УДК 517.91, 517.938, 51.73

ФЕНОМЕН УРАВНЕНИЯ ВАН ДЕР ПОЛЯ

А. П. Кузнецов[1,2], *Е. С. Селиверстова*[2], *Д. И. Трубецков*[2], *Л. В. Тюрюкина*[1,2]

[1]Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН

[2]Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Настоящий обзор посвящен знаменитому голландскому ученому Балтазару ван дер Полю, который внес ощутимый вклад в развитие радиотехники, физики и математики. В обзоре выделен лишь один момент его творчества, связанный с уравнением, носящим его имя, и удивительно широким диапазоном применения этого уравнения в естествознании.

В обзоре изложены следующие вопросы.

- Биография ван дер Поля, его уравнение и предполагаемые предшественники.
- О вкладе А.А. Андронова в теорию автоколебаний.
- Уравнение ван дер Поля и моделирование процессов в человеческом организме (модели сердца и системы «сердце–сосуды»; моделирование процессов в толстой кишке; модель возбуждающих и тормозящих нейронных взаимодействий; моделирование синхронизации при обработке и передаче информации в нейронных сетях; моделирование различных задач, связанных с опорно-двигательным аппаратом человека; модель голосовых связок).
- Развитие и модификации уравнения ван дер Поля.

Ключевые слова: Уравнение ван дер Поля, автоколебания, биофизика, ламповый генератор, нейрон, синхронизация.

К 125-летию со дня рождения Балтазара ван дер Поля

«Так называемое уравнение ван дер Поля – в своей упрощенной форме – впервые было записано ван дер Полем. Это уравнение было не первым, соответствующим автоколебательным режимам. Предыдущие уравнения были получены для некоторых определенных экспериментальных ситуаций, как показали Пуанкаре, Блондель и Джанет. Ван дер Поль убедил людей в том, что его простое уравнение и его простые решения могли послужить парадигмой для объяснения различных режимов.

Его открытие также оказало влияние как на динамику, так и на физические процессы. Введя графическое представление, он также внес вклад в изменение метода изучения нелинейных феноменов. В этом смысле, связь его имени с этим уравнением – подходящий способ, чтобы его отблагодарить».

Ginoux J.M., Letellier C. [1]

Приступая к работе над данным обзором, авторы не ожидали, что придется реферировать огромное количество весьма разнообразных статей. В обзоре изложе-

ны биографические данные о ван дер Поле, вывод его уравнения, обсуждение исследований предполагаемых предшественников, работ по применению уравнения к анализу человеческого организма, развития и модификаций уравнения.

1. О Балтазаре ван дер Поле

Уравнение ван дер Поля, генератор ван дер Поля, метод ван дер Поля решения нелинейных уравнений теории колебаний – эти термины присутствуют практически во всех книгах о колебаниях. В то же время о человеке с красивым именем Балтазар, соотечественнике Гюйгенса, написано немного [1,2].

Балтазар ван дер Поль (Balthazar van der Pol, Ван дер Поль, Ван-дер-Поль) родился 27 января 1889 года в городе Утрехте в Голландии. Отец его был широко образованным человеком и благотворно влиял на развитие способностей сына, которого с раннего детства интересовали медицина, музыка и шахматы. Он умел играть на виолончели, фортепиано и скрипке. В 1911 году Балтазар поступил в Утрехтский университет, который окончил в 1916 году по специальности физика и математика. Затем для продолжения учебы он уехал на несколько лет в Англию, где сначала работал у известного радиоспециалиста Дж.А. Флеминга, а потом стажировался в Кембридже в Кавендишской лаборатории. Директором лаборатории в то время был знаменитый Дж.Дж. Томпсон, открывший электрон, предложивший одну из первых атомных моделей, создавший большую интернациональную школу физиков-экспериментаторов. Эти годы пребывания в Англии определили будущие научные интересы ван дер Поля – электрорадиотехника и теория колебаний. В 1919 году он вернулся на родину и три года работал под руководством создателя классической электронной теории Х.А. Лоренца в Институте Тейлора в Гарлеме, будучи ассистентом профессора. 27 апреля 1920 года в Утрехтском университете ван дер Поль защитил докторскую диссертацию «Влияние ионизированного газа на распространение электромагнитных волн и его применение к радио, которое заключается в измерениях тлеющего разряда». Диссертация основывалась на экспериментальных данных, полученных им в Кембридже. В 1922 году его назначили старшим физиком электрической лаборатории фирмы «Филиппс» в Эйндховене, в которой он руководил научными исследованиями с 1922 по 1949 год. Одновременно ван дер Поль занимался и преподавательской деятельностью: с 1938 года он читал лекции по теоретической электротехнике в Делфтском университете, а в 1957 и 1958 гг. читал специальные курсы в Калифорнийском университете в Беркли и в Корнельском университете в Итаке. С 1945 по 1946 годы ван дер Поль являлся Президентом Временного университета в Эйндховене, который был основан для замены других нидерландских уни-

верситетов, находившихся в то время на оккупированных территориях. В 1946 году за работу в роли Президента он стал Кавалером Ордена Нидерландского Льва. Еще раньше, в 1927 году за установление радиотелефонной связи между Нидерландами и Нидерландской Ост-Индией ван дер Поль получил Орден Оранских-Нассау.

В период с 1949 по 1956 годы Балтазар ван дер Поль являлся главой Международного совещательного комитета по радиокоммуникациям (CCIR) и как постоянное ответственное должностное лицо CCIR занимал должность технического консультанта Международного союза телекоммуникаций (ITU).

Он был выдающимся деятелем в различных обществах, созданных для содействия изучению радиосвязи. В 1920 году ван дер Поль стал членом Института радиоинженеров (США), в 1934 – вице-президентом этого Института, а в 1935 был награжден почетной медалью за вклад в теорию цепей.

Балтазар ван дер Поль являлся почетным членом Института радиоинженеров Австралии. Следует также отметить, что он был уважаем во многих иностранных университетах и академиях, в частности, в 1953 году Датская академия технических наук присудила ему Золотую медаль Вальдемара Поульсена за выдающийся вклад в радиотехнику, за международное научное сотрудничество и организацию технических вопросов, касающихся радиосвязи. В 1956 году Технический университет Варшавы присвоил ему почетную ученую степень, а Французская академия наук в 1957 году сделала его своим членом-корреспондентом.

Он основал голландский журнал «Физика» и общество радиоинженеров Голландии. В последние годы жизни Балтазар ван дер Поль стал интересоваться теорией чисел, в особенности, теорией и приложением тета-функций. Следует отметить его собственные «Лекции по современному единому подходу к эллиптическим функциям и эллиптическим интегралам», которые он читал в Корнельском университете в 1958 году. Лекции ван дер Поля на тему «Радиотехника и теория чисел» содержат описание восьми проблем, решение которых требует знания теории чисел. С возрастом ван дер Поль не только не утратил своего интереса к музыке, но и пытался связать ее с такой фундаментальной наукой, как математика. В 1955 году в Сент-Эндрюсском университете состоялась его лекция, повествующая о связи математики и музыки. Умер ван дер Поль 6 октября 1959 года в провинции Вассенар, Голландия.

2. Уравнение ван дер Поля

Основные результаты работ ван дер Поля в области нелинейных колебаний были опубликованы в 1934 году в Proc. IRE (т. 22, № 9), а на русском языке – в 1935 году в виде брошюры «Нелинейная теория электрических колебаний» [3], предисловие к которой написал С.Э. Хайкин. Основную идею этого автообзора ван дер Поль формулирует так.

«Из дальнейшего будет видно, что большая часть рассматриваемых типичных колебательных явлений могут быть исследованы и объяснены при помощи антисимметрической характеристики формы $i = \alpha u - \gamma u^3$. С одной стороны, в этом уравнении отсутствует член βu^2, который, как известно, необходим для объяснения детектирования и модуляции, и не является существенным для понимания большей части тех разнообразных колебательных явлений, которые мы разберем ниже. С другой стороны, введение

нелинейного члена γu^3, чем наше нелинейное рассмотрение отличается от элементарного и хорошо изученного линейного рассмотрения колебательных явлений, привело в течение четырнадцати лет к целому ряду новых результатов и лучшему пониманию колебательных явлений, с которыми работникам в области радиотехники приходится почти ежедневно сталкиваться и которые не могут быть объяснены при помощи элементарной линейной теории.

<...> Мы рассмотрим ряд случаев, которые характеризуются дифференциальными уравнениями, приведенными ниже в простейшей форме:

$$u'' - \alpha(1 - u^2)u' + \omega^2 u, \quad (\varepsilon = \frac{\alpha}{\omega} \ll 1)$$

– это уравнение описывает триодный генератор с одной степенью свободы – автоколебания;

$$u'' - \alpha(1 - u^2 - \varepsilon_2 u^4)u' + \omega^2 u = 0, \quad (\varepsilon = \frac{\alpha}{\omega} \ll 1)$$

– то же, что и в предыдущем случае, но со вторым нелинейным членом, учитывающим новые черты характеристики...» [3, с. 91].

Напомним, как получаются приведенные в цитате уравнения (по крайней мере, одно из них) применительно к схеме триодного генератора с колебательным контуром в цепи сетки лампы (рис. 1, *а*), следуя работе [4].

Сеточными токами пренебрегаем. На основании законов Кирхгофа для тока I и напряжения U в колебательном контуре имеем

$$I = -C\frac{dU}{dt}, \tag{1}$$

$$RI = U - LdIdt - M\frac{dI_{\text{a}}}{dt}. \tag{2}$$

Величина $(-M\frac{dI_{\text{a}}}{dt})$ есть эдс, которая наводится в контуре под воздействием на него анодного тока I_{a}, протекающего по катушке в цепи анода (слагаемое $(-M\frac{dI_{\text{a}}}{dt})$ можно назвать эдс обратной связи). Подставляя (1) и производную $\frac{dI}{dt} = -C\frac{d^2U}{dt^2}$ в

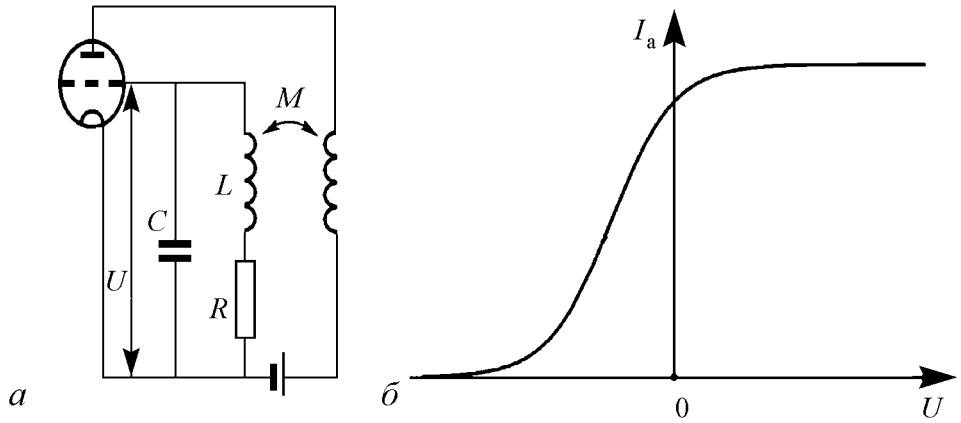


Рис. 1. Схема генератора ван дер Поля с контуром в цепи сетки (*а*) и характеристика лампы, аппроксимированная кубическим полиномом (*б*)

уравнение (2), находим

$$LC\frac{d^2U}{dt^2} - [MS(U) - RC]\,\frac{dU}{dt} + U = 0, \tag{3}$$

где $S(U) = \dfrac{dI_{\rm a}}{dt}$ – крутизна характеристики лампы в предположении, что анодный ток $I_{\rm a}$ зависит только от U, и поэтому $\dfrac{dI_{\rm a}}{dt} = \dfrac{dI_{\rm a}}{dU}\dfrac{dU}{dt} = S(U)\dfrac{dU}{dt}$. Уравнение (3) есть нелинейное уравнение лампового генератора. Предположим далее, что анодно-сеточную характеристику лампы можно аппроксимировать полиномом $I_{\rm a} = I_{a0} + S_0U + S_1U^3$ (рис. 1, *б*). Тогда $S(U) = S_0 + 3S_1U^2$, где $S_2 = 3S_1$. Если ввести новые переменные $\alpha = (MS_0 - RC)\dfrac{1}{LC}$, $\beta = \dfrac{MS_2}{(RC - MS_0)}$, $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$, то уравнение (3) примет вид

$$\frac{d^2U}{dt^2} - \alpha\left[1 - \beta U^2\right]\frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = 0. \tag{4}$$

В уравнении (4) величина α показывает, насколько сильно возбужден генератор (при $\alpha < 0$ условия возбуждения не выполняются). Величина β характеризует амплитуду колебаний: чем меньше β, тем больше амплитуда. Вводя безразмерные переменные и параметры

$$\tau = \omega_0 t, \quad x = \beta^{1/2}U, \quad \lambda = \alpha\omega_0,$$

окончательно получим

$$\ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \tag{5}$$

где $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$.

Чаще всего только это уравнение и называют уравнением ван дер Поля. Заметим, что при другой нормировке уравнение ван дер Поля можно записать иначе:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0. \tag{6}$$

Это уравнение иногда удобнее использовать, поскольку для него при значении $\lambda = 0$ имеет место бифуркация Андронова–Хопфа (см., например, [5]), в результате которой и возникают автоколебания. Уравнение (6) имеет ясный физический смысл и описывает универсальный механизм возникновения автоколебаний через бифуркацию Андронова–Хопфа, возможность как квазигармонических, так и релаксационных колебаний.

В ряде случаев вместо уравнения (4) используют уравнение Рэлея

$$\ddot{y} - \sigma(1 - \dot{y}^2)\dot{y} + y = 0, \tag{7}$$

которое после дифференцирования и замены переменной $\dot{y} = x$, принимает вид (5) с $\lambda = \sigma$, $3/\sigma = 1$, $\omega_0 = 1$.

После опубликования в 1926 году своего уравнения ван дер Поль много внимания уделял исследованию релаксационных колебаний.

В связи с этим отметим, что уравнение (7) при $\sigma \gg 1$ удобно использовать для анализа релаксационных колебаний. Введением нового времени $\tau = t/\sigma$ и переменной $x = y/\sigma$ можно перенести параметр σ в коэффициент при старшей производной и получить уравнение

$$\sigma^{-2}\ddot{x} - (1 - \dot{x}^2)\dot{x} + x = 0,$$

которое имеет асимптотическое решение.

3. О предшественниках

Замечательный физик-теоретик Лев Альбертович Вайнштейн любил говорить: «Не успеешь что-нибудь открыть, как набегут предшественники». На открытие уравнения ван дер Поля предшественники «набежали» усилиями Jean-Marc Ginoux и Christophe Letellier спустя 86 лет, когда была опубликована их статья «Van der Pol and the history of relaxation oscillations: Toward the emergence of a concept» [1].

В статье, начиная с названия, акцент сделан на релаксационные колебания. Как пишут авторы статьи, релаксационные колебания обычно связывают с именем ван дер Поля, а именно с его работами по исследованию лампового генератора. Приведем далее цитату из указанной статьи.

«Наша цель состоит в том, чтобы узнать, как на самом деле были открыты релаксационные колебания. Просматривая литературу с девятнадцатого столетия, мы обнаружили четыре автоколебательные системы, в которых наблюдались релаксационные колебания».

Поскольку нет смысла пересказывать статью, кратко опишем четыре обнаруженные автоколебательные системы.

- Французский инженер Жан-Мари-Жерар Лескьер в 1880 году, подсоединив работающее как генератор динамо к магнито-электрической машине, обнаружил периодическую инверсию во вращении машины, хотя источник тока был постоянным.
  Как указано в статье, много лет спустя французский инженер Пол Джанет (1863–1937) обнаружил, что между коллекторными щетками динамо-машины возникает разность потенциалов, которая может быть нелинейной функцией тока, то есть обнаруженный феномен объясняется существованием нелинейной вольт-амперной характеристики системы.
- В 1899 году британский физик Вильямс Дю Бож Дюддель устранил шум электрической дуги, используемой в маяках и уличных фонарях, включив в цепь дуги конденсатор и индуктивность, соединенные последовательно. В цепочке из индуктивности и емкости возникал переменный ток. Дюддель назвал этот феномен музыкальной дугой, указав, что сама дуга действует как преобразователь, превращающий часть постоянного тока в переменный, частота которого варьируется изменением L и C. Впоследствии была высказана идея, что дуга может быть рассмотрена как отрицательное сопротивление.
  Французский инженер Анри Блондель (1863–1938) провел обширные исследования музыкальной дуги, используя цепочку Дюдделя. Он назвал ее «поющей дугой». Блондель наблюдал синусоидальные колебания, разрывные колебания

и нерегулярные перемежающиеся колебания, которые сегодня квалифицировали бы как хаотические.

- Далее авторы выделяют мультивибратор Абрахама и Блоха (1917), который они определяют как автогенератор, содержащий две лампы, аналогичные аудиону (триоду) Ли де Фореста (1907).

  Следует заметить, что до сих пор речь шла о наблюдении автоколебаний и слабых попытках дать им физическое толкование. Следующий шаг: в 1919 году французский инженер Пол Джанет обнаружил аналогию между тремя системами, такими как триод, электрическая дуга и генератор с последовательным возбуждением. По поводу своего открытия он написал: «Получение и поддержание колебаний во всех этих системах проистекает преимущественно из присутствия в цепи чего-то аналогичного отрицательному сопротивлению». Также Джанет установил, что вышеописанные устройства генерируют несинусоидальные колебания и могут быть описаны одним и тем же дифференциальным уравнением.
- Пожалуй, главный момент статьи содержится в отрывке, который процитируем.

  «В 1880-х годах Пуанкаре развил свою математическую теорию дифференциальных уравнений и представил идею предельного цикла следующим образом: замкнутые кривые, которые удовлетворяют нашим дифференциальным уравнениям и к которым асимптотически приближаются другие кривые, определяемые тем же самым уравнением.

  <...>Александра Андронова (1901–1952 гг.) обычно считают первым обнаружившим признаки предельного цикла в прикладных задачах, а именно в автоколебательной электрической цепи. Гинокс и Петитгирард недавно обнаружили, что Пуанкаре провел цикл лекций в Ecale des Postes et Telegraphes (сегодня Sup' Telecom), в которых он показал, что существование автколебаний в музыкальной дуге соответствует предельному циклу».

  Далее приводятся выкладки, принадлежащие Пуанкаре и доказывающие устойчивость обнаруженного им колебательного режима. Следует вывод: «Это обсуждение показывает, что Пуанкаре был первым, кто показал, что его «математический» предельный цикл важен для радиоинженерии. До сих пор Андронова неверно считают первым догадавшимся до более общего уравнения в 1929 году».

4. Александр Александрович Андронов и теория автоколебаний

В связи с подобным выводом необходимо обратиться к сделанному А.А. Андроновым, опираясь на книги [6] и [7].

Сегодня нет нужды доказывать, что задача об исследовании периодических автоколебаний в системе сводится к задаче нахождения предельных циклов и определения их параметров.

Введение предельных циклов в теорию колебаний, несомненно, связано с именем Александра Александровича Андронова (подробности его биографии можно найти в книге В.Д. Горяченко «Андронов Александр Александрович» [6]). Андронов с 1925 по 1929 год был аспирантом Л.И. Мандельштама в Московском университете. Его диссертация носила название «Предельные циклы Пуанкаре и теория

автоколебаний». Когда Андронов работал над диссертацией, нелинейная теория колебаний еще только начиналась как самостоятельное научное направление. Правда, в 1926 году ван дер Поль впервые графически исследовал несинусоидальные автоколебания на фазовой плоскости.

Как пишет автор книги [6] о работе А.А. Андронова над диссертацией, – «начало работы, по рассказу Г.С. Горелика, ...было весьма скромным». И далее. «А.А. Андронов составил простейшие, идеализированные до предела математические модели динамики часов и лампового генератора. Он построил фазовые портреты этих систем, выяснил, что совокупность спиралей накручивается на замкнутую фазовую траекторию как изнутри, так и снаружи. Замкнутая кривая соответствует установившимся колебаниям (автоколебаниям), спирали – процессам установления. Несколько раньше (А.А. Андронов об этом знал) аналогичный фазовый портрет построил ван дер Поль при аппроксимации характеристики лампы кубической кривой». Самое главное, что усмотрел Андронов – обнаруженные им и ван дер Полем замкнутые фазовые кривые и предельные циклы, открытые в 1881 году А. Пуанкаре вне всякой связи с физикой, – одно и то же. «До А.А. Андронова математики не подозревали, что предельные циклы «живут» в прикладных задачах, а физики и инженеры, занимающиеся исследованием колебаний, не знали, что уже существует математический аппарат, необходимый для общей теории колебательных процессов». Вот слова А.А. Андронова: «Предельный цикл есть геометрический образ, изображающий в фазовом пространстве периодическое движение автоколебательной системы; он представляет собой замкнутую кривую, к которой асимптотически приближаются соседние фазовые траектории».

Таким образом, у Андронова речь идет не о решении частной задачи, а о целом классе колебательных систем – автоколебательных.

Первая теория лампового генератора, предложенная Андроновым, использовала ступенчатую характеристику лампы. И в ней еще было стремление свести нелинейную задачу к линейной. Но в решенной задаче есть самое главное для понимания автоколебаний – существование замкнутых траекторий на фазовой плоскости и их идентичность предельным циклам Пуанкаре. Поскольку аппарат отыскания предельных циклов в какой-то степени был уже разработан в математике, теория автоколебаний стала по-настоящему нелинейной. Это позволило Л.И. Мандельштаму так оценить работу А.А. Андронова: «Здесь мы имеем действительно адекватный нашим нелинейным задачам, не имеющий «линейных воспоминаний» математический аппарат. ...Опираясь на этот аппарат, можно будет создавать новые понятия, специфичные для нелинейных систем, можно будет вырабатывать новые руководящие точки зрения, которые позволяют мыслить нелинейно».

С 1929–1930 годов вполне можно говорить о школе Мандельштама–Андронова. Более того, можно говорить о смещении центра исследований по нелинейной физике в СССР, в Россию, где он находится и сейчас. А.А. Андронов сделал необычайно много для нелинейной физики, многое из сделанного осталось в науке навсегда, однако особое место занимает книга «Теория колебаний» [8], написанная вместе с А.А. Виттом и С.Э. Хайкиным. Ученик А.А. Андронова профессор Н.В. Бутенин писал по этому поводу: «Вряд ли можно переоценить значение этой книги в становлении нелинейной теории колебаний как в нашей стране, так и во всем мире. Ведь, в сущности, впервые появилась книга, где с ясной теоретической позиции излагались основы теории нелинейных колебаний как сложившейся науки; эта теория иллюстрировалась многочис-

ленными примерами из различных областей физики и техники. Исследователи получили в руки мощное оружие для решения задач, возникающих при рассмотрении нелинейных динамических систем.

Следует сказать, что в это время на Западе, а также в Америке, сколь-нибудь существенных новых исследований в области теории нелинейных колебаний не было. Появление «Теории колебаний» значительно оживило исследования в области нелинейных колебаний, особенно сильный сдвиг произошел тогда, когда Минорский выпустил книгу, значительная часть которой является простым изложением ряда глав «Теории колебаний» (с четким указанием источника). Несколько позже в переводе книга «Теория колебаний» была издана в США». К этому можно лишь добавить, что в 1981 году вышло третье издание книги (второе вышло в 1959 году с существенными дополнениями, сделанными Е.А. Леонтович и Н.А. Железцовым), тождественное первому изданию 1937 года. Книга сразу стала библиографической редкостью.

Первое издание книги вышло без фамилии Витта на обложке. Почему? Ответ находим в статье Е.Л. Фейнберга [9].

«Наступила страшная эпоха. Пошли и другие аресты. Так, исчезли два молодых очень талантливых ученика Л.И. [Мандельштама] – С.П. Шубин (который был также учеником и И.Е. Тамма) и А.А. Витт, который в соавторстве с А.А. Андроновым и С.Э. Хайкиным только что закончил фундаментальный труд, подводящий итог совместным с Л.И. работам по теории колебаний, особенно нелинейных, для которых были развиты новые методы рассмотрения необъятного круга практически важных проблем. В частности, Андроновым было введено понятие «автоколебаний» и т.п. Это был новый прорыв в важнейшем направлении физики. Отсюда и пошла школа Андронова, созданная потом в Москве и в Горьком. Но книгу было издать с именем «врага народа» Витта на обложке. Однако не издать ее было преступлением перед наукой. Пришлось пойти на тяжелую моральную жертву: оставить на ней лишь имена Андронова и Хайкина. Если эти высоко моральные люди и пошли на такой шаг (несомненно, для них это была жертва!), то это свидетельство тому, что эта книга была нужна! После войны она была переведена и издана в США (мне кажется, без ведома авторов), а после смерти Сталина (к тому времени скончался и Андронов) переиздана у нас с восстановленным именем Витта (более чем через 20 лет после первого издания, что само по себе показывает – это классический труд, сохранивший свое значение на долгие времена). Тоже характерный эпизод из истории и нашей эпохи и школы Мандельштама.

Несмотря ни на что, даже «с петлей на шее» школа Мандельштама развивалась и работала».

Об Александре Адольфовиче Витте почти ничего не написано. Но вот яркий штрих к его портрету [10].

«Известно, сколь тщательно Л.И. [Мандельштам] готовился к каждому занятию со студентами. Вспоминаю один эпизод. На семинаре Л.И. должен был быть доклад о шредингеровской теории атома водорода. Заболел докладчик. Л.И. обратился к аудитории и сказал, что он не берется сделать без подготовки доклад, но что здесь присутствует один человек, который может это превосходно сделать, и назвал Александра Адольфовича Витта. А.А. Витт смутился, однако пошел к доске и сделал блестящий доклад, продолжавшийся около двух часов. Л.И. вышел перед нами с очень довольным видом, развел руками и сказал: «Не правда ли, поразительно». Насколько помню, раздались аплодисменты».

Чтобы понять масштаб личности А.А. Андронова, приведем слова Г.С. Горелика – одного из известных и талантливых наших физиков. Он писал следующее. «Я лично не знал и не знаю ни одного человека, который бы отличался от моего идеала хорошего человека меньше, чем А.А. Андронов. Полное бескорыстие, абсолютное отсутствие лицемерия, мелкого «ученого» самолюбия, академического чванства; бесконечная готовность жертвовать своим спокойствием, если нужно помочь товарищу или просто человеку, деятельная доброжелательность ко всему живому и талантливому!

<...>Он обладал обширным умом и богатой, разносторонней культурой. В круг его непосредственных научных интересов входили: вся физика, математика, техника, астрономия. Его живейшим образом интересовало все – естествознание, медицина, история, литература, живопись. Он был знатоком русской культуры. Речь А.А. Андронова была сильной, остроумной, неотразимой. Вместе с тем, он был прост в обращении, отзывчив и чистосердечен. В нем не было эгоизма и неуверенного в себе мелкого самолюбия».

Вот еще небольшой штрих к портрету А.А. Андронова. До 1931 года Л.И. Мандельштам и А.А. Андронов думали, что первыми сопоставили автоколебания с предельными циклами, но вскоре обнаружили, что интуитивно это было сделано практически одновременно с открытием предельных циклов. В дальнейшем они всегда упоминали об этом. Вот выдержка из статьи А.А. Андронова с соавторами: «...Для того чтобы не извращать исторической перспективы, необходимо сделать предварительно следующее замечание. За десять лет до открытия радио французский инженер Леотэ (1885) изучал автоколебания в некотором устройстве автоматического регулирования, исследовал фазовое пространство этого устройства и вычертил для него интегральные кривые и предельные циклы (не давая им этого названия: он, по-видимому, не был знаком с опубликованной несколько раньше работой Пуанкаре, в которой предельные циклы впервые появились в математике). По причинам, о которых мы здесь не будем говорить, замечательные работы Леотэ были почти полностью забыты».

Заметим, что в книге А.Т. Филиппова «Многоликий солитон» [11] есть более подробные сведения о Леотэ. В книге указано, что Анри Леотэ (1847–1916) – французский математик, преподаватель знаменитой Политехнической школы в Париже. Статья Леотэ, о которой пишет А.А. Андронов, была полностью забыта. В то же время другие труды Леотэ по теории машин и механизмов, по различным приложениям математического анализа позволили ему в 1890 году стать членом Парижской академии наук.

Заметим, что в статье французских исследователей о предшественниках имя Леотэ вообще не упоминается. Можно с уверенностью утверждать, что Андронов не знал о работе Пуанкаре, упоминаемой в статье [1].

5. Об использовании уравнения ван дер Поля в различных областях естествознания

Во время одной из своих лекций Балтазар ван дер Поль заявил, что предложенное им дифференциальное уравнение может описывать различные процессы, невзирая на их происхождение. Тогда же он и привел примеры систем, в которых наблюдаются автоколебания: «...пневматический молот, скрежетание ножа по тарелке, развевание флага на ветру, гудящий звук, иногда создаваемый пожарным краном, скрип

двери, паровая машина с малым маховиком, периодическое возникновение эпидемий, экономических кризисов и депрессий, дрожь от холода, менструации и, наконец, биение сердца».

С момента введения уравнения ван дер Поля прошло 88 лет. За это время вышеприведенный список примеров автоколебательных систем пополнился различными интересными системами, некоторые примеры оказались неверными. Однако нет сомнения, что уравнение ван дер Поля занимает достойное место в «коллекции» универсальных моделей теории колебаний. Ниже представлен перечень некоторых применений уравнения к задачам естествознания.

Уравнение ван дер Поля используется в радиотехнике для описания не только триодного генератора, но и генератора на туннельном диоде [12] или транзисторного генератора [13]. Его вывод может быть обоснован из настолько простых и общих физических соображений [14], что уравнение оказывается применимым к широкому спектру самых различных задач. Один из ярких примеров: ван дер Поль (в соавторстве с ван дер Марком) обсуждает эффективность применения этого уравнения для описания кардиоритмов [15] (основные результаты этого исследования приведены далее в этой части обзора). Пример из нашего времени: виркатор – прибор микроволновой электроники, который используется как мощный генератор излучения в СВЧ и даже рентгеновском диапазонах. Отдельный виркатор может вести себя аналогично осциллятору ван дер Поля [16]. При учете обратной связи по потоку электронов можно прийти к модели связанных осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга [17]. Объединение нескольких виркаторов в систему может приводить к увеличению мощности в режиме синхронных колебаний [18,19]. Два связанных виркатора исследованы в [18].

В работе [20] набор осцилляторов ван дер Поля предлагается использовать для управления сфазированным излучением полупроводниковых элементов. В [21] зонд, обладающий свойствами осциллятора ван дер Поля, используется для сканирующего атомно-силового микроскопа. В [22] модель осцилляторов ван дер Поля используется для описания образования структур в радиочастотных разрядах в условиях микрогравитации. В [23] неавтономный осциллятор ван дер Поля моделирует нелинейные вынужденные колебания в плазме. Еще одна работа [24] посвящена термоэмиссионным разрядам. В [25] модель осциллятора ван дер Поля использована для описания ионизационных волн. В [26] два связанных осциллятора ван дер Поля привлекаются к описанию гидродинамики низкотемпературной плазмы: анализируются колебания в турбулентном потоке, обтекающем два цилиндра. Колебания в магнитосфере и эксперименты с низкотемпературной плазмой обсуждаются в [27]. Модель ван дер Поля используется для описания транспорта в сверхрешетках в [28].

Переход к наноразмерным системам делает актуальной задачу построения квантовой версии осциллятора ван дер Поля. Соответствующие вопросы обсуждаются в работе [29], в частности, исследуется влияние квантовых флуктуаций на динамику двух связанных осцилляторов. Показано, что фазовая синхронизация в квантовой модели оказывается более грубой (robust), чем в классической.

Осциллятор ван дер Поля появляется в задачах лазерной физики, например, при анализе динамики мод [30]. Отметим, что при описании синхронизации лазеров используются различные варианты фазовой модели [31–35], эквивалентные фазовому приближению для связанных осцилляторов ван дер Поля.

В работе [36] осциллятор ван дер Поля используется для обсуждения задач физики атмосферы. Предлагается грубая модель тропического циклона в форме пространственной автоколебательной системы, описывающей спиральное образование вокруг вертикальной оси. Модельная система имеет вид двух связанных модифицированных осцилляторов ван дер Поля. Уравнение ван дер Поля появляется в гидродинамической задаче образования вихрей при обтекании цилиндра [37], а также при описании следа в обтекающем потоке [38].

В работе [39] осциллятор ван дер Поля находит приложение в робототехнике при моделировании поворачивающегося робота.

Осциллятор ван дер Поля используется и в информационных задачах и приложениях. Например, в [40] рассмотрена возможность генерации сигналов с фрактальными свойствами на основе данной модели. В [41] описан метод скрытой передачи информации с низкочастотным спектром, основанный на алгоритме генерации автоколебаний в дискретном осцилляторе ван дер Поля.

Весьма многочисленны примеры использования осциллятора ван дер Поля при моделировании процессов в человеческом организме. В работе [42] голосовые связки представлены как система двух связанных осцилляторов ван дер Поля в условиях шума и с отстройкой между их собственными частотами. Существует понятие отоакустической эмиссии – это звук, генерируемый в наружном слуховом проходе колебаниями наружных волосковых клеток ушной улитки. Она может быть вызванной, то есть инициированной внешним звуковым сигналом. В [43] предложено моделировать возникающие при этом процессы осциллятором ван дер Поля, возбуждаемым внешним сигналом.

В работе [44] походка человека (лакомоторные движения) исследуется с помощью модели диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля. При этом рассмотрены случаи как двух, так и трех осцилляторов с необходимой геометрией связи. В работе [45] представлена модель сердечно-сосудистой системы, которая является комбинацией уравнения ван дер Поля и информационной модели в форме сети Вольтерры. В [46] методология осцилляторов ван дер Поля и Рэлея используется при обсуждении экспериментов с взаимодействием различных механических ритмов типа вращений. В [47] система связанных уравнений ван дер Поля была получена из расширенной версии модели Вильсона и Коуэна для динамики ряда возбуждающих и тормозных нейронных подгрупп как для диссипативной, так и для реактивной связи. В работе [48] обсуждаются взаимодействия между тремя основными частотными ритмами миоэлектрической активности у человека с использованием модели в виде кольца осцилляторов. Остановимся подробнее на результатах работ [42–50].

6. Уравнение ван дер Поля и моделирование процессов в человеческом организме

6.1. Модель сердца (1928). Первым доказательством применимости уравнения ван дер Поля к моделированию процессов в человеческом организме явилась уже упомянутая статья [15] под названием «Сердцебиение, рассмотренное в рамках модели релаксационных колебаний, и электрическая модель сердца», авторами которой являлись ван дер Поль и ван дер Марк (1928). Они рассматривали сердце

как систему с тремя связанными элементами, которым соответствовали синусный узел (S), предсердие (A) и желудочек (V). Авторы представили сердце как систему одинаковых взаимосвязанных релаксационных систем, описываемых уравнением

$$\ddot{v} - \alpha(1 - v^2)\dot{v} + \omega^2 v = 0 \qquad (8)$$

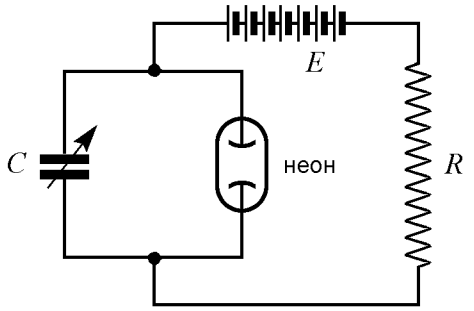


Рис. 2. Система, способная генерировать релаксационные колебания. Она состоит из неоновой лампы, конденсатора приблизительно на 1 мкф, сопротивления порядка 1 МОм и батареи на 180 В, [15]

и дополнили ее запаздывающим элементом, необходимым для моделирования передачи стимула от предсердия через атрио-вентрикулярный узел к желудочку. В данной модели импульс передавался только в одном направлении, то есть от синуса к предсердию, и затем от предсердия к желудочку. В качестве одной из таких релаксационных систем ван дер Поль и ван дер Марк выбрали систему с неоновой лампой, через которую проходит прерывистый разряд (рис. 2).

Затем, опираясь на выдвинутые предположения, они создали прибор, схематичное изображение которого приведено на рис. 3.

«Электрическое сердце», созданное ван дер Полем и ван дер Марком, представляло собой весьма приближенную модель сердца, однако позволяло моделировать некоторые «режимы» работы реального органа. В частности, оно хорошо отражало предсердно-желудочковую блокаду (эффект постепенного уменьшения связи между предсердием и желудочком) и, как отмечают авторы, точно воспроизводило известные натурные эксперименты.

Когда электрическая модель сердца функционировала в нормальном режиме, подавался небольшой импульс на желудочек. Если это делалось сразу же после си-

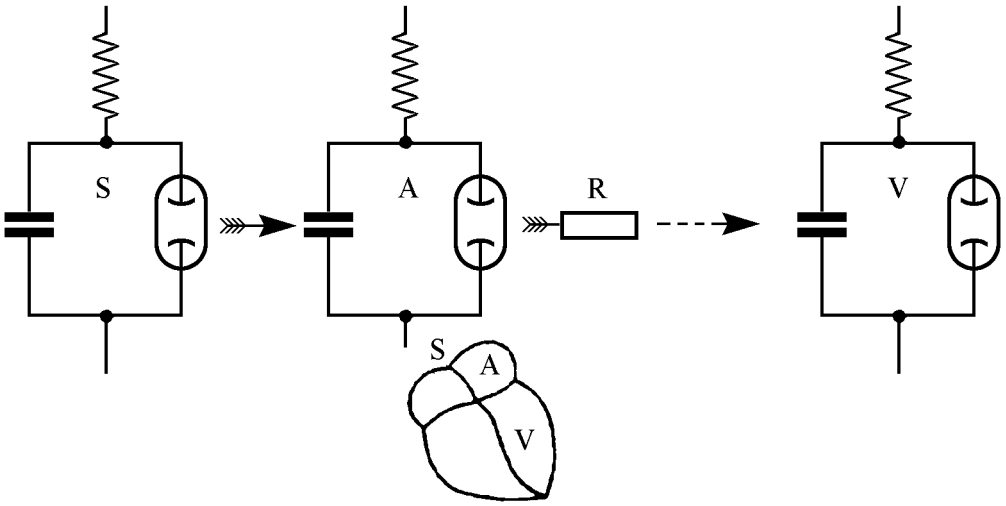


Рис. 3. Схематическое представление сердца тремя релаксационными системами: S (синусный узел), A (предсердие) и V (желудочек). R – запаздывающая система, представляющая в модели конечное время, необходимое для того, чтобы стимул прошел через (A–V)-узел. [15]

столии (сокращения) желудочка, то в системе ничего не происходило, так как конденсатор в V находился в периоде невозбудимости. Однако, если этот эксперимент повторялся немного позже, то происходило возбуждение желудочковой экстрасистолии (несвоевременное сокращение сердечной мышцы; в данном эксперименте – несвоевременная вспышка неоновой лампы). Авторы обнаружили зависимость между величиной стимула, необходимого для вызова желудочковой экстрасистолии, и фазой цикла желудочка: величина стимула экспоненциально убывала с увеличением фазы. Необходимо отметить, что подобный закон прослеживается в экспериментах с реальным органом.

Также в работе [15] приведено описание предсердной экстрасистолы и экстрасистолии синусного узла, которые сходны с экстрасистолией желудочка.

Конечно, сегодня используются другие, более сложные модели, но работа [15], будучи одной из первых, задала правильную структуру модели сердца.

6.2. Моделирование колоректальной миоэлектрической функции у людей (1976). Известно, что стенка толстой кишки состоит из множества ячеек (их длина – 100...400 мкм), расположенных в виде решетки. Внутри этих ячеек спонтанно возникают колебания трансмембранного потенциала, которые получили название медленной волновой активности. Такие медленные волны играют важную роль в моторике желудочно-кишечного тракта. Проведенные авторами [48] клинические эксперименты показали, что в ткани толстой кишки присутствуют три различных частотных паттерна: колебания на низкой частоте 0.05 Гц, на более высокой частоте 0.12 Гц, а также периоды нулевой активности. Математическое моделирование этих частотных паттернов проводилось на основе уравнения ван дер Поля

$$\ddot{x} - \lambda(a^2 - x^2)\dot{x} + \omega^2 x^2 = 0, \tag{9}$$

где x – колебания трансмембранного потенциала, частота которых определяется величиной ω, амплитуда – величиной a, а отклонение формы колебаний от синусоидальной – λ. Уравнение ван дер Поля использовалось из-за его простоты и пригодности для моделирования электрической и биологической динамики. Простота означает, что подобное моделирование требует относительно недолгого поиска необходимых параметров в отличие от моделей типа Ходжкина–Хаксли. Авторы рассмотрели три математические модели автономной колебательной ячейки стенки толстой кишки.

Первая модель включала в себя кольцо из четырех осцилляторов ван дер Поля, каждый из которых имел собственную частоту. С помощью этой модели путем изменения начальных условий были получены три устойчивых решения с разными частотами: синфазное (низкочастотное), среднефазное, 90° (решение на несвязанной частоте) и противофазное (высокочастотное). Нулевая активность получалась путем суммирования выходов двух осцилляторов, находящихся в противофазе. Известно, что получение различных решений путем изменения начальных условий не характерно для физиологии человека, и поэтому была исследована возможность переключения на различные колебательные моды с помощью подачи внешнего возмущения, представляющего собой прерывистую (дискретную) синусоидальную волну. В качестве альтернативы внешнему стимулу было исследовано переключение между модами посредством введения случайного шума; непрерывного внешнего стимула,

частота которого изменялась случайным образом, а также путем случайного возмущения параметра собственной частоты одного из осцилляторов в кольце.

Уравнение ячейки второй модели представляет собой осциллятор с жестким возбуждением

$$\ddot{x} + \lambda(b - cx^2 + dx^4)\dot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{10}$$

характеризующийся нулевым устойчивым состоянием и неустойчивым предельным циклом (имеется в виду, что колебаний не будет, нулевая точка, соответствующая нулевой активности, является устойчивой точкой данной модели осциллятора). Особенности динамики данного уравнения при изменении характерных параметров рассмотрены, например, в [51]. Основным отличием данной модели от первой является то, что нулевая активность получается без суммирования сигналов двух генераторов. Это было достигнуто путем изменения базового уравнения.

В третьей модели уравнение ван дер Поля после применения преобразования Льенара $y = -\dot{x} + \lambda(a^2 x - x^3/3)$ и добавления члена первого порядка приобретает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda(a^2 x - \dfrac{x^3}{3}) - y, \\ \dot{y} = \omega^2(x - by). \end{cases} \tag{11}$$

Один осциллятор такого типа при $b = 0$ демонстрирует колебания, отвечающие предельному циклу. Однако при значении параметра $b > 0$ в системе будут наблюдаться затухающие колебания.

Связанные осцилляторы такого типа определяют низкочастотную и высокочастотную моды при $b = 0$. Нулевая активность в данной системе будет наблюдаться при $b > 0$ после некоторого переходного процесса.

По словам авторов [48], во время написания данной работы имелось мало информации о структуре эквивалентной схемы и о вероятных значениях параметров. Поэтому с помощью простейшей модели авторы попытались воспроизвести различные явления, полученные ими экспериментально. Также было показано, что две базовые измеренные частоты могут быть воспроизведены посредством использования одинаковых связанных осцилляторов, а введение двух видов ячеек стенки толстой кишки не является необходимым.

6.3. Связанные осцилляторы ван дер Поля – модель возбуждающих и тормозящих нейронных взаимодействий (1980). В конце двадцатого века часто предпринимались попытки связать процессы, происходящие в нервных клетках, с наблюдаемыми электроэнцефалограммами (ЭЭГ). Было экспериментально подтверждено существование тесной связи между постсинаптическим потенциалом (управляет возбудимостью клетки) и ЭЭГ, что впоследствии стало толчком к созданию математической модели, описывающей взаимодействие локальных популяций нейронов.

Пионерами в моделировании процессов, происходящих в мозге, стали Вилсон и Коуэн (1972) [49]. Они получили систему дифференциальных уравнений для двух нейронных популяций: возбуждающей и тормозящей. В их модели предполагалось,

что нейроны активируются, только если их постсинаптический потенциал превысит определенное значение (знаменитый закон «все или ничего»). Постсинаптический потенциал для каждой популяции представлял собой суперпозицию сигналов, приходящих от *остальных* популяций. Модельные уравнения Вилсона–Коуэна для M взаимодействующих нейронных подгрупп двух популяций (расширение модели) имеют вид

$$\begin{cases} \tau_{\mathrm{e}m}\dot{E}_m + E_m = (k_{\mathrm{e}m} - r_{\mathrm{e}m}E_m)S_{\mathrm{e}m}(N_{\mathrm{e}m}), \\ \tau_{\mathrm{i}m}\dot{I}_m + I_m = (k_{\mathrm{i}m} - r_{\mathrm{i}m}I_m)S_{\mathrm{i}m}(N_{\mathrm{i}m}), \\ N_{\mathrm{e}m} = \sum\limits_{n=1}^{M}(c_{mn}E_n - c'_{mn}I_n) + P_{\mathrm{e}m}, \\ N_{\mathrm{i}m} = \sum\limits_{n=1}^{M}(d'_{mn}E_n - d_{mn}I_n) + P_{\mathrm{i}m}, \\ m = 1, ..., M, \end{cases}$$

где точка означает дифференцирование по времени; $E_m(t)$ и $I_m(t)$ – активности m-й возбуждающей и m-й тормозящей подгрупп. Индексы e и i соответствуют «возбуждающей» и «тормозящей» популяциям, в то время как m и n обозначают подгруппы. В первом и втором уравнениях системы τ_{jm} – временная нейронная постоянная мембраны для m-й возбуждающей или тормозящей подгруппы в соответствии с $j = \mathrm{e}$ или $j = \mathrm{i}$; r_{jm} представляет собой абсолютный рефрактерный период; S_{jm} – функция отклика, отражающая ожидаемую долю нейронов на пороге возбуждения; P_{jm} – возбуждение или торможение, идущее от рецепторов к нервному центру; k_{jm} – максимальное значение функции отклика, а $c_{mn}, c'_{mn}, d_{mn}, d'_{mn}$ – коэффициенты взаимодействия между возбуждающими и тормозящими подгруппами. Как известно, спектры мощности ЭЭГ содержат большое количество максимумов на разных частотах, связанных друг с другом нелинейно. Поэтому эффективной моделью сложных явлений, отражением которых является ЭЭГ, могут стать связанные осцилляторы ван дер Поля. Введя в модель Вилсона–Коуэна некоторые упрощения, а именно предполагая, что функция отклика имеет вид логистической кривой, автор работы [47] пришел к системе связанных релаксационных генераторов с двумя степенями свободы. Затем, разложив функцию отклика в ряд Тейлора, он окончательно получил:

$$\begin{cases} \ddot{E}_1 + \omega_{11}^2(E_1 + \mu_1 E_2) = \\ \quad = \beta_{\mathrm{e}1}c_{11}\left\{\left[1 - 4\alpha_{\mathrm{e}1}^2 c_{11}^2(E_1 + \lambda_1 E_2)^2\right](\dot{E}_1 + \lambda_1\dot{E}_2) - (\beta_{\mathrm{e}1}c_{11}\tau_{\mathrm{e}1})^{-1}\dot{E}_1\right\}, \\ \ddot{E}_2 + \omega_{22}^2(E_2 + \mu_2 E_1) = \\ \quad = \beta_{\mathrm{e}2}c_{22}\left\{\left[1 - 4\alpha_{\mathrm{e}2}^2 c_{22}^2(E_2 + \lambda_2 E_1)^2\right](\dot{E}_2 + \lambda_2\dot{E}_1) - (\beta_{\mathrm{e}2}c_{22}\tau_{\mathrm{e}2})^{-1}\dot{E}_2\right\}, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$\omega_{11}^2 = \beta_{\mathrm{e}1}(\beta_{\mathrm{i}1}c'_{11}d'_{11} + \beta_{\mathrm{i}2}c'_{12}d'_{21}),$$
$$\omega_{22}^2 = \beta_{\mathrm{e}2}(\beta_{\mathrm{i}1}c'_{21}d'_{12} + \beta_{\mathrm{i}2}c'_{22}d'_{22}),$$
$$\mu_1 = (\beta_{\mathrm{i}1}c'_{11}d'_{12} + \beta_{\mathrm{i}2}c'_{12}d'_{21})/(\beta_{\mathrm{i}1}c'_{11}d'_{11} + \beta_{\mathrm{i}2}c'_{12}d'_{21}),$$
$$\mu_2 = (\beta_{\mathrm{i}1}c'_{21}d'_{11} + \beta_{\mathrm{i}2}c'_{22}d'_{21})/(\beta_{\mathrm{i}1}c'_{21}d'_{12} + \beta_{\mathrm{i}2}c'_{22}d'_{22}),$$
$$\lambda_1 = c_{12}/c_{11}, \quad \lambda_2 = c_{21}/c_{22}.$$

Здесь E – амплитуды возбуждающих популяций (автор пренебрег амплитудой тормозящей активности вследствие ее малости по сравнению с возбуждающей); τ_{e1}, τ_{e2}– временные нейронные постоянные возбуждающих популяций; c'_{11}, d'_{11}, c'_{12}, d'_{21}, c'_{21}, d'_{12}, c'_{22}, d'_{21}, d'_{22}, c_{11}, c_{22}, c_{21}, c_{12} – коэффициенты взаимодействия между популяциями; $\beta_{e1,2} = k_{e1,2}\alpha_{e1,2}/\tau_{e1,2}$, где $k_{e1,2}$ – максимальное значение функции отклика, а $\alpha_{e1,2}$ – коэффициенты пропорциональности при разложении функции отклика в ряд Тейлора.

Следует отметить, что для упрощения функции отклика может применяться не только разложение в ряд Тейлора. Например, в [52] функция отклика имеет вид обратной тангенциальной функции.

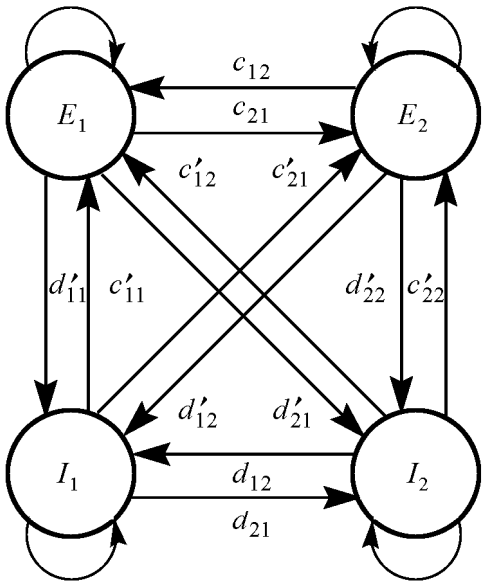


Рис. 4. Схема взаимодействия двух связанных возбуждающих и тормозящих нейронных популяций. Круги представляют возбуждающую и тормозящую популяции. Коэффициенты взаимосвязи показаны над стрелками. [47]

На рис. 4 представлена схема взаимодействия между двумя связанными возбуждающими и тормозящими популяциями. Вследствие использованной автором [47] аппроксимации исчезает взаимосвязь между тормозящими популяциями I_1 и I_2, а также петли обратной связи этих популяций.

В случае $\mu_1 = \mu_2 = 0$ (отсутствие резонанса) решение низшего порядка системы (12) имеет вид

$$E_m = A_m e^{i\omega_{mm}t} + \text{c.c.}, \tag{13}$$

где A_m – комплексная амплитуда, а c.c. обозначает комплексно-сопряженный член, $m = 1, 2$. В предположении, что A_m – медленно меняющаяся функция времени T, с применением операции усреднения в [47] получена система автономных уравнений относительно квадратов амплитуд

$$\begin{cases} \dfrac{dQ_1}{dT} = \gamma_1(q_1 - Q_1 - 2\lambda_1^2 Q_2)Q_1, \\ \dfrac{dQ_2}{dT} = \gamma_2(q_2 - Q_2 - 2\lambda_2^2 Q_1)Q_2, \end{cases} \tag{14}$$

где $\gamma_m = 4\alpha_{em}^2\beta_{em}c_{mm}^3, Q_m = |A_m|^2, q_m = (k_{em}\alpha_{em}c_{mm} - 1)/(\gamma_m\tau_{em})$, $m = 1, 2$.

Фазовые портреты, соответствующие (14), представлены на рис. 5. Для простоты предполагается, что два осциллятора идентичны, то есть $\beta_{e1} = \beta_{e2}$, $c_{11} = c_{22}$, $\tau_{e1} = \tau_{e2}$, $\lambda_1 = \lambda_2$ и, следовательно, $q_1 = q_2 = q$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и $\gamma_1 = \gamma_2$. В случае $2\lambda_2^2 > 1$ устойчивы одномодовые решения, а двумодовые колебания, наоборот, неустойчивы. В случае $2\lambda_2^2 < 1$ становятся устойчивыми двумодовые колебания, а одномодовые решения теряют устойчивость.

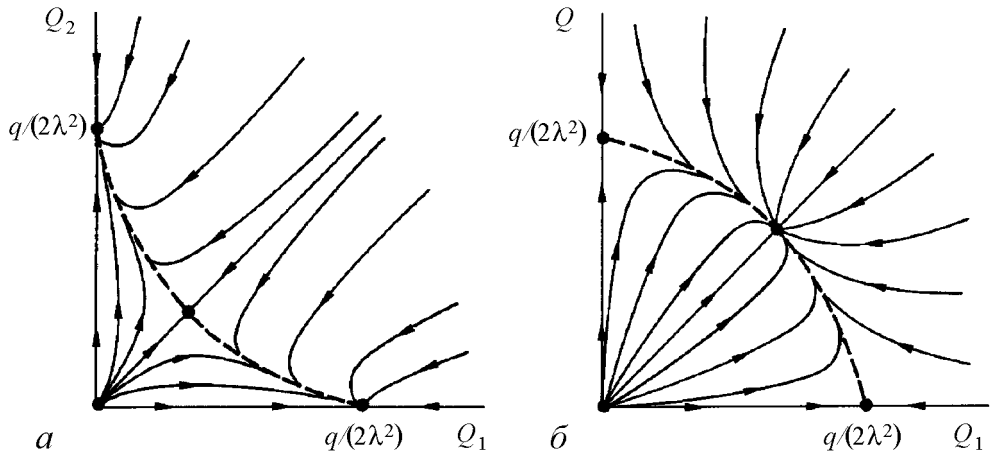


Рис. 5. Схематичные фазовые портреты в случае идентичного осциллятора ($q_1 = q_2 = q$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\gamma_1 = \gamma_2$). Центральная особая точка представляет собой неустойчивое седло в случае *а* ($2\lambda^2 > 1$) и устойчивый узел в случае *б* ($2\lambda^2 < 1$) [47]

Также был рассмотрен случай внутреннего резонанса ($\omega_{11} \cong \omega_{22}$), в котором возможен захват колебаний.

Результаты, полученные в данной работе, являются чисто теоретическими и не сравниваются с экспериментально полученными ЭЭГ. По мнению автора [47], в дальнейшем они могут быть использованы для интерпретации ЭЭГ путем связи физиологических параметров с коэффициентами системы связанных генераторов ван дер Поля.

6.4. Линейные и нелинейные жесткость и трение при моделировании колебательных движений конечности человека (1995). Моделирование движения конечности человека как автоколебательного осциллятора является довольно сложным процессом. Основной задачей при таком моделировании является определение функций упругости и трения. Для решения этой задачи авторы [46] используют метод, названный ими W-метод и предполагающий, что колебательные движения определяются следующим дифференциальным уравнением:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + W(x, \dot{x})\omega_0 = 0, \tag{15}$$

где x – пространственное отклонение от исходного положения, точка означает дифференцирование по времени, а W содержит все консервативные и диссипативные отклонения от канонического осциллятора. Умножая (15) на dx/dt и производя интегрирование, получаем

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2) + W(x, \dot{x})\omega_0 \dot{x} dt = 0$$

или, что эквивалентно,

$$-W(x, \dot{x}) = \frac{d(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2)}{2d\omega_0 x} = \frac{d(\dot{\xi}^2 + \xi^2)}{2d\xi}, \tag{16}$$

где $\xi = \omega_0 x$, а точка теперь означает дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$. Видно, что полученная величина является производной по координате от

полной энергии осциллятора в данной точке и может быть получена из экспериментальных данных. Метод состоит в вычислении значения W для каждого значения ξ и $d\xi/dt$ и последующем разложении функции W в ряд Тейлора по $\xi^p(d\xi/d\tau)^q$ с целью определения слагаемых жесткости и трения, вносящих значительный вклад в W, и порядка величины их коэффициентов. Авторы ограничились исследованием W-функции только в пределах маятниковой колебательной динамики. Согласно этой теории, испытуемый в положении сидя раскачивает ручной маятник. Колебания такой системы можно описать уравнением

$$mL_{\text{eq}}^2\ddot{\theta} + gmL_{\text{eq}}\sin\theta + W(x,\dot{x}) = 0, \tag{17}$$

где m – полная масса руки и маятника, L_{eq} – эквивалентная длина маятника, mL_{eq}^2 – момент инерции относительно оси вращения, располагающейся в запястье. Инерционный $mL_{\text{eq}}^2\ddot{\theta}$ и гравитационный $gmL_{\text{eq}}\sin\theta$ моменты легко вычислить экспериментально из графика координаты траектории. Зная эти две величины, можно найти $W(x,\dot{x})$. Полученные значения $W(x,\dot{x})$ затем раскладываются в ряд Тейлора, и методом множественной регрессии (состоит в анализе связи между несколькими независимыми переменными и зависимой переменной) определяется, какие слагаемые трения и деформации вносят существенный вклад в движение. Коэффициенты данной автоколебательной системы определяются из уравнения

$$mL_{\text{eq}}^2\ddot{\theta} + gmL_{\text{eq}}\sin\theta = -c_{10}\theta - c_{30}\theta^3 - c_{12}\theta\dot{\theta}^2 - c_{01}\dot{\theta} - c_{03}\dot{\theta}^3 - c_{21}\theta^2\dot{\theta}.$$

Следует отметить, что основными нелинейными функциями трения и деформации, которые используются в разложении, являются функции Рэлея ($\dot{\theta}^3$), ван дер Поля ($\theta^2\dot{\theta}$) и Дуффинга (θ^3). Было проведено три эксперимента. В первом эксперименте испытуемый садился на стул и клал руки на подлокотник. Затем ему давали маятник и заставляли раскачивать его от запястья в нормальной плоскости. Испытуемый при раскачивании должен был смотреть на стену перед собой, а для раскачивания маятника использовать только запястье. В ходе эксперимента регистрировалась пространственно-временная характеристика системы, затем определялся момент вращательной инерции. После эксперимента данные анализировались при помощи W-подхода. Данный эксперимент показал, что с увеличением вращательной инерции увеличивается вклад линейной и кубической жесткости, а вклад линейного трения и трения, выраженного переменными Рэлея и ван дер Поля, уменьшается. На рис. 6 показаны наблюдаемый и моделируемый фазовые портреты системы «запястье–маятник».

Во втором эксперименте колебательные движения маятника совершались на частотах, выше и ниже собственной (собственная частота системы «запястье–маятник» $\omega = \sqrt{g/L_{\text{eq}}}$). Задача этого эксперимента подобна задаче первого за исключением того, что для настройки колебаний маятника на частоты $0.8\omega_0$, $1.05\omega_0$ и $1.6\omega_0$ был использован метроном (прибор, отмечающий короткие промежутки времени равномерными ударами). Эксперимент показал, что с увеличением частоты отстройки увеличивается вклад «трения ван дер Поля», в то время как «трение Рэлея» остается постоянным, а вклад линейного трения уменьшается. В зависимости от направления отклонения частоты колебаний от собственной, линейная и кубическая компоненты жесткости вычитались или прибавлялись к суммарной жесткости.

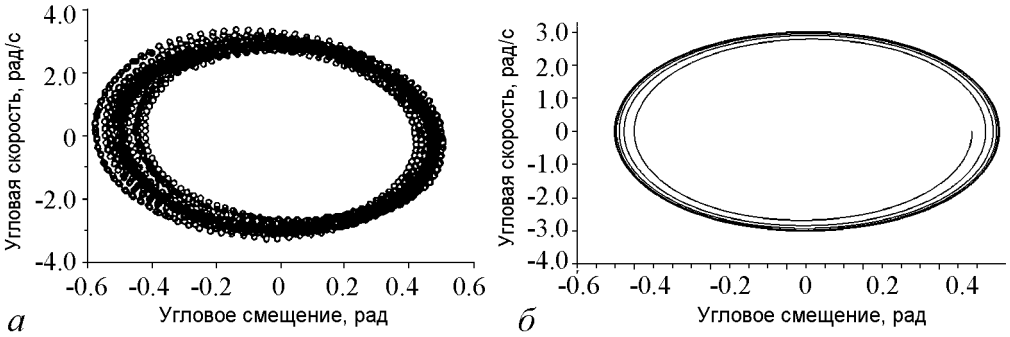


Рис. 6. Наблюдаемый [46] (*а*) и моделируемый (*б*) фазовые портреты. Моделируемый фазовый портрет получен на основе (16). Значения коэффициентов: $m = 1.117$ кг, $L_{\mathrm{eq}} = 0.333$ м, $c_{10} = 1.541$, $c_{30} = -1.124$, $c_{01} = -0.096$, $c_{03} = 0.010$, $c_{21} = 0.439$

С увеличением момента инерции увеличивались коэффициент линейной жесткости, а также коэффициенты нелинейного трения ван дер Поля и Рэлея, а коэффициент линейного трения, наоборот, уменьшался. Третий эксперимент имел своей целью установление связи между вкладами консервативных и неконсервативных слагаемых и амплитуды колебаний. Амплитуда определялась пространственными маркерами, размещенными впереди и сзади плоскости, в которой совершались колебания. Эксперимент показал, что при уменьшении амплитуды коэффициент линейной жесткости возрастает, а жесткость Дуффинга становится все более и более отрицательной. Коэффициенты при нелинейных слагаемых затухания увеличивались с уменьшением амплитуды, в то время как коэффициент линейного трения уменьшался. Быстрее увеличивались коэффициенты при нелинейных слагаемых затухания у более крупных маятников. С ростом момента инерции коэффициент линейного трения убывал.

Для обобщения зависимостей, полученных в ходе экспериментов, была составлена таблица.

Коэффициенты, полученные с помощью W-подхода, дали приемлемые модели эмпирически наблюдаемых явлений.

Таблица

Эксперимент 1:	Линейное трение	Трение ВдП	Трение Рэлея	Линейная жесткость	Кубическая жесткость
Вращательная инерция +	−	−	−	+	+
Эксперимент 2:					
Вращательная инерция +	−	+	+	+	+
Частота отстройки +	−	+	const	+	−
Эксперимент 3					
Вращательная инерция +	−	+	+	нет данных	нет данных
Амплитуда −	−	+	+	+	−

«+» обозначает увеличение, «−» – уменьшение величины, const означает, что величина остается постоянной. «Нет данных» – в работе не упомянуты.

6.5. Моделирование бипедального опорно-двигательного аппарата связанными нелинейными осцилляторами ван дер Поля (2003). Перемещения людей и животных, такие как ходьба, бег или плавание, как известно, осуществляются ритмичными, синхронизированными движениями. Координация движений происходит в центральной нервной системе, которая генерирует сигналы в соответствии с желаемой траекторией движения. Сигналы генерируются так называемым генератором маршрута, представляющим собой сеть взаимосвязанных нелинейных осцилляторов. Каждой траектории движения отвечает определенный набор параметров и определенная степень «связанности» между осцилляторами.

Экспериментально установлено, что при ходьбе человек использует около 200 вариантов движения. Моделирование такого перемещения возможно только за счет существенного уменьшения рассматриваемых вариантов. На рис. 7 представлена трехмерная модель, которая охватывает наиболее важные состояния, определяющие походку.

Авторы работы [44] рассматривали двумерную модель, которая была способна осуществлять движения, параллельные саггитальной плоскости (плоскости, делящей объект на левую и правую части). Данная модель характеризуется тремя следующими состояниями: 1) передвижением на «негнущихся ногах» по типу поворотного маятника, 2) сгибанием колена из положения «стоя», а также 3) сгибанием голеностопного сустава лодыжки (рис. 8).

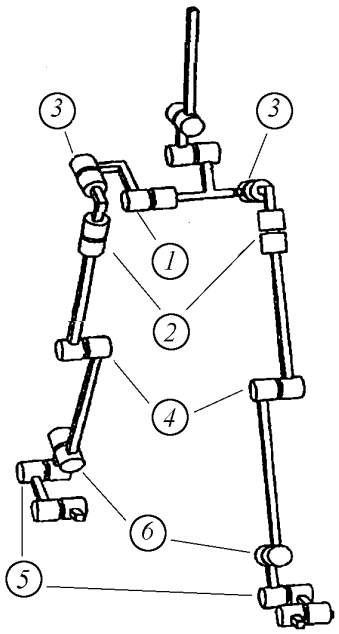


Рис. 7. Трехмерная модель, характеризующаяся шестью основными состояниями, определяющими походку [44]

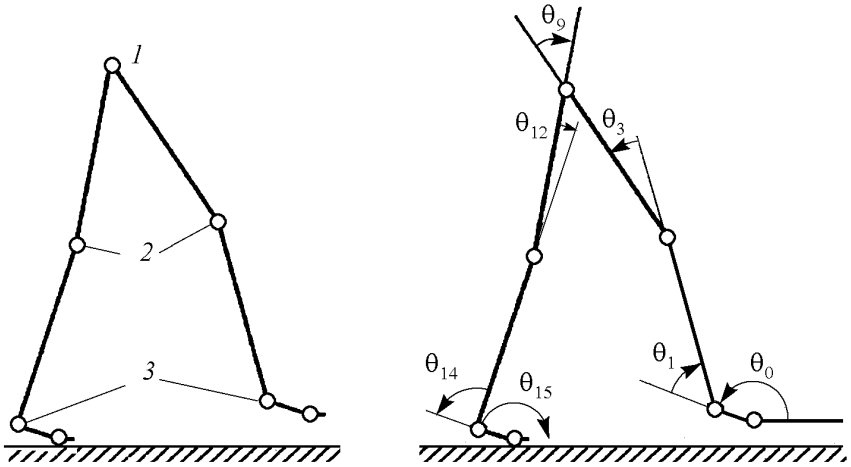


Рис. 8. Двумерная модель, характеризующаяся тремя детерминантами походки и относительными углами [44]

Перемещение людей и животных носит ритмичный характер, и поэтому системы управления опорно-двигательным аппаратом должны создавать ритмические, синхронизированные движения разных частей конечности. Такие системы управления также должны изменять частоту, амплитуду и фазу движения в зависимости от походки. В данной работе в качестве «генератора маршрута» используется набор связанных нелинейных осцилляторов ван дер Поля. Система дифференциальных уравнений для описания движения имеет вид

$$\ddot{\theta}_q - \varepsilon_q \left[1 - p_q(\theta_q - \theta_{q0})^2\right] \dot{\theta}_q + \Omega_q^2(\theta_q - \theta_{q0}) - c_{q,i} \left[\dot{\theta}_i(\theta_i - \theta_{i0})\right] -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} c_{q,k}(\dot{\theta}_q - \dot{\theta}_k) = 0, \quad \text{где } k = 1, 2, ..., m,$$

где θ_q – углы, отвечающие за динамику системы (см. рис. 8), $c_{q,i}$ – коэффициент связи между двумя осцилляторами θ_i и θ_q с различными частотами, $c_{q,k}$ – коэффициент связи между двумя осцилляторами с одинаковыми частотами.

Как указывают авторы [44], экспериментально доказано, что осцилляторы с частотой ω могут синхронизироваться с осцилляторами, частота которых равна $n\omega$, где n – целое число (рис. 9). Нелинейный член $c_{q,i} \left[\dot{\theta}_i(\theta_i - \theta_{i0})\right]$ характеризует связь между двумя осцилляторами θ_i и θ_q с различными частотами, а $c_{q,k}(\dot{\theta}_q - \dot{\theta}_k)$ отвечает за связь между двумя осцилляторами с одинаковыми частотами.

В предположении малой нелинейности модели решения аппроксимируются гармоническими функциями, после чего с помощью метода гармонического баланса

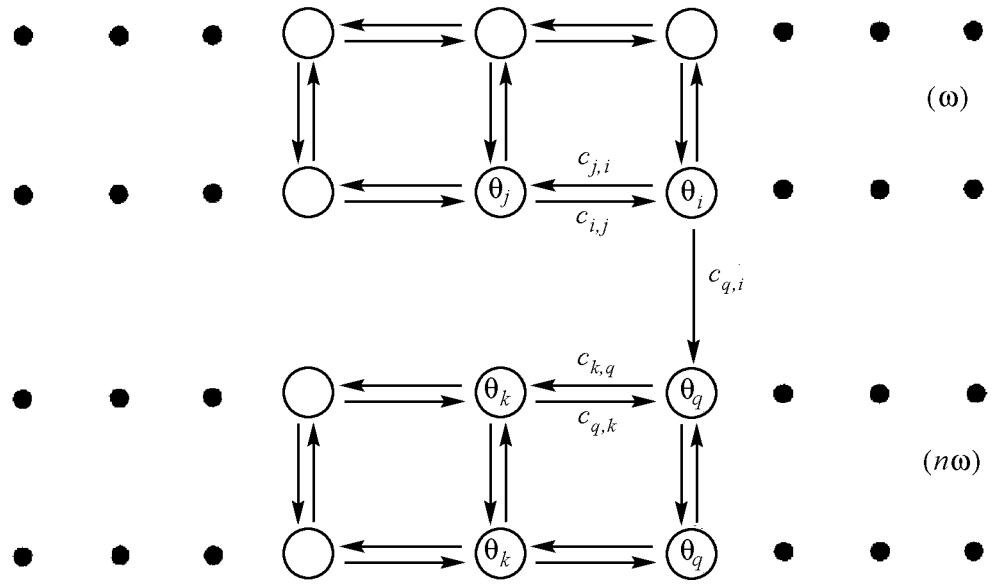


Рис. 9. Структура связи между осцилляторами ван дер Поля [44]

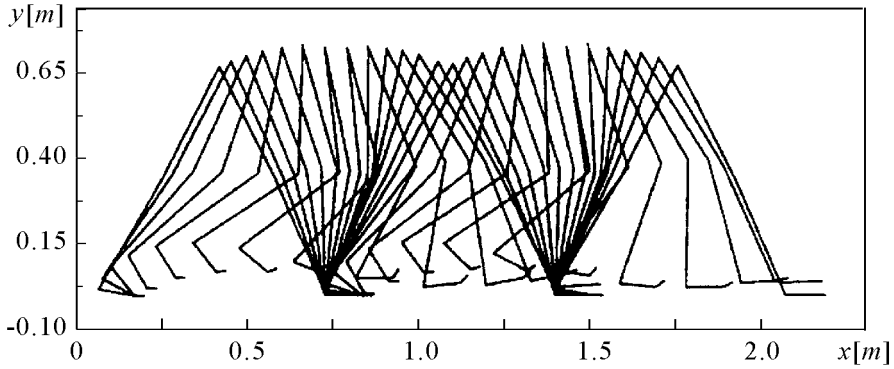


Рис. 10. Контурное изображение походки с длиной шага 0.68 м [44]

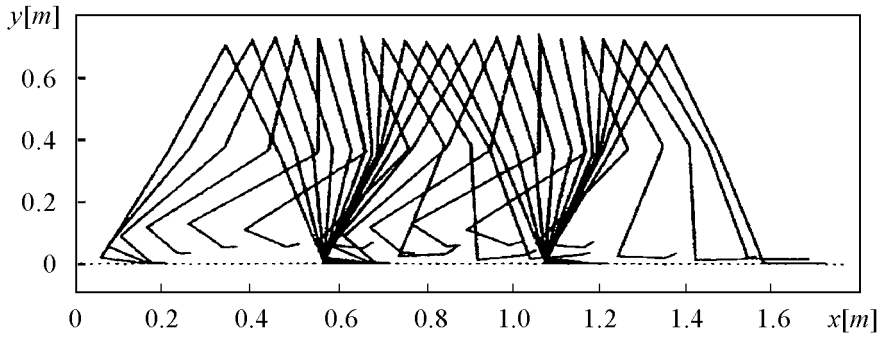


Рис. 11. Контурное изображение походки с длиной шага 0.44 м [44]

находятся необходимые параметры осцилляторов p_q и Ω_q (параметры, отвечающие за изменение походки).

Контурные изображения походки, полученные в процессе моделирования, представлены на рис. 10, 11.

Авторы [44] показали, что бипедальное передвижение возможно моделировать с помощью взаимосвязанных осцилляторов ван дер Поля. Путем изменения параметров этих осцилляторов можно получить модуляцию длины шага и частоты походки.

6.6. Моделирование поворота автоматизированной системы на основе осцилляторов ван дер Поля (2005). В настоящее время нелинейные дифференциальные уравнения широко используются в роботостроении для решения огромного количества задач, например, таких как автоматизированное передвижение, поворот и движение конечности. В работе [39] было исследовано влияние различных морфологических конфигураций на поворот автоматизированной системы. Объектом изучения являлась роботизированная платформа (рис. 12), в основе исследования которой лежала система двух связанных генераторов ван дер Поля:

$$\begin{cases} \ddot{x}_{\mathrm{hip}} + \mu(x_{\mathrm{hip}}^2 - 1)\dot{x}_{\mathrm{hip}} + \omega^2 x_{\mathrm{hip}} = G_{\mathrm{in}} fb + G_{\mathrm{hip-knee}} x_{\mathrm{knee}}, \\ \ddot{x}_{\mathrm{knee}} + \mu(x_{\mathrm{knee}}^2 - 1)\dot{x}_{\mathrm{knee}} + \omega^2 x_{\mathrm{knee}} = G_{\mathrm{in}} fb + G_{\mathrm{knee-hip}} x_{\mathrm{hip}}, \end{cases} \tag{18}$$

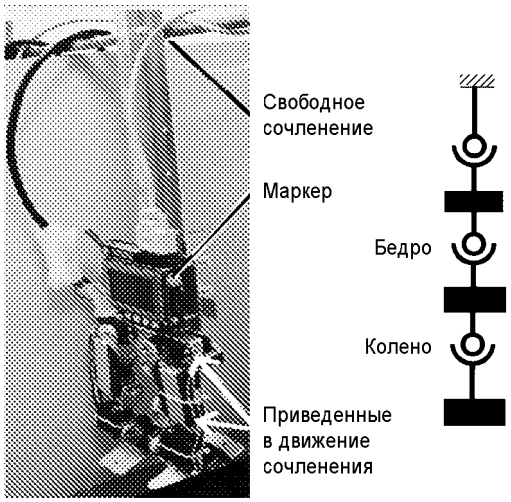


Рис. 12. Экспериментальная установка и ее эквивалентное представление [39]. Моделируемая система представляется в виде тройного маятника со свободным верхним шарниром и двумя нижними шарнирами, присоединенными к выходу нелинейного осциллятора. На систему помещен цветной маркер – координата этого маркера используется в качестве сигнала обратной связи

где $\mu \geq 0$ – параметр затухания, ω– свободная частота осциллятора, fb– сигнал обратной связи, $G_{\rm in}$ – коэффициент обратной связи, а $G_{\rm hip-knee}$ и $G_{\rm knee-hip}$ – коэффициенты перекрестной связи.

С моделью было проведено три эксперимента. В первом эксперименте была активирована только одна степень свободы, а именно выход осциллятора был подключен только к тазобедренному шарниру. Максимальная амплитуда колебаний системы при такой конфигурации достигла 163 пиксельных единиц, и в системе существовал устойчивый колебательный режим. Затем осциллятор подключили к коленному шарниру. Максимальная амплитуда колебаний составила всего лишь 61 пиксельную единицу, а предельный цикл содержал составные замкнутые круговые области, что означало функционирование в неоптимальном режиме. Во втором эксперименте участвовали уже две степени свободы: шарниры были активированы синхронно. Наблюдались устойчивые колебания, амплитуда которых достигала 201 пиксельную единицу. Тем не менее, этот режим в течение переходной фазы характеризовался случайными всплесками. В третьем эксперименте с двумя степенями свободы, при так называемом нейронном захвате ($G_{\rm hip-knee} = G_{\rm knee-hip}$), система достигает своего устойчивого состояния очень быстро и характеризуется наибольшей амплитудой – 206 единиц.

Также в [39] был экспериментально исследован вопрос о постепенном высвобождении степеней свободы (сначала был активирован тазобедренный шарнир, а коленный был «заморожен»). В [39] установлено, что использование обеих степеней свободы с начала эксперимента является более эффективным, как относительно максимально достижимой амплитуды колебаний, так и устойчивости режима.

Таким образом, самая большая эффективность (относительно амплитуды колебаний и устойчивости режима) была достигнута при использовании двух степеней свободы совместно с сильным нейронным захватом; наименьшую эффективность, как и следовало ожидать, продемонстрировала система с одной степенью свободы. Сравнение эффективности морфологических конфигураций приведено на рис. 13.

Авторы подчеркивают, что использование при моделировании осцилляторов ван дер Поля существенно упростило исследование, приведя к уменьшению зоны поиска решений с помощью ЭВМ, и позволило сосредоточить внимание на результирующих характеристиках.

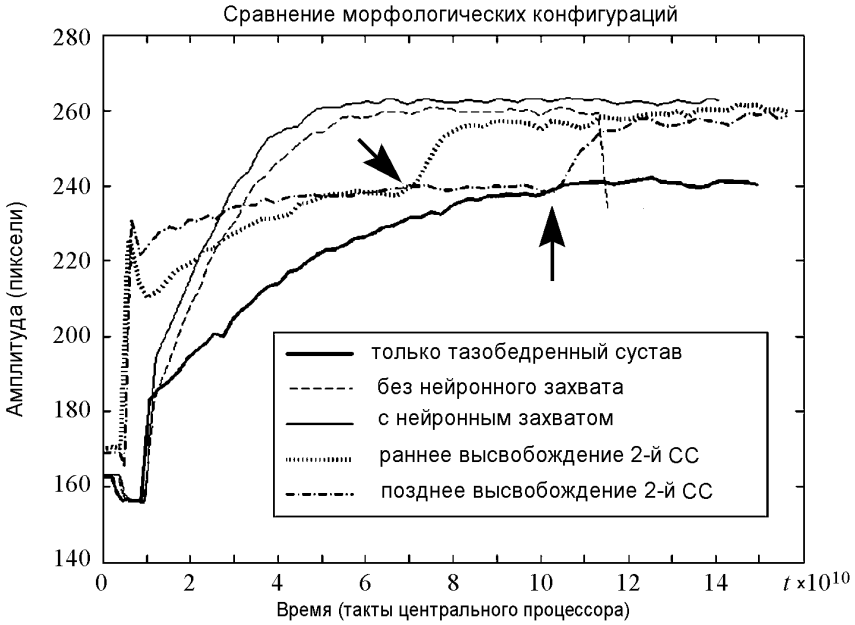


Рис. 13. Сравнение пяти морфологических конфигураций [39]. Стрелки обозначают время высвобождения второй степени свободы и активации ее осциллятора

6.7. Синхронизация при обработке и передаче информации в нейронных сетях (2007). В работе [50] нейросистема представляет собой простейшую нейронную сеть, состоящую из нескольких синаптически связанных нейронов. Динамическое моделирование такой сети позволяет понять, как происходят преобразования временной информации в памяти человека и его органах чувств. Связь между различными частями мозга осуществляется посредством синхронизации – центрального механизма нейронно-информационных процессов. Как свидетельствуют эксперименты, синхронная активность нейронов отвечает за такие процессы, как распознавание объекта и координация информации.

В рамках модели Бонхоффера–ван дер Поля, которую использует автор, уравнение одной ячейки сети имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - \dfrac{x^3}{3}, \\ \dot{y} = \varepsilon(x + a), \end{cases} \tag{19}$$

где x – нормированный мембранный потенциал, y – ток активации, ε определяет временной масштаб, параметр a характеризует порог возбудимости. Затем рассматривается система из двух связанных осцилляторов Бонхоффера–ван дер Поля:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2, y_1, y_2, d), \\ \dfrac{dy_1}{dt} = \varepsilon(x_1 + a_1), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, x_2, y_1, y_2, d), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \varepsilon(x_2 + a_2), \end{cases} \tag{20}$$

где

$$F_1 = x_1 - \frac{x_1^3}{3} - y_1 + d(x_2 - x_1),$$

$$F_2 = x_2 - \frac{x_2^3}{3} - y_2 + d(x_1 - x_2),$$

а d определяет связь между осцилляторами.

При аналитическом исследовании системы (20) было обнаружено, что в ней могут существовать два синхронных режима: синфазный и противофазный. Возникают эти режимы только при достижении параметром связи определенного значения.

В работе [50] был проведен вычислительный эксперимент, в котором также обнаружены синфазные и противофазные решения (рис. 14, 15).

В ансамбле, состоящем из трех колебательных элементов, были обнаружены синфазный режим и три смешанных режима. В смешанном режиме два элемента из трех колеблются синфазно, а третий – в противофазе к ним (рис. 16, 17).

Также была рассмотрена цепочка из 50 связанных элементов. Полученные при ее исследовании результаты позволили предположить, что при некоторых значени-

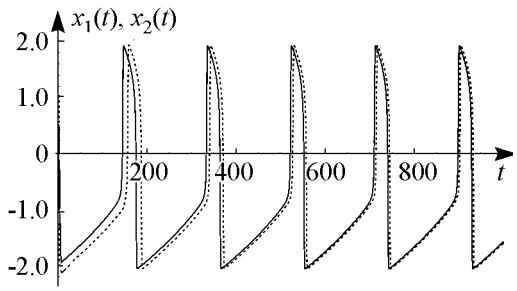


Рис. 14. Временная диаграмма синфазного режима колебаний двух связанных элементов. Параметры: $d = 0.01$, $\varepsilon = 0.02$, $a_1 = 0.995$, $a_2 = 0.994$. Начальные условия: $x_1(0) = y_1(0) = 1$, $x_2(0) = y_2(0) = 0.5$

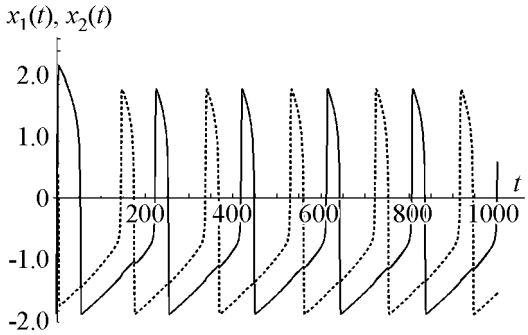


Рис. 15. Временная диаграмма противофазного режима колебаний двух связанных элементов. Параметры: $d = 0.01$, $\varepsilon = 0.02$, $a_1 = 0.995$, $a_2 = 0.994$. Начальные условия: $x_1(0) = y_1(0) = 0.4$, $x_2(0) = y_2(0) = -2$

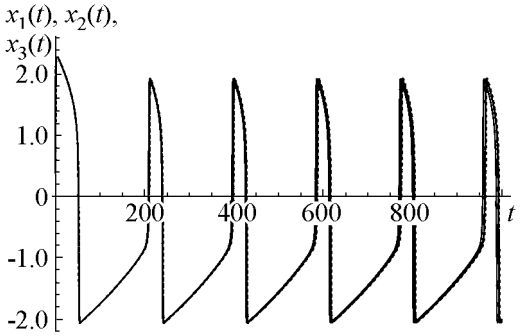


Рис. 16. Временная диаграмма синфазного режима колебаний трех связанных элементов. Параметры: $d = 0.01$, $\varepsilon = 0.02$, $a_1 = 0.995$, $a_2 = 0.994$, $a_3 = 0.993$. Начальные условия: $x_1(0) = y_1(0) = 0.4$, $x_2(0) = 0.4$, $y_2(0) = -2$, $x_3(0) = y_3(0) = -2$

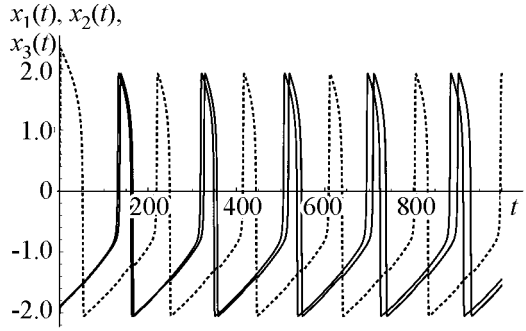


Рис. 17. Временная диаграмма смешанного режима колебаний трех связанных элементов. Параметры: $d = 0.01$, $\varepsilon = 0.02$, $a_1 = 0.995$, $a_2 = 0.994$, $a_3 = 0.993$. Начальные условия: $x_1(0) = 0.4$, $y_1(0) = -2$, $x_2(0) = -2$, $y_2(0) = 0.4$, $x_3(0) = -2$, $y_3(0) = 0.4$

ях параметров возможно существование 2^{N-1} различных устойчивых режимов глобальной синхронизации, где N– количество элементов в системе. При небольшой связи, когда синхронизация всех элементов отсутствует, обнаружено явление кластерной синхронизации (формирование групп соседних элементов, колеблющихся на одной частоте).

Таким образом, на основе уравнения Бонхоффера–ван дер Поля автору [52] удалось пронаблюдать синхронизацию между нейроноподобными элементами, что, по-видимому, позволит в дальнейшем исследовать и управлять синхронизацией в более сложных нейронных образованиях.

6.8. Моделирование связей в системе «сердце–сосуды» (2013). В настоящее время весьма актуальным и перспективным является изучение феномена биосинхронизации. Под биосинхронизацией авторы [45] понимают влияние подсистем организма друг на друга посредством существующих между ними взаимосвязей. Как правило, биосистемы обладают сложной пространственно распределенной структурой. Классические методы исследования таких систем, основанные на анализе каждой составляющей, приводят к сложным для интерпретации математическим моделям. Альтернативой классическому подходу является метод идентификации сложных систем, в основе которого лежат модельные уравнения. В работе [45] приведена модель пульсового механизма, построенная по результатам изменения перемещения стенок артериального сосуда. Известно, что такая система работает в режиме устойчивых колебаний, а с ростом частоты амплитуда колебаний такой системы уменьшается, что соответствует предельному циклу, поэтому выбор уравнения очевиден, это – уравнение ван дер Поля

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - r^2)\dot{x} + ax = 0, \tag{21}$$

где $\ddot{x}$ – ускорение стенки артерии, $\dot{x}$ – ее скорость, x – перемещение, $\omega = \sqrt{a}$ – частота основного гармонического колебания.

Но в уравнении (20) амплитуда колебаний не зависит от частоты, что противоречит физике рассматриваемого процесса. Для устранения этого несоответствия авторы «добавили» в (21) слагаемое из уравнения Рэлея, описывающее затухание. В итоге было получено уравнение:

$$\ddot{x} + \left[\varepsilon_1(x^2 - r^2) + \varepsilon_2(\dot{x}^2 - \omega_0 r^2)\right]\dot{x} + ax = 0. \tag{22}$$

Учитывая влияние подсистемы сердца и, полагая, что она представлена своим выходным сигналом $e(t)$ – сигналом ЭКГ, авторы [45] получили уравнение

$$\ddot{x} + \left[\varepsilon_1(x^2 - r^2) + \varepsilon_2(\dot{x}^2 - \omega_0 r^2)\right]\dot{x} + ax = F_{\text{СВ}}(x, e), \tag{23}$$

где $F_{\text{СВ}}(x, e) = (\dot{x} - \dot{e})\left[\alpha - \beta(x - e)^2\right]$. Здесь x – перемещение стенки сосуда, e – электрокардиосигнал, зарегистрированный синхронно с сигналом пульсовой волны. Неизвестные параметры α и β определяются с помощью метода наименьших квадратов, а параметры $\varepsilon_1, \varepsilon_2, r, a, \omega_0$ – с помощью пульсограммы.

Вид функции связи $F_{\text{СВ}}(x, e)$ определен авторами [45] «на основе физических представлений о взаимодействии двух связанных колебательных систем».

Затем было проведено сравнение фазовых портретов исходной системы и модельной (рис. 18).

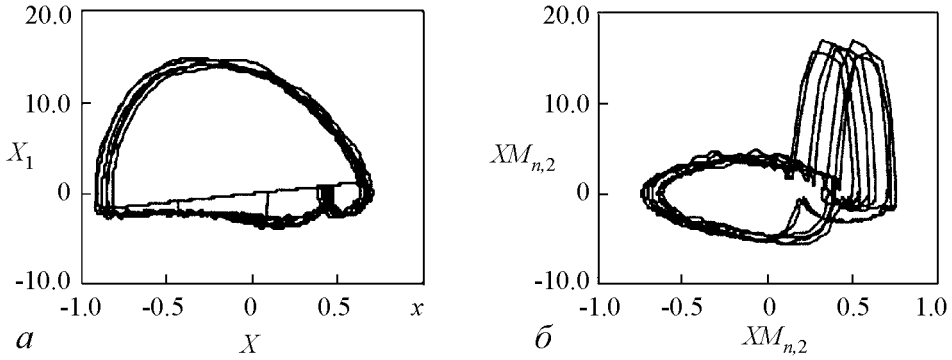


Рис. 18. Фазовые портреты объекта (а) и модельной системы (б). [45]

Из рис. 18 видно, что фазовые портреты исходной и модельной системы сильно отличаются. Для улучшения описания в качестве функции связи затем была использована информационная модель в форме нейронной сети Вольтерры (динамическая сеть, позволяющая производить нелинейную обработку последовательности сигналов $e(t)$, задержанных относительно друг друга; в данном случае с помощью этой сети строится аппроксимация функции связи), адекватно представляющая сложные нелинейные связи в сердечно-сосудистой системе.

Таким образом, динамика системы «сердце–сосуды» может быть представлена с помощью комбинированной модели, основой которой являются уравнение ван дер Поля–Рэлея, а также уравнение, описывающее работу сети Вольтерры. Такая модель содержит физиологически обусловленные параметры, которые могут выступать в роли характеристических признаков при решении задач диагностики.

6.9. Голосовые связки – два связанных осциллятора ван дер Поля (2013). Недавние исследования показали, что динамику осциллятора голосовой связки во время посылки звукового сигнала можно моделировать с помощью уравнения ван дер Поля, это поможет существенно упростить ее анализ и понимание основных принципов функционирования.

Некоторые расстройства голоса, связанные с десинхронизацией между левой и правой связками, вызванной натяжением ткани или асимметрией массы, приводят к генерированию субгармоники, бифонации (присутствию в спектре звука двух независимых частот) и несимметричным колебаниям. Модель связанных осцилляторов ван дер Поля используется авторами [42] для анализа влияния степени асимметрии и степени связи на колебания, генерируемые голосовыми связками.

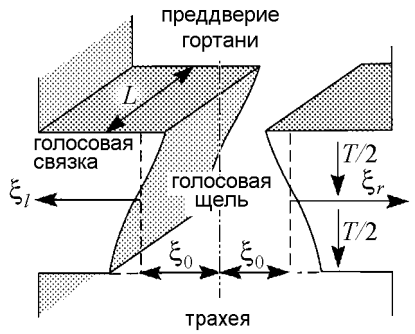


Рис. 19. Схема голосовых связок. [42]

В работе [42] считается известным, что движение ткани голосовых связок (рис. 19) описывается поверхностной волной, которая распространяется в направлении воздушного потока.

Движение правой голосовой связки подчиняется уравнению

$$M_r\ddot{\xi}_r + B_r(1+\eta_r\xi_r^2)\dot{\xi}_r + K_r\xi_r = P_g, \tag{24}$$

где ξ_r– изменение формы ткани в середине голосовой щели; M_r, B_r и K_r – соответственно, масса, затухание и жесткость, отнесенные к единице площади медиальной поверхности голосовых связок; η_r – нелинейный коэффициент затухания; P_g – среднее давление воздуха на голосовую щель. Движение левой связки описывается аналогичным уравнением.

Среднее давление воздуха на гортань записано в [42] в следующем виде:

$$P_g = \left(\frac{P_s}{k_t}\right)\frac{a_1 - a_2}{a_1}, \quad (a_1, a_2 > 0), \tag{25}$$

где P_s – давление под голосовыми связками, k_t – трансгортанный коэффициент давления, а a_1 и a_2 – области поперечного сечения гортани на нижнем и верхнем краях голосовых связок, соответственно. Зоны голосовой щели описываются уравнением

$$a_{1,2}(t) = L\left[\xi_0 + \xi_r(t \pm \tau_r)\right] + L\left[\xi_0 + \xi_l(t \pm \tau_l)\right], \tag{26}$$

где L – длина голосовых связок, ξ_0 – половина ширины гортани в случае, когда голосовые связки находятся в состоянии покоя, $\tau_{r,l}$ – время задержки поверхностной волны для прохождения половины высоты гортани T.

В случае малых смещений и небольшой задержки волны, уравнение (25) было аппроксимировано в [42] уравнением

$$P_g = \frac{P_s}{k_t\xi_0}(\tau_r\dot{\xi}_r + \tau_l\dot{\xi}_l). \tag{27}$$

Далее, отбрасывая подиндексы r и l у всех параметров, кроме коэффициента жесткости, авторы [42] допускают, что $C = P_s\tau/(k_t\xi_0)$ и, считая, что $C \geq B/2$, полагают $x_{l,r} = \sqrt{\eta B/(2C - B}\xi_{l,r}$. Вводя время $\tau = \sqrt{(K_r/M)}t$, авторы [42] получают систему двух связанных осцилляторов ван дер Поля

$$\ddot{x}_r - \mu(1 - x_r^2)\dot{x}_r + x_r = \alpha(\dot{x}_r - \dot{x}_l), \tag{28}$$

$$\ddot{x}_l - \mu(1 - x_l^2)\dot{x}_l + x_l = \alpha(\dot{x}_l - \dot{x}_r), \tag{29}$$

где $\mu = (2C - B)/\sqrt{MK_r}$, $\alpha = C/\sqrt{MK_r} \geq 0$ – параметр связи, а $Q = K_l/K_r \geq 0$ – параметр асимметрии.

Чтобы иметь представление о значениях коэффициентов, входящих в систему уравнений (28)–(29), в [42] рассмотрены значения параметров, соответствующие строению голосовых связок взрослого мужчины. Эти параметры имеют следующие значения: $M = 0.5$ г/см^2, $B = 50$ дин с/см^3, $K = 200000$ дин/см^3, $\tau = 1$, $k_t = 1.1$, которые дают значения коэффициентов $\mu = 0.30$ и $\alpha = 0.23$. Параметр асимметрии лежит в интервале $0 \leq Q \leq 1$. Этот диапазон значений для параметра Q означает, что левая голосовая связка является менее жесткой, чем правая. Чем меньше Q, тем серьезнее патология.

При увеличении степени связи между осцилляторами модель демонстрирует переход из несинхронизированного режима в синхронизированный. При увеличении степени асимметрии связанные осцилляторы ван дер Поля начинают совершать колебания в одной фазе с равными амплитудами.

Рассмотренная в [42] модель голосовых связок является сильно упрощенной, однако позволяет провести теоретическое исследование динамики голосовых связок. В дальнейшем авторы [42] намерены усовершенствовать данную модель и попытаться описать с ее помощью более сложные динамические процессы, например, такие как перекрытие противоположных голосовых связок.

7. Развитие и модификации уравнений ван дер Поля

Отметим, что возможны различные варианты развития и обобщения уравнения ван дер Поля. Например, в уравнении ван дер Поля–Дуффинга

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = 0, \tag{30}$$

учитывается дополнительная кубическая нелинейность. С физической точки зрения это отвечает учету эффекта неизохронности малых колебаний, то есть зависимости их периода от амплитуды.

Другим важным вариантом развития является увеличения числа взаимодействующих осцилляторов. В этом случае важным оказывается подход, который состоит в поэтапном упрощении уравнений: в переходе к укороченным уравнениям (их часто называют уравнениями Ландау–Стюарта) и далее к фазовой модели. Такой подход возможен, когда управляющий параметр, величина связи и частотная расстройка осцилляторов являются малыми. Тогда становится возможным применение метода медленно меняющихся амплитуд. Отметим в плане формирования соответствующей методологии работу Р.В. Хохлова [53], в которой был обоснован метод поэтапного упрощения уравнений.

Даже задача о двух связанных осцилляторах ван дер Поля оказывается достаточно сложной [54–57]. В простейшем случае связь осуществляется через скорости изменения переменных, что отвечает ее диссипативному характеру. Это наиболее простой тип связи. Для связанных осцилляторов наблюдаются такие классические эффекты, как синхронизация с соотношением частот 1:1, различные режимы кратной синхронизации и возможность квазипериодических колебаний (биений). В рамках фазового приближения, когда можно считать, что осцилляторы движутся по своим стационарным орбитам, эта система приводит к новой важной модели – уравнению Адлера–Хохлова [53, 54, 58]

$$\dot{\theta} = -\frac{\Delta}{2} - \mu \sin\theta, \tag{31}$$

где θ – относительная фаза осцилляторов, Δ – параметр их частотной расстройки. С помощью уравнения Адлера можно найти аналитически форму основного языка синхронизации на плоскости параметров (частотная расстройка осцилляторов – величина связи): $2\mu = |\Delta|$. Из характерных эффектов за пределами фазовой модели отметим режим «гибели колебаний», когда за счет диссипативного влияния связи автоколебания оказываются подавленными [54].

Альтернативный вариант – реактивная связь, которая является существенно более тонким эффектом [55–57]. Для реактивной связи уравнение Адлера получается только во втором порядке по величине связи ε, что требует учета возмущений стационарных орбит. В результате основной язык синхронизации имеет вид корневой особенности: $\varepsilon \propto \sqrt{|\Delta|}$. Из новых эффектов отметим возможность фазовой бистабильности, то есть сосуществование устойчивых синфазных и противофазных колебаний [55, 56][1].

Возможен также учет и других факторов. Так можно учесть влияние малой дополнительной нелинейности по типу осциллятора Дуффинга, а также малую неидентичность осцилляторов по управляющему параметру λ. В рамках фазовой модели это приводит к обобщенному фазовому уравнению, которое получено и исследовано в [59, 60]. В рамках приближения Ландау–Стюарта задача о неизохронных осцилляторах с обоими типами связи подробно обсуждается в [57].

Весьма интересным оказывается случай существенно неидентичных по параметру λ подсистем. Возникает новый режим широкополосной синхронизацией [58, 61]. Его физическая природа состоит в доминировании осциллятора с большим значением управляющего параметра λ, в результате чего возникает возможность синхронизации в сколь угодно широком интервале частотных расстроек. На плоскости параметров картина бифуркаций с учетом возможности широкополосной синхронизации обсуждается в [62, 63]. Отметим, что в [62] описан и соответствующий эксперимент с радиоэлектронными осцилляторами с неидентичными параметрами.

Переход к трем осцилляторам существенно усложняет картину. Фазовая модель в случае диссипативной связи представлена в [5]. Режим синхронизации всех трех осцилляторов в этом случае может быть найден аналитически. Можно показать, что на плоскости частотных расстроек соответствующая область имеет вид параллелограмма[2]. Этим, фактически, возможности аналитического исследования исчерпываются, и необходимо переходить к компьютерному анализу. Весьма эффективным в этом случае оказывается двухпараметрический ляпуновский анализ, когда на плоскости параметров области с разными типами режимов вывялятся с помощью расчета спектра показателей Ляпунова [64–67]. Это могут быть те или иные периодические режимы, режимы двухчастотной квазипериодичности, трехчастотной квазипериодичности, хаоса. Квазипериодическим режимам отвечают аттракторы в виде инвариантных торов разной размерности. Отметим, что для трех осцилляторов картина также зависит от геометрии связи, а именно наблюдается отличие случаев цепочки и кольца (сети) из осцилляторов. Так, для кольца область полной синхронизации уже не дается параллелограммом. При отказе от фазового приближения картина усложняется, область полной синхронизации меняет свое устройство: дополнительно появляется бифуркация Неймарка–Сакера и бифуркации коразмерности два [68].

[1]В принципе возможна также и связь через ускорение [5], в [12] ее называют гироскопической связью (*gyroscopic coupling*). Отметим, что реактивную связь в [57] называют консервативной, возможен также механический термин «упругая» связь (*elastic coupling*) [12].

[2]Этот результат представлен в монографии П.С. Ланды [5]. Интересно, что точно такая же фазовая модель для трех связанных лазеров и аналогичный результат были независимо получены заметно позже в [31].

Дадим иллюстрации в виде ляпуновских карт для трех связанных в цепочку и кольцо осцилляторов ван дер Поля, описываемых уравнениями:

$$\begin{aligned}
&\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0,\\
&\ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(2\dot{y} - \dot{x} - \dot{z}) = 0,\\
&\ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu f(\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}) = 0.
\end{aligned} \tag{32}$$

Здесь $f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (\dot{x} - \dot{y})$ для цепочки и $f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (2\dot{x} - \dot{y} - \dot{z})$ для кольца, λ – параметр возбуждения автономных осцилляторов, Δ_1 и Δ_2 – частотные расстройки второго и третьего осцилляторов относительно первого, μ – коэффициент связи.

Соответствующие ляпуновские карты представлены на рис. 20, причем рис. 20, *а* относится к цепочке, а рис. 20, *б* – к случаю кольца. На этих картах разным цветом обозначены области с режимами разного типа. На рис. 20, *а* область полной синхронизации всех трех осцилляторов P близка к параллелограмму. Некоторое отличие обусловлено приближенным характером фазовой модели. Можно видеть также две характерные полосы режимов двухчастотной квазипериодичности T_2, располагающиеся вдоль линий

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_1 = \Delta_2. \tag{33}$$

В соответствии с (32) они отвечают резонансным условиям, когда совпадают частоты первого–второго и второго–третьего осцилляторов. Для кольца на рис. 20, *б* можно видеть еще одну дополнительную полосу, отвечающую резонансному условию $\Delta_2 = 0$, когда совпадают частоты первого–третьего осцилляторов.

Двухчастотные режимы отвечают частичной синхронизации, когда захвачены соответствующие пары осцилляторов, но захват уже не точный. Вся эта картина погружена в область трехчастотной квазипериодичности T_3. Отметим, что внутри полос T_2 имеются тонкие области точных резонансов высших порядков. Возможны также и резонансные двухчастотные торы разных типов. На рис. 20 они представлены различными «лучами», расходящимися от центра рисунка.

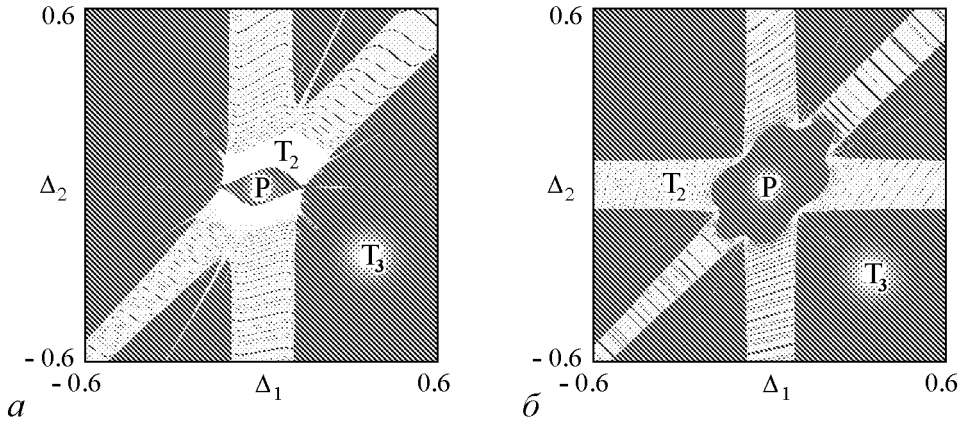


Рис. 20. Карты ляпуновских показателей системы (32): *а* – случай цепочки, *б* – случай кольца; $\lambda = 0.1$, $\mu = 0.04$, P – периодический режим, T_2 – двухчастотная квазипериодичность, T_3 – трехчастотная квазипериодичность

За счет диссипативного характера связи могут возникать различные варианты доминирования осцилляторов и, соответственно, разные типы широкополосной синхронизации [65, 66]. Интересно, что такие механизмы могут приводить к тому, что уменьшение диссипативной связи поэтапно выводит «за порог» возбуждения все новые осцилляторы. Тогда происходит каскад квазипериодических бифуркаций Хопфа, приводящих к мягкому возникновению инвариантных торов все более и более высокой размерности [67]. Эту ситуацию можно охарактеризовать как сценарий Ландау–Хопфа, который, таким образом, оказывается возможным в системе связанных осцилляторов ван дер Поля.

Заметим, что геометрия связи для трех осцилляторов с учетом возможности ее одностороннего характера может приводить к большому количеству вариантов. Так, семь случаев в рамках фазовой модели представлены в [69]. Увеличение числа осцилляторов еще более увеличивает возможное число вариантов, размерность наблюдаемых инвариантных торов, что заметно усложняет картину [70, 68]. В частности, может возникать множество режимов, отвечающих полной синхронизации осцилляторов [70].

Для кольца или цепочки из нескольких осцилляторов возникает еще одна особенность: необходимость учета знака коэффициента связи. Положительный коэффициент представляет собой собственно диссипативную связь, а отрицательный – «активную». Иногда об этих двух случаях говорят, как о притягивающем и отталкивающем взаимодействиях, поскольку первый тип связи стремится синхронизовать осцилляторы в фазе, а второй – в противофазе [71,72]. Активная связь не является физически неоправданной, она появляется в некоторых задачах лазерной физики [32] и динамики нейронов [73]. Изменение знака связи не сказывается существенно на динамике цепочки осцилляторов, отличие состоит лишь только в том, что синфазная синхронизация сменяется противофазной. Для сети или кольца изменение знака связи меняет устройство области полной синхронизации. Обсуждение случая кольца с активной связью можно найти в [74].

Анализ реактивной связи для трех осцилляторов представляет достаточно сложную задачу [75]. Фазовая модель в этом случае содержит как члены первого порядка по связи (в этом отличие от случая двух осцилляторов), так и квадратичные [75]. Отбросив квадратичные члены, получаем консервативную модель. Таким образом, слабая связь приводит к слабо диссипативному возмущению консервативной динамики [76]. Интересно, что консервативная динамика может возникать и в диссипативно связанной цепочке осцилляторов. Природа этого эффекта состоит в возможности свойства обратимости во времени (*reversibility*) за счет выбора собственных частот, приводящего к симметрии в системе [77]. Отметим, что некоторые вопросы и влияние типа нелинейности обсуждаются в [12].

Дальнейшая модификация может достигаться за счет усложнения архитектуры сети, например, можно построить кольцо из трех блоков, каждый из которых представлен кольцом. Можно использовать блоки из большего числа осцилляторов [78]. В то же время ансамбли из большого числа осцилляторов ван дер Поля или редуцированных фазовых осцилляторов представляют собой отдельную проблематику, которой посвящено множество оригинальных публикаций и монографий.

В заключение отметим, что материалы разделов статьи 1–6 доложены на XIV Всероссийской школе-семинаре «Волновые явления в неоднородных средах» памяти профессора А.П. Сухорукова, 26–31 мая 2014 г., Можайск, Московская область.

Работа выполнена при государственной поддержке ведущих научных школ России, грант НШ-828.2014.2 и грант НШ-1726.2014, и при поддержке грантов РФФИ № 12-02-00342, 13-02-01209 и 14-02-00329.

Библиографический список

1. *Ginoux J.M., Letellier C.* Van der Pol and the history of relaxation oscillations: Toward the emergence of a concept // Chaos. 2012. Vol. 22, № 2. P. 023120-15.
2. *Cartwright M.L.* Balthazar Van der Pol // Journal London Math. Soc. 1960, Vol. 35. P. 367.
3. *Ван дер Поль Балт.* Нелинейная теория электрических колебаний / Пер. Я.А. Копиловича. М.: Гос. изд-во по технике связи, 1935. 42 с.
4. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2010. 560 с. (глава 14).
5. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
6. *Горяченко В.Д.* Андронов Александр Александрович. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2001.
7. *Трубецков Д.И.* Синхронизация: ученый и время. Лекции на школах «Нелинейные дни в Саратове для молодых». Вып. 2. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2006. 112 с.
8. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959.
9. *Фейнберг Е.Л.* Родоначальник. О Леониде Исааковиче Мандельштаме // УФН. 2002. Т. 172. С. 102.
10. *Фабрикант В.А.* О Л.И. Мандельштаме // Академик Мандельштам. К 100-летию со дня рождения. М.: Наука, 1979. С. 234.
11. *Филиппов А.Т.* Многоликий солитон. М.: Наука, 1986, 230 с.
12. *Cveticanin L.* On the Van der Pol oscillator: An overview // Applied Mechanics and Materials. 2013. Vol. 430. P. 3.
13. *Kuang Y.C., Biernacki P.D., Lahrichi A., Mickelson A.* Analysis of an experimental technique for determining Van der Pol parameters of a transistor oscillator // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 1998. Vol. 46, № 7. P. 914.
14. *Van der Pol B.* On relaxation-oscillations // Philosophical Magazine & Journal of Science. 1926. Vol. 2, № 11. P. 978.
15. *Van der Pol B. and van der Mark J.* The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart // Philosophical Magazine & Journal of Science. 1928. Vol. 6, № 38. P. 763.

16. *Привезенцев А.П., Саблин Н.И., Филиппенко Н.М., Фоменко Г.П.* Нелинейные колебания виртуального катода в триодной системе // Радиотехника и электроника. 1992. Т. 37, № 7. С. 1242.
17. *Магда И.И, Пащенко А.В., Романов С.С.* К теории пучковых обратных связей в генераторах с виртуальным катодом // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Плазменная электроника и новые методы ускорения. 2003. № 4. С. 167.
18. *Sze H., Price D., Harteneck B.* Phase locking of two strongly coupled vircators // J. Appl. Phys. 1990. Vol. 67, № 5. P. 2278.
19. *Репин Б.Г., Дубинов А.Е.* Исследование режимов фазировки трех виркаторов в рамках модели связанных осцилляторов Ван-дер-Поля // Журнал технической физики. 2006. Т. 76, вып. 4. С. 99.
20. *Liao P., York R.A.* A new phase-shifterless beam-scanning technique using arrays of coupled oscillators // I EEE transactions on microwave theory and techniques. 1993. Vol. 41, № 10. P. 1810.
21. *Yabuno H., Kaneko H., Kuroda M., Kobayashi T.* Van der Pol type self-excited micro-cantilever probe of atomic force microscopy // Nonlinear Dyn. 2008, № 54. P. 137.
22. *Menzel K.O., Bockwoldt T., Arp O., Piel A.* Modeling Dust-Density Wave Fields as a System of Coupled van der Pol Oscillators // IEEE Transactions on Plasma Science. 2013. Vol. 41, № 4. P. 735.
23. *Miwadinou C.H., Hinviy L.A., Monwanou A.V. Chabi Orou J.B.* Nonlinear dynamics of plasma oscillations modeled by a forced modified Van der Pol–Duffing oscillator. arXiv:1308.6132.
24. *Klinger T., Greiner F., Rohde A., Piel A.* Van der Pol behavior of relaxation oscillations in a periodically driven thermionic discharge // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52, № 4. P. 4316.
25. *Klinger T., Piel A., Seddighi F., Wilke C.* Van der Pol Dynamics of ionization waves // Physics Letters A. 1993. Vol. 182, № 2, 3. P. 312.
26. *Гембаржевский Г.В.* Электроразрядный эффект в плазменном течении следа: перераспределение энергии пульсаций в область низких частот // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35, вып. 5. С. 95.
27. *Lashinsky H., Rosenberagn J., Detrick L.* Power line radiation: Possible evidence of van der Pol oscillations in the magnetosphere // Geophysical Research Letters. 1980. Vol. 7, № 10. P. 837.
28. *Sun Z.Z., Sun Y., Wang X.R., Cao J.P., Wang Y.P., Wang Y.Q.* Self-sustained current oscillations in superlattices and the van der Pol equation // Applied Physics Letters. 2005. Vol. 87. 1821100.
29. *Tony E.L. and Sadeghpour H.R.* Quantum synchronization of quantum van der Pol oscillators with trapped ions // Phys. Rev. Lett. 2013. Vol. 111, № 23. 234101.
30. *Лэмб У.* Теория оптических мазеров. В сб.: Квантовая оптика и квантовая радиофизика. М.: Мир, 1966. с. 281.
31. *Pampalon E., Lapucci A.* Locking-range analysis for three coupled lasers // Optics letters. 1993. Vol. 18, № 22. P. 1881.

32. *Khibnik A.I., Braimanc Y., Kennedyd T.A.B., Wiesenfeldd K.* Phase model analysis of two lasers with injected field // Physica D. 1998. Vol. 111, № 1-4. P. 295.
33. *Braimanc Y., Kennedyd T.A.B., Wiesenfeldd K., Khibnik A.I.* Entrainment of solid-state laser arrays // Phys. Rev. A. 1995. Vol. 52. P. 1500.
34. *Khibnik A.I., Braimanc Y., Protopopescu V., Kennedyd T.A.B., Wiesenfeldd K.* Amplitude dropout in coupled lasers // Phys. Rev. A. 2000. Vol. 62. P. 063815.
35. *Глова А.Ф.* Синхронизация излучения лазеров с оптической связью // Квантовая Электроника. 2003. № 4. С. 283.
36. *Каганов В.И.* Ветроэнергетический метод предотвращения развития тропического циклона // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, вып. 6. С. 42.
37. *Skop R.A., Griffin O.M.* A model for the vortex-excited resonant response of bluff cylinders // Journal of Sound and Vibration. 1973. Vol. 27, № 2. P. 225.
38. *Facchinettia M.L., Langre E., Biolley F.* Vortex shedding modeling using diffusive van der Pol oscillators // ComptesRendusMecanique. 2002. Vol. 330, № 7. P. 451.
39. *Veskos P., Demiris Y.* Developmental acquisition of entrainment skills in robot swinging using van der Pol oscillators // Proceedings of the Fifth International Workshop on Epigenetic Robotics: Modeling Cognitive Development in Robotic Systems Lund University Cognitive Studies. 2005. P. 87.
40. *Пащенко Р.Э., Пащенко Э.И., Максюта Д.В.* Формирование фрактальных сигналов на основе уравнения ван дер Поля // Системы управления, навигации и связи. 2009, вып. 3(11). С. 225.
41. *Зайцев В.В., Зайцев О.В.* Способ защиты информации с использованием алгоритма генерации хаотических автоколебаний // Вестник СамГу – естественнонаучная серия. 2006, № 9(49). С. 66.
42. *Lucero J. and Schoentgen J.* Modeling vocal fold asymmetries with coupled van der Pol oscillators // Proceedings of Meetings on Acoustics. 2013. Vol. 19. 060165. P. 1.
43. *Long G.R., Tubis A., Jones K.L.* Modeling synchronization and suppression of spontaneous otoacoustic emissions using Van der Pol oscillators: Effects of aspirin administration // J. Acoust. Soc. Am. 1991. Vol. 89, № 3. P. 1201.
44. *Dutra M.S., de Pina Filho A.C., Romano V.F.* Modeling of a bipedal locomotor using coupled nonlinear oscillators of Van der Pol // Biol. Cybern. 2003. Vol. 88. P. 286.
45. *Булдаков Н.С., Самочетова Н.С., Ситников А.В., Суятинов С.И.* Моделирование связей в системе «сердце-сосуды» // Наука и образование, Электронный научно-технический журнал. 2013. С. 123.
46. *Beek P.J., Schmidt R.C., Morris A.W., Sim M.-Y., Turvey M.T.* Linear and nonlinear stiffness and friction in biological rhythmic movements // Biol. Cybern. 1995. Vol. 73, № 6. P. 499.
47. *Kawahara T.* Coupled van der Pol oscillators – A model of excitatory and inhibitory interactions // Biol. Cybern. 1980. Vol. 39. P. 37.
48. *Linkens D.A., Taylor I., Duthie H.L.* Mathematical modeling of the colorectal myoelectrical activity in humans // IEEE Transactions on Biomedical Engineering. 1976. Vol. BME-23, № 2. P. 101.
49. *Wilson H.R., Cowan J.D.* Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons // Biophys. J. 1972. Vol. 12. P. 1.

50. *Осипов Г.В.* Синхронизация при обработке и передаче информации в нейронных сетях. Учебно-методические материалы по программе повышения квалификации «Хранение и обработка информации в биологических системах», Нижний Новгород, 2007.
51. *Кузнецов А.П., Кузнецов С. П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Изд-во Физматлит, 2002. 292 с.
52. *Селиверстова Е.С.* О двух моделях автоколебаний в нефизических системах // Изв. вузов. ПНД. 2013. Т. 21, № 3. С. 112.
53. *Хохлов Р.В.* К теории захватывания при малой амплитуде внешней силы // ДАН СССР. 1954. Т. 97, № 3. С. 411.
54. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003, 494 с. (Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences, Cambridge university press, 2001, 432 p.)
55. *Balanov A.G., Janson N.B., Postnov D.E., Sosnovtseva O.* Synchronization: from simple to complex. Springer, 2009. 437 p.
56. *Rand R., Holmes P.J.* Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1980. Vol. 15. P. 387.
57. *Ivanchenko M., Osipov G., Shalfeev V., Kurths J.* Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // Physica D. 2004. Vol. 189, № 1–2. P. 8.
58. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П.* Особенности синхронизации в системе неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля и ван дер Поля – Дуффинга. Широкополосная синхронизация // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 4. С. 3.
59. *Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В.* Связанные осцилляторы ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга: Фазовая динамика и компьютерное моделирование // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 4. С. 101.
60. *Kuznetsov A.P., Stankevich N.V., Turukina L.V.* Coupled van der Pol–Duffing oscillators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues // Physica D. 2009. Vol. 238, № 14. P. 1203.
61. *Kuznetsov A.P., Roman Ju.P.* Properties of synchronization in the systems of non-identical coupled van der Pol and van der Pol–Duffing oscillators. Broadband synchronization // Physica D. 2009. Vol. 238, № 16. P. 1499.
62. *Кузнецов А.П., Емельянова Ю.П., Селезнев Е.П.* Синхронизация связанных автоколебательных систем с неидентичными параметрами // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 2. С. 62.
63. *Astakhov V., Koblyanskii S., Shabunin A., Kapitaniak T.* Peculiarities of the transitions to synchronization in coupled systems with amplitude death // Chaos. 2011. Vol. 21, № 2. 023127(12).
64. *Baesens C., Guckenheimer J., Kim S., MacKay R.S.* Three coupled oscillators: mode locking, global bifurcations and toroidal chaos // Physica D. 1991. Vol. 49. PP. 387.
65. *Emelianova Yu.P., Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V.* Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators // Physica D. 2013. Vol. 244, № 1. P. 36.

66. *Емельянова Ю.П., Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Динамика трех неидентичных по управляющим параметрам связанных осцилляторов ван дер Поля // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 5. С. 76.
67. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Turukina L.V.* About Landau–Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators // Physics Letters A. 377. 2013. 3291.
68. *Emelianova Y.P., Kuznetsov A.P., Turukina L.V., Sataev I.R., Chernyshov N.Yu.* A structure of the oscillation frequencies parameter space for the system of dissipatively coupled oscillators // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2014. Vol. 19, № 4. P. 1203.
69. *Mendelowitz L., Verdugo A., Rand R.* Dynamics of three coupled limit cycle oscillators with application to artificial intelligence // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2009. Vol. 14, Issue 1, January. P. 270.
70. *Rand R., Wong J.* Dynamics of four coupled phase-only oscillators // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2009. Vol. 14, Issue 11, November. P. 3901.
71. *Hong H., Strogatz S.H.* Kuramoto Model of Coupled Oscillators with Positive and Negative Coupling Parameters: An Example of Conformist and Contrarian Oscillators // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 106. 054102.
72. *Hong H., Strogatz S.H.* Mean-field behavior in coupled oscillators with attractive and repulsive interactions // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 85. 056210.
73. *Borgers C., Kopell N.* Synchronization in networks of excitatory and inhibitory neurons with sparse, random connectivity // Neural Computation, 2003. Vol. 15. P. 509.
74. *Rompala K., Rand R., Howland H.* Dynamics of three coupled van der Pol oscillators with application to circadian rhythms // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2007. Vol. 12, № 5. P. 794.
75. *Кузнецов А.П., Чернышов Н.Ю., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация и квазипериодические колебания трех реактивно связанных осцилляторов // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9, № 1. С. 11.
76. *Pikovsky A., Rosenau P.* Phase compactons // Physica D. 2006. Vol. 218. P. 56.
77. *Topaj D. and Pikovsky A.* Reversibility vs synchronization in oscillator lattices // Physica D. 2002. Vol. 170. P. 118.
78. *Bridge J., Rand R., Sah S.M.* Dynamics of a ring network of phase-only oscillators // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation Vol. 14, Issue 11, November 2009. P. 3901.

PHENOMENON OF THE VAN DER POL EQUATION

A. P. Kuznetsov[1,2], *E. S. Seliverstova*[2], *D. I. Trubetskov*[2], *L. V. Turukina*[1,2]

[1]Kotel'nikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch,

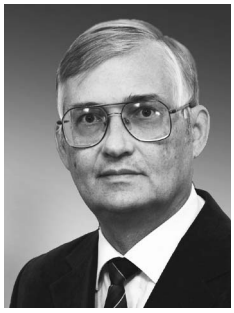
[2]Saratov State University

This review is devoted to the famous Dutch scientist Balthasar van der Pol, who made a significant contribution to the development of radio-engineering, physics and

mathematics. The review outlines only one essential point of his work, associated with the equation that bears his name, and has a surprisingly wide range of applications in natural sciences. In this review we discuss the following matters.

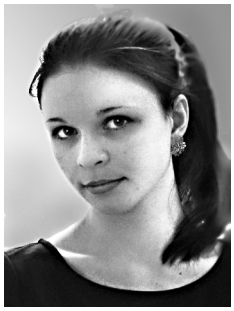
- The biography of van der Pol, history of his equation and supposed precursors.
- The contribution of A.A. Andronov in the theory of self-oscillations.
- Van der Pol equation and modeling of processes in the human body (the model of the heart beat and of the «heart–vessels» system; modeling of processes in the large intestine; models of excitatory and inhibitory neural interactions; modeling synchronization in processing and transfer of information in neural networks; various problems related to human musculoskeletal apparatus; modeling the vocal cords).
- Development and modifications of the van der Pol equation.

Keywords: van der Pol equation, oscillations, biophysics, vacuum-tube oscillator, neuron, synchronization.



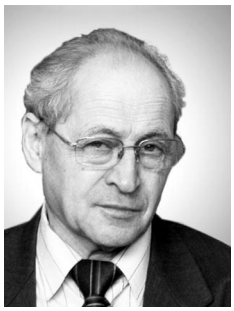
Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, заведующий базовой кафедрой динамических систем Саратовского госуниверситета. Имеет звание профессора. Область научных интересов: динамические системы, теория бифуркаций, синхронизация, квазипериодические колебания и их приложения. Лауреат гранта Президента Российской Федерации, Соросовский профессор (2000, 2001). Опубликовал более 100 статей в российских и международных научных журналах. Научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Автор оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ и Лицея прикладных наук. Автор и соавтор 12 монографий, учебников и задачников по нелинейной динамике, теории колебаний и физике. Среди них: «Физика квазипериодических колебаний», «Нелинейность: от колебаний к хаосу», «Нелинейные колебания», «Линейные колебания и волны (сборник задач) и др.

410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В.А. Котельникова РАН
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
www.sgtnd.narod.ru
E-mail:apkuz@yandex.ru



Селиверстова Екатерина Сергеевна – родилась в Энгельсе Саратовской области (1993). Окончила среднюю школу №16 г.Энгельса с золотой медалью (2010).Студентка 5 курса факультета нелинейных процессов СГУ им. Н.Г. Чернышевского. Область научных интересов – теория колебаний и волн.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: esseliverstova@yandex.ru



Трубецков Дмитрий Иванович – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор кафедры прикладной математики НИЯУ МИФИ, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
115409 Москва, Каширское шоссе, 31
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
E-mail: dtrubetskov@yahoo.com

Тюрюкина Людмила Владимировна – родилась в 1977 году. Окончила факультет нелинейных процессов в Саратовском госуниверситете (2000). Кандидат физико-математических наук (2003, СГУ), имеет звание доцента по специальности радиофизика (2009). В настоящее время – старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, доцент базовой кафедры динамических систем СГУ. Область научных интересов – новые аспекты явления синхронизации в системах различной физической природы (радиофизические системы, модели турбулентности, модели биофизических систем и др.); контроль (управление) неустойчивыми режимами; динамический хаос; физические системы с гиперболическими аттракторами. Автор более 30 статей в российских и зарубежных журналах. Соавтор монографии «Физика квазипериодических колебаний» и 3 учебных пособий.

410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В.А. Котельникова РАН
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
www.sgtnd.narod.ru
E-mail:lvtur@rambler.ru