# Представления частотно-временных распределений сигналов посредством аналитических спектров их локального прошлого и будущего

**В.Е. Анциперов, С.А. Никитов**
Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
РФ, г. Москва

В работе обсуждается концепция аналитического спектра, аналогичная понятию аналитического сигнала во временной области. Приводятся свойства аналитического спектра, являющиеся аналогами соответствующих свойств аналитического сигнала, и отмечаются его отличия от последнего. Обсуждается связь аналитических спектров локального прошлого и локального будущего сигнала с понятиями текущего спектра и текущего спектра будущего, получены представления введенных Пейджем и Левиным частотно-временных распределений энергии посредством аналитических спектров. Найдено выражение частотно-временного распределения с коническим ядром (Дзао–Атласа– Маркса) через аналитические спектры локального прошлого и будущего. Показано, что это представление допускает очень простую интерпретацию и может помочь в анализе квадратичных по сигналам распределений за счет расширения области частот в нижнюю комплексную полуплоскость.

В современной радиофизике основным инструментом анализа *стационарных* сигналов является их преобразование Фурье [1]:

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\exp(-2\pi\, i\nu\, t)dt\,, \qquad (1)$$

где $s(t)$ – сигнал (в общем случае комплексный), а $S(\nu)$ – его Фурье–изображение или (комплексный) спектр.

Фурье–преобразование (1) является также полезным средством для анализа производимых над сигналами каскадов линейных операций, таких как свертки, дифференцирование, интегрирование. В частотной области (в области изображений) эти операции представляются простыми алгебраическими символами и соотношениями.

Обратное к (1) преобразование (обратное преобразование Фурье):

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu)\exp(2\pi\, i\nu\, t)d\nu \qquad (2)$$

является линейной комбинацией набора бесконечно протяженных синусоид, что неявно предполагает их присутствие в сигнале во все моменты времени, т.е. постоянство спектра. Однако многие интересные для анализа сигналы, например, производимые биологическими объектами, имеют изменяющиеся со временем спектральные характеристики – они *нестационарные*.

Как показывает опыт исследований последних тридцати–сорока лет [2], для анализа спектральных изменений в нестационарных сигналах необходимы смешанные – двумерные частотно–временные представления (ЧВП). Эти представления аналогичны музыкальным партитурам, где развитие музыкального сюжета по времени представлено вдоль одной оси, а частоты (ноты) представлены вдоль другой, указывая, какой частотный состав присутствует в каждый момент времени.

Другим установленным фактом является недостаточность для анализа нестационарных сигналов линейных ЧВП и, соответственно, необходимость шире использовать как минимум квадратичные представления, например, типа частотно–временных распределений энергии (ЧВР). Отметим здесь, что ЧВР энергии наиболее просто и удобно записываются посредством различных эрмитовых форм, которые предполагают некоторое комплексное представление сигналов. Имеются веские основания [3] для выбора в качестве комплексной формы сигнала представление аналитического сигнала $s_A(t)$ [2]:

$$s_A(t) = 2\int_0^{\infty} S(\nu)\exp(2\pi\ i\nu\ t)d\nu . \tag{3}$$

Исходя из факта двойственности прямого и обратного преобразований Фурье (1) и (2), можно, на данный момент отчасти формально, ввести понятие аналитического спектра $S_A(\nu)$, двойственное понятию аналитического сигнала (3):

$$S_A(\nu) = 2\int_0^{\infty} s(t)\exp(-2\pi\ i\nu\ t)dt . \tag{4}$$

Как будет показано ниже, понятие аналитического спектра (4) оказывается исключительно полезным при построении квадратичных представлений и их последующей интерпретации, особенно при расширении области частот $\nu$ до комплексных значений $\nu = f + i\delta$. Однако прежде чем перейти к этим вопросам, отметим несколько свойств аналитического спектра.

Если сигнал $s(t)$ при $t > 0$ имеет конечную энергию $E_+$ – квадратично интегрируем на положительной полуоси:

$$E_+ = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} | s(t)|^2 dt < \infty , \tag{5}$$

то интеграл в правой части (4) конечен для всех комплексных $\nu$ с отрицательной мнимой частью $\delta = \mathrm{Im}(\nu) < 0$: