



---

**ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ**

УДК: 517.925 + 517.93

MSC 2010: 37J60, 37N15, 37G35, 70E18, 70F25, 70H45

## Сценарии перехода к хаосу в неголономной модели волчка Чаплыгина

И. Р. Сатаев, А. О. Казаков

В работе приведены результаты исследования регулярной и хаотической динамики в задаче Суслова, описывающей движение тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, подчиненного неголономной связи, запрещающей вращение тела вокруг некоторой оси, неподвижной в теле. В зависимости от параметров системы указаны случаи регулярного (в частности, интегрируемого) поведения, а также обнаружены различные типы хаотического поведения. Кроме того, в задаче указаны области фазового пространства, в которых консервативная и диссипативная динамика сосуществуют на достаточно мелких масштабах (так называемая смешанная динамика, или псевдоконсервативный хаос). Также в работе подробно исследован эффект реверса, ранее наблюдавшийся в движении кельтских камней.

Ключевые слова: неголономная модель, волчок Чаплыгина, разрушение инвариантной кривой по Афраймовичу – Шильникову, каскад бифуркаций удвоения периода, сценарий удвоения торов, восьмерочный аттрактор

---

Получено 04 марта 2016 года  
После доработки 20 мая 2016 года

---

Работа Сатаева И. Р. (разделы 2, 3.1) выполнена в рамках гранта РФФ № 15-12-20035. Результаты работы Казакова А. О., опубликованные в разделе 3.2, получены при поддержке программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ (проект 98) в 2016 году. Также работа Казакова А. О. поддержана грантами РФФИ (проекты 15-08-09261-а, 15-38-20879 мол\_а\_вед и 14-01-00344).

---

Сатаев Игорь Рустамович  
[sataevir@rambler.ru](mailto:sataevir@rambler.ru)

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН  
410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38  
Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Казаков Алексей Олегович  
[kazakovdz@yandex.ru](mailto:kazakovdz@yandex.ru)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23  
Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

В работе рассматривается неголономная модель движения динамически несимметричного шара по плоскости в поле тяжести. Центр масс шара не лежит ни на одной из главных плоскостей инерции, а в точке контакта шара с плоскостью наложена неголономная связь, запрещающая проскальзывание. Следуя работе [1], будем называть такой шар волчком Чаплыгина.

С точки зрения распределения масс, волчок Чаплыгина является наиболее сложным телом с шаровой поверхностью. В зависимости от типа смещения центра масс, а также распределения массы внутри шара можно выделить несколько частных случаев. Когда центр масс шара совпадает с геометрическим центром, такой шар называется шаром Чаплыгина. Интегрируемость шара Чаплыгина была доказана еще в начале XX века в работе С. А. Чаплыгина [2], а движение такого шара в абсолютном пространстве исследовалось в работах [3, 4]. В общем случае при смещении центра масс шара система перестает быть интегрируемой [5]. Исключение составляет лишь так называемая сфера Рауса [6] — шар, у которого центр масс смещен вдоль одной из осей инерции, а главные моменты инерции, отвечающие двум другим осям, одинаковы.

Существует еще одна известная неголономная постановка задачи о движении волчка Чаплыгина по плоскости, в которой, помимо связи, запрещающей проскальзывания шара в точке контакта, налагается связь, запрещающая верчение вокруг вертикальной оси. Дополнительная связь позволяет понизить размерность задачи и тем самым упрощает динамику волчка. Однако и в такой постановке волчок Чаплыгина также оказывается неинтегрируемым в общем случае [7]. В работах [8, 9] показано, что он может демонстрировать сложную хаотическую динамику.

Данная работа является продолжением исследований [13, 14], посвященных, в основном, специфическим динамическим эффектам, которые демонстрирует волчок Чаплыгина, прежде всего эффекту реверса [15–18]. Это явление привлекает особое внимание, поскольку ранее наблюдалось лишь для кельтских камней — динамически асимметричных тел, не имеющих шаровую форму [10, 12, 20, 21].

Неголономная динамика волчка Чаплыгина занимает в определенном смысле промежуточное положение между консервативной и диссипативной динамикой [11, 12]. Она характеризуется несохранением фазового объема в процессе динамической эволюции, демонстрируя сжатие в одних областях фазового пространства и растяжение в других. В результате, неголономные механические модели, несмотря на сохранение энергии, могут демонстрировать элементы диссипативной динамики (например, аттракторы, в том числе странные).

Целью настоящей работы является исследование сценариев возникновения странных аттракторов в неголономной модели волчка Чаплыгина. Интерес к неголономным моделям вызван тем обстоятельством, что, как показывают результаты предыдущих исследований [10, 12, 20, 21, 31], такие системы демонстрируют ряд новых интересных примеров странных хаотических аттракторов, характерных для трехмерных отображений. В частности, в нашей предыдущей работе [14], посвященной исследованию волчка Чаплыгина, был обнаружен хаотический аттрактор «восьмерочного типа», который может быть отнесен к псевдогиперболическим странным аттракторам [22].

Наши исследования показывают, что исследуемая модель демонстрирует все разнообразие сценариев перехода к хаосу, типичных для диссипативных систем, в частности, через разрушение инвариантной кривой [23, 37, 38], включая фейгенбаумовский каскад внутри языка синхронизации, а также через каскад удвоения торов [24–26].

Работа организована следующим образом. В разделе 1 сформулированы уравнения движения. В разделе 2 описаны методы и приемы исследования динамики модели. В разделе 3

рассматриваются примеры реализации основных сценариев перехода от порядка к хаосу, такие как удвоение торов и различные варианты сценария разрушения инвариантной кривой.

## 1. Уравнения движения

Рассмотрим движение динамически несимметричного шара, находящегося в поле тяжести, по плоскости без проскальзывания. Центр масс шара смещен относительно геометрического центра на вектор  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ . Здесь и далее все векторы считаем заданными в системе координат  $Cxyz$ , расположенной в центре масс шара и направленной вдоль главных осей инерции. Обозначим через  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, соединяющий центр масс с точкой контакта, а через  $\mathbf{v}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  — скорость центра масс и угловую скорость шара соответственно. Тогда условие отсутствия проскальзывания (неголономную связь) можно представить в виде

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0, \tag{1.1}$$

а уравнения движения для кинематического момента  $\mathbf{M}$  относительно точки контакта и единичного вектора нормали  $\boldsymbol{\gamma}$  примут вид (см., например, [29])

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + mg_0\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1.2}$$

где  $m$  — масса шара, а  $g_0$  — ускорение свободного падения. При этом вектор  $\boldsymbol{\omega}$  выражается через  $\mathbf{M}$  (см., например, [5]) через соотношение

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \tag{1.3}$$

где  $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$  — тензор инерции волчка с главными моментами инерции  $I_1, I_2$  и  $I_3$ , а векторы  $\boldsymbol{\gamma}$  и  $\mathbf{r}$  для шара радиуса  $R$  связаны формулой

$$\mathbf{r} = -R\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{a}. \tag{1.4}$$

Соотношения (1.2) определяют замкнутую систему уравнений относительно векторов  $\boldsymbol{\gamma}$  и  $\mathbf{M}$ . Эта система, в случае произвольного параметра  $\mathbf{a}$ , обладает лишь двумя интегралами: геометрическим  $\boldsymbol{\gamma}^2 = 1$  и интегралом энергии  $E = \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} - mg_0\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}$ , а следовательно, для интегрируемости по Эйлера – Якоби не хватает двух первых интегралов и инвариантной меры. В шестимерном фазовом пространстве на многообразии, заданном условием постоянства двух интегралов движения, уравнения (1.2) определяют четырехмерный поток. Значение интеграла энергии  $E$  при этом можно рассматривать как еще один параметр системы.

## 2. Методы исследования

Для исследования и визуализации динамики системы (1.2) мы применяем методику построения и анализа карт показателей Ляпунова. Подробное описание алгоритма построения карт можно найти в [30], а в работах [31] и [14] такие карты были построены для

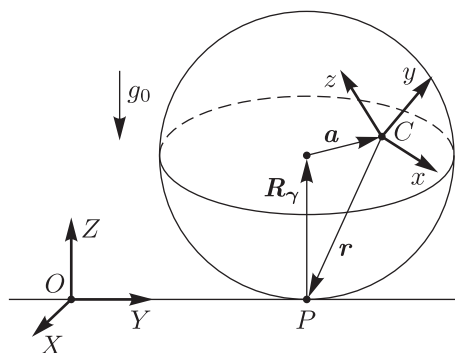


Рис. 1. Волчок Чаплыгина.

поиска странных аттракторов в неголономной модели кельтского камня и реверса в неголономной модели волчка Чаплыгина соответственно. Далее будем исследовать динамику системы в зависимости от параметров  $E$  и  $a_3$ . Значения остальных параметров, если это не оговорено дополнительно, зафиксированы следующим образом:

$$I_1 = 2, \quad I_2 = 6, \quad I_3 = 7, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1.5, \quad g_0 = 100, \quad R = 3, \quad m = 1.$$

На рисунке 2 приведена карта показателей Ляпунова для модели (1.2) на плоскости параметров  $(E, a_3)$ . Следует отметить, что на построение карты сильное влияние оказала одна из характерных особенностей динамики системы (1.2) — развитая мультистабильность [14]. Таким образом, представленную карту правильно мыслить как склейку, составленную из набора частично или полностью перекрывающихся листов, каждому из которых отвечает тот или иной предельный режим. Это означает наличие некоторого произвола при построении карты, так как, изменяя начальные условия и/или направление сканирования на плоскости параметров  $(E, a_3)$ , мы получаем возможность визуализировать тот или иной режим динамики системы, то есть вытащить наверх нужный нам лист.

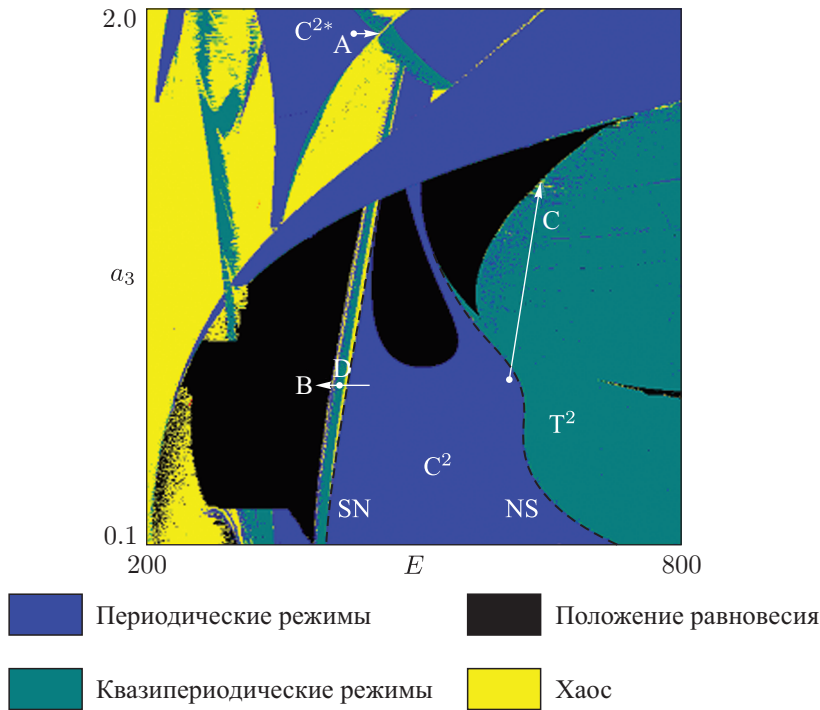


Рис. 2. Карта показателей Ляпунова для системы (1.2). Расшифровка цветов приведена под картой.<sup>a</sup>

Для визуализации фазовых портретов системы (1.2) при определенных значениях параметров  $E$  и  $a_3$  (в конкретном узле карты показателей Ляпунова) мы используем отображение Пуанкаре. В силу того, что четырехмерное многообразие, заданное условием постоянства двух интегралов движения (геометрического и энергии), равно как и поток на нем, устроены достаточно сложно, не удастся подобрать единственное подходящее сечение Пуанкаре для всех случаев, рассматриваемых в работе. Поэтому при построении отображений

<sup>a</sup>Для читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/nd1602006/>

Пуанкаре мы выбираем гиперплоскость, заданную условием  $\gamma_1 M_2 - \gamma_2 M_1 = 0$  или условием  $M_1 = 0$ , что каждый раз оговаривается отдельно.

Прокомментируем карту показателей Ляпунова, представленную на рисунке 2. В широкой области изменения параметров система обладает устойчивым состоянием равновесия, которое соответствует стационарному вращению вокруг некоторой оси. Черным цветом на карте изображена область параметров, при которых траектория (из заданных при построении карты начальных условий) стремится к устойчивому состоянию равновесия. Именно благодаря наличию устойчивого состояния равновесия (и находящегося с ним в инволюции неустойчивого состояния) в неголономной модели волчка Чаплыгина возможен реверс [14].

Помимо состояния равновесия характерными регулярными аттракторами в системе (1.2) являются предельные циклы — неподвижные и периодические точки на отображении Пуанкаре, а также торы (квазипериодические режимы) — инвариантные кривые на отображении. В дальнейшем, если это не будет оговариваться отдельно, мы будем классифицировать аттракторы именно для отображения Пуанкаре.

Для хаотических аттракторов на рисунках приведены спектры показателей Ляпунова, которые рассчитывались для потока модифицированным для данного типа задач методом Бенеттина [31, 32]. Точность вычисления показателей Ляпунова составляла  $\leq 1 \cdot 10^{-4}$ .

### 3. Сценарии перехода от порядка к хаосу в неголономной модели волчка Чаплыгина

Как показывает анализ карты показателей Ляпунова, границы областей устойчивости периодических точек образованы линиями седло-узловых (касательных) бифуркаций, а также линиями бифуркаций Неймарка–Сакера, в результате которых точки теряют устойчивость, а аттракторами становятся инвариантные кривые. Таким образом, сценарии перехода к хаосу в рассматриваемой системе (при выбранных нами параметрах) ограничиваются в основном тем или иным способом разрушения инвариантных кривых. Каскад удвоения периода точек, как мы увидим дальше, все же встречается, но только в контексте сценария разрушения инвариантных кривых.

Существует несколько сценариев перехода к хаосу через разрушение квазипериодического поведения. В случае общего положения можно выделить два типичных сценария:

- разрушение инвариантной кривой (сценарий Афраймовича–Шильникова) [23];
- каскад бифуркаций удвоения торов (инвариантных кривых в отображении) [24–26].

Рассмотрим бифуркации точки периода два  $C^2$ , зона устойчивости которой занимает значительную область в середине нижней части карты, при выходе за границы устойчивости вправо и влево (см. рис. 2). Правая граница (NS) образована линией бифуркации Неймарка–Сакера, в результате которой точка периода два теряет устойчивость, а из нее рождается двухкомпонентная инвариантная кривая  $T^2$  (см. далее, рис. 4а, б). Левая граница (SN) соответствует касательной бифуркации, в результате которой происходит жесткий переход на другой лист, регулярные режимы на котором представлены также двухкомпонентной замкнутой инвариантной кривой  $T^{2*}$  (рис. 5а), реализующейся в точке D (см. рис. 2), эволюции этого аттрактора посвящен раздел 3.1.2. Мы будем рассматривать эволюцию режимов вдоль нескольких маршрутов, обозначенных стрелками на карте (рис. 2). Как оказывается, при движении вдоль выбранных маршрутов рассматриваемая система демонстрирует практически весь набор известных сценариев разрушения устойчивых торов.

### 3.1. Сценарий разрушения инвариантной кривой

В общем случае, согласно сценарию, описанному в работах [23, 37, 38], варьируя параметры динамической системы в области существования инвариантной кривой, можно попасть в область резонанса (языка синхронизации), когда на кривой появляются устойчивые (узловые) и неустойчивые (седловые) точки, а сама инвариантная кривая в этом случае представляет собой замыкание неустойчивых многообразий седловых точек. Тогда судьба этой кривой (и, в частности, возникновение хаоса) зависит от пути, по которому мы движемся внутри резонансной области, а значит, картина эволюции кривой является существенно двумерной.

На рисунке 3 схематически изображена двухпараметрическая картина областей различных динамических режимов, типичная для перехода к хаосу через разрушение инвариантной кривой. В рамках данной работы мы ограничимся однопараметрическим анализом эволюции инвариантных кривых, исследуя не полную картину, а некоторые характерные особенности, присущие этому сценарию, — те, которые можно наблюдать при произвольном выборе пути. Вдоль возможного маршрута  $M$  на рисунке 3 такими наблюдаемыми особенностями являются, прежде всего, различные варианты развития хаоса внутри языка синхронизации, в зависимости от бифуркаций, претерпеваемых резонансным циклом на линии  $l$  (бифуркация Неймарка–Сакера или удвоение периода), а также возможность жесткого возникновения хаотического странного аттрактора типа «тор–хаос» при выходе за границы языка (линия  $q$  на рисунке 3).

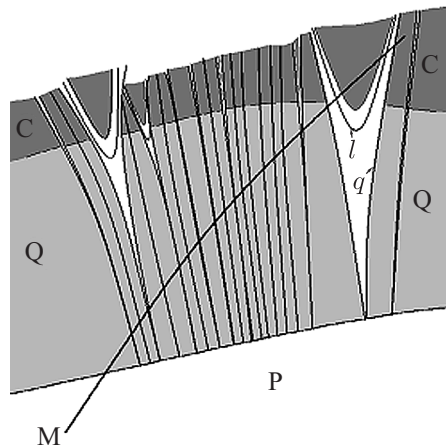


Рис. 3. Схематическое изображение картины перехода к хаосу через разрушение инвариантной кривой.  $P$  — область периодических движений,  $Q$  — квазипериодических,  $C$  — хаотических,  $l$  — линия бифуркации резонансного цикла,  $q$  — граница языка синхронизации.

Неголономная модель волчка Чаплыгина демонстрирует два варианта развития динамики внутри языка синхронизации.

#### 3.1.1. Разрушение инвариантной кривой: бифуркация Неймарка–Сакера внутри резонансной области

Рассмотрим эволюцию предельных режимов вдоль маршрута  $C$  (рис. 2), начиная с точки периода 2 ( $C^2$ ). Для ясности наиболее интересные портреты аттракторов будем приводить на отображении Пуанкаре с секущей  $\gamma_1 M_2 - \gamma_2 M_1 = 0$ .

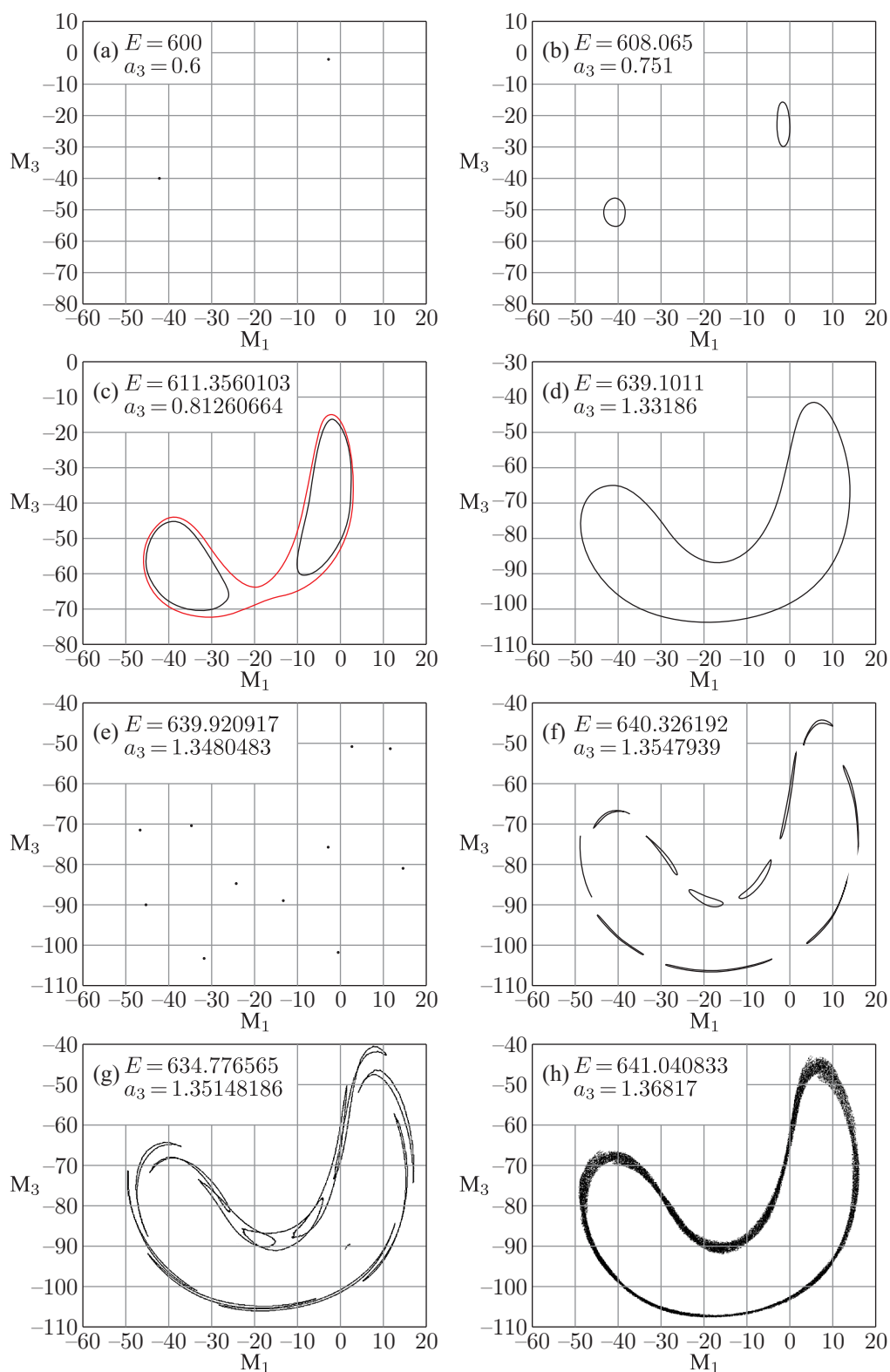


Рис. 4. Эволюция аттрактора вдоль маршрута С: а) точка периода 2 ( $C^2$ ); б) двухкомпонентная инвариантная кривая  $T^2$ ; в) рождение инвариантной кривой  $T^1$ , при этом  $T^1$  и  $T^2$  сосуществуют; д)  $T^1$ ; е) резонансная точка периода 11; ф) инвариантная кривая  $T^{11}$ , состоящая из 11 компонент; г) потеря гладкости кривой  $T^{11}$ ; х) тор – хаос на базе разрушившейся кривой  $T^1$ .

Сначала точка  $C^2$  (см. рис. 4а) претерпевает бифуркацию Неймарка–Сакера, в результате чего рождается двухкомпонентная инвариантная кривая  $T^2$  (рис. 4б). Далее, при движении вдоль маршрута  $C$ , вокруг обеих компонент кривой  $T^2$  жестко рождается инвариантная кривая  $T^1$ , и на некотором достаточно малом интервале маршрута  $C$  в системе сосуществуют две инвариантные кривые (см. рис. 4с). Затем кривая  $T^2$  исчезает, также жестким образом, а аттрактором на достаточно большом отрезке рассматриваемого маршрута является инвариантная кривая  $T^1$  (см. рис. 4д). Начиная с некоторого момента кривая  $T^1$  теряет гладкость и в конце концов мы попадаем в область существования резонанса периода 11 (см. рис. 4е). Согласно сценарию [23, 37, 38], инвариантная кривая  $T^1$  теряет гладкость в момент, когда резонансная точка периода 11 становится фокусной. В дальнейшем фокусная точка периода 11 претерпевает бифуркацию Неймарка–Сакера, а аттрактором становится инвариантная кривая  $T^{11}$ , состоящая из 11 компонент (см. рис. 4ф). Именно в этот момент инвариантная кривая  $T^1$  разрушается.

В дальнейшем кривая  $T^{11}$  сама начинает терять гладкость, в соответствии с одним из вариантов сценария разрушения инвариантной кривой (см. рис. 4г), хотя в данном случае до возникновения хаоса дело не доходит. Хаос возникает жестко на выходе за пределы языка синхронизации — рождается аттрактор типа «тор–хаос» на базе исходной инвариантной кривой  $T^1$  (см. рис. 4h). Спектр существенных показателей Ляпунова для тор–хаоса:  $[0.0064, 0.0, -0.0067]$  (здесь и далее исключен тривиальный нулевой показатель).

### 3.1.2. Разрушение инвариантной кривой: бифуркации удвоения периода внутри резонансной области

Рассмотрим теперь, что происходит слева от области устойчивости  $C^2$ , начиная из точки  $D$  карты, изображенной на рисунке 2 и имеющей координаты  $(E, a_3) = (414.36, 0.655)$ . Для визуализации портретов аттракторов, как и в предыдущем случае, будем строить отображение Пуанкаре на секущей  $\gamma_1 M_2 - \gamma_2 M_1 = 0$ .

В самой точке  $D$  аттрактором является двухкомпонентная инвариантная кривая  $T^{2*}$  (см. рис. 5а). Затем маршрут  $DB$  проходит через границы резонансных областей различного периода, пока наконец не попадает в достаточно широкую область с резонансом периода 26 (см. рис. 5б), где далее наблюдается переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода внутри языка синхронизации. На рисунке 5с показан фрагмент аттрактора (точки периода 52) после первого удвоения, а на рисунке 5д изображен аттрактор, возникший в результате каскада бифуркаций удвоения периода. Такой аттрактор в закритической области каскада удвоений периода часто называют многоленточным. Его особенность состоит в том, что в сечении Пуанкаре он представляет собой набор полос (см. выноску на рис. 5с), каждая из которых на самом деле имеет поперечную фрактальную структуру аттрактора типа Эно [28] и которые отображаются друг в друга под действием отображения Пуанкаре. При дальнейшем изменении параметра энергии они попарно сливаются, претерпевая как бы обратный каскад удвоений. Отметим, что инвариантная кривая, которая внутри области резонанса представлена гетероклиническим замыканием неустойчивых многообразий седловой периодической точки, разрушается уже после первой бифуркации удвоения периода [23].

На рисунке 6 приведено бифуркационное дерево для переменной  $M_1$  и график старшего показателя Ляпунова. Построенные графики, в сочетании с приведенными в таблице 1 оценками констант  $\delta_n = \frac{(E^n - E^\infty)}{(E^{2n} - E^\infty)}$  и  $\alpha_n = \frac{\Delta M_1^n}{\Delta M_1^{2n}}$ , характеризующих скейлинг в бифуркационном дереве, свидетельствуют о том, что здесь наблюдается типичный диссипативный сценарий Фейгенбаума [30, 33]. Сходимость к универсальным значениям достаточно мед-



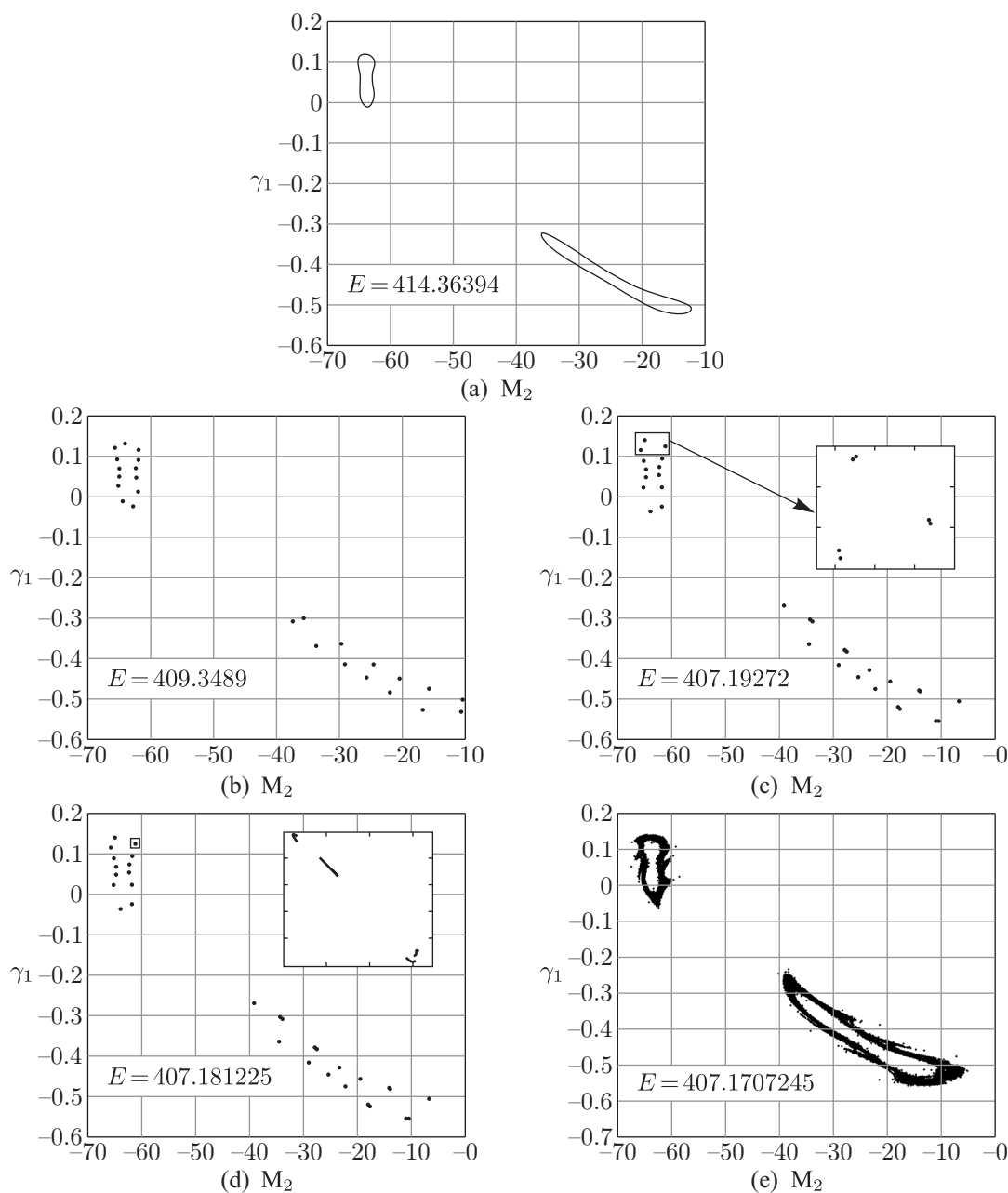


Рис. 5. Эволюция аттрактора вдоль маршрута DB из точки D с координатами  $(E, a_3) = (414.36, 0.655)$ : а) двухкомпонентная инвариантная кривая  $T^{2*}$ ; б) резонансная точка периода 26; в) точка периода 52, возникающая после первой бифуркации удвоения периода; г) хаотический аттрактор типа Эно, показатели Ляпунова  $(0.0037, -0.0138, -0.0296)$ ; д) хаос, возникающий на месте разрушенной кривой  $T^{2*}$ , показатели Ляпунова  $(0.0301, -0.0150, -0.0548)$ .

ленная, что объясняется слабым в среднем сжатием фазового объема вдоль траектории, что аналогично ситуации малой диссипации для диссипативных систем.

В заключение раздела отметим, что при выходе из области резонанса периода 26 аттрактором является тор-хаос, жестко возникающий на месте разрушившейся инвариантной кривой  $T^{2*}$  (см. рис. 5е).

Таблица 1. Оценка констант, характеризующих скейлинг в бифуркационном дереве.

$n$	26	52	104	208	Константы Фейгенбаума
$\delta_n$	5.23	6.06	4.41	4.75	4.6692
$\alpha_n$	-3.13	-3.06	-2.63	-2.45	-2.5029

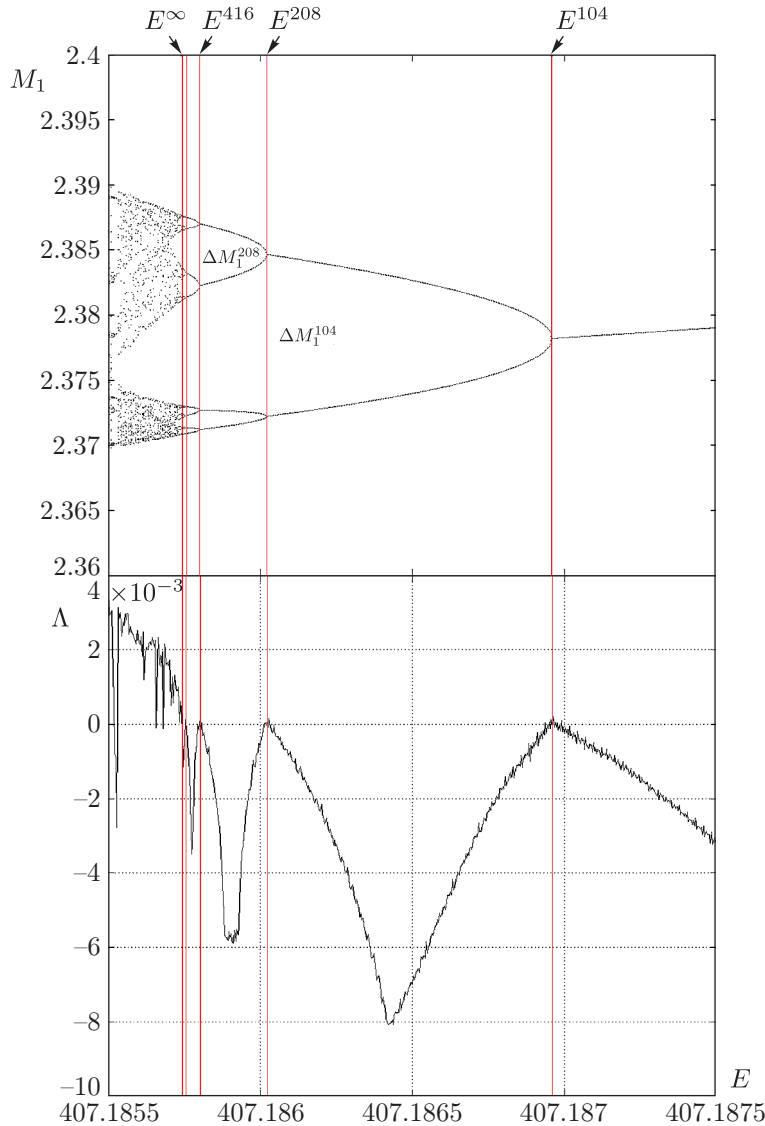


Рис. 6. Бифуркационное дерево и зависимость старшего показателя Ляпунова от параметра  $E$ ,  $a_3 = 0.655$ .

### 3.2. Переход к хаосу через каскад удвоения торов

Рассмотренные выше сценарии являются типичными для систем с размерностью фазового пространства три и выше. В этом параграфе мы приведем пример аттрактора, для возникновения которого требуется размерность не менее четырех.

Рассмотрим эволюцию точки периода 2 ( $C^{2*}$ ), которая является аттрактором системы при значениях параметров  $E = 450.0$ ,  $a_3 = 1.9$ , вдоль маршрута, обозначенного на рисунке 2 буквой А. Будем увеличивать значение параметра энергии. Точка  $C^{2*}$  теряет устойчивость через бифуркацию Неймарка – Сакера, после чего аттрактором становится двухкомпонентная инвариантная кривая (см. рис. 7а). Далее фазовый портрет аттракторов будем приводить на отображении Пуанкаре в сечении, заданном условием  $M_1 = 0$ .

При движении вдоль маршрута А инвариантная кривая начинает претерпевать каскад бифуркаций удвоения торов (инвариантных кривых, в терминах отображения Пуанкаре) [24–26]. На рисунке 7 представлены портреты отображения Пуанкаре после первого, второго и третьего удвоений.

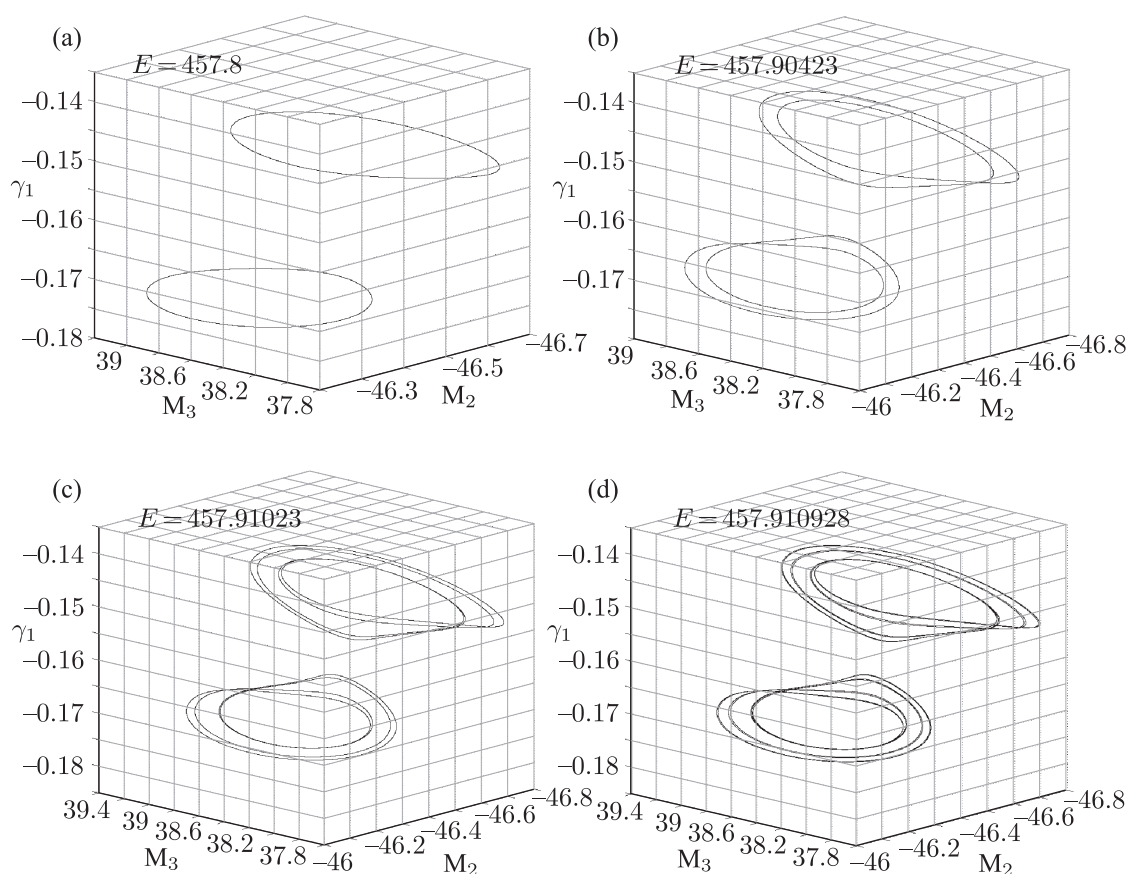


Рис. 7. Бифуркации удвоения торов вдоль маршрута А,  $a_3 = 0.655$ .

В отличие от каскада бифуркаций удвоений периода неподвижных точек, считается (на сегодняшний день), что каскад бифуркаций удвоения торов является конечным [26, 34, 35]. Заканчивается рассматриваемый каскад бифуркаций удвоения торов возникновением аттрактора типа «тор–хаос» [24–26] (см. рис. 8а). Его также иногда называют *квазипериодическим аттрактором типа Эно* [39, 40], из-за схожести поперечной структуры. Для выявления этой структуры применяют процедуру построения двойного сечения Пуанкаре. Выбирается некоторая вторая плоскость, которая пересекает аттрактор в сечении Пуанкаре поперек. Поскольку орбита отображения в общем случае никогда не попадает точно в эту секущую плоскость, рассматривается попадание в слой некоторой толщины вокруг это-

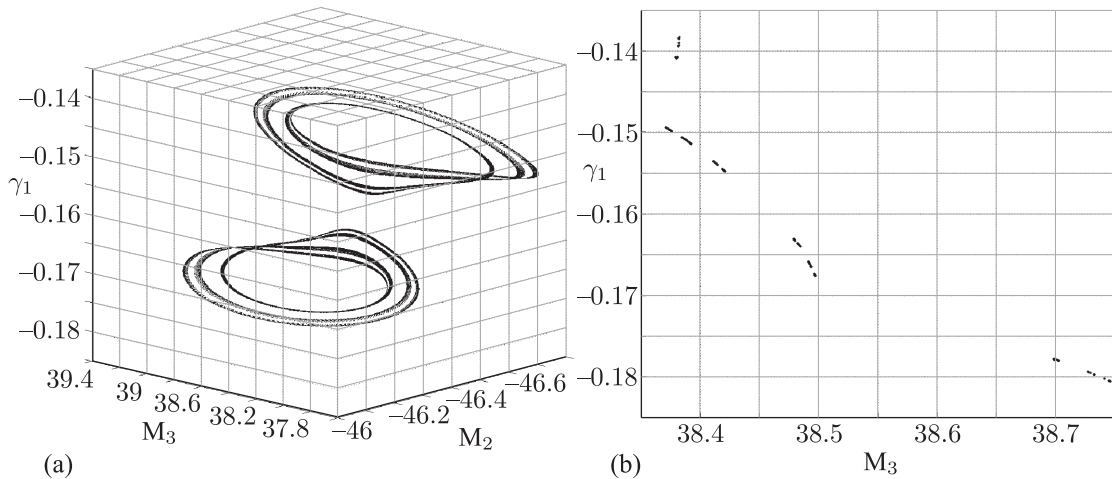


Рис. 8. а) Хаотический аттрактор при  $a_3 = 1.9$  и  $E = 457.91123$ , родившийся в результате каскада удвоения торов, показатели Ляпунова  $(0.0001, 0.0, -0.0063)$ ; б) портрет аттрактора в двойном сечении Пуанкаре  $M_2 = -46.4$ .

го второго сечения. Толщина слоя выбирается достаточно малой, чтобы не замазывалась поперечная структура аттрактора, но, с другой стороны, не слишком маленькой, чтобы набрать достаточное количество точек за время вычисления или наблюдения. На рисунке 8b показана структура аттрактора в двойном сечении Пуанкаре,  $M_1 = 0$  и  $M_2 = -46.4$ , толщина слоя  $10^{-4}$ . Значение параметра энергии специально было выбрано близко к пороговому (это можно заметить по значению максимального показателя Ляпунова), чтобы было видно структуру полос, из которых состоит аттрактор (см. для сравнения структуру аттрактора типа Эно на рисунке 5d). При дальнейшем увеличении энергии  $E$  полосы попарно сливаются, в результате чего образуется аттрактор, изображенный на рисунке 9.

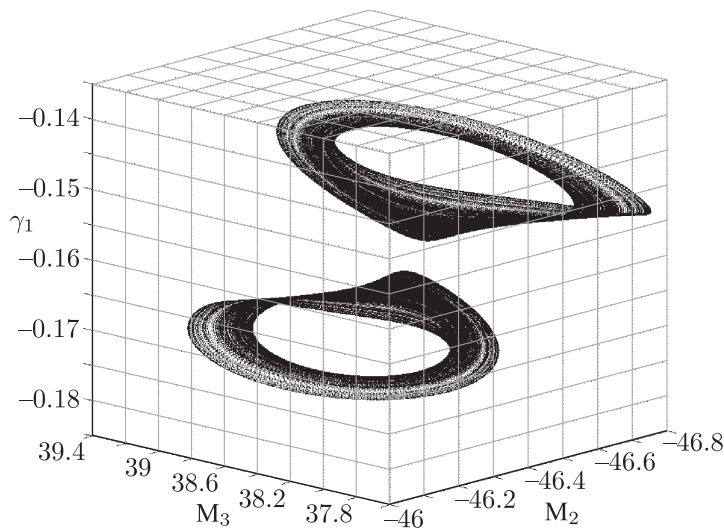


Рис. 9. Хаотический аттрактор, возникающий в результате обратного каскада слияния полос.  $E = 457.91273$ , показатели Ляпунова  $(0.0006, 0.0, -0.0068)$ .

Следующий этап эволюции рассматриваемого странного аттрактора связан с гомоклинической бифуркацией седловой неподвижной точки отображения Пуанкаре, которая лежит между двумя компонентами аттрактора, так что ее двумерное устойчивое многообразие отделяет их друг от друга. При  $E \approx 457.91273$  возникает гомоклиническое замыкание одномерного неустойчивого и двумерного устойчивого многообразия этой седловой точки; образовавшаяся гомоклиническая структура, став притягивающей, образует новый аттрактор (см. рис. 10). В работе [27] показано, что при выполнении некоторых условий это притягивающее хаотическое множество, называемое также «восьмерочным» аттрактором, может быть отнесено к классу настоящих (грубых) аттракторов. Как было показано в [13, 14], в данном случае эти требования выполняются и аттрактор на рисунке 10 является псевдогиперболическим.

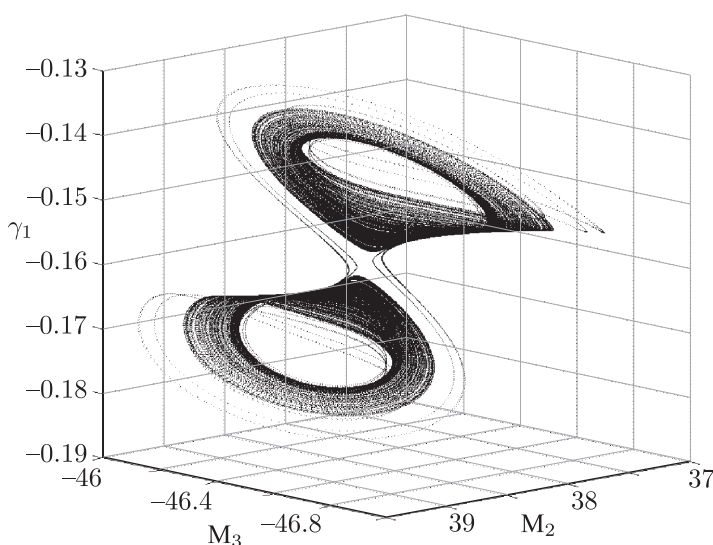


Рис. 10. «Восьмерочный» хаотический аттрактор при  $a_3 = 1.9$  и  $E = 457.913$ , показатели Ляпунова (0.0007, 0.0, -0.0068).

## Заключение

В работе рассмотрен ряд сценариев возникновения и эволюции странных хаотических аттракторов в неголономной модели динамически несимметричного шара — волчка Чаплыгина. Показано, что исследуемая модель демонстрирует практически все известные сценарии перехода к хаосу, связанные с разрушением квазипериодического поведения в диссипативных системах.

Приведенные примеры не исчерпывают динамического разнообразия в неголономной модели волчка Чаплыгина. Так, например, остаются открытыми вопросы, связанные с переходом от консервативной и квазиконсервативной динамики, реализующейся в исследуемой системе при смещении центра масс вдоль главных осей и плоскостей инерции, к динамике, характеризующейся наличием аттракторов и репеллеров, демонстрируемой системой при произвольном смещении.

Компьютерное моделирование проведено с помощью программного комплекса «Компьютерная динамика: Хаос» (<http://lab.ics.org.ru/lab/page/kompyuternaya-dinamika/>).

## Список литературы

- [1] Shen J., Schneider D. A., Bloch A. M. Controllability and motion planning of a multibody Chaplygin's sphere and Chaplygin's top // *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 2008, vol. 18, no. 9, pp. 905–945.
- [2] Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // *Матем. сб.*, 1903, т. 24, с. 139–168.
- [3] Kilin A. A. The dynamics of Chaplygin ball: The qualitative and computer analysis // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2001, vol. 6, no. 3, pp. 291–306.
- [4] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Проблема дрейфа и возвращаемости при качении шара Чаплыгина // *Нелинейная динамика*, 2013, т. 9, № 4, с. 721–754.
- [5] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. The rolling motion of a ball on a surface: New integrals and hierarchy of dynamics // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2002, vol. 7, no. 2, pp. 201–219.
- [6] Routh E. J. A treatise on the dynamics of a system of rigid bodies: P. 2. The advanced part. 6th ed. New York: Macmillan, 1905. *См. также:* New York: Dover, 1955 (reprint).
- [7] Борисов А. В., Мамаев И. С., Бизяев И. А. Иерархия динамики при качении твердого тела без проскальзывания и верчения по плоскости и сфере // *Нелинейная динамика*, 2013, т. 9, № 2, с. 141–202.
- [8] Kazakov A. O. Strange attractors and mixed dynamics in the problem of an unbalanced rubber ball rolling on a plane // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, vol. 18, no. 5, pp. 508–520.
- [9] Kazakov A. O. On the chaotic dynamics of a rubber ball with three internal rotors // *Nonlinear Dynamics & Mobile Robotics*, 2014, vol. 2, no. 1, pp. 73–97.
- [10] Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O. Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, vol. 18, no. 5, pp. 521–538.
- [11] Кузнецов С. П. К вопросу о правомерности неголономной модели динамики кельтского камня // *УФН*, 2015, т. 185, № 12, с. 1342–1344.
- [12] Борисов А. В., Казаков А. О., Кузнецов С. П. Нелинейная динамика кельтского камня: Неголономная модель // *УФН*, 2014, т. 184, № 5, с. 493–500.
- [13] Борисов А. В., Казаков А. О., Сатаев И. Р. Регулярные и хаотические аттракторы в неголономной модели волчка Чаплыгина // *Нелинейная динамика*, 2014, т. 10, № 3, с. 361–380.
- [14] Borisov A. V., Kazakov A. O., Sataev I. R. The reversal and chaotic attractor in the nonholonomic model of Chaplygin's top // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2014, vol. 19, no. 6, pp. 718–733.
- [15] Walker G. T. On a curious dynamical property of celts // *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1895, vol. 8, pt. 5, pp. 305–306.
- [16] Астапов И. С. Об устойчивости вращения кельтского камня // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1980, № 2, с. 97–100.
- [17] Карапетян А. В. О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивости кельтских камней // *ПММ*, 1981, т. 45, № 1, с. 42–51.
- [18] Маркеев А. П. О динамике твердого тела на абсолютно шероховатой плоскости // *ПММ*, 1983, т. 47, № 4, с. 575–582.
- [19] Walker J. The amateur scientist: The mysterious «rattleback»: A stone that spins in one direction and then reverses // *Sci. Am.*, 1979, vol. 241, pp. 172–184.
- [20] Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // *УФН*, 2003, т. 173, № 4, с. 407–418.

- [21] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Новые эффекты в динамике кельтских камней // Докл. РАН, 2006, т. 408, № 2, с. 192–195.
- [22] Gonchenko A., Gonchenko S., Kazakov A., Turaev D. Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2014, vol. 24, no. 8, 1440005, 25 pp.
- [23] Афраймович В. С., Шильников Л. П. Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность // *Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. сб. / отв. ред. Е. А. Леонтович-Андропова. Горький: ГГУ, 1983. С. 3–26.*
- [24] Arneodo A., Couillet P. H., Spiegel E. A. Cascade of period doublings of tori // *Phys. Lett. A*, 1983, vol. 94, no. 1, p. 1–6.
- [25] Kaneko K. Doubling of torus // *Progr. Theoret. Phys.*, 1983, vol. 69, no. 6, pp. 1806–1810.
- [26] Vitolo R., Broer H., Simó C. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2011, vol. 16, nos. 1–2, pp. 154–184.
- [27] Гонченко А. С., Гонченко С. В., Шильников Л. П. К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений // *Нелинейная динамика*, 2012, т. 8, № 1, с. 3–28.
- [28] Mora L., Viana M., Abundance of strange attractors // *Acta Math.*, 1993, vol. 171, no. 1, pp. 1–71.
- [29] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.
- [30] Кузнецов С. П. Динамический хаос. 2-е изд. Москва: Физматлит, 2006. 356 с.
- [31] Borisov A. V., Jalnin A. Yu., Kuznetsov S. P., Sataev I. R., Sedova J. V. Dynamical phenomena occurring due to phase volume compression in nonholonomic model of the rattleback // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2012, vol. 17, no. 6, pp. 512–532.
- [32] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them: P. 1: Theory; P. 2: Numerical application // *Meccanica*, 1980, vol. 15, pp. 9–30.
- [33] Feigenbaum M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.*, 1978, vol. 19, no. 1, pp. 25–52.
- [34] Кузнецов С. П. О воздействии периодического внешнего возмущения на систему, демонстрирующую переход порядок-хаос через бифуркации удвоения периода // *Письма в ЖЭТФ*, 1984, т. 39, № 3, с. 113–116.
- [35] Анищенко В. С. Стохастические колебания в радиофизических системах: Ч. 2: Типичные бифуркации и квазиаттракторы в нелинейных системах с малым числом степеней свободы. Саратов: СГУ, 1986. 200 с.
- [36] Krauskopf B., Osinga H. Growing 1D and quasi-2D unstable manifolds of maps // *J. Comput. Phys.*, 1998, vol. 146, no. 1, pp. 404–419.
- [37] Aronson D. G., Chory M. A., Hall G. R., McGehee R. P. Bifurcations from an invariant circle for two-parameter families of maps of the plane: A computer-assisted study // *Comm. Math. Phys.*, 1982, vol. 83, no. 3, pp. 303–354.
- [38] Ostlund S., Rand D., Sethna J., Siggia E. Universal properties of the transition from quasi-periodicity to chaos in dissipative systems // *Phys. D*, 1983, vol. 8, no. 3, pp. 303–342.
- [39] Broer H., Simó C., Vitolo R. Bifurcations and strange attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing // *Nonlinearity*, 2002, vol. 15, no. 4, pp. 1205–1267.
- [40] Broer H. W., Simó C., Vitolo R. Quasi-periodic Hénon-like attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing // *Equadiff 2003: Proc. Internat. Conf. on Differential Equations (Hasselt, Belgium, 22–26 July 2003) / F. Dumortier, H. W. Broer, J. Mahwin, S. M. Verduyn-Lunel (eds.)*. Singapore: World Sci., 2005. P. 714–719.

## Scenarios of transition to chaos in the nonholonomic model of a Chaplygin top

Igor R. Sataev<sup>1</sup>, Alexey O. Kazakov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Kotel'nikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch, Zelenaya 38, Saratov, 410019, Russia

<sup>1,2</sup>Udmurt State University, Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

<sup>2</sup>Higher School of Economics National Research University, 25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod, 603155, Russia

<sup>2</sup>Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, 23 Prospekt Gagarina, Nizhny Novgorod, 603950, Russia

<sup>1</sup>sataevir@rambler.ru, <sup>2</sup>kazakovdz@yandex.ru

We study the dynamics in the Suslov problem which describes the motion of a heavy rigid body with a fixed point subject to a nonholonomic constraint, which is expressed by the condition that the projection of angular velocity onto the body-fixed axis is equal to zero. Depending on the system parameters, we find cases of regular (in particular, integrable) motions and, using a new method for constructing charts of Lyapunov exponents, detect different types of chaotic behavior such as conservative chaos, strange attractors and mixed dynamics, which are typical of reversible systems. In the paper we also examine the phenomenon of reversal, which was observed previously in the motion of Celtic stones.

MSC 2010: 37J60, 37N15, 37G35, 70E18, 70F25, 70H45

Keywords: nonholonomic model, Chaplygin top, Afraimovich – Shilnikov torus-breakdown, cascade of period-doubling bifurcations, scenario of period doublings of tori, figure-eight attractor

Received March 04, 2016, accepted May 20, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 2, pp. 235–250 (Russian)