



УДК: 517.9+534

MSC 2010: 37D20, 37D45, 37L30, 37L45

Гиперболический хаос при параметрических колебаниях струны

О. Б. Исаева, А. С. Кузнецов, С. П. Кузнецов

Рассматривается возможность хаотической динамики, ассоциирующей с гиперболическим аттрактором типа Смейла–Вильямса, в задаче о механических колебаниях неоднородной струны с нелинейной диссипацией при параметрическом возбуждении мод на частотах ω и 3ω , когда накачка попеременно осуществляется колебаниями силы натяжения струны на частотах 2ω и 6ω .

Ключевые слова: параметрические колебания, струна, аттрактор, хаос, показатель Ляпунова

В свое время в математической теории динамических систем были введены в рассмотрение однородно гиперболические аттракторы, обладающие свойством грубости или структурной устойчивости, такие как соленоид Смейла–Вильямса и аттрактор Плыкина, которые, как первоначально считалось, могли бы служить для описания хаоса и турбулентности [1–3]. Впоследствии оказалось, что обнаруживаемые в приложениях хаотические аттракторы в этот класс обычно не попадают, и лишь в последнее время указаны примеры физически реализуемых систем с гиперболическим хаосом [4]. Поиск новых моделей такого

Получено 10 января 2013 года

После доработки 27 февраля 2013 года

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-02-31342 (О. Б. И. и А. С. К.) и гранта РФФИ № 12-02-00541 (С. П. К.). О. Б. И. благодарит также Дирекцию Программы развития НИУ СГУ за предоставление возможности стажировки в университете г. Ольденбург (Германия).

Исаева Ольга Борисовна

isaevao@rambler.ru

Кузнецов Сергей Петрович

spkuz@rambler.ru

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН

410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Кузнецов Алексей Сергеевич

alek.art@mail.ru

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

рода, относящихся к механике, гидродинамике, электронике, нейродинамике, представляется интересным направлением исследований [5–7]. В настоящей работе показано, как реализовать хаотические колебания, ассоциирующиеся с аттрактором типа Смейла–Вильямса, модифицировав задачу о параметрическом возбуждении струны.

Как хорошо известно, уравнение в частных производных, описывающее колебания струны, имеет вид

$$\rho y_{tt} - Gy_{xx} = 0, \quad (1)$$

где $y(x, t)$ — поперечное смещение струны в точке x в момент t , ρ — линейная плотность струны (масса на единицу длины), G — сила натяжения струны. В классическом опыте Мельде [8, 9] при периодическом изменении во времени силы натяжения струны с частотой $2\omega_0$, где ω_0 отвечает определенной моде — стоячей волне, возбуждаются параметрические колебания на этой моде (рис. 1). Начальная стадия параметрического возбуждения (пока колебания можно полагать линейными) описывается уравнением (1), где коэффициент G является функцией времени, скажем, $G(t) = G_0 \cdot (1 + a_2^0 \sin 2\omega_0 t)$, $0 < a_2^0 < 1$. Колебания силы натяжения выступают в качестве накачки — источника энергии, вызывающего параметрические колебания.

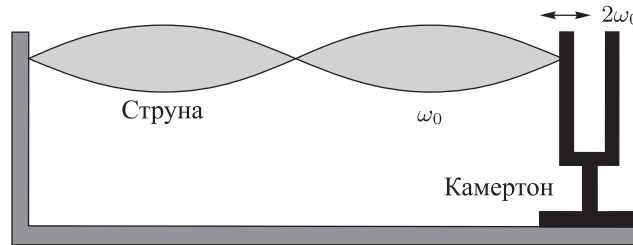


Рис. 1. Опыт Мельде: колебания камертона на частоте $2\omega_0$ вызывают периодическое изменение силы натяжения струны, благодаря чему происходит параметрическое возбуждение стоячих волн на частоте ω_0 .

Рассмотрим теперь такую ситуацию, когда сила натяжения колеблется по закону

$$G(t) = G_0 \cdot [1 + a_2(t) \sin 2\omega_0 t + a_6(t) \sin 6\omega_0 t], \quad (2)$$

причем коэффициенты a_2 , a_6 изменяются во времени с периодом T , поочередно оказываясь большими или малыми:

$$a_2(t) = a_2^0 \sin^2 \frac{\pi t}{T}, \quad a_6(t) = a_6^0 \cos^2 \frac{\pi t}{T}, \quad (3)$$

где неотрицательные константы a_2^0 , a_6^0 подчинены условию $a_2^0 + a_6^0 < 1$. Распределение массы по струне полагаем слабо неоднородным, зависящим от координаты x по закону

$$\rho(x) = \rho_0 [1 + \varepsilon \sin 4k_0 x], \quad (4)$$

где $k_0 = \omega_0/c_0$, $c_0 = \sqrt{G_0/\rho_0}$. Кроме того, добавим в уравнение член $-(\alpha + \beta y^2)y_t$, где параметр α отвечает за линейную, а β — за нелинейную диссипацию. Кубическая нелинейность диссипативного типа обеспечивает стабилизацию параметрической неустойчивости и, что существенно для обсуждаемого ниже механизма функционирования системы, порождает при колебательно-волновых движениях третью гармонику.

Граничные условия будем пока считать периодическими, соответствующими замкнутой в кольцо системе

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y(x + L, t), \text{ или} \\ y(0, t) &= y(L, t), \quad y_x(0, t) = y_x(L, t), \end{aligned} \quad (5)$$

а длину L примем равной целому числу длин волн с волновым числом k_0 : $L = 2\pi N/k_0$. Чтобы в системе с граничными условиями (5) обеспечить затухание возмущений с нулевым волновым числом, добавим в уравнение линейный член $-\gamma y$. (Физически его можно интерпретировать так, что колебания струны имеют место в потенциальном поле, зависящем от поперечной координаты $U(y) = \gamma y^2/2$.) Используя нормировку переменных и параметров, такую, что $c_0 = 1$, $k_0 = \omega_0$, $\beta = 1$, приходим к уравнению в частных производных

$$(1 + \varepsilon \sin 4k_0 x) y_{tt} = -(\alpha + y^2) y_t - \gamma y + [1 + a_2(t) \sin 2\omega_0 t + a_6(t) \sin 6\omega_0 t] y_{xx}. \quad (6)$$

Обсудим механизм, благодаря которому в системе возникает хаотическая динамика.

При накачке на частоте $2\omega_0$ на струне возбуждается стоячая волна с частотой ω_0 и волновым числом k_0 , у которой расположение узлов и пучностей характеризуется некоторой пространственной фазой θ , то есть в грубом приближении $y \sim \cos \omega_0 t \sin(k_0 x + \theta)$. Амплитуда волны стабилизируется на конечном уровне благодаря нелинейной диссипации; кроме того, из-за ее присутствия колебательно-волновое движение будет иметь составляющую на третьей гармонике: $y_3 \sim \cos 3\omega_0 t \sin(3k_0 x + 3\theta)$.

Когда накачка на частоте $2\omega_0$ прекращается, колебания на частоте ω_0 затухают, но включается накачка на частоте $6\omega_0$, которая обеспечивает развитие параметрической неустойчивости с образованием стоячей волны с частотой $3\omega_0$ и волновым числом $3k_0$. Эта волна формируется из возмущения, даваемого приведенным выше выражением для y_3 , поэтому ее пространственная фаза будет определяться величиной 3θ .

На следующем этапе, при возобновлении накачки на частоте $2\omega_0$, возбуждение стоячей волны с частотой ω_0 и волновым числом k_0 осуществляется в присутствии затравочного возмущения, которое определяется комбинацией возмущения $y \sim \cos 3\omega_0 t \sin(3k_0 x + 3\theta)$, оставшегося от предыдущей стадии, и компоненты $\varepsilon a_2 \sin 2\omega_0 t \sin 4k_0 x$, обусловленной неоднородностью струны, поскольку $\sin 2\omega_0 t \sin 3\omega_0 t \sin 4k_0 x \sin(3k_0 x + 3\theta) = -\frac{1}{4} \sin \omega_0 t \cos(k_0 x - 3\theta) + \dots$

Отсюда следует, что новая величина фазового сдвига θ' получается из предыдущей как результат *троекратно растягивающего отображения окружности* $\theta' = -3\theta + \text{const}$. А это отображение с хаотической динамикой, характеризуемое положительным показателем Ляпунова $\Lambda = \ln 3 \approx 1.0986$. При наличии сжатия по остальным направлениям в фазовом пространстве отображения, описывающего изменение состояния за период модуляции накачки, в этой ситуации должен реализоваться аттрактор типа Смейла–Вильямса. (Более определенно, речь идет о его разновидности с утроением числа витков на каждом шаге построения, в отличие от обычно обсуждаемой в учебниках конструкции, где число витков на каждом шаге удваивается [3].)

Для численного решения уравнения (6) удобно использовать схему «крест», имеющую второй порядок аппроксимации по пространственному и временному шагу [10]. Решение ищется в узлах сетки с шагом по координате h и по времени τ , причем отношение τ/h берется достаточно малым, чтобы обеспечить устойчивость разностной схемы.

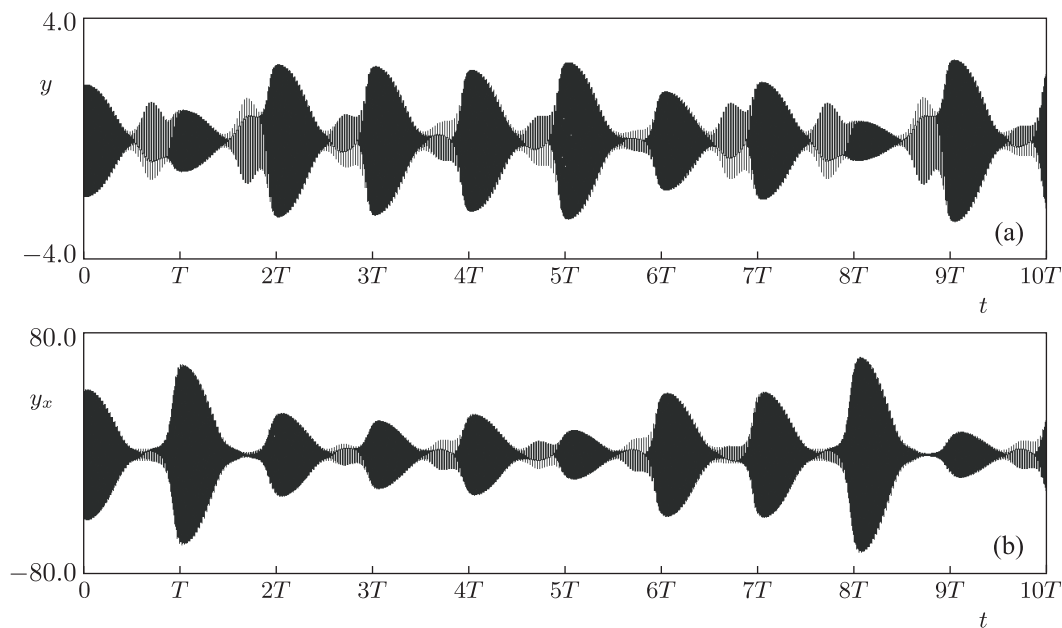


Рис. 2. Зависимость от времени поперечного смещения y (а) и производной по координате y_x (б) в фиксированной пространственной точке для системы (6) с граничными условиями (5) и параметрами (7).

Оказывается несложным подобрать параметры при численных расчетах так, чтобы система демонстрировала описанный выше тип динамического поведения, например,

$$T = 40, \quad L = 1, \quad \varepsilon = 0.2, \quad \alpha = 0.4, \quad \gamma = 0.03, \\ \omega_0 = 2\pi, \quad k_0 = 2\pi, \quad a_2^0 = 0.4, \quad a_6^0 = 0.2. \quad (7)$$

На рисунке 2 приведены графики зависимости от времени поперечного смещения y и пространственной производной y_x в фиксированной точке струны, а на рисунке 3 — пространственно-временная диаграмма, где формы, принимаемые струной, показаны с шагом по времени, кратным периоду высокочастотных колебаний $2\pi/\omega_0$. Как можно видеть, в системе поочередно возникают длинноволновые и коротковолновые структуры, причем пространственная фаза меняется от одного периода модуляции накачки к другому, тогда как фаза колебаний во времени жестко привязана к фазе накачки.

На рисунке 4 показан портрет аттрактора в стробоскопическом представлении на плоскости переменных $y(L/2, t)$, $y_x(L/2, t)$, где пространственная производная y_x получена численным дифференцированием с использованием ближайших к точке $x = L/2$ узлов пространственной сетки, а также приводится диаграмма, позволяющая убедиться, что за период модуляции накачки пространственная фаза действительно претерпевает трехкратно растягивающее отображение окружности. Для построения этой диаграммы выполняем решение уравнения (6) на большом числе периодов модуляции, и в моменты времени $t = t_n = nT$ вычисляются пространственные фазы $\theta_n = \arg [y(L/2, t) + iy_x(L/2, t)/3k_0]$, с представлением результатов в координатах (θ_n, θ_{n+1}) . Вид графика соответствует растягивающему отображению окружности, что согласуется с описанным выше механизмом. В самом деле, расположение ветвей, изображенных приблизительно прямыми линиями, таково, что однократный обход окружности для прообраза (изменение аргумента на 2π) соответствует трехкратному обходу для образа в противоположном направлении (изменение фазы на -6π).

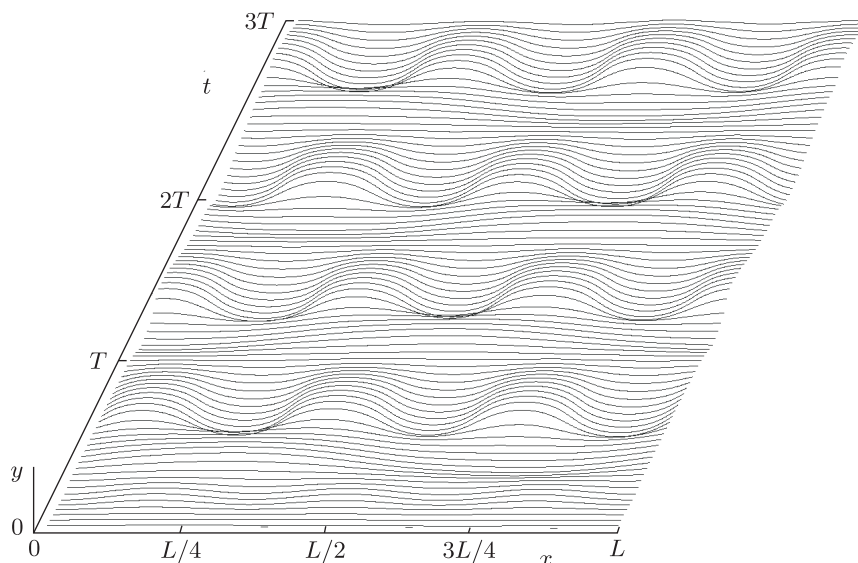


Рис. 3. Пространственно-временная диаграмма для системы (6) с граничными условиями (5) и параметрами (7), где форма струны показана с шагом по времени, кратным периоду высокочастотных колебаний.

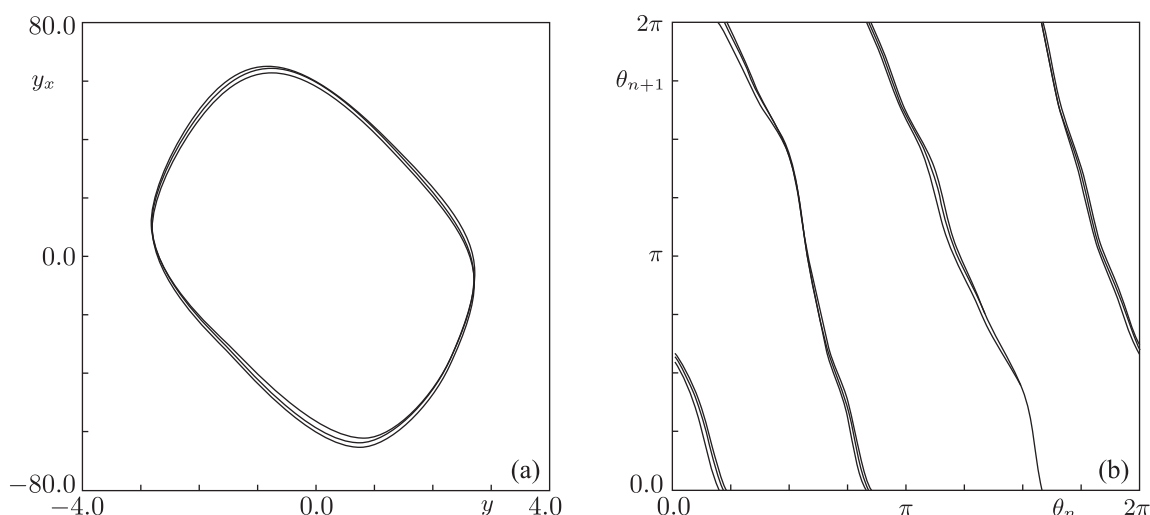


Рис. 4. Стробоскопический портрет аттрактора системы, где точки в проекции на плоскость поперечной координаты и ее пространственной производной отображаются в моменты времени $t_n = nT$ (a), и диаграмма для пространственной фазы, отвечающая растягивающему отображению окружности (b). Результаты приведены для системы (6) с граничными условиями (5) и параметрами (7).

Для вычисления показателей Ляпунова используем метод Бенеттина [11, 12], адаптированный к рассматриваемой распределенной системе. Наряду с уравнением (6) одновременно решается численно комплект уравнений в вариациях в количестве, равном числу показателей, которые требуется найти. По истечении каждого очередного периода модуляции производится нормализация и ортогонализация векторов возмущения по схеме Грама–Шмидта. Показатели Ляпунова получаются как средние скорости роста или убывания накапливающихся сумм логарифмов норм для векторов возмущения перед нормализацией. Согласно

проведенным вычислениям, для отображения, описывающего изменение состояния за период модуляции накачки, первые пять показателей Ляпунова таковы:

$$\Lambda_1 = 1.109, \quad \Lambda_2 = -1.608, \quad \Lambda_3 = -8.053, \quad \Lambda_4 = -10.767, \quad \Lambda_5 = -18.09. \quad (8)$$

Как и следовало ожидать, наибольший показатель близок к $\ln 3$. Остальные показатели отрицательные и отвечают за приближение траекторий к аттрактору, представляющему собой разновидность соленоида Смейла–Вильямса. Заметим, что на рисунке 1а различима характерная для соленоида поперечная канторова структура. Оценка размерности по формуле Каплана–Йорке [12] дает $D = 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2| \approx 1.69$.

Если говорить о возможной экспериментальной реализации, то, очевидно, проще и естественнее было бы работать с ситуацией фиксированных концов струны. В отличие от периодических граничных условий, геометрия системы в этом случае способствует вполне определенной пространственной фазе стоячей волны при параметрическом возбуждении, что при небольших длинах L может помешать реализации описанного выше механизма генерации гиперболического хаоса. При достаточно большой длине утроение пространственной фазы все же может реализоваться в центральной части системы, тогда как у концов колебательно-волновая структура будет подстраиваться соответственно заданным граничным условиям. С другой стороны, если длина слишком велика, может стать непригодным описание динамического поведения в рамках представлений о маломерном хаосе. Примирить противоречие можно, введя плавную пространственную зависимость коэффициента линейной диссипации, так чтобы он был минимален в центре системы и увеличивался у краев. Добавлять затухание для возмущений с нулевым волновым числом теперь не нужно, поскольку такие возмущения несовместимы с условиями на концах, так что полагаем $\gamma = 0$.

Итак, обратимся к следующей модификации системы (6):

$$(1 + \varepsilon \sin 4k_0 x) y_{tt} = - \left(\alpha_0 + \alpha_1 \cos^2 \frac{\pi x}{L} + y^2 \right) y_t + [1 + a_2(t) \sin 2\omega_0 t + a_6(t) \sin 6\omega_0 t] y_{xx}, \quad (9)$$

где коэффициенты a_2 и a_6 заданы формулами (3), с граничными условиями

$$y(0, t) = 0, \quad y(L, t) = 0. \quad (10)$$

На рисунке 5 показана пространственно-временная диаграмма, иллюстрирующая характер решения при задании параметров

$$T = 50, \quad L = 6.5, \quad \varepsilon = 0.2, \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 3, \quad \omega_0 = 2\pi, \quad k_0 = 2\pi, \quad a_2^0 = 0.55, \quad a_6^0 = 0.3. \quad (11)$$

На рисунке 6 приведены портрет аттрактора в стробоскопическом представлении на плоскости переменных $y(L/2, t)$, $y_x(L/2, t)$ и диаграмма для пространственных фаз (θ_n, θ_{n+1}) , которые определялись в середине системы в моменты времени $t = t_n = nT$.

Первые три показателя Ляпунова стробоскопического отображения при задании параметров согласно (11) таковы:

$$\Lambda_1 = 1.042, \quad \Lambda_2 = -12.533, \quad \Lambda_3 = -16.266. \quad (12)$$

Наибольший показатель близок к величине $\ln 3$, а остальные показатели отрицательные. Оценка размерности аттрактора по формуле Каплана–Йорке для стробоскопического отображения дает $D = 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2| \approx 1.08$.

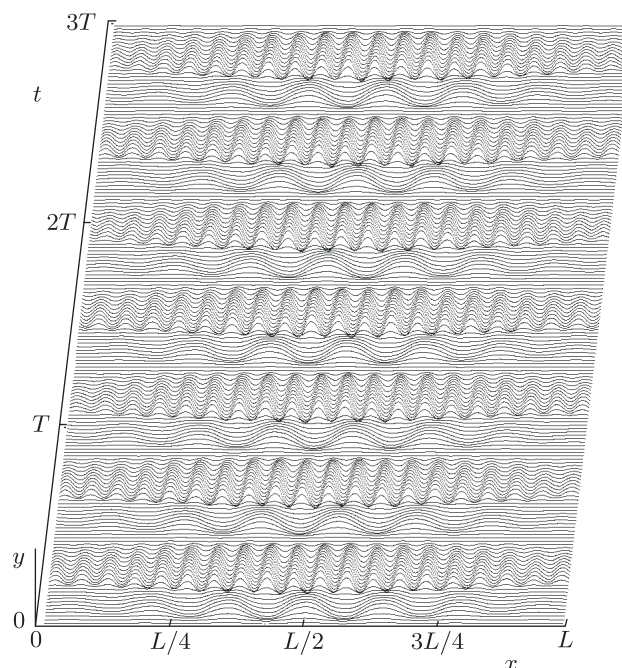


Рис. 5. Пространственно-временная диаграмма для системы (9) с граничными условиями (10) и параметрами (12), где форма струны показана с шагом по времени, кратным периоду высокочастотных колебаний.

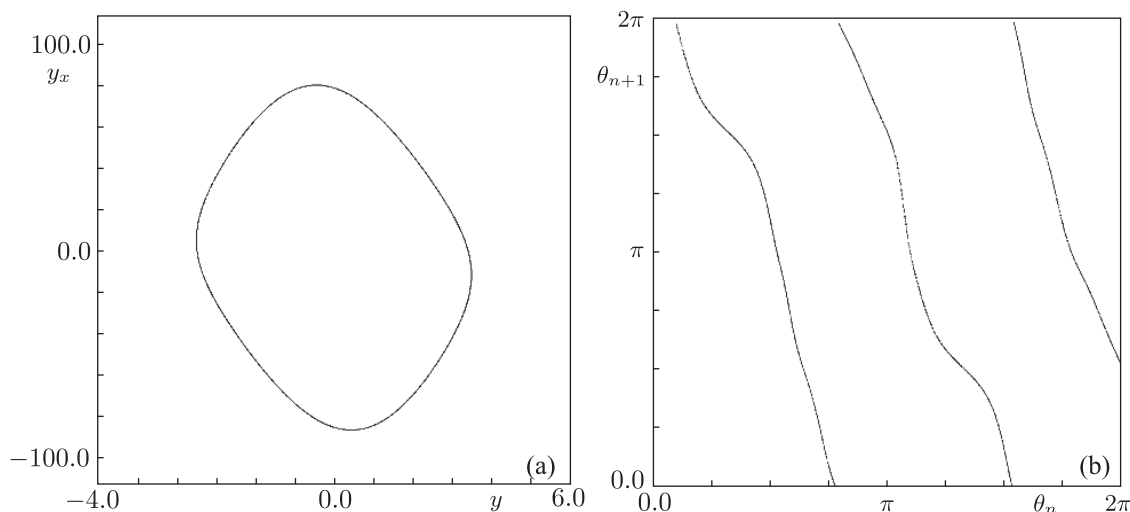


Рис. 6. Стробоскопический портрет аттрактора (a) и диаграмма для пространственной фазы (b) в центральной части системы (9) с граничными условиями (10) и параметрами (12).

Как можно полагать, в данном случае реализуется такой же тип аттрактора Смейла–Вильямса, как в системе с периодическими граничными условиями, рассмотренной в первой части статьи.

Представленные результаты свидетельствуют, что гиперболическая хаотическая динамика в распределенной системе может возникать за счет взаимодействия пространственных структур с различной длиной волны. Другой пример такого рода был приведен в недавней работе [6], где рассматривалась модельная система типа Свифта–Хоенберга, в которой

растягивающее отображение имело место для пространственной фазы попеременно возникающих структур Тьюринга с разным пространственным масштабом. Ингредиенты, необходимые для реализации механизма умножения фазы, а именно чередование паттернов вследствие модуляции параметров, нелинейность и пространственная неоднородность, могут быть найдены или созданы во многих пространственно распределенных системах. Тем самым открывается путь для поиска и построения моделей со структурно устойчивым гиперболическим хаосом, например, в динамике жидкости (рябь Фарадея, конвекционные валы), при акустических колебаниях, в системах реакция–диффузия и т. п.

Список литературы

- [1] Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // УМН, 1970, т. 25, № 1, с. 113–185.
- [2] Синай Я. Г. Стохастичность динамических систем // Нелинейные волны / А. В. Гапонов-Грехов. Москва: Наука, 1979. С. 192–212.
- [3] Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.
- [4] Кузнецов С. П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике // УФН, 2011, т. 181, № 2, с. 121–149.
- [5] Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // УФН, 2003, т. 117, № 4, с. 407–418.
- [6] Kuptsov P. V., Kuznetsov S. P., Pikovsky A. Hyperbolic chaos of Turing patterns // Phys. Rev. Lett., 2012, vol. 108, 194101, 4 pp.
- [7] Belykh V., Belykh I., Mosekilde E. The hyperbolic Plykin attractor can exist in neuron models // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 2005, vol. 15, no. 11, pp. 3567–3578.
- [8] Мандельштам Л. И. Лекции по колебаниям. Москва: АН СССР, 1955. 511 с.
- [9] Трубецков Д. И., Рожнев А. Г. Линейные колебания и волны. Москва: Физматлит, 2001. 416 с.
- [10] Калиткин Н. Н. Численные методы. Москва: Наука, 1978. 512 с.
- [11] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: a method for computing all of them: P. 1, 2 // Meccanica, 1980, vol. 15, pp. 9–30.
- [12] Кузнецов С. П. Динамический хаос. 2-е изд. Москва: Физматлит, 2006. 356 с.

Hyperbolic chaos in parametric oscillations of a string

Olga B. Isaeva¹, Alexey S. Kuznetsov², Sergey P. Kuznetsov³

^{1,3}Saratov Branch of Kotelnikov’s Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS
Zelenaya st. 38, Saratov, 410019, Russia

^{1,2,3}Saratov State University

Astrakhanskaya st. 83, Saratov, 410012, Russia

¹isaevao@rambler.ru, ²alek.art@mail.ru, ³spkuz@rambler.ru

We outline a possibility of chaotic dynamics associated with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type in mechanical vibrations of a nonhomogeneous string with nonlinear dissipation arising due to parametric excitation of modes at the frequencies ω and 3ω , when the pump is supplied by means of the string tension variations alternately at frequencies of 2ω and 6ω .

MSC 2010: 37D20, 37D45, 37L30, 37L45

Keywords: parametric oscillations, string, attractor, chaos, Lyapunov exponent

Received January 10, 2013, accepted February 27, 2013

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 1, pp. 3–10 (Russian)

