh)$, h есть шаг разностной схемы, а $M = \tau / h$ — это число шагов на временном интервале запаздывания. Используя определение нормы $\|x\| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_M^2}$, можно привести вектор возмущения к единичной норме и продолжить процедуру, накапливая сумму логарифмов норм. Показатель Ляпунова получается как коэффициент, характеризующий нарастание этой суммы в зависимости от времени вычисления.

Добавляя дополнительные комплекты уравнений для векторов возмущения и привлекая процедуру ортогонализации по Граму–Шмидту с ис-

² Для уравнений нейтрального типа имеется бесконечное множество корней, у которых в асимптотике действительные части становятся одинаковыми. Они могут располагаться в правой или в левой полуплоскости в зависимости от конкретного вида уравнений и от параметров. Для уравнений опережающего типа расположение корней инвертируется по сравнению с уравнениями запаздывающего типа, что подразумевает наличие бесконечного множества неустойчивых корней.

пользованием скалярного произведения $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_M y_M$, можно вычислить несколько показателей в прямой аналогии с методикой, описанной в главе 1. Полный спектр показателей для системы с запаздыванием, конечно, получить нельзя, поскольку их бесконечно много. Представляется разумным принять соглашение, что количество показателей, реально заслуживающих вычисления, дается числом, необходимым для получения корректной оценки размерности аттрактора по формуле Капана-Йорке (приложение D) [Farmer, 1982; Блохина и др., 2006].

Далее, уместно рассмотреть адаптированную применительно к системам с запаздыванием конструкцию, аналогичную отображению Пуанкаре для обыкновенных дифференциальных уравнений [Кузнецов, 1982; Giacomelli and Politi, 1996].

Проще всего это сделать для неавтономных систем

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau)], \quad (17.7)$$

где явная зависимость от времени в правой части предполагается периодической, с периодом T : $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \mathbf{f}(t + T, \mathbf{x}, \mathbf{y})$. Тогда стробоскопическое описание динамики достигается с использованием функционального отображения

$$\mathbf{X}_{n+1}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{X}_n(t)]. \quad (17.8)$$

Подразумевается, что функции $\mathbf{X}_n(t)$ определены на интервале длины τ и соотносятся с исходной переменной $\mathbf{x}(t)$ как $\mathbf{X}_n(t) = \mathbf{x}(t + nT)$. Конкретные примеры таких систем будут обсуждаться в разделе 17.2.

В автономных системах требуется ввести некоторое условие на функцию $\mathbf{x}(t)$, которое выполнялось бы в какой-то момент времени на каждом очередном характерном периоде динамики, и определить функциональное отображение, которое производит шаг за шагом последовательные состояния в эти моменты. Пример такого рода будет обсуждаться в разделе 17.4.

17.2. Осциллятор ван дер Поля с запаздывающей обратной связью, модуляцией параметра и вспомогательным сигналом

Рассмотрим модельную систему, описываемую уравнением следующего вида [Кузнецов и Пономаренко, 2008]:

$$\ddot{x} - [A \cos(2\pi t / T) - x^2] \dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x(t - \tau) \dot{x}(t - \tau) \cos \omega_0 t. \quad (17.9)$$

Здесь x представляет собой динамическую переменную осциллятора ван дер Поля, имеющего рабочую частоту ω_0 , в котором параметр, управ-

ляющий бифуркацией предельного цикла, медленно меняется во времени с периодом T и амплитудой A , так что осциллятор попеременно демонстрирует возбуждение и подавление. В правой части уравнения добавлен член, отвечающий за запаздывающую обратную связь. Это произведение обобщенной координаты и обобщенной скорости в запаздывающий момент времени, а также вспомогательного сигнала, имеющего частоту ω_0 . Константа τ определяет время запаздывания, а параметр ε — относительную интенсивность запаздывающей обратной связи. Предполагается, что $N = \omega_0 T / 2\pi$ есть целое число, так что внешнее воздействие на систему в целом периодическое. Блок-схема устройства показана на рис. 17.1.

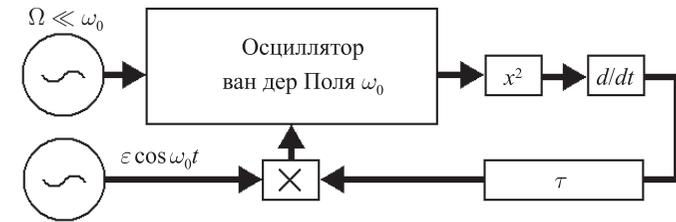


Рис. 17.1. Блок-схема неавтономной системы с запаздыванием

17.2.1. Аттрактор типа Смейла–Вильямса в системе с запаздыванием

Функционирование системы (17.9) как генератора хаоса можно объяснить следующим образом. Благодаря периодическому изменению параметра, отвечающего за возникновение генерации, осциллятор попеременно пребывает в стадиях активности и подавления. При подходящем выборе времени запаздывания (например, $\tau = \frac{3}{4}T$) обеспечивается такая ситуация, что возникающие на каждой очередной стадии активности самоподдерживающиеся колебания стимулируются сигналом, испущенным на предыдущей стадии активности. Предположим, что он характеризуется некоторой фазой ϕ , т. е. $x(t) \sim \sin(\omega_0 t + \phi)$ и $\dot{x}(t) \sim \cos(\omega_0 t + \phi)$. Тогда член в правой части уравнения будет содержать составляющую на основной частоте ω_0 с удвоенной величиной фазового сдвига. В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} x(t - \tau) \dot{x}(t - \tau) \cos \omega_0 t &\sim \sin 2(\omega_0(t - \tau) + \phi) \cos \omega_0 t = \\ &= \frac{1}{2} \sin(\omega_0 t - 2\omega_0 \tau + 2\phi) + (\dots), \end{aligned} \quad (17.10)$$

где многоточие обозначает нерезонансный член. На новой стадии активности фаза осциллятора будет определяться фазой резонансной составляющей стимулирующего сигнала. Поэтому для фазы на последовательных стадиях активности получается отображение Бернулли $\phi_{n+1} = 2\phi_n + \text{const} \pmod{2\pi}$. В пространстве состояний это соответствует двукратному растяжению по циклической координате ϕ . Если по другим направлениям имеет место сжатие фазового объема, то в отображении за один период внешнего воздействия динамика должна соответствовать аттрактору Смейла–Вильямса.

Для численного решения задачи используется конечно-разностный метод Рунге–Кутты, адаптированный для систем с запаздыванием. Запаздывающие величины для переменной x , требующиеся для выполнения шагов разностной схемы, извлекаются из запасенного массива данных, полученных на предыдущих шагах вычислений. В начале вычислений массив данных обычно заполняется случайными числами; далее выполняется достаточно большое число шагов, так чтобы система вышла на аттрактор, и только после этого производятся различные процедуры обработки реализаций, включая графическое представление данных.

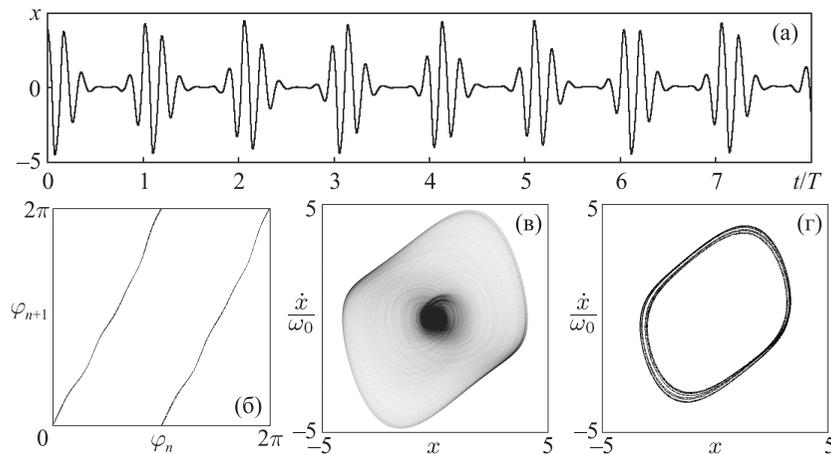


Рис. 17.2. (а) Временная зависимость динамической переменной x , полученная при численном решении уравнения (17.9) при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 6$, $\tau = \frac{3}{4}T$, $A = 5.5$, $\varepsilon = 0.2$ (б) Диаграмма, иллюстрирующая преобразование фаз на последовательных стадиях активности. Аттрактор системы в проекции из бесконечномерного пространства состояний на фазовую плоскость осциллятора (в) и портрет аттрактора в сечении Пуанкаре (г)

На рис. 17.2 на диаграмме (а) показан график зависимости динамической переменной от времени по результатам численного решения уравнений (17.9) для динамики на аттракторе. Хаос проявляет себя в поведении фазы колебаний относительно огибающей на последовательных стадиях активности. Панель (б) представляет диаграмму для фаз, определенных на последовательных стадиях активности, и демонстрирует хорошее соответствие с отображением Бернулли, как и ожидалось на основе качественного анализа механизма функционирования системы. На диаграммах (в) и (г) показаны портреты аттрактора. Первый отвечает проекции аттрактора из расширенного фазового пространства (включающего временную ось) неавтономной бесконечномерной потоковой системы. Второй — это аттрактор в стробоскопическом сечении Пуанкаре в проекции на плоскость двух переменных. На последней диаграмме различима поперечная фрактальная структура, которая является характерной особенностью аттрактора типа Смейла–Вильямса.

Для вычисления m наибольших показателей Ляпунова проводим совместное численное решение уравнения (17.9) и комплекта из m уравнений в вариациях

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}} - [A \cos(2\pi t / T) - x^2] \dot{\tilde{x}} + 2x\dot{\tilde{x}} + \omega_0^2 \tilde{x} = \\ = \varepsilon [\tilde{x}(t - \tau) \dot{\tilde{x}}(t - \tau) + x(t - \tau) \dot{\tilde{x}}(t - \tau)] \cos \omega_0 t. \end{aligned} \quad (17.11)$$

При этом вектор возмущения представляется мгновенными значениями переменных \tilde{x} , $\dot{\tilde{x}}$ и массивом данных, определяющих переменную \tilde{x} на интервале запаздывания.

Поскольку система неавтономная, удобно организовать вычисления, рассматривая стробоскопическую динамику через интервалы времени протяженности T . По завершении каждой стадии векторы возмущения подвергаются ортогонализации по Граму–Шмидту и нормировке. Показатели Ляпунова получаются из оценки коэффициентов роста или убывания накапливающихся сумм логарифмов от норм векторов возмущения.

При выбранных параметрах системы получаются следующие величины показателей Ляпунова для стробоскопического отображения:

$$\Lambda_1 = 0.688, \Lambda_2 = -0.837, \Lambda_3 = -4.287 \dots \quad (17.12)$$

Единственный положительный показатель аттрактора близок в величине $\ln 2 = 0.693 \dots$, что согласуется с приближенным описанием на основе отображения Бернулли для фазовой переменной. Оценка размерности по формуле Каплана–Йорке дает $D_{KY} = 1 + \Lambda_1 / |\Lambda_2| \approx 1.82$. Размерность ат-

трактора в расширенном фазовом пространстве системы с непрерывным временем на единицу больше $D \approx 2.82$.

Обнаруживается, что в системе в довольно широкой области параметров имеют место жесткое возбуждение и гистерезис. Для их рассмотрения удобно добавить в уравнение (17.9) дополнительный параметр h , управляющий относительной длительностью стадий возбуждения и подавления осциллятора:

$$\ddot{x} - (h + A \cos(2\pi t / T) - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x(t - \tau)\dot{x}(t - \tau) \cos \omega_0 t. \quad (17.13)$$

Описанный выше режим работы соответствует стимуляции возбуждения каждого нового цикла колебаний сигналом, поступившим по каналу запаздывающей обратной связи. Его величина пропорциональна квадрату амплитуды колебаний на предыдущей стадии активности. Если задать начальные условия с малой характерной амплитудой, то возбуждение не происходит из-за малости квадрата амплитуды, и колебания не развиваются. Режим генерации можно восстановить за счет увеличения параметра h , то есть увеличения доли периода модуляции, в течение которой имеет место линейная неустойчивость. С ростом h в какой-то момент наблюдается резкий переход к хаотическому режиму большой амплитуды. Теперь, если начать уменьшать параметр h , это не приведет сразу же к прекращению хаотических колебаний, поскольку возбуждение в системе, имея относительно высокий уровень, передается от предыдущих стадий активности к следующим. Только при достаточно больших отрицательных значениях h колебания срываются. Явление гистерезиса, которое мы описали, иллюстрируется на рис. 17.3. На вставках представлены итерационные диаграммы для фаз, отвечающие определенным местам на петле гистерезиса. (В ходе вычислений на каждом шаге численного интегрирования уравнений добавлялись малые случайные возмущения на уровне $\Delta x \sim 0.001$ для того, чтобы обеспечить уход системы от тривиального стационарного состояния в нуле.)

Механизм функционирования модели и численные результаты, подтверждающие его реализацию, позволяют предположить, что наблюдаемый низкоразмерный хаотический аттрактор является однородно гиперболическим, а именно, представляет собой надстройку аттрактора Смейла–Вильямса, будучи вложенным в бесконечномерное пространство состояний системы с запаздыванием. Безотносительно к этому гипотетическому заключению рассматриваемая схема хаотического генератора интересна сама по себе, поскольку представляется перспективной для генерации хаотических режимов нечувствительных к изменению параметров, техническим флуктуациям и деталям конструкции, например, в системах радиотехники и электроники, нелинейной оптики и т. д.

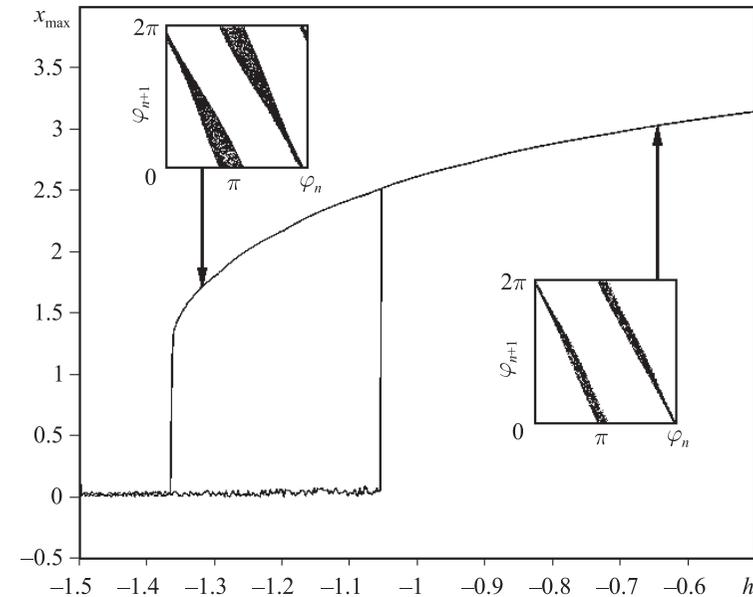


Рис. 17.3. Диаграмма, иллюстрирующая жесткое возбуждение и гистерезис в системе (17.13): зависимость амплитуды в максимуме за период модуляции от параметра h при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 24$, $\tau = 12$, $A = 3$, $\varepsilon = 0.3$. Параметр h сначала увеличивается, что соответствует движению слева направо вдоль нижней ветви, а затем уменьшается, что соответствует движению справа налево вдоль верхней ветви петли гистерезиса

17.2.2. Генерхаос

Интересный вопрос заключается в следующем. Учитывая бесконечномерную природу системы с запаздыванием, можно ли получать гиперхаос, режим, характеризующийся наличием двух (или более) положительных показателей Ляпунова? В гиперболической теории это соответствует аттракторам с размерностью неустойчивых многообразий два (или более). Замечательно, что это оказывается возможным сделать непосредственно в описанной выше модели без каких-либо ее структурных изменений, просто путем надлежащего выбора параметров. А именно, нужно увеличить отношение времени запаздывания к периоду модуляции так, чтобы сигнал, прибывающий по цепи обратной связи, стимулировал возбуждение не на

ближайшей очередной стадии активности, а через одну, две или больше стадий, как показано на рис. 17.4. Режим, обсуждавшийся в предыдущем разделе, соответствует времени задержки, показанному стрелкой с пометкой τ_1 , в то время как большие времена задержки, приводящие к режимам гиперхаоса, обозначены стрелками с пометками τ_2, τ_3, τ_4 .

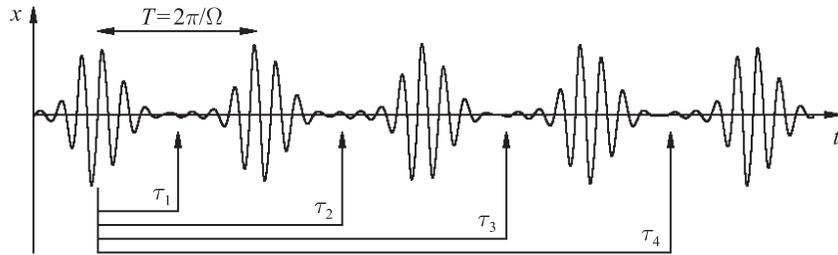


Рис. 17.4. Диаграмма, иллюстрирующая выбор времен задержки для реализации режимов с разным количеством положительных показателей Ляпунова

Конкретизируем здесь и далее выбор времени запаздывания так, чтобы выполнялось соотношение

$$\tau = (k - \frac{1}{2})T, \quad (17.14)$$

где k — положительное целое число. Тогда, используя аргументацию, подобную изложенной в предыдущем параграфе, приходим к отображению для фаз последовательных цугов колебаний:

$$\phi_n = 2\phi_{n-k} + \text{const}. \quad (17.15)$$

Оно сводится к отображению Бернулли при $k = 1$. В случае $k \geq 2$ это соотношение следует трактовать как отображение на k -мерном торе: вектор $\mathbf{v}_{n-1} = (\phi_{n-1}, \dots, \phi_{n-k})$ отображается в вектор $\mathbf{v}_n = (\phi_n, \dots, \phi_{n-k+1})$. Отображение характеризуется специфическим вырождением: полная последовательность фаз ϕ_n составлена из k независимых подпоследовательностей так, что по ходу эволюции во времени их члены чередуются. Для каждой из них малое возмущение претерпевает удвоение через k шагов дискретного времени, как видно из выражения (17.15). Отсюда следует, что отображение (17.13) имеет k равных по величине показателей Ляпунова $\Lambda_i = k^{-1} \ln 2, i = 1, 2, \dots, k$.

Что касается исходной системы (17.9), то отображение (17.15) служит для нее приближением. Тем не менее в отношении режимов активного функционирования (пульсаций) в широком диапазоне параметров заключение о количестве положительных показателей Ляпунова остается справедливым, хотя соседние члены последовательности фаз перестают быть реально независимыми. (Это означает снятие вырождения, и показатели Ляпунова теперь не равны друг другу точно.) В бесконечномерном фазовом пространстве системы с запаздыванием такая динамика отвечает растяжению фазового объема по k направлениям, ассоциирующимся с циклическими координатами ϕ_1, \dots, ϕ_k , тогда как оставшиеся направлению будут соответствовать сжатию. Это будет аттрактор с k положительными показателями Ляпунова и остальными отрицательными показателями.

На рис. 17.5 показаны временные зависимости осциллирующих переменных в установившихся хаотических режимах при различных соотношениях времени запаздывания и периода модуляции, выбранных согласно (17.14) для $k = 1, 2, 3, 4$. Таким образом, панель (а) отвечает ситуации, когда стимуляция возбуждения запаздывающим сигналом производится непосредственно на следующей стадии активности, а панели (б, в, г) соответствуют передаче возбуждения с пропуском одной, двух или трех промежуточных стадий активности.

Как можно видеть, во всех случаях процесс выглядит как последовательность цугов колебаний, следующих один за другим с интервалом времени T , и при этом фаза заполнения изменяется от одного цуга к другому, демонстрируя хаотическое поведение. Чтобы убедиться, что появление хаоса действительно обусловлено описанным выше механизмом передачи фазы от предыдущих стадий активности к последующим, на рис. 17.6 показаны итерационные диаграммы для фаз. Фазы определяются в некоторый момент, фиксированный относительно формы медленной модуляции параметра согласно выражению $\phi_n = \arg(x - i\omega_0^{-1}\dot{x})$. Значения параметров заданы так же, как при вычислении реализаций, показанных на рис. 17.5. Графики представлены в координатах (ϕ_n, ϕ_{n-k}) , где $k = 1, 2, 3, 4$ для панелей (а), (б), (в) и (г) соответственно. Можно видеть, что диаграммы подтверждают адекватность описания в терминах отображений (17.13). В самом деле, изменение фазы ϕ_{n-k} сопровождается, грубо говоря, двукратным изменением ϕ_n . На рис. 17.6 показаны диаграммы для фаз в координатах (ϕ_n, ϕ_{n-1}) . Тот факт, что точки на графике приблизительно равномерно заполняют квадрат, указывает, что в хорошем приближении имеет место

взаимная статистическая независимость подпоследовательностей. Слабо выраженная неоднородность структуры говорит о том, что статистическая зависимость, которая исключена в рамках упрощенного описания (17.15), на самом деле все же присутствует.

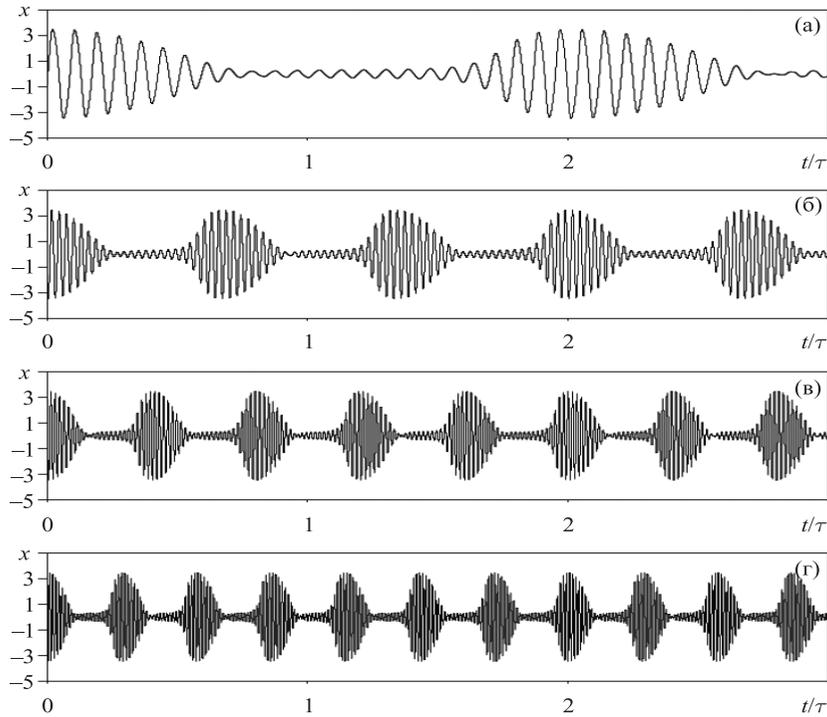


Рис. 17.5. Временные зависимости осциллирующих переменных, полученные численным решением уравнений (17.9) при $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.3$, $T = 24$, $A = 3$ и $k = 1$, $\tau = 12$ (а); $k = 2$, $\tau = 36$ (б); $k = 3$, $\tau = 60$ (в); $k = 4$, $\tau = 84$ (г)

Вычисления подтверждают вывод относительно количества положительных показателей Ляпунова в режимах, получающихся при выборе времен запаздывания согласно (17.14) при разных числах k . Удобно использовать нормировку показателей Ляпунова относительно характерного периода времени kT : $\bar{\Lambda}_i = k\Lambda_i = kT\lambda_i$. В рамках приближения, основанного на отображении (17.15), первые k показателей Ляпунова при такой нормировке должны равняться $\ln 2 \approx 0.693$.

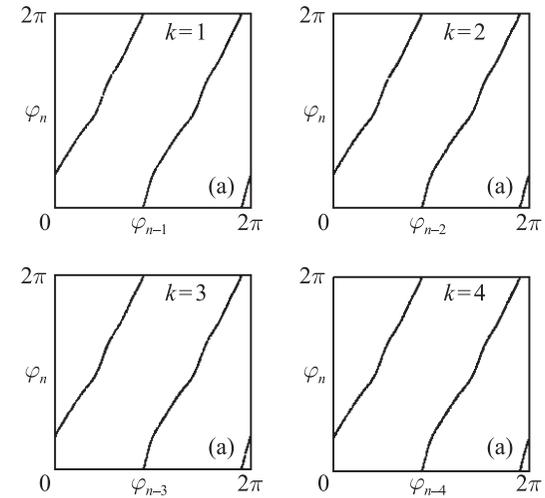


Рис. 17.6. Итерационные диаграммы для фаз, иллюстрирующие применимость приближенного описания с помощью отображений (17.15) при различных числах k ; параметры те же, как на рис. 17.5

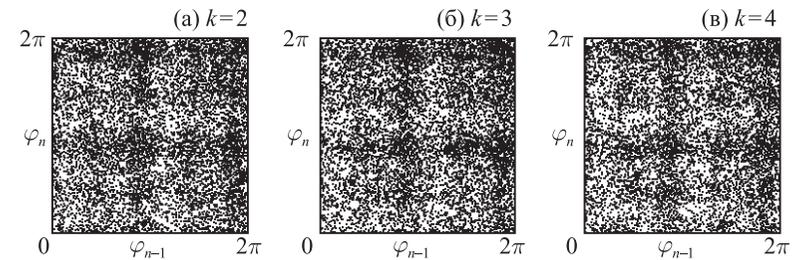


Рис. 17.7. Диаграммы, иллюстрирующие наличие слабой статистической зависимости для фаз, отвечающих соседним стадиям активности при $k = 2, 3$ и 4 ; параметры те же, как на рис. 17.5

В ходе вычислений для каждого рассмотренного режима динамики системы определялись показатели Ляпунова стробоскопического отображения в количестве, достаточном для оценки размерности аттрактора по формуле Каплана–Йорке $D = m + S_m / |\bar{\Lambda}_{m+1}|$, где m выбирается так, что сумма $S_m = \sum_{i=1}^m \bar{\Lambda}_i$ положительна, а сумма S_{m+1} уже отрицательна.

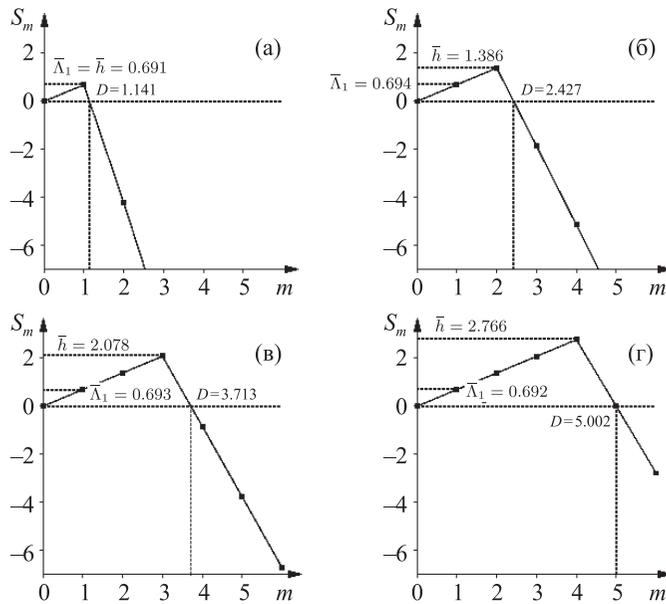


Рис. 17.8. Графики сумм показателей Ляпунова в зависимости от числа членов суммы. Указаны значения наибольшего показателя $\bar{\Lambda}_1$, размерности Каплана–Йорке D и энтропии Колмогорова–Синия \bar{h} . Данные получены при вычислениях для модели (17.9) при $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.3$, $T = 24$, $A = 3$ для $k = 1$, $\tau = 12$ (а); $k = 2$, $\tau = 36$ (б); $k = 3$, $\tau = 60$ (в); $k = 4$, $\tau = 84$ (г)

Наглядный способ представления спектра показателей, который сразу позволяет различить типы хаоса и гиперхаоса, состоит в том, чтобы построить графики зависимости сумм S_m от числа m , которые приведены на рис. 17.8. На них можно видеть и сопоставить сразу несколько важных количественных характеристик хаоса. Значение функции при аргументе, равном единице, — это старший показатель Ляпунова $\bar{\Lambda}_1$. Значение аргумента в точке максимума — это количество положительных показателей Ляпунова. Максимум функции отвечает энтропии Колмогорова–Синия в соответствии с формулой Песина $\bar{h} = \sum_{\bar{\Lambda}_k > 0} \bar{\Lambda}_k$. Пересечение ломаной линии с осью абсцисс определяет размерность аттрактора по Каплану–Йорке.

17.3. Осциллятор ван дер Поля с двумя петлями запаздывающей обратной связи и модуляцией параметра

Система, обсуждавшаяся в предыдущем разделе, неавтономна из-за присутствия двух типов временной зависимости в коэффициентах. Первая — это медленная модуляция параметра, ответственного за возникновение самоподдерживающихся колебаний в осцилляторе ван дер Поля, а вторая обусловлена наличием вспомогательного сигнала на частоте ω_0 , равной рабочей частоте осциллятора. Теперь мы хотим ввести модель, в которой вспомогательный сигнал не требуется, это делает практическое исполнение схемы более простым [Баранов и др., 2010].

Рассмотрим блок-схему на рис. 17.9. Основным элементом вновь служит осциллятор ван дер Поля, у которого параметр, управляющий бифуркацией Андронова–Хопфа, медленно модулируется с периодом времени T , так что осциллятор попеременно пребывает в стадиях возбуждения и подавления. Теперь, однако, сигнал от осциллятора проходит по *двум цепям запаздывающей обратной связи*, в которых времена задержки τ_1 и τ_2 различаются на величину T . В одной из них сигнал претерпевает квадратичное нелинейное преобразование и дифференцирование, так что низкочастотная составляющая отфильтровывается (блоки, обозначенные на схеме x^2 и d/dt). Затем производится его смешение с сигналом, поступившим по второй цепи обратной связи, на квадратичном нелинейном элементе (на схеме помечен косым крестом). Результирующий сигнал содержит составляющую на разностной частоте, находящуюся в резонансе с осциллятором, которая оказывает стимулирующее воздействие для возбуждения на новой стадии активности. Константы запаздывания выбраны так, что сигналы, испущенные на стадиях активности с номерами $(n-1)$ и n , прибывают в нужное время, чтобы стимулировать возбуждение в начале стадии активности $n+1$.

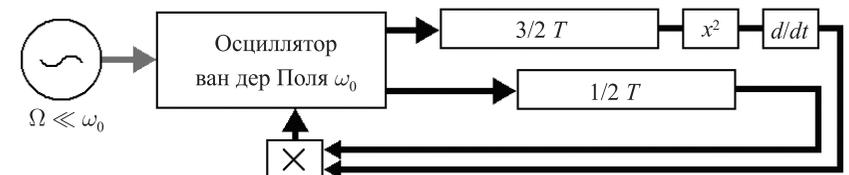


Рис. 17.9. Блок-схема системы с двумя цепями запаздывающей обратной связи

Формальной моделью служит дифференциальное уравнение с двумя запаздываниями

$$\ddot{x} - (A \cos(2\pi t / T) + h - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x(t - \tau_1)x(t - \tau_2)\dot{x}(t - \tau_2). \quad (17.16)$$

Здесь x — колебательная переменная осциллятора ван дер Поля, ε — параметр, характеризующий глубину обратной связи, величина A определяет амплитуду модуляции параметра, ответственного за возбуждение осциллятора, относительно среднего уровня, заданного величиной h . Для конкретности времена запаздывания выбраны $\tau_1 = \frac{1}{2}T$ и $\tau_2 = \frac{3}{2}T$.

Пусть сначала $h = 0$. Тогда стадии возбуждения и затухания имеют равную продолжительность и занимают интервалы времени, когда соответственно $A \cos(2\pi t / T) > 0$ или $A \cos(2\pi t / T) < 0$. Предположим, что колебания на стадиях активности с номерами n и $n-1$ были соответственно ϕ_n и ϕ_{n-1} , т. е. $x \sim \sin(\omega_0 t + \phi_n)$ и $x \sim \sin(\omega_0 t + \phi_{n-1})$. Тогда подстановка в правую часть уравнения (17.16) дает

$$\begin{aligned} & x(t - \frac{1}{2}T)x(t - \frac{3}{2}T)\dot{x}(t - \frac{3}{2}T) \sim \\ & \sim \sin(\omega_0 t - \frac{1}{2}\omega_0 T + \phi_n) \sin(\omega_0 t - \frac{3}{2}\omega_0 T + \phi_{n-1}) \cos(\omega_0 t - \frac{3}{2}\omega_0 T + \phi_{n-1}) = \\ & = \frac{1}{2} \sin(\omega_0 t - \frac{1}{2}\omega_0 T + \phi_n) \sin(2\omega_0 t - 3\omega_0 T + 2\phi_{n-1}) = \\ & = -\frac{1}{4} \cos(\omega_0 t - \frac{5}{2}\omega_0 T + 2\phi_{n-1} - \phi_n) + (\dots), \end{aligned}$$

где многоточие обозначает нерезонансный член (третья гармоника). В результате фаза колебаний на следующей стадии активности выражается как

$$\phi_{n+1} = -\phi_n + 2\phi_{n-1} + \text{const} \pmod{2\pi}. \quad (17.17)$$

Отсюда следует, что разность фаз $\Delta\phi_n = \phi_n - \phi_{n-1}$ подчиняется растягивающему отображению окружности, или отображению Бернулли

$$\Delta\phi_{n+1} = -2\Delta\phi_n \pmod{2\pi}. \quad (17.18)$$

Это отображение хаотическое с показателем Ляпунова $\Lambda_1 = \ln 2 \approx 0.693$. Отображение (17.17) имеет такой же по величине старший показатель Ляпунова и, кроме того, нулевой показатель $\Lambda_2 = 0$.

Расчеты показывают, что ожидаемый тип хаотической динамики имеет место в довольно широкой области параметров. Для детального анализа выбран следующий набор параметров: $\omega_0 = 2\pi$, $T = 8$, $A = 4$, $h = 0$, $\varepsilon = 0.05$. На рис. 17.10 показана зависимость обобщенной координаты осциллятора

от времени. Процесс представляет собой последовательность цугов колебаний, следующих друг за другом с периодом T . При этом фаза заполнения варьируется от импульса к импульсу, демонстрируя хаотическое поведение. Присутствие хаоса обусловлено описанным выше механизмом передачи фаз от предыдущих стадий процесса к следующей стадии активности. На рис. 17.11а показана итерационная диаграмма для фаз в виде трехмерного графика, демонстрирующего приблизительное соответствие данной функции двух переменных с выражением (17.17). На рис. 17.11б показана итерационная диаграмма для разности фаз между соседними стадиями активности, которая хорошо согласуется с соотношением (17.18).

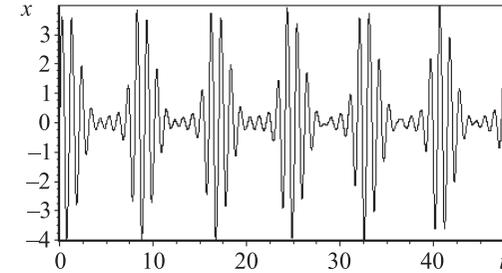


Рис. 17.10. Реализация колебаний, построенная по результатам численного моделирования динамики системы (17.16) при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 8$, $A = 4$, $h = 0$, $\varepsilon = 0.05$, $\tau_1 = \frac{1}{2}T$ и $\tau_2 = \frac{3}{2}T$

На рис. 17.12, на панели (а), показан вид траектории на аттракторе в проекции на фазовую плоскость осциллятора. Фактически аттрактор системы с запаздыванием — это объект, вложенный в бесконечномерное пространство состояний, так что изображение надо рассматривать как двумерную проекцию фазовой траектории. На панели (б) представлен в той же проекции портрет аттрактора в стробоскопическом сечении.

Для вычисления показателей Ляпунова использовался метод, аналогичный тому, который обсуждался в предыдущем разделе. При этом используются данные совместного численного решения уравнения (17.16) и комплекта уравнений в вариациях для векторов возмущения

$$\begin{aligned} & \ddot{\tilde{x}} + 2x\tilde{x}\dot{x} - (A \cos(2\pi t / T) + h - x^2)\tilde{\dot{x}} + \omega_0^2 \tilde{x} = \\ & = \varepsilon \tilde{x}(t - \frac{1}{2}T)x(t - \frac{3}{2}T)\dot{x}(t - \frac{3}{2}T) + \varepsilon x(t - \frac{1}{2}T)\tilde{x}(t - \frac{3}{2}T)\dot{x}(t - \frac{3}{2}T) + \\ & + \varepsilon x(t - \frac{1}{2}T)x(t - \frac{3}{2}T)\tilde{\dot{x}}(t - \frac{3}{2}T). \end{aligned} \quad (17.19)$$

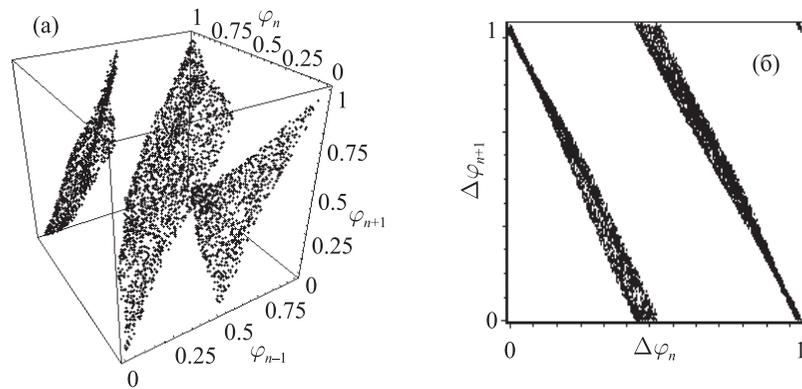


Рис. 17.11. Диаграммы, иллюстрирующие преобразование на последовательных стадиях активности осциллятора для фаз (а) и разностей фаз (б) в модели (17.16) при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 8$, $A = 4$, $h = 0$, $\varepsilon = 0.05$, $\tau_1 = \frac{1}{2}T$ и $\tau_2 = \frac{3}{2}T$

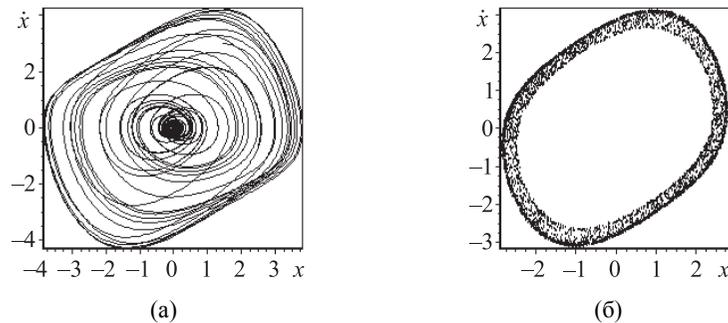


Рис. 17.12. Двумерная проекция траектории на аттракторе (а) и портрет аттрактора в стробоскопическом сечении (б), полученные при численном решении уравнения (17.16) при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 8$, $A = 4$, $h = 0$, $\varepsilon = 0.05$

На рис. 17.13 показаны графики четырех наибольших показателей Ляпунова от параметра глубины модуляции A при фиксированных остальных параметрах. Заметим, что два показателя остаются практически постоянными в широком диапазоне и близкими соответственно к величинам $\ln 2$ и 0, что согласуется с анализом на основе отображения для фаз (17.17). В частности, при $A = 4$ первые пять показателей следующие $\Lambda_1 = 0.693$, $\Lambda_2 = 0.000$,

$\Lambda_3 = -1.140$, $\Lambda_4 = -1.333$, $\Lambda_5 = -3.807$. Отсюда следует, что размерность Каплана–Йорке для аттрактора в стробоскопическом сечении равна $D_{KY} = 2 + \Lambda_1 / |\Lambda_3| \approx 2.61$, а для аттрактора в расширенном фазовом пространстве системы с непрерывным временем, соответственно, $D \approx 3.61$.

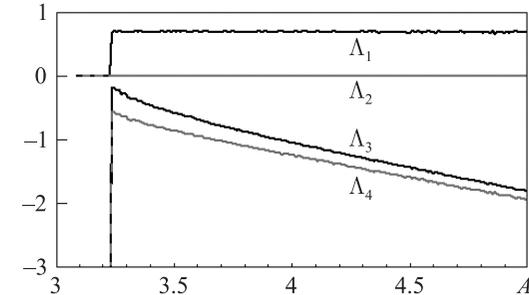


Рис. 17.13. Зависимость первых четырех показателей Ляпунова от параметра модуляции A для стробоскопического отображения системы (17.16) при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 8$, $\varepsilon = 0.05$, $h = 0$. Расчеты проведены при постепенном уменьшении шаг за шагом параметра A , с наследованием мгновенного состояния от предыдущего шага по параметру

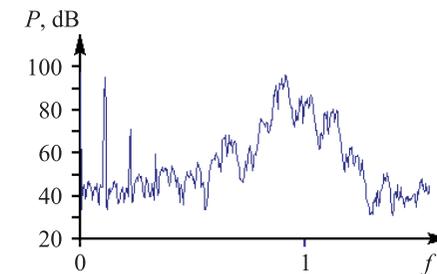


Рис. 17.14. Спектр мощности сигнала, полученный обработкой данных численного моделирования системы (17.16) при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 8$, $A = 4$, $\varepsilon = 0.05$, $h = 0$

На рис. 17.14 показан спектр мощности осциллятора в режиме генерации хаоса. Для его построения используется достаточно длинный временной ряд, полученный выборкой с определенным временным шагом из найденной при численном моделировании реализации динамики на аттракторе системы (17.16). Используется методика, рекомендованная в теории случайных процессов для статистической оценки спектральной плотности мощности

[Дженкинс и Ваттс, 1971; 1972]. Как можно видеть из рисунка, спектр концентрируется в некоторой полосе вблизи собственной частоты осциллятора $f \approx 1$, т. е. $\omega = 2\pi f \approx \omega_0 = 2\pi$. Присутствие непрерывной составляющей в спектре — характерная черта хаотической динамики. Дискретные пики в левой части диаграммы обусловлены своим появлением периодичности, связанной с медленной модуляцией параметра возбуждения.

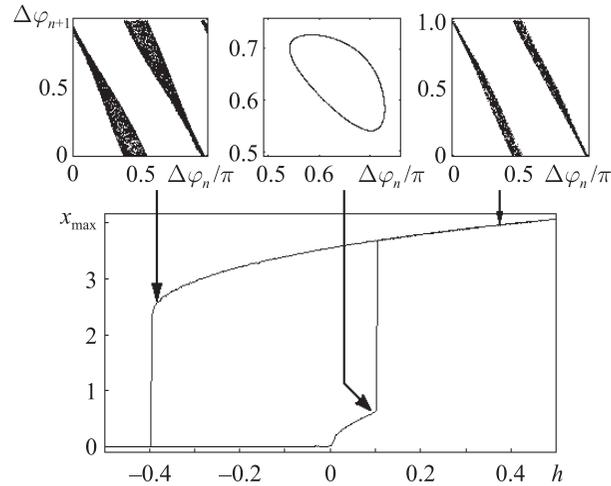


Рис. 17.15. Диаграмма, иллюстрирующая мягко-жесткое возбуждение и гистерезис в системе (17.16): зависимость максимальной амплитуды от параметра h при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 8$, $A = 3.9$, $\varepsilon = 0.05$

Как показывает численное моделирование динамики, система демонстрирует специфическое мягко-жесткое возбуждение и гистерезис. Этот феномен иллюстрируется на рис. 17.15. Здесь представлена максимальная за период модуляции амплитуда колебаний в зависимости от параметра h . Этот параметр сначала изменяется в сторону увеличения, что соответствует движению слева направо вдоль нижней ветви, а потом в сторону уменьшения, что отвечает движению справа налево вдоль верхней ветви петли гистерезиса. На вставках приводятся итерационные диаграммы для разностей фаз, относящиеся к представительным точкам на петле гистерезиса. При проведении вычислений на каждом шаге интегрирования к переменной добавлялось случайное возмущение на уровне 0.001, чтобы обеспечить уход от тривиального состояния в нуле, когда оно становится

неустойчивым. Механизм гистерезиса аналогичен тому, который обсуждался в предыдущем разделе.

Как можно полагать, данную систему надо отнести к классу систем с *частично гиперболическими аттракторами* [Брин и Песин, 1974; Bonatti et al., 2005; Pesin, 2007] из-за присутствия нейтрального направления у траекторий на аттракторе, ассоциирующегося с нулевым показателем Ляпунова. Строгое обоснование этого предположения представляется непростой математической проблемой в силу бесконечномерной природы системы.

Отметим, что несколько иная схема генератора хаоса на основе осциллятора ван дер Поля с двумя цепями запаздывающей обратной связи была предложена и проанализирована в работе Кузнецова и Пиковского [Kuznetsov and Pikovsky, 2008]. Она отличается от системы (17.16) степенью нелинейного преобразования сигналов в цепях обратной связи, а именно, в той модели используются квадратичное и кубическое преобразования, тогда как в системе (17.16) — линейное и квадратичное преобразования.

17.4. Автономная система с запаздыванием

Для построения *автономной* системы, в которой реализовался бы механизм генерации хаоса, подобный тому, который рассматривался выше, подходящей отправной точкой может служить *логистическое уравнение с запаздыванием*, предложенное в свое время в контексте задач биологии популяций [Fowler, 1982]. Уравнение имеет вид

$$\dot{r} = \mu[1 - r(t - \tau)]r(t). \quad (17.20)$$

Здесь r — неотрицательная переменная, характеризующая численность популяции и нормированная так, что уровень насыщения отвечает $r = 1$. Параметр $\mu > 0$ представляет собой показатель скорости роста популяции при малой ее численности. Параметр τ отвечает за запаздывание эффекта насыщения. При условии $\tau < \pi / 2\mu$ система имеет устойчивое состояние равновесия $r = 1$. В области $\tau > \pi / 2\mu$ возникают самоподдерживающиеся колебания. При больших величинах τ они имеют вид периодической последовательности импульсов (рис. 17.16). Период следования увеличивается с ростом τ по закону $P \cong (1 + e^{\mu\tau}) / \mu$, а минимальный уровень популяции, достигаемый в промежутках времени между импульсами, оценивается как $r_{\min} \cong \mu\tau \exp(-e^{\mu\tau} + 2\mu\tau - 1)$, т. е. уменьшается с ростом τ по закону двойной экспоненты [Fowler, 1982].

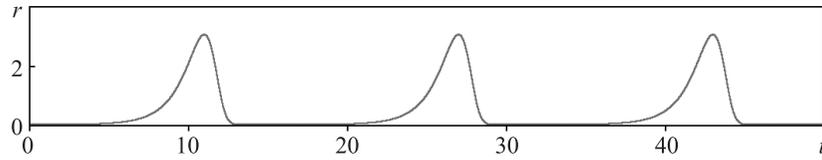


Рис. 17.16. Самоподдерживающиеся пульсации в логистическом уравнении с запаздыванием (17.20) при $\mu = 1.6$, $\tau = 2$. Наблюдаемый период пульсаций составляет $T_{av} \approx 16.0$

Будем теперь трактовать положительную переменную r как квадрат амплитуды некоторого колебательного процесса на частоте ω_0 . Для этого положим $r = x^2 + y^2$ и потребуем, чтобы новые переменные удовлетворяли уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega_0 y + \frac{1}{2} \mu (1 - x^2(t-\tau) - y^2(t-\tau))x, \\ \dot{y} &= \omega_0 x + \frac{1}{2} \mu (1 - x^2(t-\tau) - y^2(t-\tau))y. \end{aligned} \quad (17.21)$$

Далее, добавим в первое уравнение дополнительный член $\varepsilon x(t-\tau)y(t-\tau)$, где ε — малый параметр, и получим уравнения [Kuznetsov and Pikovsky, 2010]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega_0 y + \frac{1}{2} \mu (1 - x^2(t-\tau) - y^2(t-\tau))x + \varepsilon x(t-\tau)y(t-\tau), \\ \dot{y} &= \omega_0 x + \frac{1}{2} \mu (1 - x^2(t-\tau) - y^2(t-\tau))y. \end{aligned} \quad (17.22)$$

В случае генерации импульсов с предельно низким уровнем минимальной амплитуды в промежутках между ними именно добавленный член будет инициировать образование очередного всплеска колебаний в системе. (Из-за этого период пульсаций будет меньше, чем в системе (17.20).) Если принять, что на протяжении текущей пульсации переменные ведут себя как $x \approx f(t) \cos(\omega_0 t + \phi)$ и $y \approx f(t) \sin(\omega_0 t + \phi)$, то дополнительный член имеет вид

$$\varepsilon x(t-\tau)y(t-\tau) \approx \frac{1}{2} \varepsilon f^2(t-\tau) \sin[2\omega_0(t-\tau) + 2\phi]. \quad (17.23)$$

Это стимулирующий сигнал, который способствует возбуждению колебаний на следующей стадии активности, и его фаза передается этим колебаниям. Таким образом, фаза очередного цуга колебаний получается удвоением фазы предыдущего:

$$\phi_{n+1} = 2\phi_n + \text{const}. \quad (17.24)$$

Это соответствует растягивающему отображению окружности, или отображению Бернулли, которое демонстрирует хаотическую динамику и характеризуется показателем Ляпунова $\Lambda = \ln 2 \approx 0.693$.

Как это всегда имеет место в системах с запаздыванием, фазовое пространство модели (17.22) бесконечномерное. Чтобы задать мгновенное состояние системы при некотором $t = t_0$ и определить тем самым однозначно дальнейшую эволюцию во времени, нужно указать функции $x(t)$ и $y(t)$ на интервале времени $t \in [t_0 - \tau, t_0]$, и это соответствует некоторой точке в фазовом пространстве. Аттрактором будет объект, вложенный в это бесконечномерное пространство. Можно ввести отображение этого пространства в себя, отвечающее преобразованию состояния от одного цуга колебаний к другому. Это бесконечномерное отображение Пуанкаре для данной системы. Динамика, описываемая этим отображением, такова, что на аттракторе имеют место растяжение по циклической фазовой переменной ϕ и сжатие по остальным направлениям. Учитывая, что для фазы реализуется отображение типа Бернулли, это обязан быть аттрактор типа Смейла–Вильямса.

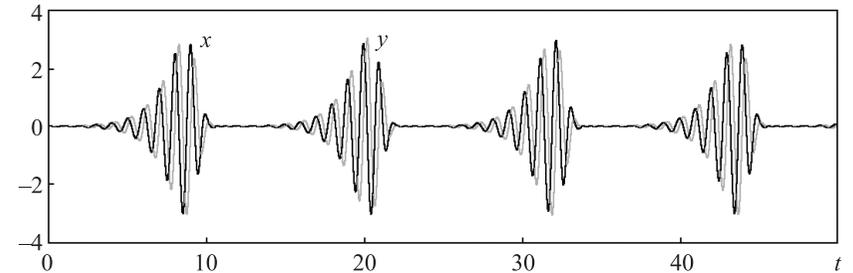


Рис. 17.17. Колебания переменных x (черная кривая) и y (серая кривая) согласно результатам численного решения уравнения (17.22) при $\omega_0 = 2\pi$, $\mu = 1.6$, $\omega_0 = 2\pi$, $\tau = 2$, $\varepsilon = 0.05$; наблюдаемый период пульсаций составляет $T_{av} \approx 11.657$

На рис. 17.17 показаны реализации, построенные по результатам численного моделирования, иллюстрирующие функционирование системы (17.22) в соответствии с изложенными выше качественными рассуждениями. В самом деле, процесс выглядит как последовательность импульсов с высокочастотным заполнением. Средний период их следования меньше, чем в исходной модели (17.20), и составляет в рассматриваемом режиме $T \approx 11.657$.

Портрет аттрактора, спроецированный из бесконечномерного фазового пространства, показан на рис. 17.18 в координатах (x, y, ρ_τ) , где $\rho_\tau = \sqrt{x^2(t-\tau) + y^2(t-\tau)}$. (Он похож на изображение аттрактора в системе обыкновенных дифференциальных уравнений, построенных на базе модели хищник–жертва в разделе 8.2, см. рис. 8.6б.)

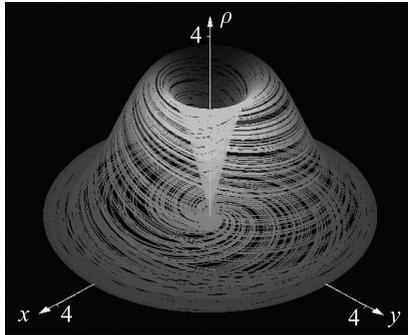


Рис. 17.18. Портрет аттрактора в проекции из бесконечномерного фазового пространства модели (17.22) при $\omega_0 = 2\pi$, $\mu = 1.6$, $\omega_0 = 2\pi$, $\tau = 2$, $\varepsilon = 0.05$

На рис. 17.19 показана диаграмма, свидетельствующая, что преобразование фазы заполнения от одной пульсации к другой описывается отображением Бернулли. Фаза определяется в момент достижения максимума квадрата амплитуды $x^2 + y^2$ из соотношения $\varphi = \text{arg}(x - iy)$, и полученные данные представляются графически в координатах $(\varphi_n, \varphi_{n+1})$.

Три старших показателя Ляпунова, рассчитанные численно для системы (17.22) при указанных параметрах, таковы:

$$\lambda_1 = 0.0544, \lambda_2 = 0.0005, \lambda_3 = -1.982. \quad (17.25)$$

Наибольший показатель λ_1 положительный и соответствует с хорошей точностью результату оценки согласно приближению, основанному на отображении Бернулли. Действительно, учитывая, что средний период следования импульсов $T \cong 11.657$, для стробоскопического отображения получим показатель $\Lambda_1 = 0.646$, что близко к ожидаемой величине $\ln 2$. Второй показатель с точностью до погрешности вычислений не отличается от нуля. Учитывая автономную природу системы, он интерпретируется как связанный с возмущением типа инфинитезимального сдвига вдоль

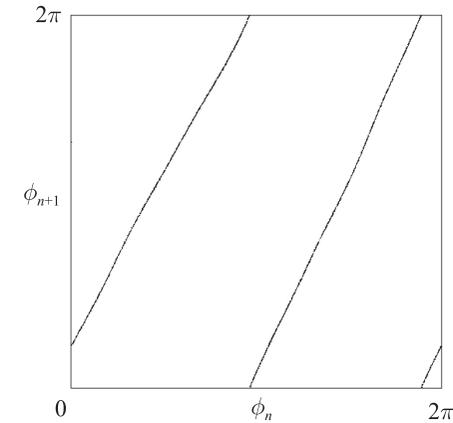


Рис. 17.19. Диаграмма, иллюстрирующая преобразование фаз на последовательных стадиях активности, согласно результатам численного решения уравнения (17.22) при $\omega_0 = 2\pi$, $\mu = 1.6$, $\omega_0 = 2\pi$, $\tau = 2$, $\varepsilon = 0.05$

опорной фазовой траектории. Остальные показатели отрицательные. Оценка размерности аттрактора по формуле Каплана–Йорке дает для потоковой системы $D_{KY} \approx 2.027$.

17.5. Параметрический генератор хаоса с запаздывающей обратной связью и модуляцией накачки

Выше в этой главе аргументировалась возможность реализации гиперболических аттракторов на основе принципа манипуляции фазой колебаний на последовательных стадиях возбуждения автоколебательного элемента с запаздывающей обратной связью. С другой стороны, согласно результатам главы 9, широкие возможности для применения этого принципа доставляют осцилляторы с параметрическим возбуждением, где естественным образом можно использовать специфические соотношения частот и фаз участвующих колебательных составляющих. Имеет смысл рассмотреть комбинацию обоих приемов — использование параметрической генерации и запаздывающей обратной связи. На этом пути оказывается возможным построить простую и изящную схему параметрического генератора грубого хаоса, который может представлять интерес с практической точки зрения [Kuznetsov and Kuznetsov, 2013].

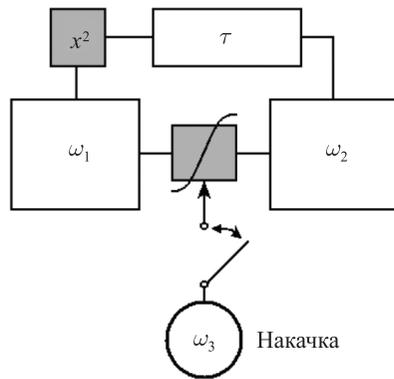


Рис. 17.20. Блок-схема параметрического генератора хаоса. Блоки ω_1 и ω_2 — это осцилляторы с соответствующими частотами; блок, обозначенный волной, — это реактивный элемент связи, характеризуемый параметром, осциллирующим с частотой накачки ω_3 ; блок, помеченный x^2 , — это квадратичный нелинейный элемент

Обратимся к показанной на рис. 17.20 системе с параметрическим возбуждением, в которой $\omega_2 = 2\omega_1$, $\omega_3 = 3\omega_1$ и осциллятор частоты ω_2 претерпевает запаздывающее воздействие со стороны преобразованного квадратичным нелинейным элементом сигнала от осциллятора частоты ω_1 . В силу принятого соотношения частот вторая гармоника сигнала отвечает резонансной частоте осциллятора, на которое оказывается воздействие. Сигнал накачки, имеющий основную частоту ω_3 , предполагается медленно модулированным по периодическому закону, так что параметрические колебания в системе попеременно возникают или затухают. Соотношение периода модуляции накачки T и времени запаздывания в цепи обратной связи τ выбирается так, чтобы на каждой очередной стадии возбуждения осуществлялась стимуляция сигналом, испущенным на предыдущей стадии активности (в частности, подходящим является соотношение $\tau = T/2$). При этих условиях фаза колебаний удваивается после каждой очередной передачи возбуждения. В результате система генерирует последовательность импульсов, испускаемых с периодом модуляции, у которых фаза заполнения изменяется от импульса к импульсу, демонстрируя хаос. Как можно полагать, хаотическая динамика в этом режиме ассоциируется с однородно гиперболическим аттрактором. Для отображения, определяющего изменение состояния системы за период модуляции, это разновидность соленоида Смейла–Вильямса.

Применительно к предложенной схеме рассмотрим модельную систему дифференциальных уравнений с запаздыванием:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= \kappa x_2 f(t) \sin \omega_3 t - \alpha_1 \dot{x}_1 - \beta_1 \dot{x}_1^3, \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= \kappa x_1 f(t) \sin \omega_3 t - \alpha_2 \dot{x}_2 - \beta_2 \dot{x}_2^3 + \varepsilon x_1^2(t - \tau),\end{aligned}\quad (17.26)$$

где x_1 и x_2 — обобщенные координаты двух осцилляторов. Параметр κ характеризует интенсивность накачки, а функция $f(t)$ определяет медленно меняющуюся по периодическому закону амплитуду накачки. Конкретно, положим

$$f(t) = \cos^2(\pi t / T). \quad (17.27)$$

Параметр ε представляет собой коэффициент передачи подвергнутого квадратичному преобразованию сигнала в цепи обратной связи с задержкой по времени τ . Параметры $\alpha_{1,2}$ и $\beta_{1,2}$ характеризуют соответственно линейное и нелинейное затухание осцилляторов. Заметим, что нелинейное затухание принципиально необходимо для насыщения параметрической неустойчивости. Чтобы коэффициенты в уравнении были периодическими, период модуляции принят равным целому числу периодов высокочастотных колебаний источника накачки: $T = 2\pi N / \omega_3$.

Когда $N \gg 1$, для описания динамики можно использовать метод медленно меняющихся амплитуд, что приводит к уравнениям [Kuznetsov and Kuznetsov, 2013]

$$\begin{aligned}\dot{A}_1 &= -\frac{\kappa}{4\omega_1} f(t) A_2^* - \frac{1}{2} \alpha_1 A_1 - \frac{3}{2} \omega_1^2 \beta_1 A_1 |A_1|^2, \\ \dot{A}_2 &= -\frac{\kappa}{4\omega_2} f(t) A_1^* - \frac{1}{2} \alpha_2 A_2 - \frac{3}{2} \omega_2^2 \beta_2 A_2 |A_2|^2 - i \frac{\varepsilon e^{-2i\omega_1 \tau}}{2\omega_2} A_1^2(t - \tau),\end{aligned}\quad (17.28)$$

где $A_1(t)$ и $A_2(t)$ — медленно меняющиеся комплексные функции времени.

В случае когда $\varepsilon = 0$, $\alpha_{1,2} = \beta_{1,2} = 0$ и $f(t) \equiv 1$, общее решение имеет вид $A_1 = C_+ e^{\kappa t / 4 \sqrt{\omega_1 \omega_2}} + C_- e^{-\kappa t / 4 \sqrt{\omega_1 \omega_2}}$, $A_2 = -\sqrt{\omega_2 / \omega_1} (C_+^* e^{\kappa t / 4 \sqrt{\omega_1 \omega_2}} + C_-^* e^{-\kappa t / 4 \sqrt{\omega_1 \omega_2}})$, где $C_+ = R e^{i\phi}$ и C_- — комплексные константы, определяемые начальными условиями. Поскольку второй член затухает, асимптотические выражения таковы: $A_1 \cong R \cdot e^{i\phi} e^{\kappa t / 4 \sqrt{\omega_1 \omega_2}}$ и $A_2 \cong -\sqrt{\omega_2 / \omega_1} R \cdot e^{-i\phi} e^{\kappa t / 4 \sqrt{\omega_1 \omega_2}}$, откуда имеем

$x_1 \cong 2R \cdot e^{kt/4} \sqrt{\omega_1 \omega_2} \cos(\omega_1 t + \phi)$ и $x_2 \cong -2R \cdot \sqrt{\omega_2 / \omega_1} e^{kt/4} \sqrt{\omega_1 \omega_2} \cos(\omega_2 t - \phi)$. Таким образом, фазовый сдвиг для колебаний на частотах ω_1 и ω_2 характеризуется одной и той же константой ϕ , зависящей от начальных условий.

Рассмотрим теперь качественно режим работы схемы, когда накачка периодически включается и выключается в системе с ненулевым параметром ε и при учете потерь. В этом случае возбуждение осциллятора частоты $\omega_2 = 2\omega_1$ стимулируется второй гармоникой сигнала, испущенного на предыдущей стадии активности осциллятором частоты ω_1 . Она возникает на выходе квадратичного нелинейного элемента и передается через цепь запаздывающей обратной связи (со временем задержки подобранным надлежащим образом). Фазовый сдвиг этой гармоники составляет 2ϕ . (Это видно из тождества $\cos^2(\omega_1 t + \phi) = \cos 2(\omega_1 t + \phi) + \text{нерезонансный член.}$) Предполагая, что остаточные колебания от предыдущей стадии активности к началу новой стадии возбуждения практически полностью затухли, получаем ситуацию, когда удвоенный фазовый сдвиг второй гармоники будет передан осциллятору ω_2 , поскольку именно она стимулирует его возбуждение. Таким образом, на очередной стадии активности получаем $\phi_{\text{new}} = -2\phi + \text{const} \pmod{2\pi}$. Для циклической переменной ϕ это растягивающее отображение окружности типа Бернулли с хаотической динамикой, характеризуемой положительным показателем Ляпунова $\Lambda = \ln 2 \approx 0.693$.

Построение, аналогичное сечению Пуанкаре для обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, приводит к стробоскопическому функциональному отображению

$$\mathbf{X}_{n+1}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{X}_n(t)]. \quad (17.29)$$

Здесь векторные функции $\mathbf{X}_n(t)$ определены на интервале длины τ соотношением $\mathbf{X}_n(t) = \mathbf{x}(t + nT)$, где $\mathbf{x}(t)$ — вектор переменных исходной системы: $\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), \dot{x}_1(t), x_2(t), \dot{x}_2(t)\}$ или $\mathbf{x}(t) = \{\text{Re } A_1(t), \text{Im } A_1(t), \text{Re } A_2(t), \text{Im } A_2(t)\}$.

В пространстве состояний, т. е. в пространстве функций $\mathbf{X}_n(t)$, можно ввести циклическую координату ϕ , которая претерпевает, как объяснялось выше, преобразование удвоения на каждой итерации отображения, в то время как по остальным направлениям имеет место сжатие фазового объема. (Сказанное вытекает из результатов вычисления показателей Ляпунова, обсуждаемых ниже.) Это предполагает, что аттрактор отображения (17.29) представляет собой разновидность соленоида Смейла—

Вильямса, вложенного в бесконечномерное пространство состояний этого отображения.

Обращаясь к моделированию динамики системы, положим $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, и $\omega_3 = 6\pi$, т. е. примем соглашение, что время измеряется в единицах естественного периода первого осциллятора. На рис. 17.21 показаны образцы временных зависимостей x_1 и x_2 , полученных при численном интегрировании дифференциальных уравнений с запаздыванием (17.26) с помощью метода конечных разностей второго порядка. Графики относятся к установившемуся режиму (переходные процессы исключены). Значения параметров следующие:

$$T = 20, \tau = 10, \kappa = 35, \varepsilon = 1, \alpha_{1,2} = 1, \beta_{1,2} = 0.0015. \quad (17.30)$$

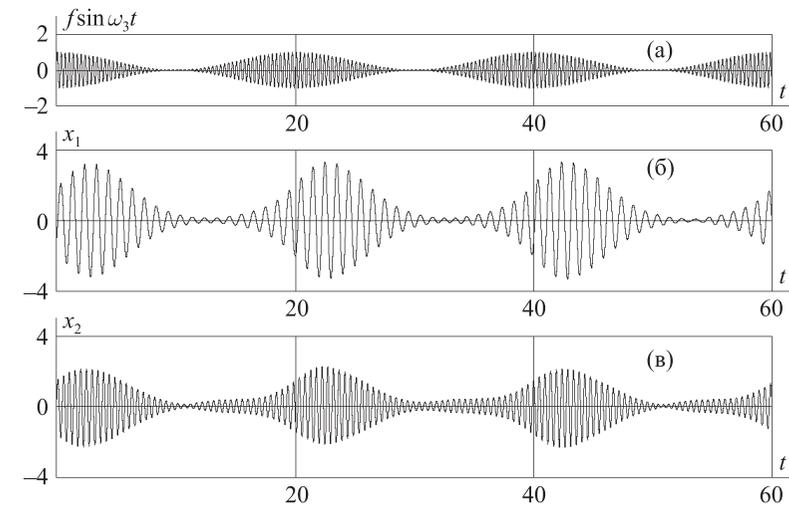


Рис. 17.21. Графики, полученные при численном решении уравнений (17.26) при $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$ и $\omega_3 = 6\pi$ при задании остальных параметров согласно (17.30): (а) сигнал накачки; (б), (в) сигналы, порождаемые первым и вторым осцилляторами системы

Сигнал от каждого осциллятора представляет собой последовательность импульсов, следующих с периодом модуляции накачки, а высокочастотное заполнение отвечает собственным частотам. Сигналы, однако, не являются периодическими: фазы заполнения изменяются нерегулярно от импульса к импульсу.

На рис. 17.22 показаны полученные обработкой численных результатов графики отображений для фазы сигнала, генерируемого в последовательные периоды активности осцилляторов. По осям абсцисс и ординат отложены соответствующие фазы, вычисленные в моменты времени $t_n = nT$ и t_{n+1} согласно выражению $\phi_n = \arg[x_1(t_n) + \dot{x}_1(t_n)/i\omega_1]$. Заметим, что фаза хорошо определена только на интервалах времени, отвечающих стадиям активности (когда амплитуда не близка к нулю). Как видно из рисунка, при изменении ϕ_n на угол 2π фаза ϕ_{n+1} совершает двукратный обход окружности в противоположном направлении, т. е. отображение топологически эквивалентно отображению типа Бернулли $\phi_{new} = -2\phi + \text{const} \pmod{2\pi}$. Незначительное расщепление ветвей на графике можно считать несущественным и не принимать во внимание.

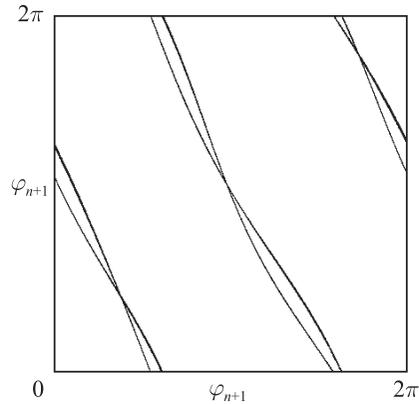


Рис. 17.22. Эмпирические итерационные отображения для фаз на последовательных стадиях активности осцилляторов, полученные при численном решении уравнений (17.26) при $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$ и $\omega_3 = 6\pi$ (а) и на основании уравнений (17.28) (б) при значениях параметров (17.30)

На рис. 17.23 приводится фазовый портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на фазовую плоскость осциллятора 1. На диаграмме видна поперечная фрактальная структура, являющаяся характерной особенностью соленоида Смейла–Вильямса.

На количественном уровне подтверждение хаотического поведения можно получить, вычисляя показатели Ляпунова. Формально у системы с запаздыванием спектр показателей Ляпунова содержит бесконечное их

число, но с практической точки зрения имеет смысл учитывать ограниченное количество, достаточное для оценки размерности аттрактора по формуле Каплана–Йорке. Показатели Ляпунова, вычисленные с помощью алгоритма Бенеттина в рассмотренном режиме таковы: $\Lambda_1 = 0.6805$, $\Lambda_2 = -1.095$, $\Lambda_3 = -6.798$, $\Lambda_4 = -7.090$, Размерность аттрактора в сечении Пуанкаре согласно формуле Каплана–Йорке $D \approx 1.62$.

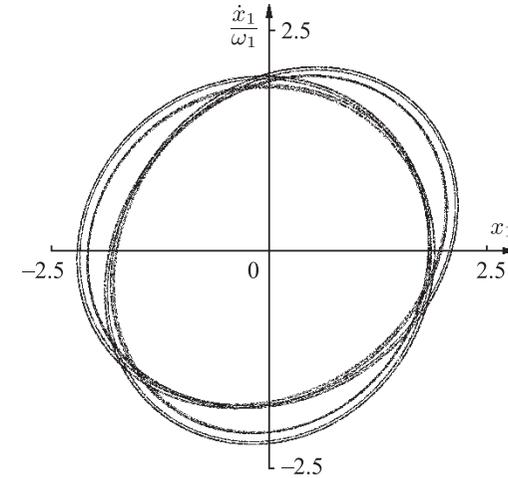


Рис. 17.23. Портрет аттракторов в стробоскопическом сечении в проекции на фазовую плоскость осциллятора 1 для модели (17.26) при $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, $\omega_3 = 6\pi$

На рис. 17.24 показана зависимость показателей Ляпунова от параметра k , полученная в численных расчетах (остальные параметры фиксированы согласно (17.30)). Как можно видеть, положительный показатель Ляпунова остается практически постоянным в широкой области и близок к значению $\ln 2$. Другие показатели отрицательны и зависят от параметра довольно слабо, причем визуально зависимость выглядит как плавная (с точностью до погрешностей вычислений). Такого рода поведение показателей Ляпунова свидетельствует о грубости динамики системы: хаос занимает непрерывный интервал по параметру, без окон периодичности внутри него.

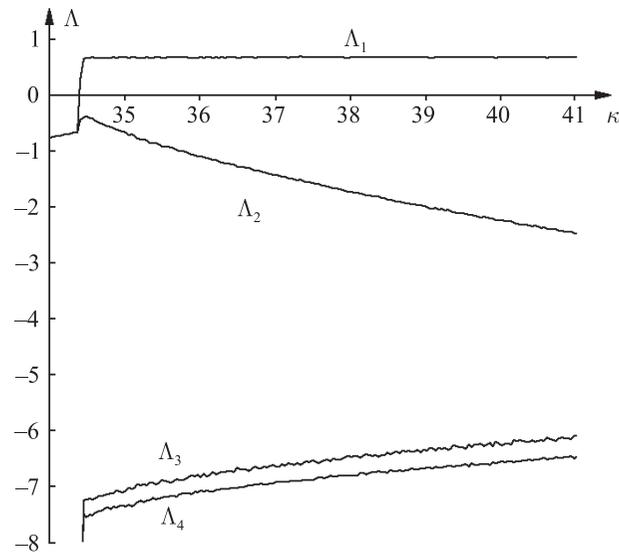


Рис. 17.24. Четыре наибольших показателя Ляпунова в зависимости от параметра κ по данным численного решения уравнений (17.26), параметры заданы согласно (17.30)

Глава 18

Гиперболический хаос структур Тьюринга

В предыдущих главах мы имели дело с системами, в которых фазы колебаний во времени на последовательных стадиях активности осцилляторов подчинялись растягивающему отображению окружности или гиперболическому отображению на торе. В качестве альтернативы интересно рассмотреть возможность аналогичных манипуляций с *пространственной* фазой структур, формирующихся в распределенной среде. Это расширяет инструментарий построения моделей и дает новое направление для поиска ситуаций, связанных с гиперболическим хаосом, в том числе в контексте гидродинамической турбулентности и систем типа реакция–диффузия. Возможность реализации на этом пути гиперболического хаоса, ассоциирующегося с аттрактором типа Смейла–Вильямса, была недавно продемонстрирована [Kuptsov et al., 2012]. Добавим, что описание динамики с помощью укороченных уравнений для амплитуд пространственных мод позволит ввести новые прототипы низкоразмерных моделей с хаотической динамикой (подобно уравнениям Лоренца, полученным в свое время при переходе к конечномерному описанию конвекции жидкости).

18.1. Структуры Тьюринга и модельные уравнения

Существует класс распределенных систем, в которых неустойчивость пространственно однородного состояния ведет к формированию стационарных во времени пространственных структур, обладающих, по крайней мере приблизительно, пространственной периодичностью. Этот круг задач является составной частью дисциплины, известной как *теория самоорганизации*. Одним из общепризнанных ее источников считается работа Тьюринга «Химические основы морфогенеза» [Turing, 1952], где впервые был предложен механизм образования пространственных структур в системе химических реагентов вследствие разности соответствующих им коэффициентов диффузии. В качестве примера модели, где такой феномен имеет место, приведем систему уравнений в частных производных Гирера–Майнхардта [Gierer and Meinhardt, 1972]. В одномерном случае она записывается в виде

$$\begin{aligned}\partial_t a &= \rho a^2 / h - \mu_a a + \rho_a + D_a \partial_x^2 a, \\ \partial_t h &= \rho a^2 - \mu_h h + \rho_h + D_h \partial_x^2 h.\end{aligned}\quad (18.1)$$

Здесь переменные a и h характеризуют концентрации реагентов, *активатора* и *ингибитора*, зависящие от координаты x и времени t . Параметры μ_a и μ_h отвечают за распад активатора и ингибитора, а ρ_a и ρ_h за их пополнение внешним источником. Коэффициент ρ определяет интенсивность взаимодействия. Принципиальный момент состоит в том, что коэффициенты диффузии для активатора D_a и ингибитора D_h могут различаться. Если второй коэффициент существенно больше первого, то возникает неустойчивость однородного стационарного состояния $a = \text{const}$, $h = \text{const}$ по отношению к возмущениям с некоторым волновым числом на нулевой частоте, приводящая к формированию пространственно осциллирующего паттерна. Это иллюстрируется на рис. 18.1а, где показана зависимость концентрации активатора от координаты и времени на диаграмме, построенной по результатам численного решения дифференциальных уравнений в частных производных (18.1) с параметрами, указанными в подписи к рисунку. Начальные условия заданы в виде стационарного пространственно однородного состояния с добавленными малыми случайными возмущениями. Граничные условия отвечают системе длины L , замкнутой в кольцо: $a(x, t) \equiv a(x + L, t)$, $h(x, t) \equiv h(x + L, t)$ (периодические граничные условия).

Для численного решения уравнений (18.1) (как и других рассматриваемых в этой главе уравнений с частными производными) можно использо-

вать так называемый *метод линий* [Сармин, Чудов, 1963; Schiesser, 1991; Hamdi et al., 2007]. В рамках этого метода сначала выполняется дискретизация на пространственной сетке с некоторым достаточно малым шагом $\Delta x = L/M$, где M — число шагов по длине. Так, вместо (18.1) записываем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{a}_m &= \rho a_m^2 / h_m - \mu_a a_m + D_a (a_{m+1} - 2a_m + a_{m-1}) / \Delta x^2 + \rho_a, \\ \dot{h}_m &= \rho a_m^2 - \mu_h h_m + D_h (h_{m+1} - 2h_m + h_{m-1}) / \Delta x^2 + \rho_h,\end{aligned}$$

где пространственный индекс m принимает значения $0, \dots, M-1$. Дополнительно должны быть специально учтены граничные условия на концах системы. В частности, для периодических граничных условий в уравнении для $m=0$ полагаем $a_{-1} = a_{M-1}$, $h_{-1} = h_{M-1}$, а в уравнении для $m=M-1$ — соответственно $a_M = a_0$, $h_M = h_0$. Затем уравнения решаются одним из стандартных численных методов, применимых для обыкновенных дифференциальных уравнений, например методом Рунге–Кутты четвертого порядка.

Какова простейшая, минимальная модель, описывающая феномен образования структур? Очевидно, в ней должна обеспечиваться характерная форма зависимости инкремента (декремента) от волнового числа для возмущений нулевой частоты вблизи пространственно однородного равновесного состояния, а также механизм нелинейного ограничения этой неустойчивости. Такой моделью служит *уравнение Свифта–Хохенберга*, сформулированное первоначально применительно к задачам конвекции [Swift and Hohenberg, 1977; Pomeau and Manneville, 1980]:

$$\partial_t u + [1 + \kappa^2 \partial_x^2]^2 u = Au - u^3. \quad (18.2)$$

Это уравнение допускает тривиальное стационарное пространственно однородное состояние $u \equiv 0$. Параметр A отвечает за неустойчивость этого состояния (когда $A > 0$), а параметр κ определяет пространственный масштаб возникающих структур. В самом деле, в линейном приближении (в пренебрежении кубическим членом, определяющим насыщение неустойчивости и стабилизацию формирующегося паттерна) подстановка $u \sim \exp(\lambda t - ikx)$ приводит к выражению для инкремента $\lambda = A - (1 - \kappa^2 k^2)^2$. Максимум инкремента достигается при значении $k = 1/\kappa$, что приблизительно соответствует волновому числу образующегося паттерна.

На рис. 1.18б показана пространственно-временная диаграмма, построенная по результатам численного решения уравнения (18.2) с периодическими граничными условиями, т. е. для участка среды, замкнутого в коль-

цо. Начальные условия отвечают малому случайному возмущению тривиального пространственно однородного состояния. Параметры указаны в подписи к рисунку. На диаграмме можно видеть формирование в среде пространственной структуры с волновым числом, отвечающим максимуму инкремента в соответствии с приведенным выше выражением (см. график на вставке справа внизу). Качественно картина демонстрирует сходство с процессом для уравнения Гирера–Майнхардта и, очевидно, является общей в отношении моделей с неустойчивостью Тьюринга.

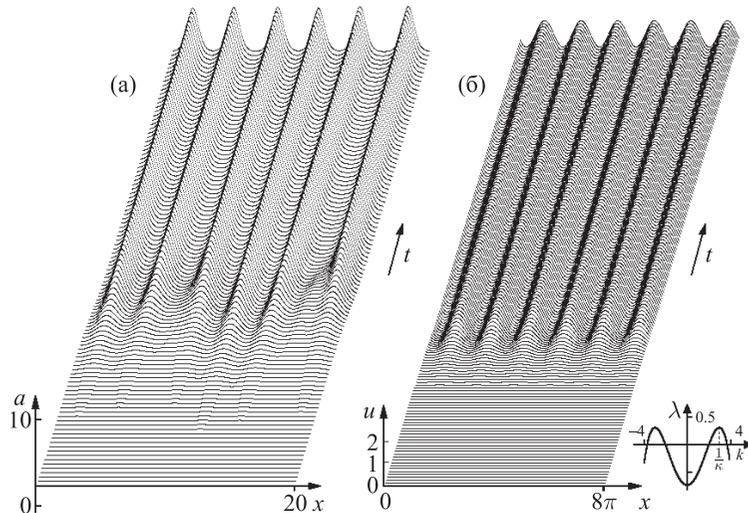


Рис. 18.1. Пространственно-временные диаграммы, иллюстрирующие возникновение структур типа Тьюринга из малых случайных возмущений пространственно однородного состояния в одномерном случае: (а) модель Гирера–Майнхардта (18.1) при $\rho_a = \rho_h = 0$, $\mu_a = 0.3$, $\rho = 0.3$, $\mu_h = 0.7$, $D_a = 0.02$, $D_h = 0.8$; (б) модель Свифта–Хохенберга (18.2) при $\kappa = 1/3$, $A = 0.3$, $L = 8\pi$. На вставке показана зависимость инкремента (декремента) λ от волнового числа k для возмущений на нулевой частоте

18.2. Гиперболический хаос в модели Свифта–Хохенберга с модуляцией параметров

Обратимся к системе, в которой, благодаря преобразованию пространственной фазы на последовательных временных периодах образующихся попеременно длинноволновых и коротковолновых структур Тьюринга,

реализуется гиперболическая хаотическая динамика на аттракторе типа соленоида Смейла–Вильямса [Kuptsov et al., 2012].

Рассмотрим модификацию одномерной модели Свифта–Хохенберга, в которой параметр κ изменяется во времени, а отвечающий за неустойчивость параметр A характеризуется пространственной зависимостью:

$$\partial_t u + [1 + \kappa^2(t) \partial_x^2]^2 u = A(x)u - u^3. \quad (18.3)$$

Конкретно, будем считать, что функция $A(x)$ представляется отрезком ряда Фурье

$$A(x) = A_0 + B \cos 2x + D \cos 4x, \quad (18.4)$$

а величина κ переключается с периодом T между двумя постоянными значениями:

$$\kappa(t) = \begin{cases} 1, & nT \leq t/T < n + \frac{1}{2}, \\ 1/3, & n + \frac{1}{2} \leq t/T < n + 1. \end{cases} \quad (18.5)$$

Это обеспечивает возбуждение двух различных, попеременно сменяющих друг друга во времени, структур Тьюринга, характеризуемых доминирующим волновым числом $k = 1$ или $k = 3$. Временной интервал между переключениями должен превышать характерную длительность образования или исчезновения структур Тьюринга. Нелинейный кубический член в уравнении отвечает за насыщение неустойчивости, но играет и другую важную роль в динамике системы, что объяснено ниже.

18.2.1. Кольцевая система

Предположим сначала, что система (18.3) имеет кольцевую геометрию и наложены периодические граничные условия, т. е.

$$u(x, t) \equiv u(x + L, t). \quad (18.6)$$

При этом длину L целесообразно выбрать так, чтобы геометрия была согласована с возможностью рождения структур Тьюринга с волновыми числами $k = 1$ и 3 . Для этого полагаем $L = 2\pi l$, где l — целое число.

Система функционирует следующим образом. На каждом временном интервале, когда $\kappa(t) = 1$, формируется и доминирует паттерн с волновым числом $k = 1$, который характеризуется некоторой пространственной фазой ϕ , что в грубом приближении соответствует пространственному распределению $u \sim U_1 \cos(x + \phi) + \tilde{U}_3 \cos(3x + 3\phi)$. Здесь $\tilde{U}_3 \ll U_1$ и U_1 име-

ет порядок \sqrt{A} . (Третья гармоника возникает естественным образом благодаря наличию в уравнении кубического нелинейного члена.) После переключения к значению параметра $\kappa(t) = 1/3$ длинноволновая компонента с $k = 1$ затухает, но система становится неустойчивой по отношению к возбуждению паттерна с волновым числом $k = 3$. Начальная стимуляция этого коротковолнового паттерна обеспечивается составляющей \tilde{U}_3 , так что он получает пространственную фазу 3ϕ . В конце рассматриваемого интервала времени первая гармоническая составляющая практически исчезает, и реализуется пространственная структура $u \sim U_3 \cos(3x + 3\phi)$ с амплитудой U_3 порядка \sqrt{A} . После следующего переключения, когда вновь $\kappa(t) = 1$, третья гармоника затухает, но реализуется неустойчивость для первой гармоники, и ее амплитуда начинает расти. «Зародышем» для этого роста служит компонента с волновым числом $k = 1$, возникшая из комбинации затухающей коротковолновой моды и коэффициента $\chi(x)$, зависящего от пространственной координаты. Если функция $A(x)$ содержит доминирующую вторую гармонику (т. е. $B \gg D$), то длинноволновая мода формируется с фазой 3ϕ из-за присутствия члена, пропорционального $\cos 2x \cos(3x + 3\phi) = \frac{1}{2} \cos(x + 3\phi) + \dots$. Таким образом, пространственная фаза паттерна на каждом полном периоде модуляции претерпевает утrocение (с точностью до постоянного фазового сдвига): $\phi_{n+1} = 3\phi_n + \text{const}$.

Другой вариант состоит в том, что функция $A(x)$ может иметь доминирующую четвертую гармонику (т. е. $D \gg B$). Тогда на этапе рождения длинноволновой моды роль «зародыша» играет составляющая, записываемая как $\cos 4x \cos(3x + 3\phi) = \frac{1}{2} \cos(x - 3\phi) + \dots$. Поэтому отображение для фазы получается в виде $\phi_{n+1} = -3\phi_n + \text{const}$.

В силу того, что для пространственной фазы реализуется равномерно растягивающее отображение окружности, характеризуемое положительным показателем Ляпунова $\Lambda = \ln 3 \approx 1.0986$, стробоскопическое отображение, описывающее изменение состояния системы $u_n(x) \equiv u(x, t_n)$ на интервале времени от момента $t_n = nT + \text{const}$ до момента t_{n+1} , будет гиперболическим.

Если варьировать параметры так, чтобы изменялся относительный вес компонент с волновыми числами $k = 2$ и $k = 4$ в функции $A(x)$, то, по-видимому, будут наблюдаться переходы между топологически разными типами поведения.

Конечно, описанный режим работы имеет место при условии правильного подбора параметров. Значение A должно быть задано так, чтобы получить на последовательных полупериодах модуляции неустойчивость для моды с волновым числом $k = 1$ и затухание для моды с $k = 3$ или наоборот. Переменная составляющая $A(x)$ должна быть небольшой по сравнению с амплитудой развитого паттерна, чтобы обеспечивать только вклад в качестве «зародыша» для формирования длинноволнового паттерна. Тем не менее он должен иметь достаточный уровень, чтобы дать начало процессу, достигающему насыщения на временном масштабе T . Аналогичные требования предъявляются к уровню третьей гармоники, которая на соответствующей стадии динамики запускает формирование коротковолнового паттерна. На самом деле эти требования не очень ограничительные: тип динамического поведения, который здесь обсуждается, имеет место в довольно широкой области параметров.

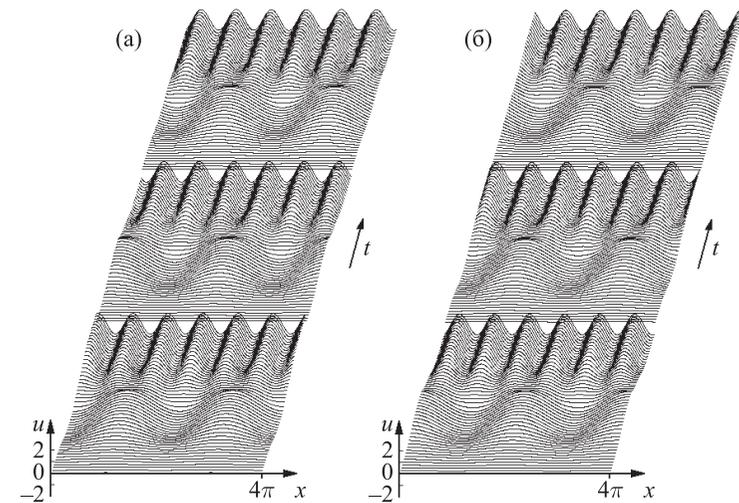


Рис. 18.2. Результаты численного решения уравнения (18.3) с периодическими граничными условиями, представленные в виде трехмерных пространственно-временных диаграмм, для $A_0 = 0.6$, $T = 25$, $L = 4\pi$ для случая $B = 0.03$, $D = 0$ (а) и $B = 0$, $D = 0.03$ (б)

Рис. 18.2 иллюстрирует пространственно-временное поведение системы с периодическими граничными условиями. В одном случае переменная со-

ставляющая функции $A(x)$ определяется второй гармоникой разложения в ряд Фурье, а в другом — четвертой. Приведены типичные зависимости переменной u от координаты x и времени t , отложенных по соответствующим осям координат. Значения параметров, заданные в расчетах, приведены в подписи к рисунку. На обеих диаграммах можно видеть попеременное образование и затухание длинноволновой и коротковолновой структур Тьюринга, и этот процесс повторяется с периодом T . Обратим внимание, что пространственные фазы паттернов, возникающих на последовательных периодах, отличаются и, как можно убедиться, подчиняются хаотическому отображению типа Бернулли. На рис. 18.3 представлены итерационные диаграммы для пространственных фаз. В расчетах на компьютере фазы определяются в моменты времени $t_n = (n + \frac{1}{4})T$ из соотношения $\phi_n = \arg[u(L/2, t_n) + i\partial_x u(L/2, t_n)]$, где пространственная производная $\partial_x u$ получается численным дифференцированием, и результаты представляются в координатах ϕ_n и ϕ_{n+1} . Это эмпирическое отображение соответствует ожидаемому топологическому типу. А именно, один оборот для прообраза соответствует трем оборотам для образа в том же направлении в случае пространственной неоднородности, заданной второй гармоникой, и в обратном направлении в случае четвертой гармоники.

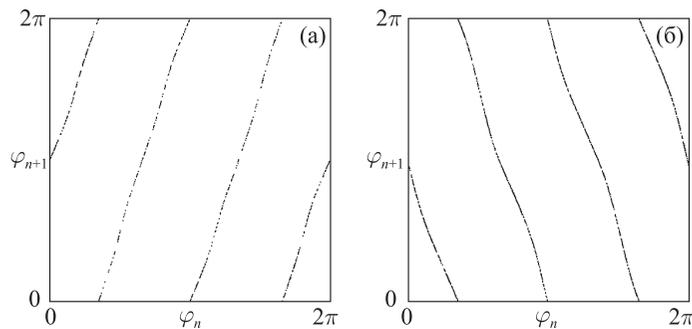


Рис. 18.3. Диаграммы для пространственных фаз структур Тьюринга, вычисленных в моменты времени $t_n = (n + \frac{1}{4})T$, для системы (18.3) с периодическими граничными условиями при $A_0 = 0.6$, $T = 25$, $L = 4\pi$. Панель (а) отвечает случаю $B = 0.03$, $D = 0$, а панель (б) — случаю $B = 0$, $D = 0.03$

Чтобы охарактеризовать хаос количественно и продемонстрировать его грубость, обратимся к результатам вычисления показателей Ляпунова. На

рис. 18.4 показаны первые пять показателей Ляпунова для стробоскопического отображения в зависимости от параметра A_0 для случая $B = 0.03$, $D = 0$. Хаотический режим имеет место в области выше некоторого порогового значения $A_0 \approx 0.38$. В этом режиме присутствует один положительный показатель Ляпунова, который остается почти постоянным в широком диапазоне. В частности, при $A = 0.6$ показатели таковы:

$$\Lambda = \{1.018, -9.34, -9.34, -11.42, -18.64 \dots\}. \quad (18.7)$$

Как и ожидалось, старший показатель близок к $\ln 3$. Из диаграммы видно, что все показатели зависят от параметра плавно, без резких всплесков и провалов, что можно рассматривать как проявление грубости гиперболического хаоса. Размерность аттрактора в стробоскопическом сечении, вычисленная по формуле Каплана–Йорке, при $A_0 = 0.6$ составляет $D_{KY} \approx 1.11$.

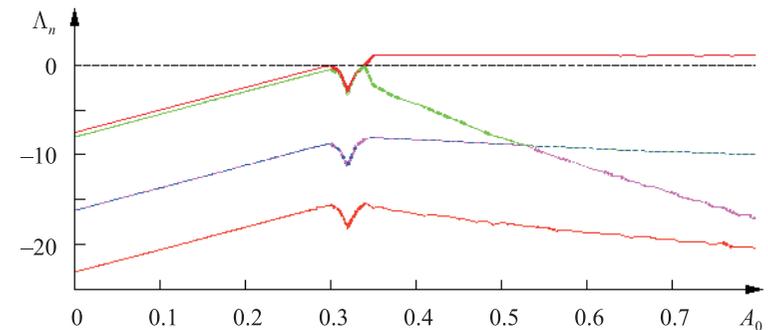


Рис. 18.4. Наибольшие пять показателей Ляпунова в зависимости от параметра A_0 для стробоскопического отображения системы (18.3) с периодическими граничными условиями при $B = 0.03$, $T = 25$, $L = 4\pi$

Для случая, когда пространственная неоднородность определяется четвертой гармоникой $B = 0$, $D = 0.03$, спектр показателей Ляпунова при $A = 0.6$ следующий:

$$\Lambda = \{1.084, -9.44, -9.44, -11.97, -18.94 \dots\}. \quad (18.8)$$

Здесь снова старший показатель близок к $\ln 3$, а остальные отрицательны. Размерность по формуле Каплана–Йорке составляет $D_{KY} \approx 1.12$.

В работе [Kurptsov et al., 2012] проведена проверка гиперболичности путем анализа статистического распределения углов пересечения устойчи-

вых и неустойчивых подпространств на принадлежащей аттрактору траектории, что соответствует методике, описанной в главе 11. Использовался вариант метода, подразумевающий обращение с ортогональным дополнением к сжимающемуся подпространству, размерность которого мала, в отличие от самого сжимающегося подпространства, имеющего высокую (формально бесконечную) размерность [Kuznetsov, 2012]. В данном случае расширяющееся подпространство одномерное, так что достаточно вычислить единственный вектор возмущения при проходе опорной траектории в прямом времени и единственный вектор сопряженной задачи при проходе в обратном времени, найти скалярные произведения этих векторов в точках траектории и проверить, насколько близко к нулю может оказаться его абсолютная величина d_1 . Для стробоскопического отображения системы (18.3) с параметрами, указанными в подписи к рис. 18.2а, было обработано 10^5 точек на аттракторе, и при этом оказалось, что распределение сосредоточено в области $(1-5 \times 10^{-5}) < d \leq 1$. Это означает, что растягивающее направление всегда почти ортогонально по отношению к сжимающемуся подпространству. Тем самым предположение о гиперболической природе аттрактора подтверждается.

18.2.2. Конечномерная модель

Для системы, заданной модифицированным уравнением Свифта–Хохенберга

$$\partial_t u + [1 + \kappa^2(t) \partial_x^2]^2 u = (A_0 + B \cos 2x + D \cos 4x)u - u^3 \quad (18.9)$$

с периодическими граничными условиями, можно построить конечномерную модель. Будем считать, что длина системы $L = 2\pi$, и примем во внимание, что в динамике в основном участвуют только моды с волновыми числами $k = 1$ и $k = 3$. Сделаем в уравнении (18.9) подстановку:

$$u = a_1(t) \cos x + b_1(t) \sin x + a_3(t) \cos 3x + b_3(t) \sin 3x, \quad (18.10)$$

что дает

$$\begin{aligned} & \dot{a}_1 \cos x + \dot{b}_1 \sin x + \dot{a}_3 \cos 3x + \dot{b}_3 \sin 3x + a_1 [1 - \kappa^2]^2 \cos x + \\ & + b_1 [1 - \kappa^2]^2 \sin x + a_3 [1 - 9\kappa^2]^2 \cos 3x + b_3 [1 - 9\kappa^2]^2 \sin 3x = \\ & = (a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x)(A_0 + B \cos 2x + D \cos 4x) - \\ & - (a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x)^3. \end{aligned} \quad (18.11)$$

Теперь мы должны сохранить в правой части только члены такой же пространственной структуры, как у членов, присутствующих в левой части, и приравнять те и другие. Для этого сначала умножаем уравнение (18.11) на $\cos x$ и интегрируем по пространственному периоду 2π , затем повторяем ту же процедуру, но с умножением на $\sin x$, $\cos 3x$ и $\sin 3x$. Выписывая каждый раз неисчезающие члены, получаем

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 + [1 - \kappa^2]^2 a_1 &= [A_0 - \frac{3}{4}(a_1^2 + b_1^2 + 2a_3^2 + 2b_3^2 + a_1 a_3 + 2b_1 b_3)]a_1 + \\ &+ (\frac{3}{4}b_1^2 + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D)a_3 + \frac{1}{2}Ba_1, \\ \dot{b}_1 + [1 - \kappa^2]^2 b_1 &= [A_0 - \frac{3}{4}(a_1^2 + b_1^2 + 2a_3^2 + 2b_3^2 - 2a_1 a_3 - b_1 b_3)]b_1 - \\ &- (\frac{3}{4}a_1^2 + \frac{1}{2}D)b_3 + \frac{1}{2}B(-b_1 + b_3), \\ \dot{a}_3 + [1 - 9\kappa^2]^2 a_3 &= [A_0 - \frac{3}{4}(2a_1^2 + 2b_1^2 + a_3^2 + b_3^2)]a_3 + \\ &+ (\frac{3}{4}b_1^2 - \frac{1}{4}a_1^2 + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D)a_1 \\ \dot{b}_3 + [1 - 9\kappa^2]^2 b_3 &= [A_0 - \frac{3}{4}(2a_1^2 + 2b_1^2 + a_3^2 + b_3^2)]b_3 - \\ &- (\frac{3}{4}a_1^2 - \frac{1}{4}b_1^2 - \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D)b_1. \end{aligned} \quad (18.12)$$

Напомним, что параметр κ следует считать зависящим от времени согласно выражению (18.5).

Динамика модели (18.12) иллюстрируется на рис. 18.5 для двух случаев, когда пространственная неоднородность задана в виде второй и четвертой гармоники. В обоих случаях на графике можно видеть переключения после каждого очередного полупериода $T/2$. Различные высоты горбов у временных зависимостей a_1 и b_1 или a_3 и b_3 обусловлены вариациями пространственной фазы. При стробоскопическом рассмотрении динамика фазы отвечает троекратно растягивающему отображению окружности. Чтобы в этом убедиться, на рис. 18.6 приводятся диаграммы для фаз, вычисленных по формуле $\phi_n = \arg[a_1(t_n) + ib_1(t_n)]$. Как и для исходной модели, из графиков видно, что один полный оборот для прообраза соответствует трем оборотам для образа, причем в прямом направлении в первом варианте и в обратном направлении во втором.

На рис. 18.7 показан график показателей Ляпунова для стробоскопического отображения системы (18.12) в зависимости от параметра A_0 для случая $B = 0.03$, $D = 0$, $T = 25$. Как и в исходной распределенной системе, хаотический режим имеет место в области выше некоторого порогового значения параметра A_0 , и в этом режиме присутствует один положительный показатель Ляпунова, остающийся практически постоянным в широ-

ком диапазоне по параметру и близкий к $\ln 3$. В частности, при $A = 0.6$ показатели таковы:

$$\Lambda = \{1.083, -12.5, -804.7, -806.5\}. \quad (18.13)$$

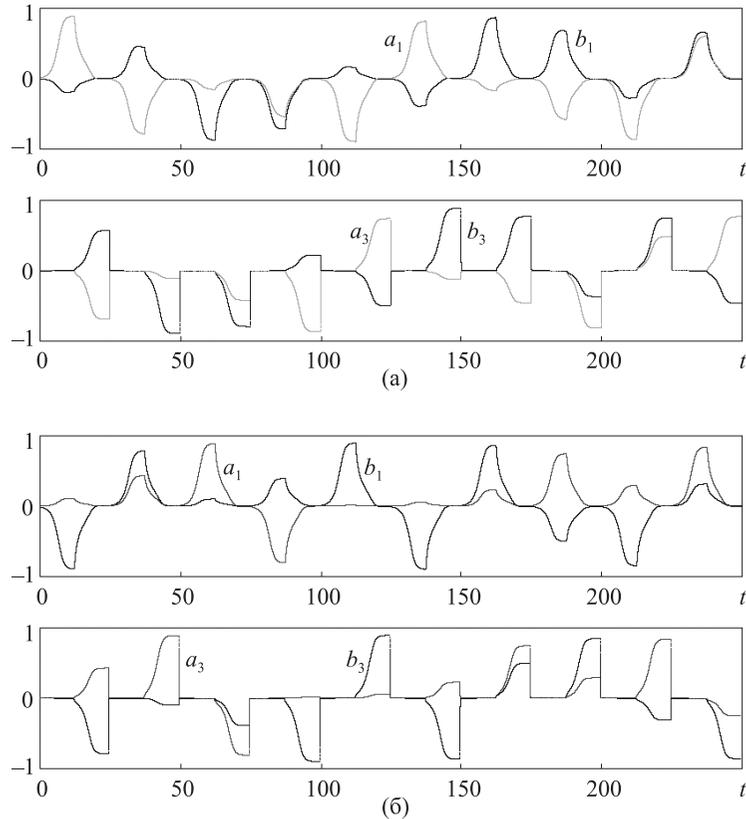


Рис. 18.5. Зависимости амплитудных коэффициентов от времени, полученные в результате численного решения уравнений (18.12) при $A_0 = 0.6$, $T = 25$ в случае $B = 0.03$, $D = 0$ (а) и $B = 0$, $D = 0.03$ (б)

Интересно сравнить результаты расчета показателей Ляпунова для конечномерной модели и для исходной распределенной системы (18.8). Как видно из сопоставления рис. 18.7 и 18.4, у распределенной системы присутствуют избыточные отрицательные показатели. Очевидно, им соответствуют

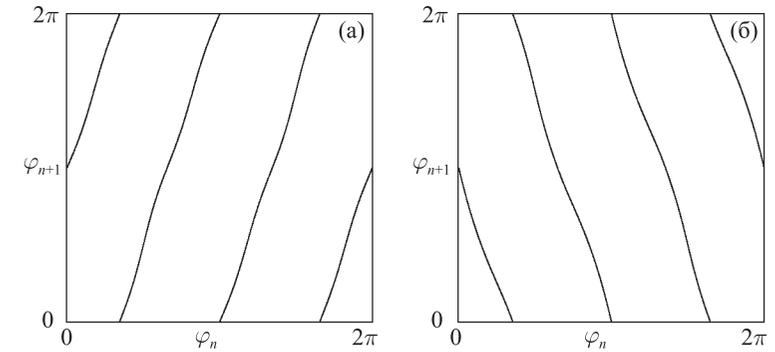


Рис. 18.6. Диаграммы для фаз, вычисленных по формуле $\phi_n = \arg[a_1(t_n) + ib_1(t_n)]$ в моменты времени $t_n = (n + \frac{1}{4})T$, для системы (18.12) при $A_0 = 0.6$, $T = 25$, $L = 4\pi$. Панель (а) отвечает случаю $B = 0.03$, $D = 0$, а панель (б) — случаю $B = 0$, $D = 0.03$

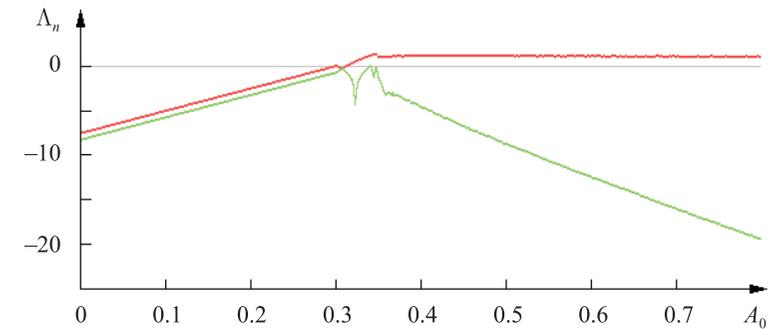


Рис. 18.7. Показатели Ляпунова в зависимости от параметра A_0 для стробоскопического отображения системы (18.12) при $B = 0.03$, $D = 0$, $T = 25$, $L = 4\pi$. В масштабе графика не показаны еще два отрицательных показателя, очень большие по абсолютной величине

возмущения, имеющие пространственную структуру, отличную от мод, принятых во внимание при выводе уравнений конечномерной модели. При кратном увеличении длины распределенной системы количество таких избыточных показателей будет расти.

Тестирование конечномерной модели по методике главы 11 вновь показывает, что растягивающее и сжимающее подпространства почти ортогональны, т. е. гиперболичность подтверждается.

18.2.3. Система с фиксированными граничными условиями

Можно ли наблюдать гиперболический хаос структур Тьюринга при конфигурации, отличной от кольцевой геометрии, например для фиксированных граничных условий? Специфика кольцевой геометрии в том, что пространственная фаза паттерна в каждый момент может быть совершенно произвольной, принимая без каких-либо ограничений те значения, которые диктует хаотическая динамика отображения Бернулли. Фиксированные граничные условия могут этому помешать, поскольку вблизи концов системы паттерну навязывается некоторая определенная пространственная фаза. Можно попытаться преодолеть это препятствие, подобрав длину системы достаточно большой, чтобы влияние концов на центральные участки нивелировалось, но все же не настолько большой, чтобы возникла неустойчивость на второй и следующих модах, что вело бы к появлению многомерного аттрактора.

Рассмотрим уравнение (18.9) с нулевыми граничными условиями:

$$u(0, t) = 0, u_x(0, t) = 0, u(L, t) = 0, u_x(L, t) = 0. \quad (18.14)$$

На рис. 18.8 показана пространственно-временная диаграмма такой системы при $A_0 = 0.6$, $T = 25$, $L = 8\pi$, $B = 0.03$, $D = 0$: приведена зависимость переменной u от координаты x и времени t . Как и в ранее рассмотренных случаях, наблюдается попеременное образование и затухание длинноволновой и коротковолновой структур Тьюринга. В данном случае надо обратить внимание на пространственные фазы паттернов в центральной части системы. Обработка данных показывает, что они подчиняются хаотическому отображению устроения типа Бернулли. На рис. 18.9 представлены итерационные диаграммы для пространственных фаз, определяемых в моменты времени $t_n = (n + \frac{1}{4})T$ из соотношения $\phi_n = \arg[u(L/2, t_n) + iu_x(L/2, t_n)]$. На рис. 18.10 показан портрет аттрактора в стробоскопическом сечении в двумерной проекции на плоскость переменных $(u(L/2, t_n), u_x(L/2, t_n))$. У аттрактора различима поперечная канторова структура, характерная для соленоида Смейла–Вильямса.

Расчеты показывают, что в обширной области параметров система имеет единственный положительный показатель Ляпунова, величина которого почти не зависит от параметра A_0 и близка к $\ln 3$ (см. рис. 18.11). В частности, при $A = 0.6$ показатели Ляпунова составляют

$$\Lambda = \{1.047, -1.59, -3.92, -4.97, -6.16, \dots\},$$

и оценка размерности Каплана–Йорке дает 1.66.

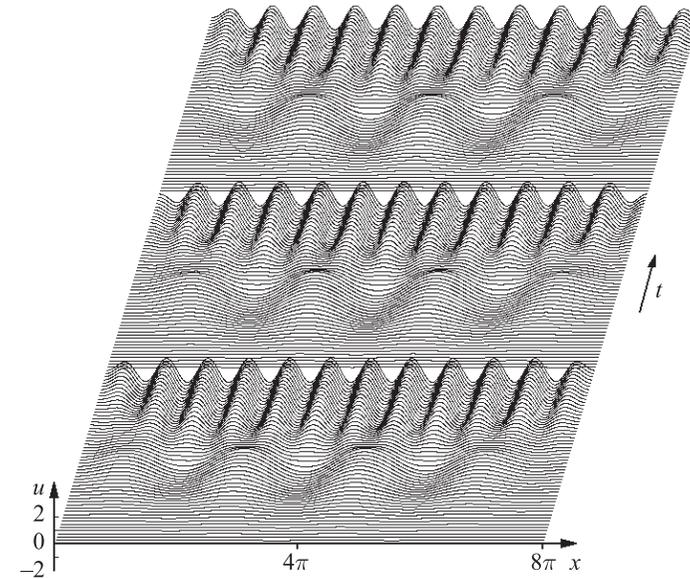


Рис. 18.8. Результаты численного решения уравнения (18.3) с нулевыми граничными условиями, представленные в виде трехмерных пространственно-временных диаграмм, для $A_0 = 0.6$, $T = 25$, $L = 8\pi$ для случая $B = 0.03$, $D = 0$

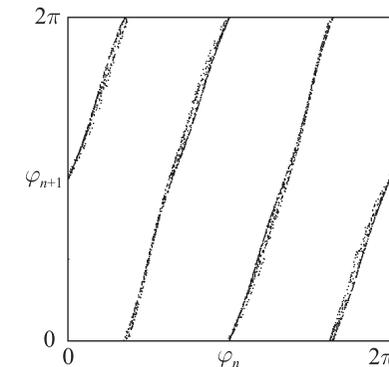


Рис. 18.9. Диаграммы для пространственных фаз структур Тьюринга, вычисленных в моменты времени $t_n = (n + \frac{1}{4})T$, для системы (18.3) с нулевыми граничными условиями. Значения параметров: $A_0 = 0.6$, $T = 25$, $B = 0.03$, $D = 0$, $L = 8\pi$

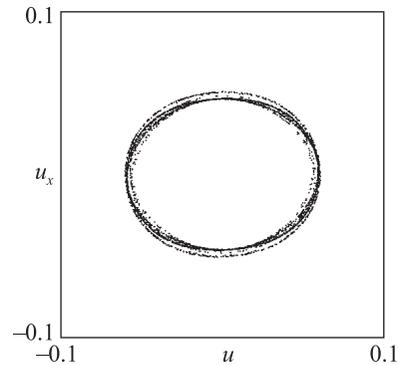


Рис. 18.10. Портрет аттрактора стробоскопического отображения в проекции на плоскость переменных $(u(L/2, t_n), u_x(L/2, t_n))$, где $t_n = (n + \frac{1}{4})T$, для системы (18.3) с нулевыми граничными условиями. Значения параметров те же, что и на рис. 8.9

Тест на гиперболичность в отношении статистики углов пересечения устойчивых и неустойчивых подпространств в точках траектории на аттракторе показывает, что характеристическая величина d_1 хорошо отделена от нуля, хотя распределение в данном случае шире, чем в случае периодических граничных условий ($0.93 < d_1 < 1$).

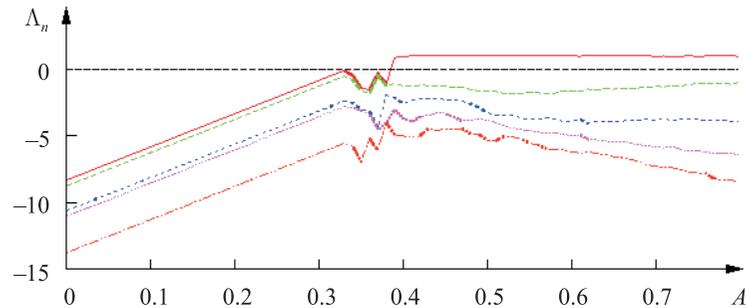


Рис. 18.11. Пять наибольших показателей Ляпунова в зависимости от параметра A для стробоскопического отображения системы (18.3) при $t_n = (n + \frac{1}{4})T$ для нулевых граничных условий при $B = 0.03$, $D = 0$, $T = 25$, $L = 8\pi$

Подводя итог этой главы, заключаем, что гиперболическая хаотическая динамика может возникать в распределенных системах за счет взаимодей-

ствия пространственных структур с различной длиной волны. Хаотическое поведение пространственных фаз паттернов в соответствии с трехкратно растягивающим отображением окружности было продемонстрировано здесь для уравнения в частных производных типа Свифта–Хохенберга и для редуцированной модели, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Впрочем, данный тип динамики не следует рассматривать, как специфичный только для модели Свифта–Хохенберга. Ингредиенты, необходимые для реализации механизма умножения фазы, а именно чередование паттернов вследствие модуляции параметров, нелинейность и пространственная неоднородность, могут быть найдены или созданы во многих пространственно распределенных системах. Тем самым открываются перспективы для поиска и построения моделей с гиперболическим хаосом, относящихся к образованию структур, например, в динамике жидкости (рябь Фарадея, конвекционные валы), при механических колебаниях (параметрические колебания струны), в системах реакция–диффузия (структуры Тьюринга, структуры, индуцированные адвекцией).

Часть V

**Электронные схемы:
моделирование
и эксперименты**

Глава 19

Электронные схемы с гиперболическим хаосом в программной среде Multisim

На основе систем с однородно гиперболическими аттракторами, о которых рассказывалось в предыдущих главах этой книги, можно говорить о создании реально функционирующих устройств, демонстрирующих грубый хаос, например в электронике, с перспективами применения в схемах скрытой коммуникации, шумовой локации, для генерации случайных чисел, в криптографии. Имея в виду разработку электронных устройств, естественно обратиться к программным средствам схемотехнического моделирования. В настоящей главе обсуждаются несколько схем, представляющих собой динамические системы с аттракторами типа Смейла–Вильямса и Плыкина, которые реализованы в программной среде NI Multisim. Первые две схемы отвечают идеологии построения физических систем, когда используются обычные радиодетали — резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности, транзисторы, диоды, источники постоянного и переменного напряжения, а цель состоит, скорее, в реализации интересующего типа динамики на качественном уровне, нежели в точном следовании исходным уравнениям. Остальные схемы, которые будут рассмотрены, конструируются на базе другого подхода, подразумевающего по возможности точное воспроизведение динамических уравнений, с привлечением элементов, традиционных для техники аналогового моделирования, таких как интеграторы, умножители, сумматоры и пр. Конечно, грань между обоими подходами несколько условна и оба они указывают конкретные пути к построению реальных радиотехнических устройств, выступающих как генераторы структурно устойчивого хаоса. В методическом плане материал этой главы может быть интересен для обучения студентов и аспирантов, специализирующихся в области радиофизики и электроники, принципам построения и анализа систем со сложной динамикой.

19.1. Программный продукт Multisim

Удобным и популярным современным средством схемотехнического моделирования является программный продукт Multisim [Хернитер, 2006; Макаренко, 2008; Варзарев, 2008]. Его первоначальная версия была выпущена в 1995 г. канадской компанией Interactive Image Technologies под названием Electronics Workbench («Электронный верстак»). Начиная с 2005 г., усовершенствованные версии программного продукта создаются компанией National Instruments (куда первоначальная компания-разработчик вошла как подразделение) под названием NI Multisim.

Работая с программой NI Multisim, пользователь составляет и изображает графически на экране компьютера электронную схему в обычном виде, следуя стандартным обозначениям, принятым в радиотехнике и электронике. Радиодетали берутся из имеющейся в распоряжении библиотеки электронных компонентов, содержащей резисторы, конденсаторы, индуктивности, полупроводниковые диоды и транзисторы, разнообразные элементы аналоговой техники — операционные усилители, сумматоры, умножители, цифровые и аналого-цифровые элементы. Предусмотрено использование обширного набора виртуальных приборов, позволяющих выполнять измерения или отслеживать изменение различных электрических величин, в том числе генераторы сигналов, осциллографы, анализатор спектра. Обращение с ними приближено к работе с реальными приборами в лаборатории: подключив виртуальный прибор к соответствующей точке схемы, можно получить информацию о характеристиках процессов, протекающих при функционировании схемы.

Представленные в настоящей главе результаты получены с использованием приобретенной Саратовским филиалом ИРЭ РАН лицензионной версии продукта NI Multisim 10.1.1.

19.2. Системы с аттрактором Смейла–Вильямса

19.2.1. Система на основе неавтономных осцилляторов ван дер Поля

В разделе 7.2 обсуждалась система из двух осцилляторов ван дер Поля, возбуждающихся попеременно вследствие периодической модуляции параметра, обусловленной внешним воздействием, с аттрактором Смейла–Вильямса в четырехмерном отображении Пуанкаре. В лабораторном экс-

перименте подобное устройство было реализовано и исследовано в работе [Кузнецов и Селезнев, 2006]. Здесь мы воспроизведем эту схему и рассмотрим результаты ее моделирования в программной среде Multisim.

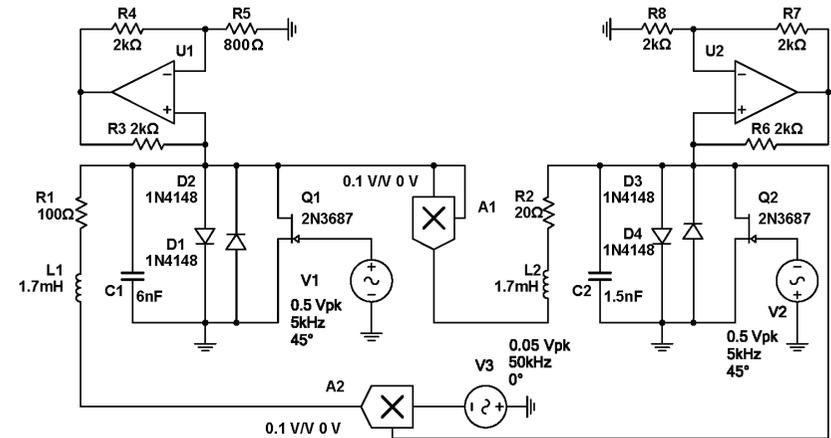


Рис. 19.1. Принципиальная схема устройства, в котором в отображении за период модуляции ($T = 0.2$ мс) реализуется аттрактор Смейла–Вильямса

Обратимся к показанной на рис. 19.1 схеме, составленной из двух подсистем в виде автогенераторов на основе колебательных контуров, один из которых образован катушкой индуктивности $L1$ и емкостью $C1$, а второй, соответственно элементами $L2$ и $C2$. Поскольку индуктивности одинаковы, а емкость во втором контуре в четыре раза меньше, собственные частоты находятся в отношении 1:2, и при указанных на схеме номиналах они равны приблизительно 50 кГц и 100 кГц. Отрицательное сопротивление в каждый контур вносится элементом на основе операционного усилителя (на схеме соответственно $U1$ и $U2$).¹ Нелинейная проводимость, обеспечивающая увеличение потерь энергии в контурах с ростом амплитуды колебаний, вводится элементами из полупроводниковых диодов в виде параллельно соединенных ветвей с противоположным направлением пропускания тока ($D1$, $D2$ и $D3$, $D4$). Для модуляции параметра, ответственного за возникновение автоколебаний, в каждый контур включен поле-

¹ Для получения сведений, касающихся схемотехнических вопросов, включая функционирование и типовое применение операционных усилителей, можно рекомендовать книги и пособия [Хоровиц и Хилл, 1986; Ремпен и др., 2004].

вой транзистор, проводимость которого в цепи сток–исток управляется подаваемым на затвор переменным напряжением на частоте 5 кГц. Для модуляции параметра в двух осцилляторах используются источники переменного напряжения V1 и V2 с противоположной полярностью мгновенного напряжения. На одном полупериоде модуляции первый осциллятор находится в режиме генерации колебаний, а второй под порогом генерации. На следующем полупериоде они меняются ролями. Первый генератор действует на второй через посредство умножителя A1, выдающего на выходе квадрат входного сигнала. Порождаемая при этом вторая гармоника служит для стимуляции возбуждения второго осциллятора, когда приходит время его выхода за порог генерации. В свою очередь, второй генератор действует на первый через посредство элемента A2, осуществляющего смещение поступающего сигнала и вспомогательного сигнала на частоте 50 кГц от источника напряжения V3. При этом появляется составляющая на разностной частоте, которая действует на первый осциллятор и стимулирует в нем начало генерации.

На рис. 19.2 показаны графики реализаций напряжения на конденсаторах C1 (верхняя зависимость) и C2 (нижняя зависимость), полученные при моделировании в среде Multisim с использованием виртуального двулучевого осциллографа. Как можно видеть, в соответствии с приведенным выше качественным описанием имеет место поочередное возбуждение колебаний в контурах L1, C1 и L2, C2.

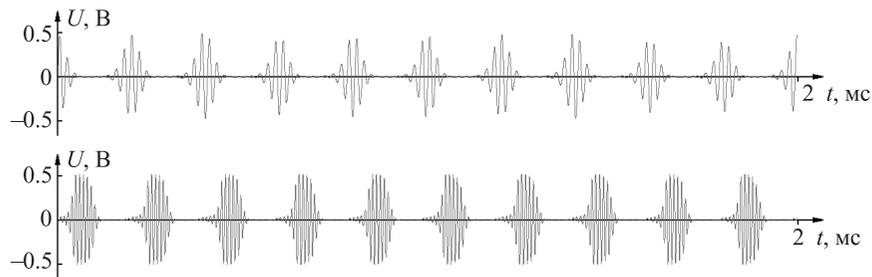


Рис. 19.2. Реализации напряжения на конденсаторах C1 (верхняя зависимость) и C2 (нижняя зависимость)

Чтобы убедиться, что переход к каждой новой стадии активности сопровождается удвоением циклической переменной — фазы колебаний, поступим следующим образом. Подключим осциллограф так, чтобы один луч управлялся напряжением на конденсаторе C1, а второй — напряжением на

резисторе R1. В среде Multisim с помощью приложения Grapher предусмотрена запись в файл данных, получаемых в процессе моделирования, что дает возможность для их последующей цифровой обработки. Шаг выборки по времени надо задать равным периоду модуляции ($T = 0.2$ мс). Чтобы моменты выборки отвечали стадиям активности первого осциллятора, можно подобрать фазовый параметр источников переменного напряжения V1 и V2. (На схеме рис. 19.1 этот параметр задан равным 45° , что оказывается приемлемым.) Записанный файл обрабатывается внешней программой, составленной на удобном для пользователя языке (автор использовал Free Basic IDE). Сначала оба временных ряда — для напряжений на конденсаторе и резисторе U_C и U_R — нормируются так, чтобы сумма квадратов элементов была для них одинакова. Затем для каждой пары величин U_C^n, U_R^n , относящихся к одному и тому же моменту времени nT , определяем фазу как $\phi_n = \arg(U_C^n + iU_R^n)$ и приводим ее к интервалу от 0 до 2π .

На рис. 19.3 показан график, на котором обработанные данные представлены в виде зависимости ϕ_{n+1} от величин ϕ_n . Как можно видеть, он соответствует растягивающему отображению окружности типа Бернулли. В самом деле, один полный обход окружности для прообраза отвечает двум обходам для образа, т. е. требуемое для аттрактора Смейла–Вильямса условие выполняется.

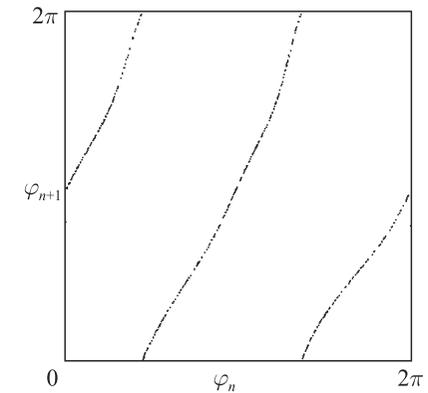


Рис. 19.3. Эмпирическая итерационная диаграмма для фаз

То же самое подключение осциллографа можно использовать для получения портрета аттрактора в проекции на фазовую плоскость первого

осциллятора, если переключить его в режим, в котором развертка по времени не производится, а отклонение луча по горизонтали и вертикали управляется входными напряжениями U_C и U_R . Полученный таким образом портрет аттрактора показан на рис. 19.4а. Для построения аттрактора в стробоскопическом сечении можно воспользоваться записанными в файл данными, использованными при построении диаграммы для фаз, представив их графически в координатах U_C , U_R (см. рис. 19.4б). Здесь можно видеть объект, соответствующий соленоиду Смейла–Вильямса, с характерной образуемой его витками поперечной канторовой структурой.

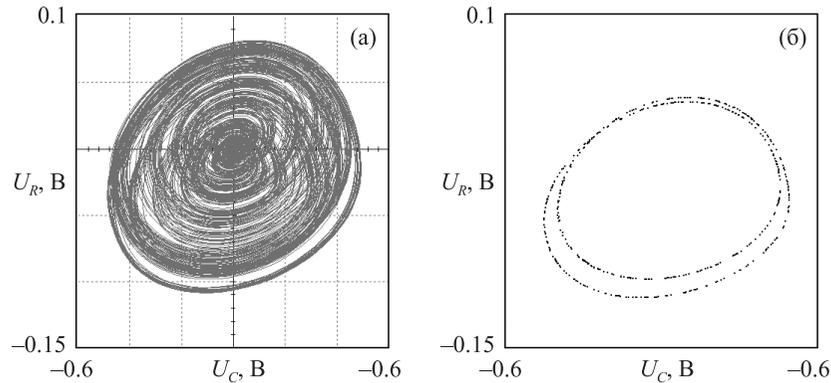


Рис. 19.4. Портрет аттрактора в проекции из расширенного фазового пространства системы (а) и его стробоскопическое сечение (б). По горизонтальной и вертикальной осям отложены соответственно, напряжение на конденсаторе C1 и на резисторе R1

Рис. 19.5 иллюстрирует спектры сигналов, генерируемых обеими подсистемами в процессе функционирования схемы, которые получены с помощью доступного в среде Multisim виртуального прибора — анализатора спектра. При его использовании нужно правильно установить рабочий частотный диапазон и разрешающую способность анализа, линейный или логарифмический масштаб.

Спектры на рис. 19.5 даны в логарифмическом масштабе: по оси ординат отложена спектральная плотность мощности в децибелах. Панель (а) отвечает спектру сигнала от первого осциллятора (напряжение на конденсаторе C1), а панель (б) — сигналу от второго осциллятора (напряжение на конденсаторе C2). Спектр, как можно видеть, сплошной, как это и должно быть для случайного сигнала. Для первого осциллятора он сосредоточен по большей части в окрестности его собственной частоты 50 кГц, а для

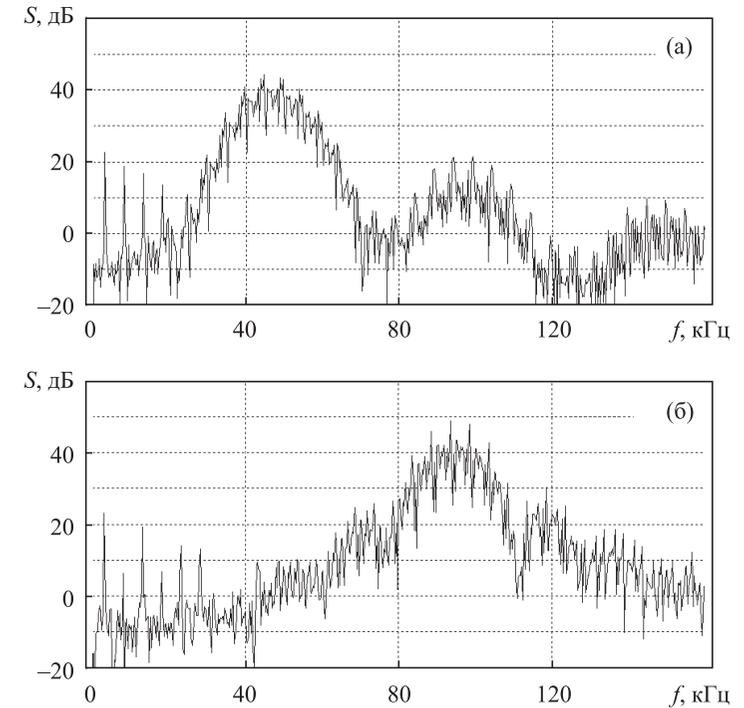


Рис. 19.5. Спектры колебаний напряжения на конденсаторах C1 (а) и C2 (б)

второго — в окрестности удвоенной частоты 100 кГц. В низкочастотной части спектра заметны дискретные компоненты на частоте 5 кГц и ее гармониках, обусловленные присутствием периодической модуляции параметров с этой частотой.

19.2.2. Система на основе неавтономного осциллятора ван дер Поля с дополнительной цепью запаздывающей обратной связи

Как было показано в главе 17, растягивающее отображение окружности для фаз последовательных стадий колебательной активности можно реализовать в системе с запаздыванием, имея единственный осциллятор, попеременно демонстрирующий стадии возбуждения и затухания. Стимуляция возбуждения каждый раз производится сигналом, поступившим по

цепи обратной связи от предыдущей стадии активности, с фазой, претерпевшей преобразование типа Бернулли. В лабораторном эксперименте такое устройство было реализовано и исследовано в работе [Кузнецов и Пономаренко, 2008]. Эту схему можно воспроизвести и в программной среде Multisim.

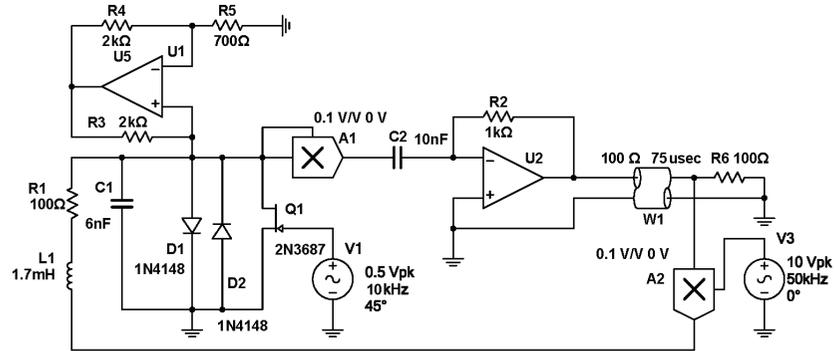


Рис. 19.6. Принципиальная схема устройства с запаздывающей обратной связью

В схеме на рис. 19.6 автогенератор реализован на основе колебательного контура, образованного катушкой индуктивности $L1$ и емкостью $C1$. При указанных на схеме номиналах собственная частота приблизительно 50 кГц. Отрицательное сопротивление вносится элементом на основе операционного усилителя $U1$. Нелинейная проводимость, обеспечивающая увеличение потерь энергии с ростом амплитуды колебаний, вводится элементом из полупроводниковых диодов $D1$ и $D2$. Для модуляции параметра в контур включен полевой транзистор, проводимость которого в цепи сток–исток управляется подаваемым на затвор переменным напряжением от источника $V1$ с частотой 10 кГц. На одном полупериоде модуляции осциллятор находится в режиме генерации колебаний, а на другом — под порогом генерации. Производимый им сигнал возводится в квадрат множителем $A1$, подвергается преобразованию посредством дифференциатора на конденсаторе $C2$, резисторе $R2$ и операционном усилителе $U2$, и поступает в линию задержки $W1$. На ее выходе присутствует резистор $R6$, соответствующий по величине волновому сопротивлению линии задержки, что обеспечивает согласованную нагрузку и отсутствие отражений. С помощью умножителя $A2$ сигнал с выхода линии задержки смешивается со вспомогательным сигналом частоты 50 кГц от источника $V3$. Полученный

сигнал используется для резонансной стимуляции возбуждения осциллятора на следующей стадии активности. Величина запаздывания в линии задержки $\tau = 75$ мкс составляет $\frac{3}{4}$ периода модуляции. Этим обеспечивается поступление сигнала, испущенного на стадии активности, через цепь обратной связи в нужный момент, предшествующий наступлению очередной стадии активности.

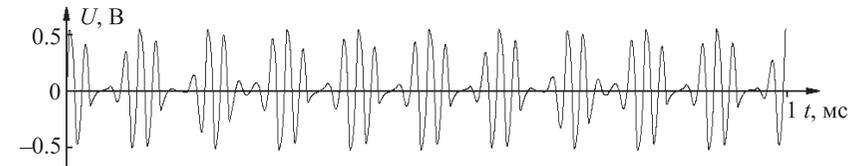


Рис. 19.7. Реализации напряжения на конденсаторе $C1$

На рис. 19.7 показан график напряжения на конденсаторе $C1$ в зависимости от времени, полученный при моделировании в среде Multisim с использованием виртуального осциллографа. Как можно видеть, в контуре $L1$, $C1$ имеет место попеременное возбуждение и затухание колебаний. При этом фаза высокочастотного заполнения от одной эпохи активности к другой изменяется в соответствии с хаотическим отображением — растягивающим отображением окружности. Чтобы в этом убедиться, подключим осциллограф так, чтобы один луч управлялся напряжением на конденсаторе $C1$, а второй — напряжением на резисторе $R1$, и запишем данные в файл с шагом выборки по времени, равным периоду модуляции $T = 0.1$ мс. Затем файл обрабатывается внешней программой так же, как для предыдущей схемы. На рис. 19.8 показан график зависимости значений ϕ_{n+1} от величин ϕ_n , соответствующий, как можно видеть, отображению типа Бернулли.

На рис. 19.9 показаны портреты аттрактора в проекции из бесконечномерного пространства состояний системы с запаздыванием на плоскость переменных U_R , U_C . Портрет на диаграмме (а) получается переключением осциллографа в режим, в котором эти напряжения управляют отклонением луча по горизонтали и вертикали. Для изображения аттрактора в стробоскопическом сечении привлекается файл данных, использованный при построении диаграммы для фаз: с помощью внешней программы данные представляются графически в координатах U_C , U_R . Полученный объект, показанный на диаграмме (б), соответствует по виду солению Смейла–Вильямса.

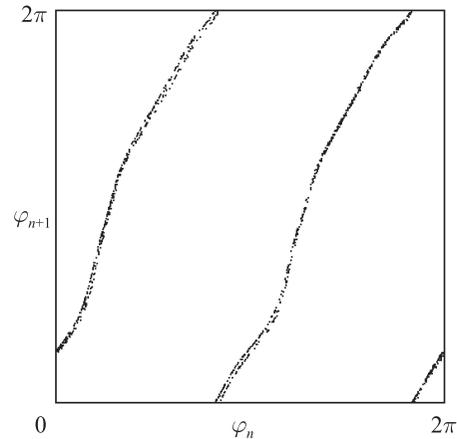


Рис. 19.8. Эмпирическая итерационная диаграмма для фаз

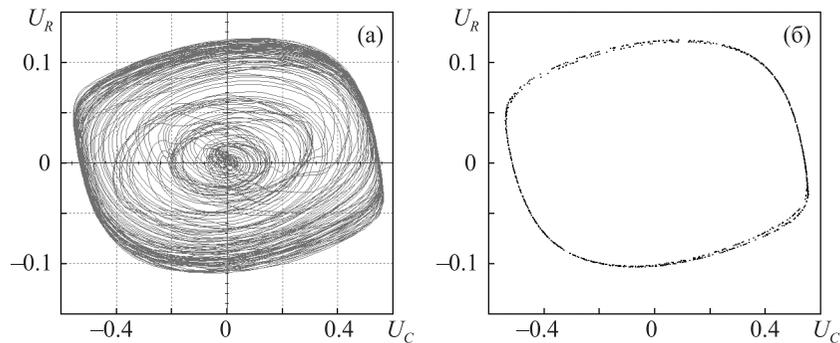


Рис. 19.9. Портрет аттрактора в проекции из расширенного фазового пространства системы (а) и в стробоскопическом сечении (б). По горизонтальной и вертикальной осям отложены соответственно напряжение на конденсаторе $C1$ и на резисторе $R1$

На рис. 19.10 показан спектр сигнала в логарифмическом масштабе, построенный с помощью анализатора спектра, для сигнала, представляющего собой напряжение на конденсаторе $C1$. Спектр является сплошным и сосредоточен по большей части в окрестности собственной частоты осциллятора 50 кГц. В низкочастотной части спектра заметны дискретные компоненты на частоте 5 кГц и ее гармониках, обусловленные присутствием периодической модуляции параметров с этой частотой.

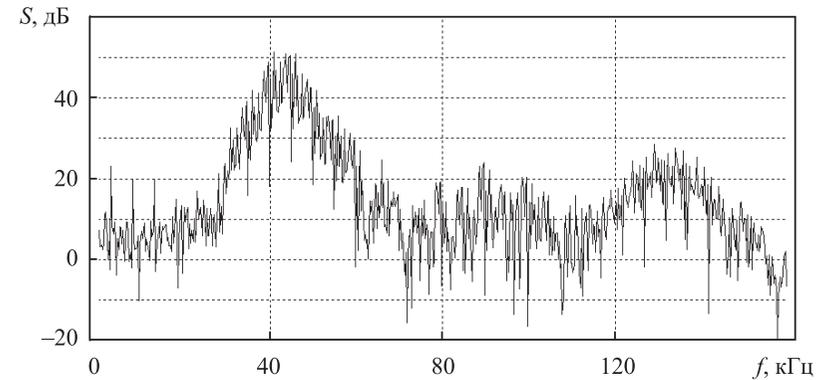


Рис. 19.10. Спектр колебаний напряжения на конденсаторе $C1$

19.2.3. Аналоговое устройство с аттрактором Смейла–Вильямса. Неавтономная система

Рассмотрим теперь аналоговое устройство, динамика которого специально организована так, чтобы получить соответствие с геометрической конструкцией соленоида Смейла–Вильямса, подразумевающей определенного вида деформацию тороидальной области в фазовом пространстве, как описано в главе 2. Отправным пунктом служит система, обсуждавшаяся в разделе 6.1, но здесь будет предпринята определенная ее модификация с целью упрощения схемотехнической реализации. Отметим, что это система с минимальной размерностью фазового пространства, при которой вообще возможно присутствие аттрактора Смейла–Вильямса.

В конструируемой неавтономной системе мгновенное состояние будет даваться вектором (x, y, z) , и на каждом периоде внешнего воздействия присутствует три этапа динамической эволюции. На первом этапе обеспечиваются затухание переменной z к нулю и эволюция переменных x, y к единичной окружности. Область в форме тора отвечает окрестности этой единичной окружности. На втором этапе в пространстве (x, y, z) осуществляется дифференциальное вращение вокруг оси x с угловой скоростью, линейно зависящей от x и обращающейся в ноль при $x=0$. При этом на краях угловая скорость должна быть такой, чтобы область, располагавшаяся изначально около единичной окружности, приняла в проекции на плоскость (x, y) форму восьмерки. На последней третьей стадии плоскость, где

лежала «восьмерка», претерпевает перегиб, и благодаря поперечному сплющиванию по z и смещению по x обе половинки «восьмерки» занимают положение, обеспечивающее на следующем периоде вложение деформированной фигуры в исходную область в виде двойной петли.

Уравнения системы имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x(1 - x^2 - y^2) - \frac{\pi}{2} \xi_2(t)z, \\ \dot{y} &= \mu y(1 - x^2 - y^2) - \frac{\pi}{2} \pi \xi_1(t)xz - \xi_2(t)[2y - 3(x^2 + z^2) + b], \\ \dot{z} &= -\gamma z + \frac{\pi}{2} \xi_1(t)xy + \frac{\pi}{2} \xi_2(t)x, \end{aligned} \quad (19.1)$$

где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — периодические функции времени, осуществляющие включение и выключение процессов, которые отвечают за динамику на второй и третьей стадиях. Период T примем равным 10, полагая, что функция $\xi_2(t)$ равна 1 в конце каждого периода на интервале времени единичной протяженности и нулю — на остальной части периода. Функция $\xi_1(t)$ равна 1 на предшествующем единичном временном интервале и нулю на остальной части периода. Остальные параметры: $\mu = 0.3$, $a = 1.5$, $b = 0.9$, $\gamma = 0.2$, что обеспечивает желаемый тип динамики.

Схема устройства показана на рис. 19.11. Динамические переменные x , y , z отвечают выходным сигналам интеграторов на операционных усилителях U1, U2, U3 и представляют собой напряжения на конденсаторах C1, C2, C3, измеренные в вольтах. За единицу времени принят интервал $\Delta t = RC = 0.1$ мс, где C — значение емкостей C1, C2, C3, а $R = 100$ кОм. Период T составляет 10 единиц, т. е. 1 мс. Схема содержит ключи J1, J2, J3, J4, которые открываются и закрываются с периодом T благодаря импульсным сигналам от источников V1 и V2. На первом этапе, занимающем 80 % полного периода, все ключи разомкнуты. На втором этапе, составляющем 10 % периода, открыт ключ J1, а на третьем этапе, тоже занимающем 10 % периода, открыты ключи J2, J3, J4.

Через посредство умножителей A1, A2, инвертирующего сумматора на операционном усилителе U4 и умножителей A4, A5 вырабатывается сигнал, обеспечивающий эволюцию переменных x и y к ситуации $x^2 + y^2 = 1$, тогда как наличие резистора R3 обеспечивает затухание переменной z к нулю. Когда замкнут ключ J1, сигналы, пропорциональные соответственно xz и $-xy$ (для их формирования используются умножители A6 и A7), поступают на интеграторы, ассоциирующиеся с переменными y и z . Этим обеспечивается дифференциальное вращение в фазовом пространстве вокруг оси x . Когда замкнуты ключи J2, J3, J4, на интеграторы x и z по-

даются сигналы, пропорциональные соответственно z и $-x$, что обеспечивает требуемый поворот половинок «восьмерки» вокруг оси y , а на интегратор y — сигнал, содержащий сумму квадратов переменных x и z , постоянное слагаемое и добавку, пропорциональную y .

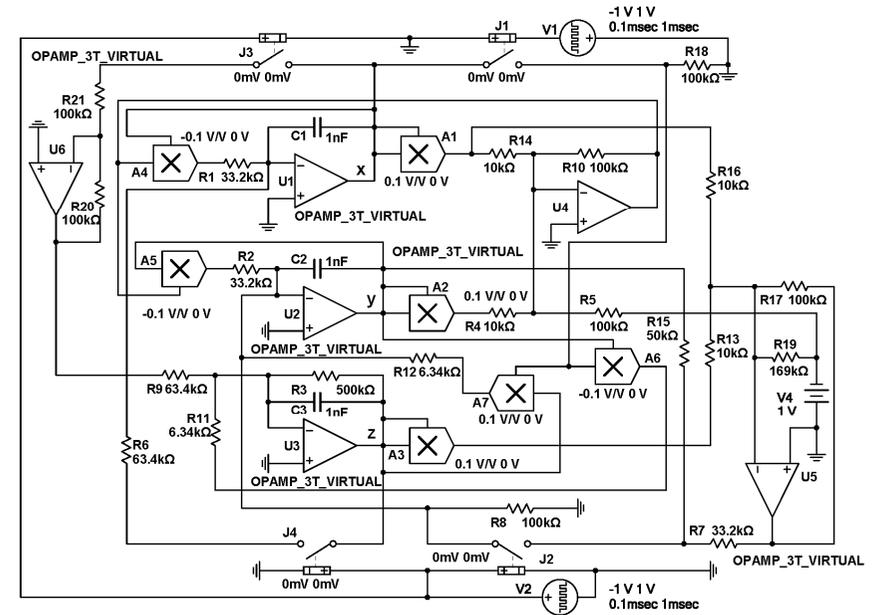


Рис. 19.11. Схема аналогового устройства, в котором аттрактор Смейла–Вильямса реализуется в отображении за период $T = 1$ мс. Динамические переменные x , y , z отвечают напряжениям на конденсаторах C1, C2, C3. Заметим, что умножители A1, A2, A3 имеют положительный коэффициент преобразования произведения входных напряжений в выходные, а умножители A4, A5, A6 — отрицательный, при этом абсолютная величина коэффициентов одинакова и составляет 0.1

Как можно показать, динамика схемы описывается уравнениями (19.1). Номиналы элементов, обозначенные на рис. 19.11, соответствуют приведенным выше параметрам.

На рис. 19.12 показаны графики реализаций напряжений на конденсаторах C1, C2, C3, полученные при моделировании в среде Multisim с использованием виртуального многоканального осциллографа. Отметим, что временные зависимости выглядят как неперiodический процесс.

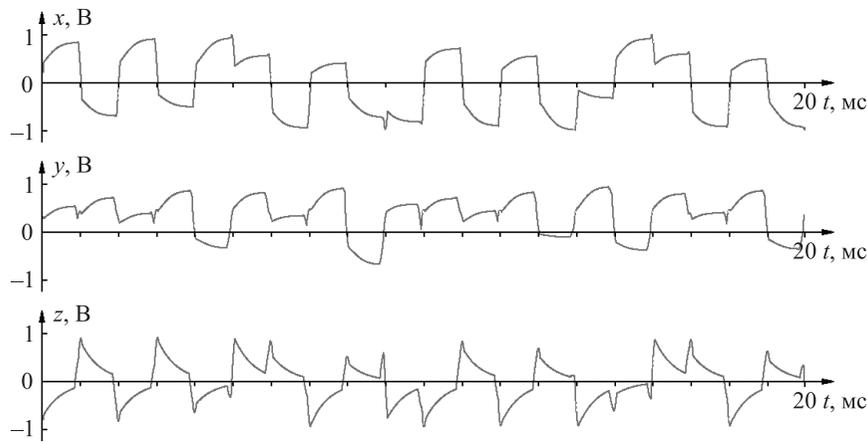


Рис. 19.12. Графики реализаций напряжений на конденсаторах C1, C2, C3, полученные при функционировании схемы аналогового устройства на рис. 19.10

Чтобы выявить динамическую природу наблюдаемого поведения, как ассоциирующегося с аттрактором Смейла–Вильямса, полученные при моделировании реализации ряды записываются в файл в виде временных рядов с шагом выборки, равным периоду модуляции $T = 1$ мс. Затем временные ряды x_n и y_n обрабатываются внешней программой и для каждого шага n определяется угловая координата на плоскости (x, y) : $\phi_n = \arg(x_n + iy_n)$. Как видно из графика, показывающего значения ϕ_{n+1} в зависимости от предыдущих величин ϕ_n , на каждом периоде модуляции динамика согласуется в топологическом смысле с растягивающим отображением окружности типа Бернулли (рис. 19.13). Благодаря сжатию по остальным направлениям, в фазовом пространстве это соответствует присутствию аттрактора Смейла–Вильямса.²

На рис. 19.14 в верхнем ряду показаны портреты аттрактора в трех проекциях из четырехмерного расширенного фазового пространства системы, полученные непосредственно при моделировании динамики в среде

² Выполнить другие тестовые процедуры (расчет спектра показателей Ляпунова, проверка трансверсальности пересечения многообразий, проверка критерия конусов и др.) в среде Multisim затруднительно. Соответствующие расчеты были проведены на основе решения уравнений (19.1) конечно-разностным методом, и подтверждение гиперболической природы аттрактора было получено.

Multisim с помощью виртуального осциллографа. Его подключение к схеме производится так, что отклонение луча по горизонтали и вертикали управляется напряжениями на конденсаторах C1 и C2, C3 и C2, C1 и C3 соответственно для получения первого, второго и третьего изображений.

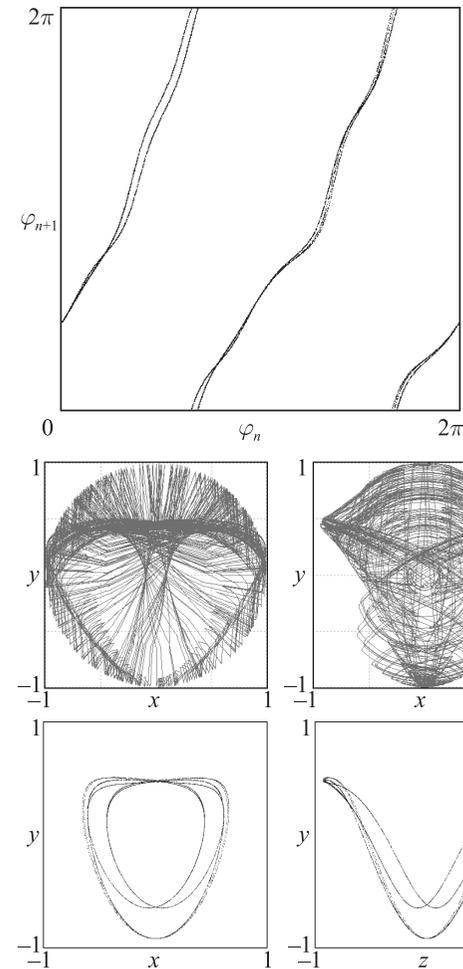


Рис. 19.13. Эмпирическая итерационная диаграмма для угловой переменной $\phi_n = \arg(x + iy)$

Рис. 19.14. Портреты аттрактора в трех проекциях из расширенного фазового пространства системы (а) и в стробоскопическом сечении (б)

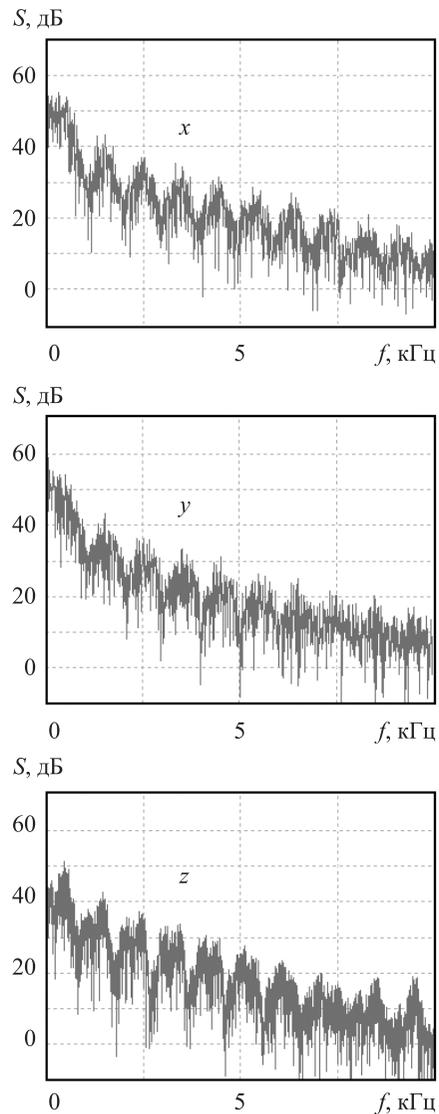


Рис. 19.15. Спектры колебаний напряжения на конденсаторах C1 (x), C2 (y) и C3 (z)

Для построения портретов в стробоскопическом сечении, показанных в нижнем ряду, использован файл данных, записанных при моделировании динамики с помощью многолучевого осциллографа с временным шагом в один период T и обработанных для построения диаграмм с применением внешней программы. Их можно интерпретировать как изображение в трех проекциях соленоида Смейла–Вильямса, вложенного в трехмерное пространство состояний стробоскопического отображения.

На рис. 19.15 показаны спектры мощности, построенные с помощью анализатора спектра в логарифмическом масштабе для сигналов, представляющих собой напряжение на конденсаторах C1, C2, C3. Спектры сплошные и занимают достаточно широкий интервал частот. Можно отметить изрезанность с характерным интервалом по частоте 1 кГц, что, очевидно, связано с присутствием внешней модуляции параметров системы с периодом $T = 1$ мс.

19.2.4. Аналоговое устройство с аттрактором Смейла–Вильямса. Автономная система

Все рассмотренные до этого момента схемы отвечали *неавтономным* системам, функционирующим в присутствии внешнего периодического воздействия. Было бы интересно иметь пример *автономного* генератора гиперболического хаоса. Его можно построить как аналоговое устройство, воспроизводящее минимальную модель с аттрактором типа Смейла–Вильямса (8.16), обсуждавшуюся в конце главы 8.

Схема устройства показана на рис. 19.16. Динамические переменные x , u , y , v отвечают напряжениям на конденсаторах C1, C2, C3, C4, измеренным в вольтах. За единицу времени принят интервал $\Delta t = RC = 0.2$ мс, где $C = 2$ нФ — значение емкостей C1, C2, C3, C4, а $R = 10$ кОм — значение сопротивлений R5 и R9. Умножители A1, A2, A3, A4 осуществляют возведение в квадрат переменных x , u , y , v .

Первая пара уравнений (8.16) реализована следующим образом. С использованием инвертирующих сумматоров на операционных усилителях U5 и U7, с участием постоянного напряжения от источника V1 формируется сигнал, пропорциональный $1 + x^2 + u^2 - y^2 - v^2$, что отвечает нелинейному коэффициенту в уравнениях. Этот сигнал поступает на вход умножителей A5 и A6, на другой вход которых поданы соответственно сигналы x и u . Результирующие напряжения служат входными сигналами для интеграторов на операционных усилителях U1 и U2 и конденсаторах C1 и C2, кроме того, добавляются сигналы, отвечающие за связь со второй подсистемой, поступающие через резисторы R18 и R25.

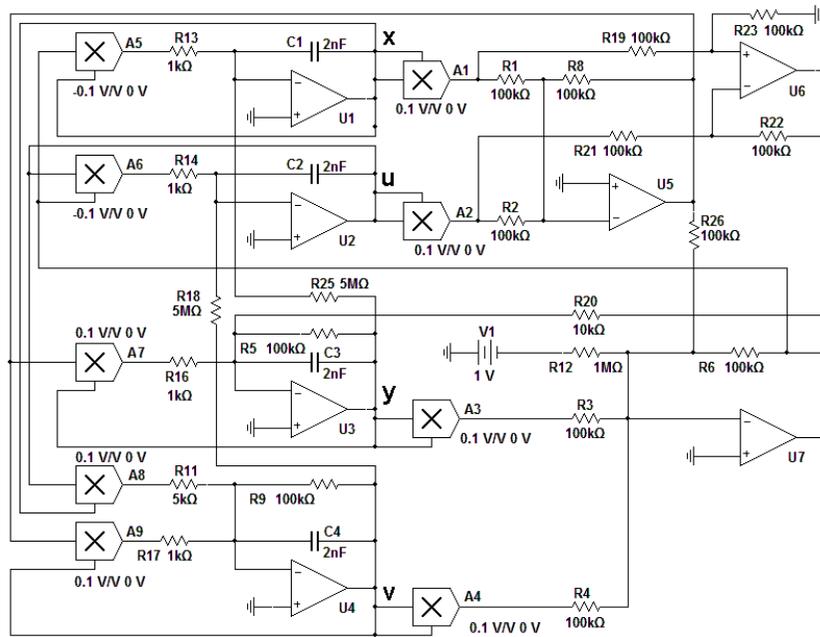


Рис. 19.16. Схема аналогового устройства, в котором в отображении Пуанкаре реализуется аттрактор Смейла–Вильямса. Динамические переменные x , u , y , v отвечают напряжениям на конденсаторах $C1$, $C2$, $C3$, $C4$. Умножители $A5$, $A6$ имеют отрицательный коэффициент преобразования произведения входных напряжений в выходные, а остальные множители — положительный, при этом абсолютная величина всех этих коэффициентов одинакова и составляет 0.1

Вторая пара уравнений обеспечивается двумя блоками, один из которых включает операционный усилитель $U3$ и RC-цепочку из резистора $R5$ и конденсатора $C3$, а второй составлен из элементов $U4$, $R9$ и $C4$. Сигнал, пропорциональный сумме квадратов переменных x и u , поступающий с выхода операционного усилителя $U5$, умножается элементами $A7$ и $A9$ соответственно на y и v и подводится к упомянутым двум блокам. К первому из них подается также сигнал с выхода дифференциального усилителя на элементе $U6$, пропорциональный разности квадратов переменных x и u , а ко второму — сигнал с выхода множителя $A8$, пропорциональный произведению x и u .

При указанных на схеме номиналах динамические уравнения, которые получаются для напряжений x , u , y , v совпадают с уравнениями (8.16) для

случая $\varepsilon = 0.02$. Заметим, что параметром ε можно управлять, изменяя одновременно сопротивления $R18$ и $R25$, которые должны оставаться равными друг другу, и он обратно пропорционален величине этих сопротивлений.

На рис. 9.17 приведены осциллограммы напряжений x , u , y , v , полученные при моделировании динамики в среде Multisim с использованием многоканального осциллографа, четыре входа которого подключены к соответствующим узлам схемы на рис. 9.16. Как показывает сравнение с рисунком 8.16, вид зависимостей качественно такой же, как для уравнений (8.16). Средний период повторения стадий возбуждения и подавления подсистем, как можно оценить из рис.9.17, составляет примерно 1.13 мс, т. е. 5.65 единиц, что неплохо согласуется с приведенным в главе 8 численным результатом $\langle T \rangle \approx 5.81$.

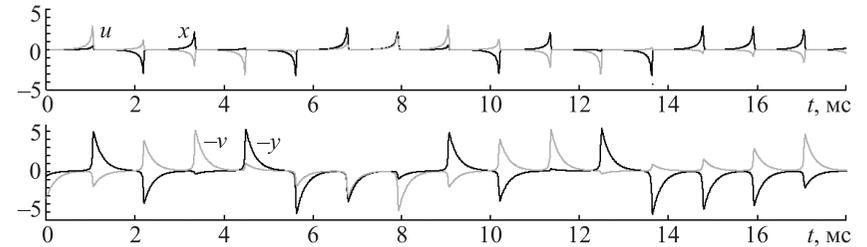


Рис. 19.17. Зависимости от времени динамических переменных, полученные с помощью многолучевого осциллографа при моделировании схемы рис. 19.16 в среде Multisim

На рис. 19.18 показан портрет аттрактора в проекции на плоскость амплитудных переменных подсистем ($x^2 + u^2$, $y^2 + v^2$), полученный на экране виртуального осциллографа. Один вход осциллографа, управляющий горизонтальной разверткой луча, подключался к выходу операционного усилителя $U5$, где напряжение пропорционально $-(x^2 + u^2)$, а второй — к выходу специально добавленного сумматора (на схеме не показан), на два входа которого были поданы напряжения от умножителей $A3$ и $A4$. Вид аттрактора находится в прекрасном соответствии с рис. 8.17.

Чтобы построить портрет аттрактора в сечении Пуанкаре и диаграмму, иллюстрирующую преобразование циклической переменной, требуемое для аттрактора Смейла–Вильямса, приходится обратиться к записи данных моделирования в среде Multisim в файл с последующей их обработкой

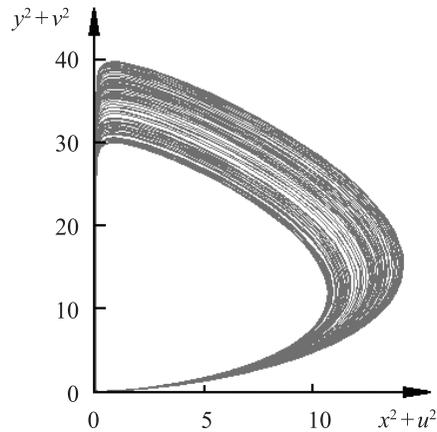


Рис. 19.18. Портрет аттрактора, полученный на экране виртуального осциллографа при моделировании схемы рис. 19.16 в среде Multisim в проекции на плоскость квадратичных амплитуд первой и второй подсистем

специально составленной программой. Для этого используем такое же подключение многоканального осциллографа, как при анализе временных зависимостей, и инструмент Grapher, обеспечивающий возможность записи данных в файл. Выборка делается с шагом по времени, на два-три порядка меньше характерного периода $\langle T \rangle$. Затем файл обрабатывается программой, которая, считывая шаг за шагом записанные данные, вычисляет величину $\sqrt{x^2 + u^2}$. В момент t_n , когда эта величина, изменяясь в сторону уменьшения, проходит уровень $c_0 = 0.8$, определяются значения y_n и v_n . Представляя их в координатах (y, v) , строим портрет аттрактора в сечении Пуанкаре, показанный на рис. 19.19 слева, а с помощью набора значений угловой переменной $\Phi_n = \arg(y(t_n) + iv(t_n))$ в координатах (Φ_n, Φ_{n+1}) получаем график отображения на диаграмме справа. Сравнение рис. 19.19 и 8.18 показывает, что визуально они практически не отличаются.

На рис. 19.20 показаны спектры генерируемых системой сигналов, полученные в Multisim с помощью виртуального анализатора спектра, при соответствующих установках рабочего диапазона частот и разрешения анализа. Спектры приведены в логарифмическом масштабе. Левая панель отвечает сигналу x (для переменной u спектр выглядит точно так же),

а правая — сигналу y (для переменной v спектр выглядит так же). Непрерывный характер спектра свидетельствует о хаотической динамике на аттракторе.

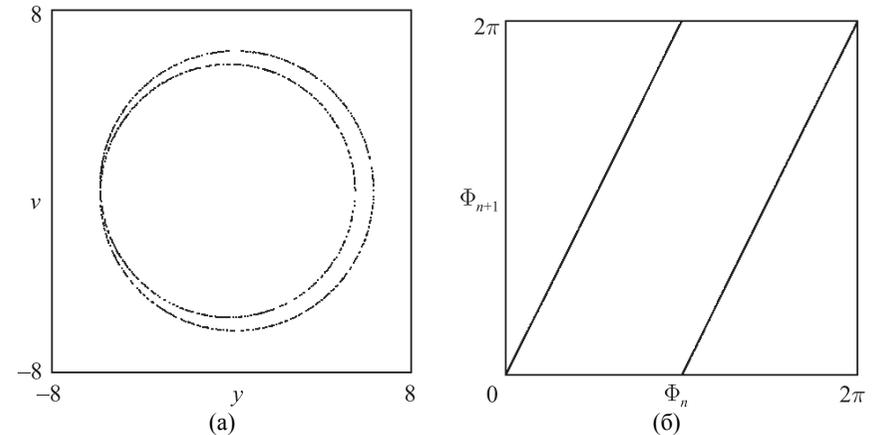


Рис. 19.19. Построенные обработкой данных моделирования в среде Multisim для схемы на рис. 19.16 портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость переменных второй подсистемы (а) и диаграмма, иллюстрирующая преобразование циклической переменной $\arg(y + iv)$ при последовательных проходах сечущей Пуанкаре (б)

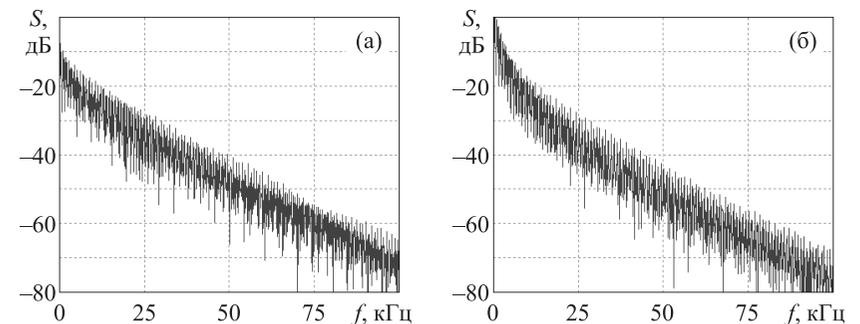


Рис. 19.20. Спектры колебаний напряжения на конденсаторах C1 (а) и C3 (б), полученные с помощью виртуального анализатора спектра при моделировании схемы рис. 19.11 в среде Multisim

19.3. Аттрактор типа Плыкина в электронном устройстве, моделируемом в программной среде Multisim

Рассмотрим теперь схему и результаты моделирования неавтономной системы, у которой аттрактор стробоскопического отображения представляет собой аттрактор типа Плыкина (см. главу 2 и, в частности, рис. 2.6). Идея конструирования системы дифференциальных уравнений, где присутствовал бы такой аттрактор, излагалась в главе 6. Рассматриваемая ниже версия модели имеет некоторые специфические особенности, введенные для упрощения схемотехнической реализации [Kuznetsov, 2011].

19.3.1. Основные уравнения

Как и в главе 6, построим вначале динамику на сфере единичного радиуса, задавая координаты переменными x , y , z , подчиненными условию $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Постулируем, что на первой стадии временной эволюции в течение времени T происходит движение изображающих точек на сфере, описываемое выражениями вида $\dot{x} \sim -xy^2$, $\dot{y} \sim x^2y$, в то время как координата z остается постоянной. На заключительной части этого временного интервала, имеющей продолжительность τ , дополнительно включается дифференциальное вращение вокруг оси z , так что с учетом обеих составляющих движения можно записать дифференциальные уравнения

$$\dot{x} = K[-\varepsilon xy^2 + \xi(t)(z + D)y], \quad \dot{y} = K[\varepsilon x^2 y - \xi(t)(z + D)x], \quad \dot{z} = 0. \quad (19.2)$$

Здесь введена функция $\xi(t) = 0$ при $t < T - \tau$ и $\xi(t) = 1$ при $T - \tau \leq t < T$ и предполагается, что выполнены (хотя бы приближенно) соотношения $K\tau = \pi/\sqrt{2}$, $D = 1/\sqrt{2}$.

На следующем интервале времени T полагаем, что осуществляются аналогичные движения на сфере, но координатные оси x и z меняются ролями.

Такие стадии эволюции, на которых затрагиваются по очереди пары переменных (x, y) и (y, z) , повторяются периодически.

Завершая формулировку задачи, дополним уравнение для переменной y членом с коэффициентом γ , который обеспечивает приближение фазовых траекторий к единичной сфере, и получим следующую систему уравнений:

первый полу период $2nT \leq t < (2n+1)T$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= K[-\varepsilon xy + \xi(t)(z + D)]y, \\ \dot{y} &= K[\varepsilon xy - \xi(t)(z + D)]x + \gamma y(1 - x^2 - y^2 - z^2), \\ \dot{z} &= 0; \end{aligned} \quad (19.3a)$$

второй полу период $(2n+1)T \leq t < 2(n+1)T$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0, \\ \dot{y} &= K[\varepsilon yz - \xi(t)(x + D)]z + \gamma y(1 - x^2 - y^2 - z^2), \\ \dot{z} &= K[-\varepsilon yz + \xi(t)(x + D)]y. \end{aligned} \quad (19.3b)$$

Здесь $\xi(t) = 0$ при $t < T - \tau$, $\xi(t) = 1$ при $T - \tau \leq t < T$ и $\xi(t+T) = \xi(t)$.

На рис. 19.21 показаны фазовые портреты аттрактора в стробоскопическом сечении, отвечающем последовательности моментов времени $t_n = nT$, в проекции на плоскости (x, y) , (x, z) и (z, y) , которые построены по результатам численного решения уравнений (19.3) конечно-разностным методом. Значения параметров заданы такими:

$$K = 1.1, \quad \varepsilon = 0.1, \quad T = 10, \quad \tau = 2, \quad \gamma = 0.25. \quad (19.4)$$

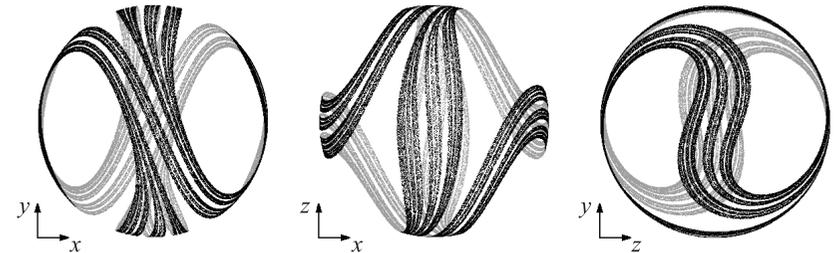


Рис. 19.21. Портреты аттрактора в стробоскопическом сечении в трех проекциях, построенные по результатам численного решения дифференциальных уравнений (19.3). Параметры заданы согласно (19.4)

Отметим присутствие фрактальной поперечной структуры аттрактора: объект выглядит как состоящий из полос, каждая из которых составлена из более узких полосок, и так далее. (В действительности этот аттрактор топологически эквивалентен конструкции, поясняемой на рис. 2.6, что будет специально обсуждаться в параграфе 19.3.3.)

19.3.2. Схема аналогового устройства и моделирование в среде Multisim

В схеме, приведенной на рис. 19.22, динамические переменные x , y , z соответствуют напряжениям на конденсаторах $C3$, $C2$ и $C1$. Интегратор на операционном усилителе $U1$ отвечает за динамику переменных z и x в зависимости от состояния переключателей $J1$ и $J2$, а интегратор на усилителе $U2$ отвечает за динамику переменной y . С помощью умножителей $A1$, $A2$, $A3$ и $A6$ и с приложением постоянного напряжения от источника $V1$ через резистор $R17$ изменение во времени переменной y управляется таким образом,

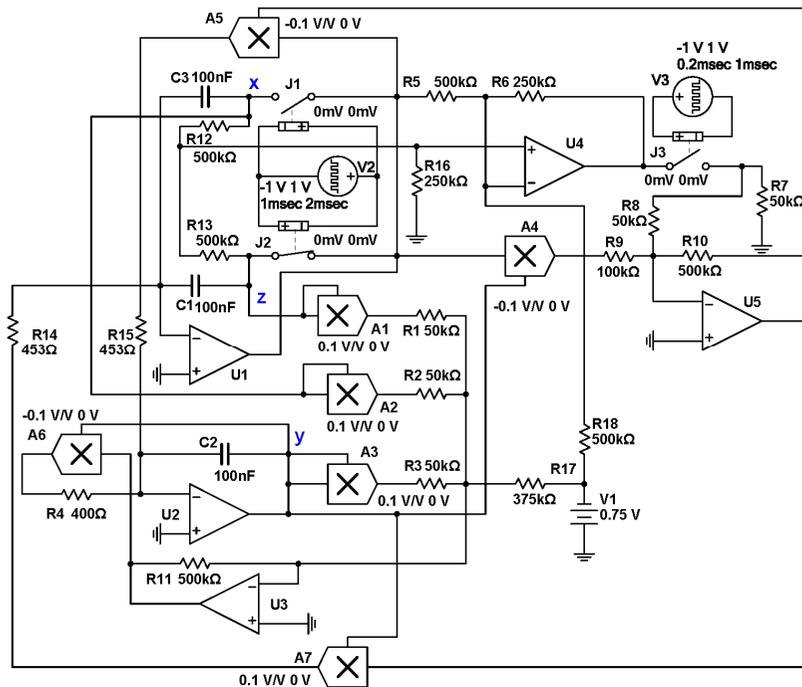


Рис. 19.22. Схема устройства. Динамические переменные, задающие положение точки в фазовом пространстве на единичной сфере, отвечают напряжениям на конденсаторах $C1$, $C2$ и $C3$ соответственно z , y , x . Умножители $A1$, $A2$, $A3$, $A7$ имеют положительный коэффициент преобразования входных напряжений в выходные, а для умножителей $A4$, $A5$, $A6$ он отрицательный; абсолютные величины коэффициентов преобразования составляют 0.1

что сумма квадратов всех переменных в ходе динамической эволюции стремится к 1. Это позволяет интерпретировать динамику на аттракторе как имеющую место на единичной сфере в пространстве состояний.

В ходе работы схемы ключи $J1$ и $J2$ открываются и закрываются поочередно, так что на последовательных полупериодах в динамический процесс вовлечена пара переменных, (x, y) или (z, y) , а оставшаяся переменная, z или x , остается практически неизменной, поскольку отвечает напряжению на открытом конденсаторе, $C1$ или $C3$. С использованием операционного усилителя $U4$ это напряжение подается на умножители $A5$ и $A7$ и управляет частотой колебаний для пары других переменных. Это сделано таким образом, что частота зависит от напряжения линейно с добавлением константы, определяемой источником постоянного напряжения $V1$. Все это происходит при включенном переключателе $J3$ на некотором интервале времени в конце каждой половины цикла переключения для $J1$ и $J2$. Диссипативная природа динамики на сфере обеспечивается с помощью сигнала от умножителя $A4$, подаваемого через инвертирующий усилитель $U5$.

Динамика описывается уравнениями (19.3), где за единицу времени принята величина $\tau_0 = R_0 C_0 = 0.1$ мс, представляющая собой произведение емкости, используемой в интеграторах $C1 = C2 = C3 = C_0 = 100$ нФ, и характеристического сопротивления $R_0 = 1$ кОм. Заметим, что состояния включения и выключения переключателей $J1$ и $J2$ занимают интервалы времени 10 единиц, т. е. $T = 1$ мс. Та же величина T определяет период открытия и закрытия ключа $J3$. Временной интервал, на котором он включен, — это финальная часть каждого периода продолжительностью $\tau = 0.2$ мс. Параметр K можно подстроить одновременным изменением сопротивлений $R14$ и $R15$. Параметр ε варьируется изменением сопротивления $R9$, параметр D — сопротивлением $R18$, а параметр γ — сопротивлением $R4$. Все эти параметры зависят от сопротивлений обратно пропорционально их величинам. При номиналах, указанных на схеме, параметры K , ε , D и γ соответствуют значениям, принятым при описанных выше вычислениях.

На рис. 19.23 показаны образцы временных зависимостей для трех переменных при моделировании в Multisim с использованием многоканального осциллографа, три входа которого соединены с узлами на схеме, помеченными буквами x , y , z .

Рис. 19.24 иллюстрирует спектры сигналов, генерируемых в процессе функционирования системы. Эти изображения получены в Multisim с помощью виртуального анализатора спектра при соответствующих установках рабочего диапазона частот и разрешения анализа. Спектры приведены

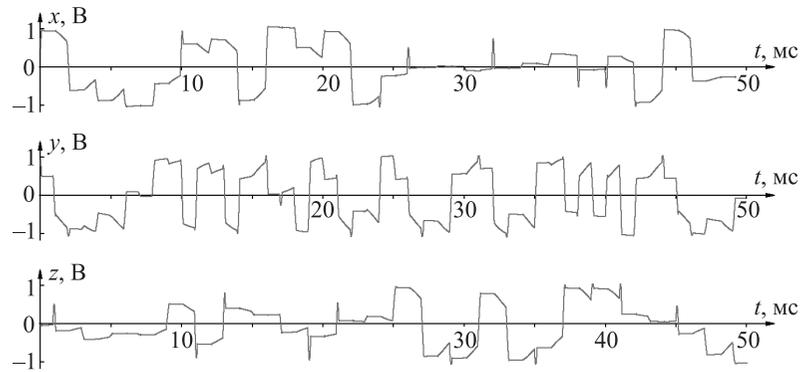


Рис. 19.23. Зависимости от времени для трех переменных x , y , z , полученные при моделировании в среде Multisim с использованием многоканального осциллографа

в линейном масштабе. Верхняя, средняя и нижняя панели соответствуют сигналам x , y , z . Непрерывный характер спектра свидетельствует о хаотической динамике на аттракторе. Следует отметить, что первый и третий спектры визуально идентичны (с точностью до статистической погрешности), а спектр сигнала y выглядит иначе, демонстрируя два выраженных максимума при 200 и 500 Гц. Это неудивительно, поскольку участие переменных x и z в динамике системы симметрично.

Чтобы получить изображение аттрактора в проекции на плоскости (x, y) , (x, z) и (z, y) , соединяем два входа осциллографа с соответствующими узлами схемы и задаем режим, в котором входные напряжения управляют горизонтальным и вертикальным отклонением луча. Полученные портреты показаны на рис. 19.25.

Чтобы проверить соответствие результатов моделирования с изображением на рис. 19.21, надо построить стробоскопическое сечение аттрактора. Используя такое же подключение многоканального осциллографа, как при анализе временных зависимостей, проводим моделирование на достаточно длительном интервале времени, скажем 10^5 периодов переключения. Затем используем инструмент Grapher и записываем данные в файл. Временной шаг выборки устанавливается равным периоду модуляции ($2T = 2$ мс). Затем файл обрабатывается внешней программой и результаты представляются на графике в виде набора точек, визуализирующих стробоскопическое сечение аттрактора. На рисунке 19.26 показаны полученные таким образом изображения в координатах (x, y) , (x, z) и (z, y) . Их сравнение с рис. 19.21 наглядно демонстрирует, что здесь и там мы

имеем дело фактически с одним и тем же объектом; степень соответствия действительно очень хорошая.

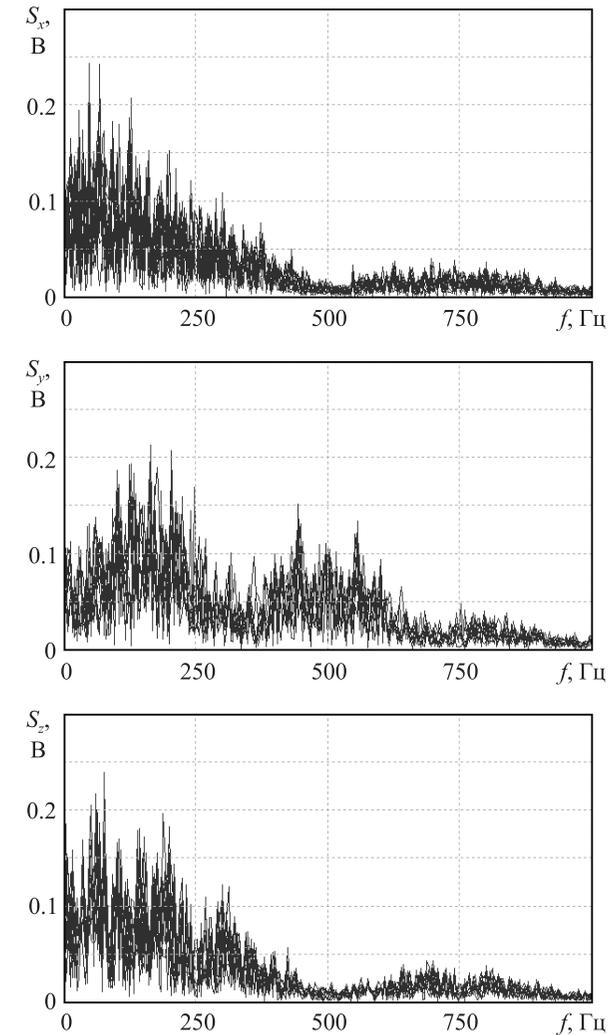


Рис. 19.24. Спектры сигналов, соответствующих переменным x , y , z . Разрешающая способность анализа 4 Гц

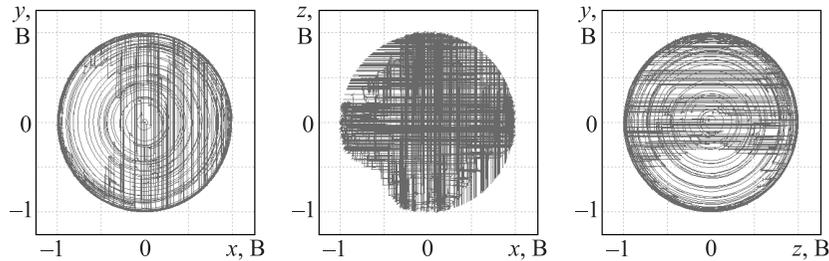


Рис. 19.25. Портреты аттрактора в трех проекциях на плоскости (x, y) , (x, z) и (z, y) , полученные при моделировании в среде Multisim как снимки с экрана осциллографа

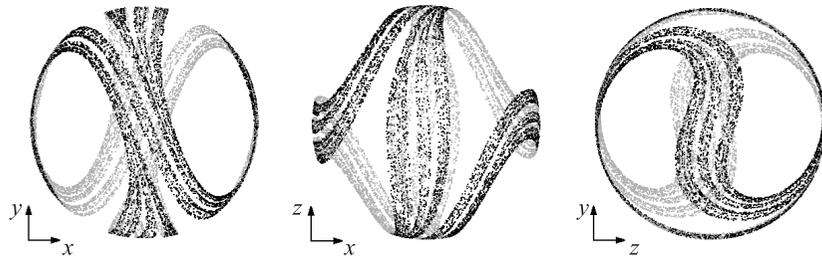


Рис. 19.26. Портреты аттрактора в проекции на плоскости (x, y) , (x, z) и (z, y) в стробоскопическом сечении, полученные обработкой результатов моделирования в среде Multisim, записанных в виде временных рядов для переменных x, y, z с шагом выборки 2 мс

19.3.3. Выявление природы аттрактора

Обсудим природу наблюдаемого аттрактора. Как видно из уравнения, единичная сфера является инвариантным множеством и аттрактор принадлежит этому множеству. Таким образом, имеет смысл рассмотреть редукцию динамической системы (19.3) на единичную сферу. После этого перейдем к представлению аттрактора на плоскости, используя замену переменных:

$$X = \frac{z-x}{x+z+\sqrt{2}}, Y = \frac{y\sqrt{2}}{x+z+\sqrt{2}}. \quad (19.5)$$

При стробоскопическом описании редуцированная система задается двумерным отображением и плоскость (X, Y) служит фазовым пространством

вом этого отображения. На рис. 19.27 показаны портреты аттракторов на плоскости в стробоскопическом представлении. Один построен по результатам численного интегрирования уравнений (19.3), а другой — обработкой записанных в файл данных моделирования в среде Multisim.

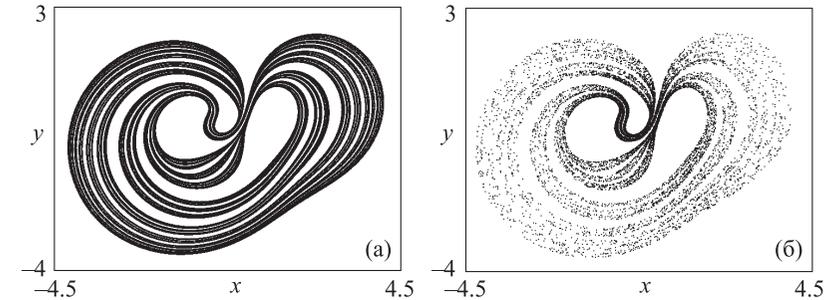


Рис. 19.27. Стробоскопические портреты аттрактора на плоскости, один из которых получен в результате численного решения дифференциальных уравнений (19.3) (а), а второй — обработкой записанных в файл данных моделирования схемы в среде Multisim (б)

Для редуцированной на единичную сферу системы (19.3) можно обратиться к графическому представлению устойчивого и неустойчивого слоев на плоскости в соответствии с заменой (19.5). На рис. 19.28а аттрактор показан светло-серым цветом, а семейство кривых устойчивого слоя, полученное с помощью процедуры, изложенной в разделе 11.1, изображено черным цветом. Заметим, что взаимное расположение одного и другого семейства кривых таково, что касания, безусловно, исключены.

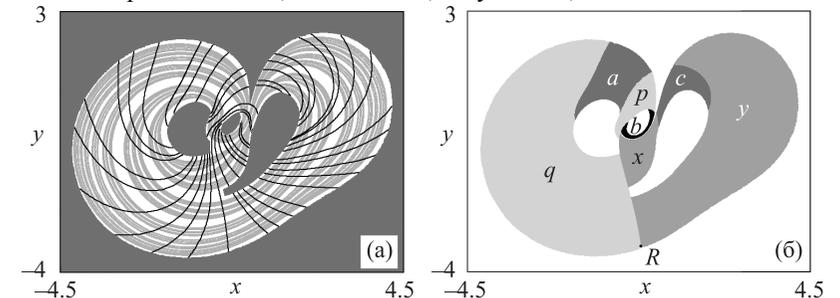


Рис. 19.28. Визуализация устойчивого и неустойчивого слоев (а) и марковское разбиение области, содержащей аттрактор (б), для двумерной версии уравнений (19.3), редуцированных на единичную сферу

Одна из кривых, задающих устойчивое слоение, представляет собой устойчивое многообразие седловой неподвижной точки R (рис. 19.28б), имеющей при параметрах (19.4) координаты $X=0$ и $Y=-3.3758$. Будучи продолжена до достаточно большой длины, эта кривая разделяет содержащую аттрактор область на семь участков, соответствующих элементам марковского разбиения. Картину можно сравнить с марковским разбиением для аттрактора типа Плыкина на рис. 3.5б, что выявляет очевидную топологическую эквивалентность.



Рис. 19.29. Гистограмма распределения углов α между подпространствами векторов возмущения, отвечающих неустойчивости в прямом и обратном времени, для орбиты на аттракторе системы (19.3) при параметрах, заданных согласно (19.4)

Вернемся теперь к нередуцированной системе уравнений (19.3) и применим для тестирования гиперболичности анализ статистического распределения углов пересечения устойчивых и неустойчивых подпространств на аттракторе. В данном случае подпространство, отвечающее неустойчивости в прямом времени, одномерное, а в обратном времени — двумерное. На рис. 19.29 показана гистограмма углов α_n для системы (19.3), построенная по методике, описанной в разделе 11.2. На графике ясно видно, что распределение не включает область близких к нулю углов, так что тест свидетельствует в пользу гиперболической природы аттрактора.

Для аттрактора системы (19.3) при параметрах, заданных согласно (19.4), была предпринята компьютерная проверка критерия конусов для трехмерного отображения, соответствующего двум периодам переключений в системе $4T$. Для представительного множества точек на аттракторе были проверены (i) наличие конусов из векторов, растягивающихся и сжимающихся при действии отображения с коэффициентом $\Gamma^2 > 1$ для квадрата нормы, и (ii) инвариантность конусов. Проверка критериев проводилась для представительного множества точек на аттракторе, полученных последовательными итерациями стробоскопического отображения. Расчеты показывают, что требуемые условия выполняются по крайней мере при $\Gamma^2 = 2$, что подтверждает однородно гиперболическую природу аттрактора.

Были проведены расчеты показателей Ляпунова трехмерной неавтономной системы (19.3). При параметрах (19.4) их значения таковы: $\lambda_1 = 0.0478$, $\lambda_2 = -0.0611$, $\lambda_3 = -0.197$. Наибольший показатель Ляпунова положительный, что указывает на хаотический характер динамики. Умножив его на коэффициент $2T$, получаем показатель Ляпунова для стробоскопического отображения $\Lambda_1 = 2T\lambda_1 = 0.956$. Это близко к величине $\ln(3 + \sqrt{5}) \approx 0.9624$, которая служит показателем Ляпунова для идеализированной конструкции данной разновидности аттрактора типа Плыкина [Hunt, 2000; Айдарова и Кузнецов, 2008]. Второй показатель отрицательный, он существенен для оценки фрактальной размерности аттрактора по формуле Каплана-Йорке (приложение D): $D = 1 + \lambda_1 / |\lambda_2| \approx 1.78$. Дробная часть размерности указывает на наличие фрактальной поперечной структуры аттрактора. Третий показатель Ляпунова, отрицательный и самый большой по абсолютной величине, не является существенным с точки зрения структуры аттрактора. Он отвечает за подход орбит в фазовом пространстве к инвариантной сфере, на которой располагается аттрактор. Как можно проверить, величина λ_3 контролируется параметром γ (см. (19.3)), в то время как другие показатели Ляпунова не демонстрируют заметной зависимости от него. Это отражает наличие избыточного измерения фазового пространства нашей системы: его размерность на единицу больше в сравнении с минимальной размерностью, необходимой для существования аттрактора Плыкина. Это цена, которую приходится уплатить за возможность организовать этот объект в относительно простом электронном устройстве.

Поскольку указана конкретная принципиальная схема устройства со всеми характеристиками элементов, представляется не столь сложным собрать эту схему как реальное электронное устройство и изучить его в эксперименте. В силу структурной устойчивости ее функционирование будет, как можно ожидать, нечувствительным по отношению к помехам, шумам и, по крайней мере, небольшим вариациям характеристик используемых деталей. В частности, переключениями, обеспечивающие работу системы, можно заменить гладкими переходами между состояниями включения и выключения соответствующих элементов без нарушения однородной гиперболичности хаотического режима (ср. [Кузнецов, 2009; Kuznetsov, 2009]).

Глава 20

Эксперименты с электронными устройствами, имеющими аттрактор типа Смейла–Вильямса

Очень интересной задачей представляется реализация моделей, рассмотренных в предыдущих главах (а также других систем с гиперболическими аттракторами) в виде конкретных устройств, например, в области электроники, лазерной физики, механики и т. д. В настоящей главе обсуждаются экспериментальные результаты, известные к настоящему моменту по публикациям и соответствующие по принципу действия моделям, рассмотренным в главах 7 и 17. Они были реализованы в виде лабораторных электронных устройств и изучены в работах [Кузнецов и Селезнев, 2006; Кузнецов и Пономаренко, 2008; Баранов и др., 2010]. Электронные устройства с грубым гиперболическим хаосом, аналогичные описанному здесь, могут найти применение в системах коммуникации на основе хаоса, шумовой локации, а также для криптографических схем. Одним из возможных применений является генерация случайных чисел. Принципиальный момент состоит в том, что в отличие от компьютерной модели, которую в этом контексте приходится трактовать как генератор псевдослучайных чисел, соответствующее физическое устройство будет служить истинным источником случайных чисел. Действительно, в процессе динамической эволюции на аттракторе неизбежно усиление шума от микроскопического уровня до макроскопических величин в силу присущей гиперболическому хаосу чувствительности к возмущению фазовых траекторий. Поэтому в системе, находящейся под влиянием слабого шума, выбор траектории на аттракторе осуществляется реально случайным образом.

20.1. Экспериментальное устройство в виде двух попеременно возбуждающихся неавтономных осцилляторов

В настоящем разделе рассматривается электронное устройство, идея которого следует модели, обсуждавшейся в главе 7. Оно также соответствует одной из схем, для которых в главе 19 были представлены результаты моделирования в программной среде Multisim. Изложение основывается на результатах работы [Кузнецов и Селезнев, 2006].

Обратимся к показанной на рис. 20.1 схеме радиотехнического устройства, составленного из двух автоколебательных элементов с характерными частотами ω_0 и $2\omega_0$, соответственно. Каждый из них содержит колебательный контур, образованный катушкой индуктивности $L_{1,2}$ и емкостью

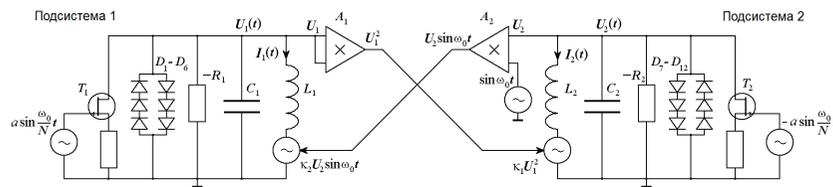


Рис. 20.1. Схема устройства, составленного из двух связанных автоколебательных элементов с периодически меняющимися параметрами: физическая система, обладающая аттрактором типа Смейла–Вильямса

$C_{1,2}$, так что $\omega_0 = 1/\sqrt{L_1 C_1}$, $2\omega_0 = 1/\sqrt{L_2 C_2}$. Отрицательное сопротивление ($-R_{1,2}$) в каждый контур вносится элементом на основе операционного усилителя, причем величину отрицательного сопротивления можно считать практически постоянной в рабочем интервале напряжений при колебаниях в контурах. Нелинейная проводимость вводится комбинацией полупроводниковых диодов в виде двух параллельно соединенных ветвей с противоположным направлением пропускания тока. Полевой транзистор вносит в колебательный контур практически линейную положительную проводимость, величина которой регулируется напряжением на затворе транзистора. Это напряжение медленно изменяется во времени, совершая колебания периода $T = 2\pi N/\omega_0$, где N — целое число, причем один и другой осциллятор пребывают по очереди в режиме генерации колебаний и под порогом генерации. Первый генератор действует на второй через посред-

ство нелинейного квадратичного элемента A_1 . В свою очередь, второй генератор действует на первый через посредство нелинейного элемента A_2 , осуществляющего смещение поступающего сигнала и вспомогательного сигнала на частоте ω_0 .

Оба осциллятора, составляющих схему, по очереди передают возбуждение один другому, причем, как объяснялось в главах 7 и 19, это сопровождается удвоением фазы колебаний на каждом очередном периоде активности. С учетом того, что по другим направлениям в фазовом пространстве имеет место сжатие, в отображении за период модуляции аттрактор должен представлять собой соленоид Смейла–Вильямса.

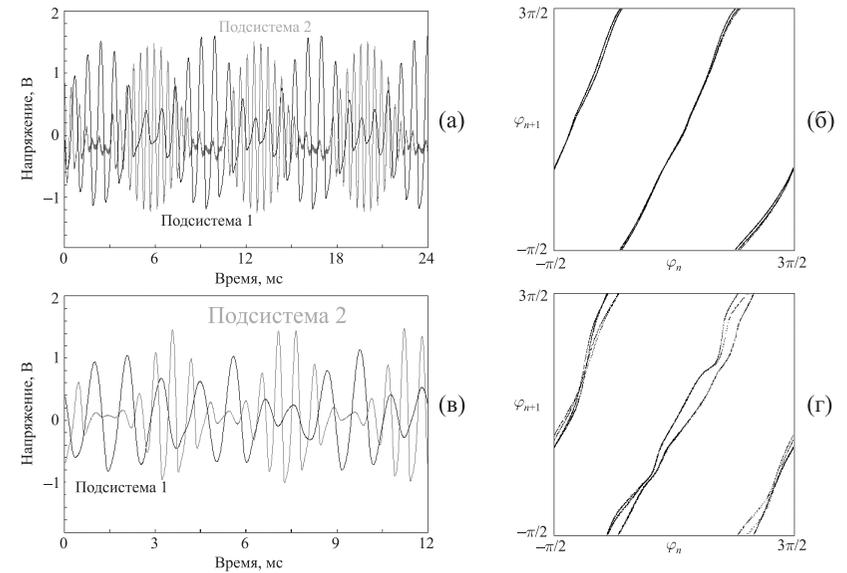


Рис. 20.2. Образцы сигналов, генерируемых первой (черная кривая) и второй (серая кривая) подсистемами в хаотическом режиме и итерационные диаграммы для стробоскопического преобразования фаз первого осциллятора при $N = 8$ (а, в) и 4 (б, г)

Для проведения экспериментального исследования схема была реализована в виде лабораторного устройства [Кузнецов и Селезнев, 2006]. Конденсаторы в колебательных контурах имели емкость $C_1 = 20$ нФ и $C_2 = 5$ нФ. Катушки L_1 и L_2 выполнены на ферритовых сердечниках 2000 НМ с одинаковой индуктивностью, около 1 Гн. Соответственно, ра-

бочая частота двух осцилляторов составляла $f_1 = \omega_0/2\pi = 1090$ Гц и $f_2 = 2f_1 = 2180$ Гц. Элемент отрицательного сопротивления реализован на операционном усилителе 140УД26, а нелинейный элемент — на диодах КД102. Для внесения в колебательные контуры изменяющейся во времени проводимости использованы полевые транзисторы КП303Г. Нелинейные элементы, через которые осуществлялась связь обеих подсистем, выполнены на основе аналоговых умножителей 525ПС2. Напряжения U_1 и U_2 , снимаемые соответственно с первого и второго контура, можно было подавать на регистрирующую аппаратуру (осциллограф, анализатор спектра) или вводить в компьютер в виде временного ряда через посредство аналого-цифрового преобразователя АДМ12-3 (12-разрядный, максимальная частота дискретизации 3 МГц). Функции \dot{U}_1 и \dot{U}_2 получались как результат аналогового дифференцирования с использованием стандартной дифференцирующей цепочки, содержащей емкость 500 пФ, резистор 62 кОм и операционный усилитель 140УД26.

В широком диапазоне параметров экспериментальная система демонстрировала хаотические колебания, реализующиеся при поочередной передаче возбуждения между осцилляторами, согласно предполагаемому механизму. Функционирование системы иллюстрируется на рис. 20.2. На диаграммах (а) и (в) показаны типичные записи сигналов, полученные для $N=8$ и $N=4$. Графики построены с использованием записанных в память компьютера временных рядов, полученных посредством аналого-цифрового преобразования напряжений при частоте выборки 200 кГц, т. е. на период характерной частоты генерации ω_0 приходилось примерно 200 точек. На панелях (б) и (г) приведены итерационные диаграммы для фазы первого осциллятора. Для их построения проводилась обработка на компьютере двухкомпонентного временного ряда. Одна компонента отвечала выборке сигнала U_1 с периодом медленной вариации параметров $T = 2\pi N/\omega_0$ в моменты времени, соответствующие максимуму амплитуды колебаний первого осциллятора. В качестве второй компоненты фигурировала производная сигнала \dot{U}_1 на выходе аналоговой дифференцирующей цепочки в те же моменты времени. Фаза определялась по формуле $\phi = \arg(U_1 - i\omega_0^{-1}\dot{U}_1)$. Очевидная из рисунка топологическая эквивалентность полученного преобразования отображению Бернулли (20.1) является принципиальной для заключения о гиперболической природе аттрактора, наблюдаемого в эксперименте.

На рис. 20.3а приводится фотография с экрана осциллографа, показывающая вид хаотического аттрактора системы для случая $N=4$, где гори-

зонтальное и вертикальное отклонение луча пропорционально U_1 и \dot{U}_1 соответственно. Время экспозиции составляло несколько секунд, чтобы отобразить достаточно большое число витков траектории на аттракторе. Изображение демонстрирует очевидное сходство с рис. 7.6а. На рис. 20.3б показано стробоскопическое сечение аттрактора в проекции на плоскость (U_1, \dot{U}_1) , полученное на компьютере путем обработки записанного в ходе эксперимента двухкомпонентного временного ряда, использованного при построении итерационной диаграммы для фаз на рис. 20.2г. Его вид следует сравнить с портретом соленоида Смейла–Вильямса на рис. 7.6б. Отдельно показан увеличенный фрагмент изображения, позволяющий различить тонкую поперечную канторову структуру аттрактора. Старший показатель Ляпунова для стробоскопического отображения, согласно оценке по методике обработки временного ряда [Wolf et al., 1985], с периодом выборки $T = 2\pi N/\omega_0$ составил $\Lambda \approx 0.73$, что удовлетворительно согласуется с ожидаемой величиной $\ln 2 \approx 0.693$.

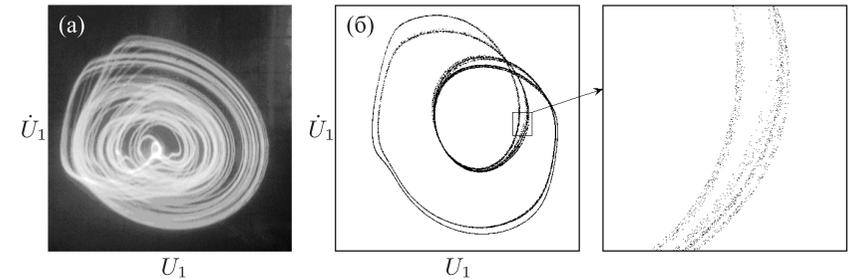


Рис. 20.3. Портреты аттракторов в проекции на плоскость переменных U_1 и \dot{U}_1 для $N=4$: (а) фотография с экрана осциллографа; (б) стробоскопическое сечение, отвечающее последовательности моментов времени $T = 2\pi N/\omega_0$ вблизи максимума амплитуды первого осциллятора, и увеличенный фрагмент, демонстрирующий фрактальную поперечную структуру аттрактора

На рис. 20.4 показаны спектры колебаний первого и второго осцилляторов в режиме генерации хаоса при $N=4$. Отметим, что спектр непрерывный; для первого и второго осцилляторов максимум спектральной плотности располагается вблизи их рабочих частот ω_0 и $2\omega_0$, соответственно. Спектры сходны по виду с теми, что были получены в численных расчетах для модели, обсуждавшейся в главе 7, и при моделировании в программной среде Multisim в главе 19. К сожалению, в эксперименте вряд ли воз-

можно определить полный спектр показателей Ляпунова или осуществить проверку критерия гиперболичности. Тем не менее в целом полученные результаты можно с уверенностью рассматривать как свидетельствующие о присутствии аттрактора типа Смейла–Вильямса в экспериментальной неавтономной системе.

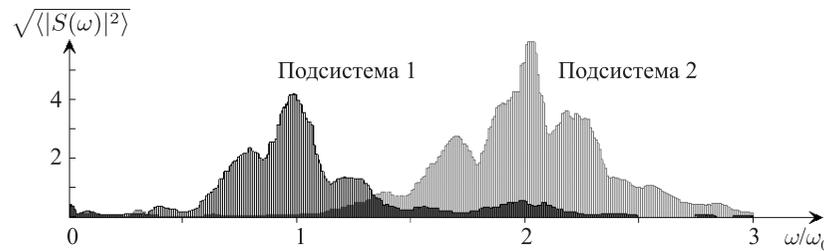


Рис. 20.4. Спектры сигналов, порождаемых двумя составляющими систему осцилляторами в хаотическом режиме, соответствующем $N = 4$, перерисованные с фотографии, сделанной с экрана анализатора спектра

Кроме того, был также предложен генератор электромагнитных колебаний в диапазоне сверхвысоких частот на базе клистрона, где реализуется подобный же механизм функционирования [Емельянов и др., 2009; Emel'yanov et al., 2010]. На данный момент для этого устройства доступны пока только результаты численного моделирования.

20.2. Электронные устройства с запаздыванием

Перейдем к рассмотрению систем с запаздывающей обратной связью, соответствующих моделям главы 17, которые были реализованы в виде лабораторных электронных устройств и изучены в экспериментах [Кузнецов и Пономаренко, 2008; Баранов и др., 2010]. С точки зрения гиперболической теории, статус динамики в этих системах не так четко определен, поскольку классическая формулировка теории относится к конечномерным системам, а для систем с запаздыванием пространство состояний формально является бесконечномерным. Тем не менее с физической точки зрения принцип действия и наблюдаемые динамические явления очень похожи на те, которые реализуются в системах попеременно возбуждающихся осцилляторов, для которых гиперболическая природа хаотических аттракторов надежно установлена (см. главы 7, 11–13). С одной стороны, это говорит о наличии нетривиальной математической проблемы, заключаю-

щейся в том, чтобы дать строгие определения и сформулировать основы теории однородно гиперболических хаотических аттракторов, вложенных в бесконечномерное пространство состояния систем с запаздыванием. С другой стороны, учитывая прозрачный принцип действия и очевидные аналогии с системами попеременно возбуждающихся осцилляторов, на уровне физических рассуждений можно с достаточной уверенностью полагать, что хаотическая динамика в системах с запаздыванием рассматриваемого класса будет иметь те же достоинства для технических приложений, обладая, в частности, структурной устойчивостью (грубостью).

20.2.1. Система с запаздывающей обратной связью, модуляцией параметра и вспомогательным сигналом

Система с запаздыванием на основе рассмотренной в разделе 17.2.1 модели в виде лабораторного экспериментального устройства описана в работе [Кузнецов и Пономаренко, 2008]. Система построена с использованием одиночного автоколебательного элемента с периодически модулированным управляющим параметром, что обеспечивает чередование стадий активности и подавления и содержит цепь запаздывающей обратной связи, где производится квадратичное нелинейное преобразование сигнала и смещение его со вспомогательным опорным сигналом. На каждой новой стадии активности возбуждение осциллятора стимулируется сигналом, поступившим по цепи запаздывающей обратной связи, который был испущен на предыдущей стадии активности, и подвергнут преобразованию, обеспечивающему удвоение фазы колебаний.

Схема электронного устройства приведена на рис. 20.5. Активный элемент реализован с использованием LC-контура, отрицательного сопротивления на усилителе DA_1 и нелинейного диссипативного элемента, составленного из полупроводниковых диодов D1–D6. Основная частота колебаний автогенератора составляет $f_0 = \omega_0/2\pi = 3$ кГц. Модуляция параметра, ответственного за возбуждение автоколебаний, достигается за счет внесения дополнительной диссипации полевым транзистором VT1. Его сопротивление медленно изменяется во времени под действием внешнего сигнала по периодическому закону $\Delta R \sim A \cos \Omega t = A \cos(2\pi t/T)$. При этом на одном полупериоде осциллятор находится в режиме генерации, а на втором — под порогом генерации, т. е. имеет место чередование стадий активности и подавления. Возбуждение колебаний с определенной фазой при наступлении очередной стадии генерации стимулируется сигналом,

который приходит по цепи запаздывающей обратной связи с выхода умножителя DA_3 . В цепи обратной связи сигнал подвергается квадратичному преобразованию (умножитель на микросхеме DA_2), и дифференцированию посредством стандартной схемы на резисторе R_2 , конденсаторе C_2 и операционном усилителе DA_4 . Далее сигнал проходит через цифровую линию задержки, содержащую аналого-цифровой преобразователь (ADC), компьютер и цифро-аналоговый преобразователь (DAC). Задержка реализована программным образом в компьютере. После прохождения линии задержки имеет место умножение на вспомогательный сигнал частоты f_0 от внешнего генератора. Благодаря выбору времени запаздывания $\tau = 3T/4$ сигнал, испущенный в момент достижения максимальной величины параметра возбуждения, оказывает действие на осциллятор как раз к началу очередной стадии активности, обеспечивая заправку для начала генерации на этой стадии. Из-за присутствия в цепи обратной связи квадратичного нелинейного преобразования в схеме реализуется удвоение фазы при переходе от одного цуга колебаний к другому. Отношение частот внешних сигналов в эксперименте было $N = \omega_0 / \Omega = f_0 T = 6$.

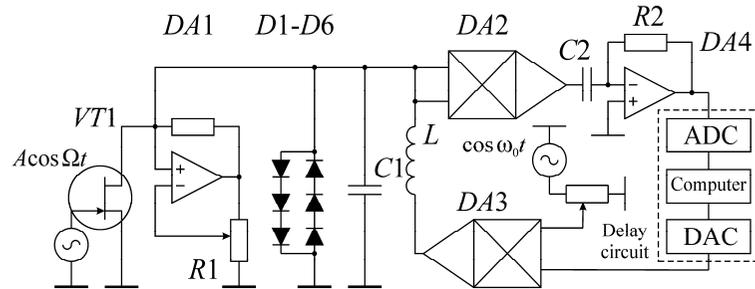


Рис. 20.5. Блок-схема генератора хаоса, построенного на одиночном осцилляторе ван дер Поля с периодически модулированным параметром, с дополнительной цепью запаздывающей обратной связи, где сигнал претерпевает квадратичное нелинейное преобразование и смещение со вспомогательным сигналом постоянной частоты

На рис. 20.6–20.8 приводятся некоторые экспериментальные результаты.

На рис. 20.6 показана временная зависимость генерируемого системой сигнала, где можно видеть последовательность цугов колебаний, отвечающих стадиям активности. Хаос проявляется в нерегулярных вариациях положения заполнения относительно огибающей сигнала в последовательных цугах. На рис. 20.7 показана диаграмма для фаз колебаний на последовательных стадиях активности. Для построения этой диаграммы сигнал,

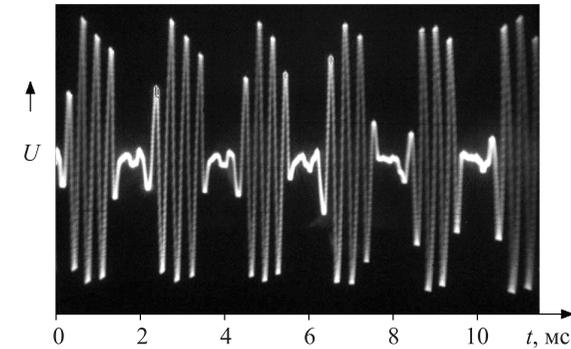


Рис. 20.6. Осциллограмма сигнала, генерируемого лабораторным устройством

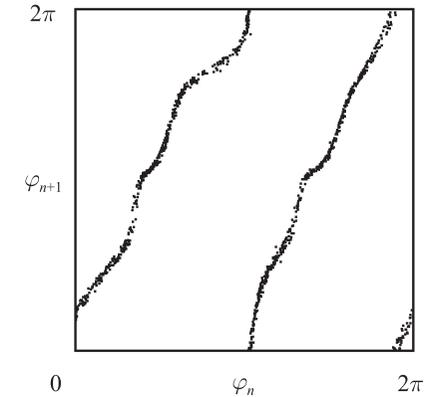


Рис. 20.7. Диаграмма для фаз колебаний, отвечающих последовательным цугам, полученная обработкой сигнала, генерируемого экспериментальным устройством

генерируемый устройством, записывался в компьютер в виде временного ряда с выхода аналого-цифрового преобразователя, две компоненты которого отвечали напряжению U_n и его временной производной \dot{U}_n , получаемой с выхода дифференцирующей цепочки. Выборка производилась с временным шагом, равным периоду медленной модуляции параметра, в моменты времени, отвечающие середине стадий активности осциллятора. Фазы вычислялись с помощью соотношения $\phi_n = \arg(U_n + i\omega_0^{-1}\dot{U}_n)$. Как можно видеть из диаграммы, преобразование фазы за один период T соот-

ветствует в топологическом смысле растягивающему отображению окружности, или отображению Бернулли: один полный оборот для прообраза отвечает двукратному обходу полной окружности для образа.

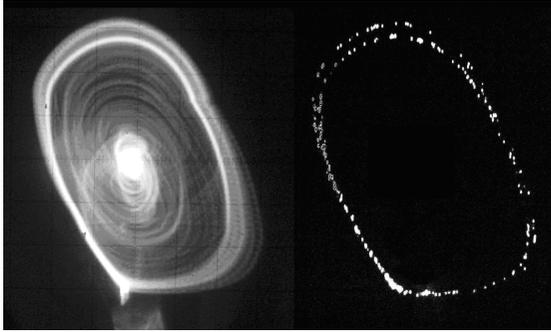


Рис. 20.8. Портрет аттрактора, сфотографированный с экрана осциллографа, который соответствует проекции на плоскость переменных (U, \dot{U}) из многомерного фазового пространства системы с запаздыванием (а), и вид того же аттрактора в стробоскопическом сечении (б)

На рис. 20.8 показаны портреты аттрактора, сфотографированные с экрана осциллографа (а,б). Панель (а) отвечает проекции аттрактора из многомерного фазового пространства системы с запаздыванием на плоскость двух переменных (U, \dot{U}) . Панель (б) соответствует стробоскопическому сечению аттрактора. При ее построении выборка производится с шагом по времени, равным периоду медленной модуляции параметра. Стробоскопическое изображение согласуется с ожидаемым видом соленоида Смейла–Вильямса, демонстрируя заметную поперечную фрактальную структуру, характерную для аттракторов этого типа.

На рис. 20.9 показан график спектральной плотности мощности, полученный обработкой временного ряда генерируемого системой сигнала, который был записан в компьютере. Спектр имеет явно выраженную непрерывную составляющую, причем его ширина на уровне половины максимальной плотности мощности составляет около 20 % при средней частоте 3 кГц. Дискретные пики, присутствующие в левой части графика, обязаны своим происхождением наличию периодической составляющей, обусловленной модуляцией параметра.

Таким образом, эксперимент свидетельствует в пользу того, что наблюдаемая хаотическая динамика связана с аттрактором типа Смейла–

Вильямса, вложенным в многомерное фазовое пространство системы с запаздыванием. Строгое обоснование этой гипотезы, как уже отмечалось, является непростой математической задачей.

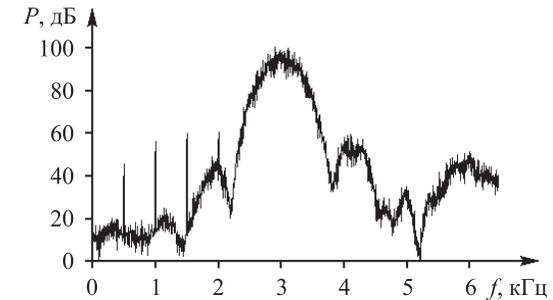


Рис. 20.9. График спектральной плотности мощности в хаотическом режиме, полученный обработкой записанного в ходе эксперимента временного ряда, генерируемого лабораторным устройством

20.2.2. Система с двумя петлями запаздывающей обратной связи и модуляцией параметра

Перейдем к версии системы с запаздыванием, обсуждавшейся в параграфе 17.2.2. Она построена на основе одиночного осциллятора, пребывающего попеременно в состоянии активности или подавления, с двумя цепями запаздывающей обратной связи, одна из которых линейная, а другая характеризуется квадратичной нелинейностью, производящей вторую гармонику. Оба сигнала подвергаются смещению, и возникает сигнал на разностной частоте, используемый для стимуляции возбуждения осциллятора на следующей стадии активности. Компоновка устройства обеспечивает удвоение разности фаз двух соседних цугов колебаний по ходу процесса.

Рассмотрим схему, показанную на рис. 20.10 [Баранов и др., 2010]. Ее основой служит генератор ван дер Поля, выполненный с использованием операционного усилителя DA_1 , вносящего отрицательное сопротивление в колебательный контур LC ($L = 10$ мГн, $C_1 = 5$ мкФ). Нелинейность обеспечивается элементом в виде двух параллельных цепочек полупроводниковых диодов. Частота автоколебаний составляет около 700 Гц. Параметр надкритичности генератора модулируется внешним сигналом с частотой 71 Гц, подаваемым на затвор полевого транзистора VT_1 . Сигнал генератора ван дер Поля возводится в квадрат при помощи аналогового умножителя

DA_2 и дифференцируется схемой на операционном усилителе DA_4 . Сигналы с выхода схемы дифференцирования и с генератора ван дер Поля подаются на два входа аналого-цифрового преобразователя и в компьютер, где реализована двухканальная линия задержки (времена задержки 21 мс и 7 мс соответственно, что составляет примерно $3/2$ и $1/2$ периода модуляции параметра). Выходные сигналы подаются на входы аналогового умножителя, выход которого подключен к катушке индуктивности колебательного контура генератора ван дер Поля. Таким образом, данное устройство качественно соответствует уравнению (17.16). Для анализа фазовых соотношений сигнал генератора ван дер Поля (напряжение на конденсаторе C_1) записывался в компьютер вместе со второй компонентой (производной напряжения) при помощи дополнительного (не показанного на схеме) аналого-цифрового преобразователя.

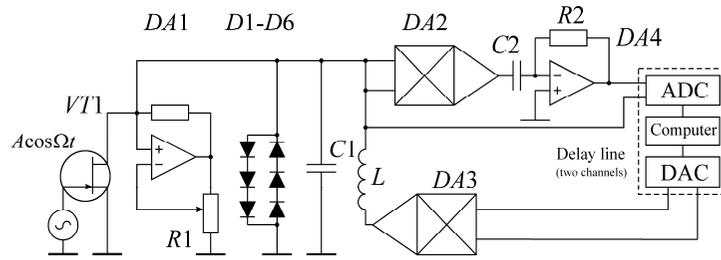


Рис. 20.10. Схема экспериментального устройства

На рис. 20.11 показаны реализация хаотического сигнала, полученная в эксперименте, и спектр колебаний осциллятора в режиме генерации хаоса. Они качественно неплохо согласуются соответственно с рисунками 17.10 и 17.14. На рис. 20.12 приводятся итерационные диаграммы для фаз, полученные обработкой экспериментальных данных, записанных в компьютер с помощью аналого-цифрового преобразователя ADC в виде двухкомпонентного временного ряда для напряжения на конденсаторе C_1 и его производной по времени. На панели (а) представлены в виде трехмерного графика данные, относящиеся к трем последовательным цугам колебаний, причем вид графика находится в качественном соответствии с формулой (17.17). Фазы вычисляются в моменты времени, отвечающие серединами стадий активности осциллятора $\phi_n = \arg(U_n + i\omega_0^{-1}\dot{U}_n)$. На панели (б) приводится диаграмма для разностей фаз $\Delta\phi_n = \phi_n - \phi_{n-1}$, которая качественно хорошо согласуется с выражением (17.18).

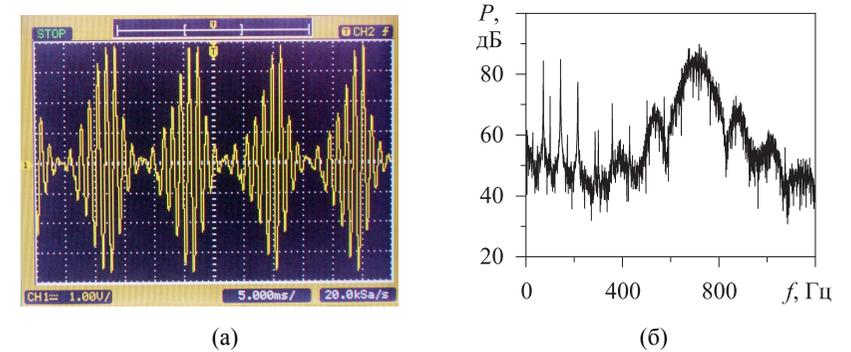


Рис. 20.11. Реализация хаотического сигнала в эксперименте, сфотографированная с экрана осциллографа (а), и спектр мощности в этом режиме (б)

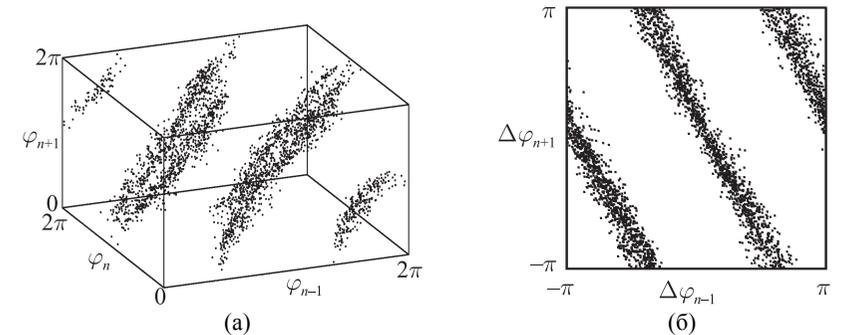


Рис. 20.12. Итерационная диаграмма для фаз в виде трехмерного графика, построенная по результатам эксперимента (а) и диаграмма для разностей фаз (б)

На рис. 20.13 показаны полученные в эксперименте портреты аттрактора. Панель (а) представляет собой фотографию, сделанную с экрана осциллографа; по горизонтальной оси отсчитывается напряжение на конденсаторе C_1 , а по вертикальной — временная производная этого напряжения. Напомним, что аттрактор системы с запаздыванием представляет собой объект в бесконечномерном пространстве состояний, так что представленное на рисунке изображение следует рассматривать как двумерную проекцию этого объекта. На панели (б) приводится портрет аттрактора в стробоскопическом сечении. Этот аттрактор, вложенный в многомерное пространство состояний системы с запаздыванием, как можно полагать, должен быть отнесен к классу частично гиперболических аттракторов.

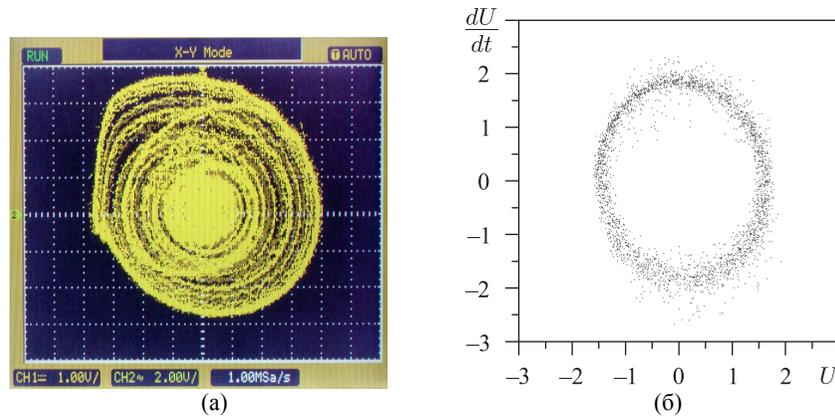


Рис. 20.13. Портрет аттрактора в проекции на фазовую плоскость осциллятора, снятый с экрана осциллографа (а), и портрет аттрактора в стробоскопическом сечении, построенный путем обработки экспериментальных данных (б)

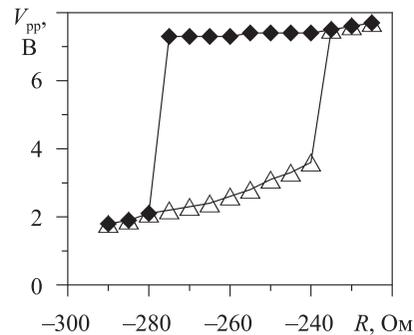


Рис. 20.14. Диаграмма, иллюстрирующая гистерезис при возбуждении колебаний в экспериментальном устройстве. Представлена зависимость напряжения «от пика до пика» порождаемого системой сигнала от величины отрицательного сопротивления, вносимого в колебательный контур благодаря присутствию операционного усилителя

В эксперименте нашло подтверждение присутствие в системе отмеченного в разделе 17.3 эффекта жесткого возбуждения. При регулировке отрицательного сопротивления, вносимого в колебательный контур благодаря наличию операционного усилителя, можно было наблюдать гистерезис, что иллюстрируется на рис. 20.14. При постепенном движении по па-

раметру слева направо вдоль нижней ветви графика, интенсивных колебаний в системе нет; они возникают при переходе некоторого порога, но сохраняются при обратном движении по параметру в относительно широком диапазоне, где ранее они отсутствовали. Это соответствует перемещению вдоль верхней ветви петли гистерезиса на приведенной диаграмме.

Заключение

Подводя итоги, можно сказать, что к настоящему времени установлена возможность конструирования физических систем со структурно устойчивыми хаотическими аттракторами, известными ранее только как абстрактные математические образы. Если математики разрабатывают свои примеры, используя геометрические, топологические, алгебраические конструкции, то физики вправе привлечь для целенаправленного построения моделей со структурно устойчивым хаосом свой инструментарий (частицы, поля, осцилляторы, цепи обратной связи). Материал, представленный в этой книге, свидетельствует о значительном прогрессе в этом направлении. Можно сказать, что теперь у нас в руках есть целая коллекция реалистичных конкретных примеров физически реализуемых систем с хаотической динамикой, к которым применимы принципы гиперболической теории («системы с аксиомой А»).

Разработано несколько подходов к построению систем с однородно гиперболическими хаотическими аттракторами. Среди них:

- использование моделей, динамика которых обусловлена короткими периодическими импульсами;
- организация динамики в виде последовательных этапов, на каждом из которых система задается своей особой формой дифференциальных уравнений;
- построение систем из осцилляторов, возбуждающихся попеременно и передающих возбуждение друг другу с преобразованием фаз, описываемым отображениями с хаотической динамикой;
- использование систем с запаздывающей обратной связью для реализации того же принципа;
- применение параметрического возбуждения для генерации гиперболического хаоса;
- построение систем с гиперболическим хаосом, в которых подчиняющаяся хаотическому отображению циклическая координата отвечает за распределение амплитуд осцилляторов;
- реализация отображений с хаотической динамикой пространственной фазы попеременно возбуждающихся структур Тьюринга.

Мы представили и рассмотрели ряд конкретных систем, где присутствие однородно гиперболических хаотических аттракторов подтверждено на уровне компьютерной проверки критерия конусов или предполагается на основе качественных соображений и данных расчетов. Благодаря присутствующей структурной устойчивости, эти модели можно в определенной степени модифицировать, не нарушая гиперболической природы динамики, получая этим способом много других новых систем с однородно гиперболическим хаосом. Для некоторых систем представлены схемотехнические решения, позволяющие реализовать их как электронные устройства, а в ряде случаев динамика на гиперболическом аттракторе продемонстрирована экспериментально.

Надо признать, что обсуждавшиеся в этой книге примеры динамики на однородно гиперболических хаотических аттракторах относятся к специально разработанным устройствам, а не к системам естественного происхождения, где они если и встречаются, то достаточно редко. Впрочем, граница здесь, конечно, условная. Можно вспомнить, что осциллятор ван дер Поля, признанный теперь в качестве универсальной модели в теории колебаний, первоначально вошел в употребление в применении к искусственно сконструированному электронным устройствам типа лампового генератора. Можно надеяться, что модели с гиперболическими аттракторами также окажутся полезными для описания каких-то систем естественного происхождения, например в нейродинамике. Известно, что обсуждалась возможность возникновения аттрактора типа Плыкина в нейронной модели Хиндмарша–Роуза [Belykh et al., 2005]. Кроме того, в контексте нейродинамики рассматривались модели с катастрофой голубого неба [Shilnikov and Symbalyuk, 2005; Shilnikov, A. and Kolomiets, 2008], при видоизменении которых с увеличением размерности фазового пространства до четырех и более могут возникнуть ситуации, соответствующие наличию аттракторов типа Смейла–Вильямса.

Возможность физической реализации гиперболического хаоса открывает перспективы для применения хорошо развитой математической теории и создает основу для сравнительного исследования гиперболического и негиперболического хаоса в компьютерных расчетах и в экспериментах. Становится интересным и информативным заново обратиться к исследованиям, состоящим в построении сложных систем на основе элементов с гиперболическим хаосом, таких как цепочки, решетки и сети [Bunimovich and Sinai, 1988; 1993; Bricmont and Kupiainen, 1997; Järvenpää, 2005; Kuptsov and Kuznetsov, 2009]. Думается, что модели, целенаправленно сконструированные с тем, чтобы реализовать гиперболический хаос, ока-

жутся полезными для понимания фундаментальных вопросов, все еще бросающих вызов исследователям, например, в отношении проблемы турбулентности.

Интересен вопрос о диагностике гиперболического хаоса в физическом эксперименте. Хотя в этом отношении математические методы, такие как критерий конусов, не кажутся подходящими, проблема не выглядит безнадежной. По крайней мере в случае аттрактора Смейла–Вильямса продуктивным и убедительным показал себя подход, состоящий в построении итерационных диаграмм для циклических фазовых переменных, которые демонстрировали бы соответствие с растягивающими отображениями окружности или отображениями Аносова на торе. Этот подход применим как в компьютерных расчетах, так и при обработке экспериментальных данных.

Говоря о возможных технических приложениях систем с гиперболическими аттракторами, следует особо подчеркнуть наиболее важное свойство грубости или структурной устойчивости.

В литературе в последнее время довольно широко обсуждается проблема генерации грубого, или робастного, хаоса (robust chaos) [Banerjee et al., 1998; Elhadj and Sprott, 2008; Drutarovský and Galajda P., 2007; Elhadj and Sprott, 2011]. Имеется в виду хаотическая динамика такого рода, когда при вариации параметров не возникает «окон периодичности», а зависимость старшего показателя Ляпунова от параметров является плавной функцией. Именно такой хаос желателен иметь для приложений, в том числе в схемах коммуникации, в генераторах случайных чисел, в системах кодирования информации. Для его реализации предлагалось использовать системы, включающие элементы с характеристиками в виде функций с изломами. На практике идеальные изломы недостижимы и полностью исключить окна периодичности на этом пути проблематично [Deshpande et al., 2010]. В системах с однородно гиперболическими аттракторами упомянутые свойства хаоса выступают как естественный атрибут в силу структурной устойчивости.

В течение последних 20 лет ведется активная работа по проблеме применения хаотических сигналов в информационно-коммуникационных системах [Yang, 2001, 2004; Дмитриев и Панас, 2002; Argyris et al., 2006; Короновский и др., 2009]. Хотя аргументы в пользу этого направления выглядят убедительно (большая информационная емкость сигналов, возможность управления динамикой посредством малых возмущений, разнообразие методов ввода информации в сигнал, богатые возможности кодирования для защиты передаваемой информации), надо признать, что ожидаемые потенциальные преимущества далеко не реализованы. Воз-

возможная причина состоит в том, что при использовании сигналов, порожденных негиперболическими аттракторами, не удастся опереться на детальное теоретическое понимание соответствующей им динамики. С другой стороны, для гиперболических аттракторов существует в известном смысле полное математическое описание хаоса, например исчерпывающее перечисление принадлежащих аттрактору траекторий, ассоциирующихся с последовательностями символов конечного алфавита. Поэтому вполне вероятно, что с привлечением гиперболического хаоса удастся в большей степени реализовать ожидаемые достоинства информационно-коммуникационных систем на основе хаотических сигналов.

Специальный интерес для схем скрытой коммуникации могут представлять рассмотренные в этой книге системы, где хаос проявляется в нерегулярном изменении фаз генерируемой последовательности радиоимпульсов. Очевидно, на этой основе возможна реализация схем, в которых передача сигнала в канале связи будет гораздо менее чувствительной к помехам, потерям и искажениям, нежели в предложенных до сих пор вариантах [Yang, 2001, 2004; Дмитриев и Панас, 2002; Argyris et al., 2006; Короновский и др., 2009]. (В этой связи уместно вспомнить об известном в традиционной радиотехнике преимуществе частотной или фазовой модуляции в сравнении с амплитудной модуляцией.)

Приложения

Приложение А

Отображения Эно и Икеды

В некоторых физических системах описание с помощью итерируемых отображений появляется весьма естественным образом. Скажем, при рассмотрении частицы, движущейся под действием периодических импульсов (толчков), координаты и скорость перед следующим ударом можно выразить через их значения перед предыдущим толчком и рассматривать динамику в дискретном времени, заданную этим отображением. В частности, известные отображения Эно [Hénon, 1976] и Икеды [Ikeda et al., 1980] могут быть получены в контексте механических задач, что позволяет приписать физический смысл этим моделям.

С учетом тематики данной книги стоит подчеркнуть, что хаотические аттракторы отображений Эно и Икеды не относятся к классу однородно гиперболических. Преобразование элементов объема фазового пространства в ходе динамической эволюции похоже на ситуацию, упоминавшуюся в главе 2, которая сопровождается формированием локальных особенностей плотности «фазовой жидкости». Это связано с неизбежным присутствием касаний между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями траекторий на аттракторе, проиллюстрированных в главе 11.

Рассмотрим следующую простую физическую систему (рис. А.1). Пусть вдоль оси x может двигаться частица массы m , причем ее движению препятствует сила трения, пропорциональная скорости, $f = -kv$. Пусть, далее, на частицу действуют с периодом T импульсные толчки, интенсивность которых зависит от координаты частицы в момент толчка, т. е. передаваемый импульс дается некоторой функцией $P(x)$.

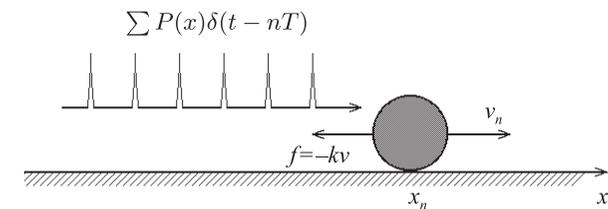


Рис. А.1. Механическая система, динамика которой описывается отображением Эно

Если перед n -ым толчком координата частицы была x_n , а скорость v_n , то сразу после толчка скорость составит $v_n + P(x_n)/m$, и далее она будет уменьшаться по экспоненциальному закону: $v(t) = [v_n + P(x_n)/m]e^{-kt/m}$. К моменту следующего толчка будем иметь

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= [v_n + P(x_n)/m]e^{-kT/m}, \\ x_{n+1} &= x_n + \int_0^T v(t)dt = x_n + (mv_n + P(x_n))(1 - e^{-kT/m})k^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Введем вместо v новую переменную $y = x - mk^{-1}(e^{kT/m} - 1)v$. Тогда из (A.1) получаем

$$x_{n+1} = f(x_n) + by_n, \quad y_{n+1} = x_n, \quad (\text{A.2})$$

где

$$b = -e^{-kT/m}, \quad f(x) = x(1 - b) + P(x)(1 + b)k^{-1}. \quad (\text{A.3})$$

Конкретизируем пространственное распределение силового поля так, чтобы получалось $f(x) = 1 - ax^2$. Тогда (A.2) принимает вид

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + by_n, \quad y_{n+1} = x_n. \quad (\text{A.4})$$

В 1976 г. Эно (Hénon) предложил это отображение как абстрактный пример динамической системы, обладающей странным аттрактором. Сейчас очевидно, что отображение Эно может служить для описания динамики ряда простых физических систем, одну из которых мы рассмотрели. К другим относятся диссипативный осциллятор и ротатор под импульсным периодическим воздействием [Neagu, 1992]. Отметим, что с физической точки зрения реалистичны отрицательные значения параметра b , хотя, как уже получилось, в исходной работе Эно выбрал противоположный знак.

Заметим, что отображение является обратимым: алгебраически нетрудно выразить однозначно x_n и y_n через x_{n+1} и y_{n+1} .

Вычисление определителя Якоби для отображения Эно дает

$$J = \begin{vmatrix} \partial x_{n+1}/\partial x_n & \partial x_{n+1}/\partial y_n \\ \partial y_{n+1}/\partial x_n & \partial y_{n+1}/\partial y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2a & b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -b. \quad (\text{A.5})$$

Если мы рассмотрим облако изображающих точек, занимающее область S на фазовой плоскости (x, y) , то на каждом шаге итераций площадь области будет умножаться на фактор $|b|$, так что при $|b| < 1$ система диссипативная.

На рис. А.2 показано как выглядит странный аттрактор при значениях параметров $a = 1.4, b = 0.3$, принятых в исходной работе Эно.

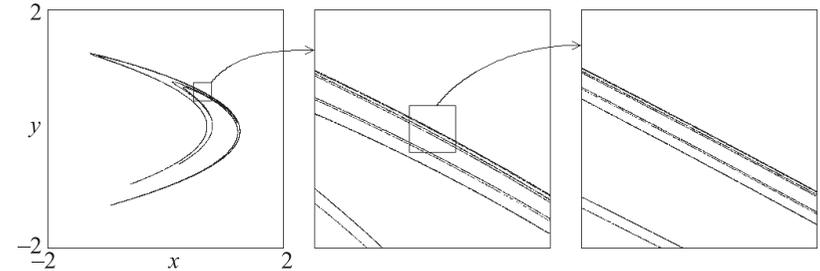


Рис. А.2. Странный аттрактор отображения Эно (5.4) при $a = 1.4, b = 0.3$

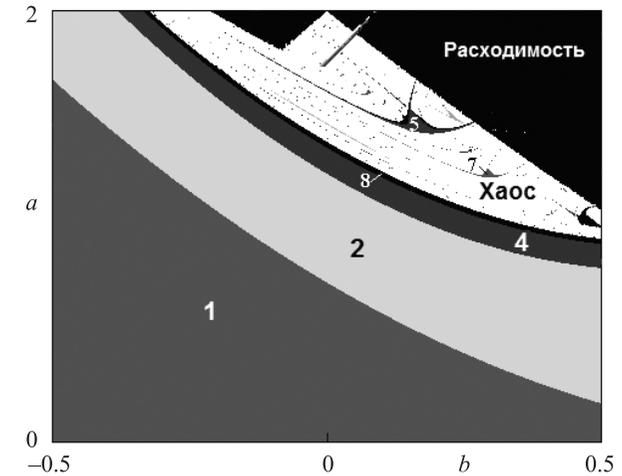


Рис. А.3. Карта динамических режимов на плоскости параметров отображения Эно (A.5). Белая область в верхней части диаграммы отвечает расходимости итераций отображения. Цифры 1, 2, 4... означают период движения в соответствующих областях

На рис. А.3 приведена карта динамических режимов отображения Эно на плоскости параметров (a, b) . Различные тона серого цвета обозначают наблюдаемую периодическую динамику того или иного периода. Белый цвет используется для хаоса. Нижняя часть диаграммы отвечает установ-

лению стационарного состояния равновесия (притягивающая неподвижная точка). С ростом параметра a реализуются режимы периодических колебаний, сначала периода 2, затем 4, 8, и так далее, — наблюдается последовательность бифуркаций удвоения периода. Бифуркационные линии на плоскости параметров представляются границами соответствующих областей периодических режимов. Они накапливаются к пределу — критической линии, являющейся границей хаоса [Фейгенбаум, 1983; Вул и др., 1984; Шустер, 1988; Кузнецов, 2001].

Стоит обратить внимание на наличие небольших участков периодических движений, разбросанных по области, занятой хаосом, которые из-за их характерной формы называют «креветками» ("shrimps") [Gallas, 1993 1994]. Наличие этих образований можно рассматривать как свидетельство негиперболической природы хаоса в данной системе.

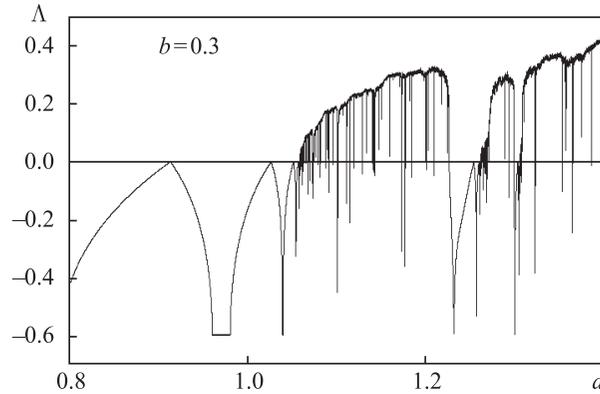


Рис. А.4. Наибольший показатель Ляпунова для отображения Эно (А.4) в зависимости от параметра a при постоянном значении $b = 0.3$

На рис. А.4 показан график большего из двух показателей Ляпунова аттрактора отображения Эно (А.4), полученный в численных расчетах, в зависимости от параметра a при постоянной величине $b = 0.3$. На графике хорошо видна характерная для негиперболического хаоса форма зависимости. На оси параметра на фоне множества, отвечающего положительным показателям Ляпунова, что отвечает хаосу, имеется множество глубоких узких провалов до отрицательных величин, представляющих собой *окна периодичности* (или окна регулярности). На карте динамических режимов на рис. А.3 это соответствует маршруту на плоскости параметров

по вертикальной линии $b = 0.3$, а провалы в отрицательную область возникают, когда маршрут пересекается с «креветками».

Обратимся теперь к другой системе — осциллятору с кубической нелинейностью под действием коротких периодических импульсных толчков [Kuznetsov et al., 2008]. Модельное уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = \sum C \delta(t - nT), \quad (\text{А.6})$$

где x — динамическая переменная, ω_0 — основная частота, γ — коэффициент диссипации и β — параметр нелинейности. Внешнее воздействие отвечает последовательности импульсов, каждому из которых отвечает дельта-функция Дирака, и которые следуют друг за другом с периодом T , имея амплитуду, характеризуемую константой C . Для простоты считаем, что период следования импульсов содержит целое число периодов основной частоты, $\omega_0 T / 2\pi = N$.

В предположении, что ω_0 и T относительно велики, тогда как β , γ и C относительно малы, для описания движения в промежутках времени между импульсами можно обратиться к методу медленных амплитуд. Для этого вводим комплексную амплитуду $a(t)$ так, что

$$x = a e^{i\omega_0 t} + a^* e^{-i\omega_0 t}, \quad \dot{x} = i\omega_0 (a e^{i\omega_0 t} - a^* e^{-i\omega_0 t}). \quad (\text{А.7})$$

Это предполагает, что комплексная амплитуда удовлетворяет условию

$$\dot{a} e^{i\omega_0 t} + \dot{a}^* e^{-i\omega_0 t} = 0. \quad (\text{А.8})$$

Подставляя соотношения (А.7) в уравнение (А.6) с нулевой правой частью и учитывая (А.8), после усреднения по периоду быстрых колебаний получаем

$$\dot{a} = -\frac{\gamma}{2} a + \frac{3}{2} \frac{i\beta}{\omega_0} |a|^2 a. \quad (\text{А.9})$$

Теперь предположим, что сразу после n -го толчка в момент $t = nT$ комплексная амплитуда была $a_n = \frac{1}{2}(x_n - i\omega_0^{-1}\dot{x}_n)$. Чтобы получить амплитуду перед следующим толчком, интегрируем уравнение (А.9) на периоде T с начальным условием $a(nT + 0) = a_n$. Это можно сделать аналитически. В самом деле, подстановка $a = r e^{i\varphi}$ дает $\dot{r} + i\dot{\varphi} = -\frac{1}{2}\gamma r + \frac{3}{2}i\beta\omega_0^{-1}r^3$ и, после разделения действительной и мнимой частей,

$$\dot{r} = -\frac{1}{2}\gamma r, \quad \dot{\varphi} = +\frac{3}{2}\beta\omega_0^{-1}r^2. \quad (\text{А.10})$$

Отсюда следует

$$r(\Delta t) = r_n e^{-\frac{1}{2}\gamma\Delta t},$$

$$\varphi(\Delta t) = \varphi_n + \frac{3}{2}\beta\omega_0^{-1}r_n^2 \int_0^{\Delta t} e^{-\frac{1}{2}\gamma\tau} d\tau = \varphi_n + 3\beta\omega_0^{-1}\gamma^{-1}(1 - e^{-\frac{1}{2}\gamma\Delta t})r_n^2. \quad (\text{A.11})$$

Подставляя $\Delta t = T$, получаем

$$a((n+1)T - 0) = r_n e^{-\frac{1}{2}\gamma T} e^{i\varphi_n + 3i\beta\omega_0^{-1}\gamma^{-1}(1 - e^{-\frac{1}{2}\gamma T})r_n^2} = a_n e^{-\frac{1}{2}\gamma T} e^{3i\beta\omega_0^{-1}\gamma^{-1}(1 - e^{-\frac{1}{2}\gamma T})a_n^2}. \quad (\text{A.12})$$

Толчок в виде дельта-функции сопровождается мгновенной передачей импульса; как видно из (А.6), скорость \dot{x} изменяется на величину C , в то время как координата x сразу после толчка измениться не успевает. Таким образом, мы должны положить

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\{x(nT - 0) - i\omega_0^{-1}[\dot{x}(nT - 0) + C]\} = a(nT - 0) - \frac{1}{2}i\omega_0^{-1}C. \quad (\text{A.13})$$

В комбинации с (А.12) это означает, что

$$a_{n+1} = -\frac{1}{2}i\omega_0^{-1}C + a_n e^{-\frac{1}{2}\gamma T} e^{3i\beta\omega_0^{-1}\gamma^{-1}(1 - e^{-\frac{1}{2}\gamma T})a_n^2}. \quad (\text{A.14})$$

Окончательно, заменой переменных и параметров

$$Z = ia \left(\frac{3\beta(1 - e^{-\gamma T/2})}{\omega_0\gamma} \right)^{1/2}, \quad A = \frac{C}{2\omega_0} \left(\frac{3\beta(1 - e^{-\gamma T/2})}{\omega_0\gamma} \right)^{1/2}, \quad B = e^{-\gamma T/2} \quad (\text{A.15})$$

приходим к простой и удобной форме отображения

$$Z_{n+1} = A + BZ_n e^{i|Z_n|^2}. \quad (\text{A.16})$$

Изначально это отображение было введено в рассмотрение для совсем другой физической ситуации, а именно для оптического кольцевого резонатора, заполненного средой с показателем преломления, зависящим по квадратичному закону от амплитуды электромагнитной волны [Ikeda et al., 1980]. После этой работы модель (А.16), получившая название отображения Икеды, стала весьма популярной. Это отображение широко исследовалось и использовалось в литературе для иллюстрации феноменов нелинейной динамики.

Можно заметить, что применимость отображения (А.16) для количественного описания нелинейной оптической системы является, в общем-то, сомнительным. Корректным образом эта система описывается уравнениями с запаздыванием, которые были сформулированы и исследованы теми

же авторами [Ikeda et al., 1980]. Собственно отображение (А.16) для нелинейной оптической системы на твердой теоретической основе никогда не выводилось. Напротив, для нелинейного осциллятора, рассмотренного здесь, это отображение действительно доставляет разумное описание, справедливое в определенной асимптотике [Kuznetsov et al., 2008].

Отображение (А.16) записано как одно уравнение для комплексной переменной Z , но в терминах действительных переменных оно фактически двумерное. Вычисление матрицы Якоби приводит к результату $J = B^2$, так что при $B < 1$ отображение диссипативное (сжимающее фазовый объем). На рис. А.5 показаны портреты аттракторов отображения Икеды при различных значениях параметров A и $B = 0.2$.

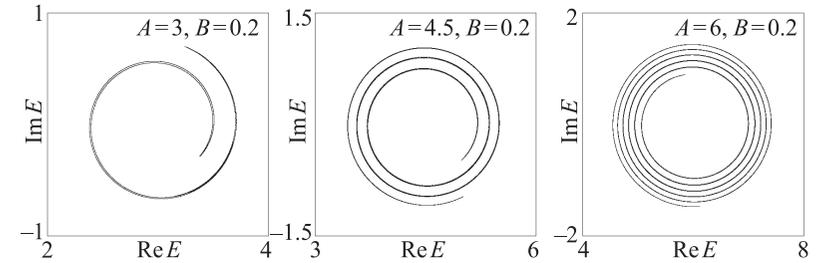


Рис. А.5. Странный хаотический аттрактор в отображении Икеды (А.16) при $B = 0.2$ для нескольких различных значений параметра внешнего воздействия

На рис. А.6 показана карта динамических режимов на плоскости параметров (A, B) . Если увеличивать параметр интенсивности воздействия A при фиксированной диссипации B , то переход к хаосу возникает обычно через каскад бифуркаций удвоения периода. Глобально, однако, граница хаоса устроена сложным образом. В частности, имеются узкие полосы, отвечающие периодической динамике, проникающие глубоко в область хаоса, содержащую внутри разбросанные маленькие области периодичности, «креветки».

Карту динамических режимов можно мыслить как составленную из набора частично перекрывающихся листов, каждому из которых отвечает тот или иной аттрактор [Кузнецов, 2001]. Листы могут соединяться в точки сборки и имеют краями линии складок, идущие вдоль длинных сужающихся полос периодических режимов, вытянутых в область, занятую хаосом. Эти особенности картины можно усмотреть на рис. А.6, хотя положение точек сборки не обозначено и только угадывается. Похожая картина

наблюдается во многих диссипативных системах, способных демонстрировать сложную динамику и переход к хаосу.

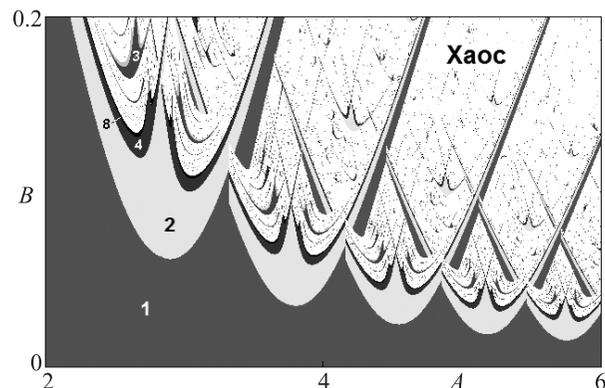


Рис. А.6. Карта динамических режимов на плоскости параметров отображения Икеды (А.16)

На рисунке А.7 показан полученный численно график большего из двух показателей Ляпунова отображения Икеды (А.4) в зависимости от параметра A при фиксированной величине $B = 0.2$. Снова можно видеть, что в широком интервале параметра, по большей части занимаемом хаосом, имеется множество узких глубоких провалов в отрицательную область, что ассоциируется с окнами периодичности. Эта диаграмма соответствует движению на плоскости параметров на рис. А.6 по горизонтальной линии, с провалами к отрицательным значениям показателя Ляпунова при пересечении маршрутом «полос» и «креветок».

Как можно проверить, отображения Эно и Икеды при соответствующем подборе параметров геометрически соответствуют подкове Смейла (приложение С). Этим обосновывается присутствие сложных хаотических траекторий в фазовом пространстве, но хаотические аттракторы, если они имеют место, не относятся к классу однородно гиперболических. Видимый индикатор негиперболической природы динамики — это присутствие крошечных областей периодичности, «креветок», окруженных хаосом на картах динамических режимов, в частности на рис. А.3 и А.5, что свидетельствует об отсутствии структурной устойчивости. В главах 11–13 отображения Эно и Икеды используются в качестве примеров негиперболического поведения для сопоставления с системами, обладающими однородно гиперболическими аттракторами.

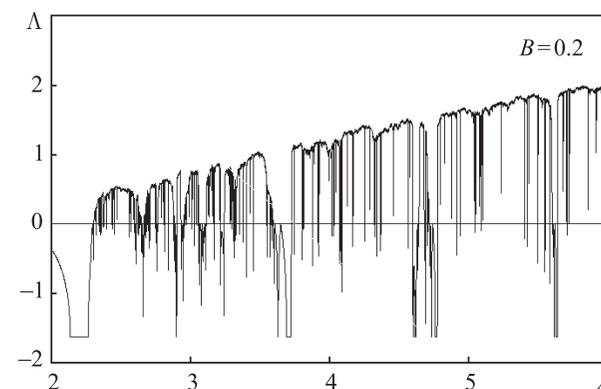


Рис. А.7 Старший показатель Ляпунова отображения Икеды (А.16) в зависимости от параметра A при постоянном значении $B = 0.2$

Приложение В

Кельтский камень

В механике, помимо систем, допускающих описание в рамках формализма Лагранжа и Гамильтона, рассматривают *неголономные системы*, к которым относятся многие задачи, например в механике передвижных и летательных аппаратов, робототехнике. Класс неголономных систем очень широк: в нем имеет место иерархия динамического поведения от интегрируемых до не интегрируемых систем, в зависимости от количества присутствующих инвариантов и симметрий [Borisov and Mamaev, 2002].

Крайней ситуации сложной динамики отвечает задача о «кельтском камне», состоящая в изучении движения твердого тела с выпуклой гладкой поверхностью на шероховатой плоскости, когда расположение главных осей, определяющих геометрические свойства тела и его динамические свойства, различается. Происхождение необычного названия — «кельтский камень» — связано с находками при изучении кельтских гробниц археологами в виде полукруглых каменных артефактов, очевидно орудий труда, которые, если их запустить волчком на горизонтальной поверхности, демонстрировали необычное поведение. Обычно вращение в одну сторону происходит устойчиво и без проблем, а при запуске в противоположную сторону вращение сначала замедляется, потом возникают колебания (покачивания) камня, и затем он начинает вращаться в противоположную сторону! Бывают и такие камни, у которых смена направления вращения происходит многократно.

В неголономных системах типа кельтского камня механическая энергия сохраняется, но сохранения фазового объема нет: элемент объема по ходу эволюции во времени может претерпевать в одних местах сжатие, а в других растяжение. Рассматривая движение на гиперповерхности постоянной энергии, оказывается возможным наблюдать феномены, специфические, казалось бы, только для диссипативной динамики: притягивающие неподвижные точки, предельные циклы [Карапетян, 1981; 1985; Борисов, Мамаев, 2002]. В работе [Борисов, Мамаев, 2003] была указана возможность реализации также и странных аттракторов.

Таким образом, кельтский камень — интереснейший объект для приложения методик, наработанных в теории динамических систем, в том числе

из-за специфического сочетания свойств диссипативной и консервативной динамики. В фазовом пространстве этой системы для каждого притягивающего множества имеется симметричный партнер — объект, составленный из траекторий с точно таким же поведением, но в обратном времени. Кроме того, возможны динамические режимы, симметричные по отношению к обращению времени, в том числе *квазиконсервативный хаос* (в литературе используется также термин «смешанная динамика» [Гонченко и др., 2012]).

Материалы, изложенные ниже, нацелены на выявление феноменов диссипативной нелинейной динамики в модели кельтского камня в сопоставлении с моделями, обсуждавшимися в приложении А. Хаотические аттракторы, которые удалось пока наблюдать в численных расчетах для кельтских камней, не относятся к однородно гиперболическим. Вопрос о реализации гиперболического хаоса в этой и других моделях неголономной механики, а также о возможных его приложениях интересен, но пока не исследован.

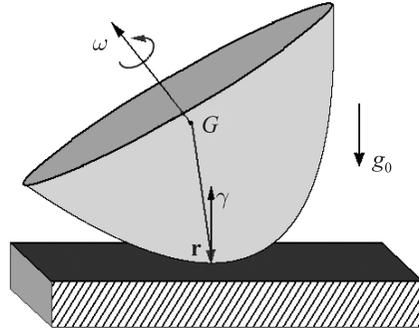


Рис. В.1. Модель «кельтского камня»: G — центр масс, γ — орт нормали к поверхности, \mathbf{r} — вектор, соединяющий центр масс и точку контакта, ω — вектор угловой скорости

Рассмотрим твердое тело массы $m = 1$ с гладкой поверхностью выпуклой формы, совершающее механическое движение на плоскости (рис. В.1). Сила тяжести перпендикулярна к плоскости и характеризуется ускорением свободного падения g_0 . Движение таково, что в каждый момент имеет место единственная точка контакта с плоскостью, причем скорость этой точки всегда остается нулевой. Предполагается, что в области, где может располагаться точка контакта, поверхность имеет вид эллиптического параболоида, причем два главных радиуса кривизны заданы константами a_1 и a_2 . Расстояние центра масс от вершины параболоида дается пара-

метром h . Уравнения движения формулируются для составляющих момента импульса $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$ и ортогонального к плоскости вектора $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, определенных в системе координат, фиксированной относительно твердого тела, и имеют вид [Борисов, Мамаев, 2002; 2003; Гонченко и др., 2012]

$$\begin{aligned} \dot{M}_1 &= M_2 \omega_3 - M_3 \omega_2 + \omega_1 \rho - r_1 \omega_r + g_0 (r_2 \gamma_3 - \gamma_3 r_2), \\ \dot{M}_2 &= M_3 \omega_1 - M_1 \omega_3 + \omega_2 \rho - r_2 \omega_r + g_0 (r_3 \gamma_1 - \gamma_1 r_3), \\ \dot{M}_3 &= M_1 \omega_2 - M_2 \omega_1 + \omega_3 \rho - r_3 \omega_r + g_0 (r_1 \gamma_2 - \gamma_2 r_1), \\ \dot{\gamma}_1 &= \gamma_2 \omega_3 - \gamma_3 \omega_2, \\ \dot{\gamma}_2 &= \gamma_3 \omega_1 - \gamma_1 \omega_3, \\ \dot{\gamma}_3 &= \gamma_1 \omega_2 - \gamma_2 \omega_1. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Кроме динамических переменных, относительно которых записаны уравнения, в правых частях использованы выражающиеся через них координаты центра масс тела G относительно точки контакта

$$r_1 = -a_1 \gamma_1 / \gamma_3, \quad r_2 = -a_2 \gamma_2 / \gamma_3, \quad r_3 = -h + \frac{1}{2} (a_1 \gamma_1^2 + a_2 \gamma_2^2) / \gamma_3^2 \quad (\text{B.2})$$

и компоненты угловой скорости $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, определяемые через составляющие вектора \mathbf{M} и вектора $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ из решения системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \cos^2 \delta + I_2 \sin^2 \delta + r_2^2 + r_3^2 & (I_1 - I_2) \cos \delta \sin \delta - r_1 r_2 & -r_1 r_3 \\ (I_1 - I_2) \cos \delta \sin \delta - r_2 r_1 & I_1 \sin^2 \delta + I_2 \cos^2 \delta + r_3^2 + r_1^2 & -r_2 r_3 \\ -r_3 r_1 & -r_3 r_2 & I_3 + r_1^2 + r_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

где δ имеет смысл угла между динамическими и геометрическими главными осями. Кроме того, в правых частях присутствуют величины

$$\begin{aligned} \rho &= r_1 \dot{r}_1 + r_2 \dot{r}_2 + r_3 \dot{r}_3, \\ \dot{r}_1 &= -a_1 [(\gamma_2 \omega_3 - \gamma_3 \omega_2) \gamma_3 - (\gamma_1 \omega_2 - \gamma_2 \omega_1) \gamma_1] / \gamma_3^2, \\ \dot{r}_2 &= -a_2 [(\gamma_3 \omega_1 - \gamma_1 \omega_3) \gamma_3 - (\gamma_1 \omega_2 - \gamma_2 \omega_1) \gamma_2] / \gamma_3^2, \\ \dot{r}_3 &= [a_1 \gamma_1 (\gamma_2 \omega_3 - \gamma_3 \omega_2) + a_2 \gamma_2 (\gamma_3 \omega_1 - \gamma_1 \omega_3)] / \gamma_3^2 - (a_1 \gamma_1^2 + a_2 \gamma_2^2) (\gamma_1 \omega_2 - \gamma_2 \omega_1) / \gamma_3^3. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

В силу наличия у системы интеграла энергии

$$E = \frac{1}{2}(M_1\omega_1 + M_2\omega_2 + M_3\omega_3) - g_0(r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2 + r_3\gamma_3) \quad (\text{В.5})$$

и геометрического интеграла

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad (\text{В.6})$$

динамика в шестимерном пространстве состояний $(M_1, M_2, M_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ осуществляется на четырехмерной гиперповерхности. При описании с помощью сечения Пуанкаре задача сводится к анализу трехмерного отображения [Борисов, Мамаев, 2002; 2003; Гонченко и др., 2012].

Система обладает симметрией относительно обращения времени,

$$t \leftrightarrow -t, M_1 \leftrightarrow -M_1, M_2 \leftrightarrow -M_2, M_3 \leftrightarrow -M_3, \gamma_1 \leftrightarrow \gamma_1, \gamma_2 \leftrightarrow \gamma_2, \gamma_3 \leftrightarrow \gamma_3, \quad (\text{В.7})$$

а также относительно замены,

$$t \leftrightarrow t, M_1 \leftrightarrow -M_1, M_2 \leftrightarrow -M_2, M_3 \leftrightarrow M_3, \gamma_1 \leftrightarrow -\gamma_1, \gamma_2 \leftrightarrow -\gamma_2, \gamma_3 \leftrightarrow \gamma_3, \quad (\text{В.8})$$

что полезно учитывать при анализе.

Система дифференциальных уравнений (В.1) решается численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка [Калиткин, 1978]. На каждом шаге для вычисления правых частей применяются соотношения (В.2), производится решение линейной системы алгебраических уравнений (В.3) относительно составляющих вектора угловой скорости и вычисление дополнительных величин (В.4). В некоторых случаях (например, при вычислении показателей Ляпунова, см. ниже) полезно предусмотреть приведение вектора γ к единичной норме, а составляющих вектора момента импульса \mathbf{M} к величинам, обеспечивающим фиксированное заданное значение энергии E . Для этого используются формулы

$$\gamma_i := \frac{\gamma_i}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}}, \quad k = i = 1, 2, 3, \quad (\text{В.9})$$

и

$$M_i := M_i \sqrt{2 \frac{E + g_0(r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2 + r_3\gamma_3)}{M_1\omega_1 + M_2\omega_2 + M_3\omega_3}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{В.10})$$

Вычисление отображения Пуанкаре реализовано в виде специальной подпрограммы, использующей метод Эно [Ненон, 1982; Кузнецов, 2001]. А именно, при обнаружении в процессе вычислений такой ситуации, что

перед очередным шагом $q = M_2\gamma_1 - M_1\gamma_2 > 0$, а после него $q < 0$, с помощью того же разностного метода делается дополнительный шаг, на котором за независимую переменную принимается q , а величина шага дается полученным перед этим значением q с обратным знаком. Это обеспечивает возвращение изображающей точки на секущую Пуанкаре, притом согласованное по точности с используемой разностной схемой.

Для построения карты динамических режимов производится сканирование плоскости параметров перебором узлов сетки с некоторым шагом по двум параметрам. В каждой точке выполняется порядка 10^3 итераций отображения Пуанкаре и по результатам последних итераций проводится анализ на предмет наличия периода от 1 до 14 (с некоторым заданным уровнем допустимой погрешности). При обнаружении периодичности соответствующий пиксель на диаграмме обозначается определенным тоном серого цвета и производится переход к анализу следующей точки на плоскости параметров. Обычно в качестве начальных условий в новой точке разумно задавать состояние, полученное в предыдущей точке («сканирование с наследованием»), что в большинстве случаев способствует ускорению сходимости к установившемуся режиму динамики.

Обсудим процедуру вычисления спектра показателей Ляпунова.

Если говорить об исходной системе (В.1), то у нее шесть показателей Ляпунова, три из которых нулевые. Один нулевой показатель отвечает возмущению сдвига вдоль опорной траектории, а два других — возмущениям сдвига по энергии и по норме вектора γ . Остается три подлежащих вычислению нетривиальных показателя.

Для отображения Пуанкаре один нулевой показатель исключается сразу. Два других можно устранить, если при обращении к вычислению отображения каждый раз использовать нормировку вектора γ на единицу и вектора момента к величине, обеспечивающей заданное значение механической энергии.

Сложность исходных уравнений делает предпочтительным вариант методики расчета показателей Ляпунова, не использующий линеаризованных уравнений в вариациях. А именно, при заданных параметрах и начальных условиях с применением подпрограммы вычисления отображения Пуанкаре выполняем совместно итерации для четырех состояний с одинаковой энергией, одно из которых отвечает опорной траектории, а три других — слабо возмущенным относительно него состояниям. После каждой итерации для трех векторов возмущения производится ортогонализация по Граму–Шмидту и приведение к заданной малой фиксированной норме, после чего для продолжения используются переопределенные векторы возмущения.

Наличие положительного показателя Ляпунова свидетельствует о хаотической природе динамического режима. Если сумма всех трех показателей отрицательная, то речь идет о странном хаотическом аттракторе, а если она нулевая, с точностью до погрешности вычислений, то это указывает на присутствие квазиконсервативного хаоса.

Рис. В.2 иллюстрирует один из интригующих феноменов динамики кельтского камня — явление реверса. Здесь приводятся полученные в расчетах зависимости от времени одной из составляющих вектора угловой скорости, причем начальное состояние соответствует вращению вокруг вертикальной оси в «неподходящем» направлении. Малые возмущения исходного состояния дают начало развитию сложного переходного процесса, в ходе которого возникают колебания относительно других координатных осей. В дальнейшем эти колебания трансформируют движение так, что направление вращения изменяется на противоположное, что отвечает смене знака ω_3 .

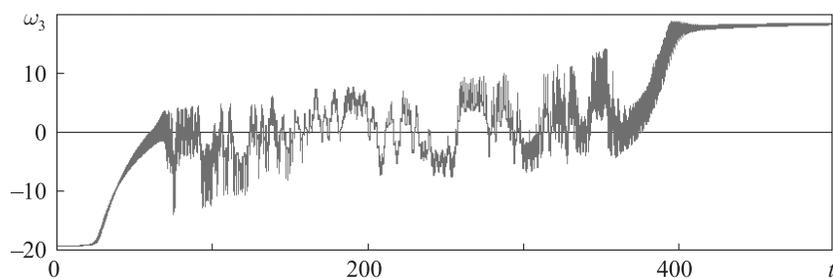


Рис. В.2. Зависимости компоненты угловой скорости ω_3 от времени, иллюстрирующие эффект реверса: после переходного процесса направление вращения меняет знак. Параметр энергии $E = 1380$, остальные параметры $I_1 = 5$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $\delta = 0.2$

На рис. В.3 показаны карты режимов на плоскости параметров энергии E и угла поворота осей инерции относительно геометрических осей δ для двух случаев, $I_1 = 1$ и 2 , когда остальные параметры фиксированы: $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$.¹ При построении карт использо-

¹ Вариант с $I_1 = 1$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$ отвечает особой ситуации, когда «тяжелая» часть кельтского камня имеет вид тонкой пластины, прикрепленной к невесомому телу выпуклой формы, обеспечивающему нужные геометрические свойства; «неравенство треугольника», которому должны удовлетворять компоненты матрицы момента инерции в диагональном представлении, в этом случае вырождается в равенство.

ваны результаты сканирования с наследованием слева направо и снизу вверх. Различные тона серого цвета обозначают динамику того или иного периода, причем период определяется для переменной M_3 . Белый цвет означает отсутствие идентифицированного с определенностью периода; эти области могут отвечать хаотическим или квазипериодическим режимам динамики.

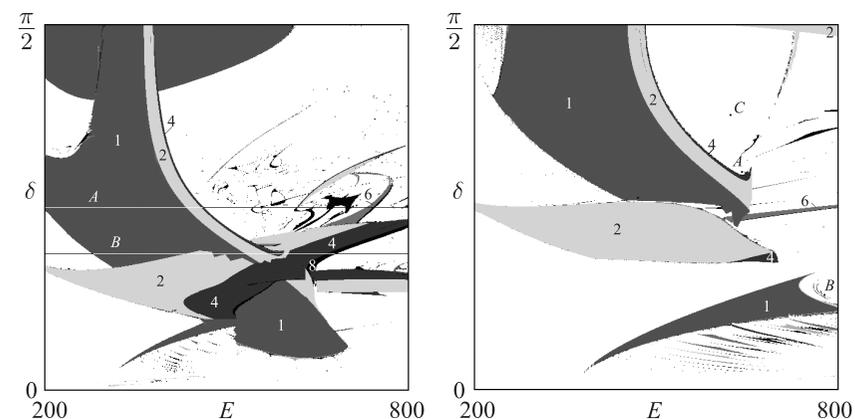


Рис. В.3. Карты динамических режимов модели кельтского камня на плоскости параметров для отображения Пуанкаре при $I_1 = 1$ (а) и $I_1 = 2$ (б), с остальными параметрами $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$. По горизонтальной оси отложена энергия E , а по вертикальной угол поворота осей инерции относительно геометрических осей δ . Горизонтальные линии A и B отвечают движению по параметру E при построении диаграмм на рис. В.4 и В.5. Точки A ($E = 642$, $\delta = 0.922$), B ($E = 770$, $\delta = 0.405$), C ($E = 620$, $\delta = 3\pi/8 = 1.178\dots$) соответствуют портретам аттракторов на рис. В.5

Обширные области, идентифицированные как зоны периода 1 для M_3 , с точки зрения динамики полного состояния системы (\mathbf{M}, γ) , отвечают режиму периода 2, но это цикл симметричный относительно замены (В.8). Таким образом, переход через границу из темно-серой в светло-серую область отвечает фактически не удвоению периода, а бифуркации потери симметрии.

Характерное окаймление белых хаотических областей сужающимися полосами разного серого тона отвечает последовательности бифуркаций удвоения периода, накапливающихся к границе хаоса. Внутри белой области, занимающей центральную часть карт, можно видеть множество ха-

рактрных небольших по размерам областей, «креветок», как в отображениях Эно и Икеды в приложении А. Наличие этих областей — признак негиперболической природы хаоса. Область в нижней части той и другой карты, где видна система отделенных друг от друга полосок периодичности, отвечает квазипериодической динамике, а полосы, или «языки», — режимам синхронизации колебательных составляющих с рациональными отношениями частот.

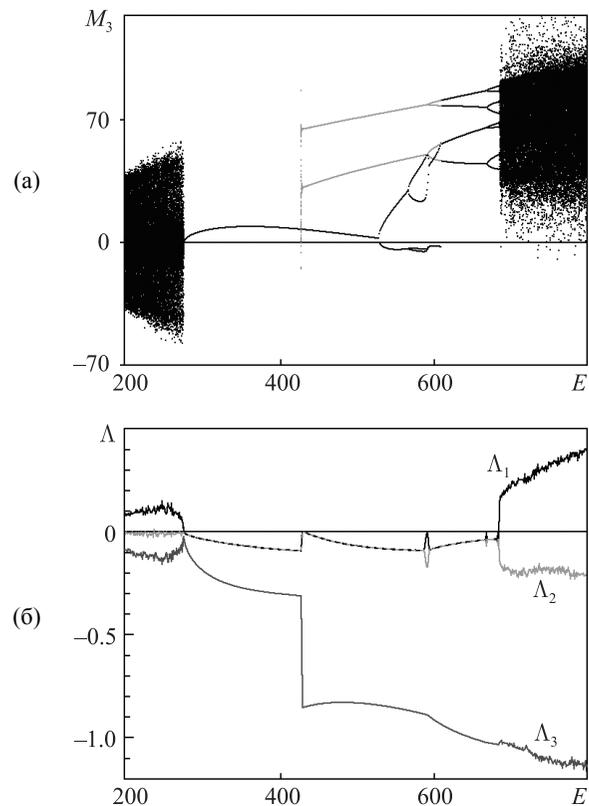


Рис. В.4. Бифуркационное дерево (а, б) и график трех показателей Ляпунова (в) для трехмерного отображения Пуанкаре системы (В.1) при параметрах $I_1 = 1$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $\delta = 3\pi/16$. Сканирование по параметру энергии E справа налево с наследованием начальных условий, за исключением показанных серым цветом ветвей дерева, которые получают сканированием справа налево

Две горизонтальные линии B и A на левой карте отвечают однопараметрическим бифуркационным диаграммам и графикам зависимости показателей Ляпунова от параметра E на рис. В.4 и В.5.

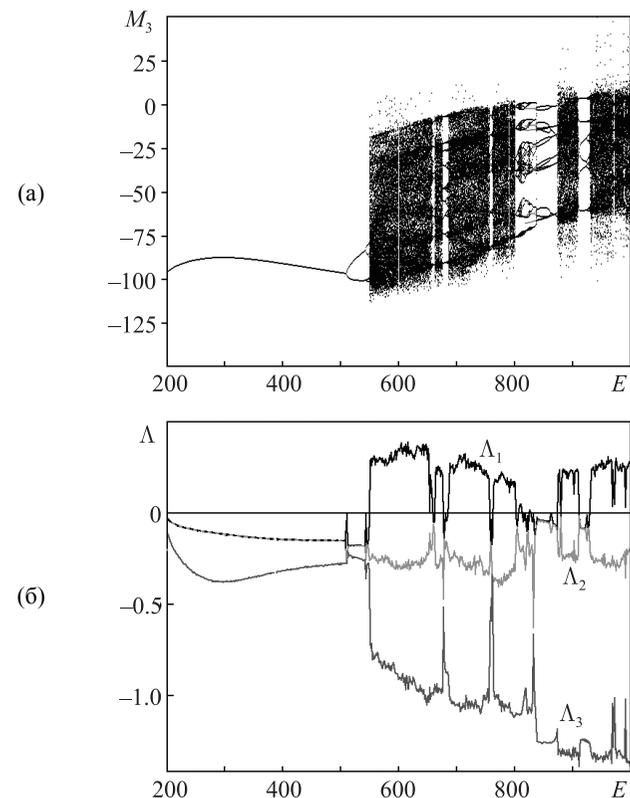


Рис. В.5. Бифуркационное дерево (а) и график трех показателей Ляпунова (б) для трехмерного отображения Пуанкаре системы (В.1) при параметрах $I_1 = 1$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $\delta = \pi/4$. Сканирование по параметру энергии E справа налево с наследованием начальных условий, за исключением показанных серым цветом ветвей на среднем графике, которые получают сканированием справа налево

На верхних диаграммах по вертикальной оси отложены значения составляющей момента импульса M_3 в момент прохождения секущей Пуанкаре при каждом заданном значении энергии E , которая отложена по гори-

зонтальной оси. При проведении вычислений параметр энергии изменяется шаг за шагом, и при новом ее значении начальные условия для итераций задаются состоянием, получаемым из состояния при предыдущем значении пропорциональным пересчетом момента импульса (см. (В.10)). Данные, полученные при сканировании слева направо, даны черным цветом, а справа налево — серым цветом. Несовпадение режимов, наблюдаемых в одном и другом случае, свидетельствует о мультистабильности, когда при одних и тех же параметрах системы могут возникать два (или более) аттракторов в зависимости от конкретных начальных условий.

В левой части диаграммы на рис. В.4 реализуется хаотическая динамика, о чем свидетельствует наличие положительного показателя Ляпунова. Второй показатель близок к нулю, а третий, отрицательный, близок по абсолютной величине к первому показателю. Такой спектр показателей Ляпунова говорит о близости к квазиконсервативному хаосу.

На рис. В.5 в левой части диаграммы и на рис. В.4 в центральной части имеют место области периодической динамики, которым отвечает количество ветвей, определяемое периодом данного режима при итерациях отображения Пуанкаре.

В области периодической динамики можно отметить мультистабильность и эффект гистерезиса — зависимость финального состояния системы от пути, которым к нему пришли (слева направо или справа налево), что выражается в несовпадении черных и серых линий. Можно видеть бифуркации удвоения периода, когда каждая ветвь раздваивается, с возникновением периода 4 и 8. В момент бифуркации старший показатель Ляпунова обращается в ноль. Переход к хаосу, по крайней мере на показанных диаграммах, не такой, как для одномерных отображений: вместо постепенного нарастания нерегулярной составляющей возникает сразу интенсивный хаос (возможность такой ситуации отмечена в работе [Гонченко и др., 2012]).

В правой части диаграмм хаотический режим не близок к квазиконсервативному хаосу и должен интерпретироваться как ассоциирующийся со странным аттрактором. Имеются один положительный и два отрицательных показателя Ляпунова и хорошо определена размерность аттрактора по Каплану–Йорке. Аттрактор не гиперболический: можно наблюдать изрезанность зависимости показателя Ляпунова от параметра (особенно на рис. В.5), с «провалами», отвечающими окнам периодичности, подобную той, что имеет место в отображении Эно. На карте динамических режимов эти окна соответствуют тому, что маршрут движения по параметру пересекает образования в виде «крестов».

Рассмотрим более подробно аттракторы, которые на карте, показанной на рис. В.3 справа, реализуются в точках А, В, С.

Если двигаться на плоскости параметров снизу вверх по вертикальной линии, проходящей через точку А, то можно наблюдать переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Это иллюстрируется древовидной диаграммой на рис. В.6, где можно видеть характерную картину ветвей, раздваивающихся в точках бифуркаций, и заполненную точками «крону», отвечающую области хаоса. На вставках показаны фрагменты картины в увеличенном виде, которые с увеличением масштаба становятся все в большей степени похожими на классическую картину «дерева Фейгенбаума» для одномерных отображений.

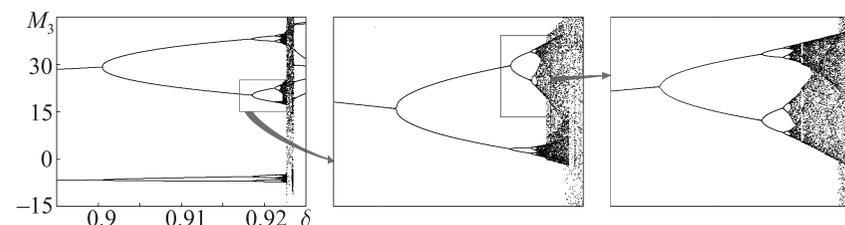


Рис. В.6. Бифуркационные деревья в области перехода к хаосу через удвоения периода по Фейгенбауму при параметрах $I_1 = 2$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $E = 642$. Сканирование ведется в сторону увеличения параметра δ с наследованием начальных условий

Измеряя на диаграмме расщепление ветвей по горизонтали, и вычисляя их отношения для последовательных уровней удвоения, получаем первую строку таблицы В.1. Аналогичным образом, определив отношения размеров расщепления ветвей по вертикальной координате, заполним вторую строку. Для перехода, относящегося к классу универсальности Фейгенбаума [Фейгенбаум, 1983; Шустер, 1988; Кузнецов, 2001], отношения должны сходиться к универсальным константам $\delta_F = 4.6692\dots$ и $\alpha_F = -2.5029\dots$. Из таблицы видно, что это подтверждается. Тот факт, что на первых уровнях удвоений оценки констант по абсолютной величине больше, связан с *эффектом кроссовера* [Reick, 1992]. При малой эффективной диссипации (понимаемой как характеристика сжатия трехмерного фазового объема в данной области фазового пространства) константы на низких уровнях близки к тем, которые характерны для удвоений в консервативных системах, $\delta_H = 8.721\dots$ и $\alpha_H = -4.018\dots$ [Райхл, 2008; Kuznetsov et al., 2005]. При каждой очередной бифуркации степень сжатия фазового

объема за характерный период удваивается и величины асимптотически приближаются к универсальным константам δ_F и α_F .

Таблица В.1. Результаты оценки констант Фейгенбаума

| | (2,4)/(4,8) | (4,8)/(8,16) | (8,16)/(16,32) | (32,64)/(64,128) | Константы Фейгенбаума |
|------------|-------------|--------------|----------------|------------------|-----------------------|
| δ_F | 6.52 | 5.29 | 4.70 | 4.62 | 4.6692 |
| α_F | -3.79 | -2.82 | -2.64 | -2.54 | -2.5029 |

Аттрактор трехмерного отображения Пуанкаре в проекции на плоскость переменных (M_1, M_2) , возникший в результате каскада удвоений периода, показан на рис. В.7 для точки A ($E = 642$, $\delta = 0.922$). Визуально он похож на аттракторы диссипативных отображений, наблюдаемые сразу за порогом перехода к хаосу через удвоения периода. На рисунке показан также спектр колебаний переменной M_3 при динамике на аттракторе. Он имеет вид, характерный для аттрактора, возникшего через каскад Фейгенбаума, в виде набора пиков с иерархической структурой [Фейгенбаум, 1983; Шустер, 1988; Кузнецов, 2001]. По Фейгенбауму, пики каждого следующего уровня должны быть в среднем на 13.4 дБ ниже предыдущего уровня, что разумно согласуется с наблюдаемой картиной. На глубоких уровнях пики разрушены, и имеет место сплошной спектр, т. е. динамика хаотическая.

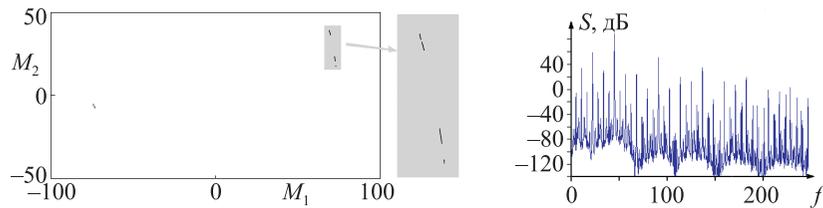


Рис. В.7. Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость двух составляющих момента импульса и спектр Фурье составляющей M_3 для параметров $I_1 = 2$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$ и $E = 642$, $\delta = 0.922$

Рассчитанный для отображения Пуанкаре спектр показателей Ляпунова данного аттрактора: $\Lambda_1 = 0.0453$, $\Lambda_2 = -0.0845$, $\Lambda_3 = -0.3112$. Имеется один положительный показатель и два превышающих его по абсолютной величине отрицательных показателя. Оценка размерности по формуле Каплана–

Йорке (приложение D) дает $D = m + \left(\sum_{i=1}^m \Lambda_i \right) / |\Lambda_{m+1}| = 1 + \Lambda_1 / |\Lambda_2| \approx 1.53$.

Поскольку результаты указывают на принадлежность перехода к классу универсальности Фейгенбаума, можно полагать, что на больших характерных временах описание динамики в этой области сводится к одномерному отображению с квадратичным экстремумом (из-за сильного сжатия в области фазового пространства трехмерного отображения, где расположен аттрактор). Соответственно, около критической точки должны иметь место феномены, характерные для одномерных отображений. В частности, за критической точкой реализуется странный аттрактор, подобный аттрактору отображения Эно при сильной диссипации [Benedicks and Carleson, 1991].

На рис. В.8 показан портрет хаотического аттрактора в точке B ($E = 770$, $\delta = 0.405$) и спектр Фурье сигнала, порожденного динамикой на этом аттракторе. Спектр весьма изрезанный, но с определенностью идентифицируется как сплошной, то есть отвечающий хаотической динамике. Как можно предположить на основании визуальной оценки аттрактора и вида спектра, это аттрактор, образовавшийся в результате разрушения инвариантного тора (замкнутой инвариантной кривой в сечении Пуанкаре). Показатели Ляпунова данного аттрактора трехмерного отображения $\Lambda_1 = 0.077$, $\Lambda_2 = -0.100$, $\Lambda_3 = -0.128$, а его размерность по формуле Каплана–Йорке — $D = 1 + \Lambda_1 / |\Lambda_2| \approx 1.76$.

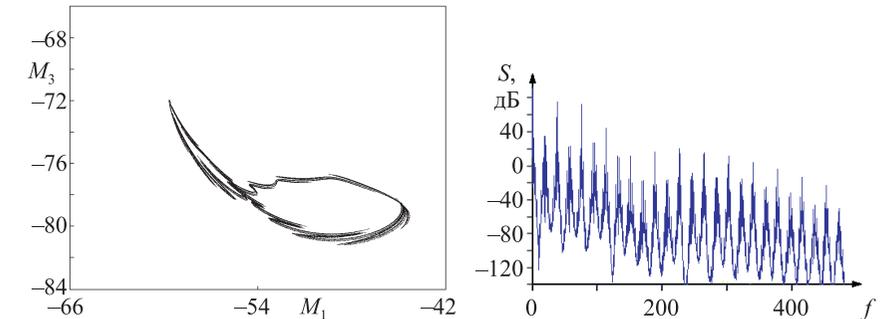


Рис. В.8. Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость двух составляющих момента импульса и спектр Фурье составляющей M_3 на аттракторе для параметров $I_1 = 2$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $E = 770$, $\delta = 0.405$

На рис. В.9 показан аттрактор в точке C ($E = 620$, $\delta = 3\pi/8$) и спектр Фурье, который определенно отвечает развитому хаосу. Его изрезанность, в отличие от спектров на рисунках В.7 и В.8, невелика, что свидетельствует об отсутствии каких-либо заметных периодических составляющих дви-

жения. Показатели Ляпунова: $\Lambda_1 = 0.282$, $\Lambda_2 = -0.093$, $\Lambda_3 = -0.686$. Здесь первый показатель Ляпунова положительный, а второй отрицательный, но по абсолютной величине меньше первого. Поэтому размерность по формуле Каплана–Йорке больше 2: $D = 2 + (\Lambda_1 + \Lambda_2) / |\Lambda_3| \approx 2.26$.

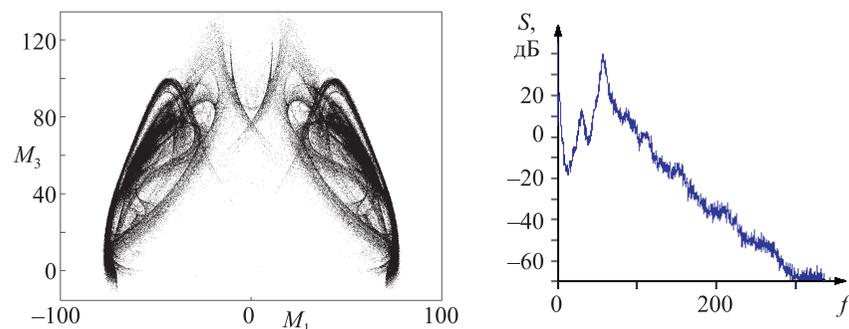


Рис. В.9. Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость двух составляющих момента импульса и спектр Фурье составляющей M_3 при динамике на аттракторе для параметров $I_1 = 2$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$ и $E = 620$, $\delta = 1.178$

Приложение С

Подкова Смейла и гомоклиническое сплетение

В главе 2 упоминалась сложная динамика, ассоциирующаяся с растяжением, складыванием и поперечным сжатием фазового объема в двумерном случае (см. рис. 2.2). Формализует эту ситуацию математическая конструкция, называемая *подковой Смейла* [Смейл, 1970; Гукенхеймер и Холмс, 2002; Аносов и др., 1991; Devaney, 2003; Шустер, 1988]. Это модельное отображение, которое Смейл изобрел в качестве контрпримера к положению, что в многомерном случае типичными являются исключительно системы, характеризующиеся наличием конечного числа неподвижных точек и периодических орбит в ограниченной области фазового пространства. В этом примере нет однородно гиперболического аттрактора. Вместо этого здесь возникает некоторое нетривиальное инвариантное множество седлового типа, содержащее хаотические орбиты. Присутствие подковы служит индикатором сложного динамического поведения и хаоса для некоторого множества орбит, хотя физически такая динамика может быть не наблюдаема из-за того, что инвариантное множество не является аттрактором.

Рассмотрим область в форме стадиона, состоящую из трех частей — квадрата S и присоединенных по бокам двух половинок круга, D_1 и D_2 . Пусть действие отображения состоит в том, что мы эту область растягиваем по горизонтали более чем вдвое и еще сильнее сжимаем по вертикали, так что она становится длинной и узкой. Далее, деформируем ее так, что она принимает форму подковы, и накладываем на исходную область, как показано на рис. С.1. Это и есть отображение подковы Смейла.

Все точки, принадлежащие областям D_1 и D_2 , отображаются внутрь области D_1 и в конце концов притягиваются к устойчивой неподвижной точке. Нетривиальна динамика точек, принадлежащих области S . Ясно, что после первой же итерации часть точек, принадлежавших области S , покинет ее; они попадут в D_1 или в D_2 и далее притянутся к неподвижной точке, так что за ними можно не следить.

Где располагались в начальный момент точки, которые после первой итерации отображения оказались внутри S ? Очевидно, они занимают две узкие вертикальные полосы V_0 и V_1 , которые при горизонтальном растяжении

как раз сравниваются по ширине с областью S . А как расположатся точки, которые на предыдущем временном шаге принадлежали области S и остались в ней? Они займут две узких горизонтальных полосы H_0 и H_1 , отвечающие двум половинкам подковы. На пересечении этих полос находится множество точек, которые остаются в S на протяжении двух итераций.

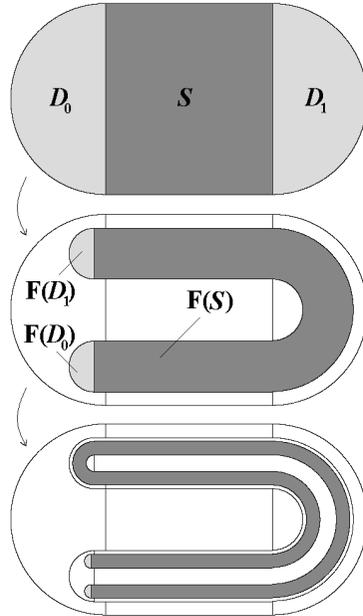


Рис. С.1. Отображение «подкова Смейла». Преобразование исходной области в форме стадиона за две итерации

Рассмотрим теперь отображение подковы за два шага итераций (см. нижнюю картинку на рис. С.2). Теперь имеется четыре вертикальных полосы, две из которых расположены в полосе V_0 (их обозначим V_{00} и V_{01}) и две в полосе V_1 (их обозначим V_{10} и V_{11}). Точки, принадлежащие этим полоскам, останутся в области S в течение двух итераций. Далее, имеется четыре горизонтальных полосы, две из которых расположены в полосе H_0 (это H_{00} и H_{10}) и две в полосе H_1 (это H_{01} и H_{11}). Эти области занимают точки, не покидающие за две итерации область S . Шестнадцать квадратиков, образованных пересечением всех этих полосок, есть геометрическое место точек, остающихся в области S в течение четырех итераций. Описанное

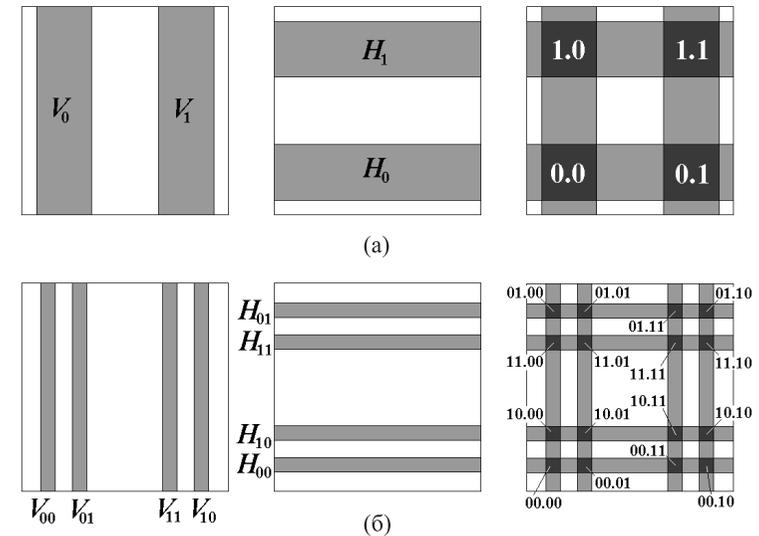


Рис. С.2. Два первых шага построения инвариантного множества Ω , состоящего из точек, никогда не покидающих область S . На картинках справа на панелях (а) и (б) темно-серые области отвечают множествам точек, выживающих на 2 и 4 итерациях соответственно

построение можно продолжать и дальше. При увеличении числа итераций на единицу внутри каждой вертикальной полосы выделяется две более узкие полосы, которые оставляются для дальнейшего рассмотрения. То же самое происходит с горизонтальными полосами. Каждая система полос в пределе бесконечного числа шагов построения порождает канторово множество. Пересечение двух таких множеств — «горизонтального» и «вертикального» — образует «канторову решетку» — множество Ω , элементы которого суть точки, остающиеся в области S всегда, на протяжении сколь угодно большого числа итераций отображения подковы. Полное описание инвариантного множества Ω в рамках символической динамики достигается введением подходящего двоичного кодирования для горизонтальных и вертикальных полос, такого, какое введено на рис. С.2 для первых двух шагов построения.

Элементы множества Ω кодируются двусторонними бесконечными двоичными последовательностями, а динамика в этом представлении определяется сдвигом на одну позицию за каждую итерацию (сдвиг Бернулли). Это означает присутствие хаоса. В самом деле, мы можем задать элемент этого

множества, используя случайный выбор. Скажем, бросая монету с двумя исходами, «орел» или «решка», задаем две последовательности символов и используем их как левую и правую половины двусторонней бинарной последовательности. Этим определяется элемент множества Ω в области S . Стартуя из этой точки и рассматривая динамику вперед и назад во времени, мы можем наблюдать посещение горизонтальных и вертикальных полос, изображенных на рис. С.2а, в соответствии с предписанной случайной последовательностью. Периодические символические последовательности отвечают периодическим орбитам отображения подковы; они образуют бесконечное счетное множество. Множество же всех непериодических последовательностей обладает мощностью континуума.

Следует подчеркнуть, что все выводы о сложной динамике отображения подковы опираются, по существу, только на топологические соображения. Конфигурация областей не обязательно должна выглядеть точно так же, как на рис. С.1, лишь бы сохранялось топологическое соответствие. Заключение о присутствии хаотической динамики и существовании бесконечного множества периодических орбит — это всегда существенный результат, хотя хаос, о наличии которого делается заключение на основании отображения подковы, может не наблюдаться как физически значимый режим динамики, из-за непритягивающей природы множества Ω .

Отображение подковы и существование инвариантного множества Ω тесно связаны с замечательным объектом — *гомоклиническим сплетением* [Гукенхеймер и Холмс, 2002; Неймарк и Ланда, 1987; Аносов и др., 1991; Hilborn, 2001; Ott, 2002]. На рис. С.3 показано расположение устойчивого и неустойчивого многообразий неподвижной точки типа седла, которая имеется у отображения подковы в области S . Наличие пересечения этих многообразий в гомоклинической точке Γ означает существование бесконечного набора других гомоклинических точек! В самом деле, точка Γ отображается в некоторую другую точку. Эта точка опять-таки обязана лежать на пересечении устойчивого и неустойчивого многообразий. Она, в свою очередь, отображается еще в одну точку того же типа, и так далее. Эти многократные пересечения можно видеть на рисунке (б), где показаны удлиненные сегменты обоих многообразий.

Присутствие гомоклинического сплетения — это также индикатор сложной динамики в смысле присутствия непритягивающего хаотического инвариантного множества в фазовом пространстве системы. Простые примеры физически значимых моделей, в которых этот феномен имеет место, — это отображения Эно и Икеды, обсуждавшиеся в приложении А.

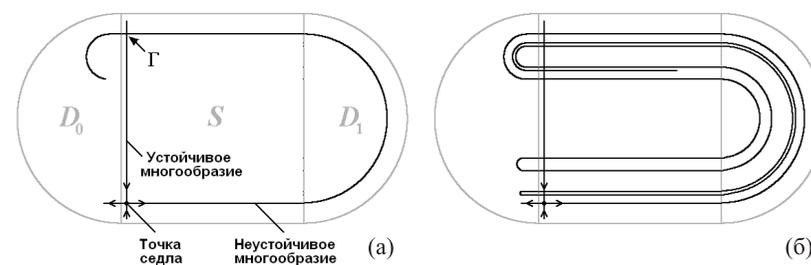


Рис. С.3. Расположение устойчивого и неустойчивого многообразий седловой неподвижной точки отображения подковы Смейла, пересекающихся в гомоклинической точке Γ (а), и иллюстрация формирования гомоклинического сплетения (б)

Приложение D

Размерности и формула Каплана–Йорке

Существенным атрибутом хаотических аттракторов является присущая канторова поперечная структура, обусловленная повторяющимися преобразованиями растяжения, складывания и поперечного сжатия фазового объема (см. главу 2). Инструментом для количественного описания этой структуры служит фрактальная геометрия [Мандельброт, 2002; Beck and Schlogl, 1993; Ott, 2002; Шустер, 1988]. В ней вводят понятие фрактальной размерности, которое обобщает обычную размерность (1 — для кривой, 2 — для поверхности, 3 — для объемного тела), но для таких нетривиальных множеств, как странные аттракторы, размерность может быть нецелой и содержать дробную часть.

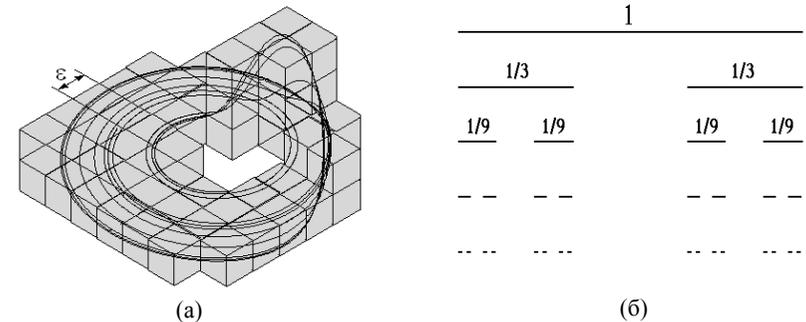


Рис. D.1. Покрытие аттрактора кубиками фиксированного размера ϵ (а) и построение классического множества Кантора путем удаления шаг за шагом центральных интервалов длиной в одну треть из каждого оставленного на предыдущем шаге отрезка (б)

Простейшее определение относится к так называемой *емкости*. В англоязычной литературе ее называют *box-counting dimension* — размерность, полученная подсчетом кубиков. Определение базируется на покрытии анализируемого множества набором кубиков равного размера ϵ без перекрытия (рис. D.1) и рассмотрении зависимости требуемого числа ячеек от

этого размера. Размерность определяется соотношением

$$D_0 = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon}. \quad (D.1)$$

Например, классическое множество Кантора (которое возникало при рассмотрении диссипативного отображения пекаря как сечение вертикальной линии объекта, показанного на рис. 2.1) можно покрыть интервалами длины $\varepsilon = 3^{-n}$ в количестве $N = 2^n$, что как раз соответствует n -му шагу построения. Переходя к пределу $n \rightarrow \infty$, что соответствует $\varepsilon \rightarrow 0$, из (D.1) получаем $D = \log 2 / \log 3 = 0.6309\dots$. Размерность аттрактора отображения пекаря, как нетрудно убедиться, на единицу больше, т. е. $D_b = 1.6309\dots$

Оказывается, однако, что для достаточно полной характеристики странных аттракторов приходится вводить не одну, а много размерностей. Почему же одной размерности D_0 не хватает?

Представим себе, что аттрактор неоднороден: некоторые элементы покрытия посещаются чаще, другие реже. Это никак не отражено в определении D_0 , хотя, очевидно, это должно иметь значение для такой количественной характеристики аттрактора, какой претендует быть размерность.

Чтобы учесть различные вероятности посещения ячеек, нужно принять во внимание инвариантную меру. Как отмечалось в главе 3, естественную инвариантную меру любой области S в фазовом пространстве можно определить как вероятность пребывания в этой области для типичной орбиты: $p(S) = \lim_{T \rightarrow \infty} [\tau(S, T) / T]$, где $\tau(S, T)$ обозначает время пребывания в области S при наблюдении в течение времени T . Предполагая, что для аттрактора определена инвариантная мера, мы приписываем определенную меру p_i каждой i -ой ячейке, которая представляет собой вероятность пребывания там для изображающей точки, совершающей движение по типичной орбите. Рассмотрим теперь сумму $I(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \log p_i$. Ее можно интерпретировать как количество информации, требуемое для указания ячейки пребывания в некоторый момент. Ясно, что эта сумма будет расти с уменьшением размера ячеек покрытия. Можно предположить, что этот рост происходит по степенному закону $I(\varepsilon) \cong \varepsilon^{-D_1}$, и определить предел

$$D_1 = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [I(\varepsilon) / \log \varepsilon] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \log_{\varepsilon} p_i. \quad (D.2)$$

Его называют *информационной размерностью*.

Более того, было введено бесконечное семейство обобщенных размерностей [Grassberger, 1983; Hentschel, Procaccia, 1983], которые называют *размерностями Реньи* в честь венгерского математика, который предложил их ранее (в ином контексте, нежели нелинейная динамика).

Предположим, что размер кубиков, покрывающих аттрактор, дается величиной ε , а вероятность пребывания в i -ой ячейке равна p_i . Тогда для любого действительного числа q размерность D_q определена как предел

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\log_{\varepsilon} \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q \right]. \quad (D.3)$$

Заметим, что при $q = 0$ она представляет собой емкость, а при $q = 1$ — информационную размерность. (Чтобы в этом убедиться, нужно в формуле (D.3) перейти к пределу $q \rightarrow 1$, раскрыв неопределенность по правилу Лопитала.) Еще один специальный случай — это *корреляционная размерность* D_2 , которая имеет выделенное значение благодаря относительной простоте ее оценки в вычислениях по методике, предложенной Грассбергером и Прокаччиа [Grassberger and Procaccia, 1983].

В рамках более аккуратного математического анализа выдвинуты усовершенствованные определения, подразумевающие возможность покрытия объекта элементами разной формы и размера (размерность Хаусдорфа) [Гукенхеймер и Холмс, 2002; Beck and Schlogl, 1993; Ott, 2002].

Вспомним теперь, что образование фрактальной канторовой структуры странных аттракторов происходит за счет растяжения и сжатия фазового объема, что связано соответственно с наличием положительных и отрицательных показателей Ляпунова. В связи с этим естественно задаться вопросом о связи между размерностью и спектром показателей Ляпунова. В каком-то смысле ответ на этот вопрос предлагает формула *Каплана–Йорке* [Kaplan, Yorke, 1979; Шустер, 1988; Кузнецов, 2001].

Пусть размерность фазового пространства диссипативной системы N , и мы имеем N штук показателей Ляпунова, которые считаем занумерованными в порядке убывания: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$. Если аттрактор хаотический, то старший показатель положителен. С другой стороны, сумма всех показателей Ляпунова отрицательна. Поэтому, вычисляя сумму $S_m = \sum_{i=1}^m \lambda_i$ последовательно для $m = 1, 2, \dots$, в результате будем получать сначала положительные, а потом отрицательные величины S_m (см. рис. D.2). Найдем такое m , что $S_m > 0$, но $S_{m+1} < 0$. Если рассмотреть подпространство, образованное век-

торами возмущений, которые отвечают первым m показателям Ляпунова, то в этом пространстве объем облака изображающих точек в процессе динамики будет возрастать. С другой стороны, в подпространстве, ассоциирующемся с количеством показателей на единицу большим, объем будет уже сжиматься. По остальным измерениям фазового пространства сжатие происходит еще быстрее, и эти измерения будем игнорировать.

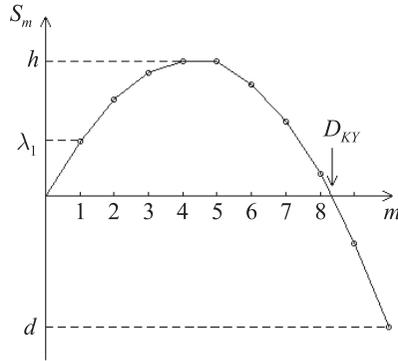


Рис. D.2. Иллюстрация зависимости сумм показателей Ляпунова от числа слагаемых. В частности, S_1 есть старший показатель Ляпунова λ_1 , максимальное значение S_m отвечает энтропии Колмогорова–Синяя h , S_N есть отрицательная величина d , характеризующая сжатие фазового объема при конденсации облака изображающих точек на аттрактор. Точка пересечения графика, образованного отрезками прямых, с осью абсцисс дает размерность по формуле Каплана–Йорке (D.7)

В подпространстве размерности $m+1$ рассмотрим покрытие аттрактора кубиками со стороной ε , причем ориентация ребер предполагается соответствующей направлениям, ассоциирующимся с показателями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}$. Общее количество элементов покрытия пусть будет $N(\varepsilon)$.

В силу движения изображающих точек по фазовым траекториям область, покрытая кубиками, перейдет через некоторое время T в область, сильно вытянутую по направлению, отвечающему старшему показателю, и сплюснутую по направлению, связанному с последним учитываемым показателем λ_{m+1} (рис. D.3). Каждый кубик превратится при этом в параллелепипед размера $\varepsilon_1 \times \varepsilon_2 \times \varepsilon_3 \times \dots \times \varepsilon_{m+1}$, где $\varepsilon_i = \varepsilon e^{\lambda_i T}$. Покрытие одного параллелепипеда кубиками со стороной ε_{m+1} потребует $n = \prod_{i=1}^m (\varepsilon_i / \varepsilon_{m+1}) =$

$= \prod_{i=1}^m (\varepsilon e^{\lambda_i T} / \varepsilon e^{-|\lambda_{m+1}|T})$ ячеек. Прорежав это со всеми $N(\varepsilon)$ параллелепипедами, получим новое покрытие аттрактора с количеством ячеек

$$N(\varepsilon_{m+1}) = nN(\varepsilon) = N(\varepsilon) \prod_{i=1}^m (\varepsilon e^{\lambda_i T} / \varepsilon e^{-|\lambda_{m+1}|T}) = N(\varepsilon) \prod_{i=1}^m (e^{\lambda_i T} / e^{-|\lambda_{m+1}|T}). \quad (D.4)$$

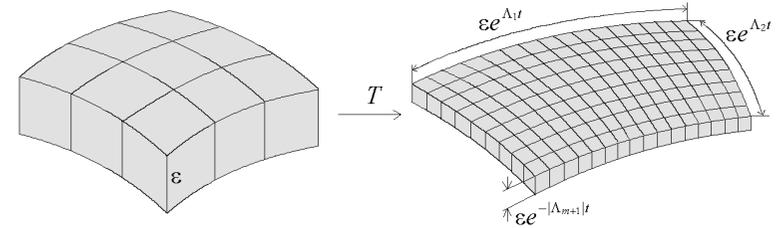


Рис. D.3. К выводу формулы Каплана–Йорке

Оценка фрактальной размерности по формуле (D.1) тогда дает

$$D \cong -\frac{\log N(\varepsilon_{m+1})}{\log \varepsilon_{m+1}} = \frac{\log N(\varepsilon) + \log \prod_{i=1}^m e^{\lambda_i T} - m \log e^{-|\lambda_{m+1}|T}}{-\log \varepsilon + |\lambda_{m+1}|T}. \quad (D.5)$$

Умножая левую и правую часть на величину $-\log \varepsilon + |\lambda_{m+1}|T$, получим

$$-D \log \varepsilon + D |\lambda_{m+1}|T = \log N(\varepsilon) + \sum_{i=1}^m \lambda_i T + m |\lambda_{m+1}|T, \quad (D.6)$$

причем первые члены в левой и правой части сокращаются, поскольку $D \cong -\log N(\varepsilon) / \log \varepsilon$. Таким образом, приходим к формуле Каплана–Йорке

$$D = m + \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{|\lambda_{m+1}|}. \quad (D.7)$$

Здесь, напомним, число m определяется так, что $S_m = \sum_{i=1}^m \lambda_i > 0$, но уже $S_{m+1} = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i < 0$.

Первоначальная гипотеза состояла в том, что эта формула позволяет вычислять информационную размерность аттракторов. Для хаотических

аттракторов двумерных обратимых отображений это утверждение было доказано. Однако в общем случае обосновать предположение Каплана–Йорке не удастся, и, по-видимому, оно, вообще говоря, и не справедливо. В то же время эмпирически эта формула обычно дает хорошие результаты, во многих случаях замечательно близкие к корректным оценкам размерности аттракторов.

С точки зрения содержания настоящей книги стоит особо подчеркнуть, что изложенные выше рассуждения существенно опираются на предположение о равномерном растяжении и сжатии элементов фазового объема в процессе динамической эволюции. Поэтому можно полагать, что эта формула должна особенно хорошо работать именно для однородно гиперболических аттракторов.

В заключение обратим внимание, насколько содержательна диаграмма на рис. D.2, изображающая зависимость сумм S_m от числа учитываемых показателей Ляпунова m . Из этого графика можно немедленно усмотреть во взаимной связи сразу несколько важных количественных характеристик хаотических аттракторов: S_1 — это положительный показатель Ляпунова, отвечающий за присутствие хаоса, максимальное значение S_{\max} отвечает энтропии Колмогорова–Синяя (согласно формуле Песина), пересечение графика с осью абсцисс определяет размерность Каплана–Йорке, а величина S_N — показатель сжатия фазового объема, сопровождающего приближение траекторий к аттрактору.

Приложение E

Модель Ханта: формальное определение

Модель Ханта — это искусственно сконструированный пример неавтономной потоковой системы с аттрактором типа Плыкина в стробоскопическом сечении Пуанкаре. Т. Хант разработал ее, будучи аспирантом профессора Р. МакКея, в своей диссертации [Hunt, 2000].

Система дифференциальных уравнений формулируется относительно двух переменных x и y , с правыми частями, зависящими от x , y и времени t :

$$dx/dt = f_*(x, y, t), \quad dy/dt = g_*(x, y, t). \quad (E.1)$$

Здесь функции f_* и g_* непрерывно дифференцируемые и имеют период 2π по аргументу t .

Динамика переменных x , y на временном интервале $\Delta t = 2\pi$ рассматривается на трех стадиях, протяженность каждой из которых $2\pi/3$. При формулировке соотношений используется фиктивное время s , которое в пределах каждой стадии меняется от 0 до 1. С целью обеспечить гладкость потока связь между s и t выбирается так, чтобы на стыках стадий скорость движения изображающей точки на плоскости x , y обращалась в ноль.

При описании потока используются три специальные криволинейные системы координат $(r, \theta)^i$, $i = 1, 2, 3$, связанные с прямоугольными координатами x , y соотношениями

$$\begin{aligned} x &= X + S_i(\pi/2 - |\theta|), & y &= Y + r \operatorname{sgn} \theta, & |\theta| &\geq \pi/2, \\ x &= X + S_i r \cos f_r(\theta), & y &= Y + r \sin f_r(\theta), & |\theta| &< \pi/2, \end{aligned} \quad (E.2)$$

где $f_r(\theta) = 2\pi^2 r \theta / [\pi^2(r+1) + 4(r-1)\theta^2]$, $S_1 = -1$ и $S_{2,3} = 1$. Величины X и Y определяют положение центра i -ой системы в исходных прямоугольных координатах. Для краткости переход к новым координатам и обратно обозначим соответственно $(r, \theta)^i = (R(x, y, X, Y, S_i), \Theta(x, y, X, Y, S_i))$ и $(x, y) = (F^i(r, \theta, X, Y, S_i), G^i(r, \theta, X, Y, S_i))$. Явные выражения для функций R , Θ , F^i , G^i легко выводятся из формул (E.2).

Положим $\lambda = (3 + \sqrt{5})/2$ и $\mu = (3 - \sqrt{5})/2$. Введем, кроме того, константы, определяющие геометрическое расположение элементов конструкции на плоскости (x, y) :

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{4}(6\sqrt{5} - 6 - (3 - \sqrt{5})\pi), \quad X_2 = 3, \quad X_3 = \frac{1}{4}(18 - 6\sqrt{5} - (\sqrt{5} - 1)\pi), \\ Y_1 &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \quad Y_2 = 1, \quad Y_3 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}), \\ R_1 &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \quad R_2 = 1, \quad R_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1). \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

1. На первой стадии $t \in [0, 2\pi/3]$ полагаем $s = \sin^2(\frac{3}{4}t)$. Точки начала отсчета специальных координат перемещаются в зависимости от s в соответствии с уравнениями

$$X_{i1}(s) = \lambda^s(X_i + \pi/2) - \pi/2, \quad Y_{i1} = \mu^s Y_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{E.4})$$

Кроме того, полагаем $R_{i1}(s) = \mu^s R_i$. Задавшись определенными значениями s, x, y , находим векторное поле $\mathbf{f}(x, y, s) = (f(x, y, s), g(x, y, s))$ посредством следующей процедуры.

(а) Если $x \leq 0$, выполняем переход в систему координат с индексом 1,

$$(r, \theta)^1 = (R(x, y, -X_{11}(s), Y_{11}(s), -1), \Theta(x, y, -X_{11}(s), Y_{11}(s), -1)), \quad (\text{E.5})$$

и, обозначая точкой производную по s , полагаем

$$\dot{\theta} = (\ln \lambda)\theta, \quad \dot{r} = (\gamma(\theta, X_{11}(s))h_{12}(r, R_{11}(s)) + (1 - \gamma(\theta, X_{11}(s))))(\ln \mu)r. \quad (\text{E.6})$$

Здесь введены функции

$$\begin{aligned} \gamma(\theta, X) &= \begin{cases} 1, & |\theta| \leq \frac{\pi}{2}, \\ \cos^2 \frac{1}{4}\pi(2|\theta| - \pi)X^{-1}, & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + X, \\ 0, & |\theta| \geq \frac{\pi}{2} + X; \end{cases} \\ h_{12}(r, R) &= \begin{cases} \cos \pi(1 - r/\varepsilon), & r < \varepsilon, \\ 1, & \varepsilon \leq r \leq R - \varepsilon, \\ \frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{4}\cos \frac{1}{2\varepsilon}\pi(r - R), & |r - R| < \varepsilon, \\ \frac{\varepsilon}{2}, & r \geq R + \varepsilon. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Далее находим компоненты векторного поля (f_i, g_i) в прямоугольных координатах согласно формуле

$$\begin{aligned} f_i &= \begin{cases} \dot{X} - S \operatorname{sgn}(\theta)\dot{\theta}, & |\theta| \geq \pi/2, \\ \dot{X} + S\dot{r} \cos f_r(\theta) - Sr \sin f_r(\theta)(\dot{r} \partial f_r(\theta)/\partial r + \dot{\theta} \partial f_r(\theta)/\partial \theta), & |\theta| \leq \pi/2; \end{cases} \\ g_i &= \begin{cases} \dot{Y} + \operatorname{sgn}(\theta)\dot{r}, & |\theta| \geq \pi/2, \\ \dot{Y} + \dot{r} \sin f_r(\theta) + r \cos f_r(\theta)(\dot{r} \partial f_r(\theta)/\partial r + \dot{\theta} \partial f_r(\theta)/\partial \theta), & |\theta| \leq \pi/2, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

где $i = 1$, $S = S_1 = -1$, $\dot{X} = -(\ln \lambda)(X_{11} + \pi/2)$, $\dot{Y} = (\ln \mu)Y_{11}$.

(б) Если $x > 0$, то аналогичные вычисления выполняем в системах координат 2 и 3.

Находим сначала

$$(r, \theta)^2 = (R(x, y, X_{21}(s), Y_{21}(s), 1), \Theta(x, y, X_{21}(s), Y_{21}(s), 1)). \quad (\text{E.9})$$

Затем полагаем

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= (\ln \lambda)\theta, \\ \dot{r} &= (\gamma(\theta, X_{21}(s) - X_{31}(s))h_{12}(r, R_{21}(s)) + (1 - \gamma(\theta, X_{21}(s) - X_{31}(s))))(\ln \mu)r \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

и по формуле (E.8), в которой нужно принять $i = 2$, $S = S_2 = 1$, $\dot{X} = (\ln \lambda)(X_{21} + \pi/2)$, $\dot{Y} = (\ln \mu)Y_{21}$, находим компоненты векторного поля (f_2, g_2) .

Далее, вычисляем

$$(r, \theta)^3 = (R(x, y, X_{31}(s), Y_{31}(s), 1), \Theta(x, y, X_{31}(s), Y_{31}(s), 1)) \quad (\text{E.11})$$

и полагаем

$$\dot{\theta} = (\ln \lambda)\theta, \quad \dot{r} = (\gamma(\theta, X_{31}(s))h_3(r, R_{31}(s)) + (1 - \gamma(\theta, X_{31}(s))))(\ln \mu)r, \quad (\text{E.12})$$

где

$$h_3(r) = \begin{cases} \cos \pi(1 - r/\varepsilon), & r < \varepsilon, \\ 1, & r \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (\text{E.13})$$

По формуле (E.8), где нужно взять $i = 3$, $S = S_3 = 1$, $\dot{X} = (\ln \lambda) \times (X_{31} + \pi/2)$, $\dot{Y} = (\ln \mu)Y_{31}$, находим компоненты векторного поля (f_3, g_3) .

(в) Определим теперь векторное поле

$$\tilde{\mathbf{f}}(x, y, s) = \begin{cases} (f_1, g_1), & x \leq 0, \\ w(d_3, d_2) \cdot (f_2, g_2) + w(d_2, d_3) \cdot (f_3, g_3), & x > 0, \end{cases} \quad (\text{E.14})$$

где введена функция

$$w = w(u, v) = \sin^2\left(\frac{1}{2}\pi u(u+v)^{-1}\right), \quad (\text{E.15})$$

а ее аргументы определены как $d_\alpha = \max\{R^\alpha(x, y, X_{\alpha 1}(s), Y_{\alpha 1}(s)) - \mu^s R_\alpha, 0\}$, $\alpha = 2, 3$.

(г) В качестве заключительного шага вычислений на стадии 1 полагаем

$$\mathbf{f}(x, y, s) = \tilde{\mathbf{f}}(x, y, s) + \sum_{i=1}^3 \beta(\|\mathbf{x} - \mathbf{X}_{i1}\|) \cdot (\dot{\mathbf{X}}_{i1}(s) - \tilde{\mathbf{f}}(x, y, s) + (\ln \lambda)(\mathbf{x} - \mathbf{X}_{i1})). \quad (\text{E.16})$$

Здесь $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{X}_{i1}(s) = (S_i X_{i1}, Y_{i1})$, $\dot{\mathbf{X}}_{i1}(s) = (S_i \dot{X}_{i1}, \dot{Y}_{i1})$ и введена функция²

$$\beta(\rho) = \begin{cases} 1, & \rho \leq \varepsilon/4, \\ \cos^2 \pi(2\rho/\varepsilon - 1/2), & \varepsilon/4 < \rho < \varepsilon/2, \\ 0, & \rho \geq \varepsilon/2. \end{cases} \quad (\text{E.17})$$

2. На второй стадии $t \in [2\pi/3, 4\pi/3]$ полагаем $s = \sin^2(\frac{3}{4}t - \frac{1}{2}\pi)$.

Берем за начало отсчета специальных координат точку

$$\begin{aligned} X_{22}(s) &= X_2 + (1-s)D, & Y_{22}(s) &= Y_2 + (1-s)D, \\ D &= (\lambda - 1)(X_2 + \pi/2) + \mu R_2, \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

² В этом месте в работе Ханта имеется неточность. В то время как определения в тексте его диссертации соответствуют формулам (E.16) и (E.17), в коде программы на «Математике» в качестве аргумента функции β фигурирует квадрат нормы $\|\mathbf{x} - \mathbf{X}_{i1}\|^2$. Наши расчеты с использованием процедуры, описанной в главе 13, показали, что это момент принципиальный: при подстановке квадрата нормы гиперболичность аттрактора нарушается! С другой стороны, если следовать определениям (E.16) и (E.17), то аттрактор действительно гиперболический. Однако при выбранной у Ханта слишком малой величине $\varepsilon = 0.05$ фрактальная поперечная структура аттрактора в исправленной версии модели оказывается плохо различимой на иллюстрациях. Поэтому при вычислениях, представленных в разделе 4.5 настоящей книги, взято увеличенное значение $\varepsilon = 0.17$, которое в то же время остается внутри указанного в работе Ханта допустимого интервала.

представляем мгновенное состояние (x, y) в новых координатах

$$(r, \theta) = (R(x, y, X_{22}(s), Y_{22}(s)), 1), \Theta(x, y, X_{22}(s), Y_{22}(s), 1)) \quad (\text{E.19})$$

и полагаем

$$\dot{r} = -D, \quad \dot{\theta} = D. \quad (\text{E.20})$$

Производим обратный переход к прямоугольным координатам согласно формуле (E.8), где $S = 1$, $\dot{X} = -D$, $\dot{Y} = -D$, и находим компоненты векторного поля (f_0, g_0) . Окончательно, принимаем

$$\mathbf{f}(x, y, s) = w(a_2, b_2) \cdot (f_0, g_0), \quad (\text{E.21})$$

где функция w определена формулой (E.14), а ее аргументы выражаются формулами

$$\begin{aligned} a_2 &= \max\{R(x, y, X_{22}(s), \frac{1}{2}(Y_2 + Y_{22}(s)), 1) - \frac{1}{2}(-Y_2 + Y_{22}(s)) - \mu R_3, 0\}, \\ b_2 &= \max\{Y_{22}(s) - 2R_2\mu - R(x, y, X_{22}(s), Y_{22}(s), 1), 0\}. \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

3. На третьей стадии $t \in [4\pi/3, 2\pi]$ полагаем $s = \sin^2(\frac{3}{4}t - \pi)$. Берем за начало отсчета специальных координат точку

$$\begin{aligned} X_{13}(s) &= X_1 + (1-s)D, & Y_{13}(s) &= Y_1 + (1-s)D, \\ D &= (\lambda - 1)(X_1 + \pi/2) + \mu R_1. \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

Задавшись исходными значениями (x, y) , выполним переход к координатам (r, θ) :

$$(r, \theta) = (R(x, y, -X_{13}(s), Y_{13}(s)), -1), \Theta(x, y, -X_{13}(s), Y_{13}(s), -1)). \quad (\text{E.24})$$

Далее, определяем поток формулой (E.20) и производим переход к прямоугольным координатам согласно (E.8), считая, что $S = -1$, $\dot{X} = -D$, $\dot{Y} = -D$. Полагаем

$$\mathbf{f}(x, y, s) = w(a_3, b_3) \cdot (f_0, g_0), \quad (\text{E.25})$$

где функция w дается выражением (E.15) и

$$\begin{aligned} a_3 &= \max\{R(x, y, -X_{13}(s), \frac{1}{2}(Y_1 + Y_{13}(s)), -1) - \frac{1}{2}(-Y_1 + Y_{13}(s)) - \mu R_2, 0\}, \\ b_3 &= \max\{Y_{13}(s) - 2R_1\mu - R(x, y, -X_{13}(s), Y_{13}(s), -1), 0\}. \end{aligned}$$

4. В итоге, имея в виду, что $\mathbf{f}(x, y, s) = (f(x, y, s), g(x, y, s))$, получаем уравнения, описывающие динамику модели с непрерывным временем на

всех трех стадиях, в виде

$$dx/dt = \frac{3}{4} |\sin \frac{3}{2}t| f(x, y, s(t)), \quad dy/dt = \frac{3}{4} |\sin \frac{3}{2}t| g(x, y, s(t)), \quad (E.26)$$

где в правых частях учтен множитель $s'(t) = \frac{3}{4} |\sin \frac{3}{2}t|$, возникающий при переходе от фиктивного времени s к естественному времени t .

Список литературы

- Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. — М.: Наука, 1979.
- Айдарова Ю. С., Кузнецов С. П. Хаотическая динамика модели Ханта — искусственно сконструированной потоковой системы с гиперболическим аттрактором // Известия вузов — Прикладная нелинейная динамика, 2008. **16**, № 3. С. 176–196.
- Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.
- Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и избранные проблемы. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999.
- Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е., Нейман А. Б., Стрелкова Г. И., Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Тр. МИАН СССР, 1967. **90**. С. 3–210.
- Аносов Д. В. О вкладе Н. Н. Боголюбова в теорию динамических систем // УМН, 1994. **49:5** (299). С. 5–20.
- Аносов Д. В., Арансон С. Х., Гринес В. З., Плыкин Р. В., Сатаев Е. А., Сафонов, А. В., Солодов В. В., Старков А. Н., Степин А. М., Шлячков С. В. Динамические системы с гиперболическим поведением. *Динамические системы – 9*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **66**, ВИНТИ, М., 1991.
- Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: УдГУ, 2000.
- Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989.
- Арнольд В. И., Авец А. Эргодические проблемы классической механики. — Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999.
- Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца // ДАН СССР, 1977. **234**, №2. С. 336–339.
- Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. Изд. 2-е. — М.: Наука, 1970.
- Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Параметрические усилители и генераторы света // УФН, 1966. **88**, №3. С. 439–460.

- Балякин А. А., Рыскин Н. М.: Особенности расчета спектров показателей Ляпунова в распределенных автоколебательных системах с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов – Прикладная нелинейная динамика, 2007. **15**, №6. С. 3–21.
- Баранов С. В., Кузнецов С. П., Пономаренко В. И. Хаос в фазовой динамике осциллятора ван дер Поля с модулированной добротностью и дополнительной запаздывающей обратной связью // Известия вузов. — Прикладная нелинейная динамика, 2010. **18**, №1. С. 11–23.
- Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.
- Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.
- Блохина Е. В., Кузнецов С. П., Рожнев А. Г.. Высокая размерность хаотических аттракторов в гиротроне с нефиксированной структурой поля // Письма ЖТФ, 2006. **32**, вып. 8. С. 83–94.
- Борисов А. В., Мамаев И. С. (ред.): Неголономные динамические системы. Интегрируемость, хаос, странные аттракторы // Сборник статей. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
- Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // УФН, 2003. **173**. С. 407–418.
- Брин М.: И., Песин Я. Б. Частично гиперболические динамические системы // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1974. **38**:1. С. 170–212.
- Варзарев Ю. Н., Иванцов В. В., Спиридонов Б. Г. Моделирование электронных схем в системе Multisim. — Таганрог: изд-во ТТИ ЮФУ, 2008.
- Вул Е. Б., Синай Я. Г., Ханин К. М.: Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // УМН, 1984. **39**:3(237). С. 3–37.
- Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. — М.: Наука, 1966.
- Глас Л., Мэки М.: От часов к хаосу: Ритмы жизни. — М.: Мир, 1991.
- Гонченко А. С., Гонченко С. В., Шильников Л. П.. К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений // Нелинейная динамика, 2012. **8**, №1. С. 3–28.
- Гонченко А. С., Гонченко С. В., Казаков А. О. О некоторых новых аспектах хаотической динамики «кельтского камня» // Нелинейная динамика, 2012. **8**, №3. С. 507–518.
- Гукенхеймер, Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
- Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения, т. 1. — М.: Мир, 1971.
- Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения, т. 2. — М.: Мир, 1972.
- Дмитриев А. С., Панас А. И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. — М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002.

- Емельянов В. В., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М.: Генератор гиперболического хаоса на основе связанных пролетных клистронов // Письма в ЖТФ, 2009. **35**, вып. 16. С. 71–78.
- Жалнин А. Ю., Кузнецов, С. П. О возможности реализации в физической системе странного нехаотического аттрактора Ханта и Отта // ЖТФ, 2007. **77**, №4. С. 10–18.
- Жиров А. Ю. Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей // Матем. сб., 1994. **185**:6. С. 3–50.
- Жиров А. Ю. Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей // Матем. сб., 1994. **185**:9. С. 29–80.
- Жиров А. Ю. Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей. Часть 3. Алгоритм классификации // Матем. сб., 1995. **186**:2. С. 59–82.
- Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. — М.: Наука, 1988.
- Ильяшенко Ю. С. Аттракторы и их фрактальная размерность. — М.: МЦНМО, 2005.
- Калиткин Н. Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978.
- Карапетян А. В. О перманентных вращениях тяжелого твердого тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости // Прикладная математика и механика, 1981. **45**, вып. 5. С. 808–814.
- Карапетян А. В. Бифуркации Хопфа в задаче о движении тяжелого твердого тела по шероховатой плоскости // Известия АН СССР. Механика твердого тела, 1985. **20**, № 2. С. 19–24.
- Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. — М.: Факториал, 1999.
- Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. — М.: МЦНМО, 2005.
- Кифер Ю. Н. О малых случайных возмущениях некоторых гладких динамических систем // Известия АН СССР, серия математическая, 1974. **38**, №5. С. 1091–1115.
- Колмогоров А. Н. Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов // ДАН СССР, 1959. **124**. С. 754–755.
- Короновский А. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е. О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // УФН, 2009. **179**, вып. 12. С. 1281–1310.
- Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Пиковский А. С., Тюрюкина Л. В. Хаотическая динамика в системах связанных неавтономных осцилляторов с резонансным и нерезонансным механизмом передачи возбуждения // Известия вузов. — Прикладная нелинейная динамика, 2007. **15**, №6. С. 75–85.

- Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М.: Нелинейные колебания. — М.: Физматлит, 2002.
- Кузнецов А. С. Параметрические генераторы с хаотической амплитудной динамикой, отвечающей аттракторам типа Смейла–Вильямса // Известия вузов. — Прикладная нелинейная динамика, 2012. **20**, №1. С. 129–136.
- Кузнецов А. С., Кузнецов С. П., Сатаев И. Р. Параметрический генератор гиперболического хаоса на основе двух связанных осцилляторов с нелинейной диссипацией // ЖТФ, 2010. **80**, вып.12. С. 1–9.
- Кузнецов С. П. Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью // Известия вузов. — Радиофизика, 1982. **25**, №12. С. 1410–1428.
- Кузнецов С. П. Динамический хаос. — М.: Физматлит, 2001.
- Кузнецов, С. П. О возможности реализации параметрического генератора гиперболического хаоса // ЖЭТФ, 2008. **133**, №2. С. 438–446.
- Кузнецов, С. П. Пример неавтономной системы с непрерывным временем, имеющей аттрактор типа Плыкина в отображении Пуанкаре // Нелинейная динамика, 2009. **5**, №3. С. 403–424.
- Кузнецов, С. П. Гиперболические странные аттракторы систем, допускающих физическую реализацию // Известия вузов. — Прикладная нелинейная динамика, 2009. **17**, №4. С. 5–34.
- Кузнецов, С. П., Исаева О. Б., Осбалдестин А. Феномены комплексной аналитической динамики в системе связанных неавтономных осцилляторов с поочередным возбуждением. // Письма в ЖТФ, 2007. **33**, вып. 17. С. 69–76.
- Кузнецов, С. П., Пономаренко В. И. О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла–Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием // Письма в ЖТФ, 2008. **34**, вып. 18. С. 1–8.
- Кузнецов С. П., Сатаев И. Р. Проверка условий гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля // Известия вузов. — Прикладная нелинейная динамика, 2006. **14**, №5. С. 3–29.
- Кузнецов С. П., Селезнев Е. П.. Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // ЖЭТФ, 2006. **129**, №2. С. 400–412.
- Кузнецов С. П., Соха Ю. И. Гиперхаос в модельной неавтономной системе с каскадной передачей возбуждения по спектру. Известия вузов. — Прикладная нелинейная динамика, 2010. **18**, №3. С. 24–32.
- Кузнецов С. П., Тюрюкина Л. В.. Аттракторы типа Смейла–Вильямса в модельных системах с импульсным периодическим воздействием // Известия вузов. — Прикладная нелинейная динамика, 2010. **18**, №5. С. 80–92.
- Купцов П. В., Кузнецов С. П. О феноменах, сопровождающих переход к режиму синхронного хаоса в связанных неавтономных осцилляторах, представленных

- уравнениями для комплексных амплитуд // Нелинейная динамика, 2006. **2**, №3. С. 307–331.
- Ланда П. С. Нелинейные колебания и волны. — М.: Наука–Физматлит, 2010.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.: Механика. — М.: Наука, 1973.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.: Механика сплошных сред. — М.: Гостехтеоретиздат, 1953.
- Лоренц Э.. Детерминированное неперiodическое течение / В сб. Странные аттракторы, под ред. Я. Г. Синая и Л. П. Шильникова. — М.: Мир, 1981. — С. 88–116.
- Люиселл У. Связанные и параметрические колебания в электронике. — М.: ИЛ, 1963.
- Макаренко В. В. Моделирование радиоэлектронных устройств с помощью программы NI MULTISIM. Электронные компоненты и системы (Киев) VD MAIS, № 1, 50–56; №2, 51–57; №3, 44–51; №4, 44–51, №6, 46–53; №7, 54–59; №8, 46–56; №9, 65–69; №12, 47–52 (2008).
- Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
- Мандельштам Л. И. Лекции по колебаниям. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.
- Монин А. С., Яглом А. М.: Статистическая гидромеханика. Том 1. Механика турбулентности. — М.: Наука, 1965.
- Монин А. С., Яглом А. М.: Статистическая гидромеханика. Том 2. Механика турбулентности. — М.: Наука, 1967.
- Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972.
- Найфэ А. Х. Методы возмущений. — М.: Наука, 1986.
- Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Хаотические и стохастические колебания. — М.: Наука, 1987.
- Оселедец, В. И. Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Труды Московского математического общества, 1968, **19**. С. 197–231.
- Песин Я. Б. Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория // УМН, 1977. **32**:4(196). С. 55–112.
- Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. — М.: Техносфера, 2003.
- Плыкин Р. В. Источники и стоки А-диффеоморфизмов поверхностей // Математический сборник, 1974, т. **94** (136), №2 (6). С. 243–264.
- Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. — М.: Наука, 1984.
- Райхл Л. Е. Переход к хаосу в консервативных классических и квантовых системах. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008.

- Ремпен И. С., Егоров Е. Н., Савин А. Н., Пономаренко В. И. Операционные усилители. Учебно-методическое пособие. — Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 2004.
- Рюэль Д., Такенс Ф. О природе турбулентности / В сб. Странные аттракторы, под ред. Я. Г. Синая и Л. П. Шильникова. — М.: Мир, 1981. — С. 117–151.
- Синай Я. Г. О понятии энтропии динамической системы // ДАН СССР, 1959. **124**, №4. С. 768–771.
- Синай Я. Г. Гиббсовские меры в эргодической теории // УМН, 1972. **27**, № 4. С. 21–64.
- Синай Я. Г. Стохастичность динамических систем / В кн. Нелинейные волны, ред. Гапонов–Грехов А. В. — М.: Наука, 1979. — С. 192–212.
- Сармин Э. Н., Чудов Л. А. Об устойчивости численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих при применении метода прямых // Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 1963. **3:6**. С. 1122–1125.
- Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // УМН, 1970. **25:1(151)**. С. 113–185.
- Спротт, Дж. К. Элегантный хаос. Алгебраически простые хаотические потоки. — М.–Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2012.
- Тёрстон У. П., Уикс Д. Р. Математики трехмерных многообразий // В мире науки, 1984. №9. С. 74–88.
- Трубецков Д. И., Мчедлова Е. С., Красичков Л. В. Введение в теорию самоорганизации открытых систем. — М.: Физматлит, 2002.
- Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // УФН, 1983. **141**. С. 343–374.
- Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1. — М.: Мир, 1984.
- Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. — М.: Мир, 1968.
- Хернитер М. Е. Multisim. Современная система компьютерного моделирования и анализа схем электронных устройств. — М.: Издательский дом «ДМК-пресс», 2006.
- Хоровиц П., Хилл У. Искусство схемотехники. — М.: Мир, 1986.
- Шильников Л. П., Тураев Д. В. О катастрофах голубого неба // Доклады РАН, 1995. **342**. С. 596–599.
- Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009.

- Шустер Г. Детерминированный хаос. — М.: Мир, 1988.
- Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971.
- Afraimovich, V. and Hsu, S.-B. Lectures on chaotic dynamical systems. Somerville, MA, International Press (2003).
- Adler, R. L., Konheim, A. G., McAndrew, M. H. Topological entropy. Trans. Amer. Math. Soc. **114**, pp. 309–319 (1965).
- Alligood, K., Sauer, T., Yorke, J. A. CHAOS. An Introduction to Dynamical Systems. Springer-Verlag, New York, 1996.
- Andronov, A. and Pontrjagin, L. Systèmes Grossiers. Dokl. Akad. Nauk. SSSR **14**, pp. 247–251 (1937)
- Anishchenko, V. S., Kopeikin, A. S., Kurths, J., Vadivasova, T. E., Strelkova G. I. Studying hyperbolicity in chaotic systems. Physics Letters A **270**, pp. 301–307 (2000).
- Argyris, J. H., Faust, G., Haase, M. An exploration of chaos: an introduction for natural scientists and engineers. North-Holland (1994).
- Argyris, A., Syvridis, D., Larger, L. et al. Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links. Nature **438**, pp. 343–346 (2006).
- Ashwin, P. Riddled basins and coupled dynamical systems. In: Chazottes, J.-R. and Fernandez, B.(eds.): Dynamics of coupled map lattices and of related spatially extended systems, pp. 181–208. Springer (2005).
- Balazs, N. L. and Voros, A. Chaos on the pseudosphere. Physics Reports **143** (3), pp. 109–240 (1986).
- Banerjee, S., Yorke, J. A., Grebogi, C. Robust Chaos. Phys. Rev. Lett. **80**, pp. 3049–3052 (1998).
- Barreira, L. and Pesin, Y. Lectures on Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory. In: Smooth Ergodic Theory and Its Applications. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, pp. 3–90. AMS (2001).
- Beck, C. and Schlogl, F. Thermodynamics of Chaotic Systems: An Introduction. Cambridge University Press, Cambridge (1993).
- Belykh, V., Belykh, I., Mosekilde, E. The hyperbolic Plykin attractor can exist in neuron models. Int. J. of Bifurcation and Chaos **15**, pp. 3567–3578 (2005).
- Benedicks, M. and Carleson, L. The dynamics of the Hénon map. Ann. of Math. **133** (2), pp. 73–169 (1991).
- Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A., Strelcyn, J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Meccanica **15**, pp. 9–30 (1980).

- Bonatti, C., Diaz, L. J., Viana, M. Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity. A Global Geometric and Probabilistic Perspective. Encyclopedia of Mathematical Sciences. Vol.102. Springer: Berlin, Heidelberg, New-York (2005).
- Bowen R. Equilibrium states and ergodic theory of Anosov diffeomorphisms. Springer Lecture Notes in Math. **470** (1975).
- Borisov, A. V., Mamaev, I. S. The rolling motion of a rigid body on a plane and a sphere. Hierarchy of dynamics. Regular and Chaotic Dynamics **7**, No 2, pp. 177–200 (2002).
- Bricmont, J. and Kupiainen, A. Infinite-dimensional SRB measures. Physica D **103**, pp. 18–33 (1997).
- Bunimovich, L. A. and Sinai, Ya.G. Spacetime chaos in coupled map lattices. Nonlinearity **1**, pp. 491–516 (1988).
- Bunimovich, L. A. and Sinai, Ya.G. Statistical mechanics of coupled map lattices. In: Kaneko, K. (ed.) Theory and application of coupled map lattices, pp. 169–189. John Wiley & Sons Ltd. (1993).
- Cencini, M., Cecconi, F., Vulpiani A. Chaos: from simple models to complex systems. World Scientific Publ. (2009).
- Christiansen F. and Rugh H. H. Computing Lyapunov spectra with continuous Gram-Schmidt orthonormalization. Nonlinearity **10**, pp. 1063–1072 (1997).
- Chiasson, J. N. and Loiseau, J. J. (eds.): Applications of Time Delay Systems (Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 352). Springer (2007).
- Coudene, Y. Pictures of Hyperbolic Dynamical Systems. Notices of the American Mathematical Society **53**(1), pp. 8–13 (2006).
- Cross, M. C. and Hohenberg, P. C. Pattern formation outside of equilibrium. Rev. Mod. Phys. **65**, pp. 851–1112 (1993).
- Davis, H. T. Introduction to nonlinear differential and integral equations. Dover Publications (1962).
- Deshpande, A., Chen, Q., Wang, Y., Lai, Y.-C., Do Y. Effect of smoothing on robust chaos. Phys. Rev. E **82**, 026209 (2010).
- Devaney, R. L. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Westview Press, New York, Addison-Wesley (2003).
- Drutarovský, M. and Galajda, P. A Robust Chaos-Based True Random Number Generator Embedded in Reconfigurable Switched-Capacitor Hardware. Radioengineering **16** (3), pp. 120–127 (2007)
- Eckmann, J.-P. and Ruelle, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. Rev. Mod. Phys. **57**, pp. 617–656 (1985).
- Elhadj, Z. and Sprott, J. C. On the robustness of chaos in dynamical systems: Theories and applications. Front. Phys. China **3**(2), pp. 195–204 (2008).

- Elhadj, Z. and Sprott, J. C. Robust Chaos And Its Applications. World Scientific: Singapore (2011).
- Emel'yanov, V. V., Kuznetsov, S. P., Ryskin, N. M. Hyperbolic chaos in the klystron-type microwave vacuum tube oscillator. Chaos **20**, 043104 (2010).
- Farmer, J. D. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system. Physica D **4**, pp. 366–393 (1982)
- Farmer, J., Ott, E., Yorke, J. The dimension of chaotic attractors. Physica D **7**, pp. 153–180 (1983).
- Ford, J. The Fermi-Pasta-Ulam problem: Paradox turns discovery. Physics Reports **213** (5), pp. 271–310 (1992).
- Fortuna, L., Frasca, M., Xibilla, M. G. Chua's circuit implementations: yesterday, today, and tomorrow. World Scientific (2009).
- Fowler, A. C. An asymptotic analysis of the delayed logistic equation when the delay is large. IMA Journal of Applied Mathematics **28**, pp. 41–49 (1982).
- Gavrilov, N. K., Shilnikov, A. L. An example of blue sky catastrophe. In: Methods of qualitative theory of differential equations and related topics. Amer. Math. Soc. Transl., II Ser. **200**, pp.165–188. AMS, Providence, RI (1999).
- Geist, K., Parlitz, U., Lauterborn, W. Comparison of different methods for computing Lyapunov exponents. Prog. Theor. Phys. **83** (5), pp. 875–893 (1990).
- Giacomelli, G. and Politi, A. Relationship between Delayed and Spatially Extended Dynamical Systems. Phys. Rev. Lett. **76**, pp. 2686–2689 (1996)
- Gierer, A. and Meinhardt, H. A Theory of Biological Pattern Formation. Kybernetik **12**, pp. 30–39 (1972).
- Ginelli, F., Poggi, P., Turchi, A., Chaté, H., Livi, R., Politi, A. Characterizing Dynamics with Covariant Lyapunov Vectors. Phys. Rev. Lett. **99**, 130601 (2007).
- Glova, A. F. Phase locking of optically coupled lasers. Quantum Electronics **33**, pp. 283–306 (2003).
- Glyzin, S. D., Kolesov, A. Yu., Rozov, N. Kh. Blue Sky Catastrophe in Relaxation Systems with One Fast and Two Slow Variables. Differential Equations, **44** (2), pp. 161–175 (2008).
- Goldstein, D. H. and Collet, E. Polarized light. CRC Press (2003)
- Gonzalez-Miranda, J. M. Complex bifurcation structures in the Hindmarsh–Rose neuron model. Int. J. of Bifurcation and Chaos **17** (9), pp. 3071–3083 (2007).
- Grassberger, P. Generalized dimensions of strange attractors. Phys. Lett. A **97**, pp. 227–230 (1983).
- Grassberger, P. and Procaccia, I. Measuring the Strangeness of Strange Attractors. Physica D **9**, pp. 189–208 (1983).

- Greene, J. M. and Kim, J.-S. The calculation of Lyapunov spectra. *Physica D* **24**, pp. 213–225 (1987).
- Grines, V. Z. and Zhuzhoma, E. V. Expanding attractors. *Regular and Chaotic Dynamics* **11** (2), pp. 225–246 (2006).
- Grebenikov, E., Mitropolsky, Yu.A., Ryabov, Y. A. *Asymptotic Methods in Resonance Analytical Dynamics*. CRC Press (2004).
- Guckenheimer, J., Holmes, P. Structurally stable heteroclinic cycles. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **103**, pp. 189–192 (1988).
- Haefner, J. W. *Modeling biological systems: principles and applications*. Springer (2005).
- Halbert, J. T. and Yorke, J. A. Modeling a chaotic machine's dynamics as a linear map on a "square sphere". <http://www.math.umd.edu/~halbert/taffy-paper-1.pdf> (2003).
- Hamdi, S., Schiesser, W. E., Griffiths, G. W. *Method of lines*. *Scholarpedia*, **2**(7), 2859 (2007).
- Hasselblatt, B. and Pesin, Y. Hyperbolic dynamics. *Scholarpedia* **3**(6) 2208 (2008).
- Hasselblatt, B. and Young, L. S. Anosov and Axiom A Systems. In: Scott, A. (ed) *Encyclopedia of Nonlinear Science*, pp. 11–13. NY, Routledge (2005).
- Hasselblatt, B., Pesin, Y., Schmeling, J. Pointwise Hyperbolicity Implies Uniform Hyperbolicity. Preprint ESI 2067, Vienna (2008).
- Heagy J. F. A physical interpretation of the Hénon map. *Physica D* **57**, 436–446 (1992).
- Hénon, M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Commun. Math. Phys.* **50**, pp. 69–77 (1976) Русский перевод: Хенон М.: Двумерное отображение со странным аттрактором // Странные аттракторы / под ред. Синая Я. Г. и Шильникова Л. П. — М.: Мир, 1981. — С. 152–153.
- Hénon, M. On the numerical computation of Poincaré maps. *Physica D* **5**, pp. 412–414 (1982).
- Hentschel, H. G.E. and Procaccia, I. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors. *Physica D* **8**, pp. 435–444 (1983).
- Hilborn, R. C. *Chaos and Nonlinear Dynamics*. Oxford University Press (2001).
- Hindmarsh, J. L. and Rose, R. M. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proc. Roy. Soc. of London. Ser. B, Biological Sciences.* **221** (1222), pp. 87–102 (1984).
- Hirata, Y., Nozaki, K., Konishi, T. The Intersection Angles between N-Dimensional Stable and Unstable Manifolds in 2N-Dimensional Symplectic Mappings. *Prog. Theor. Phys.*, **102**, pp. 701–706 (1999).
- Hopf, E. A mathematical example displaying features of turbulence. *Communications on Pure and Applied Mathematics* **1**, pp. 303–322 (1948).
- Hu, H. Y. and Wang, Z. H. *Dynamics of Controlled Mechanical Systems with Delayed Feedback*. Springer (2002).

- Huisman, J. and Weissing, F. J. Biological conditions for oscillations and chaos generated by multispecies competition. *Ecology* **82**, pp. 2682–2695 (2001).
- Hunt, B. R. and Ott, E. Fractal Properties of Robust Strange Nonchaotic Attractors. *Phys. Rev. Lett.* **87**, 254101 (2001).
- Hunt, T. J. *Low Dimensional Dynamics: Bifurcations of Cantori and Realisations of Uniform Hyperbolicity*. PhD Thesis. University of Cambridge (2000).
- Hunt, T. J. and MacKay, R. S. Anosov parameter values for the triple linkage and a physical system with a uniformly chaotic attractor. *Nonlinearity* **16**, pp. 1499–1510 (2003).
- Ikeda, K., Daido, H., Akimoto, O. Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity. *Phys. Rev. Lett.* **45**, pp. 709–712 (1980).
- Isaeva, O. B., Jalnine, A. Yu., Kuznetsov, S. P. Arnold's cat map dynamics in a system of coupled nonautonomous van der Pol oscillators. *Phys. Rev. E* **74**, 046207 (2006).
- Isaeva, O. B., Kuznetsov, S. P., Osbaldestin, A. H. A system of alternately excited coupled non-autonomous oscillators manifesting phenomena intrinsic to complex analytical maps. *Physica D* **237**, pp. 873–884 (2008).
- Jalnine, A. Yu. and Kuznetsov, S. P. Effect of noise in a nonautonomous system of alternately excited oscillators with a hyperbolic strange attractor. *Phys. Rev. E* **77**, 036220 (2008).
- Järvenpää, E. SRB-measures for coupled map lattices. In: Chazottes, J.-R. and Fernandez, B. (eds.): *Dynamics of coupled map lattices and of related spatially extended systems*, pp. 95–114. Springer (2005).
- Jenkins, G. M. and Watts, D. G. *Spectral analysis and its application*. Holden-Day, Inc., San Francisco (1968).
- Kaneko, K. (ed.): *Theory and application of coupled map lattices*. John Wiley & Sons Ltd. (1993).
- Kaplan, J. L. and Yorke, J. A. A chaotic behavior of multi-dimensional differential equations. In: Peitgen, H.-O. and Walther, H.-O. (eds.) *Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points*. *Lecture Notes in Mathematics*, **730**, pp. 204–227. Springer, Berlin, N. Y. (1979).
- Kim, J.-W., Kim, S.-Y., Hunt, B., Ott, E. Fractal properties of robust strange nonchaotic attractors in maps of two or more dimensions. *Phys. Rev. E* **67**, 036211 (2003).
- Krauskopf, B., Osinga, H. M., Doedel E. J., Henderson, M. E., Guckenheimer, J., Vladimirovsky, A., Dellnitz, M., Junge, O. A survey of methods for computing (un) stable manifolds of vector fields. *Int. J. Bifurcation and Chaos* **15**, pp. 763–791 (2005).
- Kruglov, V. P. and Kuznetsov, S. P. An autonomous system with attractor of Smale–Williams type with resonance transfer of excitation in a ring array of van der Pol oscillators. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **16**, pp. 3219–3223 (2011).

- Kuptsov, P. V. Fast numerical test of hyperbolic chaos. *Phys. Rev. E*, **85**, 015203 (2012).
- Kuptsov, P. V., Kuznetsov, S. P., Sataev, I. R. Hyperbolic attractor of Smale-Williams type in a system of two coupled non-autonomous amplitude equations. Preprint nlin. arXiv: 0804.3677 (2008).
- Kuptsov, P. V. and Kuznetsov, S. P. Violation of hyperbolicity in a diffusive medium with local hyperbolic attractor. *Phys. Rev. E* **80**, 016205 (2009).
- Kuptsov, P. V., Kuznetsov, S. P., Pikovsky, A. Hyperbolic Chaos of Turing Patterns. *Phys. Rev. Lett.* **108**, 194101 (2012).
- Kuramoto, Y. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Springer, Berlin (1984).
- Kuznetsov, S. P., Kuznetsov, A. P. and Sataev, I. R. Multiparameter Critical Situations, Universality and Scaling in Two-Dimensional Period-Doubling Maps. *J. Stat. Phys.* **121**, Nos. 5–6, pp. 697–748 (2005).
- Kuznetsov, A. P., Savin, A. V., Savin, D. V. On some properties of nearly conservative dynamics of Ikeda map and its relation with the conservative case. *Physica A* **387**, pp. 1464–1474 (2008).
- Kuznetsov, A. S. and Kuznetsov, S. P. Parametric generation of robust chaos with time-delayed feedback and modulated pump source. *CNSNS* **18**, No 3, <http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2012.05.023> (2013).
- Kuznetsov, S. P. Example of a Physical System with a Hyperbolic Attractor of the Smale-Williams Type. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 144101 (2005).
- Kuznetsov, S. P. A non-autonomous flow system with Plykin type attractor. *CNSNS* **14**, 3487–3491 (2009).
- Kuznetsov, S. P. Plykin-type attractor in nonautonomous coupled oscillators. *Chaos* **19**, 013114 (2009a).
- Kuznetsov, S. P. Example of blue sky catastrophe accompanied by a birth of Smale – Williams attractor. *Regular and Chaotic Dynamics* **15**, pp. 348–353 (2010).
- Kuznetsov, S. P., Mosekilde, E., Dewel, G., Borckmans, P. Absolute and convective instabilities in a one-dimensional Brusselator flow model. *J.Chem.Phys.* **106**, pp. 7609–7616 (1997).
- Kuznetsov, S. P. and Pikovsky, A. Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors. *Physica D* **232**, pp. 87–102 (2007).
- Kuznetsov, S. P. and Sataev, I. R. Hyperbolic attractor in a system of coupled non-autonomous van der Pol oscillators: Numerical test for expanding and contracting cones. *Physics Letters A* **365**, pp. 97–104 (2007).
- Kuznetsov, S. P. and Pikovsky, A. Hyperbolic chaos in the phase dynamics of a Q-switched oscillator with delayed nonlinear feedbacks. *Europhysics Letters* **84**, 10013 (2008).
- Kuznetsov, S. P. and Pikovsky, A. Attractor of Smale–Williams type in an autonomous time-delay system. Preprint nlin. arXiv: 1011.5972 (2010).

- Kuznetsov, S. P., Pikovsky, A. S., Sataev, I. R. Hyperbolic Smale–Williams attractor in Poincaré map of a four-dimensional autonomous system. In: Proc. of the III Int. Conf. “Frontiers of Nonlinear Physics”. Nizhny Novgorod–Saratov–Nizhny Novgorod, pp. 66–67 (2007).
- Kuznetsov, S. P., Pikovsky, A., Rosenblum, M. Collective Phase Chaos in the Dynamics of Interacting Oscillator Ensembles. *Chaos* **20**, 043134 (2010).
- Kuznetsov, Yu.A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer (1998).
- Lai, Y.-C., Grebogi, C., Yorke, J. A., Kan, I. How often are chaotic saddles nonhyperbolic? *Nonlinearity* **6**, pp. 779–798 (1993).
- Le Berre, M., Ressayre, E., Tallet, A., Gibbs, H. M., Kaplan, D. L., Rose M. H. Conjecture on the dimensions of chaotic attractors of delayed-feedback dynamical systems. *Phys. Rev. A* **35**, pp. 4020–4022 (1987).
- Lepri, S., Giacomelli, G., Politi, A., Arecchi, F. T. High-dimensional chaos in delayed dynamical systems. *Physica D* **70**, pp. 235–249 (1994).
- Letellier C. and Rössler, O. E. Hyperchaos. *Scholarpedia*, **2**(8), 1936 (2007).
- Lopes, A. O. An Example of Polynomial Interpolation of an Hyperbolic Attractor. In: *Lecture Notes in Mathematics* **1007**, pp. 498–511. Springer-Verlag (1983).
- Lorenz, E. N. *The essence of chaos*. University of Washington Press (1995).
- Lukin, K. A. Noise radar technology. *Telecommunications and Radio-Engineering* **16** (12), pp. 8–16 (2001).
- MacKay, R. S. Chaos in three physical systems. In: Dumortier, F., Broer, H., Mawhin, J., Vanderbauwhede, A., Verduyn Lunel S. (eds.) *Equadiff 2003*, pp. 59–72, World Science Press, Singapore (2005).
- MacKay, R. S. Complicated dynamics from simple topological hypotheses. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **359**, pp. 1479–1496 (2001).
- Maistrenko, Y. L., Popovych, O. V., Tass, P. A. Desynchronization and Chaos in the Kuramoto Model. In: Chazottes, J.-R and Fernandez, B. (eds.): *Dynamics of Coupled Map Lattices and of Related Spatially Extended Systems*, pp. 285–306. Springer (2005).
- Mannella, R. and Palleschi, V. Fast and precise algorithm for computer simulation of stochastic differential equations. *Phys. Rev. A* **40**, pp. 3381–3386 (1989).
- Manneville, P. Dissipative structures and weak turbulence. In: *Chaos — The Interplay Between Stochastic and Deterministic Behaviour*. *Lecture Notes in Physics* **457**, pp. 257–272 (1995).
- Mark Fox, A. *Quantum Optics: An Introduction*. Oxford University Press (2006).
- Marsden, J. E. and Rañiu, T. S. *Introduction to mechanics and symmetry: a basic exposition of classical mechanical systems*. Springer (1999).
- Matsumoto, T., Chua, L. O., Kobayashi, K. Hyperchaos laboratory experiment and numerical confirmation. *IEEE Trans, Circuits & Syst.* **33**, pp. 1143–1147 (1986).

- Mercader, I., Prat, J., Knobloch, E. Robust heteroclinic cycles in two-dimensional Rayleigh-Benard convection without Boussinesq symmetry. *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **12**, pp. 2501–2522 (2002).
- Milnor, J. On the concept of attractor. *Communications in Mathematical Physics*, **99** (2) 177–195 (1985).
- Morales, C. A. Lorenz attractor through saddle-node bifurcations. *Ann. de l'Inst. Henri Poincaré* **13**, pp. 589–617 (1996).
- Mosekilde, E., Maistrenko, Yu., Postnov, D. Chaotic synchronization: applications to living systems. World Scientific Publ. (2002).
- Nakagawa, M. Chaos and fractals in engineering. World Scientific Publ. (1999).
- Nakagawa, N. and Kuramoto, Y. Anomalous Lyapunov spectrum in globally coupled oscillators. *Physica D* **80**, pp. 307–316 (1995)
- Newhouse, S. E. The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms. *Publications Mathématiques de L'IHÉS* **50** (1), pp. 101–151 (1979).
- Newhouse, S., Ruelle, D., Takens, F. Occurrence of strange Axiom-A attractors near quasi periodic flows on T^m , $m \geq 3$. *Comm. Math. Phys.* **64**, pp. 35–40 (1978).
- Osipov, G. V., Kurths, J., Zhou, C. Synchronization in oscillatory networks. Springer (2007).
- Ott, E. Chaos in dynamical systems. Cambridge University Press (2002).
- Palis, J. On Morse–Smale dynamical systems. *Topology* **8**, pp. 385–405 (1969).
- Palmer, K. J. Shadowing lemma for flows. *Scholarpedia* **4**(4) 7918 (2009).
- Pazó, D. and López, J. M. Characteristic Lyapunov vectors in chaotic time-delayed systems. *Phys. Rev. E* **82**, 056201 (2010).
- Pesin, Ya. Existence and Genericity Problems for Dynamical Systems with Nonzero Lyapunov Exponents. *Regular and Chaotic Dynamics* **12** (5), pp. 476–489 (2007).
- Platt, N., Spiegel, E. A., Tresser C. On-off intermittency: A mechanism for bursting. *Phys. Rev. Lett.* **70**, pp. 279–282 (1993).
- Pomeau, Y. and Manneville, P. Wavelength selection in cellular flows. *Physics Letters A* **75**, 1980, No 4, pp. 296–298.
- Rabinovich, M. I., Varona, P., Selverston, A. I., Abarbanel, H. D.I. Dynamical principles in neuroscience. *Rev. Mod. Phys.* **78**, pp. 1213–1265 (2006).
- Raghunathan, M. S. A proof of Oseledec's multiplicative ergodic theorem. *Israel Journal of Mathematics* **32** (4), pp. 356–362 (1979).
- Rangarajan, G., Habib, S., Ryne, R. D. Lyapunov Exponents without Rescaling and Reorthogonalization. *Phys. Rev. Lett.* **80**, pp. 3747–3750 (1998)
- Reick, C. Universal corrections to parameter scaling in period-doubling systems: Multiple scaling and crossover. *Phys. Rev. A*, **45**, pp. 777–792 (1992).

- Reiterer, P., Lainscsek, C., Schürer, F., Letellier C., Maquet, J. A nine-dimensional Lorenz system to study high-dimensional chaos. *Journal of Physics A* **31**, pp. 7121–7139 (1998).
- Robertson, R. and Combs, A. (eds.): Chaos theory in psychology and the life sciences. Routledge (1995).
- Rössler, O. E. An equation for hyperchaos. *Physics Letters A* **71**, pp. 155–157 (1979).
- Rössler, O. E. Continuous chaos: four prototype equations. *Annals of the New York Academy of Sciences* **316**, pp. 376–392 (1979).
- Ruelle, D. A measure associated with Axiom A attractors. *Amer. J. Math.* **98**, pp. 619–654 (1976).
- Schiesser, W. E. The Numerical Method of Lines: Integration of Partial Differential Equations. Academic Press, San Diego (1991).
- Scott, S. K. Chemical chaos. Oxford University Press (1993).
- Shilnikov, A. and Cymbalyuk, G. Transition between Tonic Spiking and Bursting in a Neuron Model via the Blue-Sky Catastrophe. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 048101 (2005).
- Shilnikov, A. and Kolomiets, M. Methods of the qualitative theory for the Hindmarsh–Rose model: A case study. *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **18**, pp. 2141–2168 (2008).
- Shilnikov, L. Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics: A Tutorial. *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **7**, pp. 1353–2001 (1997).
- Shilnikov, L. P. and Turaev, D. V. Simple bifurcations leading to hyperbolic attractors. *Computers Math. Appl.* **34**, pp. 173–193 (1997).
- Sinai, J. G. and Vul, E. B. Hyperbolicity conditions for the Lorenz model. *Physica D* **2**, pp. 3–7 (1981).
- Smale, S. Mathematical Problems for the Next Century. *Math. Intelligencer* **20**, No. 2, pp. 7–15 (1998).
- Smale, S. Mathematical Problems for the Next Century. In *Mathematics: Frontiers and Perspectives 2000*. Eds. Arnold, V., Atiyah, M., Lax, P., and Mazur, B. Amer. Math. Soc. Providence, RI (2000).
- Sparrow, C. The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors. Springer-Verlag, NY, Heidelberg, Berlin (1982).
- Sprott, J. C. Some simple chaotic flows. *Phys. Rev. E* **50**, pp. 647–650 (1994).
- Stewart, I. Mathematics: The Lorenz attractor exists. *Nature* **406**, pp. 948–949 (2000).
- Stoop, R., Peinke, J., Parisi, J., Röhrlich B., Hübener, R. P. A p-Ge semiconductor experiment showing chaos and hyperchaos. *Physica D* **35**, pp. 425–435 (1989).
- Strogatz, S. H. From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D* **143**, pp. 1–20 (2000).
- Strogatz, S. H. Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering. Westview Press (2001).

- Struik, D. J. Lectures on classical differential geometry. Courier Dover Publications (1988).
- Swift, J. and Hohenberg, P. C. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability. Phys. Rev. A **15**, pp. 319–328 (1977).
- Tél, T. and Gruiz, M. Chaotic dynamics: an introduction based on classical mechanics. Cambridge University Press (2006).
- Thompson, J. M.T. and Stewart, H. B. Nonlinear dynamics and chaos. Wiley, N. Y. (1986).
- Tong, H.(Ed.): Dimension Estimation and Models (Nonlinear Time Series and Chaos). World Scientific Publ (1994).
- Tucker, W. A rigorous ODE solver and Smale's 14th problem. Comp. Math. **2**, pp. 53–117 (2002).
- Turing, A. M. The Chemical Basis of Morphogenesis. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences **237**, No. 641, pp. 37–72 (1952).
- Vallee, R., Delisle, C., Chrostowski J. Physical Review A **30**, pp. 336–342 (1984).
- Wiesenfeld, K. and Swift, J. W. Averaged equations for Josephson junction series arrays. Phys. Rev. E **51**, pp. 1020–1025 (1995).
- Wilczak, D. Uniformly Hyperbolic Attractor of the Smale–Williams Type for a Poincaré Map in the Kuznetsov System. SIAM J. Applied Dynamical Systems **9**, pp. 1263–1283 (2010).
- Williams, R. F. Expanding attractors. Publications mathématiques de l'I. H.É. S. **43**, pp. 169–203 (1974).
- Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., Vastano, J. A. Determining Lyapunov exponents from a time series. Physica D **16**, pp. 285–317 (1985).
- Wolfram, S. Theory and applications of cellular automata. World Scientific Publ. (1986).
- Yang, T. Chaotic Communication Systems. Nova Biomedical (2001).
- Yang, T. A survey of chaotic secure communication systems. International Journal of Computational Cognition **2** (2), pp. 81–130 (2004).

Сергей Петрович Кузнецов

ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ АТТРАКТОРЫ: ОТ МАТЕМАТИКИ К ФИЗИКЕ

*Дизайнер В. А. Толстолицкая
Технический редактор А. В. Бакиев
Компьютерный набор и верстка А. В. Моторин
Корректор Е. В. Огородникова*

Подписано в печать 24.01.13 Формат 60×84 1/16 .

Усл. печ. л. ??,?? . Уч. изд. л. ??,?? . Гарнитура Таймс.
Бумага офсетная №1. Печать офсетная. Заказ №???

АНО «Институт компьютерных исследований»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
<http://shop.rcd.ru> E-mail: borisov@rcd.ru



Полный ассортимент литературы издательств
«Институт компьютерных исследований»
и «Регулярная и хаотическая динамика»
по самым доступным ценам представлен
в отделах прямых продаж:

R&C
Dynamics

Россия, Москва

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН
ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 415
тел.: +7 (495) 641-69-38, факс: +7 (499) 135-54-37
e-mail: rhd-m@mail.ru

Россия, Ижевск

Удмуртский государственный университет
ул. Университетская, д. 1, корп. 4, оф. 201а/207
тел./факс: +7 (3412) 50-02-95
e-mail: subscribe@rcd.ru

Интернет-магазин

MAHESIS

<http://shop.rcd.ru>

- Отправка заказов осуществляется почтой РФ из г. Ижевска
- Цены на сайте указаны без учета стоимости доставки

Книги можно приобрести также:

Книжные магазины и киоски:

Московский дом книги

Москва, ул. Новый Арбат, д. 8 (м. «Арбатская»)
Тел.: +7 (495) 789-35-91

Дом технической книги

Москва, Ленинский проспект, д. 40
(м. «Ленинский Проспект»)
Тел.: +7 (499) 137-60-19

Книжные киоски ООО «Аргумент»

Москва, Ленинский проспект, д. 65
(м. «Ленинский Проспект») Главное здание
РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина

ООО «Санкт-Петербургская книготорговая компания»

Санкт-Петербург, ул. Капитана Воронина, д. 8
Тел.: +7 (812) 295-06-57

ООО «Киви»

Самара, ул. Ново-Садовая, д. 381, 4-й этаж —
«ТЦ на Ново-Садовой»

Тольятти, ул. Дзержинского, 21, минус 1-й этаж,
секция 803а – «ТЦ Капитал»

ООО «Пермкнига»

Пермь, ул. Лодыгина, д. 6
Тел.: +7 (342) 242-84-90, 242-72-74

ООО «Издательство «Инфра-Инженерия»

Вологда, ул. Машиностроительная, д. 19, оф. 238
Тел.: +7 (911) 512-48-48

ООО «ВЕЛЕС»

Омск
тел.: +7 (3812) 46-31-12, 46-31-41

На просторах интернета:



ozon.ru
<http://www.ozon.ru>



Московский дом книги
<http://www.mdk-arbat.ru>



Библион
<http://www.biblion.ru>



ЦентрИнтЕфтеГаз
<http://centrlit.ru>

EAGE Геомодель
<http://www.eage.ru>



Инфра-Инженерия
<http://www.infra-e.ru>

Каталог изданий для предприятий
нефтегазового комплекса
<http://www.yagello.ru>