

**ВЕСТНИК
САРАТОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

2015

№ 2 (79)

Научно-технический журнал

Издается с 2003 г.

Выходит один раз в квартал

Май 2015 года

*Журнал включен в перечень ведущих
рецензируемых журналов и научных изданий,
утвержденный президиумом ВАК
Министерства образования и науки РФ,
в которых публикуются основные научные
результаты диссертаций на соискание
ученых степеней доктора и кандидата наук*

**Главный редактор
Заместитель главного редактора
Ответственный секретарь**

д.и.н., профессор И.Р. Плеве
д.т.н., профессор А.А. Сытник
д.ф.-м.н., профессор В.В. Астахов

Редакционная коллегия: д.т.н., проф. И.И. Артюхов, д.ф.-м.н., проф. В.В. Астахов, д.ф.-м.н., проф. В.Б. Байбурун, д.ф.-м.н., проф. Д.А. Зимняков, д.т.н., проф. В.А. Крысько, д.т.н., проф. В.Н. Лясников, д.т.н., проф. И.В. Родионов, д.т.н., проф. А.А. Сытник, д.т.н., проф. Ю.Б. Томашевский, д.т.н., проф. В.А. Хрусталева

Редактор Л.А. Скворцова
Компьютерная верстка Н.В. Лукашовой
Перевод на английский язык А.Х. Аскаровой
Ответственный за размещение полнотекстовой версии журнала
на сайте eLIBRARY.ru М.И. Балакин

Адрес редакции:
Саратов, 410054, ул. Политехническая, 77
Телефон: (845 2) 99-87-39
E-mail: vestnik@sstu.ru
<http://dni.sstu.ru/vestnik.nsf>
Факс: (845 2) 52-53-02

Подписано в печать 15.05.14
Формат 60×84 1/8 Бум. офсет.
Усл. печ. л. 19,00 Уч.-изд. л. 10,0
Тираж 500 экз. Заказ 68
Отпечатано в Издательстве СГТУ,
410054, г. Саратов, ул. Политехническая, 77

Полная электронная версия журнала размещена в системе РИНЦ
в открытом доступе на платформе eLIBRARY.RU

Подписной индекс 18378
(каталог «Газеты. Журналы» на 2-е полугодие 2015 г.)

ФИЗИКА, РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

УДК 517.9

А.П. Кузнецов, Ю.В. Седова

АВТОНОМНАЯ И СВЯЗАННАЯ МОДЕЛИ, ДЕМОНСТРИРУЮЩИЕ ГИПЕРХАОС

Рассмотрена динамическая система с четырехмерным фазовым пространством, являющаяся обобщением системы Лоренца. С помощью построения карты ляпуновских показателей выявлены области хаоса и гиперхаоса, а также автономной квазипериодичности. Рассмотрена картина режимов двух связанных систем, отвечающая взаимодействию квазипериодических подсистем и гиперхаотических подсистем.

Гиперхаос, квазипериодические колебания, показатели Ляпунова, ляпуновская карта

A.P. Kuznetsov, Yu.V. Sedova

AUTONOMOUS AND COUPLED MODELS FOR HYPERCHAOS

We consider a dynamical system presenting the generalization of the Lorenz system with four-dimensional phase space. By computation of the chart for the Lyapunov exponents, the regions of chaos, hyperchaos and autonomous quasiperiodicity were revealed. We investigated the picture of regimes of two coupled systems corresponding to the interaction of quasiperiodic and hyperchaotic subsystems.

Hyperchaos, quasiperiodic oscillations, Lyapunov exponents, chart of Lyapunov exponents

Введение. Гиперхаотический аттрактор – это аттрактор, особенностью которого является наличие более одного положительного показателя Ляпунова, что указывает на растяжение аттрактора в нескольких направлениях. Высокоразмерные гиперхаотические модели перспективны в целях скрытой коммуникации, так как в них по сравнению с обычными хаотическими системами заложены более высокая непредсказуемость и «случайность». В то время как синхронизация систем с классическим хаосом хорошо изучена [1], задача о взаимодействии гиперхаотических систем представляет определенный интерес.

Автономная система. Обратимся к модели, сравнительно недавно предложенной китайскими исследователями [2] и представляющей собой модифицированную форму известной системы Лоренца:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) + euz, \\ \dot{y} &= cx - dxz + y + u, \\ \dot{z} &= xy - bz, \\ \dot{u} &= -ky.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь x, y, z, u – переменные, a, b, c, d, e, k – управляющие параметры.

Модель (1) имеет несколько основных свойств и достоинств [2]:

- 1) она диссипативна при условии $(a + b - 1) > 0$;
- 2) уравнения (1) симметричны относительно оси z : $(x, y, z, u) \rightarrow (-x, -y, z, -u)$;

3) модель имеет только тривиальное (нулевое) состояние равновесия.

При фиксированных значениях параметров $a = 35, c = 25, d = 5, e = 35$ в [2] проведен однопараметрический анализ (1) при некоторых фиксированных b и k . На рис. 1 воспроизведен спектр ляпуновских показателей и характерные фазовые портреты для $k = 100$ в зависимости от параметра b . Численные результаты получены с использованием метода Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом интегрирования, равным 0.001. Отметим, что как обычно, один показатель всегда равен нулю $\Lambda_3 = 0$, и на рисунке не показан.

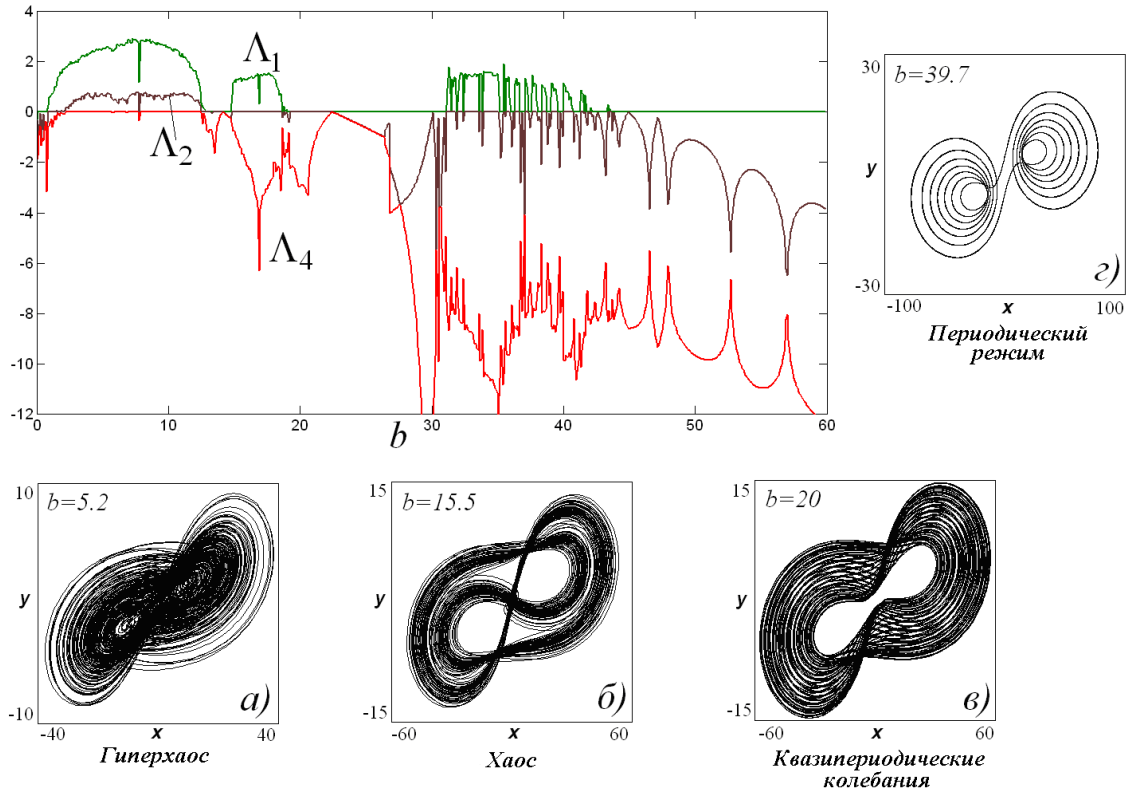


Рис. 1. Ляпуновские показатели модели (1) в зависимости от параметра b для $k = 100$ (ляпуновский показатель $\Lambda_3 = 0$ на графике не указан)

Система (1) демонстрирует гиперхаос в большом интервале значений параметров. Интересно, что наряду с таким режимом, а также периодическими и хаотическими режимами, в системе имеются и квазипериодическая динамика. Таким образом, это еще один пример автономной системы с квазипериодичностью (см. также [3, 4]), что повышает ее ценность.

Однопараметрический анализ не дает полную информацию о типичности режимов и областей их локализации. Поэтому целесообразно обратиться к двухпараметрическому анализу. Для этого используем построение карты ляпуновских показателей [5] и карты динамических режимов [6]. В первом случае проследим за изменением ляпуновских показателей в каждой точке плоскости (k, b) и раскрасим плоскость параметров по следующему правилу¹:

- периодический режим P (все показатели отрицательные);
- квазипериодический режим T_2 (один показатель нулевой);
- хаос C (один показатель положительный);
- гиперхаос HC (два положительных показателя).

Соответствующая ляпуновская карта показана на рис. 2а. Из рисунка видно, что область гиперхаоса целиком занимает обширную часть плоскости управляющих параметров. Очень хорошо визуализируется область существования двухчастотных торов, а также граница области квазипериодичности – линия бифуркации Неймарка-Сакера с отходящими от нее языками Арнольда.

¹Один всегда нулевой показатель отброшен.

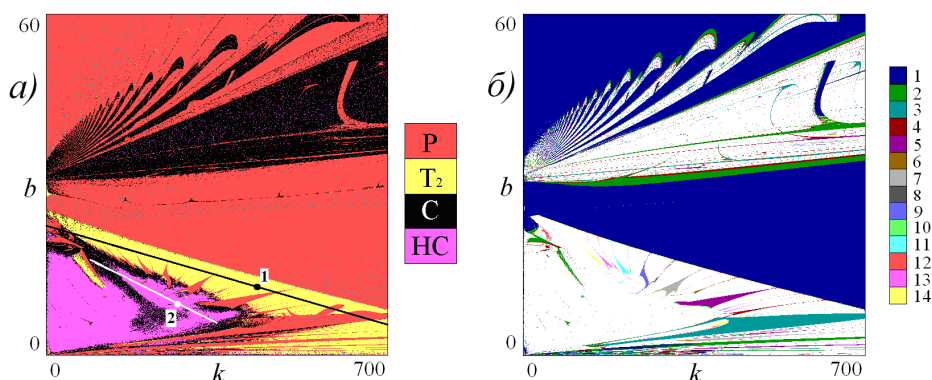


Рис. 2. Двухпараметрический анализ модели (1). а) Карта ляпуновских показателей. Цвет отвечает типу режима. Показаны две линии, для которых выполнено сканирование плоскости параметров б) Карта динамических режимов. Цвет отвечает периоду цикла в сечении Пуанкаре

О характере периодических режимов позволяет судить карта динамических режимов, представленная на рис. 2б. В этом случае при сканировании каждой точки карты устойчивый режим колебаний анализируется с помощью численного построения сечения Пуанкаре [6]. Период режима определяется как количество точек пересечения фазовой траектории с секущей плоскостью. Таким образом, простому предельному циклу отвечает период 1, двухоборотному – период 2 и т.д. В соответствии с этим каждая точка плоскости окрашивается в свой цвет. Основные периоды режимов, определенные в сечении Пуанкаре, указаны цифрами справа на рис. 2б. Непериодические режимы (включая квазипериодическую динамику и хаос) показаны белым цветом.

Таким образом, в системе (1) с единственным тривиальным состоянием равновесия имеются: бифуркация Неймарка – Сакера, двухчастотная автономная квазипериодическая динамика, система языков Арнольда, хаос и гиперхаос. Это позволит рассмотреть далее два случая: взаимодействие систем с автономной квазипериодичностью и взаимодействие систем с гиперхаосом. (Как мы отмечали, взаимодействие хаотических подсистем достаточно полно исследовано).

Связанные системы. Исследуем динамику двух моделей (1), связанных через разность соответствующих переменных:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= a(y_1 - x_1) + ey_1z_1 + \mu(x_2 - x_1), \\
 \dot{y}_1 &= cx_1 - dx_1z_1 + y_1 + u_1 + \mu(y_2 - y_1), \\
 \dot{z}_1 &= x_1y_1 - b_1z_1 + \mu(z_2 - z_1), \\
 \dot{u}_1 &= -k_1y_1 + \mu(u_2 - u_1), \\
 \dot{x}_2 &= a(y_2 - x_2) + ey_2z_2 + \mu(x_1 - x_2), \\
 \dot{y}_2 &= cx_2 - dx_2z_2 + y_2 + u_2 + \mu(y_1 - y_2), \\
 \dot{z}_2 &= x_2y_2 - b_2z_2 + \mu(z_1 - z_2), \\
 \dot{u}_2 &= -k_2y_2 + \mu(u_1 - u_2).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь x_1, y_1, z_1, u_1 и x_2, y_2, z_2, u_2 – динамические переменные первой и второй подсистем соответственно, μ – коэффициент связи. Фиксируем, как и в [2], набор параметров $a = 35, c = 25, d = 5, e = 35$, и будем варьировать коэффициенты k_1, k_2, b_1, b_2 .

Наличие системы языков Арнольда разных периодов в автономной системе позволяет приписать модели «частотный параметр», отвечающий движению вдоль линии бифуркации Неймарка – Сакера. Эта линия может проходить через область квазипериодических режимов со встроенной системой языков Арнольда (маршрут 1 на рис. 2 а) и через область гиперхаоса (маршрут 2).

Эти маршруты будут отвечать вариации частотного параметра во второй подсистеме. В первой же подсистеме фиксируем знамения k_1, b_1 так, чтобы для нее соответственно наблюдалась квазипериодичность или гиперхаос. Значения этих параметров отмечены точками на линиях на рис. 2а.

Первый сценарий. Фиксируем в первой подсистеме $k_1 = 430, b_1 = 12$ и строим карту ляпуновских показателей. При этом вдоль оси ординат откладываем величину связи μ . Вдоль оси абсцисс отложим значение k_2 , отсчитываемое вдоль выделенной линии 1 на рис. 2а. Этот случай, очевидно, отвечает взаимодействию квазипериодических колебаний. Полученная ляпуновская карта показана

на рис. 3. Отметим, что теперь появляется дополнительная возможность существования трехчастотных торов T_3 (два нулевых показателя) и четырехчастотных торов T_4 (три нулевых показателя).

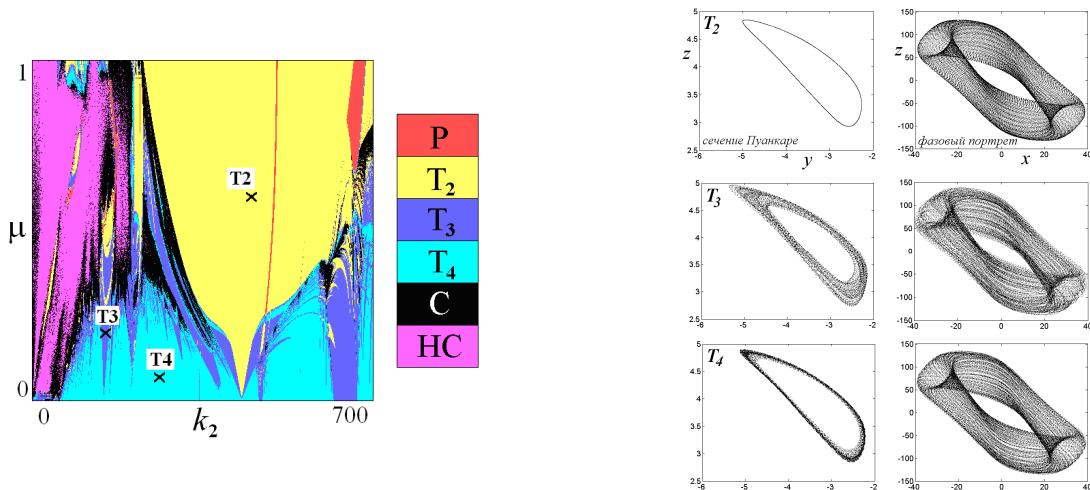


Рис. 3. Карта ляпуновских показателей модели (2), $a = 35, c = 25, d = 5, e = 35, k_1 = 430, b_1 = 12$
 Параметры k_2, b_2 меняются вдоль маршрута 1 на рис. 2а. Справа – сечения Пуанкаре
 и фазовые портреты в выделенных точках на ляпуновской карте

При малой величине связи для модели (2) естественно ожидать возникновения четырехчастотного тора, что подтверждает численное исследование. На карте выделяется также обширная область двухчастотных торов, имеющая форму остроконечного языка, касающегося линии нулевой связи. Точка «контакта» отвечает условию $k_2 = k_1, b_2 = b_1$, когда системы являются идентичными и их «частотные параметры» совпадают. Также наблюдаются узкие языки T_3 -торов, погруженные в область T_4 -торов. На рис. 3 справа показаны фазовые портреты и сечения Пуанкаре в точках существования T_2, T_3 и T_4 торов. Наблюдаются также очень узкие полосы периодических режимов.

Отметим, что внутри области двухчастотных торов возможна фазовая синхронизация – своего рода *синхронная квазипериодичность*. Иллюстрации такого режима даны на рис. 4. Показаны фазовые портреты обеих парциальных систем модели (2), для которых возможно определить фазу колебаний (рис. 4а, б). Рис. 4в представляет собой зависимость разности фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ от времени t ; фазы вычислены по формуле $\varphi_1 = \arctan(y_1/x_1), \varphi_2 = \arctan(y_2/x_2)$. Видно, что разность $\varphi_1 - \varphi_2$ изменяется во времени в ограниченном интервале, что говорит о фазовой синхронизации. Еще одним доказательством существования фазовой синхронизации является специфический вид фазовой диаграммы на рис. 4г. На рис. 4д можно видеть зависимость амплитуд первой и второй подсистемы R_1 и R_2 от времени.

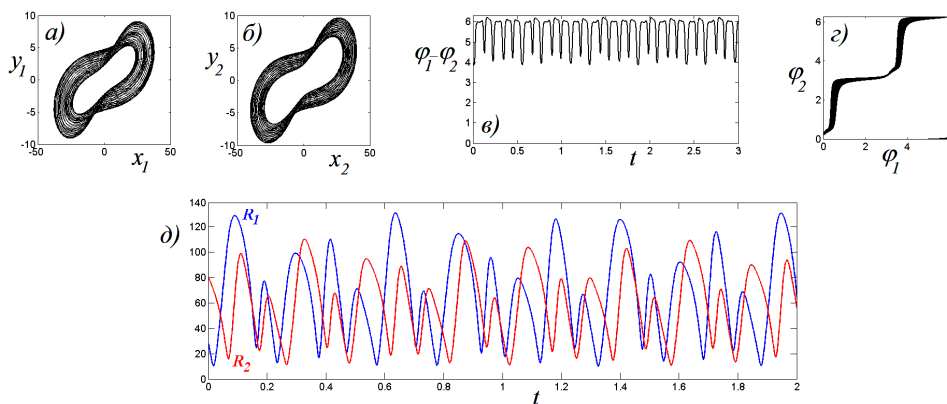


Рис. 4. Иллюстрация синхронной квазипериодичности на базе двухчастотных колебаний
 внутри области T_2 ; $k_2 = 320, \mu = 0.7$. а, б – фазовые портреты с хорошо определенной фазой
 для обеих подсистем модели (2), в – зависимость разности фаз от времени,
 г – фазовая диаграмма, д – зависимость амплитуд подсистем от времени

Второй сценарий. Рассмотрим теперь случай, когда в первой подсистеме наблюдается гиперхаос, чему на рис. 2а отвечает точка на линии белого цвета. Во второй подсистеме изменяем параметры вдоль маршрута 1. Таким образом, это задача о взаимодействии гиперхаоса с квазипериодичностью. На карте рис. 5 можно видеть, что доминирует гиперхаос с двумя положительными показателями Ляпунова; однако при увеличении связи возникает достаточно обширная область двухчастотной квазипериодичности.

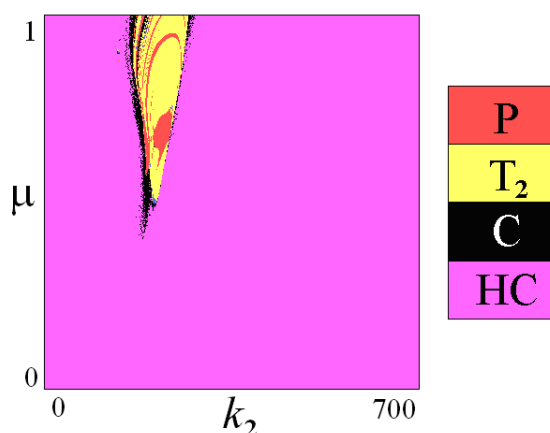


Рис. 5. Карта ляпуновских показателей для модели (2), $a = 35, c = 25, d = 5, e = 35, k_1 = 430, b_1 = 12$. Параметры k_2, b_2 меняются вдоль маршрута 1 на рис. 2а. Справа от рисунка введены обозначения HC_3 и HC_4 – режимы гиперхаоса с тремя и четырьмя положительными ляпуновскими показателями

Третий сценарий. Теперь во второй подсистеме варьируем параметры вдоль маршрута 2 на рис. 2а, причем первая парциальная система генерирует гиперхаотические колебания, чему отвечает точка на этой линии. Таким образом, это задача о взаимодействии подсистем с гиперхаосом. Поскольку обе подсистемы имеют в своем ляпуновском спектре по два положительных показателя, логично ожидать на ляпуновской карте наличие области с четырьмя положительными показателями Ляпунова. Это подтверждает рис. 6, на котором обозначены режимы с двумя, тремя и четырьмя положительными ляпуновскими показателями. Замечательно, однако, что при большой связи не только понижается число положительных ляпуновских показателей, но возникают (хотя и очень узкие) области двухчастотной квазипериодичности. Таким образом, взаимодействие гиперхаотических подсистем может приводить к квазипериодичности.

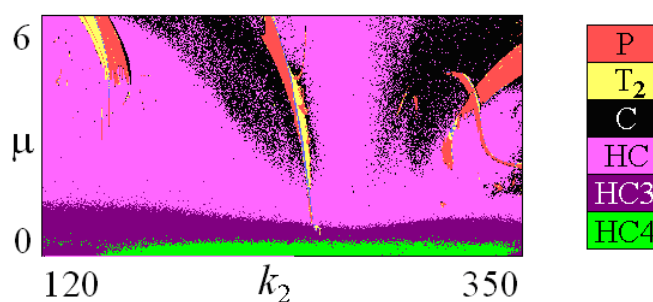


Рис. 6. Карта ляпуновских показателей для модели (2), $a = 35, c = 25, d = 5, e = 35, k_1 = 270, b_1 = 9$. Параметры k_2, b_2 меняются вдоль маршрута 2 на рис. 2а. Справа от рисунка введены обозначения HC_3 и HC_4 - режимы гиперхаоса с тремя и четырьмя положительными ляпуновскими показателями

Рис. 7 представляет собой график первых четырех ляпуновских показателей в случае, когда мы движемся по линии $k_2 = const$. Интересным моментом является заметное изменение изрезанности графиков по сравнению с рис. 1. Таким образом, возникающий при взаимодействии подсистем гиперхаос является достаточно *грубым*, т.е. слабо зависящим от параметров. Это может быть важным для приложений.

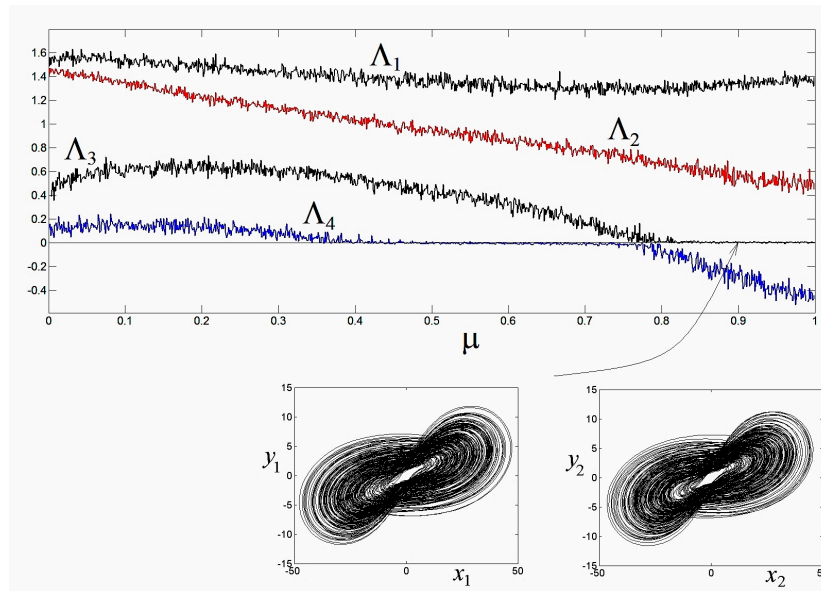


Рис. 7. График старших ляпуновских показателей, получающийся при движении вдоль прямой $k_2 = 285$ на рис. 6. Показаны фазовые портреты при $\mu = 0.9$

Заключение. В работе рассмотрены задачи о взаимодействии подсистем, которые в автономном режиме могут демонстрировать квазипериодичность и гиперхаос. Для связанных подсистем с автономной квазипериодичностью обнаружен режим синхронной квазипериодичности. Одним из интересных результатов является возникновение квазипериодических колебаний для взаимодействующих гиперхаотических систем.

Работа поддержана грантом Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-1726.2014.2 и РФФИ (проект 14-02-00085).

ЛИТЕРАТУРА

1. Пиковский А. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление / А. Пиковский, М. Розенблум, Ю. Куртс. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
2. Chen Z. A novel hyperchaos system only with one equilibrium / Z. Chen, Y. Yang, G. Qi, Z. Yuan // Physics Letters A. 2007. Vol. 360. P. 696-701.
3. Кузнецов А.П. Автономный генератор квазипериодических колебаний. / А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.В. Станкевич // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. Т. 18. 2010. № 2. С. 51-61.
4. Анищенко В.С. Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора / В.С. Анищенко, С.М. Николаев // Письма в ЖТФ. Т. 31. 2005. №. 19. С. 88-94.
5. Метод карт ляпуновских показателей: Иллюстрации в теории связанных автоколебательных систем / В.М. Дорошенко, Ю.П. Емельянова, А.П. Кузнецов, Ю.В. Седова // Вестник СГТУ. 2014. № 1 (74). С. 12-22.
6. Кузнецов С.П. Динамический хаос / С.П. Кузнецов. М.: Физматлит, 2006. 356 с.

Кузнецов Александр Петрович – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН

Aleksandr P. Kuznetsov – Dr. Sc., Professor, Leading Researcher: Kotel'nikov's Institute of Radio Engineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences (Saratov Branch)

Седова Юлия Викторовна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН

Yulia V. Sedova – Ph.D., Senior Researcher: Kotel'nikov's Institute of Radio Engineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences (Saratov Branch)