



УДК: 537.86

MSC 2010: 70K43, 65P20, 65P30, 34D08

## Динамика связанных хаотических осцилляторов: от хаоса к квазипериодичности

А. П. Кузнецов, Н. А. Мигунова,  
И. Р. Сатаев, Ю. В. Седова, Л. В. Тюрюкина

Рассматриваются ансамбли из нескольких хаотических осцилляторов Рёсслера. Показано, что типичным феноменом для таких систем является возникновение инвариантных торов разной и достаточно высокой размерности. Продемонстрирована возможность квазипериодической бифуркации Хопфа и каскада таких бифуркаций на базе торов возрастающей размерности. Найдены области существования резонансных торов, границы которых отвечают седло-узловым бифуркациям. Внутри областей резонансных режимов наблюдаются бифуркации удвоения торов и их разрушение.

Ключевые слова: хаос, квазипериодические колебания, инвариантные торы, ляпуновские показатели, бифуркации

---

Получено 10 сентября 2014 года

После доработки 10 октября 2014 года

---

Работа поддержана грантом Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-1726.2014.2 и РФФИ (проект 14-02-00085).

---

Кузнецов Александр Петрович

[arkuz@rambler.ru](mailto:arkuz@rambler.ru)

Тюрюкина Людмила Владимировна

[lvtur@rambler.ru](mailto:lvtur@rambler.ru)

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН

410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

Мигунова Наталья Александровна

[migunovanatasha@mail.ru](mailto:migunovanatasha@mail.ru)

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Сатаев Игорь Рустамович

[sataevir@rambler.ru](mailto:sataevir@rambler.ru)

Седова Юлия Викторовна

[sedovayv@rambler.ru](mailto:sedovayv@rambler.ru)

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН

410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

## 1. Введение

Задача о взаимодействии осцилляторов различной природы привлекает внимание исследователей в разных областях физики, химии, биологии [1–8]. В простейшем случае индивидуальные осцилляторы демонстрируют периодические колебания. Их взаимодействие может приводить или к синхронизации, или к квазипериодическим колебаниям. При возрастании числа осцилляторов в системе возрастает и число возможных несоизмеримых частот. В результате могут возникать многочастотные квазипериодические колебания, которым отвечают инвариантные торы все более высокой размерности [9–15]. При увеличении связи торы могут разрушаться с образованием хаоса. В настоящем сообщении мы обсудим некоторую альтернативную ситуацию. Мы рассмотрим систему из небольшого числа связанных хаотических осцилляторов и продемонстрируем возникновение инвариантных торов разной размерности при возрастании связи.

На возможность квазипериодических колебаний в связанных системах с хаосом указывалось в работах [16–18]. В статье [16] обсуждалась проблема влияния связи на амплитудную динамику двух связанных хаотических осцилляторов Рёсслера, и авторы обратили внимание на возможность двухчастотной квазипериодичности, однако подробное рассмотрение не было проведено. В работах [17, 18] исследовалось кольцо из трех однонаправленно связанных идентичных систем Лоренца. Были обнаружены режимы не только двух-, но и трехчастотной квазипериодичности. Авторы ограничились однопараметрическим анализом. При этом трехчастотные торы зафиксированы в очень узкой области изменения параметра (одна тысячная). Появление новой частоты объяснялось возможностью вращательного движения в системе и высокой степенью ее симметрии, обусловленной идентичностью взаимодействующих подсистем.

В этой статье будут использованы модели в виде цепочек и сетей из небольшого числа хаотических осцилляторов Рёсслера. Принципиальной является неидентичность осцилляторов по частотному параметру. Как известно, для двух таких осцилляторов возможны как синхронные, так и асинхронные хаотические режимы [19–21]. В работах [19, 21] рассмотрено примерное расположение областей этих режимов на плоскости параметров «частотная расстройка – величина связи». На самом деле эта плоскость при детальном анализе выявляет достаточно сложное устройство. Увеличение числа осцилляторов значительно обогащает картину и еще более усложняет устройство плоскости параметров. Соответствующий анализ и является предметом настоящего сообщения. Для полноты картины мы начнем со случая двух осцилляторов, затем обсудим цепочку из трех осцилляторов, а далее перейдем к сети из четырех и пяти осцилляторов. При увеличении числа осцилляторов возрастает многообразие возможных типов режимов в системе. Удобным инструментом соответствующего исследования является двухпараметрический ляпуновский анализ [12–15, 22, 23]. Такой анализ позволяет выявить на плоскости параметров квазипериодические режимы разной размерности, а также гиперхаоса с разным числом ляпуновских показателей. Еще один вопрос, который мы обсудим, — это вопрос о возможном типе бифуркаций инвариантных торов. Мы обнаруживаем квазипериодические бифуркации Хопфа, которые отвечают мягкому возникновению тора большей размерности [24]. Возможны также седло-узловые бифуркации, которые достаточно типичны при возникновении резонансных торов на поверхности тора более высокой размерности.

## 2. Два связанных хаотических осциллятора

Рассмотрим сначала систему двух связанных осцилляторов Рёсслера [19–21]:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -(1 - \Delta)y_1 - z_1, \\
 \dot{y}_1 &= (1 - \Delta)x_1 + py_1 + \mu(y_2 - y_1), \\
 \dot{z}_1 &= q + (x_1 - r)z_1, \\
 \dot{x}_2 &= -(1 + \Delta)y_2 - z_2, \\
 \dot{y}_2 &= (1 + \Delta)x_2 + py_2 + \mu(y_1 - y_2), \\
 \dot{z}_2 &= q + (x_2 - r)z_2.
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Здесь  $x, y, z$  — динамические переменные,  $\Delta$  — параметр частотной расстройки. Фиксируем далее значения параметров  $p = 0.15$ ,  $q = 0.4$ ,  $r = 8.5$ , которые отвечают хаотическому режиму в индивидуальных подсистемах.

Выясним локализацию режимов разных типов на плоскости параметров «частотная расстройка–величина связи»  $(\Delta, \mu)$ . Для этого будем вычислять в каждой точке плоскости параметров спектр ляпуновских показателей системы (2.1), а затем окрасим эту плоскость в разные цвета в соответствии со структурой спектра [12–15, 23]. В результате визуализируются следующие типы режимов: P — периодический режим (один нулевой показатель), T2 — двухчастотная квазипериодичность (два нулевых показателя), C — хаос (один положительный показатель), HC — гиперхаос (два положительных показателя).

Полученная карта режимов на плоскости  $(\Delta, \mu)$  показана на рисунке 1.<sup>1</sup> Область периодических режимов P отвечает полной синхронизации осцилляторов. Для больших значений расстройки возникают колебания с предельным циклом, которому отвечает неподвижная точка в сечении Пуанкаре (период 1). При уменьшении расстройки  $\Delta$  этот цикл претерпевает удвоения периода (период 2, 4, и т. д.), а затем возникает синхронный хаос. Правее этих областей располагается область гибели колебаний AD («amplitude death»), которой отвечает подавление автоколебаний за счет диссипативного характера связи. В этом случае все ляпуновские показатели отрицательные.

Ниже области AD располагаются несинхронные режимы. При малой связи это режимы гиперхаоса, поскольку при выключенной связи система распадается на два хаотических осциллятора, каждый со своим положительным показателем Ляпунова. С ростом связи гиперхаос превращается в обычный хаос. При еще большем увеличении связи возникает режим двухчастотной квазипериодичности. Таким образом, связь подавляет хаотическую компоненту, но сохраняет классические биения, характерные для взаимодействия автоколебательных систем с предельными циклами.

На рисунке 2 даны портреты аттракторов в сечении Пуанкаре при увеличении связи.<sup>2</sup> При этом наблюдается переход от гиперхаоса HC к хаосу C с последующим возникновением инвариантной кривой, отвечающей двухчастотной квазипериодичности T2.

Таким образом, в динамике хаотических осцилляторов присутствует некоторая «автоколебательная компонента», которая может проявиться при введении диссипативной связи

<sup>1</sup>Рисунок 1 целесообразно сравнить с рисунком 2 из [20].

<sup>2</sup>Здесь и далее сечение Пуанкаре отвечает пересечению фазовыми траекториями поверхности  $y_1 = 0$ ,  $x_1 < 0$ .

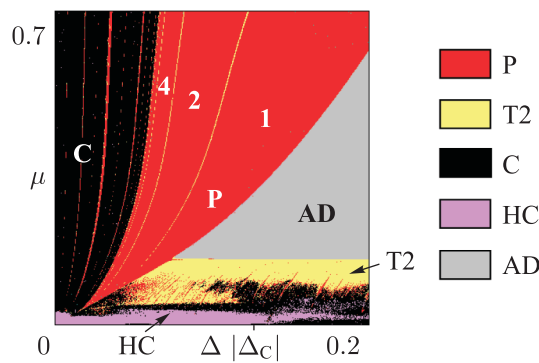


Рис. 1. Карта ляпуновских показателей системы (2.1). Условные обозначения объяснены в тексте и представлены справа от рисунка. Цифры отвечают некоторым основным периодам системы в режиме регулярных колебаний (речь идет о периодах, определенных как число шагов отображения Пуанкаре, ведущее к повторению состояния системы).

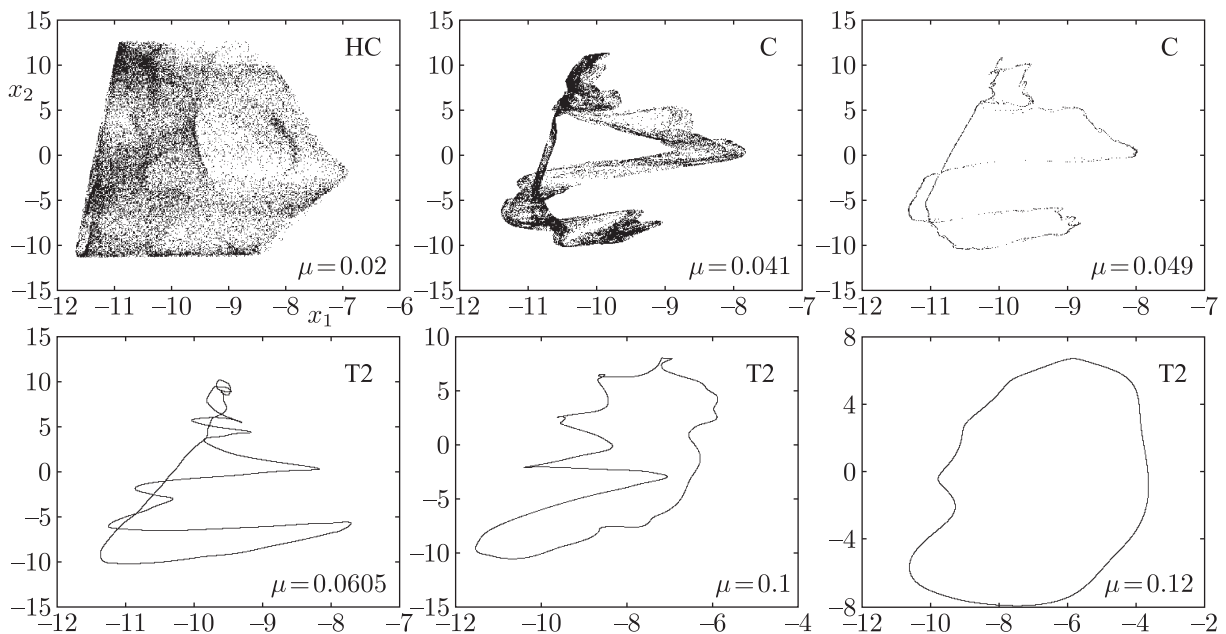


Рис. 2. Эволюция аттрактора системы (2.1) в сечении Пуанкаре при увеличении связи;  $\Delta = 0.085$ .

и инициировать квазипериодические колебания. Можно ожидать, что эта компонента проявится и при увеличении числа осцилляторов. Чтобы показать это, обратимся к системе трех связанных в цепочку хаотических осцилляторов.

Предварительно отметим еще один момент. При выключенной связи уравнения индивидуальных подсистем не являются строго уравнениями Рёсслера, а отличаются фактором  $\Delta$ . Этот фактор отвечает за частоту колебаний, но не только: при его вариации на самом деле меняется и степень возбуждения [20]. Это иллюстрирует бифуркационное дерево на рисунке 3 для индивидуального осциллятора. Можно видеть, что при  $\Delta_C < -0.13$  происходит исчезновение хаоса. Для связанных осцилляторов (2.1) следствием этого является смена гиперхаоса обычным хаосом (рис. 1) при  $\Delta > |\Delta_C|$ , поскольку во второй подсистеме колебания становятся регулярными. Однако область двухчастотной квазипериодичности сохраняется и слабо зависит от этого эффекта. Отметим, что наличие периодических окон для хаоти-

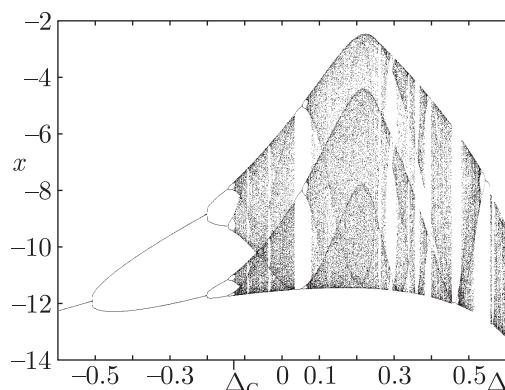


Рис. 3. Бифуркационное дерево индивидуального осциллятора в зависимости от параметра  $\Delta$  для  $r = 8.5$ .

ческих осцилляторов является типичным феноменом, и проявляется в динамике ансамблей связанных неидентичных осцилляторов. Далее мы вернемся к этому свойству при обсуждении сети из нескольких элементов.

### 3. Три хаотических осциллятора Рёсслера

Обратимся теперь к системе из трех связанных в цепочку осцилляторов Рёсслера:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -y_1 - z_1, \\
 \dot{y}_1 &= x_1 + py_1 + \mu(y_2 - y_1), \\
 \dot{z}_1 &= q + (x_1 - r)z_1, \\
 \dot{x}_2 &= -(1 - \Delta_1)y_2 - z_2, \\
 \dot{y}_2 &= (1 - \Delta_1)x_2 + py_2 + \mu(y_1 + y_3 - 2y_2), \\
 \dot{z}_2 &= q + (x_2 - r)z_2, \\
 \dot{x}_3 &= -(1 - \Delta_2)y_3 - z_3, \\
 \dot{y}_3 &= (1 - \Delta_2)x_3 + py_3 + \mu(y_2 - y_3), \\
 \dot{z}_3 &= q + (x_3 - r)z_3.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  — частотные расстройки второго и третьего осцилляторов относительно первого.

На рисунке 4 показан график зависимости четырех старших ляпуновских показателей системы (3.1) от параметра связи для  $\Delta_1 = 0.56$ ,  $\Delta_2 = 0.05$ . Можно видеть, что теперь наряду с двухчастотными режимами Т2 становятся возможными трехчастотные режимы Т3 уже с тремя нулевыми показателями Ляпунова.

При уменьшении связи на графике наблюдается следующая последовательность бифуркаций. Сначала в результате бифуркации Андронова–Хопфа (АН) рождается устойчивый предельный цикл, и появляется один нулевой показатель  $\Lambda_1 = 0$ . Затем происходит бифуркация Неймарка–Сакера (NS), и мягким образом возникает двухчастотный тор, так что теперь  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$ . При дальнейшем уменьшении связи наблюдается возникновение

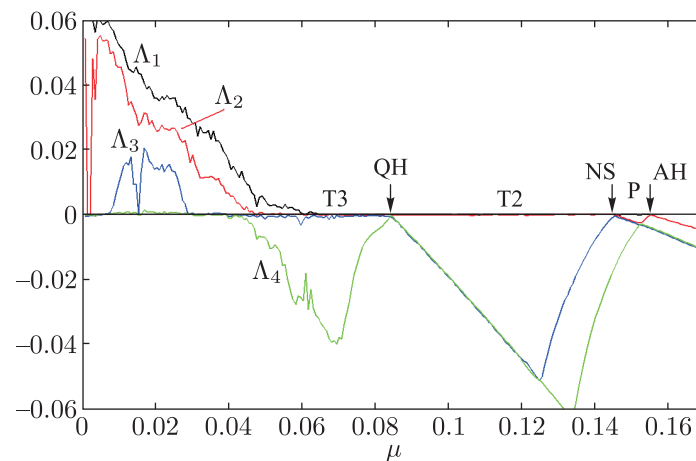


Рис. 4. Зависимость старших показателей Ляпунова трех связанных хаотических осцилляторов (3.1) от параметра связи: АН — бифуркация Андронова–Хопфа, NS — бифуркация Неймарка–Сакера, QH — квазипериодическая бифуркация Хопфа;  $\Delta_1 = 0.56$ ,  $\Delta_2 = 0.05$ .

трехчастотного тора с тремя нулевыми показателями.<sup>3</sup> Это происходит в результате квазипериодической бифуркации Хопфа (QH) [25]. Этот факт хорошо идентифицируется с помощью графика на рисунке 4: до точки бифуркации третий и четвертый показатели равны,  $\Lambda_3 = \Lambda_4$ . В точке QH третий показатель становится нулевым, так что теперь и  $\Lambda_3 = 0$ , а четвертый снова уходит в отрицательную область. Это и есть характерный признак данной бифуркации, отвечающей за мягкое возникновение трехчастотного тора [25].

Двухпараметрический ляпуновский анализ выявляет картину, показанную на рисунке 5. Можно видеть, что наряду с хаотическими и гиперхаотическими режимами области двухчастотной и трехчастотной квазипериодичности оказываются достаточно обширными.

Примеры портретов аттракторов в сечении Пуанкаре приведены на рисунке 6 в порядке увеличения связи. Обсудим их, начиная со случая большой связи. На рисунке 6а представлен двухчастотный тор T2, сечение Пуанкаре которого дает инвариантную кривую, близкую по форме к окружности. При уменьшении связи из этой инвариантной кривой мягким образом возникает трехчастотный тор T3, показанный на рисунке 6б. При дальнейшем уменьшении связи возникают инвариантные кривые, отвечающие резонансным двухчастотным торам. Пример приведен на рисунке 6г. Если немного (всего на 0.0001) уменьшить величину связи, то скачком возникает трехчастотный тор. На его поверхности (рис. 6ф) хорошо видно сгущение траекторий, из которого и возник резонансный тор. Это происходит в результате жесткой седло-узловой бифуркации инвариантных торов.

При дальнейшем уменьшении связи (рис. 6д) можно видеть инвариантную кривую очень сложной формы, которая отвечает одному из возможных резонансных двухчастотных торов. Отметим, что число резонансных окон достаточно велико.<sup>4</sup> Наконец, при малой связи торы разрушаются с возникновением хаоса, а затем гиперхаоса (рис. 6а–с).

На рисунке 7 показаны фурье-спектры колебаний трех связанных хаотических осцилляторов в режиме квазипериодических колебаний, при этом значения параметров отвечают

<sup>3</sup>Точность определения нулевых показателей в численных расчетах составляет до  $10^{-7}$ .

<sup>4</sup>Число таких окон значительно превышает их число для случая взаимодействия трех осцилляторов (3.1) в случае регулярных колебаний в подсистемах. В этом случае «визуально» трехчастотная область практически не содержит языков двухчастотных режимов.

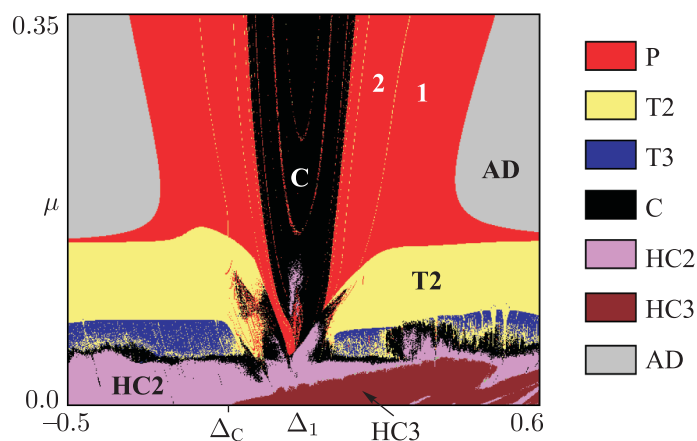


Рис. 5. Карта ляпуновских показателей трех связанных хаотических осцилляторов Рёсслера (2.1). Обозначение TN отвечает квазипериодичности с  $N$  несоизмеримыми частотами, HCN отвечает гиперхаосу с  $N$  положительными ляпуновскими показателями;  $p = 0.15$ ,  $q = 0.4$ ,  $r = 2.5$ ,  $\Delta_2 = 0.05$ .

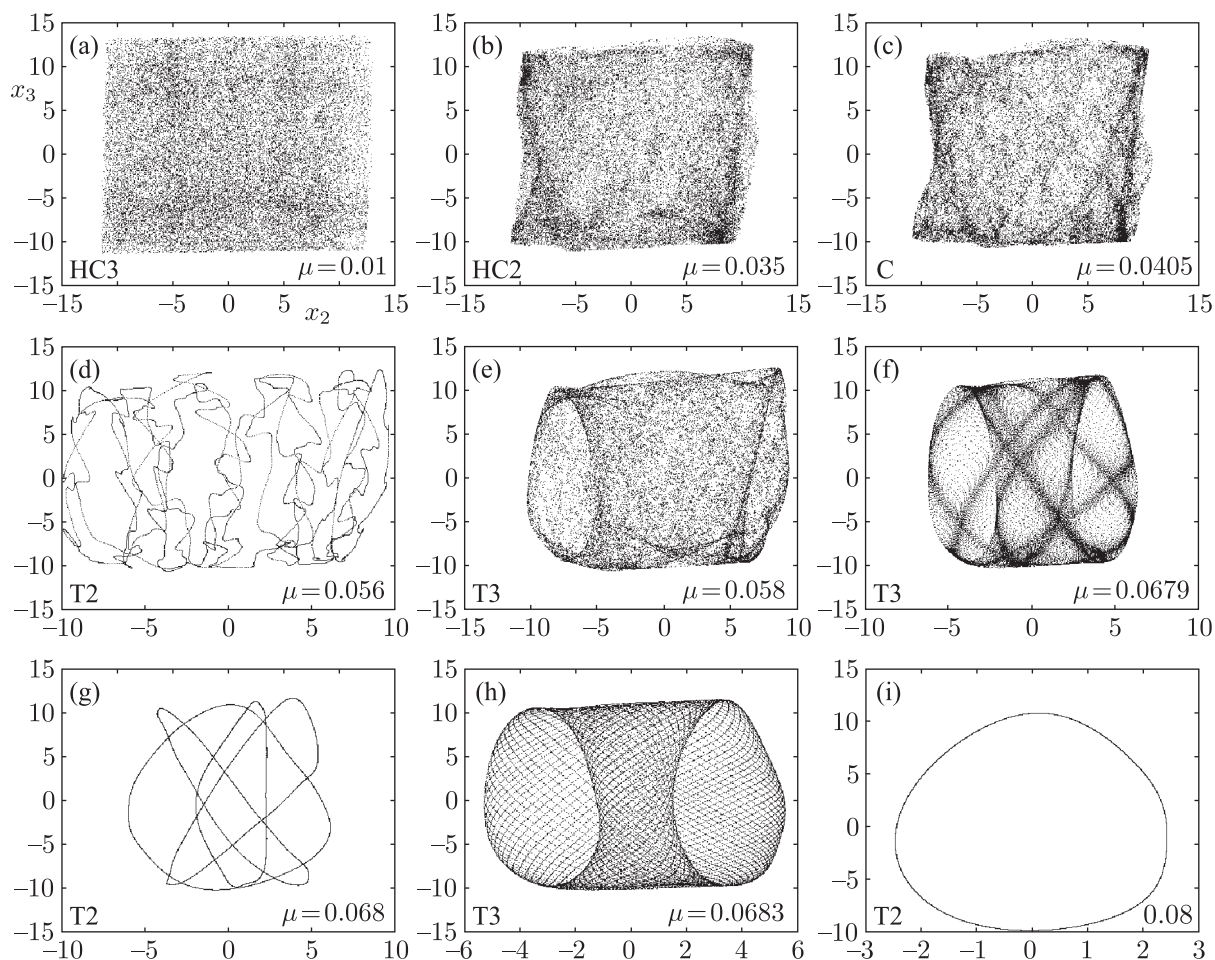


Рис. 6. Портреты аттракторов в сечении Пуанкаре для трех связанных хаотических осцилляторов Рёсслера (2.1);  $\Delta_1 = 0.19$ ,  $\Delta_2 = 0.05$ .

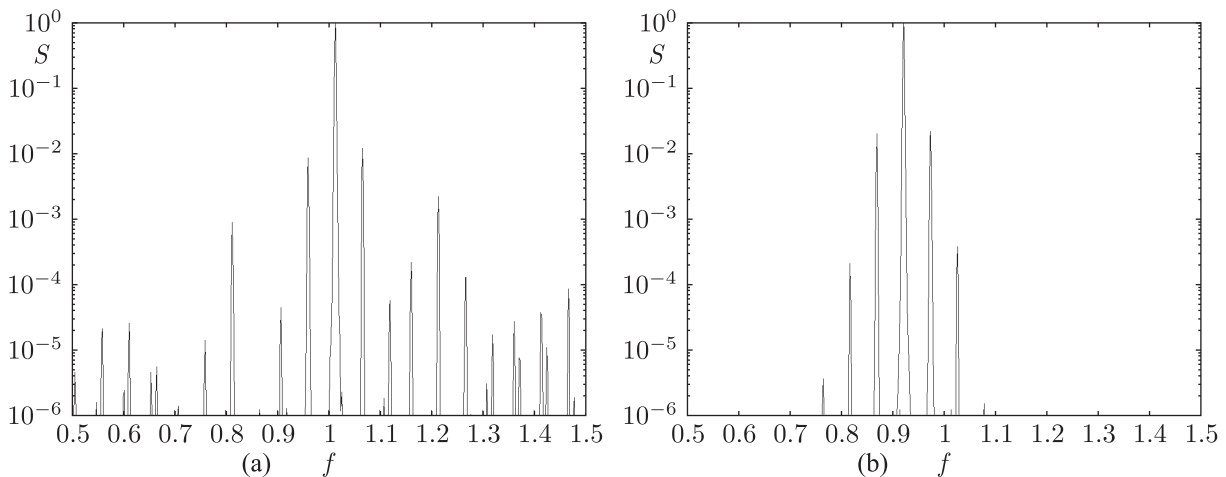


Рис. 7. Спектры колебаний трех связанных хаотических осцилляторов Рёсслера (2.1) в квазипериодических режимах колебаний: а)  $\mu = 0.0683$ , б)  $\mu = 0.08$ .

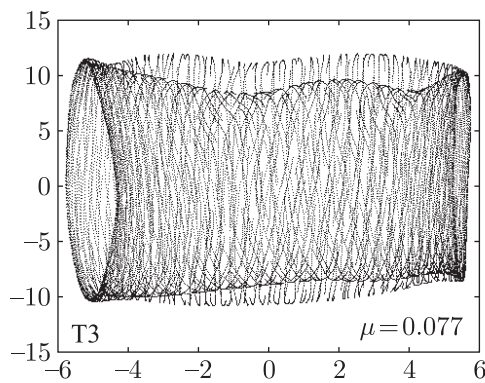


Рис. 8. Сечение Пуанкаре трехчастотного тора системы (2.1);  $\Delta_1 = 0.56$ ,  $\Delta_2 = 0.05$ .

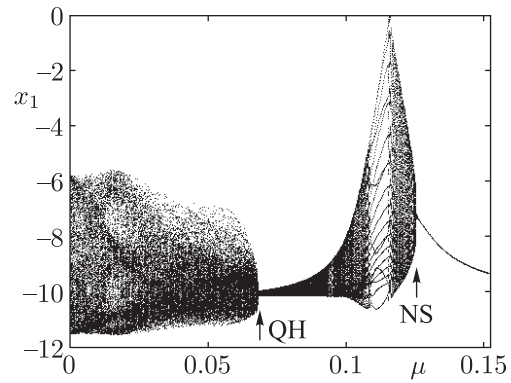


Рис. 9. Бифуркационное дерево для трех связанных хаотических осцилляторов Рёсслера (2.1);  $\Delta_1 = 0.19$ ,  $\Delta_2 = 0.05$ .

портретам на рисунках 6b и 6i. На рисунке 7a представлен спектр при меньшей связи в режиме трехчастотной квазипериодичности. Рисунок 7b отвечает большей связи и относится к двухчастотным колебаниям. Можно видеть характерное устройство спектров, свойственных квазипериодическим колебаниям с соответствующим числом несоизмеримых частот.

При увеличении частотного параметра  $\Delta_1$  картина, в общем, сохраняется, однако частоты осцилляторов отличаются все сильнее. Этот факт проявляется в устройстве сечения Пуанкаре трехчастотного тора, что иллюстрирует рисунок 8.

Рисунок 9 демонстрирует бифуркационное дерево: зависимость от параметра связи множества значений, которые принимает переменная  $x_1$  на аттракторе в выбранном сечении Пуанкаре. Наблюдаемая картина иллюстрирует бифуркации, отвечающие за возникновение инвариантных торов разной размерности. В точке NS происходит бифуркация Неймарка–Сакера рождения двухчастотного тора. В этой точке единственная «ветка», отвечающая предельному циклу, расширяется так, что множество точек занимает при данной связи конечный интервал значений переменной. В области меньших величин связи хорошо видны также окна резонансных предельных циклов. В точке QH дерево вновь резко



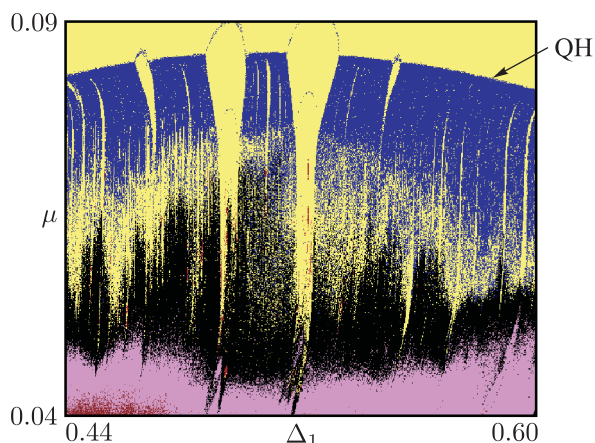


Рис. 10. Увеличенный фрагмент карты ляпуновских показателей (см. рис. 5).

расширяется. Это точка бифуркации квазипериодической бифуркации Хопфа [25], когда из двухчастотного тора мягким образом возникает трехчастотный тор.

Обсудим переходную область от хаоса к трех- и двухчастотным торах на плоскости параметров. Увеличенный фрагмент карты ляпуновских показателей показан на рисунке 10. На этом рисунке можно видеть встроенные в трехчастотную область языки резонансных двухчастотных торов. Их основания, однако, погружены уже в область хаоса и оказываются разрушенными.

Примеры портретов аттракторов в сечении Пуанкаре внутри резонансного языка даны на рисунке 11. В области выше линии квазипериодической бифуркации Хопфа (QH) инвариантная кривая имеет простейшую форму, близкую к окружности (рис. 11а). Затем форма усложняется (рис. 11б). При уменьшении связи внутри языка можно наблюдать бифуркацию удвоения инвариантной кривой (рис. 11с). Отметим, что линия этой бифуркации отчасти заметна на карте в виде набора точек синего цвета<sup>5</sup> внутри языка, поскольку в момент бифуркации один из показателей Ляпунова обращается в нуль. При дальнейшем уменьшении связи двухчастотный инвариантный тор разрушается, что иллюстрирует рисунок 11д.

#### 4. Сеть из четырех хаотических осцилляторов Рёсслера

Перейдем теперь к более сложной системе — сети из четырех хаотических осцилляторов:

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= - \left( 1 + \frac{n-1}{3} \Delta \right) y_n - z_n, \\ \dot{y}_n &= \left( 1 + \frac{n-1}{3} \Delta \right) x_n + p y_n + \frac{\mu}{3} \sum_{i=1}^4 (y_i - y_n), \\ \dot{z}_n &= q + (x_n - r_n) z_n. \end{aligned} \quad (4.1)$$

В рассматриваемом случае спектр индивидуальных осцилляторов по частотному параметру выбран эквидистантным, причем при увеличении  $\Delta$  одновременно возрастает расстройка всех осцилляторов.

<sup>5</sup>Для читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — [http://nd.ics.org.ru/archive\\_nd/tom-10-4/](http://nd.ics.org.ru/archive_nd/tom-10-4/)

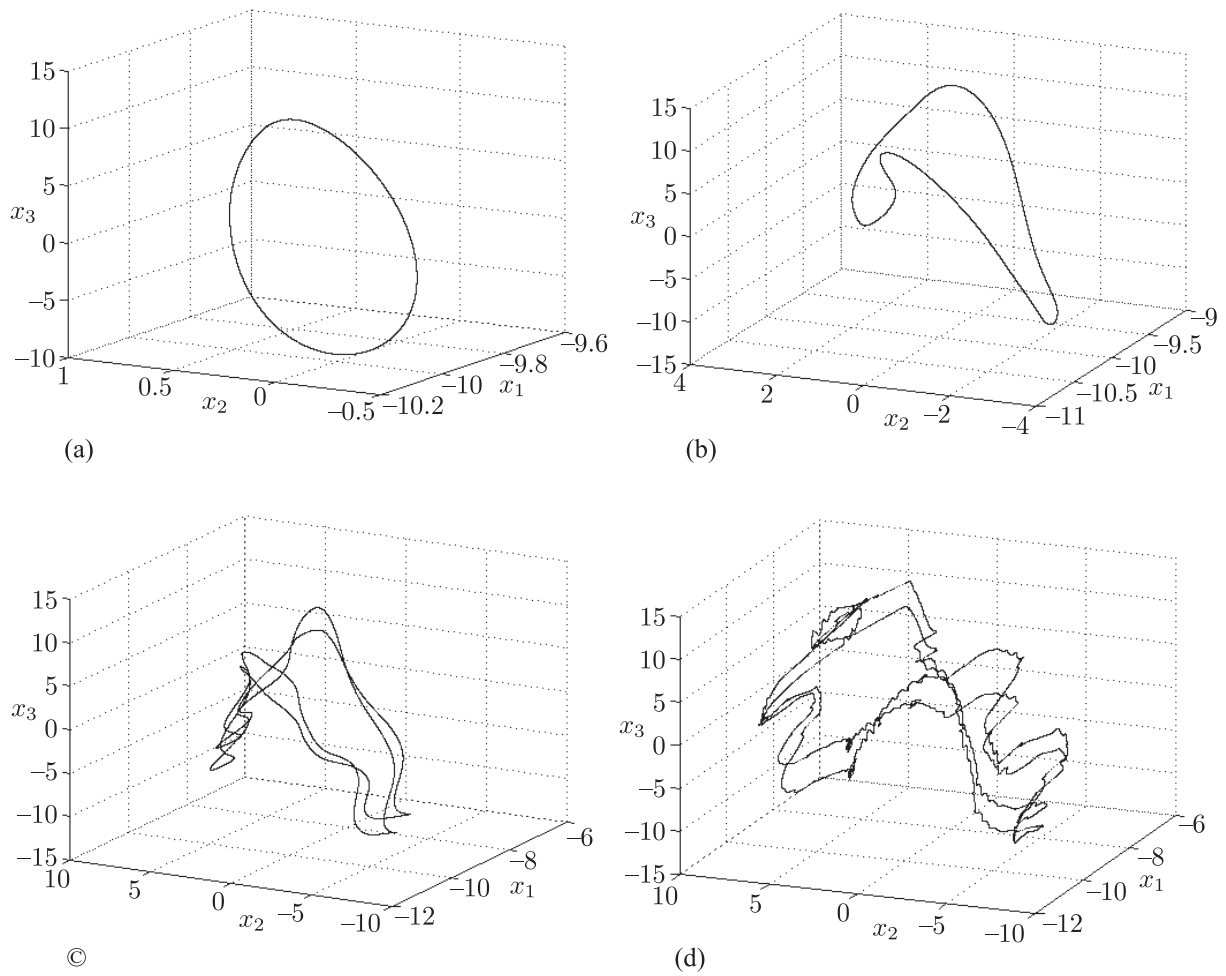


Рис. 11. Портреты в сечении Пуанкаре системы (2.1) в области резонансного двухчастотного тора: а)  $\Delta_1 = 0.514$ ,  $\mu = 0.089$ , б)  $\Delta_1 = 0.522$ ,  $\mu = 0.084$ , в)  $\Delta_1 = 0.522$ ,  $\mu = 0.076$ , д)  $\Delta_1 = 0.52$ ,  $\mu = 0.06$ .

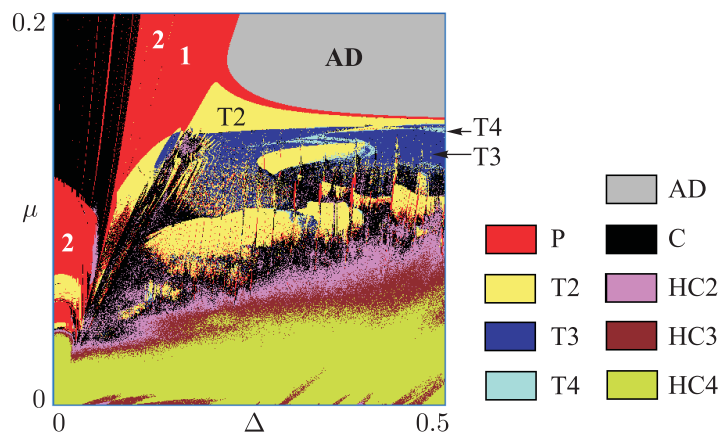


Рис. 12. Карта ляпуновских показателей сети из четырех хаотических осцилляторов (4.1);  $p = 0.15$ ,  $q = 0.4$ ,  $r = 8.5$ .

Карта ляпуновских показателей системы (4.1) показана на рисунке 12. Разными цветами обозначены периодические режимы (P), квазипериодические (T) с разным числом несоизмеримых частот, хаоса (C) и гиперхаоса (CH) с разным числом положительных показателей. Условные обозначения даны справа от рисунка.

Обсудим сначала область несинхронных режимов, которой отвечают достаточно большие частотные расстройки. При малой связи доминируют режимы гиперхаоса с четырьмя положительными ляпуновскими показателями (HC4), что совершенно естественно для системы из четырех хаотических осцилляторов. С ростом связи число положительных показателей поэтапно уменьшается, и через переход HC3 и HC2 возникает обычный хаос C. При еще большей связи наблюдается сложная картина чередования режимов разного типа, для которых вполне типичными оказываются двухчастотные торы T2 и трехчастотные торы T3.

Этот факт иллюстрирует график зависимости старших ляпуновских показателей от параметра связи для  $\Delta = 0.25$  на рисунке 13. Можно видеть возможность двухчастотного тора T2 при большой связи. Из него при уменьшении связи в результате квазипериодической бифуркации Хопфа возникает трехчастотный тор. На графике также хорошо видны окна резонансных двухчастотных торов, отмеченные стрелками. Границы этих окон отвечают седло-узловым бифуркациям торов.

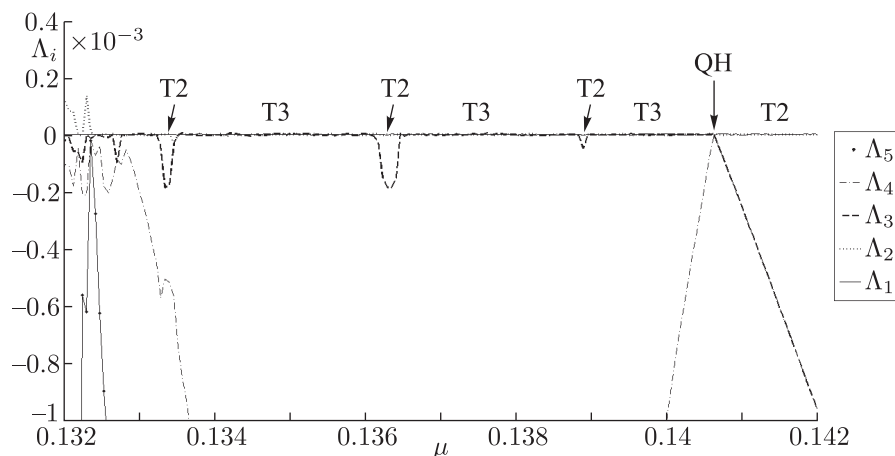


Рис. 13. Графики зависимости от параметра связи пяти старших ляпуновских показателей и характерные точки бифуркации системы четырех связанных хаотических осцилляторов Рёсслера (4.1);  $\Delta = 0.25$ .

Возможны также и четырехчастотные торы, которые, однако, все же менее типичны. Наиболее надежно они идентифицируются при большой частотной расстройке. На рисунке 14 показан соответствующий график пяти старших ляпуновских показателей для  $\Delta = 0.5$ . При большой связи устойчивым является состояние равновесия. Затем из него в результате бифуркации Андронова–Хопфа (АН) рождается устойчивый предельный цикл, который в точке бифуркации Неймарка–Сакера (NS) превращается в двухчастотный тор. Затем в точке квазипериодической бифуркации (QH1) рождается трехчастотный тор. Действительно, до точки бифуркации третий и четвертый показатель совпадают ( $\Lambda_3 = \Lambda_4$ ), и в точке бифуркации обращаются в нуль. Затем третий показатель остается нулевым, а четвертый снова становится отрицательным, что характерно для бифуркации такого типа [25]. Затем в результате аналогичной бифуркации (QH2) рождается уже четырехчастотный тор. Теперь при приближении к точке бифуркации совпадают четвертый и пятый показатели ( $\Lambda_4 = \Lambda_5$ ).

На рисунке 15 представлены фурье-спектр четвертого осциллятора и портрет четырехчастотного тора в сечении Пуанкаре в этом случае. Можно видеть, что спектр состоит из отдельных линий, причем выделяются четыре основных компонента. Остальные составляющие отвечают комбинационным частотам.

Вернемся к рисунку 14. При дальнейшем уменьшении связи происходит теперь уже седло-узловая бифуркация торов (SNT), и размерность тора понижается: возникает резонансный трехчастотный тор. В этом случае пятый ляпуновский показатель остается все время отрицательным, что и определяет другой тип бифуркации [25].

Таким образом, при больших частотных расстройках первоначальное развитие бифуркаций при уменьшении связи отвечает сценарию Ландау – Хопфа [14, 26, 27]. Затем, однако, возникает резонансный трехчастотный тор. Возникновение хаоса при еще меньших связях обусловлено разрушением этого тора.

В промежуточной области частотных расстроек ( $\Delta \approx 0.25-0.5$ ) на ляпуновской карте (см. рис. 12) также визуализируются области четырехчастотных торов. Более детально это можно увидеть на графике ляпуновских показателей (рис. 16). В этом случае происходит своего рода взаимодействие резонансов разного типа. Например, при увеличении связи на поверхности четырехчастотного тора в соответствии с графиком на рисунке 16 возникает резонансный трехчастотный тор. Однако на его поверхности, в свою очередь, возникает резонансный двухчастотный тор. Таким образом, возможна целая иерархия различных резонансов.

График на рисунке 16 выявляет также специфические режимы, которым отвечают двухчастотные торы с очень маленьким показателем Ляпунова. При этом показатель медленно уменьшается при уменьшении связи. Пример — самая левая из областей двухчастотных торов T2 на рисунке 16.

## 5. Синхронная и несинхронная квазипериодичность

Мы обсудили пока несинхронные режимы в системе, которые возникают при достаточно больших параметрах частотной расстройки  $\Delta$ . Однако и синхронные режимы системы (4.1) характеризуются новыми интересными особенностями. Для двух хаотических осцилляторов синхронный режим может быть периодическим или хаотическим [19–21]. Для системы (4.1) в области малых частотных расстроек также наблюдаются как периодические, так и хаотические режимы (рис. 12). Однако из карты (см. рис. 12) можно видеть, что на базе режима периода 2 возникает и квазипериодический режим. Это иллюстрирует рисунок 17, на котором справа показано соответствующее сечение Пуанкаре удвоенного двухчастотного тора. В то же время режим является синхронным с точки зрения фазовой динамики. Чтобы убедиться в этом, обратимся к зависимостям относительных фаз осцилляторов от времени на рисунке 3. Здесь  $\varphi_i$  — это фазы  $i$ -ых осцилляторов, определенные простым геометрическим образом [19–21]. Можно видеть, что все три относительные фазы колеблются в ограниченном диапазоне. Таким образом, все фазы захвачены. Режим в целом, однако, является квазипериодическим. Физическая природа такой синхронной квазипериодичности состоит в изменении относительных фаз с некоторым дополнительным частотным ритмом.

Для сравнения на рисунке 18 показан аналогичный график для области достаточно больших частотных расстроек  $\Delta$ . Режим в этом случае тоже квазипериодический, но взаимно захвачены фазы только первого/второго и третьего/четвертого осцилляторов. Отно-

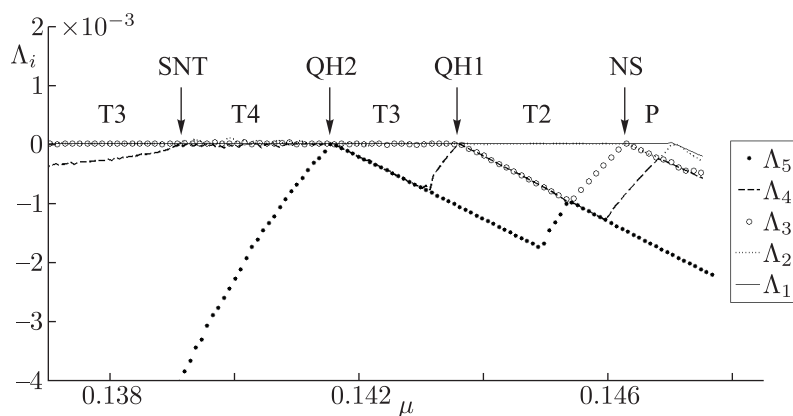


Рис. 14. Графики зависимости от параметра связи пяти старших ляпуновских показателей и характерные точки бифуркации системы четырех связанных хаотических осцилляторов Рёсслера (4.1);  $\Delta = 0.5$ .

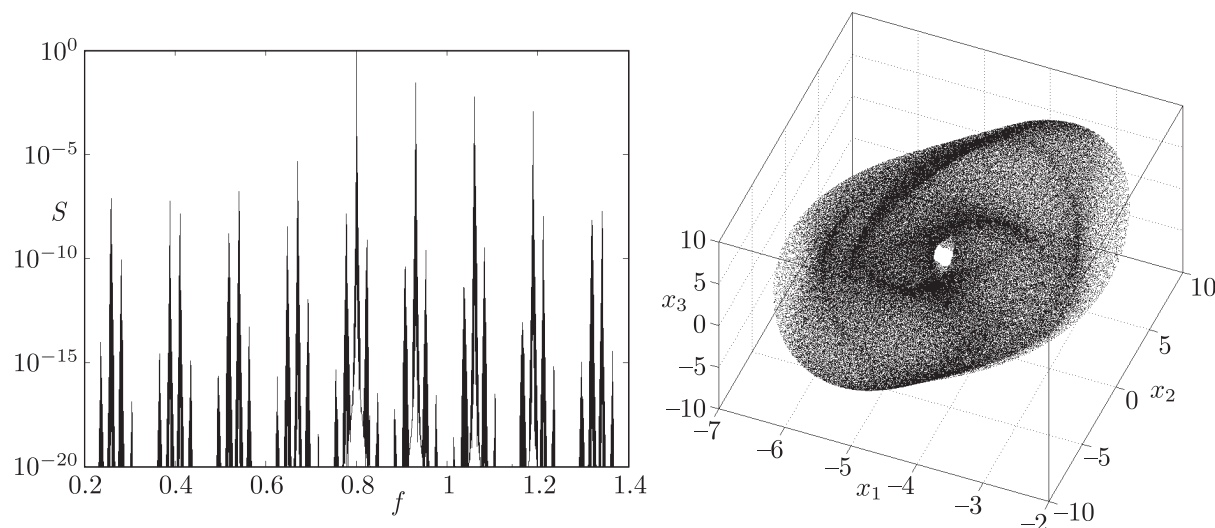


Рис. 15. Спектр колебаний и портрет в сечении Пуанкаре четырехчастотного тора системы четырех связанных хаотических осцилляторов Рёсслера (4.1);  $\Delta = 0.5, \mu = 0.14$ .

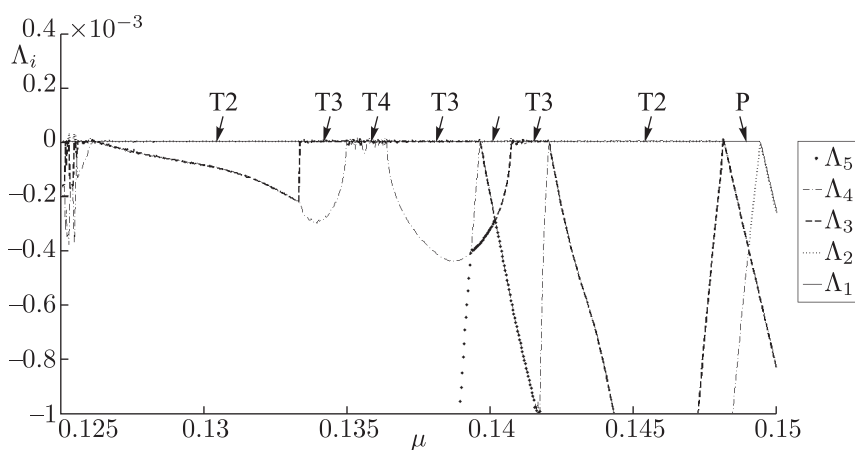


Рис. 16. Графики зависимости от параметра связи пяти старших ляпуновских показателей системы четырех связанных хаотических осцилляторов Рёсслера (4.1);  $\Delta = 0.375$ .

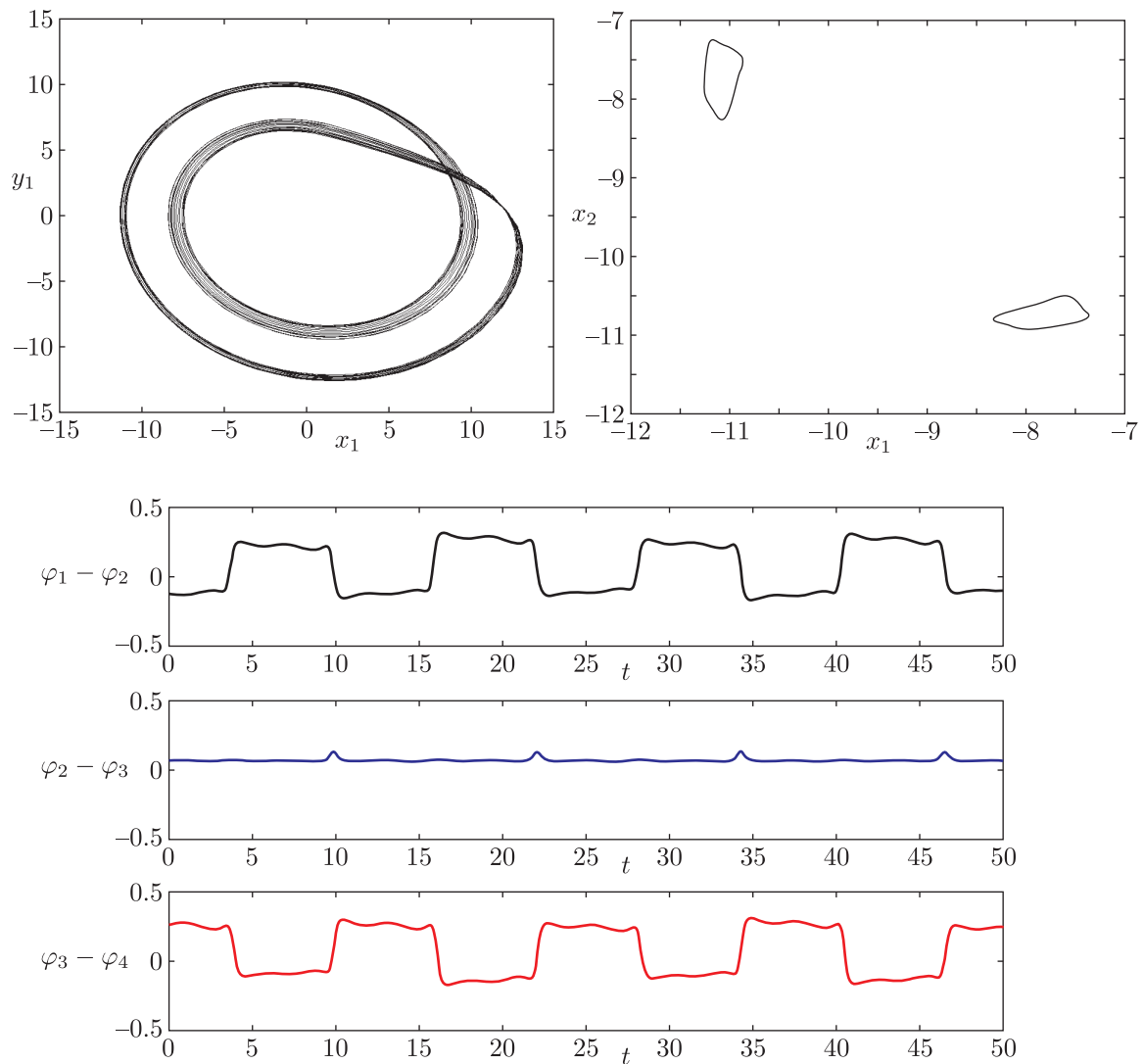


Рис. 17. Фазовый портрет, сечение Пуанкаре и графики зависимости трех относительных фаз от времени;  $\Delta_1 = 0.008$ ,  $\mu = 0.06$ .

сительная фаза второго и третьего неограниченно нарастает (или меняется во всем диапазоне от 0 до  $2\pi$ , если учесть  $2\pi$ -периодичность фазы). Чтобы отличить такой режим, его можно назвать несинхронной квазипериодичностью.

## 6. Управление грубостью хаоса за счет диссипативной связи

Как мы отмечали, для использованной формы индивидуального осциллятора Рёсслера при вариации параметра  $\Delta$  наряду с хаосом возможными являются окна периодических режимов (рис. 3). Когда имеется несколько таких осцилляторов с разными частотными параметрами, как система (4.1), то при изменении  $\Delta$  периодический режим последовательно возникает в разных осцилляторах: при очень малой связи на рисунке 12 наряду с гиперхаосом с четырьмя ляпуновскими показателями НС4 наблюдаются окна гиперхаоса НС3. Причина состоит в том, что тот или иной индивидуальный осциллятор при вариации  $\Delta$

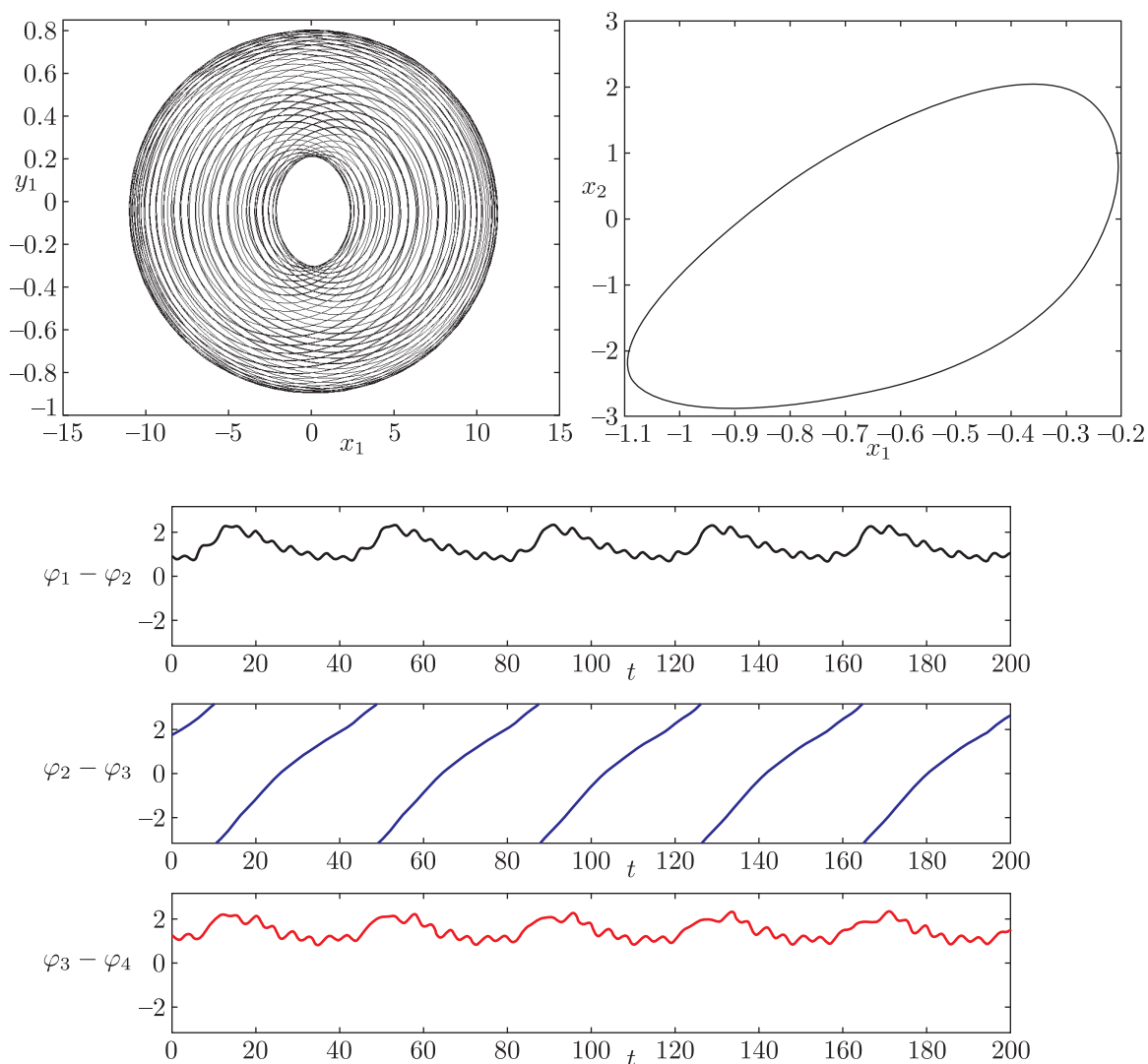


Рис. 18. Фазовый портрет, сечение Пуанкаре и графики зависимости трех относительных фаз от времени;  $\Delta_1 = 0.5$ ,  $\mu = 0.145$ .

оказывается внутри окна периодического режима. Можно видеть даже случай гиперхаоса НС2, что означает, что уже два индивидуальных осциллятора функционируют в периодическом режиме. Такая картина на самом деле достаточно типична и отвечает известному свойству негрубости хаотических систем [28]. Соответственно, графики ляпуновских показателей для негрубых систем имеют сильно изрезанный вид.

Однако, как видно из рисунка 12, указанные окна достаточно быстро исчезают с ростом связи. Поэтому интересно обратиться к графикам зависимости ляпуновских показателей от частотного параметра  $\Delta$  при очень малой связи (рис. 19а) и некоторой не очень большой, но заметной ее величине (рис. 19б). Сравнивая эти рисунки, замечаем, что изрезанность графиков ляпуновских показателей, характерная для малой связи, заметно уменьшается. Таким образом, диссипативная связь может выступать в роли фактора, увеличивающего степень грубости наблюдаемого хаоса. Этот результат представляется важным для приложений.

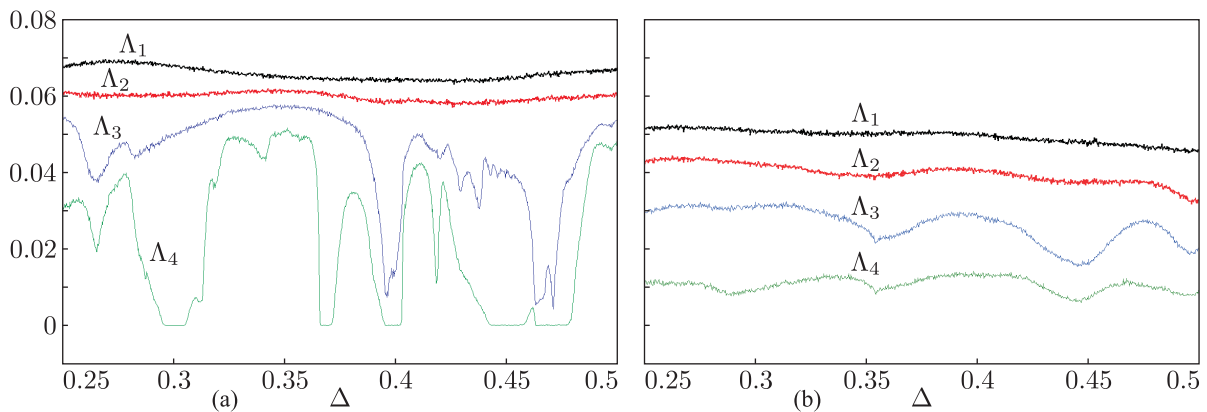


Рис. 19. Графики ляпуновских показателей, иллюстрирующие увеличение грубости хаоса в ансамбле осцилляторов: а)  $\mu = 0.003$ , б)  $\mu = 0.025$ .

## 7. Сеть из пяти хаотических осцилляторов Рёсслера

Интересно, сохранятся ли обнаруженные закономерности при увеличении числа осцилляторов? Для ответа на этот вопрос обратимся к сети из пяти хаотических осцилляторов Рёсслера. При этом, однако, целесообразно ввести также неидентичность по параметру  $r$ , отвечающему за степень возбуждения индивидуальных осцилляторов:

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= -\left(1 + \frac{n-1}{4}\Delta\right) y_n - z_n, \\ \dot{y}_n &= \left(1 + \frac{n-1}{4}\Delta\right) x_n + p y_n + \frac{\mu}{4} \sum_{i=1}^5 (y_i - y_n), \\ \dot{z}_n &= q + (x_n - r_n) z_n. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Ляпуновская карта системы (7.1) показана на рисунке 20. Можно видеть, что картина по своей организации оказывается близкой к случаю четырех осцилляторов, хотя и усложняется за счет появления новых режимов. В частности, возникает возможность уже пяти-частотных торов Т5. При большой частотной расстройке (правый обрез карты на рис. 20) наблюдается каскад квазипериодических бифуркаций Хопфа на базе торов возрастающей размерности, что отвечает сценарию Ландау – Хопфа [14, 26, 27]. Правда, достаточно быстро возникают новые резонансы, так что этот сценарий наблюдается в узком диапазоне изменения параметра связи. Тем не менее, хочется отметить сам факт возможности сценария Ландау – Хопфа и каскада квазипериодических бифуркаций инвариантных торов в системе связанных хаотических осцилляторов.

## 8. Заключение

Таким образом, высокоразмерная квазипериодичность характерна не только для ансамблей регулярных осцилляторов, но и для диссипативно связанных хаотических осцилляторов. Высокразмерные торы обнаруживаются в системе из трех, четырех и пяти хаотических осцилляторов. Их фурье-спектры вполне отвечают классическому для квазипериодичности виду с соответствующим количеством независимых частотных компонент.



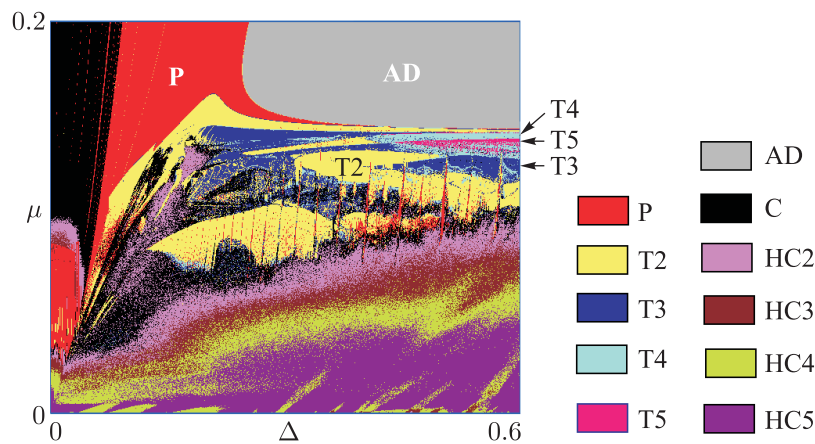


Рис. 20. Карта ляпуновских показателей сети из пяти хаотических осцилляторов (7.1);  $p = 0.15$ ,  $q = 0.4$ ,  $r_1 = 7.3$ ,  $r_2 = 7.6$ ,  $r_3 = 7.9$ ,  $r_4 = 8.2$ ,  $r_5 = 8.5$ .

Возникновение трехчастотных режимов при уменьшении связи, как правило, происходит за счет квазипериодической бифуркации Хопфа. При дальнейшем уменьшении связи за счет седло-узловых бифуркаций возникает множество резонансных торов разной размерности. Внутри резонансных областей при уменьшении связи типичными являются бифуркации удвоения торов, с последующей их фрактализацией и разрушением. Возникающая картина резонансов на плоскости параметров, однако, очень сложна и существенно сложнее случая взаимодействия регулярных осцилляторов. При больших частотных расстройках подсистем в некоторой области параметров может наблюдаться каскад последовательных квазипериодических бифуркаций Хопфа для торов все более высокой размерности.

Какова природа высокоразмерной квазипериодичности в связанных хаотических системах? Можно предположить, что ее возникновение обусловлено возможностью множества встроенных в хаотические аттракторы неустойчивых предельных циклов. Взаимодействие подсистем превращает их в инвариантные торы, а достаточно большая диссипативная связь стабилизирует и делает устойчивыми. Эта гипотеза, однако, требует дальнейшего рассмотрения.

## Список литературы

- [1] Heinrich G., Ludwig M., Qian J., Kubala B., Marquardt F. Collective dynamics in optomechanical arrays // *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 107, no. 4, 043603, 4 pp.
- [2] Zhang M., Wiederhecker G. S., Manipatruni S., Barnard A., McEuen P., Lipson M. Synchronization of micromechanical oscillators using light // *Phys. Rev. Lett.*, 2012, vol. 109, no. 23, 233906, 5 pp.
- [3] Temirbayev A. A., Nalibayev Ye. D., Zhanabaev Z. Zh., Ponomarenko V. I., Rosenblum M. G. Autonomous and forced dynamics of oscillator ensembles with global nonlinear coupling: An experimental study // *Phys. Rev. E*, 2013, vol. 87, no. 6, 062917, 11 pp.
- [4] Martens E. A., Thutupalli S., Fourrière A., Hallatschek O. Chimera states in mechanical oscillator networks // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 2013, vol. 110, pp. 10563–10567.
- [5] Tinsley M. R., Nkomo S., Showalter K. Chimera and phase-cluster states in populations of coupled chemical oscillators // *Nature Phys.*, 2012, vol. 8, no. 9, pp. 662–665.

- [6] Vlasov V., Pikovsky A. Synchronization of a Josephson junction array in terms of global variables // *Phys. Rev. E*, 2013, vol. 88, no. 2, 022908, 5 pp.
- [7] Lee T. E., Cross M. C. Pattern formation with trapped ions // *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 106, no. 14, 143001, 4 pp.
- [8] Lee T. E., Sadeghpour H. R. Quantum synchronization of quantum van der Pol oscillators with trapped ions // *Phys. Rev. Lett.*, 2013, vol. 111, no. 23, 234101, 5 pp.
- [9] Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. Attractors on an  $N$ -torus: Quasiperiodicity versus chaos // *Phys. D*, 1985, vol. 15, no. 3, pp. 354–373.
- [10] Linsay P. S., Cumming A. W. Three-frequency quasiperiodicity, phase locking, and the onset of chaos // *Phys. D*, 1989, vol. 40, no. 2, pp. 196–217.
- [11] Battelino P. M., Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. Chaotic attractors on a 3-torus, and torus break-up // *Phys. D*, 1989, vol. 39, nos. 2–3, pp. 299–314.
- [12] Baesens C., Guckenheimer J., Kim S., MacKay R. S. Three coupled oscillators: mode locking, global bifurcations and toroidal chaos // *Phys. D*, 1991, vol. 49, no. 3, pp. 387–475.
- [13] Emelianova Yu. P., Kuznetsov A. P., Sataev I. R., Turukina L. V. Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators // *Phys. D*, 2013, vol. 244, no. 1, pp. 36–49.
- [14] Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sataev I. R., Turukina L. V. About Landau–Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators // *Phys. Lett. A*, 2013, vol. 377, nos. 45–48, pp. 3291–3295.
- [15] Emelianova Yu. P., Kuznetsov A. P., Turukina L. V., Sataev I. R., Chernyshov N. Yu. A structure of the oscillation frequencies parameter space for the system of dissipatively coupled oscillators // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 4, pp. 1203–1212.
- [16] Xiao-Wen L., Zhi-Gang Zh. Phase synchronization of coupled Rössler oscillators: Amplitude effect // *Commun. Theor. Phys.*, 2007, vol. 47, no. 2, pp. 265–269.
- [17] Pazó D., Sánchez E., Matías M. A. Transition to high-dimensional chaos through quasiperiodic motion // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2001, vol. 11, no. 10, pp. 2683–2688.
- [18] Pazó D., Matías M. A. Direct transition to high-dimensional chaos through a global bifurcation // *Europhys. Lett.*, 2005, vol. 72, no. 2, pp. 176–182.
- [19] Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 76, no. 11, pp. 1804–1807.
- [20] Osipov G. V., Pikovsky A. S., Rosenblum M. G., Kurths J. Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators // *Phys. Rev. E* (3), 1997, vol. 55, no. 3, part A, pp. 2353–2361.
- [21] Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences. (Cambridge Nonlinear Sci. Ser., vol. 12.) Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001. 432 pp.
- [22] Vitolo R., Broer H., Simó C. Routes to chaos in the Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms // *Nonlinearity*, 2010, vol. 23, no. 8, pp. 1919–1947.
- [23] Broer H., Simó C., Vitolo R. Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: Analysis of a resonance «bubble» // *Phys. D*, 2008, vol. 237, no. 13, pp. 1773–1799.
- [24] Broer H., Simó C., Vitolo R. The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: The Arnol'd resonance web // *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 2008, vol. 15, no. 5, Dynamics in perturbations, pp. 769–787.
- [25] Vitolo R., Broer H., Simó C. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2011, vol. 16, nos. 1–2, pp. 154–184.
- [26] Ландау Л. Д. К проблеме турбулентности // *Докл. АН СССР*, 1944, т. 44, № 8, с. 339–342.
- [27] Hopf E. A mathematical example displaying the features of turbulence // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1948, vol. 1, no. 4, pp. 303–322.
- [28] Kuznetsov S. P. Hyperbolic chaos: A physicist's view. Berlin: Springer, 2012. 336 pp.

**Dynamics of coupled chaotic oscillators: from chaos to quasiperiodicity**

Alexander P. Kuznetsov<sup>1</sup>, Natalia A. Migunova<sup>2</sup>, Igor R. Sataev<sup>3</sup>, Julia V. Sedova<sup>4</sup>,  
Ludmila V. Turukina<sup>5</sup>

<sup>1,2,5</sup> Saratov State University

Astrahanskaya 83, Saratov, 410012, Russia

<sup>1,3,4,5</sup> Kotel'nikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch

Zelenaya 38, Saratov, 410019, Russia

<sup>1</sup>apkuz@rambler.ru, <sup>2</sup>migunovanatasha@mail.ru, <sup>3</sup>sataevir@rambler.ru, <sup>4</sup>sedovayv@rambler.ru,

<sup>5</sup>lvtur@rambler.ru

Ensembles of several chaotic Rössler oscillators are considered. It is shown that a typical phenomenon for such systems is the emergence of invariant tori of different and sufficiently high dimension. The possibility of a quasi-periodic Hopf bifurcation and of the cascade of such bifurcations based on tori of increasing dimension is demonstrated. The domains of resonant tori are revealed whose boundaries correspond to a saddle-node bifurcation. Within areas of resonant modes the torus-doubling bifurcations and tori destruction are observed.

MSC 2010: 70K43, 65P20, 65P30, 34D08

Keywords: chaos, quasiperiodic oscillations, invariant tori, Lyapunov exponents, bifurcations

Received September 10, 2014, accepted October 10, 2014

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 4, pp. 387–405 (Russian)