



УДК: 517.9

MSC 2010: 39Axx, 93D05

Синхронизация и квазипериодические колебания трех реактивно связанных осцилляторов

А. П. Кузнецов, Л. В. Тюрюкина, Н. Ю. Чернышов

Рассматривается задача о взаимодействии трех осцилляторов ван дер Поля с реактивной связью. Получено фазовое уравнение в необходимом порядке по величине связи. Динамика в фазовом приближении иллюстрируется с помощью метода ляпуновских карт и бифуркационного анализа. Обсуждаются существенные особенности реактивной связи. Представлена картина усложнения режимов для исходной системы при увеличении управляющего параметра.

Ключевые слова: синхронизация, квазипериодические колебания, бифуркации, хаос

1. Введение

Задача о динамике связанных автоколебательных осцилляторов является фундаментальной в теории колебаний и нелинейной динамике [1–10]. Простейшей такой системой, имеющей универсальный характер, являются связанные осцилляторы ван дер Поля [1, 4, 9, 10]. Отметим, что даже в наиболее простом случае, когда два автоколебательных элемента связаны диссипативным образом, наблюдается разнообразная картина возможных эффектов. Это такие классические эффекты, как взаимный захват осцилляторов с различным соотношением частот, двухчастотные квазипериодические колебания, эффект «гибели

Получено 21 февраля 2013 года

После доработки 28 марта 2013 года

Работа выполнена при поддержке РФФИ No. 12-02-31465 и 11-02-91334-ННИО.

Кузнецов Александр Петрович

arkuz@rambler.ru

Тюрюкина Людмила Владимировна

lvtur@rambler.ru

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

Чернышов Николай Юрьевич

nick.chernyschov@yandex.ru

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83



колебаний», который состоит в том, что диссипативная связь подавляет автоколебания осцилляторов [1, 11–18].

При переходе к системам с трехчастотной и более высокоразмерной квазипериодичностью задача становится еще более сложной и многоплановой. Так, в одной из наиболее фундаментальных работ обзорного характера [19] обсуждается модель трех взаимно связанных осцилляторов в форме связанных отображений поворота в пространстве фаз осцилляторов. Дан анализ плоскости параметров, которые можно интерпретировать как частотные расстройки осцилляторов. В работах [20–22] проведено теоретическое обсуждение трех взаимно связанных осцилляторов и описан соответствующий эксперимент с радиоэлектронным устройством. Задача о динамике кольца из трех фазовых осцилляторов обсуждалась, например, в [21, 23], а сетей из четырех и более осцилляторов — в [21, 24–26]. Недавно были выяснены новые интересные аспекты задачи о вынужденной синхронизации двухчастотных колебаний [27–34]. Обсуждены и установлены механизмы синхронизации резонансных циклов на торе, которые оказались отличными от синхронизации «обычных» предельных циклов; показано, что за возникновение трехчастотных колебаний отвечает бифуркация слияния и исчезновения устойчивой и неустойчивой инвариантных кривых, чему в исходной системе соответствует аналогичная бифуркация торов.

Возможен, однако, альтернативный случай реактивной связи [1, 2, 12–15]. При радиофизической реализации автоколебательных элементов связь такого типа возникает, если в цепи связи присутствует не резистор, а реактивный элемент (емкость) [2]. Еще одним примером системы с реактивной связью могут служить ионные ловушки [35]. В таких ловушках ионы «заперты» с помощью переменных сверхвысокочастотных полей, ограничивающих радиальные колебания ионов, и постоянного электрического поля, ограничивающего осевое движение. Если использовать сегментированную ловушку со множеством электродов, то возникает цепочка ионов, расположенных в своих потенциальных ямах. Число элементов в цепочке может быть различным. При этом нелинейность обеспечивает негармоничность ловушки. Внешнее лазерное излучение может приводить как к диссипации, так и к «раскачиванию» ионов в зависимости от его частоты. Ионы в цепочке связаны через кулоновское отталкивание, так что связь является чисто консервативной (реактивной). Кроме того, аналогичная модель с реактивной связью также применима к описанию массива наномеханических резонаторов [36].

Реактивная связь — явление существенно более тонкое, чем связь диссипативная [9, 12–15]. Даже в случае двух связанных осцилляторов эффект синхронизации в фазовой модели возникает только при учете эффектов второго порядка по величине связи. Это приводит к характерной очень узкой структуре языка синхронизации (он имеет вид корневой особенности), а также к возникновению фазовой бистабильности: в зависимости от начальных условий фазовые осцилляторы могут быть синхронизованы как в фазе, так и в противофазе.

Отметим, что работ, в которых исследуются системы с реактивной связью, демонстрирующие трехчастотную квазипериодическую динамику, на настоящий момент мало. Так, в работе [37] исследовались два возбуждаемых внешней силой реактивно связанных ван дер Поля. Для малой связи и величины возбуждения представлены примеры, когда доминирует трехчастотная квазипериодичность, которая с увеличением связи сменяется периодическими режимами и хаосом. Три реактивно связанных осциллятора ван дер Поля в контексте приложения к анализу биологических циркадных ритмов исследуются в [38].

В настоящей работе мы рассмотрим задачу о синхронизации трех реактивно связанных осцилляторов ван дер Поля. Для нее получены фазовые уравнения, которые будут исследованы с использованием подходов, развитых в работах [31–34]. Основной вопрос состоит

в обсуждении особенностей реактивной связи, как в рамках фазовой модели, так и для исходной системы.

2. Фазовые уравнения трех реактивно связанных осцилляторов

Рассмотрим цепочку трех реактивно связанных осцилляторов ван дер Поля, описываемую следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \varepsilon(x - y) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \varepsilon(2y - x - z) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \varepsilon(z - y) &= 0.\end{aligned}\quad (2.1)$$

Здесь λ — параметр, отвечающий за установление автоколебаний в автономных осцилляторах, Δ_1 и Δ_2 — частотные расстройки второго и третьего осцилляторов относительно первого, ε — величина связи. Частота первого осциллятора принята за единицу.

Если параметр возбуждения λ мал, а также малы частотные расстройки и величина связи в (2.1), то для анализа уравнений (2.1) можно применить метод медленно меняющихся амплитуд [1, 2, 8, 39]. Для реактивной связи он имеет существенные особенности, поэтому проведем соответствующий вывод подробно. Представим динамические переменные в виде

$$x = ae^{it} + a^*e^{-it}, \quad y = be^{it} + b^*e^{-it}, \quad z = ce^{it} + c^*e^{-it}.\quad (2.2)$$

Здесь $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ — комплексные амплитуды осцилляторов, которые будем полагать медленно меняющимися на фоне колебаний с единичной частотой.

Наложим традиционные для такого метода дополнительные условия [1, 39]:

$$\dot{a}e^{it} + \dot{a}^*e^{-it} = 0, \quad \dot{b}e^{it} + \dot{b}^*e^{-it} = 0, \quad \dot{c}e^{it} + \dot{c}^*e^{-it} = 0.\quad (2.3)$$

Тогда имеем следующие выражения для скоростей осцилляторов:

$$\dot{x} = i(ae^{it} - a^*e^{-it}), \quad \dot{y} = i(be^{it} - b^*e^{-it}), \quad \dot{z} = i(ce^{it} - c^*e^{-it}).\quad (2.4)$$

Подставим соотношения (2.2)–(2.4) в уравнения (2.1), умножим полученные выражения на e^{-it} и проведем усреднение для исключения быстро осциллирующих членов. После соответствующих преобразований приходим к следующим укороченным уравнениям:

$$\begin{aligned}2\dot{a} &= \lambda a - |a|^2 a + i\varepsilon(a - b), \\ 2\dot{b} &= \lambda b - |b|^2 b + i\Delta_1 b + i\varepsilon(2b - a - c), \\ 2\dot{c} &= \lambda c - |c|^2 c + i\Delta_2 c + i\varepsilon(c - b).\end{aligned}\quad (2.5)$$

В полученных уравнениях управляющий параметр λ можно убрать перенормировкой переменных и параметров:

$$a = \sqrt{\lambda}\bar{a}, \quad b = \sqrt{\lambda}\bar{b}, \quad c = \sqrt{\lambda}\bar{c}, \quad t = \frac{\bar{t}}{\lambda}, \quad \varepsilon = \lambda\bar{\varepsilon}, \quad \Delta_{1,2} = \lambda\bar{\Delta}_{1,2}.\quad (2.6)$$

Будем считать такую перенормировку выполненной, а для сокращения записи черту над нормированными величинами будем опускать. Теперь новые, отнормированные параметры можно считать уже не малыми.

Положим далее $a = r_1 e^{i\psi_1}$, $b = r_2 e^{i\psi_2}$ и $c = r_3 e^{i\psi_3}$, где $r_{1,2,3}$ — действительные амплитуды, а $\psi_{1,2,3}$ — фазы осцилляторов. Тогда получаем

$$\begin{aligned} 2\dot{r}_1 &= r_1 - r_1^3 - \varepsilon r_2 \sin \theta, \\ 2\dot{r}_2 &= r_2 - r_2^3 + \varepsilon r_1 \sin \theta - \varepsilon r_3 \sin \varphi, \\ 2\dot{r}_3 &= r_3 - r_3^3 + \varepsilon r_2 \sin \varphi, \\ 2\dot{\psi}_1 &= \varepsilon - \varepsilon \frac{r_2}{r_1} \cos \theta, \\ 2\dot{\psi}_2 &= 2\varepsilon + \Delta_1 - \varepsilon \frac{r_1}{r_2} \cos \theta - \varepsilon \frac{r_3}{r_2} \cos \varphi, \\ 2\dot{\psi}_3 &= \varepsilon + \Delta_2 - \varepsilon \frac{r_2}{r_3} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь $\theta = \psi_1 - \psi_2$, $\varphi = \psi_2 - \psi_3$ — относительные фазы осцилляторов.

Вычитая фазовые уравнения друг из друга, получаем уравнение для относительных фаз осцилляторов:

$$\begin{aligned} 2\dot{\theta} &= -\varepsilon - \Delta_1 + \varepsilon \left(\frac{r_1}{r_2} - \frac{r_2}{r_1} \right) \cos \theta + \varepsilon \frac{r_3}{r_2} \cos \varphi, \\ 2\dot{\varphi} &= \varepsilon + \Delta_1 - \Delta_2 + \varepsilon \left(\frac{r_2}{r_3} - \frac{r_3}{r_2} \right) \cos \varphi - \varepsilon \frac{r_1}{r_2} \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Особенность двух реактивно связанных осцилляторов состоит в том, что эффект синхронизации возникает только во втором порядке по параметру связи ε [1, 14, 15]. Поэтому проведем вывод так, чтобы в конечных фазовых уравнениях были сохранены все члены второго порядка.

Для этого положим $r_{1,2,3} = 1 + \tilde{r}_{1,2,3}$, где знаком «тильда» отмечены возмущения стационарных орбит. Тогда из амплитудных уравнений (2.7) для возмущений можно получить

$$\begin{aligned} 2\tilde{r}_1 &= -\varepsilon \sin \theta, \\ 2\tilde{r}_2 &= \varepsilon \sin \theta - \varepsilon \sin \varphi, \\ 2\tilde{r}_3 &= \varepsilon \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.9)$$

В свою очередь из фазовых уравнений (2.8) получаем

$$\begin{aligned} 2\dot{\theta} &= -\varepsilon - \Delta_1 + 2\varepsilon(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2) \cos \theta + \varepsilon(1 + \tilde{r}_3 - \tilde{r}_2) \cos \varphi, \\ 2\dot{\varphi} &= \varepsilon + \Delta_1 - \Delta_2 + 2\varepsilon(\tilde{r}_2 - \tilde{r}_3) \cos \varphi - \varepsilon(1 + \tilde{r}_1 - \tilde{r}_2) \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Подставляя сюда выражения для возмущенных орбит (2.9), находим

$$\begin{aligned} 2\dot{\theta} &= -\varepsilon - \Delta_1 + \varepsilon \cos \varphi - \varepsilon^2 \sin 2\theta + \varepsilon^2 \left(\sin \varphi \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \varphi \sin \theta + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right), \\ 2\dot{\varphi} &= \varepsilon + \Delta_1 - \Delta_2 - \varepsilon \cos \theta - \varepsilon^2 \sin 2\varphi + \varepsilon^2 \left(\sin \theta \cos \varphi - \frac{1}{2} \cos \theta \sin \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Это и есть фазовые уравнения трех реактивно связанных осцилляторов, полученные с точностью до членов ε^2 . По своей структуре они заметно сложнее уравнений для случая диссипативной связи [2, 25].

Можно видеть, что если отбросить слагаемые, содержащие фазу φ (то есть «отключить» третий осциллятор), то из первого уравнения в (2.11) получаем

$$\dot{\theta} = -\Delta_1 - \varepsilon^2 \sin 2\theta. \quad (2.12)$$

Это уравнение описывает синхронизацию реактивно связанных первого и второго осцилляторов, причем она может быть как синфазной ($\theta \approx 0$), так и противофазной ($\theta \approx \pi$) [1, 2, 8, 14].

Интересно отметить, что в системе трех реактивно связанных осцилляторов (2.11), оказывается, присутствуют не только слагаемые второго, но и слагаемые первого (неисчезающего) порядка по параметру связи. Если в уравнениях (2.11) отбросить слагаемые второго порядка, то получим

$$\begin{aligned} 2\dot{\theta} &= -\varepsilon - \Delta_1 + \varepsilon \cos \varphi, \\ 2\dot{\varphi} &= \varepsilon + \Delta_1 - \Delta_2 - \varepsilon \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Однако такое описание оказывается некорректным. Действительно, состояния равновесия (условие полной синхронизации) ищутся из уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon + \Delta_1 &= \varepsilon \cos \varphi, \\ \varepsilon + \Delta_1 - \Delta_2 &= \varepsilon \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Матрица Якоби для (2.13) имеет вид

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \sin \varphi \\ \varepsilon \sin \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

След этой матрицы $S = 0$. Как известно [39], в этом случае возникает своего рода «нейтральное» состояние на границе между устойчивым и неустойчивым решениями. Таким образом, в этом приближении в системе вообще нет основного резонанса, и для описания возможности синхронизации трех реактивно связанных осцилляторов необходимо учитывать эффекты второго порядка по величине связи.

3. Устройство пространства собственных частот трех реактивно связанных осцилляторов

Обсудим основные свойства системы трех реактивно связанных осцилляторов и продемонстрируем их отличия от случая диссипативной связи. Условия полной синхронизации в этом случае аналитически найти не удастся, и поэтому обратимся к численному исследованию.

Для систем с многочастотной квазипериодической динамикой эффективным инструментом исследования оказывается метод карт ляпуновских показателей [25, 33, 34]. В каждой точке на плоскости параметров вычисляется спектр ляпуновских показателей системы Λ_i . Затем плоскость окрашивается¹ в соответствии с сигнатурой спектра ляпуновских показателей так, чтобы визуализировать следующие режимы:

а) P — режим полной синхронизации (устойчивая неподвижная точка) (красный цвет), $\Lambda_1 < 0$, $\Lambda_2 < 0$,

¹Для читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/doc/r/pdf/2125/0>.

- б) T_2 — двухчастотный квазипериодический режим (желтый цвет), $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 < 0$,
 в) T_3 — трехчастотный квазипериодический режим (синий цвет), $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$.

На рисунке 1 показана полученная таким образом карта ляпуновских показателей системы трех реактивно связанных фазовых осцилляторов (2.11). Она построена на плоскости частотных расстройок осцилляторов (Δ_1, Δ_2) для значения параметра связи $\varepsilon = 0.6$.

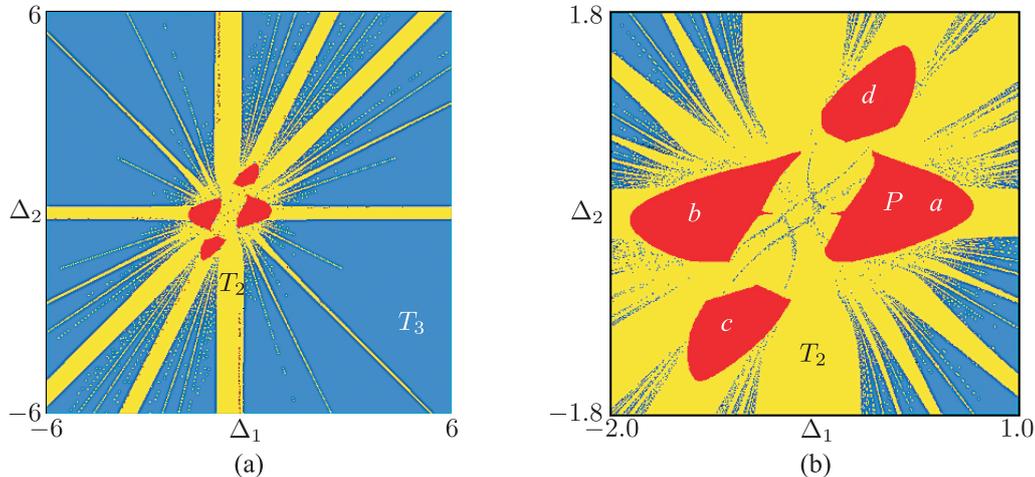


Рис. 1. Карта ляпуновских показателей (а) и ее увеличенный фрагмент (б) для трех реактивно связанных фазовых осцилляторов (2.11) на плоскости (Δ_1, Δ_2) , $\varepsilon = 0.6$. Буквами обозначены соответствующие фазовые портреты, представленные на рис. 2.

Из рисунка видно, что, в отличие от случая диссипативной связи [25], область полной синхронизации состоит из нескольких «островов» (рис. 1б). Для случая диссипативной связи это не так: область полной синхронизации одна и имеет вид параллелограмма [2]. Отличия обусловлены тем, что реактивная связь может синхронизовать каждую из пар осцилляторов как в фазе, так и в противофазе. Внутри каждого из «островов», образующих область полной синхронизации, будет наблюдаться свой тип синхронизации. Соответствующие фазовые портреты представлены на рисунке 2.

Так в точке a (рис. 2а) наблюдается режим полной синхронизации *синфазного типа*. В этом случае относительные фазы обоих осцилляторов близки к нулю: $\theta \approx 0$, $\phi \approx 0$. В точке b (рис. 2б) наблюдается режим полной синхронизации, для которого $\theta \approx \pi$, $\phi \approx \pi$. В соответствии с определением относительных фаз осцилляторов это означает, что первый и третий осциллятор колеблются в фазе, а центральный осциллятор — в противофазе к ним. Таким образом, этот тип режима полной синхронизации можно назвать *противофазным*. И, наконец, внутри двух оставшихся островов (точки c и d) (рис. 2с и рисунке 2д соответственно) наблюдаются режимы полной синхронизации *смешанного типа*. В этом случае одна из пар осцилляторов (первый–второй или второй–третий) колеблются в фазе, а оставшийся осциллятор — в противофазе к ним. Все указанные выше типы режимов полной синхронизации схематически представлены на рисунке 3. Отметим, что возникновение совокупности режимов полной синхронизации такого типа (отвечающие синфазным, противофазным и смешанным колебания) является достаточно общим эффектом) (см. в связи с этим работу [40]).

Помимо области полной синхронизации, на карте ляпуновских показателей трех реактивно связанных фазовых осцилляторов (2.11) наблюдается система «лучей» двухчастотных квазипериодических режимов, погруженная в область трехчастотных квазипериоди-

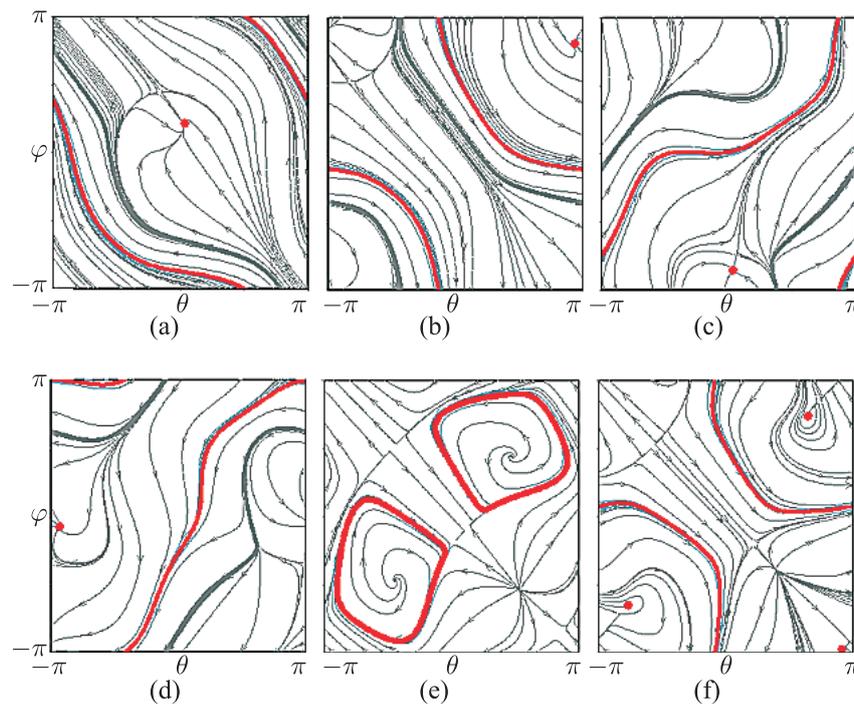


Рис. 2. Фазовые портреты трех реактивно связанных фазовых осцилляторов (2.11) при $\varepsilon = 0.6$: (a) $\Delta_1 = 0.18$, $\Delta_2 = -0.2$; (b) $\Delta_1 = -1.3$, $\Delta_2 = -0.2$; (c) $\Delta_1 = -1.2$, $\Delta_2 = -1.4$; (d) $\Delta_1 = -0.12$, $\Delta_2 = 1.2$; (e) $\Delta_1 = -0.5$, $\Delta_2 = 0.0$; (f) $\Delta_1 = -0.92$, $\Delta_2 = 0.0$.

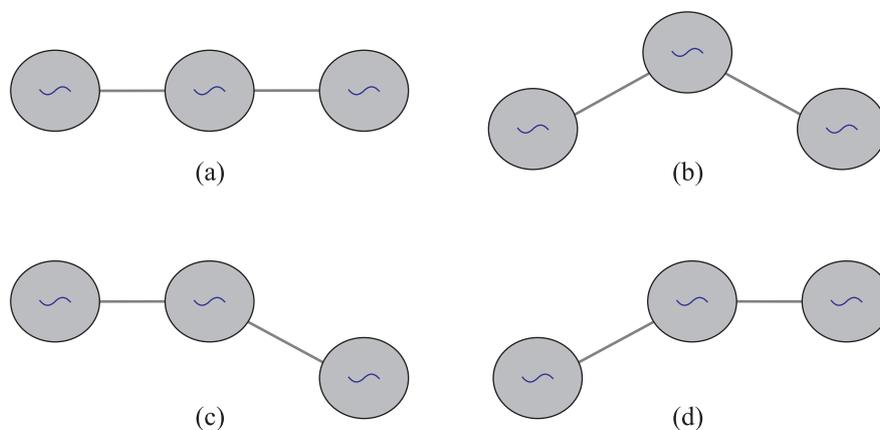


Рис. 3. Схематическое изображение основных мод, отвечающих режимам полной синхронизации, трех реактивно связанных фазовых осцилляторов: (a) синфазная, (b) противофазная, (c), (d) смешанная.

ческих режимов (рис. 1a). Внутри каждого из таких «лучей» на фазовой плоскости (θ, φ) наблюдаются инвариантные кривые разных типов.

Отметим также, что для системы трех реактивно связанных фазовых осцилляторов характерна мультистабильность, когда, например, в фазовом пространстве сосуществуют неподвижная точка, отвечающая режиму полной синхронизации, и инвариантная кривая, отвечающая двухчастотному квазипериодическому режиму (рис. 2a–d).

Теперь перейдем к бифуркационному анализу состояний равновесия системы трех реактивно связанных фазовых осцилляторов (2.11). Система бифуркационных линий и точек на плоскости параметров (Δ_1, Δ_2) показана на рисунке 4. Она оказывается существенно сложнее, чем в случае диссипативной связи, когда за разрушение полной синхронизации отвечает единственная линия седло-узловой бифуркации вырожденного типа, на которой сливаются одно седло с устойчивым узлом и, одновременно, второе седло — с неустойчивым узлом [25, 31, 32]. Теперь линии седло-узловых бифуркаций SN , отвечающие слиянию устойчивого узла и седла (сплошная линия) и неустойчивого узла и седла (пунктирная линия), не совпадают. Во-вторых, в системе реактивно связанных фазовых осцилляторов наблюдается бифуркация Андронова–Хопфа (бифуркационная линия обозначенная буквой H), когда положение равновесия теряет устойчивость и от него отделяется устойчивый предельный цикл. Соответствующий фазовый портрет показан на рисунке 2е. Это новый тип режима, который не наблюдался в системе с диссипативным типом связи. В этом случае обе относительные фазы θ и ϕ не постоянны, так что точного захвата осцилляторов нет. Однако, ни одна из них не нарастает неограниченно. И та, и другая совершают осцилляции около некоторых равновесных значений. Таким образом, в этом случае имеет место *частичный захват всех трех осцилляторов*, а частотный спектр будет содержать не только базовую частоту, но и набор составляющих, связанных с новым характерным масштабом времени — периодом обращения изображающей точки по предельному циклу. Такому режиму отвечают фазовые портреты в виде предельных циклов, которые могут быть «стянуты» в точку. Они топологически отличаются от инвариантных кривых, отвечающих частичному захвату только одной пары осцилляторов.

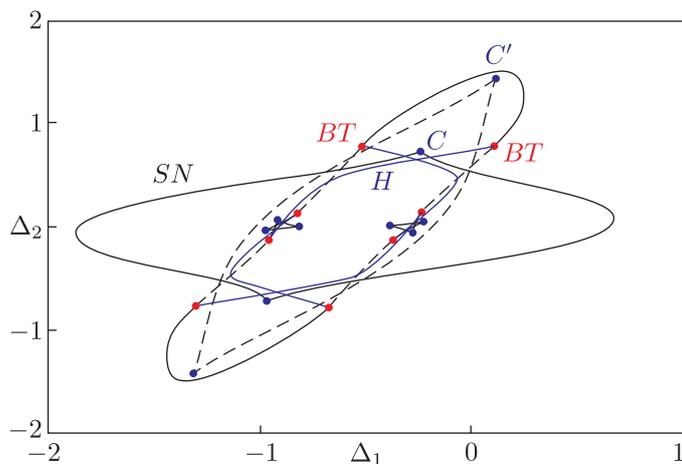


Рис. 4. Бифуркационные линии и точки системы трех реактивно связанных фазовых осцилляторов (2.11) на плоскости частотных расстройек (Δ_1, Δ_2) . Значение параметра связи $\varepsilon = 0.6$. На рисунке используются следующие обозначения: SN — линия седло-узловой бифуркации устойчивого положения равновесия (сплошная черная линия) и неустойчивого положения равновесия (пунктирная черная линия); H — линия бифуркаций Андронова–Хопфа (синяя линия); C — точка сборки линий седло-узловой бифуркации устойчивого положения равновесия; C' — точка сборки линий седло-узловой бифуркации неустойчивого положения равновесия; BT — точка Богданова–Тakensа.

Кроме того, на рисунке 4 указаны точки коразмерности два: точки сборки C и точки Богданова–Тakensа BT . Точки сборки отвечают слиянию двух линий седло-узловых бифуркаций, а точки Богданова–Тakensа являются общими точками линий седло-узловой бифуркации и бифуркации Андронова–Хопфа.

Таким образом, область полной синхронизации, ограниченная линиями седло-узловой бифуркации SN и линиями бифуркации Андронова – Хопфа H , имеет вид, представленный на рисунке 5а. Рисунок 5а целесообразно сопоставить с картой ляпуновских показателей (рис. 1б). На рисунке 5б представлен увеличенный фрагмент системы бифуркационных линий, изображающий структуру, характерную для катастрофы «бабочка» [41]. Эта структура образована тремя точками сборки, а также двумя точками Богданова – Таккенса. В области, ограниченной соответствующими бифуркационными линиями, система (2.11) может демонстрировать мультистабильность. Так, например, в области, окрашенной в наиболее темный цвет, в системе (2.11) могут сосуществовать три положения равновесия, каждое из которых характеризуется своим соотношением фаз осцилляторов, и инвариантная кривая, отвечающая двухчастотному квазипериодическому режиму (рис. 2f).

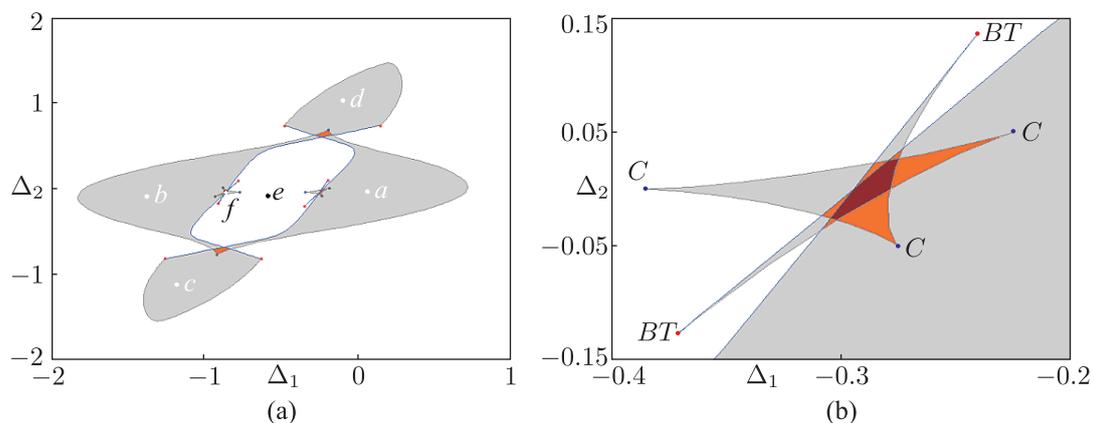


Рис. 5. Область полной синхронизации системы трех реактивно связанных фазовых осцилляторов (2.11) на плоскости частотных расстройек (Δ_1, Δ_2) (а) и ее увеличенный фрагмент (б). Значение параметра связи $\varepsilon = 0.6$. Серый цвет отвечает единственному устойчивому положению равновесия, оранжевый — двум, коричневый — трем (буквами обозначены соответствующие фазовые портреты, представленные на рис. 2).

И, наконец, отметим, что карта ляпуновских показателей (рис. 1) и система бифуркационных линий (рис. 5а) трех реактивно связанных осцилляторов обладают симметрией относительно линий $\Delta_2 = 0$ и $\Delta_2 = 2(\Delta_1 + \varepsilon)$. Для значений параметров, отвечающих этим линиям, фазовые портреты также характеризуются симметрией, см. пример на рисунке 2е для $\Delta_2 = 0$. Соответственно, при движении вдоль указанных линий будут наблюдаться бифуркации, характерные для систем с симметрией. Кроме того, могут происходить также и разнообразные нелокальные бифуркации, которые, однако, в настоящей работе не рассматриваются.

4. Динамика исходной системы

Теперь рассмотрим динамику исходной системы дифференциальных уравнений (2.1). На рисунке 6 представлена соответствующая карта ляпуновских показателей на плоскости (Δ_1, Δ_2) и ее увеличенный фрагмент, построенные для значений параметров $\lambda = 0.1$ и $\varepsilon = 0.06$. Отметим, что управляющий параметр λ выбран достаточно небольшим, а все остальные параметры (параметр связи и частотные расстройки между осцилляторами) пересчитаны (по сравнению с рис. 1а) в соответствии с правилами нормировки (2.6). Это позволит

в дальнейшем сопоставить результаты, полученные для исходной системы (2.1) и фазовой модели (2.11). Метод вычисления спектра ляпуновских показателей и цветовая палитра выбраны такими же, как и для фазовой модели. Однако предусмотрена еще и возможность наблюдения хаотического режима, которому отвечает положительный старший ляпуновский показатель, поскольку размерность системы (2.1) достаточно высока для этого.

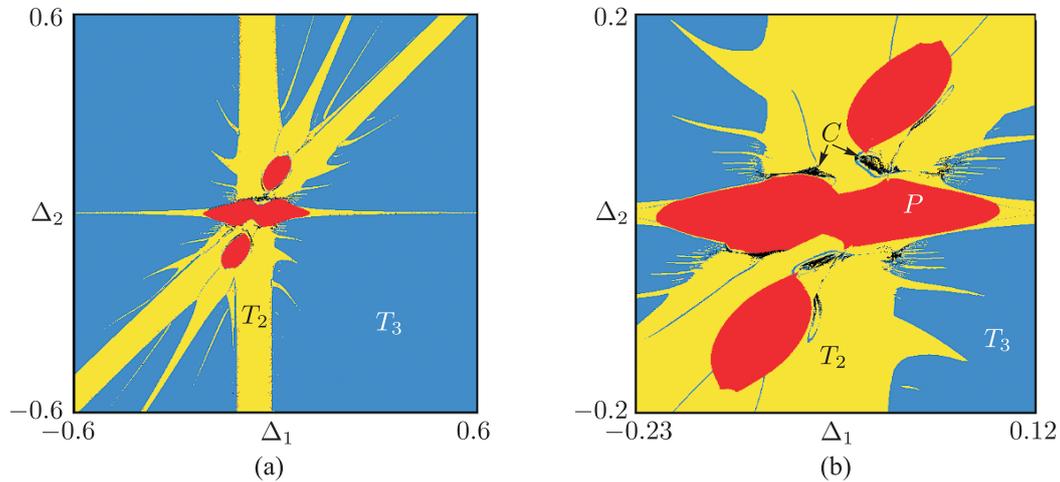


Рис. 6. Карта ляпуновских показателей системы (2.1) (a) и ее увеличенный фрагмент (b) на плоскости (Δ_1, Δ_2) при $\lambda = 0.1$, $\varepsilon = 0.06$.

Из сопоставления (рис. 1 и рис. 6) видно, что фазовая модель (2.11) достаточно хорошо описывает динамику системы (2.1): между картами наблюдается определенное соответствие. Область полной синхронизации трех осцилляторов так же состоит из четырех «островов», однако при этом горизонтальные «острова» сливаются. Таким образом, в исходной системе при очень маленьких значениях частотных расстроек возможен режим полной синхронизации, тогда как в фазовой модели в этой области наблюдался режим частичного захвата всех трех осцилляторов. На карте ляпуновских показателей исходной системы (2.1) также наблюдается система областей двухчастотных квазипериодических режимов, погруженная в область трехчастотных режимов, однако наблюдаются и небольшие по размеру области хаоса C (отмеченные на увеличенном фрагменте карты черным цветом, см. рис. 6b), которых нет в фазовой модели.

Отметим, что в исходной системе (2.1) также возможна мультистабильность, когда в фазовом пространстве предельный цикл, отвечающий режиму полной синхронизации, сосуществует с инвариантным тором, отвечающим двухчастотному квазипериодическому режиму. Соответствующие иллюстрации в виде фазовых портретов представлены на рисунке 7. Они демонстрируют аттракторы в проекции на плоскость переменных первого осциллятора (x, \dot{x}) , построенные для одних и тех же значений параметров, но для разных начальных условий. Можно видеть, что предельный цикл близок по форме к окружности, что обусловлено сравнительно небольшим значением $\lambda = 0.1$.

Теперь рассмотрим случай больших значений параметра λ . Пусть $\lambda = 1$. Соответствующая карта ляпуновских показателей исходной системы (2.1) на плоскости (Δ_1, Δ_2) представлена на рисунке 8. Можно видеть существенное изменение ее устройства. Теперь наблюдается множество новых языков периодических режимов, отвечающих захватам осцилляторов с разным соотношением частот; области хаотических режимов увеличиваются

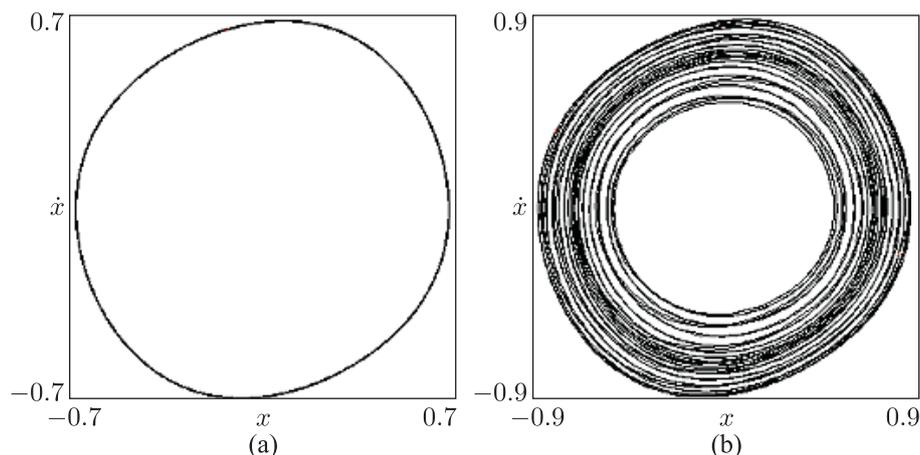


Рис. 7. Сосуществующие аттракторы системы (2.1) в проекции на плоскость переменных первого осциллятора (x, \dot{x}) при $\lambda = 0.1$, $\varepsilon = 0.06$, $\Delta_1 = 0.01$, $\Delta_2 = 0.01$: (a) в виде предельного цикла — режим полной синхронизации, (b) в виде инвариантного тора — двухчастотный квазипериодический режим.

в размере; появляется область D , в которой фазовые траектории убегают на бесконечность (отмечена на карте серым цветом). Кроме того, в пространстве параметров наблюдается картина *резонансной паутины Арнольда* [19, 42, 43], которая показана на увеличенном фрагменте карты (рис. 8b). В этом случае система тонких полос двухчастотных режимов на рисунке соответствует тем или иным резонансным соотношениям собственных частот Δ_1 и Δ_2 . На их пересечении возникают небольшие острова, отвечающие регулярным режимам с различными периодами. Такая структура для фазовой модели невозможна.

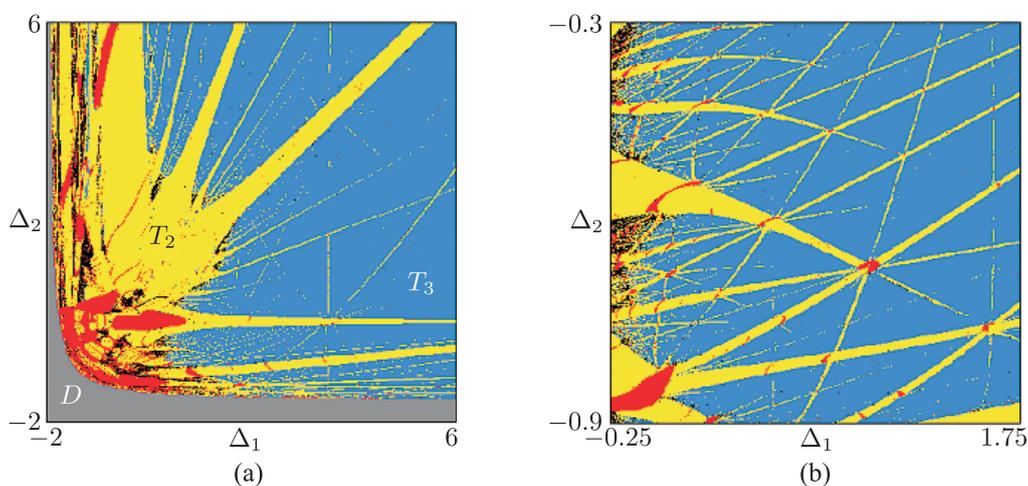


Рис. 8. Карта ляпуновских показателей системы (2.1) (a) и ее увеличенный фрагмент (b) на плоскости (Δ_1, Δ_2) при $\lambda = 1$, $\varepsilon = 0.6$.

Наконец, на рисунке 9 даны примеры трехмерных проекций аттракторов системы (2.1) для случая $\lambda = 1$ в пространстве переменных трех осцилляторов для наиболее типичных режимов: предельный цикл (рис. 9a), двухчастотный тор (рис. 9b), трехчастотный тор (рис. 9c) и хаос (рис. 9d).

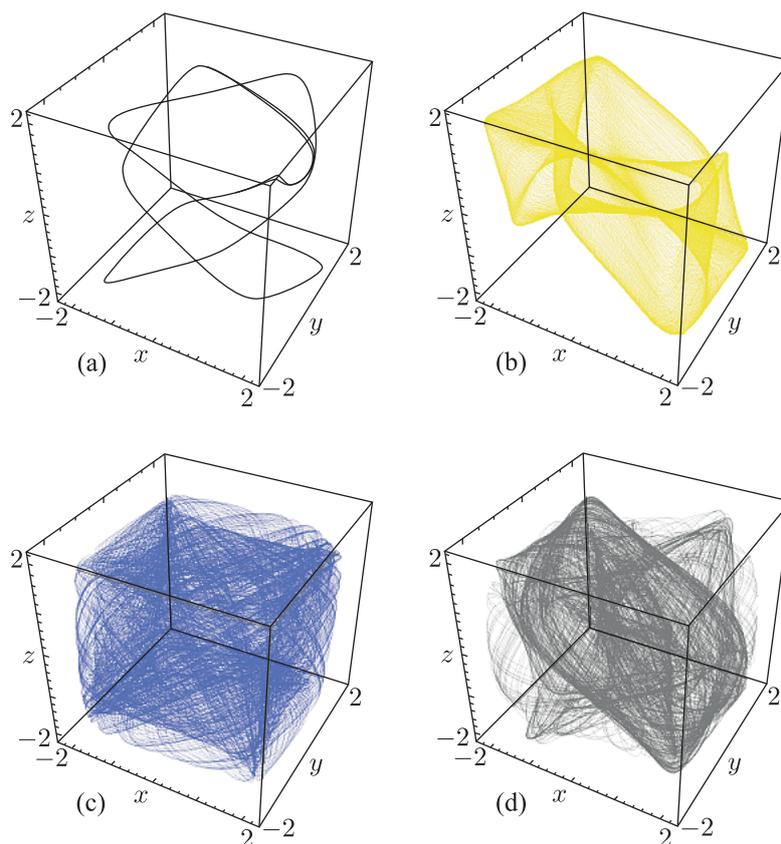


Рис. 9. Проекция аттракторов системы (2.1) в пространстве (x, y, z) для $\lambda = 1$ и $\varepsilon = 0.6$: (а) многооборотный предельный цикл $\Delta_1 = 0.12$, $\Delta_2 = -0.74$; (б) двухчастотный тор $\Delta_1 = -0.24$, $\Delta_2 = 0.33$; (с) трехчастотный тор $\Delta_1 = 0.89$, $\Delta_2 = -0.54$; (д) хаотический аттрактор $\Delta_1 = -0.4$, $\Delta_2 = 0.42$.

5. Заключение

Система из трех реактивно (консервативно) связанных автоколебательных элементов демонстрирует сложную и многоплановую картину синхронизации. При выводе соответствующих фазовых уравнений, в отличие от случая диссипативной связи, принципиальным является учет эффектов второго порядка по величине связи. Область полной синхронизации в рамках фазовой модели представляет собой четыре «острова», внутри которых наблюдаются режимы синхронизации, отвечающие синфазным, противофазным и смешанным видам колебаний в цепочке. Бифуркационная картина для режимов полной синхронизации существенно отличается от случая диссипативной связи. В частности, седло-узловые бифуркации, отвечающие слиянию устойчивого и неустойчивого узла и седла, происходят на разных линиях; возможны бифуркации Андронова–Хопфа, ответственные за возникновение режимов частичной (т. е. не точной) синхронизации всех трех осцилляторов; возможны точки сборки и точки Богданова–Тakensа. Таким образом, режим полной синхронизации в случае реактивной связи может разрушаться двумя способами: или через обычную седло-узловую бифуркацию, или через бифуркацию Андронова–Хопфа. Еще одна особенность состоит в том, что квазипериодические режимы могут сосуществовать с режимами полной синхронизации. Для исходной системы при малых значениях управляющего параметра наблюдается хорошее соответствие с фазовой моделью. При возрастании управляющего па-

раметра устройство области полной синхронизации существенно усложняется, появляются языки периодических режимов более высокого порядка, возникает структура резонансной паутины Арнольда, а также области хаоса, невозможные в фазовой модели.

Список литературы

- [1] Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. Москва: Техносфера, 2003. 496 с.
- [2] Ланда П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. Москва: Наука, 1980. 360 с.
- [3] Ланда П. С. Нелинейные колебания и волны. Москва: Наука, 1997. 395 с.
- [4] Блехман И. И. Синхронизация в природе и технике. Москва: Наука, 1981. 351 с.
- [5] Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves, and turbulence. New York: Springer, 1984. 156 pp.
- [6] Glass L., McKay M. C. From clocks to chaos: The rhythms of life. Princeton: Princeton Univ. Press, 1988. 248 pp.
- [7] Winfree A. The geometry of biological time. 2nd ed. New York: Springer, 2001. 777 pp.
- [8] Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е., Стрелкова Г. И. Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. 144 с.
- [9] Balanov A. G., Janson N. B., Postnov D. E., Sosnovtseva O. V. Synchronization: From simple to complex. Berlin: Springer, 2009. 426 pp.
- [10] Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields. New York: Springer, 1983. 453 pp.
- [11] Aronson D. G., Ermentrout G. B., Kopell N. Amplitude response of coupled oscillators // Phys. D, 1990, vol. 41, no. 3, pp. 403–449.
- [12] Ivanchenko M. V., Osipov G. V., Shalfeev V. D., Kurths J. Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // Phys. D, 2004, vol. 189, nos. 1–2, pp. 8–30.
- [13] Rand R., Holmes P. J. Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // Internat. J. Non-Linear Mech., 1980, vol. 15, nos. 4–5, pp. 387–399.
- [14] Кузнецов А. П., Станкевич Н. В., Тюрюкина Л. В. Связанные осцилляторы ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга: Фазовая динамика и компьютерное моделирование // ПНД, 2008, т. 16, № 4, с. 101–136.
- [15] Kuznetsov A. P., Stankevich N. V., Turukina L. V. Coupled van der Pol–Duffing oscillators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues // Phys. D, 2009, vol. 238, no. 14, pp. 1203–1215.
- [16] Pastor I., Pérez-García V. M., Encinas-Sanz F., Guerra J. M. Ordered and chaotic behavior of two coupled van der Pol oscillators // Phys. Rev. E, 1993, vol. 48, pp. 171–182.
- [17] Poliashenko M., McKay S. R., Smith C. W. Hysteresis of synchronous: Asynchronous regimes in a system of two coupled oscillators // Phys. Rev. A, 1991, vol. 43, pp. 5638–5641.
- [18] Pastor-Díaz I., López-Fraguas A. Dynamics of two coupled van der Pol oscillators // Phys. Rev. E, 1995, vol. 52, no. 2, pp. 1480–1489.
- [19] Baesens C., Guckenheimer J., Kim S., McKay R. S. Three coupled oscillators: Mode locking, global bifurcations and toroidal chaos // Phys. D, 1991, vol. 49, no. 3, pp. 387–475.
- [20] Ashwin P., Guasch J., Phelps J. M. Rotation sets and phase-locking in an electronic three oscillator system // Phys. D, 1993, vol. 66, nos. 3–4, pp. 392–411.
- [21] Ashwin P., King G. P., Swift J. W. Three identical oscillators with symmetric coupling // Nonlinearity, 1990, vol. 3, no. 3, pp. 585–601.
- [22] Ashwin P. Boundary of two frequency behaviour in a system of three weakly coupled electronic oscillators // Chaos Solitons Fractals, 1998, vol. 9, no. 8, pp. 1279–1287.

- [23] Ashwin P., Burylko O., Maistrenko Y. Bifurcation to heteroclinic cycles and sensitivity in three and four coupled phase oscillators // *Phys. D*, 2008, vol. 237, pp. 454–466.
- [24] Maistrenko Yu., Popovych O., Burylko O., Tass P. A. Mechanism of desynchronization in the finite-dimensional Kuramoto model // *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 93, 084102, 4 pp.
- [25] Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В. Синхронизация и многочастотные колебания в цепочке фазовых осцилляторов // *Нелинейная динамика*, 2010, т. 6, № 4, с. 693–717.
- [26] Kuznetsov A. P., Sataev I. R., Turukina L. V. On the road towards multidimensional tori // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2011, vol. 16, no. 6, pp. 2371–2376.
- [27] Buskirk R. V., Jeffries C. Observation of chaotic dynamics of coupled nonlinear oscillators // *Phys. Rev. A*, 1985, vol. 31, pp. 3332–3357.
- [28] Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Bifurcational mechanisms of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // *Chaos*, 2008, vol. 18, 037123, 7 pp.
- [29] Anishchenko V., Nikolaev S. Transition to chaos from quasiperiodic motions on the four-dimensional torus perturbed by external noise // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2008, vol. 18, no. 9, pp. 2733–2741.
- [30] Anishchenko V. S., Nikolaev S. M., Kurths J. Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // *Phys. Rev. E*, 2007, vol. 76, 046216, 4 pp.
- [31] Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T. Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // *Europhys. Lett.*, 2009, vol. 86, 30003.
- [32] Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е., Феоктистов А. В. Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // *Нелинейная динамика*, 2009, т. 5, № 2, с. 237–252.
- [33] Kuznetsov A., Sataev I., Turukina L. Synchronization of quasi-periodic oscillations in coupled phase oscillators // *Tech. Phys. Lett.*, 2010, vol. 36, no. 5, pp. 478–481.
- [34] Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В. Вынужденная синхронизация двух связанных автоколебательных осцилляторов Ван дер Поля // *Нелинейная динамика*, 2011, т. 7, № 3, с. 411–425.
- [35] Lee T. E., Cross M. C. Pattern formation with trapped ions // *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 106, 143001, 4 pp.
- [36] Lifshitz R., Zumdick A., Rogers J. L., Cross M. C. Synchronization by nonlinear frequency pulling // *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 93, 224101, 4 pp.
- [37] Battelino P. M. Persistence of three-frequency quasiperiodicity under large perturbations // *Phys. Rev. A*, 1988, vol. 38, pp. 1495–1502.
- [38] Rompala K., Rand R., Howland H. Dynamics of three coupled van der Pol oscillators with application to circadian rhythms // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2007, vol. 12, no. 5, pp. 794–803.
- [39] Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М. *Нелинейные колебания*. Москва: Физматлит, 2002. 292 с.
- [40] Крюков А. К., Осипов Г. В., Половинкин А. В. Мультистабильность синхронных режимов в ансамблях неидентичных осцилляторов: Цепочка и решетка связанных элементов // *ПНД*, 2009, т. 17, № 2, с. 29–36.
- [41] Постон Т., Стюарт И. *Теория катастроф и ее приложения*. Москва: Мир, 1980. 617 с.
- [42] Broer H., Simó C., Vitolo R. The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: The Arnol'd resonance web // *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 2008, vol. 15, no. 5, pp. 769–787.
- [43] Кузнецов А. П., Поздняков М. В., Седова Ю. В. Связанные универсальные отображения с бифуркацией Неймарка–Сакера // *Нелинейная динамика*, 2012, т. 8, № 3, с. 2–11.

Dynamics and synchronization of the three coupled oscillators with reactive type of coupling

Alexander P. Kuznetsov¹, Ludmila V. Turukina², Nikolay Yu. Chernyschov³

^{1,2} Kotel'nikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch
Zelyenaya 38, Saratov, 410019, Russia

³ Saratov State University

Astrachanskaya 83, Saratov, 410012, Russia

¹apkuz@rambler.ru, ²lvtur@rambler.ru, ³nick.chernyschov@yandex.ru

A phenomenon of interaction between three reactively coupled van der Pol oscillators is considered in the paper. Phase equations are being obtained in second order approximation. Bifurcation analysis and Lyapunov's exponent maps are used for illustrating system behavior. The paper consider significant features of reactive coupling. Complicated original system behavior with steering parameter growth is being considered too.

MSC 2010: 39Axx, 93D05

Keywords: synchronization, quasi-periodical oscillations, bifurcations, chaos

Received February 21, 2013, accepted March 28, 2013

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 1, pp. 11–25 (Russian)