



---

ПЕРЕВОДНЫЕ СТАТЬИ

УДК: ??

MSC 2010: 37D45, 37D20, 34D08, 32Q05, 70F20

**Гиперболический хаос в автоколебательных  
системах на основе тройного шарнирного механизма:  
Проверка отсутствия касаний устойчивых  
и неустойчивых многообразий фазовых траекторий\***

**С. П. Кузнецов**

Сформулированы уравнения и проведено численное исследование хаотических автоколебаний в системах, построенных на основе тройного шарнирного механизма Тёрстона – Уикса – Ханта – МакКэя. Рассмотрены варианты систем с голономной механической связью трех ротаторов и систем, где три ротатора взаимодействуют посредством потенциальных сил. Представлены и обсуждаются характеристики хаотических режимов (показатели Ляпунова, спектры мощности). Хаотическая динамика исследованных моделей ассоциируется с гиперболическим аттрактором, по крайней мере, при условии относительно небольшой надкритичности автоколебательного режима, что следует из проведенного численного анализа распределений углов пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий принадлежащих аттрактору фазовых траекторий. В системах на базе ротаторов с потенциальным взаимодействием, начиная с некоторого уровня надкритичности, гиперболичность нарушается.

Ключевые слова: динамическая система, хаос, гиперболический аттрактор, динамика Аносова, ротатор, показатель Ляпунова, автоколебания

---

\*Перевод статьи “Hyperbolic Chaos in Self-oscillating Systems Based on Mechanical Triple Linkage: Testing Absence of Tangencies of Stable and Unstable Manifolds for Phase Trajectories”, опубликованной в журнале *Regular and Chaotic Dynamics*, 2015, vol. 20, no. 6, pp. 649–666.

Получено 28 сентября 2015 года

После доработки 30 октября 2015 года

---

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 15-12-20035.

---

Кузнецов Сергей Петрович

[spkuz@yandex.ru](mailto:spkuz@yandex.ru)

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН

410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38



## Введение

Гиперболическая теория — раздел теории динамических систем, получивший глубокое развитие за последние полвека, доставляет строгое математическое обоснование возможности хаотического поведения детерминированных систем как с дискретным временем (итерировуемые отображения — диффеоморфизмы) так и с непрерывным временем (потoki) [1–5]. Объекты, с которыми имеет дело гиперболическая теория, — это инвариантные множества в фазовом пространстве динамических систем, составленными исключительно из седловых траекторий. У такой траектории в векторном пространстве всевозможных бесконечно малых возмущений (касательном пространстве) можно определить подпространство векторов, экспоненциально убывающих по норме при эволюции в прямом времени, и подпространство векторов, экспоненциально убывающих при эволюции в обратном времени. В потоковых системах, для траекторий, отличных от неподвижной точки, вводится, кроме того, одномерное нейтральное подпространство, отвечающее возмущениям вдоль траектории, которые в среднем не нарастают и не убывают. Произвольный вектор малого возмущения обязан допускать представление в виде линейной комбинации векторов, относящихся к указанным подпространствам. Множество точек, которые в ходе эволюции во времени приближаются к данной траектории, называется ее устойчивым многообразием. Аналогично, неустойчивое многообразие есть множество точек, которые приближаются к исходной траектории при эволюции в обратном времени. Чтобы динамика была гиперболической, касания устойчивых и неустойчивых многообразий должны быть исключены; пересечения могут быть только трансверсальными, под ненулевым углом.

Для консервативных систем гиперболический хаос отвечает динамике Аносова, когда типичная фазовая траектория заполняет фазовое пространство (для диффеоморфизма) или энергетическую поверхность (для потока) плотно. Для диссипативных систем гиперболическая теория вводит в рассмотрение специальный тип хаотических аттракторов — равномерно гиперболические аттракторы.

Динамическое поведение, описываемое гиперболической теорией, структурно устойчиво, то есть устройство фазового пространства, характер динамики и ее статистические характеристики не чувствительны к изменению параметров и функций, присутствующих в уравнениях движения. В связи с этим казалось естественным ожидать, что гиперболический хаос должен реализоваться во многих физических ситуациях. Однако с течением времени, по мере того как многочисленные примеры хаотических систем различной природы были предложены и изучены, стало ясно, что они не вписываются в узкие рамки ранней гиперболической теории. Поэтому гиперболическая динамика стала рассматриваться лишь как рафинированный абстрактный образ хаоса, не имеющий прямого отношения к реальным системам, а усилия математиков оказались перенаправлены на развитие более широко применимых обобщений [6, 7].

В учебниках и обзорах по динамическим системам гиперболический хаос обычно представлен искусственно сконструированными математическими примерами, такими как автоморфизмы тора Аносова, DA-аттрактор Смейла, солениод Смейла–Вильямса, аттрактор Плыкина [1–5], тогда как вопрос о реализации и возможных приложениях гиперболического хаоса в природе и технике, долгое время оставался непроработанным.

Если математики разрабатывают свои примеры, используя геометрические, топологические, алгебраические конструкции, то физик для целенаправленного построения моделей с гиперболическим хаосом может привлечь свой инструментарий, включающий осцилляторы, частицы, взаимодействия, цепи обратной связи. В последнее время в этом отношении

достигнут прогресс и предложены многочисленные примеры физически реализуемых систем с аттракторами типа Смейла–Вильямса и с иными разновидностями гиперболических аттракторов [8–20]. Среди них, с точки зрения наглядности, предпочтение надо отдать системам механики, которые легко воспринимаются и интерпретируются благодаря нашему повседневному опыту [20–24].

Надо отметить, однако, что в обсуждавшихся физически реализуемых примерах [8–20] гиперболические аттракторы получаются при редукции динамического описания к отображению Пуанкаре, а в промежутках времени между состояниями, отвечающими прохождению сечения Пуанкаре, не приходится говорить о хорошо выраженном равномерном по времени растяжении и сжатию для соответствующих подпространств векторов возмущения. Вопрос о построении физических систем с гиперболическими аттракторами, которые характеризовались бы хотя бы приблизительно равномерным растяжением и сжатием вдоль траекторий в непрерывном времени, остается открытым.

В этой связи заслуживает внимания пример тройного шарнирного механизма, рассмотренный в научно-популярной статье Тёрстона и Уикса [25], как иллюстрация системы с нетривиальной топологией конфигурационного пространства. Механизм составлен из лежащих в общей плоскости трех дисков с центрами в вершинах равностороннего треугольника, каждый из которых способен вращаться вокруг своей оси (рис. 1). На краю каждого диска установлен шарнир ( $P_{1,2,3}$ ), и к этим шарнирам прикреплены три одинаковых стержня, противоположные концы которых соединены вместе посредством еще одного подвижного шарнира ( $P_0$ ).

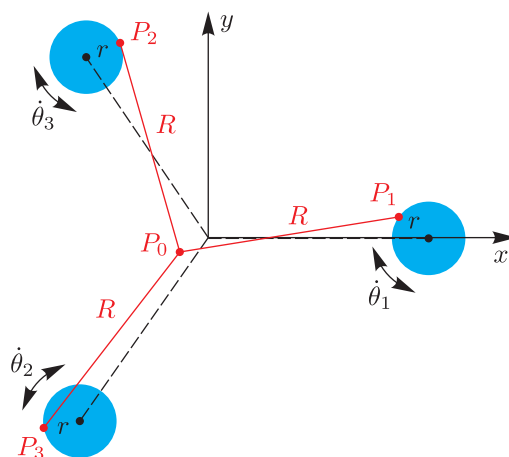


Рис. 1. Механическая система Тёрстона и Уикса, «тройное соединение».

Мгновенная конфигурация системы задается угловыми переменными  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ , характеризующими углы поворота дисков, но из них только две являются независимыми в силу наложенной механической связи. Таким образом, конфигурационное пространство представляет собой двумерное многообразие. В области параметров, которая далее будет рассматриваться, это поверхность рода 3 («крендель с тремя дырками»). Кинетическая энергия выражается, как квадратичная форма, через обобщенные скорости — производные локальных координат по времени на двумерном многообразии. Эта квадратичная форма, коэффициенты которой зависят от длин и масс элементов конструкции, задает метрику на двумерном многообразии, а движение имеет место по геодезическим линиям этой метрики. Как установили Хант и МакКэй [26], подбором параметров можно добиться, чтобы

метрика характеризовалась всюду отрицательной кривизной, а в этом случае движение шарнирного механизма с сохранением энергии непременно отвечает гиперболической динамике Аносова [27, 28]. Они также указали, что с добавлением трения и контролирующего устройства, обеспечивающего обратную связь, можно реализовать устройство, обладающее гиперболическим хаотическим аттрактором, однако, в этом плане авторы ограничились хотя и убедительными, но только лишь словесными аргументами, апеллирующими к структурной устойчивости динамики Аносова в исходной консервативной системе. Конкретного исследования, где была бы в явном виде представлена система модельных уравнений, и гиперболический хаос продемонстрирован численно, с анализом его количественных характеристик, выполнено не было.

В настоящей работе формулируются уравнения, и проводится численное исследование автоколебательных систем на основе механизма Тёрстона – Уикса – МакКея – Ханта. Рассмотрение ограничено асимптотическим случаем, когда радиус дисков мал по сравнению с длиной стержней, соединяющих их с подвижным шарниром, а инерционные свойства механизма определяются исключительно дисками. При этом кривизна метрики, определенной по кинетической энергии, отрицательна за исключением конечного множества из восьми точек, где она нулевая, но этого достаточно, чтобы динамика относилась к классу Аносова.

Первый из рассмотренных ниже вариантов соответствует идее МакКея и Ханта, когда при введении диссипации одна из изоэнергетических поверхностей системы с механической связью становится аттрактором. Практическая реализация такой ситуации подразумевает дополнение собственно шарнирного механизма контрольным устройством, которое измеряло бы мгновенное значение полной кинетической энергии системы, и приводами, обеспечивающими приложение таких моментов сил к дискам, чтобы кинетическая энергия стремилась к заданной величине.

Другой вариант системы основан на предположении, что каждый диск представляет собой подсистему с диссипацией и обратной связью, где в отсутствие связи с партнерами реализовался бы режим авторотации, то есть вращения в одну или другую сторону с постоянной угловой скоростью, определяемой самой системой и не зависящей от конкретных начальных условий. Этот вариант механического устройства проще для практического исполнения, имея в виду, что можно использовать фрикционные муфты, подведенные к каждому диску, с передачей ему направленных в противоположные стороны моментов вращения при подходящем законе зависимости момента силы трения от относительной угловой скорости. При наложении в такой системе механической связи с помощью стержней и шарниров, ее динамика уже не сводится к таковой на поверхности постоянной кинетической энергии.

Затем мы переходим к рассмотрению систем на основе трех ротаторов, взаимодействии между которыми обеспечивается не механическим ограничением, а силовым полем, потенциал которого зависит от углов поворота (см. также [29]). Минимум потенциала соответствует поверхности в конфигурационном пространстве, которая отвечает предпологавшейся в предыдущих вариантах геометрической связи. Это в принципе позволяет уйти от механических объектов и говорить о реализации на указанной основе хаотических систем иной физической природы, например, электронных устройств, выступающих как генераторы грубого хаоса.

При уходе от первоначального варианта шарнирного механизма, где хаос гиперболический в силу его соответствия движению по геодезическим линиям метрики с отрицательной кривизной, вопрос об обосновании гиперболической природы динамики в модифицированных вариантах системы требует специального анализа. При достаточно малой вариации оператора эволюции в сравнении с исходной системой, гиперболичность обеспечена в силу

структурной устойчивости динамики Аносова, но для заключения о том, остается ли она таковой для вариаций, не являющихся малыми, требуется проверка компьютерных критериев гиперболичности. В настоящей работе для данной цели будет привлечен подход, который для краткости будем упоминать как «критерий углов».

Идея проверки гиперболичности на основе статистики углов между устойчивыми и неустойчивыми подпространствами (а значит и многообразиями) на фазовой траектории была предложена для седловых инвариантных множеств в работе [30]. Впоследствии она использовалась применительно к аттракторам [31, 32], в том числе к аттракторам типа Смейла–Вильямса и Плыкина для отображений Пуанкаре систем, допускающих физическую реализацию [8, 13, 33]. Методика состоит в том, что в точках одной и той же принадлежащей рассматриваемому инвариантному множеству типичной траектории определяются углы между подпространствами векторов малых возмущений при проходе вперед и назад во времени и анализируется их статистическое распределение. Если оно не содержит углов близких к нулю, то это указывает на гиперболичность инвариантного множества. Если же обнаруживается положительная вероятность нулевых углов, то касания между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями имеют место, и гиперболичности нет. Это может говорить о наличии квазиаттрактора, представляющего собой сложно устроенное множество, которое помимо хаотических орбит содержит также долгопериодические устойчивые циклы с весьма узкими областями притяжения [2].

## 1. Система с механической связью с инвариантной изоэнергетической поверхностью (invariant energy surface)

Декартовы координаты установленных на дисках шарниров  $P_{1,2,3}$  выражаются через углы  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ , которые отсчитываются от лучей, соединяющих центры дисков с началом координат (рис. 1), следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - r \cos \theta_1, & y_1 &= -r \sin \theta_1, \\ x_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} r \cos \theta_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} r \sin \theta_2, & y_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} r \sin \theta_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} r \cos \theta_2, \\ x_3 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} r \cos \theta_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} r \sin \theta_3, & y_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} r \sin \theta_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} r \cos \theta_3. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Механическая геометрическая связь, обусловленная присутствием стержней и шарниров, состоит в том, что у треугольника  $P_1P_2P_3$  радиус описанной окружности должен равняться  $R$ . По известной формуле,  $R = abc/4S$ , где  $a, b, c$  — длины сторон треугольника, а  $S$  — его площадь. Имея координаты вершин  $(x_i, y_i)$ , находим длины сторон, а площадь выражаем через векторное произведение векторов, исходящих из одной вершины и идущих в две другие,  $S = \frac{1}{2} |b \times c|$ . В результате имеем запись уравнения связи  $(abc)^2 - 4R^2(b \times c)^2 = 0$  через координаты

$$\begin{aligned} &[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] [(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2] [(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2] - \\ &- 4R^2 (x_2y_3 + x_3y_1 + x_1y_2 - x_3y_2 - x_1y_3 - x_2y_1)^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Подставив сюда выражения (1.1), получаем уравнение связи в форме  $F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = 0$ .

Предположим, что среди элементов системы существенной массой обладают только диски, момент инерции которых примем равным единице, и будем полагать, что к каждому из них дополнительно приложен момент внешней силы  $M_{1,2,3}$ . Уравнения движения представляются тогда в виде (см., например, [34, 35])

$$\ddot{\theta}_1 = M_1 + \Lambda \partial F / \partial \theta_1, \quad \ddot{\theta}_2 = M_2 + \Lambda \partial F / \partial \theta_2, \quad \ddot{\theta}_3 = M_3 + \Lambda \partial F / \partial \theta_3, \quad (1.3)$$

$$F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = 0, \quad (1.4)$$

где множитель  $\Lambda$  подлежит определению с учетом дополняющего дифференциальные уравнения (1.3) алгебраического условия голономной механической связи (1.4). Это выражение и соотношение, получаемое его дифференцированием, формально отвечают двум интегралам движения системы (1.3), имеющей шестой порядок.

Если предположить, что  $r \ll 1$ , и выполнить разложение равенства (1.2) в ряд Тейлора по малому параметру  $r$  с учетом членов нулевого и первого порядка, получим

$$27(R^2 - 1) - 18r(2R^2 - 3)(\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3) = 0. \quad (1.5)$$

Полагая  $R = 1$ , приходим к очень простому уравнению голономной связи

$$F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 = 0, \quad (1.6)$$

которое далее только и будет использоваться в настоящей работе.

В консервативном случае, в отсутствие моментов внешних сил,  $M_{1,2,3} = 0$ , в системе имеет место сохранение кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2), \quad (1.7)$$

и динамику можно интерпретировать как движение точки на двумерной поверхности, заданной уравнением (1.6), по геодезическим линиям метрики, которая определена квадратичной формой

$$ds^2 = \frac{1}{2} (d\theta_1^2 + d\theta_2^2 + d\theta_3^2), \quad (1.8)$$

с условием на дифференциалы  $d\theta_1 \sin \theta_1 + d\theta_2 \sin \theta_2 + d\theta_3 \sin \theta_3 = 0$  в силу уравнения связи. Вычисление гауссовой кривизны приводит к формуле [26, 29]

$$K = -\frac{\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3}{2(\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_3)^2}. \quad (1.9)$$

Как можно видеть, кривизна всюду отрицательна, за исключением конечного числа точек, а именно, восьми, где она обращается в нуль:  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\pm\pi/2, \pm\pi/2, \pm\pi/2)$ . В связи с этим, при отличной от нуля кинетической энергии движение по геодезическим линиям будет соответствовать динамике Аносова [26].

Формально фазовое пространство системы шестимерное, соответственно, имеется шесть показателей Ляпунова, характеризующих поведение возмущенных фазовых траекторий около опорной траектории. В консервативном случае один показатель положительный, четыре нулевых, и один отрицательный, равный по абсолютной величине положительному показателю. Один из нулевых показателей обусловлен автономной природой системы и отвечает за возмущение, направленное по касательной к фазовой траектории. Еще один нулевой



показатель ассоциируется с возмущением сдвига по энергии. Оставшиеся два нулевых показателя нефизические и должны быть исключены из рассмотрения, поскольку соответствуют возмущениям тех интегралов движения, которые отвечают за наложенное условие голономной связи, то есть возмущениям, нарушающим уравнение связи.

Так как в системе отсутствует характерный временной масштаб, положительный и отрицательный показатели Ляпунова, характеризующие экспоненциальный рост и убывание возмущений за единицу времени, прямо пропорциональны скорости, то есть  $\lambda = \pm \kappa \sqrt{W}$ . Для динамики, ассоциирующей с движением на поверхности отрицательной кривизны, коэффициент в этом выражении определяется усредненной кривизной метрики. Эмпирически расчеты для условия связи (1.6) дают  $\kappa = 0.70$  [29].

Чтобы получить диссипативную систему с хаотическим аттрактором, следуя сначала предложениям [26], зададим моменты зависящими от обобщенных скоростей так, чтобы в ходе временной эволюции кинетическая энергия стремилась к величине, заданной параметром  $\mu$ , для чего положим

$$M_i = \nu \left[ \mu - \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2) \right] \dot{\theta}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.10)$$

где  $\nu$  постоянный коэффициент. Для реализации такой зависимости механизм должен быть дополнен контролирующим устройством и приводами, обеспечивающими приложение соответствующих моментов  $M_{1,2,3}$  на осях в зависимости от величины определенной в данное мгновение кинетической энергии.

Дифференцируя уравнение связи по времени однократно и двукратно, имеем

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 &= 0, \\ \ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 + \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Подставив выражения для вторых производных из уравнений движения (1.3) во второе соотношение, получаем в явном виде формулу для множителя  $\Lambda$

$$\Lambda = - \frac{\sum_{j=1}^3 (\dot{\theta}_j^2 \cos \theta_j + M_j \sin \theta_j)}{\sum_{j=1}^3 \sin^2 \theta_j}, \quad (1.12)$$

и приходим к замкнутой системе уравнений

$$\ddot{\theta}_i = \nu \left[ \mu - \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2) \right] \left( \dot{\theta}_i - \frac{\sum_{j=1}^3 \dot{\theta}_j \sin \theta_j}{\sum_{j=1}^3 \sin^2 \theta_j} \sin \theta_i \right) - \frac{\sum_{j=1}^3 \dot{\theta}_j^2 \cos \theta_j}{\sum_{j=1}^3 \sin^2 \theta_j} \sin \theta_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.13)$$

Уравнение, описывающее эволюцию кинетической энергии  $W = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2)$ , легко выводится из (1.13) и имеет вид

$$\dot{W} = 2\nu(\mu - W)W. \quad (1.14)$$

На рисунке 2 показаны зависимости угловых скоростей дисков, а также энергии от времени в переходном процессе установления хаотических автоколебаний для  $\mu = 0.04$ ,  $\nu = 3$  при старте из некоторой точки в пространстве конфигураций, допустимой механической связью, с близкой к нулю начальной скоростью. В результате переходного процесса возникает автоколебательный режим, которому отвечает постоянная величина энергии  $W = 0.04$ , а зависимости реализации угловых скоростей носят хаотический характер, — визуально не заметно какого-либо повторения форм.

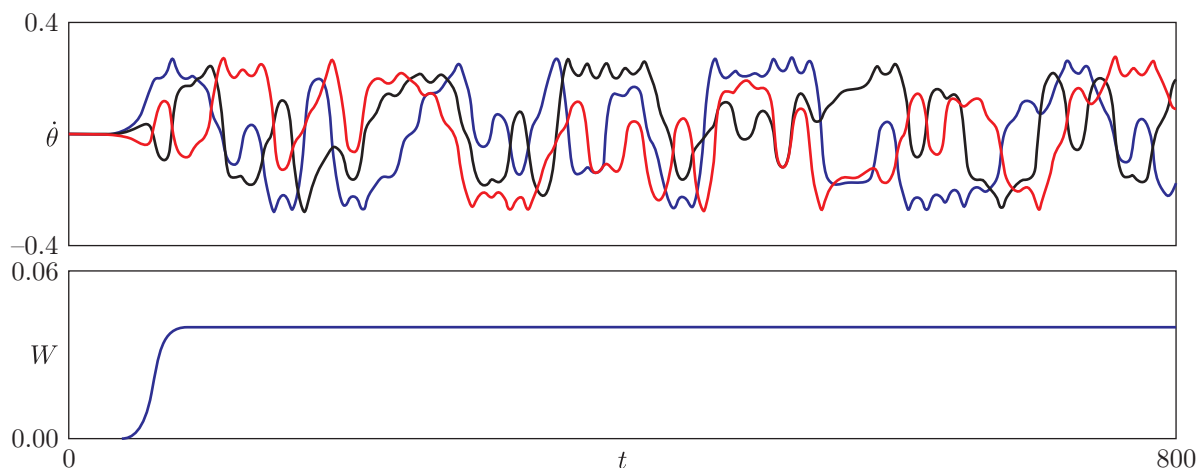


Рис. 2. Зависимости обобщенных скоростей  $\dot{\theta}_1$ ,  $\dot{\theta}_2$ ,  $\dot{\theta}_3$  и энергии  $W$  от времени в переходном процессе установления хаотических автоколебаний при  $\mu = 0.04$ ,  $\nu = 3$ .

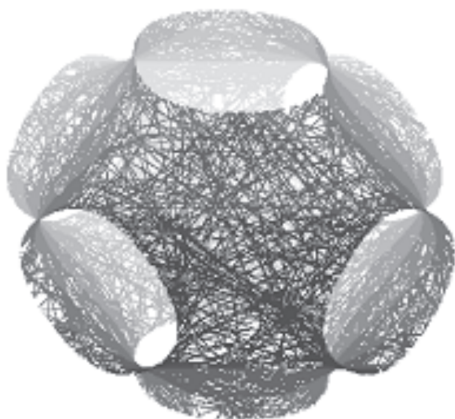


Рис. 3. Полученная при численном интегрировании уравнений (1.13) траектория в трехмерном конфигурационном пространстве системы  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ , располагающаяся на двумерной поверхности, определенной уравнением  $\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 = 0$ .

связи, то остается четыре показателя. Поскольку движение на аттракторе соответствует изоэнергетической поверхности, то показатели для возмущений, не уводящих изображающую точку с этой поверхности, будут такими же, как в консервативной системе при соот-

Рисунок 3 иллюстрирует вид траектории в конфигурационном пространстве, полученной при численном решении уравнений (1.13). Точки располагаются на двумерной поверхности, заданной уравнением  $\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 = 0$ , где выполнено условие механической связи. При построении графика угловые переменные считались отнесенными к интервалу от 0 до  $2\pi$ , то есть приведенная диаграмма в трехмерном пространстве  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  отвечает фундаментальной кубической ячейке, периодически повторяющейся при сдвиге на  $2\pi$  по каждой из трех координат. Противоположные грани кубической ячейки естественно отождествить, в результате чего приходим к компактному многообразию рода 3, то есть к поверхности, топологически эквивалентной «кренделю с тремя дырками».

Чтобы охарактеризовать наблюдаемый хаос на количественном уровне, обратимся к показателям Ляпунова. Если исключить нефизические показатели, нарушающие уравнение механической



ветствующей энергии:  $\kappa\sqrt{W}$ , 0 и  $-\kappa\sqrt{W}$ . Показатель, отвечающий за возмущение сдвига по энергии, легко находится, как показатель Ляпунова притягивающей неподвижной точки  $W = \mu$  в уравнении (1.14), и равен  $-2\nu\mu$ .

На рисунке 4 показан график зависимости четырех показателей Ляпунова от параметра  $\mu$  для системы (1.13). Сплошные линии отвечают приведенным в предыдущем абзаце формулам. Точками представлены результаты вычисления показателей Ляпунова по алгоритму Бенеттина [13, 36]. Расчет производится путем обработки данных численного интегрирования на опорной траектории уравнений (1.13), формально записываемых в виде  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ , где  $\mathbf{x}$  — шестимерный вектор состояния, совместно с шестью комплектами уравнений в вариациях  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}'(\mathbf{x}(t), t)\tilde{\mathbf{x}}$ , где  $\mathbf{F}'(\mathbf{x}(t), t)$  — составленная из частных производных матрица Якоби размера  $6 \times 6$ . В процессе численного интегрирования на каждом шаге проводится ортогонализация и нормировка векторов возмущения  $\tilde{\mathbf{x}}_{1,2,3,4,5,6}$  по Граму — Шмидту. Показатели Ляпунова оцениваются по коэффициентам нарастания или убывания накапливающихся сумм логарифмов норм векторов, получаемых после ортогонализации, но до нормализации. На заключительном этапе процедуры два нефизических показателя, нарушающих условие механической связи, исключаются.

На рисунке 5 показан спектр мощности сигнала, определенного как  $u(t) = \cos\theta_1(t)$ , по результатам обработки временного ряда, полученного при численном моделировании динамики на аттракторе. Спектр рассчитывается в соответствии с методикой статистиче-

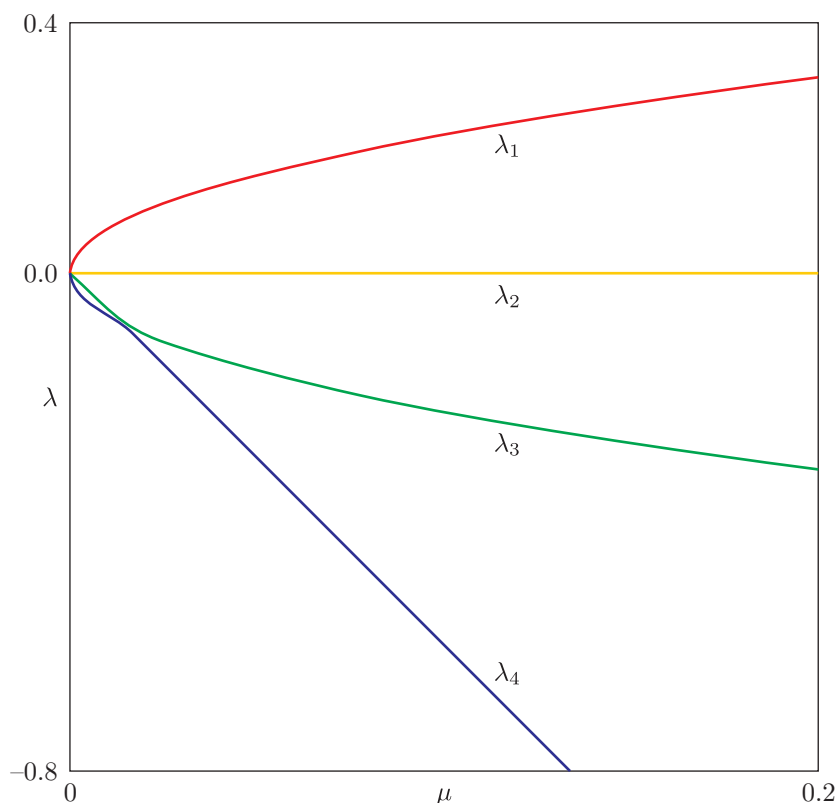


Рис. 4. Показатели Ляпунова для аттрактора в виде инвариантной изоэнергетической поверхности диссипативной системы с механической связью (1.13) в зависимости от параметра  $\mu$  при  $\nu = 3$ . Точки отвечают численным расчетам на основе алгоритма Бенеттина, а сплошные линии построены согласно формулам  $\lambda_{1,4} = \pm\kappa\sqrt{\mu}$ , где  $\kappa = 0.70$  и  $\lambda_4 = -2\nu\mu$ .

ской оценки спектральной плотности мощности, рекомендуемой в теории случайных процессов [37]. График спектральной плотности представлен в логарифмической шкале в децибелах (10 дБ соответствуют 10-кратному отношению сопоставляемых уровней мощности) для значения параметра надкритичности  $\mu = 0.04$  при  $\nu = 3$ . Как можно видеть из диаграммы, спектр сплошной, что соответствует хаотической динамике, он довольно равномерный (нет выраженной изрезанности).

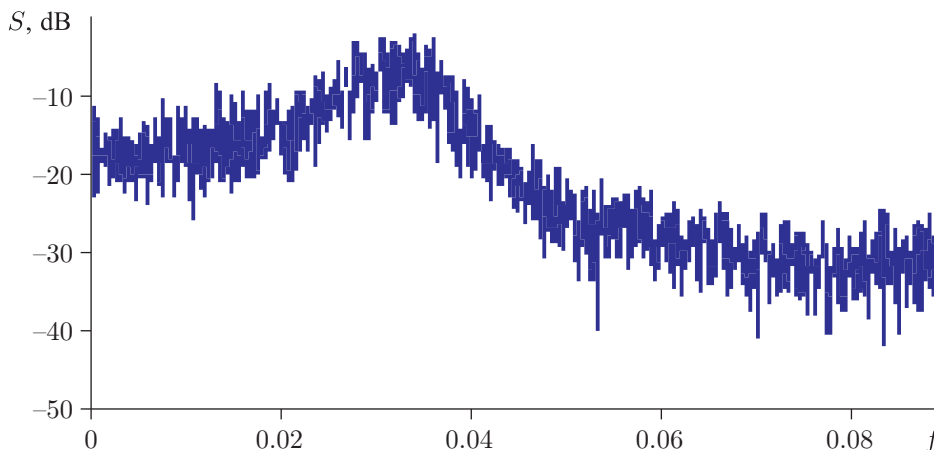


Рис. 5. Спектр мощности сигнала  $u(t) = \cos \theta_1(t)$ , порождаемого системой (1.13) при  $\nu = 3$ ,  $\mu = 0.04$ .

Гиперболичность наблюдаемого аттрактора не вызывает сомнений, поскольку динамика происходит на энергетической поверхности по геодезическим линиям метрики, имеющей за исключением конечного числа точек отрицательную кривизну. Интересно, тем не менее, проиллюстрировать применение «критерия углов» для этого случая, произведя тестирование методики, которая ниже будет прилагаться в ситуациях, когда наличие или отсутствие гиперболичности не тривиально.

Критерий удобно использовать в элегантной форме, предложенной в работе [33]. Начинаем с вычисления опорной орбиты  $x(t)$  на аттракторе, проводя решение системы (1.13)  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  за достаточно большой временной интервал. Затем берем линеаризованное уравнение для вектора возмущения  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}'(\mathbf{x}(t), t)\tilde{\mathbf{x}}$  и интегрируем его вдоль найденной траектории  $\mathbf{x}(t)$  с нормировкой вектора  $\tilde{\mathbf{x}}$  на каждом шаге  $n$  на единицу, чтобы исключить расхожимость. (В нашей задаче неустойчивое направление одно — один положительный показатель Ляпунова.) В результате получаем набор единичных векторов  $\{\mathbf{x}_n\}$ . Далее, проводим интегрирование в обратном времени вдоль той же самой опорной траектории линейного уравнения  $\dot{\mathbf{u}} = -[\mathbf{F}'(\mathbf{x}(t), t)]^T \mathbf{u}$ , где верхний индекс T означает матричное сопряжение. Это дает набор векторов  $\{\mathbf{u}_n\}$ , определяющих ортогональное дополнение к устойчивому подпространству векторов возмущения в точках опорной траектории. Их также удобно нормировать на единицу. Теперь для оценки угла  $\phi$  между одномерным неустойчивым подпространством и устойчивым подпространством на каждом  $n$ -ом шаге вычисляем угол  $\beta_n \in [0, \pi/2]$  между векторами  $\tilde{\mathbf{x}}_n$  и  $\mathbf{u}_n$ :  $\cos \beta_n = |\mathbf{u}_n(t) \cdot \tilde{\mathbf{x}}_n(t)|$ , и полагаем  $\phi_n = \pi/2 - \beta_n$ .

На рисунке 6 показаны полученные численно гистограммы распределения углов между устойчивыми и неустойчивыми подпространствами в системе (1.13) для  $\nu = 3$  при  $\mu = 0.04$  и 0.25. Как можно видеть, распределение отделено от нулевых значений углов  $\theta$ , то есть тест подтверждает гиперболичность аттрактора.

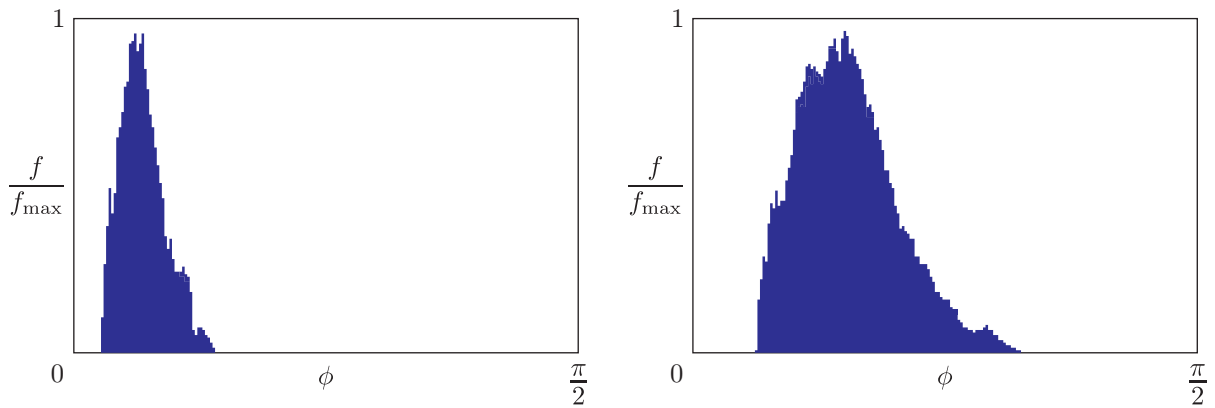


Рис. 6. Проверка критерия углов в системе с механической связью и инвариантной изоэнергетической поверхностью при  $\mu = 0.04$  и  $\mu = 0.25$  при  $\nu = 3$ .

## 2. Система трех авторотаторов с механической связью

Обратимся теперь к системе, где моменты внешней силы, приложенные к дискам, зависят только от угловой скорости каждого диска, а именно, положим

$$M_i = \nu \left( \mu - \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 \right) \dot{\theta}_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.1}$$

Для получения такой зависимости моментов сил от угловых скоростей в реальном устройстве можно использовать фрикционные муфты, присоединенные к каждому диску, с передачей ему направленных в противоположные стороны моментов вращения при подходящем выборе закона зависимости коэффициента трения от скорости. В этом случае каждый из трех дисков представляет собой авторотатор — подсистему, которая, будучи изолированной, в установившемся режиме совершает вращения в зависимости от начальных условий в одну или другую сторону с постоянной угловой скоростью  $\dot{\theta} = \pm\sqrt{2\mu}$ .

Уравнения (1.3) при наложении механической связи (1.4) в данном случае переписутся в виде

$$\ddot{\theta}_i = \nu \left( \mu - \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right) \left( \dot{\theta}_i - \frac{\sum_{j=1}^3 \dot{\theta}_j \sin \theta_j}{\sum_{j=1}^3 \sin^2 \theta_j} \sin \theta_i \right) - \frac{\sum_{j=1}^3 \dot{\theta}_j^2 \cos \theta_j}{\sum_{j=1}^3 \sin^2 \theta_j} \sin \theta_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.2}$$

В процессе движения изображающая точка в конфигурационном пространстве в силу наложенной механической связи остается на поверхности того же вида, как в предыдущем примере (рис. 3).

На рисунке 7 показаны зависимости угловых скоростей дисков, а также энергии  $W = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2)$ , от времени в переходном процессе установления хаотических автоколебаний при  $\mu = 0.02$ ,  $\nu = 3$  при старте из некоторой точки в пространстве конфигураций, допустимой механической связью с близкой к нулю начальной скоростью. В результате переходного процесса возникает хаотический автоколебательный режим, в котором кинетическая энергия нерегулярным образом колеблется около некоторого среднего значения.



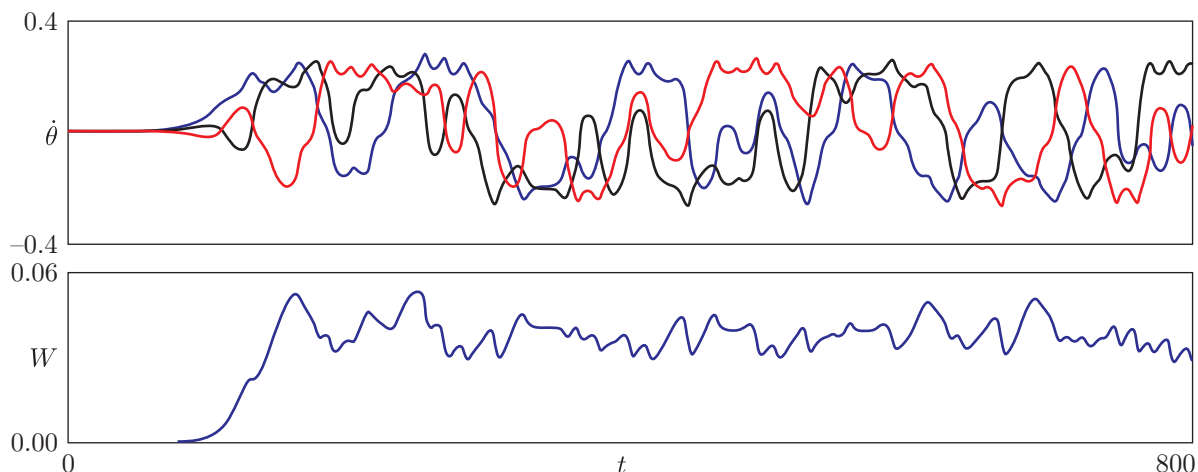


Рис. 7. Зависимости обобщенных скоростей  $\dot{\theta}_1$ ,  $\dot{\theta}_2$ ,  $\dot{\theta}_3$  и энергии  $W$  от времени в переходном процессе установления хаотических автоколебаний в системе трех авторотаторов с механической связью (2.2) при  $\mu = 0.02$ ,  $\nu = 3$ .

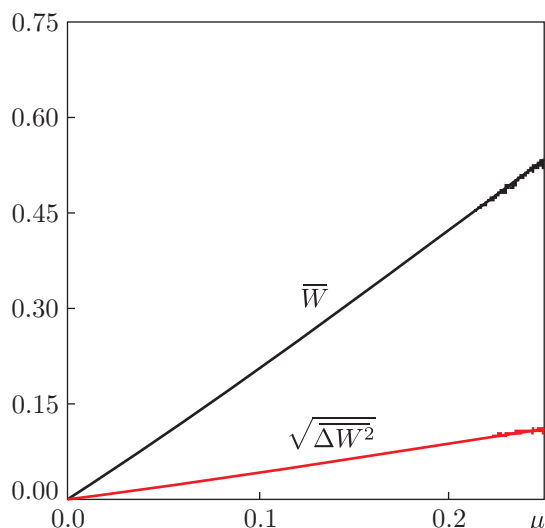


Рис. 8. Зависимости от параметра  $\mu$  средней кинетической энергии автоколебаний и среднеквадратичного отклонения энергии, полученные в численных расчетах для системы трех авторотаторов с механической связью (2.2) при  $\nu = 3$ .

На рисунке 8 показано, как зависят кинетическая энергия и среднеквадратичное отклонение от параметра надкритичности  $\mu$ .

В отношении количества существенных показателей Ляпунова для рассматриваемой системы справедливы те же соображения, что и для предыдущей модели. На рисунке 9 показан график зависимости от параметра четырех показателей Ляпунова, рассчитанных по алгоритму Бенеттина (два нефизических показателя, нарушающих условие механической связи, исключены).

На рисунке 10 приводится спектр мощности сигнала, определенного как  $u(t) = \cos \theta_1(t)$ , по результатам обработки временного ряда, полученного при численном моделировании динамики на аттракторе, демонстрирующий очевидное сходство с рисунком 5. Как и в предыдущем случае, спектр сплошной и довольно равномерный.

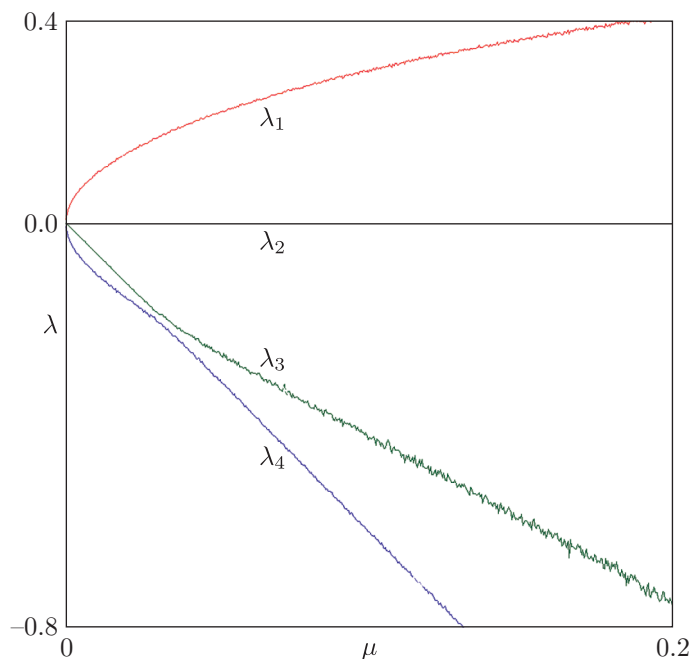


Рис. 9. Показатели Ляпунова диссипативной системы трех авторотаторов с механической связью с механической связью (2.2) в зависимости от параметра  $\mu$  при  $\nu = 3$ .

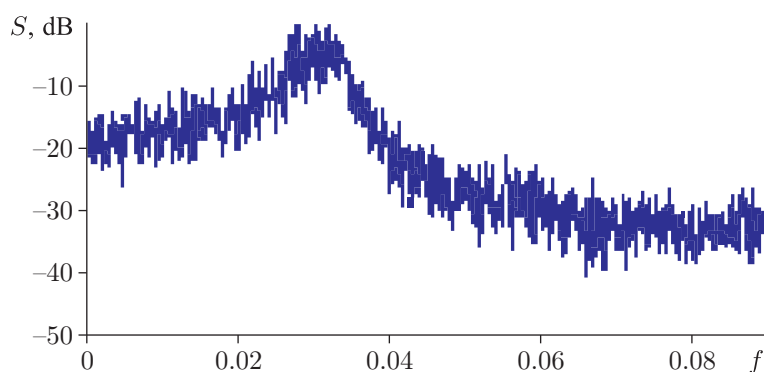


Рис. 10. Спектр мощности сигнала  $u(t) = \cos \theta_1(t)$ , порождаемого системой (2.2) при  $\nu = 3$ ,  $\mu = 0.02$ .

На рисунке 11 показаны полученные численно гистограммы распределения углов между устойчивыми и неустойчивыми подпространствами в системе (2.2) для  $\nu = 3$  при  $\mu = 0.02$  и  $0.13$ . Распределения не включают нулевых углов  $\theta$ , то есть гиперболичность аттрактора подтверждается.

### 3. Система трех ротаторов с потенциалом взаимодействия

От систем с механической связью перейдем к системам, где взаимодействие трех составляющих систему элементов — ротаторов задается введением потенциала, зависящего от угловых переменных. Конкретный вид этой функции примем таким, чтобы минимум потенциала реализовался на поверхности, задававшейся в предыдущих примерах уравне-

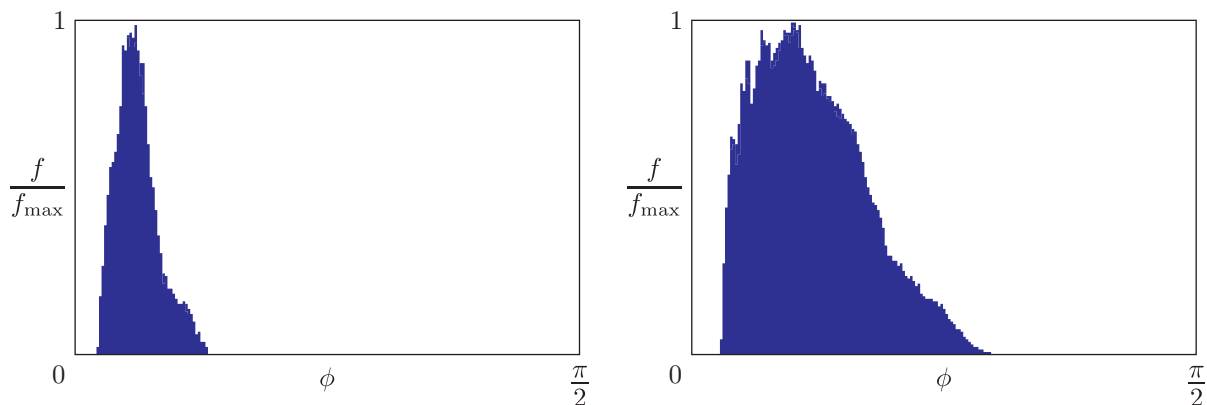


Рис. 11. Проверка критерия углов в системе (2.2) при  $\mu = 0.02$  и  $\mu = 0.13$  при  $\nu = 3$ .

нием связи:  $U(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \frac{1}{2} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3)^2$ . Вместо уравнений (1.3) теперь следует записать

$$\ddot{\theta}_i = -\partial U / \partial \theta_i + M_i = (\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3) \sin \theta_i + M_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.1)$$

где, как и раньше,  $M_{1,2,3}$  — моменты внешних сил, действующих на ротаторы.

Будем рассматривать два варианта.

В первом случае примем, что приложены моменты, обеспечивающие тенденцию к выходу системы на уровень постоянной кинетической энергии (1.10), так что приходим к системе уравнений, которая была предложена и частично исследована ранее в работе [29]:

$$\ddot{\theta}_i = \nu \left[ \mu - \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2) \right] \dot{\theta}_i - (\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3) \sin \theta_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.2)$$

Во втором случае зададим моменты соотношениями (2.1), так что система составлена из трех авторотаторов, между которыми организовано потенциальное взаимодействие, и уравнения таковы:

$$\ddot{\theta}_i = \nu \left[ \mu - \frac{1}{2} \dot{\theta}_i^2 \right] \dot{\theta}_i - (\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3) \sin \theta_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.3)$$

На рисунке 10 показаны зависимости обобщенных скоростей ротаторов и кинетической энергии  $W = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2)$ , от времени в переходном процессе установления хаотических автоколебаний в системах (3.2) и (3.3). В обоих случаях в результате переходного процесса возникает хаотический автоколебательный режим, где кинетическая энергия нерегулярным образом колеблется около некоторого среднего значения. Эти колебания невелики по амплитуде и характеризуются относительно коротким временным масштабом в первой модели. Во второй модели осцилляции энергии гораздо больше и имеют медленную составляющую (зависимость похожа на ту, которая для модели с механической связью была представлена на рисунке 7). Рисунок 12 иллюстрирует зависимость кинетической энергии и квадратичного отклонения от параметра надкритичности  $\mu$ .

Рисунок 13 демонстрирует вид траекторий в конфигурационном пространстве систем (3.2) и (3.3). При малых величинах параметра  $\mu$ , что соответствует малой средней энергии в установившемся режиме, траектории располагаются вблизи двумерной поверхности, определенной уравнением  $\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 = 0$ , то есть соответствующей



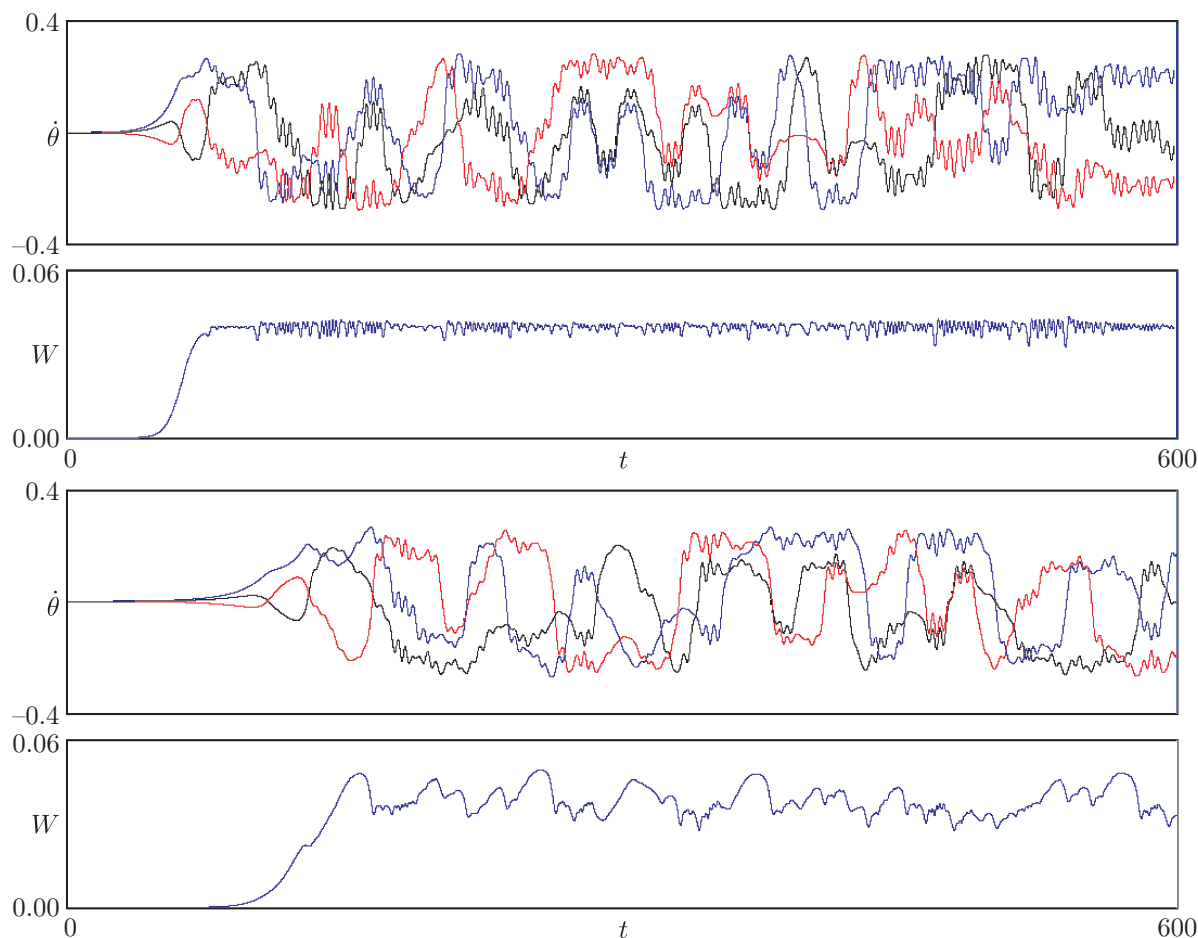


Рис. 12. Зависимости обобщенных скоростей  $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$  и кинетической энергии  $W = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2)$  от времени в переходном процессе установления хаотических автоколебаний в системе (3.2) при  $\mu = 0.04, \nu = 3$  (а) и в системе (3.3) при  $\mu = 0.02, \nu = 3$  (б).

предполагавшимся в предыдущих двух разделах условием механической связи (диаграммы (а) и (с)). Это дает основание полагать, что в этой области гиперболическая природа динамики еще сохраняется. Однако, уже здесь можно наблюдать, что траектория «распушена» в поперечном к поверхности направлении, что отражает наличие флуктуаций потенциальной энергии в процессе движения. Этот эффект, незначительный при малых  $\mu$ , становится все более выраженным с ростом параметра надкритичности, что можно видеть на диаграммах (б) и (д). Можно ожидать, и это подтверждается численными расчетами, что природа режима в силу указанного эффекта может измениться, в частности, динамика с какого-то момента перестает быть гиперболической.

На рисунке 14 показаны зависимости от параметра  $\mu$  средней кинетической энергии автоколебаний и среднеквадратичного отклонения энергии, для системы трех ротаторов с потенциальным взаимодействием (3.2) и (3.3). Как можно видеть, во втором случае флуктуации энергии заметно больше. Это неудивительно, поскольку (3.2) и (3.3) отвечают модификации моделей (1.13) и (2.2) с введением потенциального взаимодействия вместо механической связи, а в модели (1.13) флуктуации энергии в установившемся режиме вообще отсутствуют. На диаграмме (б) приблизительно при  $\mu \approx 0.18$  можно видеть смену харак-

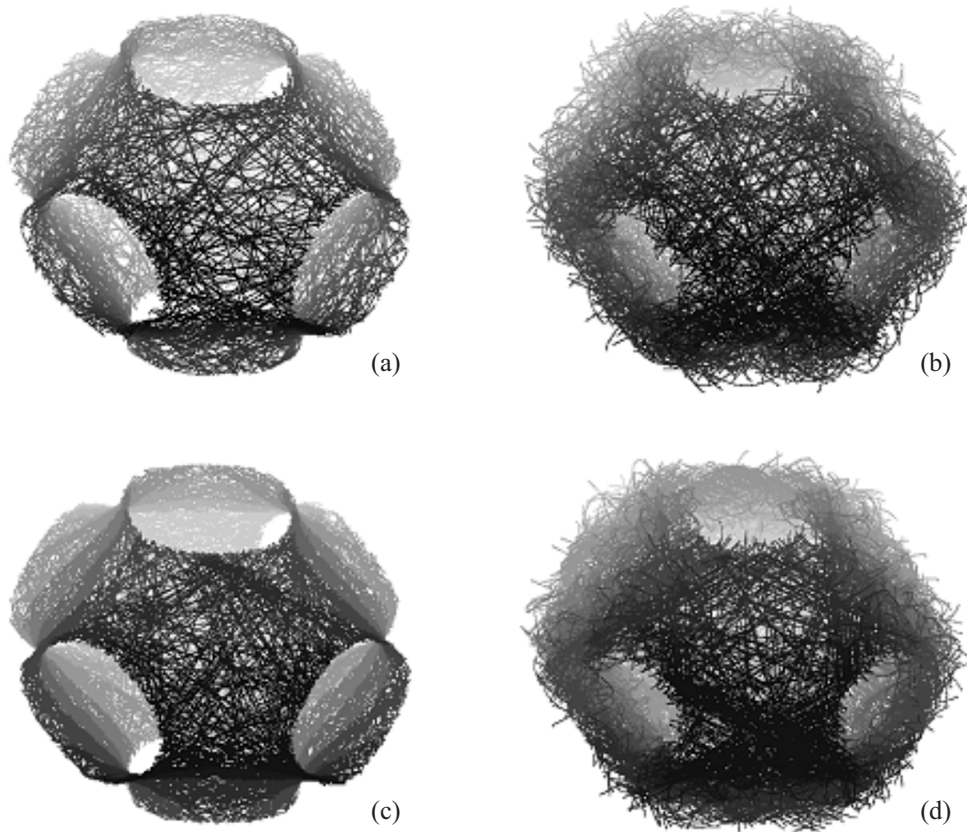


Рис. 13. Траектория на аттракторе системы (3.2) при  $\mu = 0.04$  (a) и  $\mu = 0.25$  (b) и системы (3.3) при  $\mu = 0.02$  (c) и  $\mu = 0.25$  (d)  $\nu = 5$  в трехмерном конфигурационном пространстве; параметр  $\nu = 3$ .

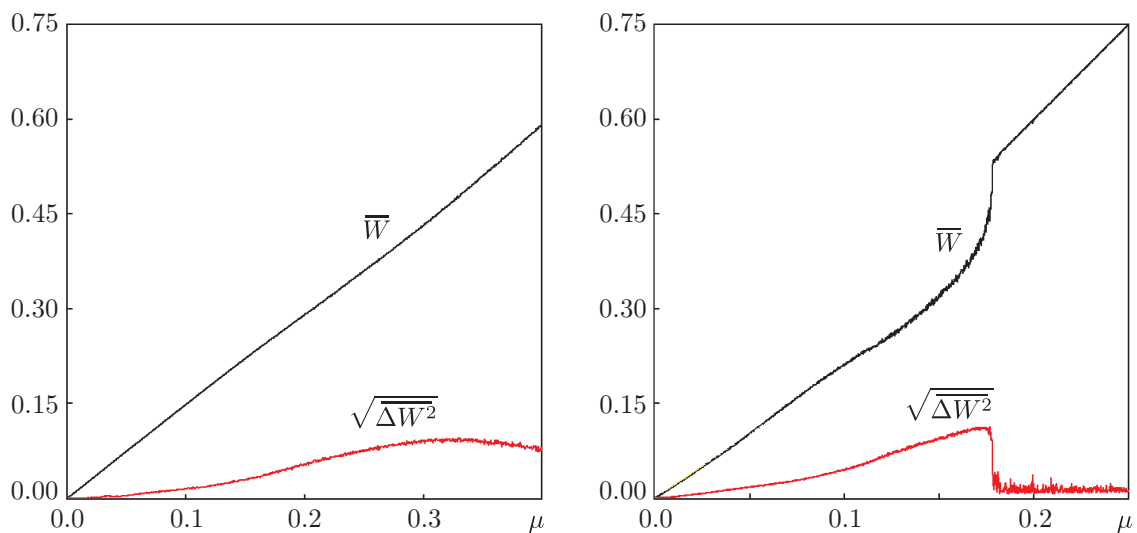


Рис. 14. Зависимости от параметра  $\mu$  средней кинетической энергии автоколебаний и среднеквадратичного отклонения энергии, полученные для системы трех ротаторов с потенциальным взаимодействием при численном решении уравнений (3.2) (a) и (3.3) (b) для  $\nu = 3$ .

тера режима — вместо хаоса в области  $\mu > \mu_c$  реализуется регулярный режим, которому соответствует замкнутая траектория — предельный цикл в фазовом пространстве.

На рисунках 15 и 16 показаны графики зависимости показателей Ляпунова от параметра для моделей (3.2) и (3.3), рассчитанные с помощью алгоритма Бенеттина. Для этих систем при анализе следует принимать во внимание все шесть показателей, и нет оснований исключать какие-либо из них из рассмотрения. Присутствие одного нулевого показателя обусловлено автономной природой систем, и он ассоциируется с возмущениями типа сдвига вдоль опорной траектории.

Для системы (3.2) во всем представленном на рисунке интервале параметра старший показатель Ляпунова положительный, что говорит о хаотической природе наблюдаемого режима динамики. Его зависимость от параметра плавная, без провалов, сопровождающих появление «окон регулярности» во многих системах с негиперболическими аттракторами. Второй в порядке убывания показатель в области малых  $\mu$  остается близким к нулю, но затем становится положительным, так что при  $\mu > 0.17$  имеем два положительных показателя, что по прижившейся после работы Рёсслера терминологии обозначается как гиперхаос [38]. Три показателя остаются всюду отрицательными, хотя один из них в области малых  $\mu$  близок к нулю. Очевидно, в области, где близки к нулю три показателя, можно говорить о возможности приближенного описания динамики с заменой потенциального взаимодействия на механическую связь с переходом к редуцированной модели, обсуждавшейся в разделе 1. Об этом же говорит очевидная из рисунка 15 возможность аппроксимации показателей  $\lambda_1$  и  $\lambda_5$  величиной  $\pm \text{const} \cdot \sqrt{W}$ , как в редуцированной модели.

Для системы (3.3) в области малых значений параметра  $\mu$  имеем один положительный, один нулевой, и остальные отрицательные показатели Ляпунова. Зависимость показателей от параметра в этой области плавная, без изрезанности, что позволяет предполагать, что гиперболическая природа хаоса сохраняется, как и в редуцированной модели, рассмотренной в разделе 2. Старший показатель Ляпунова остается положительным, а динамика продолжает быть хаотической до значения  $\mu \approx 0.18$ . При приближении к этой точке возникает и прогрессирует изрезанность зависимости старшего показателя от параметра, что, по-видимому, указывает на разрушение гиперболичности, хотя полноценных провалов до нуля и окон регулярности различить не удастся. Затем происходит срыв хаоса и переход к регулярному режиму, где старший показатель нулевой, а остальные отрицательные, что соответствует предельному циклу.

На рисунке 17 приводятся спектры мощности сигнала  $u(t) = \cos \theta_1(t)$ , порождаемого системами (3.2) и (3.3) при относительно небольших значениях параметра надкритичности, предположительно соответствующих гиперболическому хаосу. Их можно сравнить со спектром модели (1.13), заведомо генерирующей гиперболический хаос (в силу сводимости динамики к движению по геодезическим линиям метрики с отрицательной кривизной), который был показан на рисунке 5. Спектры сплошные, что соответствует хаотической природе динамики, и характеризуются достаточно высокой степенью равномерности.

На рисунке 18 представлены результаты проверки гиперболичности аттракторов в моделях (3.2) и (3.3) в виде полученных численно гистограммы распределения углов между устойчивыми и неустойчивыми подпространствами векторов возмущения типичной хаотической фазовой траектории. При малых значениях параметра  $\mu$  полученные распределения, как можно видеть, располагаются в удалении от нулевых значений углов  $\phi$ , то есть тест подтверждает гиперболичность аттрактора. Это свойство, однако, нарушается с какого-то момента при увеличении параметра  $\mu$ . В самом деле, гистограммы (b) и (d) демонстрируют присутствие углов вблизи нуля, что говорит о наличии касаний устойчивых и неустойчи-

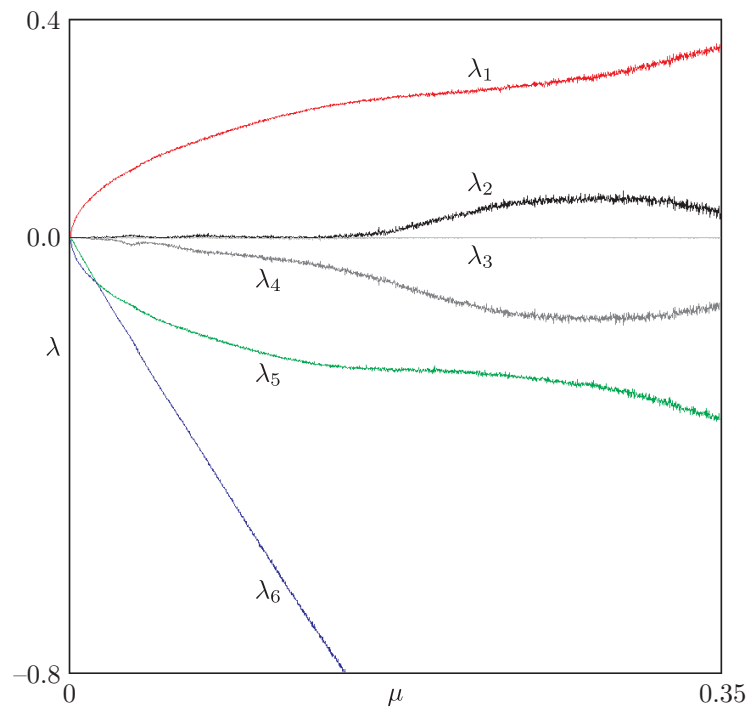


Рис. 15. Показатели Ляпунова системы трех ротаторов с потенциальным взаимодействием (3.2) в зависимости от параметра  $\mu$  при  $\nu = 3$ .

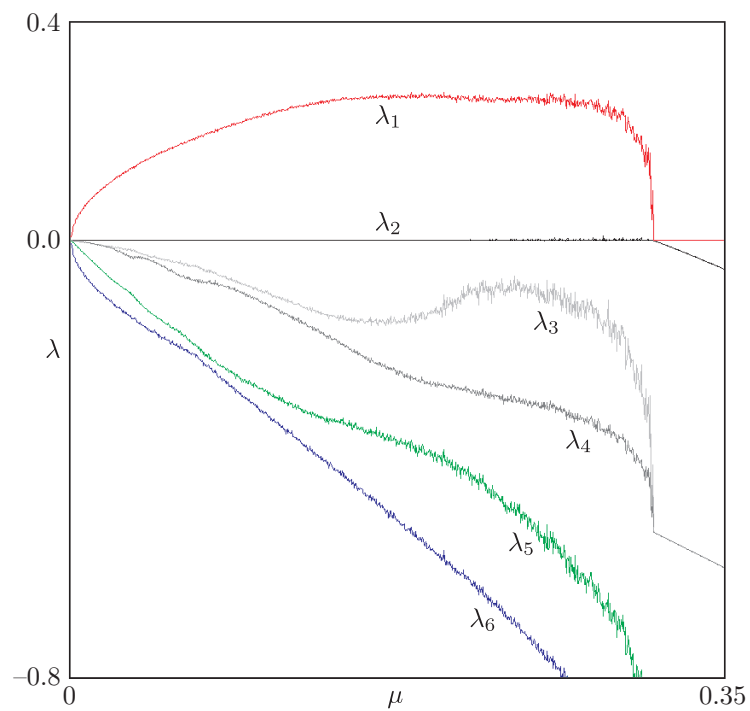


Рис. 16. Показатели Ляпунова системы трех авторотаторов с потенциальным взаимодействием (3.3) в зависимости от параметра  $\mu$  при  $\nu = 3$ .

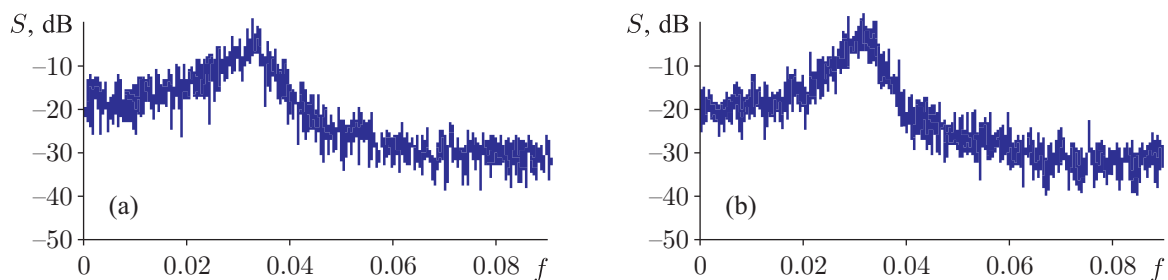


Рис. 17. Спектры мощности сигнала  $u(t) = \cos \theta_1(t)$  для  $\nu = 3$  в системе (3.2) при  $\mu = 0.04$  (а) и в системе (3.3) при  $\mu = 0.02$  (б).

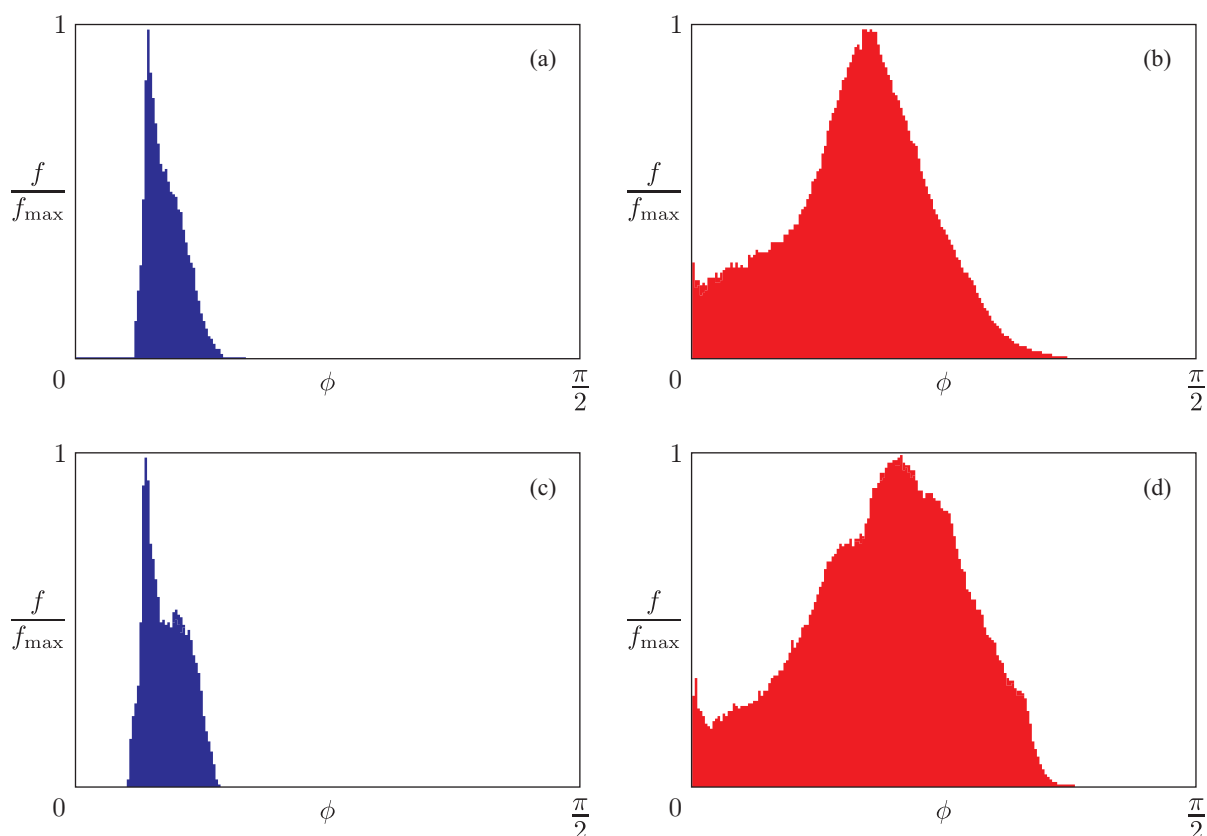


Рис. 18. Проверка критерия углов для трех ротаторов с потенциальным взаимодействием при  $\nu = 3$  в модели (3.2) при  $\mu = 0.04$  (а) и  $\mu = 0.25$  (б) и в модели (3.3) при  $\mu = 0.02$  (с) и  $\mu = 0.13$  (д). На диаграммах слева гистограммы углов между неустойчивым направлением и устойчивым подпространством векторов возмущения отвечает статистическому распределению, отделенному от нуля, что свидетельствует о гиперболичности аттрактора. На диаграммах справа присутствуют углы близкие к нулю, то есть имеют место касания устойчивых и неустойчивых многообразий, что говорит о нарушении гиперболичности.

вых многообразий и негиперболической природе аттрактора. Поскольку в редуцированных моделях этого не наблюдалось, естественно полагать, что отсутствие гиперболичности обусловлено возможностью удаления принадлежащих аттрактору фазовых траекторий от поверхности равного потенциала.

## Заключение

Гиперболический хаос, который в диссипативных системах ассоциируется гиперболическими аттракторами, а в консервативных — с динамикой Аносова, характеризуется грубостью, или структурной устойчивостью, выступающей как его математически строго обоснованный атрибут. Поэтому устройства, порождающие такого рода хаос, предпочтительны для любых практических приложений хаоса в силу робастности, малой чувствительности к вариации параметров, различного рода несовершенствам, помехам и т. д.

Возможный продуктивный подход к построению систем с гиперболическим хаосом состоит в том, чтобы взять за основу систему, хотя бы и абстрактную, где такой хаос имеет место, и модифицировать ее, видоизменяя функции и параметры в определяющих уравнениях. При малых вариациях сохранение гиперболической природы динамики обеспечено в силу структурной устойчивости, однако, по мере удаления от исходной системы, возникает возможность нарушения гиперболичности, и ее сохранение должно отслеживаться с применением количественных критериев, одним из которых является анализ статистики распределения углов между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями траекторий.

В настоящей работе рассмотрено несколько вариантов систем с хаотической динамикой на основе тройного шарнирного механизма Тёрстона – Уикса – МакКэя – Ханта, построенного из трех способных совершать вращение элементов — дисков, на движение которых наложена механическая связь с использованием шарниров и стержней. Сформулированы уравнения моделей, где диссипация и активность определяются дополнительными членами в уравнениях. В одном варианте структура этих членов такова, что обеспечивает тенденцию к выходу системы на уровень постоянной кинетической энергии. В другом варианте проведенная модификация, представляющаяся более практичной, делает каждый из трех совершающих вращения элементов авторотатором, который в установившемся режиме, будучи изолированным, совершает вращения в одну или другую сторону с постоянной угловой скоростью. Представлены и обсуждаются характеристики аттракторов (показатели Ляпунова, спектры мощности) в исследуемых системах, демонстрирующих робастный хаос, не разрушающийся при вариации параметров. Проведены расчеты по проверке критерия углов, и получены результаты, подтверждающие, что хаотическая динамика рассмотренных моделей гиперболическая, по крайней мере, при условии относительно небольшой надкритичности автоколебательного режима. В системах на базе ротаторов с потенциальным взаимодействием, начиная с некоторого уровня надкритичности, гиперболичность нарушается.

Возможные подходы к более строгому обоснованию гиперболичности могут базироваться на компьютерной проверке так называемого критерия конусов [4, 13, 39, 40] и анализе инвариантной меры на аттракторе, которая должно соответствовать концепции меры Синяя – Рюэля – Боуэна [3, 4, 13].

## Список литературы

- [1] Смейл, С., Дифференцируемые динамические системы, УМН, 1970, т. 25, №1(151), с. 113–185.
- [2] Shilnikov, L., Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics: A Tutorial, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 1997, vol. 7, no. 9, pp. 1953–2001.
- [3] Аносов, Д.В., Арансон, С.Х., Гринес, В.З., Плыкин, Р.В., Сатаев, Е.А., Сафонов, А.В., Солодов, В.В., Старков, А.Н., Степин А.М., Шлячков, С.В., Динамические системы с гиперболическим поведением. Динамические системы – 9, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, т. 66, М.: ВИНТИ, 1991.



- [4] Каток, А.Б., Хасселблат, Б., Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999.
- [5] Afraimovich, V. and Hsu, S.-B., Lectures on Chaotic Dynamical Systems, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 28, placeCityProvidence, StateRI: Amer. Math. Soc., placeCitySomerville, StateMA: International Press, 2003.
- [6] Pesin, Ya.B., Lectures on partial hyperbolicity and stable ergodicity. placeCityZurich lectures in advanced mathematics, European Mathematical Society, 2004.
- [7] Bonatti, C., Diaz, L.J., Viana, M., Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity. A Global Geometric and Probobalistic Perspective. Encyclopedia of Mathematical Sciences, vol.102, StateBerlin, placeCityHeidelberg, New-York: Springer, 2005.
- [8] Kuznetsov, S.P., Example of a Physical System with a Hyperbolic Attractor of the Smale–Williams Type, Phys. Rev. Lett., 2005, vol. 95, 144101.
- [9] Кузнецов, С.П., Селезнев, Е.П., Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла – Вильямса, ЖЭТФ, 2006, т. 129, №2, с. 400-412.
- [10] Isaeva, O.B., Jalnine, A.Y., Kuznetsov, S.P., Arnold’s cat map dynamics in a system of coupled nonautonomous van der Pol oscillators, Physical Review E, 2006, vol. 74, no 4, p. 046207.
- [11] Kuznetsov, S.P. and Pikovsky, A. Autonomous Coupled Oscillators with Hyperbolic Strange Attractors, Physica D, 2007, vol. 232, pp. 87–102.
- [12] Kuznetsov, S.P., Example of Blue Sky Catastrophe Accompanied by a Birth of Smale–Williams Attractor, Regular and Chaotic Dynamics, 2010, vol. 15, nos. 2–3, pp. 348–353.
- [13] Кузнецов, С.П., Динамический хаос и гиперболические аттракторы: от математики к физике. Москва – Ижевск: ИКИ, 2013.
- [14] С.П. Кузнецов, С.П., Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике, УФН, 2011, т. 181, №2, с. 121-149.
- [15] Kuznetsov, S.P., Plykin type attractor in electronic device simulated in MULTISIM, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2011, vol. 21, no 4, p. 043105.
- [16] Isaeva, O.B., Kuznetsov, S.P., and Mosekilde, E., Hyperbolic chaotic attractor in amplitude dynamics of coupled self-oscillators with periodic parameter modulation, Physical Review E., 2011, vol. 84, no. 1, p. 016228.
- [17] Исаева О.Б., Кузнецов А.С., Кузнецов С.П., Гиперболический хаос при параметрических колебаниях струны, Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 1, с. 3-10
- [18] Круглов, В.П., Кузнецов, А.С., Кузнецов, С.П., Гиперболический хаос в системах с параметрическим возбуждением паттернов стоячих волн, Нелинейная динамика, 2014, т. 10, №3, с. 265-277.
- [19] Jalnine, A.Y., Hyperbolic and non-hyperbolic chaos in a pair of coupled alternately excited FitzHugh–Nagumo systems, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2015, vol. 23, no. 1, pp. 202-208.
- [20] Kuznetsov, S.P., Some mechanical systems manifesting robust chaos, Nonlinear Dynamics and Mobile Robotics, 2013, vol. 1, no. 1, pp. 3-22.
- [21] Борисов, А.В., Казаков, А.О., Кузнецов, С.П., Нелинейная динамика кельтского камня: неголономная модель, УФН, 2014, т. 184, №5, с. 493-500.
- [22] Кузнецов, С.П., Движение падающей пластины в жидкости: конечномерные модели и феномены сложной нелинейной динамики, Нелинейная динамика, 2015, т.11, №1, 3-49.
- [23] Borisov, A.V., Mamaev, I.S., On the motion of a heavy rigid body in an ideal fluid with circulation, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2006, vol. 16, no. 1, p. 013118.
- [24] Кузнецов, С.П., Жалнин, А.Ю., Сатаев, И.Р., Седова, Ю.В., Феномены нелинейной динамики диссипативных систем в неголономной механике «кельтского камня», Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 4, с. 735-762.

- [25] Тёрстон, У.П., Уикс, Д.Р., Математики трехмерных многообразий, В мире науки, 1984, №9, с. 74-88.
- [26] Hunt, T.J. and MacKay, R.S., Anosov Parameter Values for the Triple Linkage and a Physical System with a Uniformly Chaotic Attractor, *Nonlinearity*, 2003, vol. 16, pp. 1499–1510.
- [27] Аносов, Д. В., Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, Труды МИАН СССР, 1967 т. **90**, с. 3–210.
- [28] Balazs, N.L. and Voros, A., Chaos on the pseudosphere, *Physics Reports*, 1986, vol. 143, no. 3, pp. 109-240.
- [29] Кузнецов, С.П., Хаос в системе трех связанных ротаторов: от динамики Аносова к гиперболическому аттрактору. Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика, 2015, т. 15, вып. 2, с. 5-17.
- [30] Lai, Y.-C., Grebogi, C., Yorke, J. A., StateKan, placeI., How often are chaotic saddles nonhyperbolic? *Nonlinearity*, 1993, vol. 6, pp. 779-798.
- [31] Anishchenko, V.S., Kopeikin, A.S., Kurths, J., Vadivasova, T.E., Strelkova G.I., Studying hyperbolicity in chaotic systems, *Physics Letters A*, 2000, vol. 270, pp. 301-307.
- [32] Ginelli, F., Poggi, P., Turchi, A., Chatй, H., Livi, R., Politi, A., Characterizing Dynamics with Covariant Lyapunov Vectors, *Phys. Rev. Lett.*, 2007, vol. 99, p. 130601.
- [33] Kuptsov, P.V., Fast numerical test of hyperbolic chaos, *Physical Review E*, 2012, vol. 85, no 1, p. 015203.
- [34] Gantmakher, F.R., Lectures in analytical mechanics, placeCityMoscow: Mir Publishers, 1970.6 Гантмакер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. – 1966.
- [35] Goldstein, H., placePoole, C.P., Safko, J.L., Classical Mechanics (3rd ed.). Addison-Wesley, 2001.
- [36] Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A., and Strelcyn, J.-M., Lyapunov Characteristic Exponents for Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian Systems: A Method for Computing All of Them, *Meccanica*, 1980, vol. 15, pp. 9–30.
- [37] Jenkins, G.M. and placeWatts, D.G.: Spectral analysis and its application. San Francisco: Holden-Day, Inc., 1968.
- [38] Rossler, O. E., An equation for hyperchaos, *Physics Letters A*, 1979, vol. 71, no. 2, pp. 155-157.
- [39] Синай, Я. Г.: Стохастичность динамических систем. В кн. Нелинейные волны, ред. Гапонов-Грехов, А.В., М.: Наука, 1979, с. 192-212.
- [40] Кузнецов, С.П., Сатаев, И.Р., Проверка условий гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля, Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, 2006, т.14, №5, с. 3-29.

### Hyperbolic Chaos in Self-oscillating Systems Based on Mechanical Triple Linkage: Testing Absence of Tangencies of Stable and Unstable Manifolds for Phase Trajectories

Sergey P. Kuznetsov

Udmurt State University

Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

Kotel'nikov's Institute of Radio Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch

410019 Saratov, Zelenaya 38, Russian Federation

spkuz@yandex.ru

Dynamical equations are formulated and a numerical study is provided for selfoscillatory model systems based on the triple linkage hinge mechanism of Thurston – Weeks – Hunt – MacKay. We consider systems with a holonomic mechanical constraint of three rotators as well as systems, where three rotators interact by potential forces. We present and discuss some quantitative



characteristics of the chaotic regimes (Lyapunov exponents, power spectrum). Chaotic dynamics of the models we consider are associated with hyperbolic attractors, at least, at relatively small supercriticality of the self-oscillating modes; that follows from numerical analysis of the distribution for angles of intersection of stable and unstable manifolds of phase trajectories on the attractors. In systems based on rotators with interacting potential the hyperbolicity is violated starting from a certain level of excitation.

MSC 2010: 37D45, 37D20, 34D08, 32Q05, 70F20

Keywords: dynamical system, chaos, hyperbolic attractor, Anosov dynamics, rotator, Lyapunov exponent, self-oscillator

Received September 28, 2015, accepted October 30, 2015

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 1, pp. 99–121 (Russian)