

01

## Фазовый хаос в динамике ансамбля осцилляторов с модулированной во времени глобальной связью

© С.П. Кузнецов, Ю.В. Седова

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
410019, Саратов, Россия  
e-mail: sedovayv@rambler.ru

(Поступило в Редакцию 12 июля 2011 г. В окончательной редакции 21 марта 2012 г.)

Рассмотрен ансамбль автоколебательных элементов с глобальной связью, имеющий распределение конечной ширины по частотам и взаимодействующий с полем резонатора — линейного осциллятора с частотой, вдвое большей в сравнении со средней частотой осцилляторов ансамбля. Глобальная связь периодически включается и выключается, так что ансамбль попеременно переходит от синхронизации к асинхронному поведению и обратно (переход Курамото). На каждой очередной стадии активности (синхронизации) возникновение колебаний среднего поля ансамбля стимулируется полем резонатора так, что по сравнению с предыдущей стадией возбуждения фаза удваивается. Поэтому динамика среднего поля хаотическая и, как можно заключить на основании численного исследования, ассоциируется с аттрактором типа Смейла–Вильямса. Системы подобного типа могут быть реализованы, например, в электронике для применения в системах скрытой коммуникации, шумовой локации и др.

Изучение сложной динамики многомерных и распределенных систем остается актуальным, в том числе в приложении к задачам гидродинамики, электроники, лазерной физики, химии, биологии и медицины. Интересен вопрос о возможности реализации явлений, встречающихся в системах малой размерности, при описании многомерных систем в терминах кооперативного действия большого числа относительно простых элементов и динамики соответствующих коллективных мод [1]. Одно из продвинутых направлений — анализ моделей на основе взаимодействующих фазовых осцилляторов или элементов, способных демонстрировать автоколебания. Например, модель Курамото, которая описывает поведение ансамбля глобально связанных фазовых осцилляторов с распределением по частотам в некотором диапазоне, демонстрирует нетривиальный переход синхронизация–десинхронизация в зависимости от величины параметра связи. Эта модель анализировалась многими исследователями как на уровне формального анализа, так и в физическом контексте [2–4]. Интересный пример ее применения — объяснение колебаний конструкций моста в Лондоне (Millennium Bridge), наблюдавшихся во время церемонии его открытия [5].

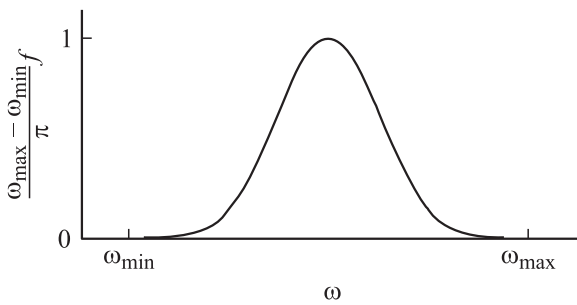
В свое время в математических работах была введена особая разновидность хаотических аттракторов конечномерных систем — однородно-гиперболические аттракторы [6–8], для которых хаотическая природа динамики строго обоснована. Они обладают свойством грубости или структурной устойчивости [9], т.е. устройство фазового пространства и характеристики динамики нечувствительны к вариации параметров и функций в определяющих уравнениях. Примеры таких аттракторов долгое время ограничивались чисто математическими конструкциями (аттрак-

тор Смейла–Вильямса, аттрактор Плыкина), и лишь недавно появились физически реализуемые примеры [10,11].

Может ли хаос, отвечающий однородно-гиперболическим аттракторам, реализоваться на уровне коллективных мод многомерных и распределенных систем? Этот вопрос представляет очевидный интерес в контексте конкретных дисциплин (гидродинамика, электроника, нейродинамика) и для возможных приложений. На настоящем этапе представляется разумным обратиться к искусственно сконструированным моделям, где появление данного типа динамики допускало бы ясное объяснение и трактовку.

Недавно в работе [12] была введена в рассмотрение модель в виде двух взаимодействующих ансамблей глобально связанных осцилляторов, претерпевающих переходы синхронизации и десинхронизации попеременно в силу принудительной медленной периодической модуляции параметров связи. В этой системе (обсуждаемой также в книге [11]) имеет место передача возбуждения коллективной моды от одного ансамбля к другому с преобразованием фазы за полный цикл, описываемым растягивающим отображением окружности (отображение Бернулли), что обеспечивает хаотическую динамику.

В настоящей работе предлагается модель, которая в отличие от упомянутой выше системы содержит лишь один ансамбль глобально связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с функцией распределения по частотам  $f(\omega)$  (рис. 1), взаимодействующий с полем резонатора — линейного диссипативного осциллятора с частотой, вдвое большей, чем средняя частота осцилляторов ансамбля.



**Рис. 1.** График функции распределения осцилляторов в ансамбле по частотам, принятый при численном моделировании согласно формуле (4) при  $L \rightarrow \infty$ .

Постулируем следующую форму уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \omega_2 v, \\ \dot{v} &= -\omega_2 y - \gamma v + \omega_2^{-1} \langle x_\omega u_\omega \rangle, \\ \dot{x}_\omega &= \omega u_\omega, \\ \dot{u}_\omega &= -\omega x_\omega + (A - x_\omega^2) u_\omega + \varepsilon \omega^{-1} y \sin \omega_1 t + \kappa(t) \langle u_\omega \rangle, \end{aligned} \quad (1)$$

где переменные  $x_\omega, y, v$  относятся к осцилляторам ансамбля, а переменные  $u_\omega$  к взаимодействующему с ними резонатору. Параметр  $A$  отвечает за бифуркацию рождения предельного цикла в индивидуальных осцилляторах, образующих ансамбль, и считается для них одинаковым (притом положительным). Параметр  $\gamma$  характеризует затухание в резонаторе. Угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю:

$$\langle g \rangle = \int g f(\omega) d\omega.$$

В частности, последний член в уравнении для переменной  $u_\omega$  отвечает за глобальную диссипативную связь между осцилляторами, которая включается и выключается с периодом  $T$ :

$$\kappa(t) = \begin{cases} \kappa_0, & 0 < t < T/2 \\ 0, & T/2 < t < T \end{cases} \quad \text{и } \kappa(t + T) = \kappa(t). \quad (2)$$

Сигнал, обеспечивающий воздействие поля резонатора на осцилляторы ансамбля, получается смещением осцилляций резонатора с опорным сигналом  $\sin \omega_1 t$  на частоте

$$\omega_1 = \int \omega f(\omega) d\omega.$$

Его интенсивность характеризуется параметром  $\varepsilon$ . С другой стороны, резонатор, имеющий собственную частоту  $\omega_2 = 2\omega_1$ , возбуждается сигналом в виде среднего поля  $\langle x_\omega u_\omega \rangle$ , обусловленного второй гармоникой осцилляций элементов ансамбля.

Система функционирует следующим образом. Поскольку глобальная связь периодически включается и

выключается, ансамбль совершает попеременно переход Курамото от синхронизации к асинхронному поведению и обратно. Пусть перед включением глобальной связи затухающие колебания резонатора характеризуются некоторой фазой  $\varphi_n$ , а индивидуальные осцилляторы, составляющие ансамбль, совершают колебания на предельном цикле, причем их фазы не синхронизованы, так что средние  $\langle u_\omega \rangle$  и  $\langle x_\omega u_\omega \rangle$  близки к нулю. После включения глобальной связи (член в (1), пропорциональный  $\langle u_\omega \rangle$ ) воздействие со стороны резонатора стимулирует процесс синхронизации осцилляторов. Имея в виду, что частота резонатора  $\omega_2 = 2\omega_1$ , можно заключить, что за это воздействие отвечает составляющая сигнала  $y \sin \omega_1 t$  на разностной частоте, являющаяся резонансной для осцилляторов. В результате коллективная переменная  $\langle u_\omega \rangle$ , характеризующая ансамбль, наследует фазу  $\varphi_n$ , а коллективная переменная, ассоциирующаяся со второй гармоникой  $\langle x_\omega u_\omega \rangle$ , будет иметь фазу  $2\varphi_n$ . К концу активной стадии колебания резонатора, возбуждаемого сигналом  $\langle x_\omega u_\omega \rangle$ , также приобретают эту фазу. Таким образом, с каждой новой стадией активности фазовая переменная претерпевает трансформацию, описываемую растягивающим отображением окружности (отображением Бернулли) вида  $\varphi_{n+1} \approx 2\varphi_n + \text{const}$ .<sup>1</sup> Как известно, это отображение хаотическое и характеризуется присутствием положительного показателя Ляпунова  $\Lambda = \ln 2 \approx 0.693$ .

Наличие отображения указанного типа для угловой переменной, при сжатии по прочим направлениям в фазовом пространстве, характерно для систем с аттрактором типа Смейла–Вильямса [6–8,10,11]. Можно предположить, что на уровне описания в терминах коллективных переменных (средних полей) в рассматриваемой системе при ее функционировании в описанном режиме реализуется именно такой аттрактор.

При численном моделировании будем полагать, что осцилляторы ансамбля представлены конечным числом  $L$  фракций, занумерованных индексом  $k$ , причем в пределах каждой фракции частоты осцилляторов  $\omega_k$  одинаковы. При этом частоты  $\omega_k$  считаются распределенными в интервале  $(\omega_{\min}, \omega_{\max})$  согласно соотношению

$$\omega_k = \omega_{\min} + (\omega_{\max} - \omega_{\min}) \arccos \left[ \frac{2k - 1}{L} - 1 \right], \quad k = 1, \dots, L. \quad (3)$$

Для сглаживания эффективной функции распределения на краях интервала частот, относительный вклад фракций полагается пропорциональным  $p_k = 2 \sin^2(\pi k/L)$ ,

<sup>1</sup> Присутствие константы обусловлено постоянными добавками, возникающими при передаче возбуждения от резонатора к элементам ансамбля и обратно. Ее можно устранить сдвигом начала отсчета фазы  $\varphi$ .

т. е. усредненные величины вычисляются по формулам

$$\langle u_\omega \rangle = L^{-1} \sum_{k=1}^L p_k u_k,$$

$$\langle u_\omega x_\omega \rangle = L^{-1} \sum_{k=1}^L p_k u_k x_k.$$

В пределе  $L \rightarrow \infty$  (так называемый термодинамический предел [1–4]) принятые определения приводят к функции, график которой показан на рис. 1:

$$f(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{\omega_{\max} - \omega_{\min}} \cos^2 \left[ \frac{1}{2} \pi \cos \left( \pi \frac{\omega - \omega_{\min}}{\omega_{\max} - \omega_{\min}} \right) \right] \\ \times \sin \left( \pi \frac{\omega - \omega_{\min}}{\omega_{\max} - \omega_{\min}} \right), & \omega_{\min} < \omega < \omega_{\max}, \\ 0, & \omega \leq \omega_{\min}, \omega \geq \omega_{\max}. \end{cases} \quad (4)$$

При задании параметров

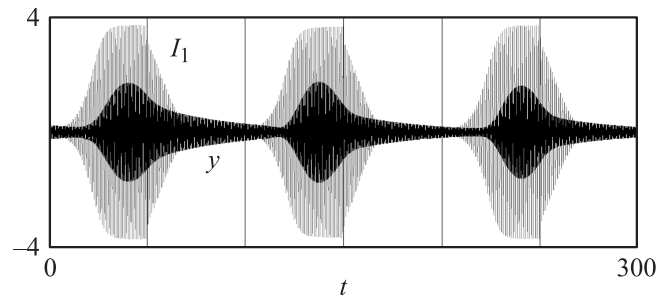
$$L = 1000, \quad T = 100, \quad \kappa_0 = 0.8, \quad \varepsilon = 0.6, \quad \gamma = 0.05,$$

$$\omega_{\max} = \frac{17}{8} \pi, \quad \omega_{\min} = \frac{15}{8} \pi, \quad \omega_1 = 2\pi, \quad \omega_2 = 4\pi \quad (5)$$

проводилось методом Рунге–Кутты четвертого порядка численное решение системы конечного числа  $2L + 2$  дифференциальных уравнений, к которым сводится модель (1). Начальные фазы осцилляторов считались равномерно распределенными на интервале от 0 до  $2\pi$  и задавались с помощью стандартного генератора случайных чисел, встроенного в пакет FreePascal. Временной интервал переходного поведения исключался из рассмотрения, чтобы иметь дело только с установившимся процессом коллективной динамики.

Расчеты показывают, что при указанном выборе параметров в области  $A = 2 \div 3$ , модель демонстрирует динамику, соответствующую описанной выше качественной картине. При этом, как было проверено, на всем протяжении процесса индивидуальные осцилляторы ансамбля имеют амплитуды, отличные от нуля, так что возбуждение и затухание коллективных переменных обусловлено именно синхронизацией и десинхронизацией элементов ансамбля, а не возбуждением и затуханием индивидуальных осцилляторов.

На рис. 2 показаны полученные в результате численных расчетов временные зависимости величины среднего поля  $I_1$ , характеризующего коллективные осцилляции ансамбля, и переменной  $y$ , относящейся к резонатору, при  $A = 2.4$ . Как видно из рисунка, эпохи синхронизации в ансамбле осцилляторов, отвечающие интенсивным колебаниям переменной  $I_1$ , следуют одна за другой с периодом включения и выключения глобальной связи  $T$ . Хаотическая природа динамики во времени выражается в том, что фаза заполнения меняется от одного генерируемого цуга колебаний к другому, подчиняясь хаотическому отображению. Портрет аттрактора в стробоскопическом отображении на плоскости переменных, относящихся к резонатору, и вид отображения для фаз,

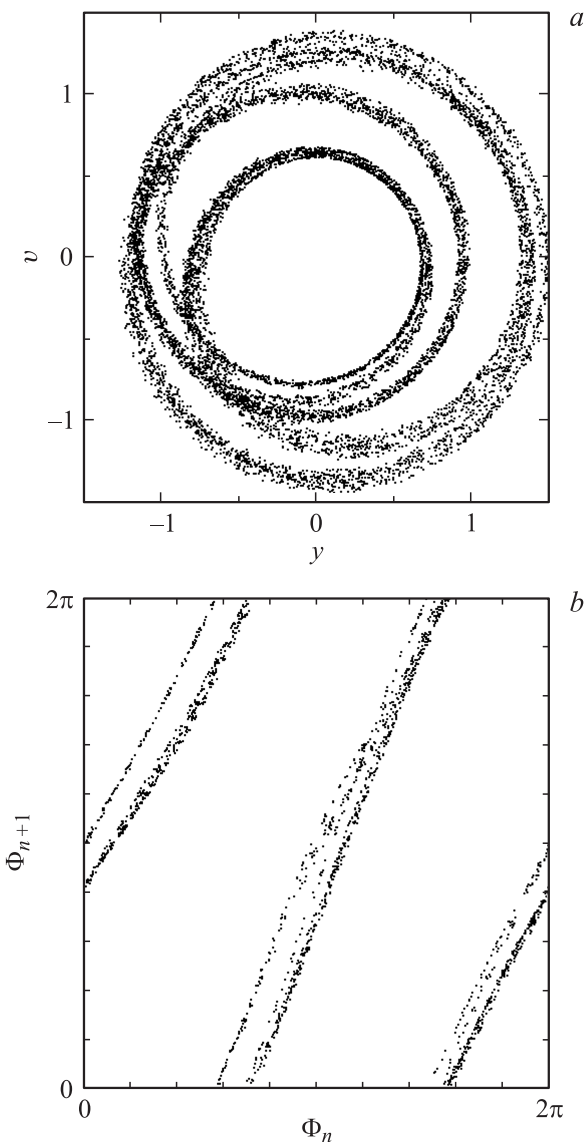


**Рис. 2.** Зависимости переменных  $I_1$  и  $y$  от времени  $t$ , полученные путем численного решения уравнений при  $A = 2.4$  и остальных параметрах, заданных согласно выражению (5). Вертикальные линии указывают на такие моменты времени, где происходит переключение значений параметра  $\kappa$ .

полученный путем обработки результатов численного моделирования, представлены на рис. 3 (соответственно панели *a* и *b*). Фазы определяются в моменты выключения связи в ансамбле осцилляторов  $t_n = nT_0$  по формуле  $\Phi = \arg(y - iv)$ , и на графике откладываются величины  $\Phi_{n+1}$  в зависимости от предыдущих значений  $\Phi_n$ . Как можно видеть, наблюдаемая зависимость действительно близка к отображению Бернулли: однократный обход окружности для прообраза соответствует двукратному обходу для образа. Растяжение по угловой координате, в качестве которой выступает фаза, сопровождается сжатием по поперечным направлениям в пространстве состояний, благодаря чему аттрактор (по крайней мере гипотетически) можно интерпретировать как соленоид Смейла–Вильямса. На рис. 3, *a* различима характерная для соленоида поперечная фрактальная структура, образуемая составляющими его волокнами.

Как известно, полезным инструментом анализа хаотических аттракторов служит спектр показателей Ляпунова. Полное количество показателей в спектре в нашем случае очень велико, а именно  $2L + 2$  и стремится к бесконечности в термодинамическом пределе  $L \rightarrow \infty$ . Вопрос о структуре полного спектра показателей Ляпунова данной системы, как и для других моделей, построенных на основе ансамблей с глобальной связью, содержит много тонких и нетривиальных моментов [13,14]. При этом большую часть этих показателей следует считать относящейся к „микроскопическому“ описанию динамики ансамбля, тогда как нас здесь интересует „макроскопическое“ описание в терминах средних полей. Поэтому ограничимся рассмотрением лишь одного наибольшего показателя Ляпунова, заведомо связанного с коллективной динамикой. Его положительная величина служит количественным подтверждением хаотической природы динамического режима.

Для вычисления старшего показателя Ляпунова использовался адаптированный для нашей модели алгоритм Бенеттина [15,16], состоящий в совместном интегрировании системы дифференциальных уравнений, описывающих систему вдоль фазовой траектории на



**Рис. 3.** Портрет аттрактора системы в стробоскопическом сечении, соответствующем моментам времени  $t_n = nT + T_0$ , в проекции на плоскость обобщенной координаты  $y$  и скорости  $v$  резонатора (а) и диаграмма для фаз, построенная обработкой результатов численного моделирования (б) при  $A = 2.4$ .

аттракторе, и линейной системы уравнений в вариациях

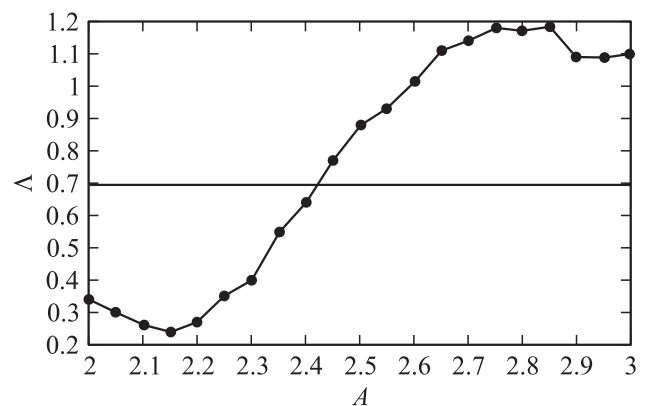
$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{y}} &= \omega_2 \tilde{v}, \\
 \dot{\tilde{v}} &= -\omega_2 \tilde{y} - \gamma \tilde{v} + \omega_2^{-1} \langle \tilde{x}_\omega u_\omega \rangle + \omega_2^{-1} \langle x_\omega \tilde{u}_\omega \rangle, \\
 \dot{\tilde{x}_\omega} &= \omega \tilde{u}_\omega, \\
 \dot{\tilde{u}_\omega} &= -\omega \tilde{x}_\omega + (A - x_\omega^2) \tilde{u}_\omega - 2\tilde{x}_\omega x_\omega u_\omega + \varepsilon \omega^{-1} \tilde{y} \sin \omega_1 t \\
 &\quad + \kappa(t) \langle \tilde{u}_\omega \rangle,
 \end{aligned} \tag{6}$$

где тильдой отмечены возмущения динамических переменных около опорной траектории. После каждого полного периода изменения коэффициентов в уравнениях

вычисляется логарифм отношения конечной и начальной нормы вектора возмущения  $(\tilde{y}, \tilde{v}, \tilde{x}_\omega, \tilde{u}_\omega)$  и производится перенормировка вектора на фиксированную величину. Показатель Ляпунова оценивается как средняя за достаточно большое время скорость нарастания накапливающейся суммы упомянутых логарифмов.

На рис. 4 приводится полученный в численных расчетах график показателя Ляпунова для отображения за период в зависимости от параметра  $A$ , управляющего надкритичностью осцилляторов ансамбля (остальные параметры заданы согласно (5)). Из графика видно, что в широком интервале изменения параметра показатель Ляпунова положительный, притом его зависимость выглядит регулярной, что характерно для гиперболических аттракторов (тогда как для негиперболических наблюдается обычно множество узких „провалов“, отвечающих „окнам периодичности“). В левой части рассмотренного интервала изменения параметра показатель Ляпунова меньше ожидаемой величины  $\ln 2 \approx 0.693$  (горизонтальная линия на графике), а в правой части — больше нее. Хотя количественно отклонение от ожидаемого значения довольно заметно, это само по себе не противоречит высказанной гипотезе о природе хаотического аттрактора, как соленоида Смейла–Вильямса в пространстве коллективных фазовых переменных.

Системы, подобные рассмотренной модели, могут быть реализованы в электронике (например, на базе ансамбля контактов Джозефсона, помещенных в общий резонатор [17]). По-видимому, они могут найти применение в системах скрытой коммуникации [18], шумовой локации [19], для генерации случайных чисел [20], для криптографических схем [21]. Их привлекательной чертой, обусловленной природой реализующегося хаотического аттрактора, будет нечувствительность характеристик динамического режима по отношению к параметрам и характеристикам элементов, из которых построена система, а также к шумам, флуктуациям и другим помехам.



**Рис. 4.** Значение старшего показателя Ляпунова в зависимости от параметра  $A$  при фиксированных остальных параметрах (см. (5)).

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ–ННИО № 11–02–91334.

## Список литературы

- [1] *Cross M.C., Hohenberg P.C.* // Rev. Mod. Phys. 1993. Vol. 65. P. 851.
- [2] *Kuramoto Y.* Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Springer, Berlin, 1984. 161 p.
- [3] *Strogatz S.H.* // Physica D. 2000. Vol. 143. P. 1–20.
- [4] *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [5] *Eckhardt B., Ott E., Strogatz S.H., Abrams D.M., McRobie A.* // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 75. P. 021 110.
- [6] *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем. В кн.: Нелинейные волны / Под ред. А.В. Гапонова-Грехова. М.: Наука, 1979. С. 192–212.
- [7] *Shilnikov L.* // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1997. Vol. 7. N 9. P. 1353–2001.
- [8] *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. М.: МЦНМО, 2005. 464 с.
- [9] *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
- [10] *Кузнецов С.П.* // УФН. 2011. Вып. 181. № 2. С. 121–149.
- [11] *Kuznetsov S.P.* Hyperbolic Chaos: A Physicist's View. Beijing: Higher Education Press and Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2012. 336 p.
- [12] *Kuznetsov S.P., Pikovsky A., Rosenblum M.* // Chaos. 2010. Vol. 20. N 4. P. 043 134.
- [13] *Nakagawa N., Kuramoto Y.* // Physica D. 1995. Vol. 80. P. 307–316.
- [14] *Popovych O.V., Maistrenko Yu.L., Tass P.A.* // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71. P. 065 201(R).
- [15] *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* // Meccanica. 1980. Vol. 15. P. 9–30.
- [16] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос, 2-е изд. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
- [17] *Watanabe S., Strogatz S.H.* // Physica D. 1994. Vol. 74. P. 197–253.
- [18] *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002. 252 с.
- [19] *Lukin K.A.* // Telecommunications and Radio-Engineering. 2001. Vol. 16. N 12. P. 8–16.
- [20] *Callegari S., Rovatti R., Setti G.* // IEEE Trans. on Signal Processing. 2005. Vol. 53. N 2. P. 793–805.
- [21] *Baptista M.S.* // Phys. Lett. A. 1998. Vol. 240. P. 50–54.