



---

**ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ**

УДК: 517.9

MSC 2010: 37D05, 37D20, 37D45, 37M25, 65P20, 82C32, 92B25

**От квазигармонических осцилляций  
к нейронным спайкам и бёрстам:  
разнообразие режимов гиперболического хаоса  
на основе аттрактора Смейла – Вильямса**

**А. Ю. Жалнин**

В работе рассматривается семейство связанных автоколебательных систем в виде парных генераторов ван дер Поля – Дюффинга и моделей нейронов Фицхью – Нагумо с переменным возбуждением, вызванным периодической модуляцией параметров, и с последовательной передачей фазы колебаний между подсистемами. Показано, что, выбирая способы модуляции параметров и типы связи подсистем, можно наблюдать целый спектр динамических режимов грубого хаоса, имеющих вид от квазигармонического, с хаотически «плывущей» фазой, до явно выраженных нейроподобных режимов, представляющих собой последовательность всплесков («бёрстов»), в которых динамика осцилляций («спайков») описывается хаотическим отображением. При этом 4-мерное отображение Пуанкаре, возникающее в стробоскопическом сечении соответствующей системы ОДУ, будет универсальным образом обладать гиперболическим странным аттрактором типа Смейла – Вильямса. Выводы подтверждаются анализом фазовых портретов и временных реализаций, численными расчетами спектров показателей Ляпунова и гистограмм распределений углов между устойчивым и неустойчивым касательными подпространствами хаотических траекторий.

Ключевые слова: хаос, гиперболичность, аттрактор Смейла – Вильямса, нейроны, модель Фицхью – Нагумо

---

Получено 24 декабря 2015 года  
После доработки 16 февраля 2016 года

---

Жалнин Алексей Юрьевич  
[Jalnine@rambler.ru](mailto:Jalnine@rambler.ru)  
Саратовский филиал ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН  
410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38



## 1. Введение

Образом «идеального» хаотического движения в фазовом пространстве диссипативной динамической системы является *однородно гиперболический странный аттрактор* [1–7]. Один из первых примеров аттрактора подобного рода был предложен и исследован непосредственно в работах Смейла и Вильямса [1, 2] более 40 лет назад и получил в литературе название *соленоида Смейла–Вильямса*. Такие аттракторы, состоящие из седловых траекторий с хорошо определенными устойчивыми и неустойчивыми направлениями, обладают замечательным свойством структурной устойчивости, то есть отсутствия бифуркаций и сохранением фрактальной структуры кантороподобного множества, гладкой зависимостью ляпуновских показателей и других динамических и метрических характеристик при относительно небольшой вариации параметров и функций, фигурирующих в уравнениях. Этим они выгодно отличаются от «обычных» хаотических притягивающих множеств, наблюдаемых в реальных системах и их моделях и являющихся негрубыми объектами [8], получившими название *квазиаттракторы* [4, 9]. На протяжении многих лет гиперболический странный аттрактор оставался математической абстракцией, призванной объяснить (хотя и с большими оговорками) реально наблюдаемые феномены хаотической динамики.

Однако в последнее десятилетие произошел настоящий прорыв в деле реализации гиперболического хаоса в простых математических моделях и реальных физических системах, и начался он с выхода работы С. П. Кузнецова [10], в которой был предложен простой и физически реализуемый пример системы с однородно гиперболическим странным аттрактором Смейла–Вильямса в системе двух связанных осцилляторов ван дер Поля с попеременным возбуждением и последовательной передачей фазы осцилляций от одной подсистемы к другой. Начиная с этого момента опубликован целый ряд работ, в которых гиперболический хаос этого типа был обнаружен в различных модельных системах ОДУ [11–19], в распределенных системах и в системах уравнений с задержкой (то есть, фактически, бесконечномерных) [20–24], а также в физическом эксперименте [25–27], были исследованы бифуркационные механизмы возникновения хаоса такого типа и его свойства [28–34]. Были также реализованы и другие типы гиперболического хаоса (например, аттрактор Плыкина [35–37]).

Настоящая работа продолжает ряд исследований по конструированию и наблюдению режимов гиперболического хаоса, в данном случае — применительно к нейродинамике. Отталкиваясь от базовой модели [10], мы последовательно модифицируем уравнения связанных генераторов ван дер Поля так, чтобы получить модель двух связанных нейронов в виде пары систем Фицхью–Нагумо [38, 39], параметры которых периодическим образом модулируются, чтобы обеспечить их попеременное возбуждение, а связь позволяет передавать фазу колебаний от одного нейрона к другому [40]. Варьируя способы модуляции параметров и типы связи подсистем, можно добиться того, чтобы квазигармонические колебания с медленно периодически модулирующейся амплитудой и «плывущей» хаотической фазой превратились в реалистичный режим нейроподобной динамики, в котором ламинарные стадии подавления колебаний чередуются со всплесками активности («бёрстами»), в которых динамика фазы осцилляций («спайков») является хаотической и описывается одномерным отображением, топологически эквивалентным хаотическому отображению Бернулли. При этом 4-мерное отображение Пуанкаре, получающееся путем стробоскопического сечения потоковой системы, имеет в пространстве состояний однородно гиперболический странный аттрактор типа соленоида Смейла–Вильямса, вложенного в 4-мерное пространство (вместо 3-мерного, как в оригинальной модели [1, 2]). На каждой стадии моделирования эти результаты подтверждаются качественным и численным анализом отображений последо-

вания для фаз колебаний и временных реализаций, расчетами спектров показателей Ляпунова и их зависимостей от параметров, а также непосредственно гистограмм распределений углов между устойчивым и неустойчивым касательными подпространствами хаотических траекторий.

## 2. Аттрактор Смейла – Вильямса в связанных уравнениях ван дер Поля – Дюффинга

При построении исходной модельной системы будем пользоваться принципами, аналогичными тем, что предложены в работах [10, 12]. Рассмотрим пару связанных осцилляторов ван дер Поля с дополнительной кубической нелинейностью следующего вида:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (A \cos \Omega t - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 &= \varepsilon y, \\ \ddot{y} - (-A \cos \Omega t - y^2)\dot{y} + \omega_0^2 y + \beta y^3 &= \varepsilon x^2.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Здесь  $x$  и  $y$  — динамические переменные первого и второго осцилляторов,  $\omega_0$  — базовая частота генерации при небольших амплитудах колебаний,  $\beta$  — параметр нелинейности, управляющий изменением частоты генерации в зависимости от амплитуды по принципу мягкой (если  $\beta < 0$ ) или жесткой ( $\beta > 0$ ) пружины. Параметр возбуждения, отвечающий за бифуркацию рождения предельного цикла в автономном осцилляторе, медленно меняется во времени с амплитудой  $A$  и частотой  $\Omega$ . Вариация параметров двух осцилляторов происходит в противофазе, в результате чего они возбуждаются попеременно, каждый на своей половине периода  $T = 2\pi/\Omega$ . Для определенности будем полагать (хотя это и не принципиально), что период внешнего воздействия содержит целое число собственных периодов подсистем, то есть  $T = 2\pi N/\omega_0$ . Связь между подсистемами характеризуется параметром  $\varepsilon$ .

Потоковой системе (2.1) можно сопоставить точечное отображение в дискретном времени, выполнив стробоскопическое сечение и определив вектор состояния как  $\mathbf{Z}_n = (x(t_n), y(t_n), u(t_n), v(t_n))$  в моменты времени  $t_n = t_0 + nT$ , где  $n$  — целое число. Эволюция вектора состояния за один период воздействия описывается посредством 4-мерной вектор-функции  $\mathbf{F}(\mathbf{Z})$ , действующей в пространстве векторов  $\mathbf{Z}$ :

$$\mathbf{Z}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{Z}_n).\tag{2.2}$$

Таким образом, непосредственной целью настоящей главы является демонстрация существования аттрактора типа Смейла – Вильямса в фазовом пространстве системы (2.2).

Следуя методологии работы [10], функционирование системы (2.1) можно описать качественно следующим образом. Пусть колебания первого осциллятора на активной стадии (первый полупериод) имеют некоторую фазу  $\varphi$ , то есть  $x \sim \cos(\omega_0 t + \varphi)$ . Через половину периода начинает генерировать второй осциллятор, получая возбуждение от первого. «Затравкой» служит сигнал вида  $x \sim \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)$ , так что возникшие колебания наследуют фазу  $2\varphi$ , хотя передача возбуждения от первого осциллятора ко второму происходит на частоте  $2\omega_0$ , то есть, казалось бы, нерезонансным образом [12]. Такая передача оказывается возможна благодаря выбору параметра нелинейности  $\beta < 0$ , так что, из-за принципа «мягкой пружины», реальная частота колебаний первого осциллятора оказывается меньше  $\omega_0$  и фаза колебаний на удвоенной частоте все же может быть захвачена. Когда активная стадия второго осциллятора подходит к концу, он передает возбуждение первому, который в этот момент как раз начинает генерировать. Затравкой для первого, в свою очередь, служит сигнал вида  $y \sim \cos(\omega_0 t + 2\varphi)$ , то есть через период внешнего воздействия  $T$  на новой

стадии возбуждения первого осциллятора ему передается фаза, равная  $2\varphi$ . Таким образом, динамика фазы первого осциллятора, определяемой через период внешнего воздействия, будет описываться отображением

$$\varphi_{n+1} = 2\varphi_n + \text{const} \pmod{2\pi}. \quad (2.3)$$

Соотношение (2.3) представляет собой отображение Бернулли (с точностью до константы, которая учитывает добавку к фазе при эстафетной передаче возбуждения от одного осциллятора к другому и которую можно устранить заменой переменных).

Исследуем динамику системы (2.1), здесь и далее зафиксировав значение собственной частоты осцилляторов  $\omega_0 = 2\pi$ , а параметр кубической нелинейности  $\beta = -1$ . Период внешнего воздействия выберем равным  $T = 2\pi N/\omega_0$ . На рисунке 1а представлен фрагмент зависимости динамических переменных первого и второго осцилляторов от времени при значениях параметров  $N = 10$ ,  $A = 4.3$ ,  $\varepsilon = 0.5$ . Из рисунка видно, что осцилляторы действительно генерируют колебания попеременно и интервал высоких амплитуд  $x(t)$  (показано черным цветом) соответствует близким к нулю значениям  $y(t)$  (показано серым), и наоборот. Чтобы продемонстрировать эффект хаотического сдвига фазы, были наложены друг на друга по 500 фрагментов траекторий одинаковой длины, как показано на рисунке 1б. Они образуют равномерное заполнение между периодически модулированными по амплитуде огибающими, так как начальная фаза на пороге генерации каждого из осцилляторов хаотически варьируется.

Эмпирически полученный график отображения для фазы колебаний первого осциллятора представлен на рисунке 2а. Фаза определялась в стробоскопическом сечении в моменты

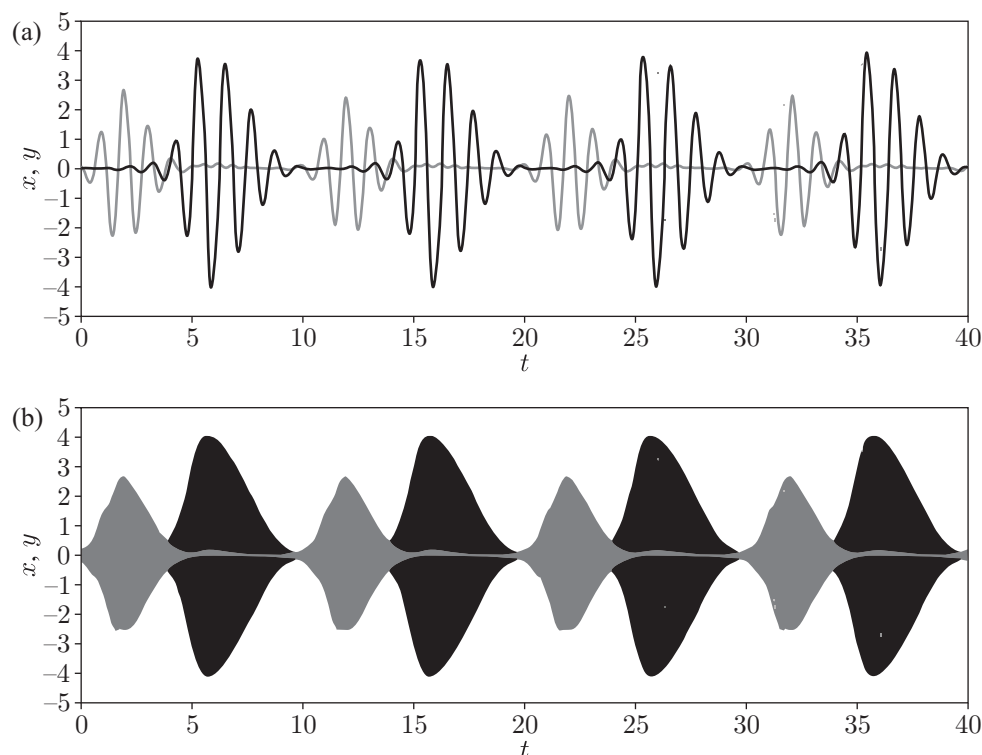


Рис. 1. (а) Временные реализации динамических переменных  $x(t)$  и  $y(t)$  на четырех периодах модуляции, и (б) наложенные друг на друга последовательные 500 сегментов траектории той же длины.

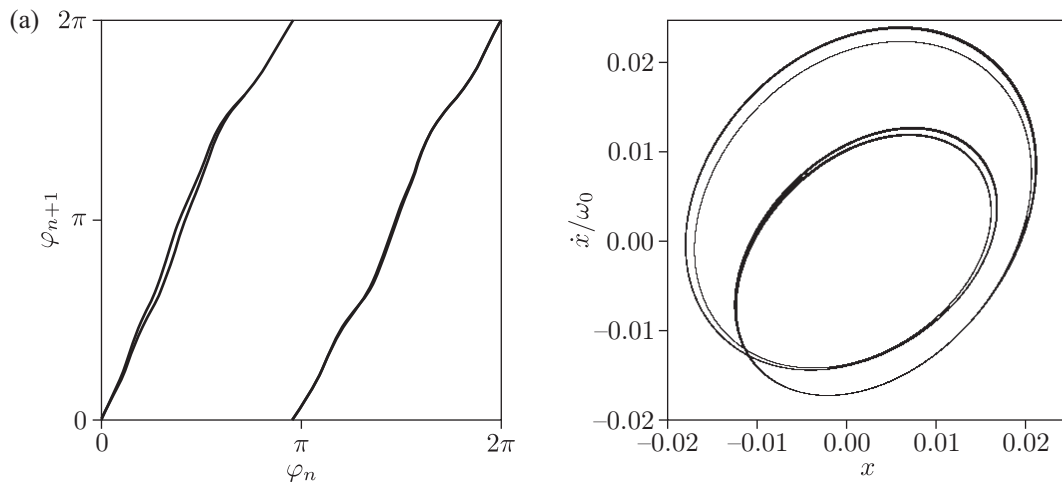


Рис. 2. (а) Отображение последования для фазы колебаний  $\varphi_{n+1}(\varphi_n)$ ; (б) проекция аттрактора на плоскость  $(x, \dot{x}/\omega_0)$ .

времени  $t_n = t_0 + nT$  по формуле  $\varphi = \arg(x - i\dot{x}/\omega_0)$ . Из рисунка видно, что построенное численно отображение для фазы имеет форму

$$\varphi_{n+1} \approx 2\varphi_n + f(\varphi_n) \pmod{2\pi}, \tag{2.4}$$

где  $f(\varphi)$  —  $2\pi$ -периодическая гладкая нелинейная функция, то есть оно топологически эквивалентно отображению Бернулли, хотя и содержит нелинейную часть. Таким образом, 4-мерное отображение (2.2), получаемое в стробоскопическом сечении системы (2.1), демонстрирует удвоение фазы, что соответствует модели Смейла–Вильямса, и должно иметь неустойчивое направление, связанное с фазой  $\varphi$  и характеризующееся ляпуновским показателем  $\Lambda_1 \approx \ln 2$ . Остальные три направления должны быть устойчивыми и характеризоваться отрицательными ляпуновскими показателями. Аттрактор отображения представлен на рисунке 2б. Он имеет вид классического соленоида Смейла–Вильямса с бесконечным количеством витков и канторовской структурой «нитей».

Чтобы количественно характеризовать хаотический колебательный режим в системе (2.1), рассчитаем полный спектр показателей Ляпунова, воспользовавшись алгоритмом Бенеттина [41]. Для этого введем в рассмотрение линеаризованную систему

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}} - (A \cos \Omega t - x^2)\dot{\tilde{x}} + 2x\dot{x}\tilde{x} + \omega_0^2\tilde{x} + 3\beta x^2\tilde{x} &= \varepsilon\tilde{y}, \\ \ddot{\tilde{y}} - (-A \cos \Omega t - y^2)\dot{\tilde{y}} + 2y\dot{y}\tilde{y} + \omega_0^2\tilde{y} + 3\beta y^2\tilde{y} &= 2\varepsilon x\tilde{x}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

описывающую эволюцию возмущения  $(\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t), \tilde{y}(t), \dot{\tilde{y}}(t))$ . Для вычисления полного спектра ляпуновских показателей система уравнений (2.1) интегрировалась численно одновременно с комплектом из четырех систем линеаризованных уравнений (2.5) с различными начальными условиями. Интегрирование производилось вдоль траектории на аттракторе на интервале времени  $NT$ ,  $N = 10^4$ . Через каждый период  $T$  система четырех векторов  $(\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t)/\omega_0, \tilde{y}(t), \dot{\tilde{y}}(t)/\omega_0)$  подвергалась процедуре ортогонализации Грама–Шмидта и перенормировке с тем, чтобы норма векторов возмущения стала единичной. При этом вычислялись накапливающиеся суммы логарифмов длин векторов  $S_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ , получившихся после ортогонализации, но до нормализации. Ляпуновские показатели для отображения оцениваются по формуле  $\Lambda_k = S_k/N$ , а показатели для системы (2.1) связаны

с ними соотношением  $\lambda_k = \Lambda_k/T$ . Для рассматриваемого режима динамики при  $N = 10$ ,  $A = 4.3$ ,  $\varepsilon = 0.5$  полученные численные значения нетривиальных показателей Ляпунова оказываются следующими:  $\Lambda_1 \approx 0.685$ ,  $\Lambda_2 \approx -2.651$ ,  $\Lambda_3 \approx -7.420$ ,  $\Lambda_4 \approx -14.40$ . Это полностью согласуется с приведенными выше качественными рассуждениями об ожидаемых значениях для аттрактора типа Смейла–Вильямса.

Если аттрактор является гиперболическим, то хаотическая динамика системы должна быть грубой, то есть можно ожидать, что ее характер не изменится при относительно небольшой вариации параметров. Чтобы убедиться в этом, была построена зависимость ляпуновских показателей системы (2.1) от параметра  $A$ , представленная на рисунке 3 (прочие параметры:  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\beta = -1$ ). Видно, что в пределах области существования гиперболического хаоса старший ляпуновский показатель не зависит от параметра, сохраняя значение  $\Lambda_1 \approx \ln 2$ , а остальные показатели демонстрируют достаточно гладкую зависимость.

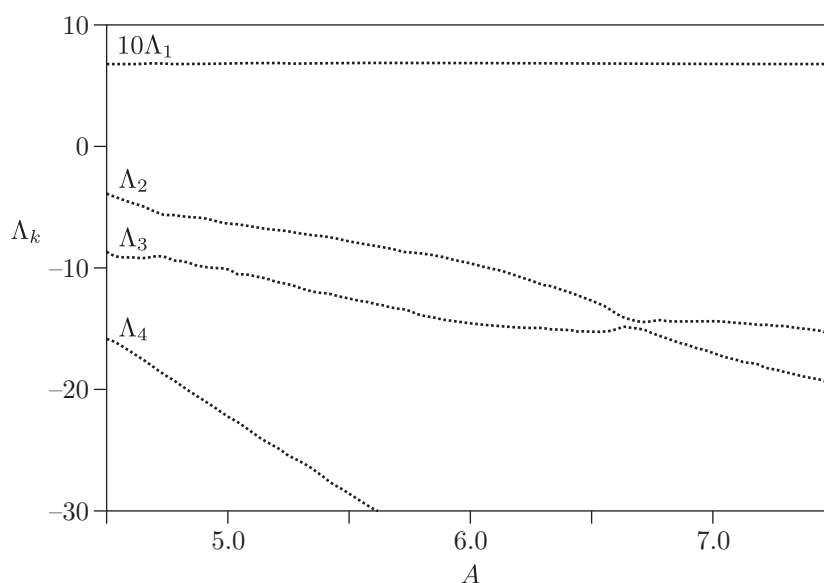


Рис. 3. Зависимость ляпуновских показателей от амплитуды модуляции параметра возбуждения осцилляторов в области существования гиперболического хаоса.

Аналогичная динамика может наблюдаться в системе и при других периодах модуляции параметра возбуждения, как больших, так и меньших, например, при  $N = 6$ . На рисунке 4а представлено отображение последования для фазы колебаний первого осциллятора при  $A = 5.5$ ,  $\varepsilon = 0.3$ . Несмотря на некоторое «расщепление» линий вследствие достаточно слабого сжатия в устойчивом подпространстве, это отображение также соответствует приблизительному удвоению фазы за период модуляции. Проекция стробоскопического сечения аттрактора на плоскость  $(x, \dot{x}/\omega_0)$  представлена на рисунке 4б. Он выглядит так, как и должен выглядеть солениод Смейла–Вильямса, обладающий фрактальной структурой. Ляпуновские показатели отображения для этого случая следующие:  $\Lambda_1 \approx 0.639$ ,  $\Lambda_2 \approx -2.84$ ,  $\Lambda_3 \approx -5.41$ ,  $\Lambda_4 \approx -7.76$ . Оценка фрактальной размерности по формуле Каплана–Йорка [39] дает  $D_\Lambda \approx 1.225$ .

Для непосредственной проверки гиперболичности аттрактора воспользуемся методом, подробно описанным в работах [10, 43–45]. Метод состоит в непосредственном расчете углов между устойчивым и неустойчивым многообразиями седловых траекторий на аттракторе.



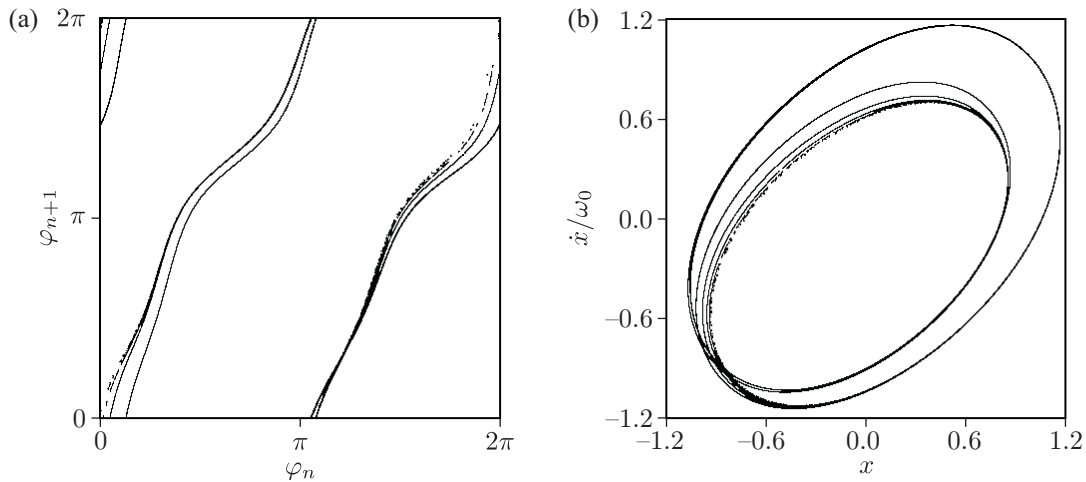


Рис. 4. (а) Отображение последования для фазы колебаний  $\varphi_{n+1}(\varphi_n)$ ; (б) проекция аттрактора на плоскость  $(x, \dot{x}/\omega_0)$ . Значения параметров  $N = 6$ ,  $A = 5.5$ ,  $\varepsilon = 0.3$ .

Если распределение углов между многообразиями, рассчитанное для типичных траекторий, строго изолировано от нулевого значения, то это указывает на гиперболическую природу аттрактора. Если распределение углов демонстрирует неубывающую вероятность в окрестности нуля (то есть вероятность ситуаций, сколь угодно близких к гомоклиническому касанию устойчивого и неустойчивого многообразий, является отличной от нуля), то хаотический аттрактор является негиперболическим. В диссипативных системах, в соответствии с леммой Ньюхауза, такие гомоклинические касания могут приводить к появлению квазиаттрактора.

В нашем случае в фазовом пространстве 4-мерного отображения имеются 1-мерное неустойчивое и 3-мерное устойчивое многообразия. Алгоритм расчета угла состоит в следующем. Для начала, путем численного интегрирования системы (2.1), генерируется достаточно длинная траектория  $(x(t), \dot{x}(t)/\omega_0, y(t), \dot{y}(t)/\omega_0)$  на аттракторе. Затем вперед во времени численно интегрируется линеаризованная система (2.5). В процессе интегрирования вектор  $\tilde{\mathbf{Z}}_F(t) = (\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t)/\omega_0, \tilde{y}(t), \dot{\tilde{y}}(t)/\omega_0)$  нормализуется на каждом шаге, чтобы избежать расходимости. Далее, путем интегрирования системы (2.5) обратно во времени с четырьмя разными наборами начальных условий, мы получаем набор из четырех векторов  $\{\tilde{\mathbf{Z}}_B^{(k)}(t)\}$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , того же вида. Чтобы избежать доминирования одного направления и расходимости, будем применять процедуру ортогонализации и нормализации Грама–Шмидта в процессе интегрирования.

В каждой точке стробоскопического сечения в момент времени  $t_n = t_0 + nT$  вектор  $\tilde{\mathbf{Z}}_F(t_n)$  определяет неустойчивое направление, касательное к одномерному неустойчивому многообразию, а набор из первых трех векторов  $\{\tilde{\mathbf{Z}}_B^{(1)}(t_n), \tilde{\mathbf{Z}}_B^{(2)}(t_n), \tilde{\mathbf{Z}}_B^{(3)}(t_n)\}$  задает базис в устойчивом 3-мерном подпространстве, так что любая их линейная комбинация также будет принадлежать этому подпространству. Что касается последнего, четвертого вектора  $\tilde{\mathbf{Z}}_B^{(4)}(t_n)$ , то он, будучи по процедуре Грама–Шмидта ортогональным по отношению к первым трем и всем их комбинациям, оказывается ортогональным к устойчивому подпространству.

Чтобы определить угол  $\alpha$  между устойчивым и неустойчивым подпространствами, для начала определим угол  $\beta \in [0, \pi/2]$  между векторами  $\tilde{\mathbf{Z}}_F(t_n)$  и  $\tilde{\mathbf{Z}}_4^B(t_n)$ :  $\cos \beta_n = |\tilde{\mathbf{Z}}_F(t_n) \tilde{\mathbf{Z}}_4^B(t_n)| / |\tilde{\mathbf{Z}}_F(t_n)| |\tilde{\mathbf{Z}}_4^B(t_n)|$ . Тогда получаем  $\alpha_n = \pi/2 - \beta_n$ . Гистограмма распре-



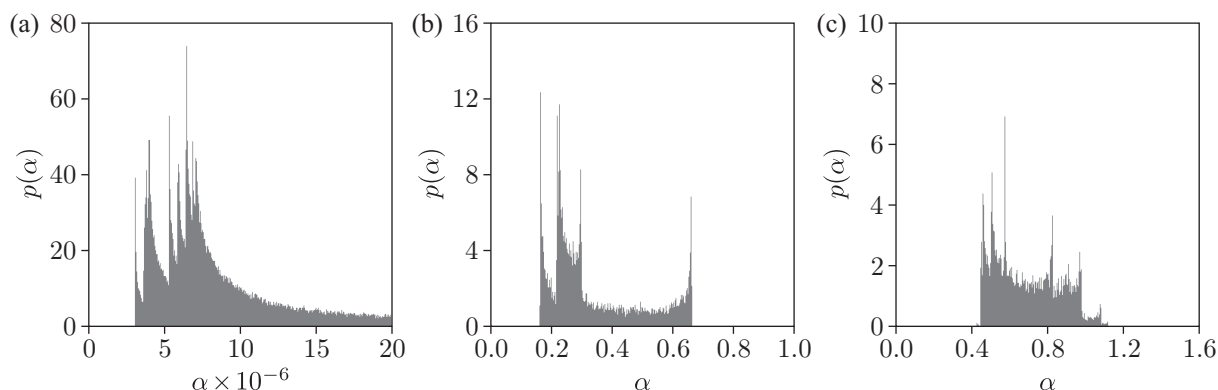


Рис. 5. Гистограммы распределений углов между устойчивым и неустойчивым касательными подпространствами при (a)  $N = 10$ ,  $A = 4.3$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ; (b)  $N = 10$ ,  $A = 5.0$ ;  $\varepsilon = 0.5$ ; (c)  $N = 6$ ,  $A = 5.5$ ,  $\varepsilon = 0.3$ .

деления углов  $p(\alpha)$  при  $N = 10$ ,  $A = 4.3$ ,  $\varepsilon = 0.5$  представлена на рисунке 5а, при  $N = 10$ ,  $A = 5.0$ ,  $\varepsilon = 0.5$  — на рисунке 5b, при  $N = 6$ ,  $A = 5.5$ ,  $\varepsilon = 0.3$  — на рисунке 5с. Видно, что распределения строго изолированы от нулевых значений угла, так что гомоклинические касания многообразий исключены. Следовательно, в системе (2.1) реализуется тот же тип гиперболического хаоса, который был описан в работе [10] и образом которого в фазовом пространстве является аттрактор-соленоид Смейла – Вильямса. Нашей дальнейшей задачей является, отталкиваясь от системы (2.1), перейти к связанным системам Фицхью – Нагумо и пронаблюдать в них аналогичный тип динамики.

### 3. Гиперболический хаос в связанных системах Фицхью – Нагумо

Система уравнений Фицхью – Нагумо может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= cx - x^3/3 - y, \\ \dot{y} &= a_1x - b_1y + I, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $x$  и  $y$  — динамические переменные, имеющие смысл мембранного потенциала и медленной переменной восстановления,  $a$ ,  $b$  и  $c$  — некоторые (в оригинальной модели — постоянные) параметры, а  $I$  — величина, имеющая смысл внешнего тока, действующего на мембрану. Известно, что путем простых преобразований и замены параметров эта система сводится к уравнению ван дер Поля с дополнительной кубической нелинейностью, а именно: взяв непосредственно следующие из первого уравнения системы (3.1) соотношения

$$y = cx - x^3/3 - \dot{x}, \quad \dot{y} = \dot{c}x + (c - x^2)\dot{x} - \ddot{x}$$

и подставив их во второе уравнение этой системы, мы получим уравнение

$$\ddot{x} - (\alpha - x^2)\dot{x} + \beta x^3 + \omega_0^2 x = -I, \quad (3.2)$$

где  $\alpha = b - c$ ,  $\beta = b/3$  и  $\omega_0^2 = a - bc - \dot{c}$ . Обратное, параметры уравнения (3.2) могут быть выражены как

$$b = 3\beta, \quad c = \alpha + 3\beta, \quad a = \omega_0^2 + 3\beta(\alpha + 3\beta) + \dot{\alpha} + 3\dot{\beta}. \quad (3.3)$$



Следовательно, пара связанных систем Фицхью–Нагумо, демонстрирующая поведение, полностью идентичное описанному в предыдущей главе, задается следующими уравнениями:

$$I: \begin{cases} \dot{x} = c_1x - x^3/3 - y, \\ \dot{y} = a_1x - b_1y + \varepsilon u, \end{cases} \quad II: \begin{cases} \dot{u} = c_2u - u^3/3 - v, \\ \dot{v} = a_2u - b_2v + \varepsilon x^2. \end{cases} \quad (3.4)$$

Здесь переменные  $x$  и  $y$  описывают динамику первой подсистемы,  $u$  и  $v$  — второй, а параметры  $a_{1,2}$ ,  $b_{1,2}$  и  $c_{1,2}$ , выраженные через соотношения (3.3), являются модулированными (противофазно) во времени с учетом того, что  $\alpha = \pm A \cos \Omega t$  и  $\beta = \text{const}$ :

$$b_{1,2} = 3\beta, \quad c_{1,2} = 3\beta \pm A \cos \Omega t, \quad a_{1,2} = \omega_0^2 + 9\beta^2 \pm A(3\beta \cos \Omega t - \Omega \sin \Omega t). \quad (3.5)$$

Тогда, при соответствующем выборе значений  $\omega_0$ ,  $\beta$ ,  $A$  и  $\varepsilon$ , в системе (3.4) реализуется режим грубого хаоса с гиперболическим аттрактором типа Смейла–Вильямса, полностью идентичный тому, что наблюдается в системе (2.1) при соответствующих значениях параметров.

Следует отметить, что способ модуляции параметров согласно формулам (3.5) по сути представляет собой не что иное, как простую гармоническую модуляцию, так что есть смысл упростить выражения, абстрагировавшись от их связи с параметрами системы (2.1). Далее, параметры  $b$  и  $c$  несут в системе (3.1) одинаковый смысл: они регулируют угол пересечения нулевых изоклин первого и второго уравнений системы (3.1). Поэтому, не нарушая общей картины, можно сделать параметр  $c$  константой, а варьировать параметр  $b$ , так чтобы модуляции подвергались параметры лишь второго уравнения системы (3.1). В соответствии с вышесказанным, запишем формулы модуляции параметров в следующем виде:

$$a_{1,2}(t) = A_0 \pm A_1 \sin \Omega t, \quad b_{1,2}(t) = B_0 \pm B_1 \cos \Omega t, \quad c_{1,2} = C_0. \quad (3.6)$$

Рассмотрим динамику системы (3.4) с модуляцией параметров вида (3.6) при  $A_0 = 2.5$ ,  $A_1 = 0.5$ ,  $B_0 = 0.7$ ,  $B_1 = 0.7$ ,  $C_0 = 0.7$ ,  $\varepsilon = 0.05$ ,  $\Omega = 0.1$ . Фрагменты временных реализаций переменных  $x$  и  $u$  представлены на рисунке 6а. Эти реализации имеют вид модулированных псевдогармонических колебаний с фазой, претерпевающей хаотический сдвиг между последовательными моментами начала генерации. Как и прежде, фаза может быть определена в стробоскопическом сечении в моменты времени  $t_n = t_0 + nT$ , где  $T = 2\pi/\Omega$ , по формуле  $\varphi = \arg(x - iy)$ . Эмпирическая зависимость  $\varphi_{n+1}(\varphi_n)$  представлена на рисунке 6б. Она имеет вид  $\varphi_{n+1} = 2\varphi_n + f(\varphi_n) \pmod{2\pi}$ , где  $f(\varphi)$  —  $2\pi$ -периодическая гладкая нелинейная функция, что топологически эквивалентно отображению Бернулли, хотя и содержит нелинейную часть. Аттрактор представлен на рисунке 6с и является классическим соленоидом Смейла–Вильямса в виде бесконечной нити с фрактальной структурой витков.

Для расчета спектра ляпуновских показателей, как и прежде, линеаризуем систему (3.4):

$$I: \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = c_1\tilde{x} - x^2\tilde{x} - \tilde{y}, \\ \dot{\tilde{y}} = a_1\tilde{x} - b_1\tilde{y} + \varepsilon\tilde{u}, \end{cases} \quad II: \begin{cases} \dot{\tilde{u}} = c_2\tilde{u} - u^2\tilde{u} - \tilde{v}, \\ \dot{\tilde{v}} = a_2\tilde{u} - b_2\tilde{v} + 2\varepsilon x\tilde{x}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Далее будем численно интегрировать систему (3.4) и набор из четырех линеаризованных систем (3.7) с различными начальными условиями. Выполняя ортогонализацию и нормализацию для комплекта из четырех векторов  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}, \tilde{v})$  через период  $T$  и считая средние значения логарифмов векторов после ортогонализации, но до нормализации, мы получим значения нетривиальных ляпуновских показателей для 4-мерного отображения, получаемого в стробоскопическом сечении системы (3.4). Они принимают значения  $\Lambda_1 \approx 0.657$ ,  $\Lambda_2 \approx -2.293$ ,  $\Lambda_3 \approx -6.270$ ,  $\Lambda_4 \approx -13.25$ , то есть старший из них близок к  $\ln 2$ , а остальные



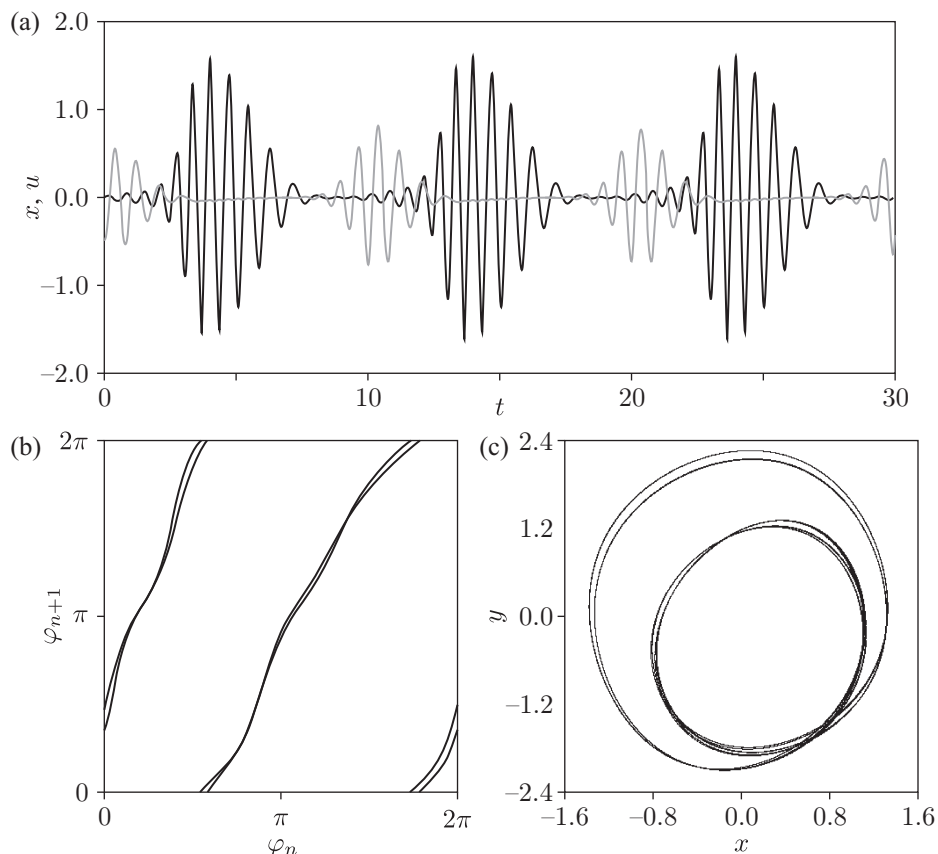


Рис. 6. Временные реализации динамических переменных  $x(t)$  и  $u(t)$  на трех периодах модуляции параметров системы (3.4) (а); отображение последования бернуллиевского типа для фазы колебаний (б) и проекция аттрактора Смейла–Вильямса той же системы (с). (Значения параметров см. в тексте.)

сильно отрицательны, как и следовало ожидать. Непосредственный тест на гиперболичность, основанный на расчете гистограммы распределения углов между устойчивым и неустойчивым многообразиями, может быть выполнен по тому же алгоритму, что был описан в предыдущем разделе. Полученная гистограмма распределения представлена на рисунке 7а. Видно, что принимаемые с ненулевой вероятностью значения угла строго изолированы от нуля, что свидетельствует об отсутствии гомоклинических касаний многообразий.

Отметим, что одновременная модуляция двух параметров ( $a$  и  $b$ ) в системе (3.4) не является принципиальной для существования гиперболического хаоса. Можно обойтись модуляцией лишь одного параметра  $b$ . Так, на рисунке 7б представлена гистограмма распределения углов для следующих значений параметров:  $A_0 = 1.4$ ,  $A_1 = 0.0$ ,  $B_0 = 0.7$ ,  $B_1 = 0.7$ ,  $C_0 = 0.7$ ,  $\varepsilon = 0.05$ ,  $\Omega = 0.1$ . Фрагмент временной реализации переменных  $x(t)$  и  $u(t)$  для этих же значений параметров приведен на рисунке 8а, а эмпирическая зависимость  $\varphi_{n+1}$  от  $\varphi_n$  — на рисунке 8б. Набор ляпуновских показателей соответствующего отображения Пуанкаре оказывается следующим:  $\Lambda_1 \approx 0.670$ ,  $\Lambda_2 \approx -2.812$ ,  $\Lambda_3 \approx -8.068$ ,  $\Lambda_4 \approx -17.93$ .

Помимо гиперболического хаоса, в системе (3.4) может реализовываться и «обычный», негиперболический хаос, образом которого является квазиаттрактор в фазовом пространстве системы. Для сравнения рассмотрим динамический режим при значениях параметров  $A_0 = 2.5$ ,  $A_1 = 0.0$ ,  $B_0 = 0.7$ ,  $B_1 = 0.7$ ,  $C_0 = 0.7$ ,  $\varepsilon = 0.05$ ,  $\Omega = 0.1$ . Значения ляпунов-

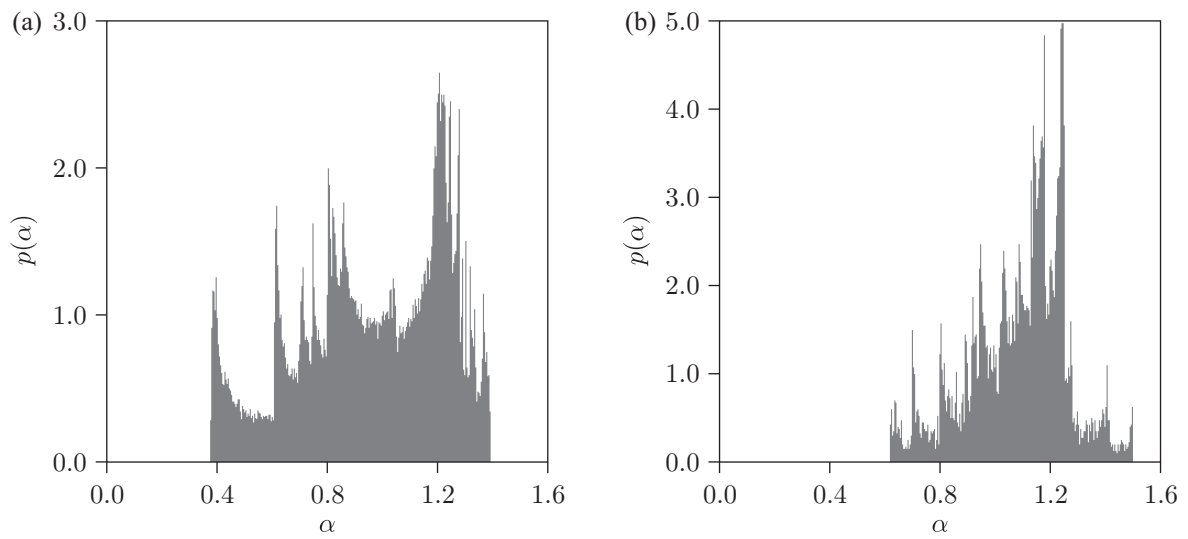


Рис. 7. Типичные гистограммы распределений углов между устойчивым и неустойчивым касательными подпространствами траекторий для режимов гиперболического хаоса в системе (3.4). (Значения параметров указаны в тексте.)

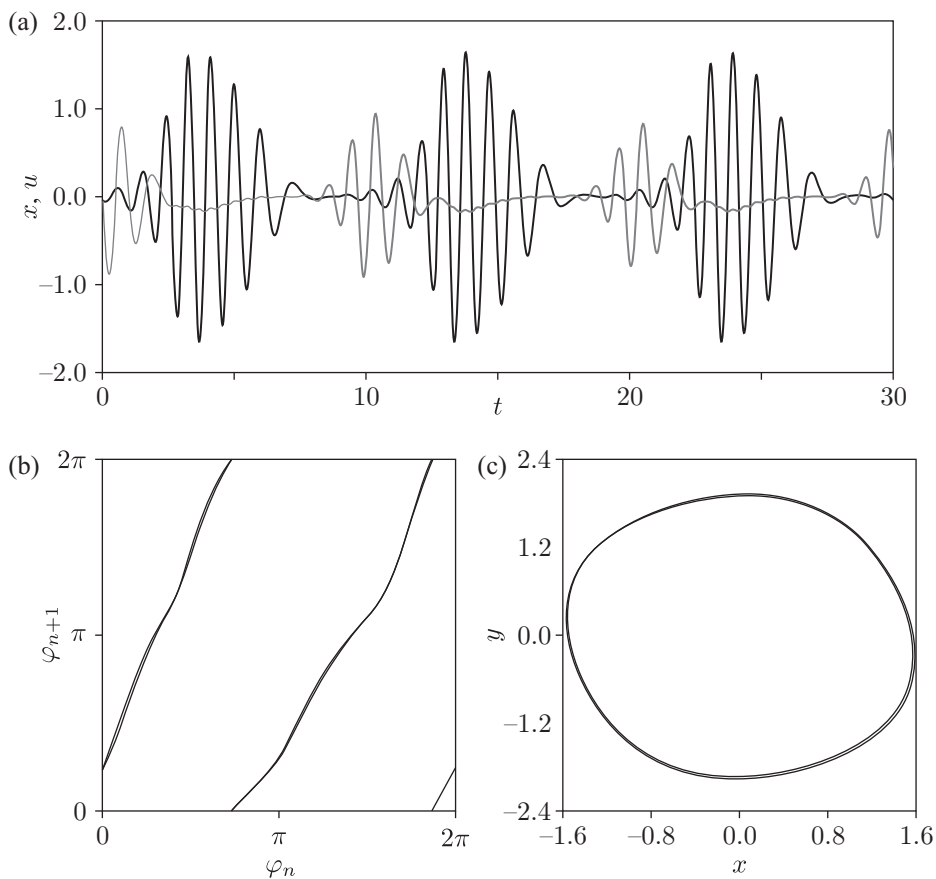


Рис. 8. Временные реализации динамических переменных  $x(t)$  и  $u(t)$  на трех периодах модуляции параметров системы (3.4) (а); отображение последования бернуллиевского типа для фазы колебаний (б) и проекция аттрактора Смейла–Вильямса той же системы (с). (Значения параметров см. в тексте.)

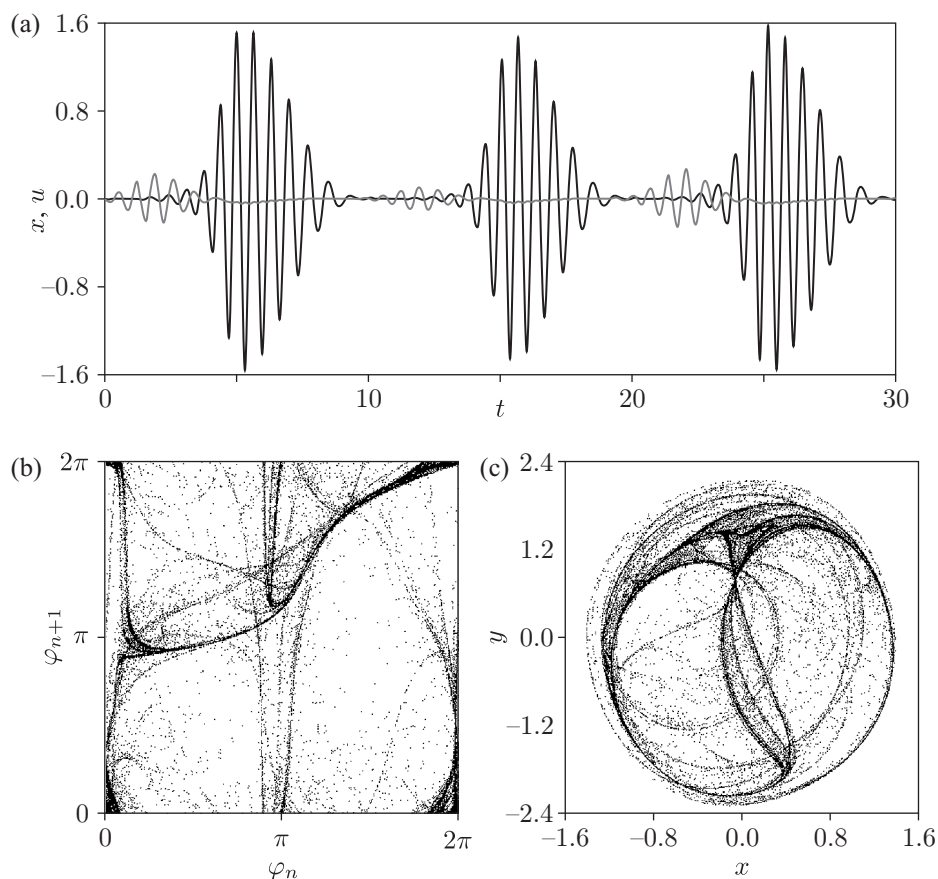


Рис. 9. Временные реализации динамических переменных  $x(t)$  и  $u(t)$  на трех периодах модуляции параметров системы (3.4) (а); отображение последования для фазы колебаний (b) и проекция аттрактора той же системы (с) при значениях параметров, соответствующих негиперболическому хаосу.

ских показателей отображения Пуанкаре при этом следующие:  $\Lambda_1 \approx 0.367$ ,  $\Lambda_2 \approx -0.391$ ,  $\Lambda_3 \approx -4.017$ ,  $\Lambda_4 \approx -11.49$ . На рисунке 9а представлены соответствующие временные реализации динамических переменных  $x(t)$  и  $u(t)$  на трех периодах модуляции параметров, свидетельствующие о попеременном возбуждении подсистем. Однако динамика отображения последования для фазы осцилляций при этом совершенно отлична от отображения Бернулли (см. рис. 9b), а аттрактор имеет «размытый» вид, не соответствующий соленоидальной нити Смейла, как это следует из рисунка 9с. Распределение углов между устойчивым и неустойчивым многообразиями (см. рис. 10) демонстрирует наличие ненулевой вероятности гомоклинических касаний между ними, что свидетельствует о негиперболической природе хаоса и — косвенно — о негрубой структуре аттрактора.

#### 4. Нейроподобные режимы бёрстового типа и гиперболический хаос

Следует иметь в виду, что система Фицхью–Нагумо в качестве модели нейрона является моделью весьма формальной (в отличие от модели Ходжкина–Хаксли, основанной на описании конкретных физических процессов, протекающих в нервной клетке). К нейро-

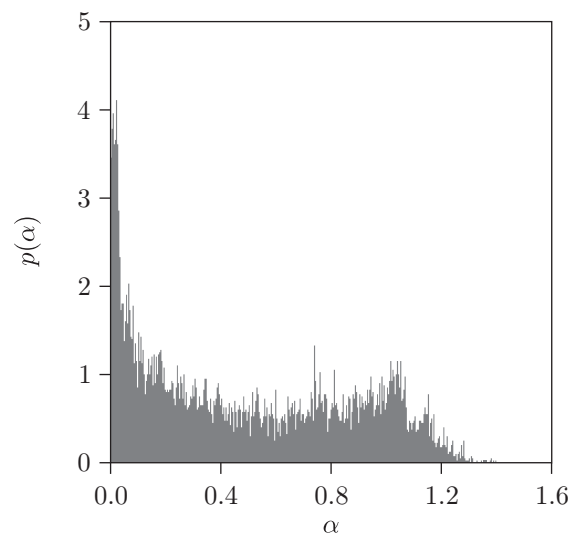


Рис. 10. Гистограмма распределения углов между устойчивым и неустойчивым касательными подпространствами траекторий для режима негиперболического хаоса в системе (3.4).

динамике она имеет отношение лишь постольку, поскольку обладает особым типом релаксационных автоколебаний, возникающих или блокирующихся при изменении управляющих параметров системы, и описывает процесс формирования нейронных «бёрстов», то есть резких всплесков электрической активности, чередующихся с фазами медленного восстановления до исходного уровня. Этот тип динамики наблюдается в системе (3.1) во вполне определенном диапазоне значений управляющих параметров. При прочих значениях в системе также могут наблюдаться автоколебания, но характерный псевдогармонический вид не наводит на мысль об их использовании в нейродинамическом моделировании, поскольку такое поведение для нейронов не характерно. Таким образом, систему (3.4) необходимо модифицировать так, чтобы могли реализовываться колебания, характерные для систем нейронной природы.

Рассмотрим следующую модификацию системы (3.4):

$$\text{I: } \begin{cases} \dot{x} = c_1 x - x^3/3 - y, \\ \dot{y} = a_1 x - b_1 y + \varepsilon \dot{x}^2, \end{cases} \quad \text{II: } \begin{cases} \dot{u} = c_2 u - u^3/3 - v, \\ \dot{v} = a_2 u - b_2 v + \varepsilon \dot{x}^2. \end{cases} \quad (4.1)$$

Суть модификации состоит в изменении характера связи между подсистемами: связь становится (i) зависящей от скорости изменения переменных (то есть от тока через мембрану, а не заряда на ней) и (ii) симметричной, что, возможно, более соответствует способу взаимодействия связанных нейронов.

На рисунке 11а приведен фрагмент временной реализации переменной  $x(t)$  системы (4.1) с модуляцией параметров вида (3.6) и значениями параметров  $A_0 = 1.5$ ,  $A_1 = 1.5$ ,  $B_0 = 0.1$ ,  $B_1 = 0.1$ ,  $C_0 = 0.2$ ,  $\varepsilon = 0.4$ ,  $\Omega = 0.05$ . Эта реализация имеет характерный вид нейронных бёрстов, то есть резких всплесков значений переменной мембранного потенциала, чередующихся с участками плавного падения/восстановления активности. Сама последовательность бёрстов является периодической, в силу периодичности модуляции параметров подсистем. При этом значение фазы осцилляций («спайков») от бёрста к бёрсту меняется хаотическим образом (см. рис. 11b), в соответствии с двукратным отображением Бернулли ( $\varphi_{n+1} \approx 4\varphi_n + \text{const} \pmod{2\pi}$ ). Последнее обусловлено тем фактом, что квадратичная

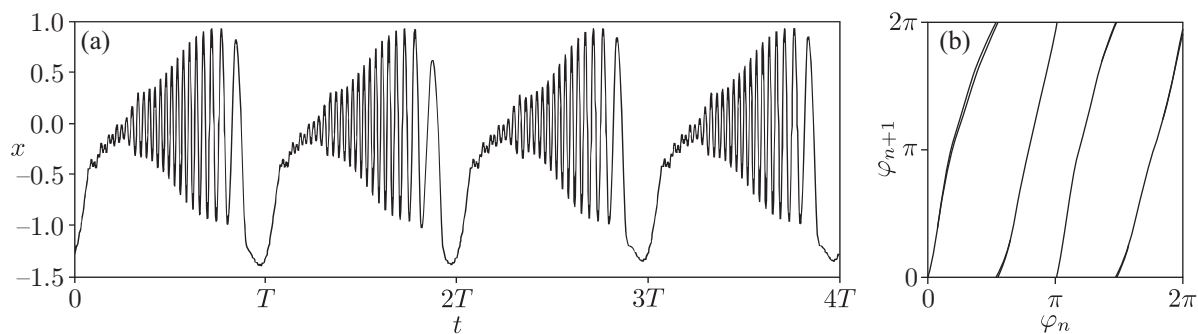


Рис. 11. (а) Временная реализация динамической переменной  $x(t)$  на четырех периодах модуляции параметров системы (4.1) в бёрстовом режиме. (б) Отображение последования типа «удвоенное Бернулли» для фазы колебаний. Значения параметров соответствуют гиперболическому хаосу.

связь действует в обе стороны, так что за период модуляции параметров удвоение фазы колебаний происходит дважды, при передаче от одной подсистемы к другой и обратно.

Ляпуновские показатели соответствующего отображения Пуанкаре, построенного через период внешнего воздействия, при указанных значениях параметров оказываются равными  $\Lambda_1 \approx 1.37$ ,  $\Lambda_2 \approx -4.69$ ,  $\Lambda_3 \approx -11.84$ ,  $\Lambda_4 \approx -58.03$ . Как и следовало ожидать, старший показатель оказался приблизительно равен  $\ln 4$ , а остальные принимают сильно отрицательные значения. Соответственно, имеется 1-мерное устойчивое и 3-мерное неустойчивое многообразие. Гистограмма распределения углов между ними представлена на рисунке 12а. Она демонстрирует нулевую вероятность для значений угла в окрестности нуля. Проекция аттрактора (рис. 12б) имеет характерный вид соленоида Смейла–Вильямса, обладающего канторовской структурой.

Еще более характерный пример бёрстового режима с выраженными ламинарными и «взрывными» фазами представлен на рисунке 13, при  $A_0 = 1.5$ ,  $A_1 = 1.7$ ,  $B_0 = 0.1$ ,  $B_1 = 0.1$ ,  $C_0 = 0.2$ ,  $\varepsilon = 0.7$ ,  $\Omega = 0.05$ . Фрагмент временной реализации переменной  $x(t)$  показан на рисунке 13а, а отображение для фазы — на рисунке 13б. В этом случае ляпуновские пока-

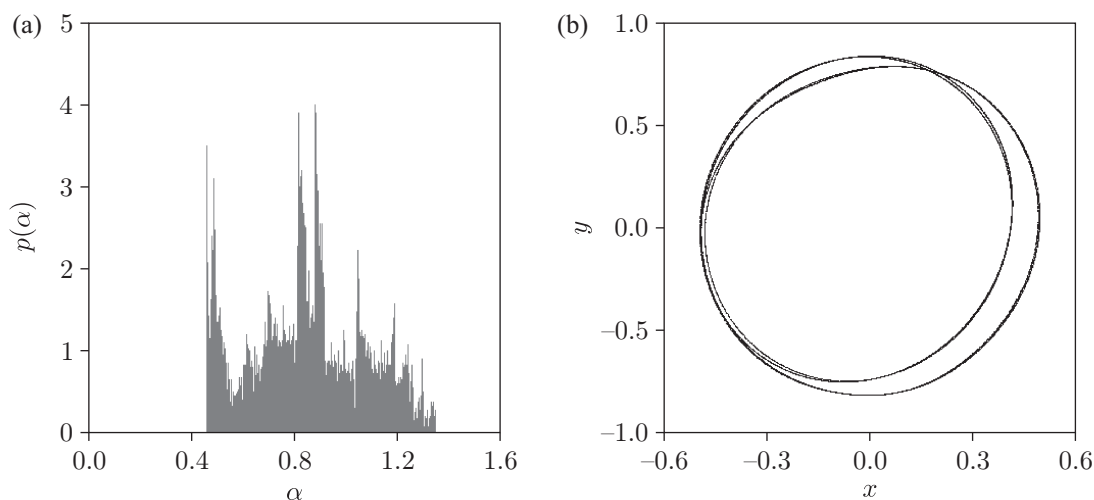


Рис. 12. (а) Гистограмма распределений углов между устойчивым и неустойчивым касательными подпространствами траекторий для режима гиперболического хаоса в системе (4.1). (б) Проекция аттрактора Смейла–Вильямса для той же системы.

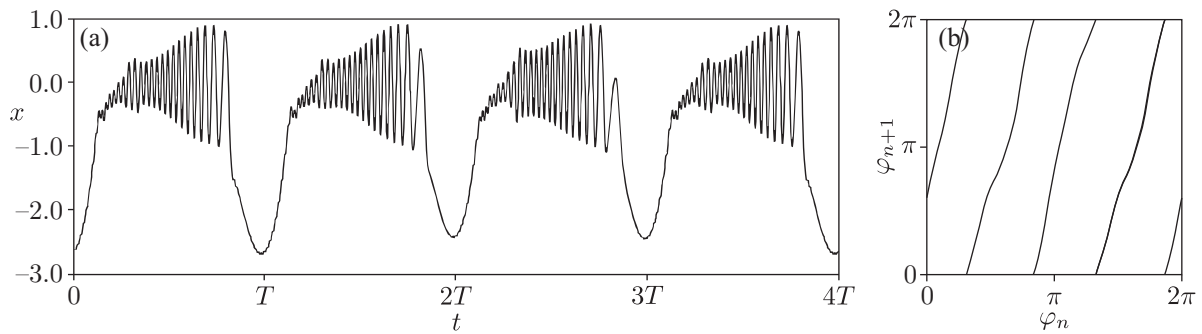


Рис. 13. (а) Временная реализация динамической переменной  $x(t)$  на четырех периодах модуляции параметров системы (4.1) в режиме бёрстов. (б) Отображение последования типа «удвоенное Бернулли» для фазы колебаний. Значения параметров соответствуют гиперболическому хаосу.

затели принимают значения  $\Lambda_1 \approx 1.37$ ,  $\Lambda_2 \approx -7.76$ ,  $\Lambda_3 \approx -17.24$ ,  $\Lambda_4 \approx -299.0$ . Большой разброс значений показателей затрудняет расчет направлений между 1-мерным неустойчивым и 3-мерным устойчивым многообразиями, но это возможно и в данном случае, если модифицировать описанную выше процедуру и производить преобразование Грама–Шмидта для набора ляпуновских векторов несколько раз за период модуляции, достаточно часто, чтобы разница их модулей не превысила точности операций с плавающей точкой. Гистограмма распределения углов  $p(\alpha)$  представлена на рисунке 14а, и она имеет тот же характерный вид с исчезающей вероятностью обнаружить значение угла в окрестности нуля, что свидетельствует об отсутствии гомоклинических касаний. Проекция аттрактора представлена на рисунке 14б. Несмотря на наличие большой диссипации, обусловленной сильно отрицательными значениями младших показателей, при определенном выборе сечения аттрактора на рисунке можно визуально различить канторовскую структуру множества.

Для сравнения приведем пример негиперболического хаоса в системе (4.1) при значениях параметров  $A_0 = 1.5$ ,  $A_1 = 1.7$ ,  $B_0 = 0.1$ ,  $B_1 = 0.1$ ,  $C_0 = 0.2$ ,  $\varepsilon = 0.3$ ,  $\Omega = 0.05$ . Фрагмент временной реализации переменной  $x(t)$  показан на рисунке 15а, а портрет отображения для

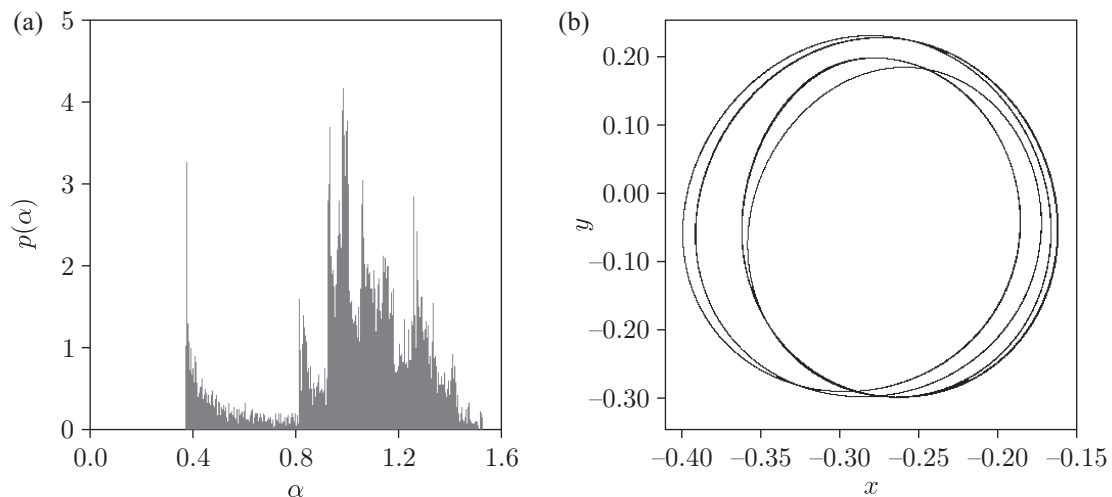


Рис. 14. (а) Гистограмма распределений углов между устойчивым и неустойчивым касательными подпространствами траекторий для режима гиперболического хаоса в системе (4.1). (б) Проекция аттрактора Смейла–Вильямса для той же системы.



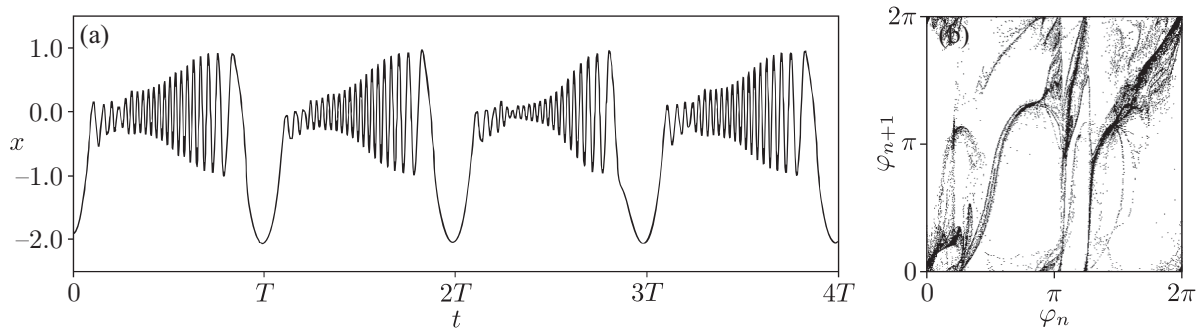


Рис. 15. (а) Временная реализация динамической переменной  $x(t)$  на четырех периодах модуляции параметров системы (4.1). (б) Отображение последования для фазы колебаний. Значения параметров соответствуют негиперболическому хаосу.

фазы — на рисунке 15b. Видно, что осцилляции так же, как и прежде, имеют выраженные ламинарные и бёрстовые фазы. Однако на портрете отображения для фазы осцилляций нельзя выделить какую-либо явную структуру, он имеет вид, типичный для квазиаттракторов. Это подтверждается расчетом ляпуновских показателей и гистограммы распределения углов между многообразиями. Значения ляпуновских показателей отображения Пуанкаре при этом оказываются следующими:  $\Lambda_1 \approx 0.813$ ,  $\Lambda_2 \approx -0.625$ ,  $\Lambda_3 \approx -6.72$ ,  $\Lambda_4 \approx -125.9$ . Гистограмма распределения углов  $p(\alpha)$  представлена на рисунке 16а, из которого видно, что вероятность является неубывающей в окрестности нуля. Проекция фазового портрета (рис. 16b) демонстрирует «размытое» множество, также не похожее на соленоидальную структуру аттрактора Смейла–Вильямса, имеющего вид нити с бесконечным количеством витков. Все это вместе свидетельствует о совсем другой природе хаотической динамики, нежели в предыдущем случае.

Для того чтобы оценить, насколько типичны случаи гиперболического и негиперболического хаоса в пространстве параметров модельной нейросистемы (4.1), был построен график зависимости минимального угла между касательными подпространствами  $\alpha_{\min}(N) =$

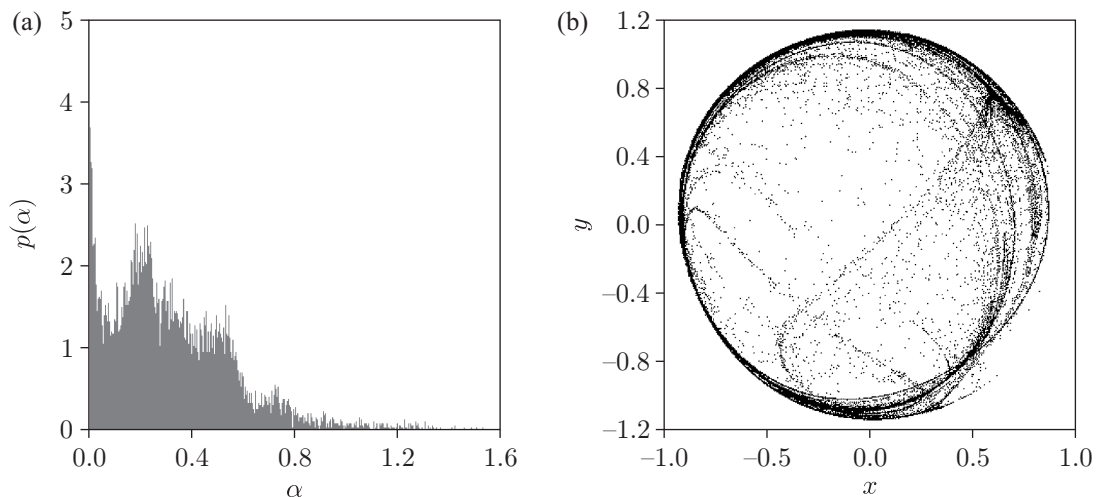


Рис. 16. (а) Гистограмма распределений углов между устойчивым и неустойчивым касательными подпространствами траекторий для режима негиперболического хаоса в системе (4.1). (б) Проекция аттрактора Смейла–Вильямса для той же системы.

$= \min_{1 \leq n \leq N} \alpha_n$ , рассчитанного вдоль сегмента траектории длиной  $N = 10^4$  итераций отображения Пуанкаре (со случайными начальными условиями), от параметра  $\varepsilon$  (см. рис. 17а). На этом графике значения  $\alpha_{\min}$ , соответствующие хаотическим режимам, отмечены жирными точками (●), в то время как крестиками (×) обозначены «провалы» внутри хаотического интервала, соответствующие регулярной (периодической) динамике системы (4.1), когда угол между касательными подпространствами не определен. Из рисунка видно, что график может быть поделен на два интервала. При  $\varepsilon < \varepsilon_c$  угол  $\alpha_{\min}$  принимает значения порядка  $10^{-4}$ – $10^{-3}$ , и он стремится к нулю при увеличении длины сегмента траектории  $N$ . При переходе  $\varepsilon$  через  $\varepsilon_c$  значения  $\alpha_{\min}$  становятся существенно ненулевыми, и они не убывают при росте длины сегмента  $N$ . Таким образом, можно сделать вывод, что хаотическая динамика системы (4.1) при  $\varepsilon > \varepsilon_c$  становится гиперболической. Критическое значение  $\varepsilon$ , оцененное на основе гистограмм распределений  $p(\alpha)$  и анализа значений  $\alpha_{\min}$ , оказывается равным  $\varepsilon_c = 0.49 \pm 0.01$ .

Для проверки свойства грубости хаотической динамики системы (4.1) был также построен график зависимости ляпуновских показателей от параметра связи  $\varepsilon$  (см. рис. 17б).

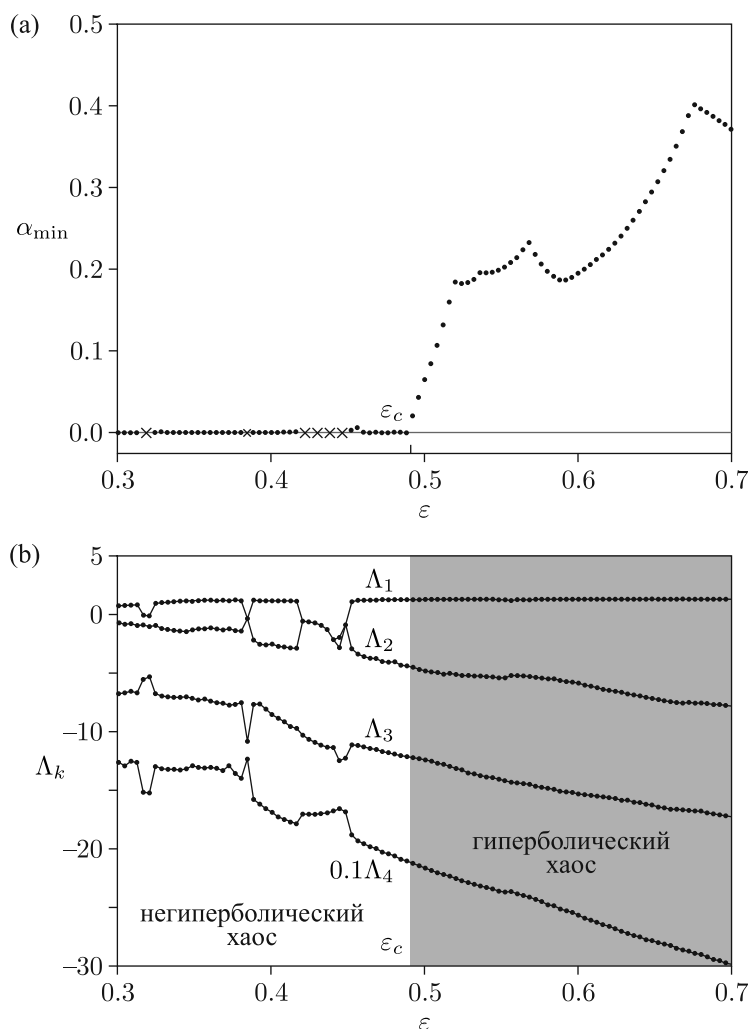


Рис. 17. (а) Зависимость угла  $\alpha_{\min}$  между касательными подпространствами от параметра связи  $\varepsilon$ . (б) Зависимость ляпуновских показателей от параметра  $\varepsilon$ .



Представленный график свидетельствует о существовании двух условных областей значений параметра  $\varepsilon$ . При  $\varepsilon < \varepsilon_c$  зависимость показателей от параметра имеет изрезанный вид, значения показателей меняются существенным образом. В этой области интервалы существования негиперболического хаоса перемежаются интервалами периодической динамики. При  $\varepsilon > \varepsilon_c$  поведение системы качественно меняется, что означает переход к гиперболическому хаосу. Из рисунка видно, что в области гиперболического хаоса старший ляпуновский показатель сохраняет значение  $\Lambda_1 \approx \ln 4$ , в то время как остальные показатели демонстрируют гладкую (приблизительно линейную) зависимость от  $\varepsilon$ .

## 5. Заключение

В заключение следует отметить, что гиперболический странный аттрактор типа Смейла–Вильямса, обладающий довольно простой упорядоченной пространственной структурой, представляет собой хороший пример «порядка в хаосе». Чтобы проиллюстрировать это утверждение, достаточно сравнить отображения для фазы колебаний в режиме гиперболического и негиперболического хаоса, а также фазовые портреты аттракторов. По-видимому, этот тип динамики является довольно универсальным, так как проявляется в системах различной природы, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производных, и в системах с временной задержкой. При этом колебательные режимы, образом которых является аттрактор Смейла–Вильямса, весьма разнообразны — от квазигармонических осцилляций до нейроподобных бёрстов и спайков. В настоящей работе продемонстрирована возможность конструирования необходимого типа осцилляций, исходя из заранее поставленной задачи и отталкиваясь от базовой модели. Можно ожидать, что сложные системы, построенные из большого числа нейронов на основе принципов гиперболичности, будут демонстрировать особые свойства устойчивости по отношению к вариации параметров и шуму, а также особые свойства синхронизации и различных переходов порядок/хаос, по сравнению с обычными хаотическими системами.

## Список литературы

- [1] Smale S. Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 1967, vol. 73, pp. 747–817.
- [2] Williams R. Expanding attractors // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 1974, No. 43, pp. 169–203.
- [3] Eckmann J.-P., Ruelle D. Ergodic theory of chaos and strange attractors // Rev. Modern Phys., 1985, vol. 57, no. 3, part 1, pp. 617–656.
- [4] Shilnikov L. Mathematical problems of nonlinear dynamics: A tutorial // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 1997, vol. 7, no. 9, pp. 1953–2001.
- [5] Katok A., Hasselblatt B. Introduction to the modern theory of dynamical systems. (Encyclopedia Math. Appl., vol. 54.) Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. 802 pp.
- [6] Guckenheimer J., Holmes Ph. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. New York: Springer, 1983. 453 pp.
- [7] Кузнецов С. П. Динамический хаос и гиперболические аттракторы: от математики к физике. Москва – Ижевск: ИКИ, 2013. 488 с.
- [8] Anishchenko V. S., Astakhov V. V., Neiman A. B., Vadivasova T. E., Schimansky-Geier L. Nonlinear dynamics of chaotic and stochastic systems: Tutorial and modern developments. 2nd ed. (Springer Series in Synergetics.) Berlin: Springer, 2007. 446 pp.



- [9] Afraimovich V. S., Shil'nikov L. P. Strange attractors and quasiattractors // Nonlinear dynamics and turbulence / G. I. Barenblatt, G. Iooss, D. D. Joseph (Eds.). (Interaction Mech. Math. Ser.) Boston, Mass.: Pitman, 1983. P. 1–34.
- [10] Kuznetsov S. P. Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // Phys. Rev. Lett., 2005, vol. 95, no. 14, 144101, 4 pp.
- [11] Kuznetsov S. P., Pikovsky A. Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // Phys. D, 2007, vol. 232, no. 2, pp. 87–102.
- [12] Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Пиковский А. С., Тюрюкина Л. В. Хаотическая динамика в системах связанных неавтономных осцилляторов с резонансным и нерезонансным механизмом передачи возбуждения // Изв. вузов. ПНД, 2007, т. 15, № 6, с. 75–85.
- [13] Кузнецов С. П. О возможности реализации параметрического генератора гиперболического хаоса // ЖЭТФ, 2008, т. 133, № 2, с. 438–446.
- [14] Кузнецов С. П. Гиперболические странные аттракторы систем, допускающих физическую реализацию // Изв. вузов. ПНД, 2009, т. 17, № 4, с. 5–34.
- [15] Тюрюкина Л. В., Пиковский А. С. Гиперболический хаос в нелинейно связанных осцилляторах Ландау–Стюарта с медленной модуляцией параметров // Изв. вузов. ПНД, 2009, т. 17, № 2, с. 99–113.
- [16] Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Сатаев И. Р. Параметрический генератор гиперболического хаоса на основе двух связанных осцилляторов с нелинейной диссипацией // ЖТФ, 2010, т. 80, № 12, с. 1–9.
- [17] Turukina L. V., Pikovsky A. Hyperbolic chaos in a system of resonantly coupled weakly nonlinear oscillators // Phys. Lett. A, 2011, vol. 375, no. 11, pp. 1407–1411.
- [18] Кузнецов С. П., Тюрюкина Л. В. Аттракторы типа Смейла–Вильямса в модельных системах с импульсным периодическим воздействием // Изв. вузов. ПНД, 2010, т. 18, № 5, с. 80–92.
- [19] Kuznetsov S. P., Pikovsky A. S. Hyperbolic chaos in the phase dynamics of a Q-switched oscillator with delayed nonlinear feedbacks // Europhys. Lett., 2008, vol. 84, no. 1, 10013, 5 pp.
- [20] Kuptsov P. V., Kuznetsov S. P., Pikovsky A. Hyperbolic chaos of Turing patterns // Phys. Rev. Lett., 2012, vol. 108, no. 19, 194101, 4 pp.
- [21] Kruglov V. P., Kuznetsov S. P., Pikovsky A. Attractor of Smale–Williams type in an autonomous distributed system // Regul. Chaotic Dyn., 2014, vol. 19, no. 4, pp. 483–494.
- [22] Kuznetsov A. S., Kuznetsov S. P. Parametric generation of robust chaos with time-delayed feedback and modulated pump source // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2013, vol. 18, no. 3, pp. 728–734.
- [23] Isaeva O. B., Kuznetsov A. S., Kuznetsov S. P. Hyperbolic chaos of standing wave patterns generated parametrically by a modulated pump source // Phys. Rev. E, 2013, vol. 87, no. 4, 040901(R), 4 pp.
- [24] Arzhanukhina D. S., Kuznetsov S. P. Robust chaos in autonomous time-delay system // Изв. вузов. ПНД, 2014, т. 22, № 2, с. 36–49.
- [25] Кузнецов С. П., Селезнев Е. П. Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // ЖЭТФ, 2006, т. 129, № 2, с. 400–412.
- [26] Кузнецов С. П., Пономаренко В. И. О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла–Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием // Письма в ЖТФ, 2008, т. 34, № 18, с. 1–8.
- [27] Емельянов В. В., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М. Генератор гиперболического хаоса на основе связанных пролетных клистронов // Письма в ЖТФ, 2009, т. 35, № 16, с. 71–78.
- [28] Isaeva O. B., Kuznetsov S. P., Sataev I. R. A «saddle–node» bifurcation scenario for birth or destruction of a Smale–Williams solenoid // Chaos, 2012, vol. 22, no. 4, 043111, 7 pp.
- [29] Исаева О. Б., Кузнецов С. П., Сатаев И. Р., Пиковский А. Об одном бифуркационном сценарии рождения аттрактора типа Смейла–Вильямса // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 2, с. 267–294.



- [30] Кузнецов С. П., Сатаев И. Р. Проверка условий гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля // Изв. вузов. ПНД, 2006, т. 14, № 5, с. 3–29.
- [31] Kuznetsov S. P., Sataev I. R. Hyperbolic attractor in a system of coupled non-autonomous van der Pol oscillators: Numerical test for expanding and contracting cones // Phys. Lett. A, 2007, vol. 365, nos. 1–2, pp. 97–104.
- [32] Jalnine A. Yu., Kuznetsov S. P. Effect of noise in a nonautonomous system of alternately excited oscillators with a hyperbolic strange attractor // Phys. Rev. E, 2008, vol. 77, no. 3, 036220, 6 pp.
- [33] Kuznetsov S. P. Example of blue sky catastrophe accompanied by a birth of Smale–Williams attractor // Regul. Chaotic Dyn., 2010, vol. 15, nos. 2–3, pp. 348–353.
- [34] Isaeva O. B., Kuznetsov S. P., Sataev I. R., Savin D. V., Seleznev E. P. Hyperbolic chaos and other phenomena of complex dynamics depending on parameters in nonautonomous system of two alternately activated oscillators // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 2015, vol. 25, no. 12, 1530033, 15 pp.
- [35] Kuznetsov S. P. A non-autonomous flow system with Plykin type attractor // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2009, vol. 14, no. 9–10, pp. 3487–3491.
- [36] Kuznetsov S. P. Plykin-type attractor in nonautonomous coupled oscillators // Chaos, 2009, vol. 19, no. 1, 013114, 10 pp.
- [37] Кузнецов С. П. Пример неавтономной системы с непрерывным временем, имеющей аттрактор типа Плыкина в отображении Пуанкаре // Нелинейная динамика, 2009, т. 5, № 3, с. 403–424.
- [38] FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophys. J., 1961, vol. 1, no. 6, pp. 445–466.
- [39] Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proc. of the IRE, 1962, vol. 50, no. 10, pp. 2061–2070.
- [40] Jalnine A. Yu. Hyperbolic and non-hyperbolic chaos in a pair of coupled alternately excited FitzHugh–Nagumo systems // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2015, vol. 23, nos. 1–3, pp. 202–208.
- [41] Schuster H. G. Deterministic chaos: An introduction. 3rd ed. Weinheim: VCH, 1995. 320 pp.
- [42] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory // Meccanica, 1980, vol. 15, no. 1, pp. 9–20.
- [43] Lai Y.-C., Grebogi C., Yorke J. A., Kan I. How often are chaotic saddles nonhyperbolic? // Nonlinearity, 1993, vol. 6, no. 5, pp. 779–797.
- [44] Anishchenko V. S., Kopeikin A. S., Kurths J., Vadivasova T. E., Strelkova G. I. Studying hyperbolicity in chaotic systems // Phys. Lett. A, 2000, vol. 270, no. 6, pp. 301–307.
- [45] Kuptsov P. V. Fast numerical test for hyperbolic chaos // Phys. Rev. E, 2012, vol. 85, no. 1, 015203, 4 pp.

### From quasiharmonic oscillations to neural spikes and bursts: a variety of hyperbolic chaotic regimes based on Smale–Williams attractor

Alexey Yu. Jalnine

Saratov Branch of Kotelnikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS

Zelenaya str., 38, Saratov 410019, Russia

Jalnine@rambler.ru

In the present paper we consider a family of coupled self-oscillatory systems presented by pairs of coupled van der Pol generators and FitzHugh–Nagumo neural models, with the parameters being periodically modulated in anti-phase, so that the subsystems undergo alternate excitation with a successive transmission of the phase of oscillations from one subsystem to another.



It is shown that, due to the choice of the parameter modulation and coupling methods, one can observe a whole spectrum of robust chaotic dynamical regimes, taking the form ranging from quasiharmonic ones (with a chaotically floating phase) to the well-defined neural oscillations, which represent a sequence of amplitude bursts, in which the phase dynamics of oscillatory spikes is described by a chaotic mapping of Bernoulli type. It is also shown that 4D maps arising in a stroboscopic Poincaré section of the model flow systems universally possess a hyperbolic strange attractor of the Smale–Williams type. The results are confirmed by analysis of phase portraits and time series, by numerical calculation of Lyapunov exponents and their parameter dependencies, as well as by direct computation of the distributions of angles between stable and unstable tangent subspaces of chaotic trajectories.

MSC 2010: 37D05, 37D20, 37D45, 37M25, 65P20, 82C32, 92B25

Keywords: chaos, hyperbolicity, Smale–Williams attractor, neurons, FitzHugh–Nagumo model

Received December 24, 2015, accepted February 16, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 1, pp. 53–73 (Russian)