

Российская академия наук

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ РАДИОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ им. В.А. КОТЕЛЬНИКОВА
РАН

(ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН)

УДК 519.71, 512.643

УТВЕРЖДАЮ

№ госрегистрации 01200962236

Директор ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
академик

Инв. № 0-5155

_____ Ю.В. Гуляев

«___» _____ 2010 г.

ОТЧЁТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
по государственному контракту с Министерством образования и науки
Российской Федерации

от 20 июля 2009 г. № 02.740.11.5048

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ И РАССИНХРОНИЗОВАННЫХ СИСТЕМ

(итоговый)

Научный руководитель

д-р технических наук, академик РАН _____ Н.А. Кузнецов

(подпись, дата)

Москва 2010

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Научный руководитель

д-р технических наук, академик РАН _____ Н.А. Кузнецов
(введение, раздел 1, 6, 7, 8, заключение)

ст. науч. сотр., канд. филос. наук _____ Н.А. Гречишкина
(разделы 1, 2, 8)

науч. сотр., канд. физ.-мат. наук _____ А.В. Клецов
(разделы 7, 8)

Соисполнители:

профессор, зав. кафедрой, д-р физ.-мат. наук _____ А.В. Покровский
(разделы 3, 4, 6, 7)

Университет г. Корк, Ирландия

д-р физ.-мат. наук, с.н.с. _____ В.С. Козякин
(введение, раздел 1, 2, 3, 4, 9, заключение)

Институт проблем передачи информации

им. А.А. Харкевича РАН

доцент, д-р физ.-мат. наук _____ Д.И. Рачинский
(разделы 2, 4, 5, 6, 7)

Университет г. Корк, Ирландия

ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук _____ М.Н. Антоненко
(разделы 2, 3, 7, 8)

Институт автоматизации проектирования РАН

доцент, канд. физ.-мат. наук _____ Е.В. Щетинина
(разделы 1, 2)

Самарский государственный университет

ст. науч. сотр., канд. технических наук _____ Р.В. Железов
(разделы 7, 8)

ЗАО НПФ "Инсет"

аспирант _____ Н.Г. Рябых
(введение, раздел 1, 6, 8)

Московский физико-технический институт

аспирант _____ Д.В. Лукин
(раздел 7, 8)

Московский физико-технический институт

аспирант _____ Д.А. Смаль
(раздел 1)

Московский физико-технический институт

студент _____ А.В. Юдин
(раздел 1, 6, 7)

Московский физико-технический институт

студент _____ А.А. Березинский
(раздел 1, 7)

Московский физико-технический институт

студент _____ В.В. Левшин

студент _____ (раздел 1, 6, 7)
Московский физико-технический институт
Д.С. Давидюк
(раздел 1, 8)

студент _____ (раздел 1, 8)
Московский физико-технический институт
М.В. Сорокин
(раздел 6, 8)

норма-контроллер, к.ф.-м.н., ученый секретарь _____ (раздел 6, 8)
Московский физико-технический институт
Чусов И.И.
Институт радиотехники и электроники
им В.А. Котельникова РАН

РЕФЕРАТ

Отчет 132 с., 25 рис., 193 источника, 4 прил.

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ И РАССИНХРОНИЗОВАННЫХ СИСТЕМ

Объектом исследования являлись математические модели рассинхронизованных или асинхронных динамических систем, возникающие в теории обработки и передачи информации и задачах управления. Целью работы являлась разработка новых методов анализа и синтеза устойчивых рассинхронизованных систем управления, передачи и обработки информации.

В ходе исследований разработана процедура синтеза устойчивых рассинхронизованных систем с помощью методов пре- и пост- кодирования, позволяющая аппроксимировать решения линейных синхронизованных систем с помощью решения рассинхронизованных систем большей размерности.

Разработаны новые качественные и численные информационно-аналитические методы оценки совместного спектрального радиуса семейств матриц. Впервые установлены эффективные оценки скорости приближения спектрального радиуса матрицы с помощью формулы Гельфанда. Полученный результат распространен на случай вычисления совместного спектрального радиуса для семейств матриц.

В результате исследования впервые были созданы алгоритмы приближенного построения норм Барабанова и вычисления совместного спектрального радиуса семейства матриц с любой наперед заданной точностью, позволяющие оценить апостериорную погрешность вычисления совместного спектрального радиуса. Создана программная реализация полученных алгоритмов в системе MATLAB® для двумерных матриц.

Идеи теории асинхронных систем были успешно применены для анализа нелинейной динамики лазеров с очень большим или бесконечным числом степеней свободы. Изучены процессы приводящие к самоорганизации и синхронизации различных элементов системы. Основным объектом исследования являлась синхронизация мод в монолитных полупроводниковых лазерах, которые являются источниками коротких световых импульсов с высокой частотой повторения. При этом основное внимание уделялось малоизученным бифуркационным механизмам возникновения и нарушения синхронизации и сопутствующих ей режимов.

Развита описание нового класса математических моделей, сердцем которых являются рассинхронизованные сети, состоящие из элементов с памятью. Этот класс математических моделей имеет значительный потенциал для адекватного описания различных процессов в экономике, биологии, технике и др. Продемонстрирована роль предложенного класса математических моделей в весьма актуальном в настоящее время контексте понимания долговременных последствий экономических кризисов.

Для указанного в предыдущем абзаце класса математических моделей были развиты эффективные методы их качественного и численного исследования. В частности, был предложен локальный метод исследования устойчивости периодических режимов таких систем по отношению к широкому классу возмущений начальных данных, приводящий к простым критериям бифуркаций периодических режимов типа бифуркации седлоузла. Эти критерии полезны при численном построении решений методом продолжения по параметру и локализации точек бифуркации.

Проведено успешное моделирование полученных алгоритмов синтеза устойчивых рассинхронизованных систем. В качестве тестовой была выбрана практически важная задача моделирования динамики полетов нескольких беспилотных летательных аппаратов, включая задачу слежения одного аппарата за другим.

Обоснованы эффективные методы упрощения систем нелинейных уравнений применимые, в частности, к анализу уравнений возникающих в теории рассинхронизованных систем. Эти методы основаны на отбрасывании в степенных разложениях соответствующих уравнений слагаемых высоких степеней. Предложен набор полиномиальных критериев, позволяющих судить, в каких случаях такое усечение допустимо при исследовании систем вещественных нелинейных уравнений конечной гладкости.

СОДЕРЖАНИЕ

Содержание	6
Список иллюстраций	9
Введение	11
Основная часть	13
1. Разработка эффективных методов аппроксимации рассинхронизованных линейных систем вспомогательными синхронизованными системами. Разработка алгоритмов синтеза устойчивых рассинхронизованных систем	13
1.1. Постановка задачи	13
1.2. Алгоритм работы с итерационным процессом (1.1)	15
1.3. Нахождение матрицы B	16
1.4. Результаты моделирования	17
1.5. Заключение	19
2. Получение эффективных априорных оценок скорости приближения совместного спектрального радиуса с помощью обобщенной формулы Гельфанда	19
2.1. Постановка задачи	19
2.2. Основная теорема	21
2.3. Доказательство теоремы 2.1	22
2.4. Вычисление константы C_d	25
3. Развитие методов оценки совместного спектрального радиуса семейств матриц и применение этих методов к анализу устойчивости рассинхронизованных систем	26
3.1. Постановка задачи	26
3.2. Оценки Протасова	30
3.3. Основной результат	31
3.4. Доказательство теоремы 3.2	32
3.5. Комментарии и примеры	34
4. Разработка численных алгоритмов вычисления совместного спектрального радиуса на основе построения норм Барабанова	36
4.1. Постановка задачи	36
4.2. Итерационная схема по методу \max -релаксации	38
4.3. Итерационная схема по методу линейной релаксации	46
4.4. Вычислительная схема для двумерных матриц	54
4.5. Замечания	57
5. Исследование новых моделей синхронизации элементов оптических сетей передачи данных типа полупроводниковых лазеров и лазеров на квантовых точках	58
5.1. Постановка задачи	58
5.2. Моделирование синхронизации мод и теоретический анализ	58

5.3.	Численное моделирование и анализ	60
5.4.	Публикации по проекту, связанные с моделированием элементов оптических сетей	62
6.	Исследование проблем синхронизации систем, включающих элементы с памятью и запаздыванием	63
6.1.	Рассинхронизованные системы, включающие элементы с памятью	63
6.2.	Динамика рассинхронизованных систем, содержащих элементы с памятью	68
6.3.	Разработка программного обеспечения, реализующего устойчивые алгоритмы моделирования новых классов рассинхронизованных систем	70
6.4.	Публикации по проекту, относящиеся к развитию описания нового класса математических моделей, сердцем которых являются рассинхронизованные сети состоящие из элементов с памятью.	70
7.	Разработка методов исследования колебаний, бифуркаций и синхронизации рассинхронизованных систем	71
7.1.	Постановка задачи	71
7.2.	Устойчивость систем с отрицательными обратными связями	71
7.3.	Бифуркации в системах с положительной обратной связью	72
7.4.	Синхронизация систем и сетей с симметриями	72
7.5.	Публикации по проекту, связанные с разработкой методов исследования колебаний, бифуркаций и синхронизации рассинхронизованных систем	74
8.	Моделирование полученных алгоритмов синтеза устойчивых рассинхронизованных систем и алгоритмов, обеспечивающих устойчивость распределенных вычислений	75
8.1.	Постановка задачи	75
8.2.	Разностные уравнения и результаты моделирования	75
8.3.	Публикации по проекту	76
9.	Полиномиальная переформулировка критериев Куо v-достаточности ростков отображений	77
9.1.	Постановка задачи	77
9.2.	Квалифицированная регулярность и трансверсальность	81
9.3.	Основные результаты	82
9.4.	Доказательства	84
10.	Разработка программы внедрения результатов НИР в образовательный процесс	94
11.	Патентное исследование/литературный обзор на тему: “Современное состояние исследований по рассинхронизованным системам, теории обобщенного спектрального радиуса и моделированию элементов оптических сетей”	94
11.1.	Рассинхронизованные системы и теория обобщенного спектрального радиуса	94
11.2.	Элементы оптических сетей - лазеры на квантовых точках с синхронизованными модами	99
	Проведение семинаров по теме исследований	99

Заключение	109
Список использованных источников	111
Приложение А: Листинг программы в системе MATLAB	124
Приложение В: Информация о семинарах по теме исследования	127
Приложение С: Программа курса для студентов МФТИ	130
Приложение D: Отчет о патентных исследованиях	132

СПИСОК ИЛЛЮСТРАЦИЙ

1.1	Рассинхронизованная система	13
1.2	Многоугольники $\tilde{\mathcal{J}}$ и $\tilde{\tilde{\mathcal{J}}}$ в $\tilde{\mathcal{L}}$	16
1.3	Многоугольники $\tilde{\mathcal{J}}$ и $\tilde{\tilde{\mathcal{J}}}$ в $\tilde{\tilde{\mathcal{L}}}$	16
1.4	Расходимость асинхронного процесса	18
1.5	Ход приближений к решению для синхронного процесса и асинхронного процесса с кодированием	18
1.6	Сходимость процессов с периодическим внешним возмущением	18
4.1	Определение функции $R(\varphi)$	54
4.2	Примеры вычисления нормы Барабанова для пары двумерных матриц.	56
6.1	Экономический Компьютер – MONIAC (Monetary National Income Automatic Computer), см. [152]. 13 таких устройств были построены в мире различными организациями и тщательно откалиброваны для моделирования макроэкономических процессов в различных странах.	101
6.2	Гидромеханическая модель агрегированного поведения репрезентативных инвесторов. Инвестируемые фонды плавно перетекают в форму валюты той страны, где выше базовая процентная ставка.	101
6.3	Типичная траектория уравнения (6.9) описывающей динамику рассинхронизованной системы содержащей нелинейные элементы с памятью.	102
6.4	Типичные данные для Dow Jones Industrial Average (DJIA). Точки разворота в июле 2006 года и в феврале 2007 года иллюстрируют асимметричное поведение, типичное для динамику рассинхронизованной систему содержащей нелинейные элементы с памятью (см. Рисунок 6.3).	102
6.5	Переходные процессы переменной $y(t)$ для простейшего периодического входа $I(t)$ и двух различных начальных состояний.	103
6.6	Поведение пары $(y(t), I(t))$ для периодических входов различной частоты.	103
6.7	Переходные процессы переменной $x(t)$ для простейшего периодического входа $I(t)$ и двух различных начальных состояний. Траектории сходятся к различным предельным петлям (красные замкнутые кривые).	103
6.8	Долговременная динамика выходного сигнала $x(t)$ для периодических входов различной частоты, и для одного и того же начального состояния. График соответствующий самой большой частоте показан черным, а самой маленькой частоте – красным.	104
6.9	Графики выходного сигнала, $x(t)$, относительно графиков равновесного потенциала, $y(t)$, для различных частот входного сигнала.	104
6.10	Площади $x - y$ петель нормированные на единицу времени, вычисляемые по формуле $\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dx(t)$	105
6.11	Результат шоковых воздействий на систему. Вход $I(t)$ является периодическим, за исключением небольшого промежутка времени, где добавлено шоковое воздействие. Соответствующее значение равновесного потенциала $y(t)$ быстро возвращается к до-шоковому уровню; в тоже время выходная переменная $x(t)$ демонстрирует гидростатическое поведение.	105
7.1	Периодические решения уравнения (7.1) при двух различных входах $u(t)$. Верхнее и нижнее периодические решения, показанные сплошными линиями, на каждой панели устойчивы. Решение между ними, показанное пунктирной линией, неустойчиво. Система находится в зоне бистабильности.	106

7.2	Зависимость минимального и максимального значения периодических решений x уравнения (7.1) от параметра λ системы (слева). Точки, где S -образные линии делают разворот, соответствуют бифуркации седлоузла. Стилль линий соответствует рис. 7.1. Правая панель показывает зависимость характеристики γ периодических решений, определяющей их устойчивость, от параметра: решение устойчиво при $\gamma < 1$ и неустойчиво при $\gamma > 1$. В работе предложен эффективный метод вычисления величины γ , играющего роль характеристического мультипликатора периодического решения системы (7.1).	106
8.1	Слежение за высотой ведущего БПЛА	107
8.2	Слежение фильтра за скоростью	107
8.3	Слежение фильтра за координатой	107
8.4	Слежение за высотой ведущего БПЛА с учетом расширения фазового пространства	108

ВВЕДЕНИЕ

Одной из современных тенденций в теории управления и обработки информации является организация взаимодействия между отдельными частями систем в асинхронном режиме. Переход к асинхронному режиму управления и обработки информации позволяет избавиться от многочисленных недостатков, присущих традиционным синхронным системам. Первые работы такого типа появились в 50-х годах XX-го века (А.М. Ostrowski, J. Sklansky, G.M. Kranc, R.E. Kalman и др.). Интерес к системам с несинхронно работающими элементами усилился в конце 1960-х — начале 1970-х годов в связи с развитием вычислительной техники и, в особенности, с появлением многопроцессорных вычислительных комплексов, что потребовало разработки специальных классов вычислительных методов. Появилось значительное число публикаций с описаниями различных конкретных примеров вычислительных процедур, в которых за счет асинхронности выполнения различных фаз вычислительного алгоритма достигались те или иные преимущества. Оказалось, что классические математические методы плохо приспособлены для анализа даже линейных рассинхронизованных систем. Это потребовало развития новых методов и новых подходов, которые в существенной мере были разработаны и описаны в опубликованных в 1990-х годах монографиях (D.P. Bertsekas, J.N. Tsitsiklis, [49]; Е.А. Асарин, В.С. Козякин, М.А. Красносельский, Н.А. Кузнецов, [2]; A. Bhaya, E. Kaszkurewicz, [97]). Выяснилось, в частности, что асинхронные системы обладают высокой помехоустойчивостью и надежностью, что делает их привлекательным объектом для использования при построении модульных технологий организации процессов управления и обработки информации.

В рамках настоящего проекта предложены и обоснованы эффективные процедура синтеза устойчивых рассинхронизованных систем. Эти методы основаны на новых математических идеях. В частности, впервые установлены эффективные оценки скорости приближения спектрального радиуса матрицы с помощью формулы Гельфанда. Впервые созданы алгоритмы приближенного построения норм Барабанова и вычисления совместного спектрального радиуса семейства матриц с любой наперед заданной точностью, позволяющие оценить апостериорную погрешность вычисления совместного спектрального радиуса. Создана программная реализация полученных алгоритмов в системе MATLAB® для двумерных матриц. См. разделы 1 – 4.

В среднесрочной перспективе одним из центральных направлений в развитии теории асинхронных систем является приложение основных идей к новым важным областям, таким как нелинейная оптика, экономика, эпидемиология и так далее. Такие применения требуют создания методов описания динамики рассинхронизованных систем, содержащих элементы с памятью, разработки методов качественного и приближенного анализа таких систем, включая соответствующее программное обеспечение. Важные результаты в этом направлении получены в рамках работ поддержанных настоящим проектом, см. разделы 5 – 7.

Асинхронный подход может найти широкое применение в задачах, связанных с многокомпонентными (многопроцессорными) вычислениями — например, в задаче позиционирования и определения параметров полета космических кораблей, когда данные снимаются и обрабатываются одновременно с нескольких датчиков. Этот объект был выбран в качестве тестового. Проведено успешное моделирование полученных алгоритмов синтеза устойчивых рассинхронизованных систем. Результаты кратко обсуждаются в разделе 8.

Применение идеологии асинхронных процессов часто упирается в вопрос о том, может ли асинхронная система, отвечающая своему синхронному прообразу, быть устой-

чивой при произвольном срабатывании ее подсистем. Ответ на поставленный вопрос в общем случае отрицателен, но преодоление данной, казалось бы, неразрешимой ситуации становится возможным, если обратиться к идее кодирования и декодирования информации. В разделе 9 доказан ряд необходимых и достаточных условий v -достаточности (или, что равносильно, sv -достаточности) струй ростков отображений $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$, обобщающих условия Койпера-Куо и Тома для случая функций ($m = 1$), а также условия Куо в общем случае отображений ($m > 1$). В отличие от условий Куо критерии, доказываемые в работе, не требуют проверки каких-либо неравенств в так называемых рогеобразных окрестностях (априорно неизвестного) множества $f^{-1}(0)$. Вместо этого предлагаемые условия сводят проблему v -достаточности струй к оценке локального показателя Лоясиевича для некоторого конструктивно определяемого полинома.

Ряд результатов уже опубликован в поддержанных Проектом статьях и направлен в печать: [23, 29, 39, 43, 50, 71, 79, 88, 89, 106, 111, 112, 121, 135, 141, 155, 162, 177, 180, 182, 185]; другие результаты подготовлены для печати: [28, 33, 151].

По результатам исследований, выполненных в рамках проекта “Анализ и синтез нелинейных и рассинхронизованных систем”, был проведен ряд научных семинаров под руководством приглашенного исследователя и руководителя проекта заведующего кафедрой прикладной математики профессора Университета г. Корк (Ирландия) А.В. Покровского. Семинар под названием “Оценка динамики рассинхронизованных систем” состоялся 8 декабря 2009 г. в 15.00; семинар “Колебания, бифуркации и синхронизация рассинхронизованных систем с памятью и задержками” был проведен 5 августа 2010 г. в 10.00. Семинары проводились в читальном зале библиотеки ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. Программа семинаров и список участников представлены в приложении В. Тексты докладов и слайды презентаций приведены в виде отдельных файлов.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1. РАЗРАБОТКА ЭФФЕКТИВНЫХ МЕТОДОВ АПРОКСИМАЦИИ РАССИНХРОНИЗОВАННЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫМИ СИНХРОНИЗОВАННЫМИ СИСТЕМАМИ. РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ СИНТЕЗА УСТОЙЧИВЫХ РАССИНХРОНИЗОВАННЫХ СИСТЕМ

1.1. Постановка задачи

Пусть имеется некоторая система W , состоящая из подсистем W_1, \dots, W_n , которые в процессе функционирования системы могут обмениваться информацией друг с другом и на которые может оказывать влияние внешняя среда.

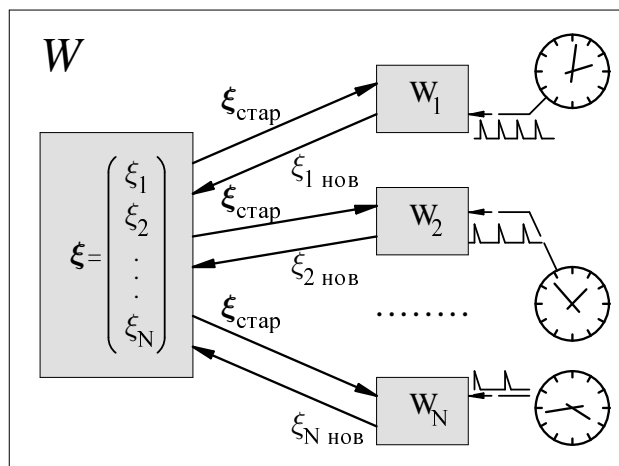


Рисунок 1.1 — Рассинхронизованная система

Тогда в общем виде состояние синхронизованной системы (все компоненты переключаются одновременно) записывается в виде:

$$x_{n+1} = Ax_n + f_n, \quad (1.1)$$

где x_n, x_{n+1} – векторы состояния системы в моменты времени T_n и T_{n+1} соответственно, A – матрица перехода системы, f_n – вектор внешних воздействий.

Если одновременно переключаются не все компоненты, то динамика системы описывается уравнением:

$$x_{n+1} = A_{\omega_n} x_n + f_{\omega_n}, \quad (1.2)$$

где ω_n – множество номеров переключаемых в момент времени T_n компонент, A_{ω_n} – матрица, строки которой с номерами $i \in \omega_n$ совпадают с соответствующими строками матрицы $A = (a_{ij})$, а строки с номерами $i \notin \omega_n$ – совпадают со строками единичной матрицы соответствующего размера (матрицы A_{ω_n} называют *помесями* матрицы A).

Применение идеологии асинхронных процессов упирается в вопрос о том, может ли асинхронная вычислительная схема (1.2), отвечающая своему синхронному прообразу (1.1), сходиться к решению линейного уравнения

$$x = Ax + f$$

при произвольном выборе индексных последовательностей $\{\omega_n\}$.

Ответ на поставленный вопрос в общем случае отрицателен. Простые примеры показывают, что возможны все ситуации: синхронная процедура сходится, а асинхронная расходится; синхронная процедура расходится, а асинхронная сходится; наконец обе процедуры сходятся или расходятся одновременно.

Пример 1.1. Рассмотрим в качестве A матрицу поворота со сжатием:

$$A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \lambda \in (0; 1)$$

Помеси этой матрицы:

$$A_{\omega_1} = \begin{pmatrix} \lambda \cos \alpha & -\lambda \sin \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{\omega_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda \sin \alpha & \lambda \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Рассмотрим синхронный и асинхронный процесс с начальными параметрами:

$$\lambda = 0.9, \quad \alpha = \frac{2\pi}{3}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Синхронный метод сходится к неподвижной точке

$$x = \begin{pmatrix} 0.12372 \\ 0.41133 \end{pmatrix}$$

Асинхронный же метод расходится: уже через $n = 45$ итераций матрица $D = (A_{\omega_1} A_{\omega_2})^n$ становится равной

$$D_{45} = \begin{pmatrix} -285.61 & -739.74 \\ -332.88 & -862.18 \end{pmatrix},$$

а вектор последовательных приближений x_n :

$$x_{45} = \begin{pmatrix} -294.78040 \\ 253.43553 \end{pmatrix}$$

Вместе с тем, существуют классы матриц A , для которых сходимость синхронной процедуры влечет за собой и сходимость ее асинхронного аналога. Так, такие классы образуют симметричные матрицы и матрицы с неотрицательными элементами (см. [2]), спектральный радиус которых строго меньше единицы ($\rho(A) < 1$). Таким образом, возникает идея привести матрицу A к такому “хорошему” виду.

В ряде ситуаций с помощью замены переменных $x = Qy$ можно привести уравнения (1.1) и (1.2) к виду

$$y_{n+1} = Q^{-1} A Q y_n + Q f \tag{1.3}$$

и

$$y_{n+1} = (Q^{-1} A Q y_n + Q f)_{\omega_n}, \tag{1.4}$$

где уравнение (1.4) уже будет сходиться к решению линейного уравнения

$$y = Q^{-1} A Q y + Q f$$

при произвольном выборе индексных последовательностей $\{\omega_n\}$, что позволит восстановить и решение $x = Qy$ исходного уравнения $x = Ax + f$.

К сожалению, цельной теории такого приведения уравнений (1.1) и (1.2) к виду (1.3)-(1.4) в настоящее время не существует и, более того, по-видимому, далеко не для каждой системы (1.1)-(1.2) может быть указана такая замена переменных, после применения которой система (1.3)-(1.4) окажется сходящейся при произвольном выборе последовательностей $\{\omega_n\}$.

Преодоление данной, казалось бы, неразрешимой ситуации оказывается, тем не менее, теоретически возможным, если воспользоваться следующим замечанием Даймонда-Опойцева:

Предложение 1.2. Если спектральный радиус $\rho(A)$ матрицы A размерности $n \times n$ строго меньше единицы, то для некоторого натурального N ($N > n$) найдется такая $N \times n$ матрица L и $n \times N$ матрица P , а также $N \times N$ матрица с неотрицательными коэффициентами B , что справедливы следующие соотношения:

$$LA = BL, \quad AP = PB, \quad \rho(B) < 1.$$

Таким образом, мы осуществляем кодирование — переводим нашу исходную матрицу перехода A в пространство большей размерности, то есть, вносим некую избыточную информацию.

1.2. Алгоритм работы с итерационным процессом (1.1)

1. *Подготовка процедуры.* Имея матрицу A , спектральный радиус которой удовлетворяет соотношению $\rho(A) < 1$, находятся число N , а также матрицы L, P, B ;

При этом отметим, что если λ — собственное значение матрицы B , то из $\lambda x = Bx$ следует:

$$|\lambda| \cdot \|x\| = \|Bx\| \leq \|B\| \cdot \|x\| \Rightarrow |\lambda| \leq \|B\|,$$

то есть любая норма матрицы не меньше модуля собственного значения. Отсюда следует, что

$$\rho(B) \leq \|B\|_1$$

2. *Пре-кодирование.* Для нахождения решения уравнения

$$x = Ax + f$$

производится замена переменных $y = Lx, \tilde{f} = Lf$ (здесь векторы y и \tilde{f} оказываются принадлежащими пространству достаточно большой размерности \mathbb{R}^N);

3. *Асинхронные вычисления с кодированными данными.* Для построения последовательных приближений рассматривается асинхронная процедура

$$y_{n+1} = B_{\omega_n} y_n + \tilde{f}_{\omega_n}.$$

Эта итерационная процедура в силу построения матрицы B будет сходящейся при любом выборе индексных последовательностей $\{\omega_n\}$. Доказательство сходимости асинхронной процедуры в случае неотрицательной матрицы перехода приведено в [2, т. 5.2.1].

4. *Пост-кодирование или декодирование.* Для нахождения приближений к решению уравнения

$$x = Ax + f$$

достаточно произвести замену переменных $x_n = Py_n$.

1.3. Нахождение матрицы B

Алгоритм нахождения матрицы B приведем на примере процесса, переход между состояниями которого задается матрицей поворота со сжатием:

$$x_{n+1} = Ax_n + f_n, \quad A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \lambda \in (0, 1)$$

Для этой матрицы $|\rho(A)| = |\lambda| < 1$. Тогда существует норма $\|\cdot\|_*$, в которой $\|A\|_* < 1$. В нашем случае в качестве такой нормы можно взять матричную норму $\|A\|_2$, согласованную с евклидовой нормой $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$. Как известно, $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \lambda \in (0, 1)$.

Единичный шар евклидовой нормы $\Omega = \{x : \|x\|_2 \leq 1\}$ является кругом с центром в начале координат $(0, 0)$ и радиусом 1. Этот шар отображается матрицей A в себя, точнее, в шар $\Omega_\lambda = \{x : \|x\| \leq \lambda\}$ — круг с центром в начале координат $(0, 0)$ и радиусом λ .

Впишем в кольцо между шарами Ω и Ω_λ N -угольник \mathfrak{J} (N определим ниже). Под действием матрицы A этот многоугольник будет переводиться в многоугольник $\tilde{\mathfrak{J}} \subset \mathfrak{J}$ (см. рис. 1.2).

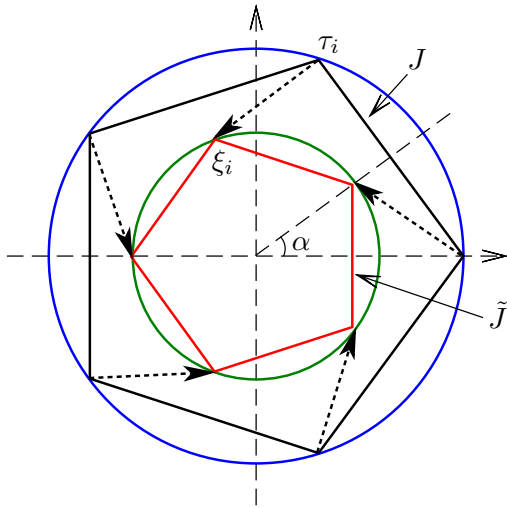


Рисунок 1.2 — Многоугольники \mathfrak{J} и $\tilde{\mathfrak{J}}$ в \mathcal{L}

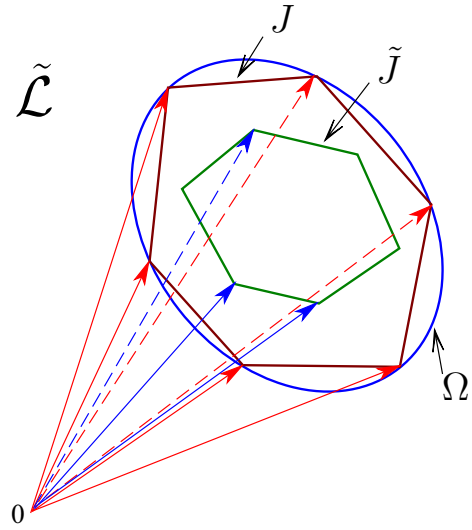


Рисунок 1.3 — Многоугольники \mathfrak{J} и $\tilde{\mathfrak{J}}$ в $\tilde{\mathcal{L}}$

Теперь поместим \mathfrak{J} в N -мерное пространство $\tilde{\mathcal{L}}$ и введем в $\tilde{\mathcal{L}}$ базис таким образом, чтобы вершины \mathfrak{J} были концами базисных векторов (см. рис. 1.3). Таким образом \mathfrak{J} в $\tilde{\mathcal{L}}$ будет ограничивать конус K_+ (конус векторов с неотрицательными координатами). Рассмотрим в $\tilde{\mathcal{L}}$ матрицу B , которая переводит базисные векторы в векторы, концами которых являются вершины $\tilde{\mathfrak{J}}$. Эта матрица переводит конус K_+ в себя. Докажем, что в этом случае B будет неотрицательна.

Лемма 1.3. Матрица B является неотрицательной в том и только в том случае, если $\forall x \in K_+ : Bx \in K_+$.

Доказательство. Пусть сначала B — неотрицательна, то есть $b_{ij} \geq 0$. Рассмотрим поэлементно произведение Bx :

$$Bx = (b_{ij}) \cdot (x_j) = \left(\sum_j b_{ij} x_j \right)$$

$$\begin{cases} b_{ij} \geq 0 \\ x_j \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (Bx)_i = \sum_j b_{ij}x_j \geq 0 \Rightarrow Bx \in K_+$$

Обратно — пусть $(Bx)_i \in K_+$. Тогда рассмотрим первый базисный вектор x_1 :

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K_+$$

Тогда

$$Bx_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & b_{ij} & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$

Так как $(Bx)_i \in K_+$, то $b_{i1} \geq 0$. Повторяя эту операцию для всех базисных векторов, получаем, что элементы каждого столбца матрицы B неотрицательны.

Таким образом, требуется выделить многоугольник \mathfrak{J} в кольце между шарами Ω и Ω_λ и найти матрицу B преобразования этого многоугольника в пространстве $\tilde{\mathcal{L}}$, соответствующую матрице A . Эта операция и будет кодированием матрицы A , а матрица B автоматически будет неотрицательной. Процесс нахождения численных значений элементов матрицы B является далее чисто технической операцией.

1.4. Результаты моделирования

Рассмотрим итерационный процесс

$$x_{n+1} = Ax_n + f_n,$$

где

$$\lambda = 0.99, \quad \alpha = \frac{2\pi}{3}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Синхронный процесс (одновременный пересчет всех координат) сходится к точке:

$$x_*^{(sync)} = \begin{pmatrix} 0.10734 \\ 0.39601 \end{pmatrix}$$

Асинхронный же процесс расходится, расходимость можно наглядно видеть на рис. 1.4.

Для реализации асинхронного процесса с кодированием сначала находим размерность матрицы B : N получается равным 23. Таким образом, B — матрица размерности 23×23 . Полную запись матрицы B здесь не приводим, отметим лишь, что

$$\rho(B) \leq \|B\|_1 = \max_j \sum_i |b_{ij}| = 0.9999 < 1$$

Результат после декодирования (количество итераций = 100):

$$x_*^{(code)} = \begin{pmatrix} 0.10733 \\ 0.39614 \end{pmatrix} \approx x_*^{(sync)}$$

Скорость и ход сходимости для синхронного и кодированного процессов можно увидеть на рисунках 1.5 и 1.6 (рис. 1.6 представляет собой слежение за второй координатой в процессе $x_{n+1} = Ax_n + a \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$).

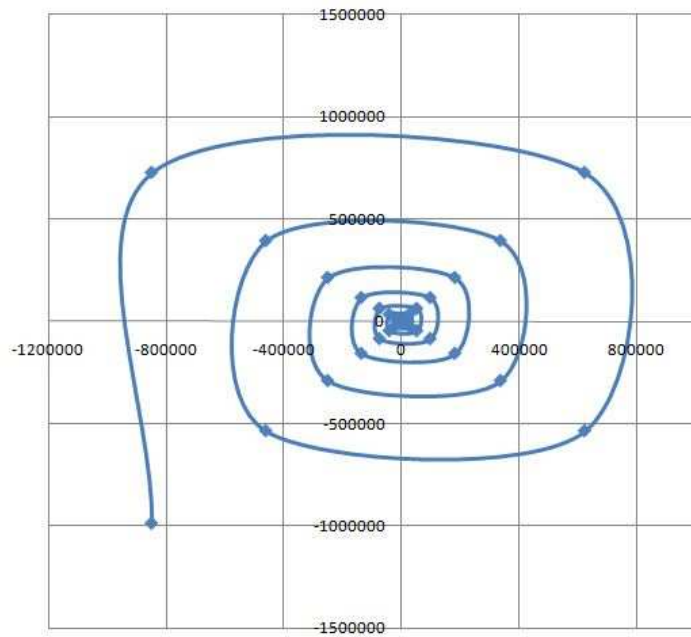


Рисунок 1.4 — Расходимость асинхронного процесса

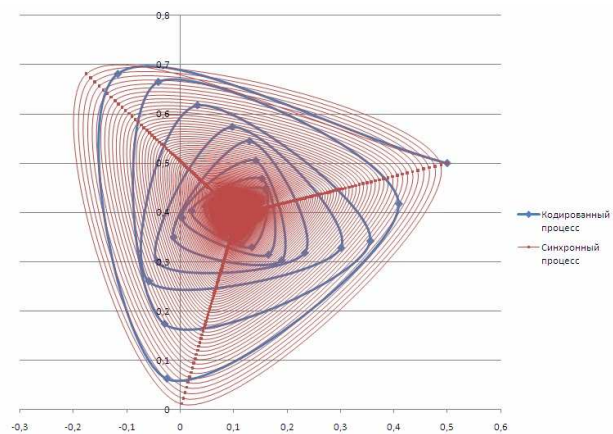


Рисунок 1.5 — Ход приближений к решению для синхронного процесса и асинхронного процесса с кодированием

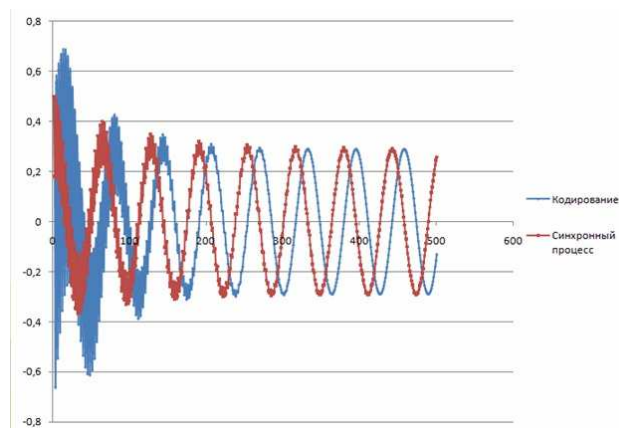


Рисунок 1.6 — Сходимость процессов с периодическим внешним возмущением

1.5. Заключение

Главный результат работы состоит в следующем: доказана принципиальная возможность для произвольной матрицы со спектральным радиусом, не превосходящим 1, применить асинхронную процедуру вычисления решения уравнения $x = Ax + f$. Возможным достоинством предлагаемой схемы является тот факт, что клиенты вычислительной процедуры — то есть, процессоры, осуществляющие обработку векторов y_n — будут работать с кодированными данными, а их начальное кодирование и декодирование будут осуществляться постановщиком задачи. В ряде случаев такая скрытность для клиентов вычислительного процесса реальных данных может оказаться существенной.

Основным недостатком предлагаемой схемы является факт существенного роста размерности N матрицы B по сравнению с размерностью n матрицы A . Грубая оценка показывает, что

$$N \simeq \frac{1}{(1 - \rho(A))^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Т то же время следует отметить, что матрица B оказывается так называемой “разреженной” матрицей — каждая ее строка и столбец содержат не более $n + 1$ ненулевых элементов. Как известно, это существенно упрощает работу с такими матрицами. Кроме того, есть основания полагать, что более “интеллектуальные процедуры” построения матрицы B могут существенно понизить значение размерности N .

Дальнейшие исследования должны проводиться в следующих направлениях:

- Варьирование свободными параметрами алгоритма кодирования с целью наилучшего приближения закодированного процесса к поведению системы, работающей по синхронной схеме.
- Попытка модифицировать алгоритм с целью уменьшения размерности матрицы B .

Описанный метод показывает, что, по крайней мере, теоретически построение гарантированно сходящихся асинхронных процедур возможно в достаточно широких ситуациях. Что означает, что необходимы интенсивные исследования в данном направлении, так как не исключена ситуация, что возможны и более простые методы синтеза гарантированно сходящихся асинхронных процедур.

Поскольку задача синтеза рассинхронизованной системы с заданной динамикой переходных процессов в значительной мере может быть сформулирована как задача синтеза системы с заданным спектральным радиусом, ниже будут рассмотрены вопросы оценивания спектрального радиуса бесконечного матричного произведения некоммутируемого набора матриц при различных предположениях о законах появления отдельных сомножителей в этих произведениях.

2. ПОЛУЧЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ АПРИОРНЫХ ОЦЕНОК СКОРОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ СОВМЕСТНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО РАДИУСА С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННОЙ ФОРМУЛЫ ГЕЛЬФАНДА

2.1. Постановка задачи

Пусть A — некоторая комплексная $d \times d$ матрица, а $\|\cdot\|$ — норма в \mathbb{C}^d . Как известно, спектральный радиус $\rho(A)$ матрицы A может быть выражен в терминах норм ее степеней $\|A^n\|$ с помощью следующей формулы Гельфанда:

$$\rho(A) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}, \quad (2.1)$$

которая на самом деле равносильна равенствам

$$\rho(A) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n} = \inf_{n \geq 1} \|A^n\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

Эти соотношения для $\rho(A)$ используются в различных математических конструкциях. Формула Гельфанда стала уже частью математического фольклора и упоминается практически во всех учебниках по линейному анализу без ссылок на первоначальную публикацию, которой была, по видимому, работа [7].

Для матриц понятие спектрального радиуса изначально определяется как максимум модулей ее собственных значений. При рассмотрении семейств матриц определить подобным образом понятие спектрального радиуса невозможно. В этом случае как раз формула типа (2.1) послужила в [169] основой для определения некоей величины, близкой по смыслу к спектральному радиусу. Опишем соответствующую конструкцию. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$ — набор комплексных $d \times d$ матриц. Как обычно, через \mathcal{A}^n при $n \geq 1$ обозначается множество всех произведений матриц из \mathcal{A} , состоящих из n сомножителей; $\mathcal{A}^0 = I$.

Если в \mathbb{C}^d задана некоторая норма $\|\cdot\|$, то предел

$$\rho(\mathcal{A}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{A}^n\|^{1/n}, \quad (2.2)$$

где

$$\|\mathcal{A}^n\| = \max_{A \in \mathcal{A}^n} \|A\| = \max_{A_{i_j} \in \mathcal{A}} \|A_{i_n} \cdots A_{i_2} A_{i_1}\|,$$

называется *совместным спектральным радиусом* набора матриц \mathcal{A} [169]. При этом соответствующий предел на деле от выбора нормы $\|\cdot\|$ не зависит. Более того, для любых $n \geq 1$ справедливы оценки $\rho(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}^n\|^{1/n}$ (см., например, [169]), и потому совместный спектральный радиус набора матриц \mathcal{A} может быть определен также с помощью формулы

$$\rho(\mathcal{A}) = \inf_{n \geq 1} \|\mathcal{A}^n\|^{1/n}. \quad (2.3)$$

Так как для семейств матриц \mathcal{A} , состоящих из одной матрицы, выражение (2.2) превращается в формулу Гельфанда (2.1), то иногда [175] формулу (2.2) называют обобщенной формулой Гельфанда. Существуют [68, 74, 76, 139, 150, 157, 160] и другие варианты определения аналога спектрального радиуса для семейств матриц, на которых мы в настоящей работе не останавливаемся.

Во многих ситуациях важен вопрос о том, при каких условиях $\rho(\mathcal{A}) > 0$. Как можно видеть, например, из установленного в [57, Thm. A] неравенства

$$\|\mathcal{A}^d\| \leq C_d \rho(\mathcal{A}) \|\mathcal{A}\|^{d-1}, \quad (2.4)$$

$\rho(\mathcal{A}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}^d = \{0\}$, т.е. когда семейство матриц \mathcal{A} нильпотентно.

В случае одной матрицы при условии $\rho(A) \neq 0$, как показывается во многих стандартных курсах линейного анализа, справедливы оценки

$$\gamma^{(1+\ln n)/n} \|A^n\|^{1/n} \leq \rho(A) \leq \|A^n\|^{1/n} \quad (2.5)$$

с некоторой константой $\gamma \in (0, 1)$. В [188, Lem. 2.3] неравенства (2.5) были распространены на случай общих матричных семейств:

$$\gamma^{(1+\ln n)/n} \|\mathcal{A}^n\|^{1/n} \leq \rho(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}^n\|^{1/n}. \quad (2.6)$$

К сожалению, точных значений для константы γ или каких-либо других эффективно вычислимых оценок скорости сходимости величин $\|A^n\|^{1/n}$ и $\|\mathcal{A}^n\|^{1/n}$ к своим пределам до сих пор не известно, что существенно ограничивает область применимости формул (2.1) и (2.2). В случае одной матрицы некоторым утешением служит тот факт, что значение $\rho(A)$, как правило, может быть установлено другими методами. В случае же семейств матриц отсутствие эффективных оценок скорости сходимости величин $\|\mathcal{A}^n\|^{1/n}$ к $\rho(\mathcal{A})$ более критично, поскольку альтернативных эффективных способов вычисления $\rho(\mathcal{A})$, насколько известно, до сих пор не найдено.

Ниже этот пробел до известной степени восполняется — с использованием неравенств Боши (2.4) устанавливаются явные вычислимые оценки скорости сходимости величин $\|\mathcal{A}^n\|^{1/n}$ к $\rho(\mathcal{A})$ в общем случае. Эти оценки, по-видимому, новы даже для случая матричных семейств, состоящих из одной матрицы.

Структура раздела следующая. Выше мы привели краткий обзор публикаций, в той или иной степени связанных с проблемой вычислимости совместного (обобщенного) спектрального радиуса. В разделе 2.2 формулируется основной результат — теорема 2.1, в которой получены явные оценки сверху и снизу спектрального радиуса конечного семейства матриц \mathcal{A} . В разделе 2.3 приводится доказательство основной теоремы, а раздел 2.4 посвящен вычислению константы Боши C_d , играющей ключевую роль в основной теореме.

Настоящий раздел подготовлен на основе публикаций [22, 105].

2.2. Основная теорема

В этом разделе рассмотрим вопрос о получении явных оценок аппроксимации спектрального радиуса конечного семейства матриц \mathcal{A} . Ключевым в дальнейших построениях будет следующий результат из [57, Thm. A].

Теорема А (Ж. Боши). При каждом $d \geq 2$ существует такое $C_d > 1$, что для любого ограниченного множества комплексных $d \times d$ матриц $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$ и для любой нормы $\|\cdot\|$ в \mathbb{C}^d имеет место неравенство

$$\|\mathcal{A}^d\| \leq C_d \rho(\mathcal{A}) \|\mathcal{A}\|^{d-1}. \quad (2.7)$$

В [57] значение константы C_d вычисляется лишь для случая $r = 1$, т.е. когда семейство \mathcal{A} состоит из одной матрицы. Однако, в промежуточных конструкциях из [57] имеется вся необходимая информация для нахождения C_d , что позволит получить в разделе 2.4 явное выражение для C_d .

Как вытекает из теоремы Боши, равенство $\rho(\mathcal{A}) = 0$ влечет равенство $\mathcal{A}^d = \{0\}$, т.е. нильпотентность семейства матриц \mathcal{A} . В силу (2.3) справедливо и обратное утверждение: из $\mathcal{A}^d = \{0\}$ вытекает равенство $\rho(\mathcal{A}) = 0$. Таким образом, теоретически проверка условия $\rho(\mathcal{A}) = 0$ может быть осуществлена за конечное число шагов: достаточно убедиться, что все произведения матриц из \mathcal{A} с числом сомножителей равным d обращаются в нуль. Конечно, данное замечание на практике малоприменимо, поскольку даже при умеренных значениях величин $d = 3, 4$, $r = 5, 6$ необходимые вычисления становятся практически невыполнимыми. Тем не менее, в дальнейших рассмотрениях ограничимся случаем, когда

$$\rho(\mathcal{A}) \neq 0 \quad \text{или, что равносильно,} \quad \mathcal{A}^d \neq \{0\}.$$

Теорема 2.1. При каждом $d \geq 2$ для любого ограниченного множества комплексных $d \times d$ матриц $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$ и для любой нормы $\|\cdot\|$ в \mathbb{C}^d справедливы оценки

$$C_d^{-\sigma_d(n)/n} \left(\frac{\|\mathcal{A}\|^d}{\|\mathcal{A}^d\|} \right)^{-\nu_d(n)/n} \|\mathcal{A}^n\|^{1/n} \leq \rho(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}^n\|^{1/n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.8)$$

где

$$C_d = \begin{cases} 2^d - 1 & \text{for } r = 1, \\ d^{3d/2} & \text{for } r > 1, \end{cases}$$

$$\sigma_d(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\ln n}{\ln 2} + 1 \right) \left(\frac{\ln n}{\ln 2} + 2 \right) & \text{for } d = 2, \\ \frac{(d-1)^3}{(d-2)^2} \cdot n^{\frac{\ln(d-1)}{\ln d}} & \text{for } d > 2, \end{cases}$$

$$\nu_d(n) = \begin{cases} \frac{\ln n}{\ln 2} + 1 & \text{for } d = 2, \\ \frac{(d-1)^2}{d-2} \cdot n^{\frac{\ln(d-1)}{\ln d}} & \text{for } d > 2. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 2.1 вынесено в раздел 2.3. Очевидно, утверждение теоремы справедливо и для вещественных семейств матриц.

Отметим, что оценки (2.8) слабее, чем оценки (2.6). Вызвано это способом доказательства оценок (2.8) или тем фактом, что участвующие в этих оценках константы C_d , $\sigma_d(n)$ и $\nu_d(n)$ универсальны, т.е. не зависят ни от семейства матриц, ни от выбора нормы $\|\cdot\|$, неясно.

Отметим также, что значение константы C_d быстро растет с ростом d . Поэтому оценки (2.8) вряд ли пригодны для практического вычисления спектрального радиуса семейства матриц и могут представлять скорее теоретический интерес. При этом оценки (2.8) существенно “конечномерны” и вряд ли могут быть обобщены на семейства линейных операторов в бесконечномерных пространствах.

Наконец, отметим, что в том случае, когда семейство \mathcal{A} содержит более одной матрицы и является неприводимым, имеет место [188, Lem. 2.3] более сильная чем (2.6) или (2.8) оценка

$$\gamma^{1/n} \|\mathcal{A}^n\|^{1/n} \leq \rho(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}^n\|^{1/n},$$

причем константа γ может быть эффективно вычислена [102].

2.3. Доказательство теоремы 2.1

Неравенство $\rho(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}\|^{1/n}$ в (2.8) следует из (2.3). Значение константы C_d при $r = 1$ указано в [57]; вычисление этой константы при $r > 1$ отложим до раздела 2.4.

Выведем некоторые следствия из теоремы Боши. Заметим сначала, что для любых целых неотрицательных p и q верны неравенства

$$\|\mathcal{A}^{p+q}\| \leq \|\mathcal{A}^p\| \cdot \|\mathcal{A}^q\|, \quad (2.9)$$

откуда

$$\|\mathcal{A}^p\| \leq \|\mathcal{A}\|^p, \quad \rho(\mathcal{A}^p) = \rho^p(\mathcal{A}), \quad p = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Из этих неравенств и (2.4) немедленно получаем:

$$\|\mathcal{A}^{d^k}\| \leq C_d (\rho(\mathcal{A}))^{d^{k-1}} \|\mathcal{A}^{d^{k-1}}\|^{d-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Введя обозначение

$$\omega_n(\mathcal{A}) = \frac{\|\mathcal{A}^n\|}{(\rho(\mathcal{A}))^n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

последние неравенства можно переписать в виде:

$$\omega_{d^k}(\mathcal{A}) \leq C_d (\omega_{d^{k-1}}(\mathcal{A}))^{d-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Следовательно, для любого целого $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \omega_{d^k}(\mathcal{A}) &\leq C_d (\omega_{d^{k-1}}(\mathcal{A}))^{d-1}, \\ (\omega_{d^{k-1}}(\mathcal{A}))^{d-1} &\leq C_d^{d-1} (\omega_{d^{k-2}}(\mathcal{A}))^{(d-1)^2}, \\ (\omega_{d^{k-2}}(\mathcal{A}))^{(d-1)^2} &\leq C_d^{(d-1)^2} (\omega_{d^{k-3}}(\mathcal{A}))^{(d-1)^3}, \\ &\dots \\ (\omega_d(\mathcal{A}))^{(d-1)^{k-1}} &\leq C_d^{(d-1)^{k-1}} (\omega_1(\mathcal{A}))^{(d-1)^k}. \end{aligned}$$

Перемножая полученные неравенства, получаем:

$$\omega_{d^k}(\mathcal{A}) \leq C_d^{\sum_{i=0}^{k-1} (d-1)^i} (\omega_1(\mathcal{A}))^{(d-1)^k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

Заметим теперь, что согласно неравенству Боши (2.7)

$$\frac{1}{\rho(\mathcal{A})} \leq C_d \frac{\|\mathcal{A}\|^{d-1}}{\|\mathcal{A}^d\|}.$$

Поэтому

$$1 \leq \omega_1(\mathcal{A}) = \frac{\|\mathcal{A}\|}{\rho(\mathcal{A})} \leq C_d \frac{\|\mathcal{A}\|^d}{\|\mathcal{A}^d\|},$$

что дает возможность получить из (2.11) оценку для $\omega_{d^k}(\mathcal{A})$, не содержащую в правой части неизвестной величины $\rho(\mathcal{A})$:

$$\omega_{d^k}(\mathcal{A}) \leq C_d^{\sum_{i=0}^k (d-1)^i} \left(\frac{\|\mathcal{A}\|^d}{\|\mathcal{A}^d\|} \right)^{(d-1)^k}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.12)$$

Пусть теперь n — произвольное натуральное число. Тогда найдется такое целое неотрицательное k , что

$$d^k \leq n < d^{k+1},$$

и, следовательно, для n справедливо представление

$$n = n_k d^k + n_{k-1} d^{k-1} + \dots + n_0,$$

где

$$1 \leq n_k \leq d-1, \quad 0 \leq n_i \leq d-1, \quad i = 1, 2, \dots, k-1. \quad (2.13)$$

Так как для любых целых неотрицательных p и q в силу (2.9) и (2.10) справедливо соотношение

$$\omega_{p+q}(\mathcal{A}) \leq \omega_p(\mathcal{A}) \cdot \omega_q(\mathcal{A}),$$

то

$$\omega_n(\mathcal{A}) \leq (\omega_{d^k}(\mathcal{A}))^{n_k} \cdot (\omega_{d^{k-1}}(\mathcal{A}))^{n_{k-1}} \dots (\omega_1(\mathcal{A}))^{n_0}.$$

Отсюда и из (2.12) следует, что

$$\omega_n(\mathcal{A}) \leq C_d^{\sigma_d(n)} \left(\frac{\|\mathcal{A}\|^d}{\|\mathcal{A}^d\|} \right)^{\nu_d(n)}, \quad (2.14)$$

где

$$\sigma_d(n) = \sum_{j=0}^k n_j \sum_{i=0}^j (d-1)^i, \quad \nu_d(n) = \sum_{j=0}^k n_j (d-1)^j. \quad (2.15)$$

Заметим, что по определению по определению величины $\omega_n(\mathcal{A})$ (2.14) равносильно неравенству

$$\|\mathcal{A}\| \leq C_d^{\sigma_d(n)} \left(\frac{\|\mathcal{A}\|^d}{\|\mathcal{A}^d\|} \right)^{\nu_d(n)} (\rho(\mathcal{A}))^n,$$

а значит, и неравенству

$$C_d^{-\sigma_d(n)/n} \left(\frac{\|\mathcal{A}\|^d}{\|\mathcal{A}^d\|} \right)^{-\nu_d(n)/n} \|\mathcal{A}^n\|^{1/n} \leq \rho(\mathcal{A}).$$

Так как последнее неравенство совпадает с левой частью (2.8), то для завершения доказательства теоремы осталось получить лишь оценки для $\sigma_d(n)$ и $\nu_d(n)$. В силу (2.13) и (2.15)

$$\sigma_d(n) = \sum_{j=0}^k n_j \sum_{i=0}^j (d-1)^i \leq (d-1) \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j (d-1)^i = (d-1) \sum_{j=0}^k (k+1-j)(d-1)^j, \quad (2.16)$$

$$\nu_d(n) = \sum_{j=0}^k n_j (d-1)^j \leq (d-1) \sum_{j=0}^k (d-1)^j. \quad (2.17)$$

Так как по определению числа k имеет место оценка $k \leq \frac{\ln n}{\ln d}$, то при $d = 2$ из (2.16), (2.17) получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_n(2) &\leq \frac{(k+1)(k+2)}{2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\ln n}{\ln 2} + 1 \right) \left(\frac{\ln n}{\ln 2} + 2 \right), \\ \nu_n(2) &\leq k+1 \leq \frac{\ln n}{\ln 2} + 1. \end{aligned}$$

При $d > 2$ представим (2.16), (2.17) в виде

$$\sigma_d(n) = \sum_{j=0}^k n_j \sum_{i=0}^j (d-1)^i \leq (d-1)^{k+1} \sum_{j=0}^k \frac{j+1}{(d-1)^j}, \quad (2.18)$$

$$\nu_d(n) = \sum_{j=0}^k n_j (d-1)^j \leq (d-1)^{k+1} \sum_{j=0}^k \frac{1}{(d-1)^j}, \quad (2.19)$$

и воспользуемся равенствами

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)x^j = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

Положив в этих равенствах $x = \frac{1}{d-1}$, из (2.18), (2.19) получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_d(n) &\leq \frac{(d-1)^{k+3}}{(d-2)^2} \leq \frac{(d-1)^3}{(d-2)^2} \cdot n^{\frac{\ln(d-1)}{\ln d}}, \\ \nu_d(n) &\leq \frac{(d-1)^{k+2}}{d-2} \leq \frac{(d-1)^2}{d-2} \cdot n^{\frac{\ln(d-1)}{\ln d}}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

2.4. Вычисление константы C_d

В [57] существование константы C_d установлено в теореме А, доказательство которой опирается на леммы 2 и 3.

Лемма 2 (Ж. Боши). Пусть $\|\cdot\|_e$ — евклидова норма в \mathbb{C}^d . Тогда существует такое $C_0 = C_0(d)$, что

$$\|S\mathcal{A}^d S^{-1}\|_0 \leq C_0 \|\mathcal{A}\|_0 \|S\mathcal{A} S^{-1}\|_0^{d-1}$$

для каждого непустого ограниченного семейства $d \times d$ матриц \mathcal{A} и каждой матрицы $S \in GL(d)$.

Фактически в [57] при доказательстве леммы 2 для матричной нормы $\|A\|_0 = \max |a_{ij}|$ сначала показано, что для каждой диагональной матрицы $S \in GL(d)$ справедливо неравенство

$$\|S\mathcal{A}^d S^{-1}\|_0 \leq d^{d-1} \|\mathcal{A}\|_0 \|S\mathcal{A} S^{-1}\|_0^{d-1}.$$

Как известно [37, гл. 5], между нормой $\|\cdot\|_0$ и евклидовой нормой $\|\cdot\|_e$ имеют место соотношения

$$\|A\|_0 \leq \|A\|_e \leq d\|A\|_0,$$

из которых вытекает цепочка неравенств

$$\begin{aligned} d^{-1} \|S\mathcal{A}^d S^{-1}\|_e &\leq \|S\mathcal{A}^d S^{-1}\|_0 \leq d^{d-1} \|\mathcal{A}\|_0 \|S\mathcal{A} S^{-1}\|_0^{d-1} \leq \\ &\|S\mathcal{A}^d S^{-1}\|_0 \leq d^{d-1} \|\mathcal{A}\|_e \|S\mathcal{A} S^{-1}\|_e^{d-1}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\|S\mathcal{A}^d S^{-1}\|_e \leq d \cdot d^{d-1} \|\mathcal{A}\|_e \|S\mathcal{A} S^{-1}\|_e^{d-1}.$$

Последнее неравенство, как показано в [57] при доказательстве леммы 2, легко распространяется на общий случай матриц $S \in GL(d)$. Следовательно, в условиях леммы 2

$$C_0 = d^d.$$

Перейдем к рассмотрению леммы 3 из [57].

Лемма 3 (Ж. Боши). Существует такое $C = C(d)$, что для любых двух норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ в \mathbb{C}^d найдется матрица $S \in GL(d)$, для которой

1. $C^{-1} \|v\|_1 \leq \|Sv\|_2 \leq \|v\|_1$ для всех $v \in \mathbb{C}^d$;
2. $C^{-1} \|A\|_1 \leq \|SAS^{-1}\|_2 \leq C \|A\|_1$ для всех $d \times d$ матриц A .

Здесь утверждение 2 является прямым следствием утверждения 1.

Чтобы оценить константу C в первом утверждении, заметим сначала что в [57] лемма 3 на самом деле используется лишь в ситуациях, когда одна из двух норм $\|\cdot\|_1$ или $\|\cdot\|_2$ евклидова. Поэтому оценим константу C в предположении, что норма $\|\cdot\|_1$ произвольна, а норма $\|\cdot\|_2$ евклидова. Для этого воспользуемся вариантом теоремы Джона об эллипсоидах для комплексных матриц из [40]. По-видимому, Ж. Боши не был знаком с этой техникой, когда писал свою статью. Для полноты изложения, воспроизведем соответствующую аргументацию из [173].

Произвольная норма $\|\cdot\|_1$ в \mathbb{C}^d всегда может быть представлена в виде

$$\|v\|_1^2 = \sup_{\lambda \in \Lambda} \langle H_\lambda v, v \rangle, \quad v \in \mathbb{C}^d,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — евклидово скалярное произведение в \mathbb{C}^d , а $\{H_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ — некоторое семейство неотрицательно определенных матриц. Но согласно [40, теорема 2.1] для любого семейства неотрицательно определенных матриц $\{H_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ найдется такая положительно определенная матрица H , что

$$\langle Hv, v \rangle \leq \sup_{\lambda \in \Lambda} \langle H_\lambda v, v \rangle \leq d \langle Hv, v \rangle, \quad v \in \mathbb{C}^d.$$

Значит,

$$\langle Hv, v \rangle \leq \|v\|_1^2 \leq d \langle Hv, v \rangle, \quad v \in \mathbb{C}^d.$$

Так как матрица H без ограничения общности может считаться симметричной, то полагая $S = H^{1/2}$, $\|\cdot\|_2 = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ и $\|Sv\|_2^2 = \langle Sv, Sv \rangle \equiv \langle H^{1/2}v, H^{1/2}v \rangle \equiv \langle Hv, v \rangle$, получим:

$$d^{-1} \|v\|_1^2 \leq \|Sv\|_2^2 \leq \|v\|_1^2,$$

и утверждение леммы 3 справедливо с константой $C = d^{1/2}$.

Теперь для получения значения константы C_d в теореме Боши достаточно заметить, что согласно [57] $C_d = C^d C_0$, где C_0 и C — константы из лемм 2 и 3, соответственно. Следовательно, $C_d = d^{3d/2}$.

3. РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ ОЦЕНКИ СОВМЕСТНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО РАДИУСА СЕМЕЙСТВ МАТРИЦ И ПРИМЕНЕНИЕ ЭТИХ МЕТОДОВ К АНАЛИЗУ УСТОЙЧИВОСТИ РАССИНХРОНИЗОВАННЫХ СИСТЕМ

3.1. Постановка задачи

Различные задачи теории управления [61], неавтономных и многозначных линейных динамических систем [4, 41, 42], теории вейвлетов [70, 74, 75] и многих других разделов математики приводят к необходимости анализа скорости роста матричных произведений с сомножителями, взятыми из некоторого набора матриц. Одной из характеристик, описывающих экспоненциальную скорость роста произведений матриц, является так называемый совместный или обобщенный спектральный радиус. Вопросу получения эффективных оценок совместного спектрального радиуса посвящена настоящий раздел.

Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$ — набор вещественных $d \times d$ матриц. Как обычно, через \mathcal{A}^n при $n \geq 1$ обозначается множество всех произведений матриц из \mathcal{A} , состоящих из n сомножителей; $\mathcal{A}^0 = I$.

Если в \mathbb{R}^d задана некоторая норма $\|\cdot\|$, то предел

$$\hat{\rho}(\mathcal{A}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{A}^n\|^{1/n}, \quad (3.1)$$

где

$$\|\mathcal{A}^n\| = \max_{A \in \mathcal{A}^n} \|A\| = \max_{A_{i_j} \in \mathcal{A}} \|A_{i_n} \cdots A_{i_2} A_{i_1}\|,$$

называется *совместным спектральным радиусом* набора матриц \mathcal{A} [169]. При этом соответствующий предел на деле от выбора нормы $\|\cdot\|$ не зависит. Более того, для любых $n \geq 1$ справедливы оценки $\hat{\rho}(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}^n\|^{1/n}$ [169], и потому совместный спектральный радиус может быть определен также с помощью формулы

$$\hat{\rho}(\mathcal{A}) = \inf_{n \geq 1} \|\mathcal{A}^n\|^{1/n}. \quad (3.2)$$

Если семейство матриц \mathcal{A} состоит из одной матрицы, то выражение (3.1) превращается в известную формулу Гельфанда для спектрального радиуса линейного оператора. Поэтому иногда формулу (3.1) называют обобщенной формулой Гельфанда [175].

При каждом $n \geq 1$ может быть определена также числовая величина

$$\rho(\mathcal{A}^n) = \max_{A \in \mathcal{A}^n} \rho(A) = \max_{A_{i_j} \in \mathcal{A}} \rho(A_{i_n} \cdots A_{i_2} A_{i_1}),$$

где максимум берется по всем возможным произведениям n матриц из набора \mathcal{A} , а $\rho(\cdot)$ обозначает спектральный радиус соответствующей матрицы, т.е. максимум модулей ее собственных значений. В этих обозначениях предел

$$\bar{\rho}(\mathcal{A}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\rho(\mathcal{A}^n))^{1/n} \quad (3.3)$$

называется *обобщенным спектральным радиусом* набора матриц \mathcal{A} [74, 76]. При этом для любых $n \geq 1$ справедливы оценки $\bar{\rho}(\mathcal{A}) \geq (\rho(\mathcal{A}^n))^{1/n}$, и потому обобщенный спектральный радиус может быть определен также следующим образом:

$$\bar{\rho}(\mathcal{A}) = \sup_{n \geq 1} (\rho(\mathcal{A}^n))^{1/n}. \quad (3.4)$$

Как показано в [48, Thm. 2], см. также [78, 174, 175], величины $\bar{\rho}(\mathcal{A})$ и $\hat{\rho}(\mathcal{A})$ для ограниченных семейств матриц \mathcal{A} совпадают друг с другом, что позволяет говорить просто о *спектральном радиусе* (ограниченного) семейства матриц \mathcal{A} , который будет обозначаться в дальнейшем через $\rho(\mathcal{A})$ ($= \bar{\rho}(\mathcal{A}) = \hat{\rho}(\mathcal{A})$).

В силу (3.2), (3.4) величины $(\rho(\mathcal{A}^n))^{1/n}$ и $\|\mathcal{A}^n\|^{1/n}$ для любых n образуют нижние и верхние оценки соответственно спектрального радиуса семейства матриц \mathcal{A} :

$$(\rho(\mathcal{A}^n))^{1/n} \leq \rho(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}^n\|^{1/n}, \quad (3.5)$$

что может служить основой для апостериорной оценки точности вычисления $\rho(\mathcal{A})$. Первые алгоритмы такого рода в контексте проблем теории управления предложены в [61], для линейных включений — в [4], а для задач теории вейвлетов — в [70, 74, 75]. Позднее вычислительная эффективность этих алгоритмов была существенно улучшена в [82, 138]. К сожалению, общей чертой такого рода алгоритмов является тот факт, что они не дают оценки числа шагов, требуемых для достижения заданной точности приближения $\rho(\mathcal{A})$.

В [78, 169] было доказано, что спектральный радиус семейства матриц \mathcal{A} может быть определен равенством

$$\rho(\mathcal{A}) = \inf_{\|\cdot\|} \|\mathcal{A}\|, \quad (3.6)$$

где \inf берется по всем нормам в \mathbb{R}^d . Для неприводимых семейств матриц¹ \mathcal{A} \inf в (3.6) достигается, и для таких семейств матриц существуют нормы $\|\cdot\|$ в \mathbb{R}^d , называемые *экстремальными*, для которых справедливы соотношения

$$\|\mathcal{A}\| \leq \rho(\mathcal{A}). \quad (3.7)$$

Во многих ситуациях важен вопрос о том, при каких условиях $\rho(\mathcal{A}) > 0$. Чтобы ответить на этот вопрос в общем случае, можно воспользоваться, например, утверждением

¹Набор матриц \mathcal{A} называется *неприводимым*, если матрицы из \mathcal{A} не имеют общих инвариантных подпространств, отличных от $\{0\}$ и \mathbb{R}^m .

из [57, Thm. A], согласно которому существует такая зависящая только от размерности пространства константа $C_d > 1$, что для любого ограниченного множества матриц \mathcal{A} и для любой нормы $\|\cdot\|$ в \mathbb{R}^d имеет место неравенство

$$\|\mathcal{A}^d\| \leq C_d \rho(\mathcal{A}) \|\mathcal{A}\|^{d-1}. \quad (3.8)$$

Отсюда следует, что равенство $\rho(\mathcal{A}) = 0$ влечет равенство $\|\mathcal{A}^d\| = 0$, а с ним и равенство $\mathcal{A}^d = \{0\}$. В силу (3.2) справедливо и обратное утверждение: из $\mathcal{A}^d = \{0\}$ вытекает равенство $\rho(\mathcal{A}) = 0$. Таким образом, теоретически проверка условия $\rho(\mathcal{A}) = 0$ может быть осуществлена за конечное число шагов: достаточно убедиться, что все произведения матриц из \mathcal{A} с числом сомножителей равным d обращаются в нуль. Конечно, данное замечание на практике малоприменимо, поскольку даже при умеренных значениях величин $d = 3, 4$, $r = 5, 6$ необходимые вычисления становятся практически невыполнимыми.

Следует отметить также, что в силу (3.7) спектральный радиус неприводимых семейств матриц \mathcal{A} отличен от нуля: $\rho(\mathcal{A}) > 0$.

В ряде работ предлагаются и другие формулы для вычисления $\rho(\mathcal{A})$. Так, в [68] показано, что

$$\rho(\mathcal{A}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \max_{A_{i_j} \in \mathcal{A}} |\text{tr}(A_{i_n} \cdots A_{i_2} A_{i_1})|^{1/n}, \quad (3.9)$$

где, как обычно, $\text{tr}(A)$ обозначает след матрицы A . В [139, 157, 160] для вычисления спектрального радиуса семейства матриц \mathcal{A} предложены L^p -обобщения формул (3.2), (3.4), (3.9) и (3.6). Основанные на соотношении (3.6) алгоритмы вычисления $\rho(\mathcal{A})$ рассматриваются, например, в [84, 85, 139]. В [150] было отмечено, что при определении совместного спектрального радиуса вместо нормы можно рассматривать положительные однородные полиномы четной степени. Несколько усиливая аргументацию из [150], можно заменить норму в (3.1) произвольной положительной вне нуля однородной функцией. А именно, пусть $\nu(x)$ — некоторая строго положительная при $x \neq 0$ однородная функция с порядком однородности $\kappa > 0$, т.е. $\nu(tx) \equiv t^\kappa \nu(x)$ для любого $t > 0$. Тогда, введя для произвольной матрицы A обозначение

$$\nu(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{\nu(Ax)}{\nu(x)},$$

нетрудно получить следующее обобщение формулы (3.1) для вычисления спектрального радиуса семейства матриц \mathcal{A} :

$$\rho(\mathcal{A}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\nu(\mathcal{A}^n))^{1/\kappa n}, \quad (3.10)$$

где

$$\nu(\mathcal{A}^n) = \max_{A \in \mathcal{A}^n} \nu(A) = \max_{A_{i_j} \in \mathcal{A}} \nu(A_{i_n} \cdots A_{i_2} A_{i_1}).$$

Как показано в [150], в ряде случаев использование формулы (3.10) может дать более точные оценки $\rho(\mathcal{A})$ за счет того, что множество положительных однородных функций более богато, чем множество норм. В частности лебеговы множества² положительных однородных функций не обязаны быть выпуклыми, в отличие от лебеговых множеств норм.

²Лебеговыми множествами функции $\nu(x)$ называются множества $\{x : \nu(x) \leq c\}$.

В [51] установлено, что в том случае, когда элементы всех матриц из \mathcal{A} неотрицательны, справедливы неравенства

$$\frac{1}{r^{1/n}} \rho^{1/n} (A_1^{\otimes n} + \dots + A_r^{\otimes n}) \leq \rho(\mathcal{A}) \leq \rho^{1/n} (A_1^{\otimes n} + \dots + A_r^{\otimes n}), \quad (3.11)$$

где $A^{\otimes n}$ обозначает n -кратное кронекерово (или тензорное) произведение матрицы A на себя. Здесь представляется несколько удивительным тот факт, что правая и левая части неравенств не содержат смешанных произведений матриц из \mathcal{A} . Неравенства (3.11) теоретически позволяют вычислить спектральный радиус $\rho(\mathcal{A})$ с любой требуемой точностью. Однако, с ростом n размерность матрицы $A_1^{\otimes n} + \dots + A_r^{\otimes n}$ растет столь быстро, что даже при умеренных значениях величин $d = 3, 4$, $r = 5, 6$ вычисления становятся практически невыполнимыми. Для случая, когда матрицы из \mathcal{A} произвольны, справедлив [51] несколько более сложный аналог формулы (3.11).

Важную роль в исследовании свойств спектрального радиуса семейства матриц играют некоторые “невяные” определения совместного (обобщенного) спектрального радиуса. Пусть семейство матриц \mathcal{A} неприводимо. Тогда [4] число ρ совпадает с $\rho(\mathcal{A})$, если и только если в некоторой норме $\|\cdot\|$ в \mathbb{R}^d справедливо тождество

$$\rho \|x\| \equiv \max_{A_i \in \mathcal{A}} \|A_i x\|. \quad (3.12)$$

Норма, в которой выполняется (3.12), называется *нормой Барабанова*. Аналогично, [34, теорема 3.3], [160] число ρ совпадает с $\rho(\mathcal{A})$, если и только если для некоторого центрально-симметричного телесного³ множества S справедливо равенство

$$\rho S = \text{conv} \left(\bigcup_{i=1}^r A_i S \right), \quad (3.13)$$

где $\text{conv}(\cdot)$ обозначает выпуклую оболочку множества. Как отмечается в [34], доказательство соотношения (3.13) принадлежит А.Н. Дранишникову и С.В. Конягину, и поэтому центрально-симметричное множество S естественно назвать множеством *Дранишникова-Конягина-Протасова*. Множество S можно трактовать как единичный шар некоторой нормы $\|\cdot\|$ в \mathbb{R}^d (называемой в последнее время *нормой Протасова*). Как нормы Барабанова, так и нормы Протасова являются экстремальными нормами, т.е. для них имеет место неравенство (3.7). В [153, 154, 192] показано, что нормы Барабанова и Протасова дуальны друг к другу.

Отметим, что несмотря на кажущуюся неконструктивность определения спектрального радиуса семейства матриц \mathcal{A} с помощью формул (3.6), (3.12) и (3.13), именно такого рода формулы лежат в основе многих теоретических конструкций (см., например, [20, 45, 99, 150, 189, 192]) и алгоритмов [157] вычисления спектрального радиуса $\rho(\mathcal{A})$.

В [150] было отмечено, что число ρ является верхней оценкой для $\rho(\mathcal{A})$, если для некоторого строго положительного однородного полинома $p(x)$ степени $2d$ выполняются неравенства

$$\max_{A_i \in \mathcal{A}} p(A_i x) \leq \rho^{2d} p(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Используя это замечание, авторам работы [150] удалось разработать алгоритмы вычисления спектрального радиуса $\rho(\mathcal{A})$, как минимум не менее эффективные и точные, чем предложенные в [51].

³Множество называется телесным, если оно содержит хотя бы одну внутреннюю точку.

Как следует из [188, Lem. 2.3], [189, Lem. 6.5], [34, п. 5.2], [157, Thm. 3] (см. также обзор в [181]) для неприводимых семейств матриц \mathcal{A} имеют место оценки

$$\gamma^{1/n} \|\mathcal{A}^n\|^{1/n} \leq \rho(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}^n\|^{1/n}, \quad \gamma \in (0, 1). \quad (3.14)$$

Некоторые вычисляемые оценки для константы γ получены в [34, разд. 8].

Когда семейство матриц \mathcal{A} не является неприводимым, ситуация более сложна. В этом случае, как следует из неравенства Боши (3.8), $\rho(\mathcal{A})$ может обращаться в нуль, что происходит тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}^d = \{0\}$. Если же $\rho(\mathcal{A}) \neq 0$, то справедлива [188, Lem. 2.3] более слабая чем (3.14) оценка

$$\gamma_*^{(1+\ln n)/n} \|\mathcal{A}^n\|^{1/n} \leq \rho(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}^n\|^{1/n} \quad (3.15)$$

с некоторой константой $\gamma_* \in (0, 1)$. К сожалению, точного значения или хотя бы эффективно вычисляемых оценок для константы γ_* в [188, 189] не приводится.

Структура раздела следующая. Выше представлен краткий обзор публикаций, в той или иной степени связанных с проблемой вычислимости совместного (обобщенного) спектрального радиуса. В разделе 3.2 описывается подход В.Ю. Протасова к получению априорных оценок совместного спектрального радиуса. В теореме 3.2 из раздела 3.3 получаются новые априорные оценки совместного спектрального радиуса, основанные на понятии мер неприводимости наборов матриц. Раздел 3.4 посвящен доказательству теоремы 3.2. Наконец, в разделе 3.5 приводятся некоторые примеры, доказанные ранее в [26], демонстрирующие возможность проверки неприводимости семейств матриц и вычисления их меры неприводимости.

Настоящий раздел подготовлен на основе публикаций [22, 103]

3.2. Оценки Протасова

На протяжении настоящего раздела предполагается, что набор вещественных $d \times d$ матриц $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$ неприводим. В этом случае при условии, что $\rho(\mathcal{A}) = 1$, а $\|\cdot\|$ — евклидова норма в \mathbb{R}^d , из результатов работы [34] вытекает⁴ следующая оценка для константы γ в (3.14):

$$\gamma \geq \frac{p_1(\mathcal{A}) \cdots p_{d-1}(\mathcal{A})}{(1 + \|\mathcal{A}\|)^{d-1}}, \quad (3.16)$$

в которой величины $p_1(\mathcal{A}), \dots, p_{d-1}(\mathcal{A})$ определяются равенствами

$$p_k(\mathcal{A}) = \inf_{\substack{L \subset \mathbb{R}^d \\ \dim L = k}} \sup_{x \in L} \max_{A_i \in \mathcal{A}} \rho(A_i x, L), \quad k = 1, 2, \dots, d-1,$$

где внешний инфимум берется по всем подпространствам $L \subset \mathbb{R}^d$ размерности k , а $\rho(A_i x, L)$ обозначает расстояние от точки $A_i x$ до подпространства L , т.е. $\rho(A_i x, L) = \inf_{y \in L} \|A_i x - y\|$.

Как отмечается в [34], все величины $p_1(\mathcal{A}), \dots, p_{d-1}(\mathcal{A})$ строго положительны, поскольку в силу неприводимости \mathcal{A} матрицы A_1, \dots, A_r не имеют общих нетривиальных инвариантных подпространств. Таким образом, величину γ можно трактовать как некую меру неприводимости семейства матриц \mathcal{A} .

⁴Заметим, что формально в [34] при оценке величины $\widehat{H} = \gamma^{-1}$ не требуется, чтобы норма $\|\cdot\|$ была евклидовой. Однако при доказательстве теоремы 8.2 из [34], в которой эта оценка доказывается, используется понятие перпендикулярности подпространств и вычисляется площадь треугольника со сторонами, измеряемыми в норме $\|\cdot\|$, что неявно предполагает евклидовость нормы $\|\cdot\|$.

В том случае, когда $\rho(\mathcal{A}) \neq 1$, оценку для величины γ легко вывести из уже имеющейся оценки (3.16), применив последнюю к множеству матриц

$$\mathcal{A}' = \rho^{-1}(\mathcal{A})\mathcal{A} = \{\rho^{-1}(\mathcal{A})A_1, \dots, \rho^{-1}(\mathcal{A})A_r\},$$

для которого $\rho(\mathcal{A}') = 1$. В этом случае для константы γ в (3.14) получается следующая оценка:

$$\gamma \geq \frac{\rho^{-(d-1)}(\mathcal{A})p_1(\mathcal{A}) \cdots p_{d-1}(\mathcal{A})}{(1 + \rho^{-1}(\mathcal{A})\|\mathcal{A}\|)^{d-1}} = \frac{p_1(\mathcal{A}) \cdots p_{d-1}(\mathcal{A})}{(\rho(\mathcal{A}) + \|\mathcal{A}\|)^{d-1}},$$

а если учесть, что согласно (3.5) $\rho(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}\|$, то

$$\gamma \geq \frac{p_1(\mathcal{A}) \cdots p_{d-1}(\mathcal{A})}{(2\|\mathcal{A}\|)^{d-1}}.$$

3.3. Основной результат

В этом разделе будет предложена еще одна явная априорная оценка совместного спектрального радиуса с помощью обобщенной формулы Гельфанда.

Обозначим через \mathcal{A}_n при $n \geq 1$ множество всех конечных произведений матриц из $\mathcal{A} \cup \{I\}$, содержащих не более k сомножителей. т.е. $\mathcal{A}_n = \cup_{k=0}^n \mathcal{A}^k$. Через $\mathcal{A}_n(x)$ обозначим множество всех векторов Ax , где $A \in \mathcal{A}_n$. Пусть $\|\cdot\|$ — некоторая норма в \mathbb{R}^d ; шар радиуса t в соответствующей норме обозначим через $\mathbb{S}(t)$.

Назовем p -мерой неприводимости (в норме $\|\cdot\|$) семейства матриц \mathcal{A} число $\chi_p(\mathcal{A})$, определяемое равенством

$$\chi_p(\mathcal{A}) = \inf_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ \|x\|=1}} \sup\{t : \mathbb{S}(t) \subseteq \text{conv}\{\mathcal{A}_p(x) \cup \mathcal{A}_p(-x)\}\}.$$

Мера неприводимости $\chi_p(\mathcal{A})$ под именем “мера квазиуправляемости” была введена и исследована в [25, 26, 122, 123, 125] в связи с задачами оценки “всплесков” совокупностей переходных режимов линейных систем управления. Основанием для названия “мера неприводимости” для величины $\chi_p(\mathcal{A})$ является следующая

Лемма 3.1. Пусть $p \geq d - 1$. Семейство матриц \mathcal{A} неприводимо, если и только если $\chi_p(\mathcal{A}) > 0$.

Доказательство леммы 3.1 содержится в [125, Thm. 2.4], [26, теорема 1.4], [123, Thm. 2].

Теорема 3.2. Для любых $n \geq 1$, $p \geq d - 1$ справедливы оценки

$$\rho(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}^n\|^{1/n} \leq (\eta_p(\mathcal{A}))^{1/n} \rho(\mathcal{A}), \quad (3.17)$$

где

$$\eta_p(\mathcal{A}) = \frac{\max\{1, (\rho(\mathcal{A}))^p\}}{\chi_p(\mathcal{A})},$$

и, следовательно,

$$(\nu_p(\mathcal{A}))^{-1/n} \|\mathcal{A}^n\|^{1/n} \leq \rho(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}^n\|^{1/n}, \quad (3.18)$$

где

$$\nu_p(\mathcal{A}) = \frac{\max\{1, \|\mathcal{A}\|^p\}}{\chi_p(\mathcal{A})}.$$

Отметим, что в то время как вычисление величины $\eta_p(\mathcal{A})$ требует знания $\rho(\mathcal{A})$, ее оценка сверху $\nu_p(\mathcal{A})$ вычисляется непосредственно по \mathcal{A} за конечное число алгебраических операций.

3.4. Доказательство теоремы 3.2

Доказательство теоремы 3.2 следует идее доказательства теоремы 2.3 из [26] (см. также [125, Thm. 2.3], [123, Thm. 4]).

Как отмечалось выше, оценка $\rho(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}^n\|^{1/n}$ вытекает из (3.2). Поэтому в доказательстве нуждается только оценка $\|\mathcal{A}^n\|^{1/n} \leq (\eta_p(\mathcal{A}))^{1/n} \rho(\mathcal{A})$. Предположим, что она не верна. В этом случае при некотором $n \geq 1$ выполняется неравенство

$$\|\mathcal{A}^n\|^{1/n} > (\eta_p(\mathcal{A}))^{1/n} \rho(\mathcal{A}),$$

или, что то же,

$$\|\mathcal{A}^n\| > \eta_p(\mathcal{A}) \rho^n(\mathcal{A}).$$

Тогда по определению величины $\|\mathcal{A}^n\|$ найдутся такие матрицы $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n} \in \mathcal{A}$, для которых

$$\|A_{i_n} \cdots A_{i_2} A_{i_1}\| = \|\mathcal{A}^n\| > \eta_p(\mathcal{A}) \rho^n(\mathcal{A}).$$

Значит, может быть указан ненулевой вектор $x_* \in \mathbb{R}^d$, для которого

$$\|A_{i_n} \cdots A_{i_2} A_{i_1} x_*\| > \eta_p(\mathcal{A}) \rho^n(\mathcal{A}) \|x_*\|.$$

Последнее неравенство удобнее представить в виде

$$\|A_{i_n} \cdots A_{i_2} A_{i_1} x_*\| \geq \mu \eta_p(\mathcal{A}) \rho^n(\mathcal{A}) \|x_*\|, \quad (3.19)$$

где μ некоторое число, строго большее единицы: $\mu > 1$.

Для завершения доказательства теоремы 3.2 понадобятся два вспомогательных утверждения. Обозначим через \mathcal{A}_∞ множество всех конечных произведений матриц из \mathcal{A} , т.е. $\mathcal{A}_\infty = \cup_{k \geq 1} \mathcal{A}^k$. Для каждой матрицы $A \in \mathcal{A}_\infty$ число сомножителей $A_1, A_2, \dots, A_q \in \mathcal{A}$ в представлении $A = A_1 A_2 \cdots A_q$ назовем *длиной* и обозначим через $\text{len}(A)$.

Лемма 3.3. Пусть фиксировано $p \geq d - 1$, и семейство матриц \mathcal{A} неприводимо. Если при некоторых $x_* \neq 0 \in \mathbb{R}^d$, $F \in \mathcal{A}_\infty$ и $\nu > 0$ имеет место неравенство

$$\|F x_*\| \geq \nu \|x_*\|, \quad (3.20)$$

то для любого $x \neq 0 \in \mathbb{R}^d$ найдется такая матрица $F_x = F L_x \in \mathcal{A}_\infty$, что $\text{len}(F) \leq \text{len}(F_x) \leq \text{len}(F) + p$ и при этом

$$\|F_x x\| \geq \nu \chi_p(\mathcal{A}) \|x\|.$$

Доказательство. Зададимся произвольным ненулевым вектором $x \in \mathbb{R}^d$. По определению меры неприводимости вектор $\chi_p(\mathcal{A}) \|x_*\|^{-1} x_*$ принадлежит абсолютно выпуклой оболочке векторов $\mathcal{A}_p(\|x\|^{-1} x)$. Поэтому найдутся такие числа $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$,

$$\sum_{i=1}^s |\theta_i| \leq 1, \quad (3.21)$$

и матрицы $G_1, G_2, \dots, G_s \in \mathcal{A}_p$, что

$$\sum_{i=1}^s \theta_i \|x\|^{-1} G_i x = \chi_p(\mathcal{A}) \|x_*\|^{-1} x_*.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^s \theta_i \|x\|^{-1} F G_i x = \chi_p(\mathcal{A}) \|x_*\|^{-1} F x_*,$$

откуда в силу (3.20)

$$\sum_{i=1}^s \|\theta_i F G_i x\| \geq \nu \chi_p(\mathcal{A}) \|x\|.$$

Но тогда (см. (3.21)) найдется такой индекс i , $1 \leq i \leq s$, при котором для матрицы $F_x = F G_i$ верна оценка

$$\|F_x x\| \geq \nu \chi_p(\mathcal{A}) \|x\|.$$

Осталось заметить, что так как $G_i \in \mathcal{A}_p$, то независимо от x длина матрицы $F_x = F G_i$ не превосходит увеличенной на p длины матрицы F , т.е. $\text{len}(F) \leq \text{len}(F_x) \leq \text{len}(F) + p$. Лемма доказана. \square

Лемма 3.4. Пусть для некоторого набора матриц $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n} \in \mathcal{A}$ выполняется оценка (3.19). Тогда для любого $x \neq 0 \in \mathbb{R}^d$ найдется такая матрица $F_x \in \mathcal{A}_\infty$, что $n \leq \text{len}(F_x) \leq n + p$, и при этом

$$\|F_x x\| \geq (\eta \rho(\mathcal{A}))^{\text{len}(F_x)} \|x\|, \quad (3.22)$$

где $\eta = \mu^{1/(n+p)} > 1$.

Доказательство. Положив $\nu = \mu \eta_p(\mathcal{A}) \rho^n(\mathcal{A})$, по лемме 3.3 получим, что для любого $x \neq 0 \in \mathbb{R}^d$ найдется такая матрица $F_x \in \mathcal{A}_\infty$, что $n \leq \text{len}(F_x) \leq n + p$, и при этом

$$\|F_x x\| \geq \mu \eta_p(\mathcal{A}) \chi_p(\mathcal{A}) \rho^n(\mathcal{A}) \|x\|,$$

что равносильно в силу определения величины $\eta_p(\mathcal{A})$ следующей цепочке соотношений

$$\begin{aligned} \|F_x x\| &\geq \mu \frac{\max\{1, \rho^p(\mathcal{A})\}}{\chi_p(\mathcal{A})} \chi_p(\mathcal{A}) \rho^n(\mathcal{A}) \|x\| = \\ &\mu \max\{1, \rho^p(\mathcal{A})\} \rho^n(\mathcal{A}) \|x\| = \frac{\mu}{\eta^{\text{len}(F_x)}} \cdot \frac{\max\{1, \rho^p(\mathcal{A})\}}{\rho^{\text{len}(F_x)-n}(\mathcal{A})} \cdot (\eta \rho(\mathcal{A}))^{\text{len}(F_x)} = \\ &\mu^{1-\frac{\text{len}(F_x)}{n+p}} \cdot \frac{\max\{1, \rho^p(\mathcal{A})\}}{\rho^{\text{len}(F_x)-n}(\mathcal{A})} \cdot (\eta \rho(\mathcal{A}))^{\text{len}(F_x)}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Как нетрудно видеть в силу неравенств $n \leq \text{len}(F_x) \leq n + p$ как первый, так и второй сомножители в правой части (3.23) не меньше 1, откуда и следует требуемое неравенство (3.22). \square

Лемма 3.5. Пусть для некоторого набора матриц $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n} \in \mathcal{A}$ выполняется оценка (3.19). Тогда найдется такая последовательность матриц $H_k \in \mathcal{A}$, $k = 0, 1, \dots$, для которых $\text{len}(H_k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ и

$$\|H_k\| \geq (\eta \rho(\mathcal{A}))^{\text{len}(H_k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.24)$$

Доказательство. Зададимся произвольным вектором $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$, и построим вспомогательную последовательность векторов $\{x(k)\}$, $k = 0, 1, \dots$, полагая $x(0) = x$,

$$x(k+1) = F_{x(k)} x(k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $F_{x(k)}$ — матрицы определяемые леммой 3.4 по соответствующим векторам. Тогда в силу леммы 3.4 справедливы оценки

$$\|x(k+1)\| = \|F_{x(k)}x(k)\| \geq (\eta\rho(\mathcal{A}))^{\text{len}(F_{x(k)})} \|x(k)\|, \quad k = 0, 1, \dots,$$

откуда

$$\|F_{x(k)} \cdots F_{x(1)} F_{x(0)} x(0)\| \geq (\eta\rho(\mathcal{A}))^{\text{len}(F_{x(k)}) + \cdots + \text{len}(F_{x(1)}) + \text{len}(F_{x(0)})} \|x(0)\|, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.25)$$

Положив теперь

$$H_k = F_{x(k)} \cdots F_{x(1)} F_{x(0)}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

из (3.25) получим, что

$$\|H_k x(0)\| \geq (\eta\rho(\mathcal{A}))^{\text{len}(H_k)} \|x(0)\|, \quad k = 0, 1, \dots,$$

откуда и следуют требуемые оценки (3.24). Лемма доказана. \square

Завершим доказательство теоремы 3.2. По лемме 3.5 при выполнении оценки (3.19) найдется такая последовательность матриц $H_k \in \mathcal{A}$, $k = 0, 1, \dots$, для которой выполняются оценки (3.24). Положив тогда $n_k = \text{len}(H_k)$, из определения величин $\|\mathcal{A}^n\|$ получаем, что

$$\|\mathcal{A}^{n_k}\|^{1/n_k} \geq \|H_k\|^{1/n_k} \geq \eta\rho(\mathcal{A}).$$

Отсюда, переходя к верхнему пределу в левой части при $n_k \rightarrow \infty$, получаем:

$$\rho(\mathcal{A}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{A}^n\|^{1/n} \geq \overline{\lim}_{n_k \rightarrow \infty} \|\mathcal{A}^{n_k}\|^{1/n_k} \geq \eta\rho(\mathcal{A}),$$

что невозможно, поскольку $\eta > 1$, а $\rho(\mathcal{A})$ для неприводимого набора матриц — строго положительная величина (что следует, например, из существования для неприводимых семейств матриц экстремальных норм, в которых выполняется неравенство (3.7)). Полученное противоречие завершает доказательство оценок (3.17).

Для доказательства оценок (3.18) осталось заметить, что они непосредственно вытекают из (3.17) и справедливого в силу (3.5) неравенства $\rho(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}\|$.

Доказательство теоремы 3.2 завершено.

3.5. Комментарии и примеры

Заметим, что утверждение теоремы 3.2 за одним исключением справедливо лишь для матричных семейств, состоящих из более чем одной матрицы. Это связано с тем, что одноматричные семейства $\mathcal{A} = \{A\}$ могут быть неприводимыми только в том случае, когда размерность матрицы A равна 2×2 , причем A не имеет вещественных собственных значений.

В определенном смысле неприводимость семейств матриц, естественно возникающих в теории управления, равносильна полной управляемости и наблюдаемости по Калману.

Рассмотрим, в частности, вещественную квадратную матрицу $A = (a_{ij})$ порядка d и векторы-столбцы $b, c \in \mathbb{R}^d$. Образует с их помощью семейство $\mathcal{A} = \mathcal{A}(A, b, c) = \{A, Q\}$, где $Q = (q_{ij}) = bc^T$ с элементами $q_{ij} = b_i c_j$, $i, j = 1, \dots, d$. Тогда, как показано в [26], семейство матриц $\mathcal{A}(A, b, c)$ неприводимо, если и только если пара (A, b) полностью управляема, а пара (A, c) полностью наблюдаема по Калману.

Приведем некоторые примеры из [26], демонстрирующие возможность проверки неприводимости семейств матриц и вычисления их меры неприводимости. Доказательства соответствующих утверждений см. [26]. Следующий пример важен в теории рассинхронизованных систем (см., например, [2, 77]). Рассмотрим скалярную $d \times d$ матрицу $A = (a_{ij})$ и образуем с ее помощью семейство матриц $\mathcal{P}(A) = \{A_1, A_2, \dots, A_d\}$ вида

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{id} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что матрица A называется *неразложимой*, если никакой перестановкой строк и соответствующих столбцов ее нельзя представить в блочно-треугольном виде

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Неразложимость матрицы A равносильна отсутствию у нее собственного инвариантного подпространства, натянутого на некоторое количество базисных векторов

$$e_i = \{0, 0, \dots, 1, \dots, 0\}, \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

Пусть норма $\|\cdot\|$ в \mathbb{R}^d определяется равенством $\|x\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_d|$. Положим

$$\alpha = \frac{1}{2d} \min\{\|(A - I)x\| : \|x\| = 1\}, \quad \beta = \frac{1}{2} \min\{|a_{ij}| : i \neq j, a_{ij} \neq 0\}.$$

Пример 3.6. Семейство матриц $\mathcal{P}(A)$ неприводимо, если и только если матрица A неразложима и число 1 не является ее собственным значением. При этом $\chi_d[\mathcal{P}(A)] \geq \alpha\beta^{d-1}$.

Рассмотрим еще один пример, на который обратил внимание Е. Кажкуревич. Пусть семейство $\mathcal{V}(A)$ состоит из матриц $A, V_1A, V_2A, \dots, V_dA$. Здесь A — скалярная $d \times d$ матрица с элементами a_{ij} , а $V_i, i = 1, 2, \dots, d$, — диагональные матрицы вида

$$V_i = \text{diag}\{v_{1i}, v_{2i}, \dots, v_{ii}, \dots, v_{di}\},$$

где $v_{ij} = 1$ при $i \neq j$, $v_{ij} = -1$ при $i = j$.

Пусть снова норма $\|\cdot\|$ в \mathbb{R}^d определяется равенством $\|x\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_d|$. Положим

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{d} \min\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}, \quad \tilde{\beta} = \min\{|a_{ij}| : i \neq j, a_{ij} \neq 0\}.$$

Пример 3.7. Семейство матриц $\mathcal{V}(A)$ неприводимо, если и только если A — невырожденная и неразложимая матрица. При этом $\chi_d[\mathcal{V}(A)] \geq \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{d-1}$.

4. РАЗРАБОТКА ЧИСЛЕННЫХ АЛГОРИТМОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОВМЕСТНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО РАДИУСА НА ОСНОВЕ ПОСТРОЕНИЯ НОРМ БАРАБАНОВА

4.1. Постановка задачи

Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$ — набор вещественных $m \times m$ матриц. Как обычно, через \mathcal{A}^n при $n \geq 1$ обозначается множество всех произведений матриц из \mathcal{A} , состоящих из n сомножителей; $\mathcal{A}^0 = I$. При каждом $n \geq 1$ определим числовую величину:

$$\rho(\mathcal{A}^n) = \max_{A \in \mathcal{A}^n} \rho(A) = \max_{A_{i_j} \in \mathcal{A}} \rho(A_{i_n} \cdots A_{i_2} A_{i_1}),$$

где максимум берется по всем возможным произведениям n матриц из набора \mathcal{A} , а $\rho(\cdot)$ обозначает спектральный радиус соответствующей матрицы, т.е. максимум модулей ее собственных значений. В этих обозначениях предел

$$\bar{\rho}(\mathcal{A}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\rho(\mathcal{A}^n))^{1/n}$$

называется *обобщенным спектральным радиусом* набора матриц \mathcal{A} [74, 76].

Точно так же, если задана некоторая норма $\|\cdot\|$ в \mathbb{R}^m , то предел

$$\hat{\rho}(\mathcal{A}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{A}^n\|^{1/n},$$

где

$$\|\mathcal{A}^n\| = \max_{A \in \mathcal{A}^n} \|A\| = \max_{A_{i_j} \in \mathcal{A}} \|A_{i_n} \cdots A_{i_2} A_{i_1}\|,$$

называется *совместным спектральным радиусом* набора матриц \mathcal{A} [169]. При этом соответствующий предел на деле от выбора нормы $\|\cdot\|$ не зависит.

Величины $\bar{\rho}(\mathcal{A})$ и $\hat{\rho}(\mathcal{A})$ для ограниченных семейств матриц \mathcal{A} совпадают друг с другом [48], а $\rho(\mathcal{A}^n)$ и $\|\mathcal{A}^n\|$ для любых n образуют нижние и верхние оценки соответственно спектрального радиуса семейства матриц \mathcal{A} :

$$(\rho(\mathcal{A}^n))^{1/n} \leq \rho(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}^n\|^{1/n},$$

что может служить основой для апостериорной оценки точности вычисления $\rho(\mathcal{A})$. Первые алгоритмы такого рода в контексте проблем теории управления предложены в [61], для линейных включений — в [4], а для задач теории вейвлетов — в [70, 74, 75]. Позднее вычислительная эффективность этих алгоритмов была существенно улучшена в [82, 138]. К сожалению, общей чертой такого рода алгоритмов является тот факт, что они не дают оценки числа шагов, требуемых для достижения заданной точности приближения $\rho(\mathcal{A})$.

В ряде работ предлагаются и другие формулы для вычисления $\rho(\mathcal{A})$. Так, в [68] показано, что

$$\rho(\mathcal{A}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \max_{A_{i_j} \in \mathcal{A}} |\text{tr}(A_{i_n} \cdots A_{i_2} A_{i_1})|^{1/n},$$

где, как обычно, $\text{tr}(\cdot)$ обозначает след матрицы.

В [78, 169] было доказано, что спектральный радиус семейства матриц \mathcal{A} может быть определен равенством

$$\rho(\mathcal{A}) = \inf_{\|\cdot\|} \|\mathcal{A}\|, \quad (4.1)$$

где infimum берется по всем нормам в \mathbb{R}^d . Для неприводимых семейств матриц⁵ \mathcal{A} infimum в (4.1) достигается, и для таких семейств матриц существуют нормы $\|\cdot\|$ в \mathbb{R}^d , называемые *экстремальными*, для которых справедливы соотношения

$$\|\mathcal{A}\| \leq \rho(\mathcal{A}). \quad (4.2)$$

При анализе свойств совместного спектрального радиуса важную роль играют идеи, предложенные Н.Е. Барабановым в [4–6] и получившие дальнейшее развитие в ряде работ, среди которых выделим [189].

Теорема 4.1 (Н.Е. Барабанов). *Если набор матриц $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$ неприводим, то число ρ является совместным (обобщенным) спектральным радиусом набора \mathcal{A} тогда и только тогда, когда найдется такая норма $\|\cdot\|$ в \mathbb{R}^m , что*

$$\rho\|x\| \equiv \max_i \|A_i x\|. \quad (4.3)$$

Норма, удовлетворяющая условию (4.3), будет называться *нормой Барабанова*, отвечающей набору матриц \mathcal{A} .

Аналогично, [34, теорема 3.3], [160] число ρ совпадает с $\rho(\mathcal{A})$, если и только если для некоторого центрально-симметричного телесного⁶ множества S справедливо равенство

$$\rho S = \text{conv} \left(\bigcup_{i=1}^r A_i S \right), \quad (4.4)$$

где $\text{conv}(\cdot)$ обозначает выпуклую оболочку множества. Как отмечается в [34], доказательство соотношения (4.4) принадлежит А.Н. Дранишникову и С.В. Конягину, и поэтому центрально-симметричное множество S естественно назвать множеством *Дранишникова–Конягина–Протасова*. Множество S можно трактовать как единичный шар некоторой нормы $\|\cdot\|$ в \mathbb{R}^d (называемой в последнее время *нормой Протасова*). Как нормы Барабанова, так и нормы Протасова являются экстремальными нормами, т.е. для них имеет место неравенство (4.2). В [153, 154, 192] показано, что нормы Барабанова и Протасова дуальны друг к другу.

Отметим, что несмотря на кажущуюся неконструктивность определения спектрального радиуса семейства матриц с помощью формул (4.2), (4.3) и (4.4), именно такого рода формулы лежат в основе многих теоретических конструкций (см., например, [20, 45, 99, 150, 189, 192]) и алгоритмов [157] вычисления спектрального радиуса $\rho(\mathcal{A})$.

Проблема построения норм Барабанова для анализа свойств совместного (обобщенного) спектрального радиуса обсуждалась в различных публикациях, см., например, [83, 85], а также [181, Section 6.6]. В настоящем разделе будут рассмотрены две итерационные процедуры, позволяющие одновременно строить нормы Барабанова для неприводимого семейства матриц и вычислять совместный спектральный радиус этого семейства.

Структура раздела следующая. Выше мы привели мотивацию исследования. В разделе 4.2 предлагается первая из двух итерационных схем вычисления совместного спектрального радиуса семейства матриц с одновременным построением норм Барабанова.

⁵Напомним, что набор матриц \mathcal{A} называется *неприводимым*, если матрицы из \mathcal{A} не имеют общих инвариантных подпространств, отличных от $\{0\}$ и \mathbb{R}^m . В [25, 26, 125] такой набор матриц был назван квазиуправляемым.

⁶Множество называется телесным, если оно содержит хотя бы одну внутреннюю точку.

Эта схема названа схемой по методу тах-релаксации, т.к. в качестве очередного приближения к норме Барабанова выбирается максимум значений уже построенного приближения и некоей вспомогательной нормы. Основная часть раздела посвящена доказательству сходимости предлагаемой итерационной процедуры. В разделе 4.3 строится вторая итерационная схема вычисления совместного спектрального радиуса семейства матриц с одновременным построением норм Барабанова. Эта схема отличается от схемы по методу тах-релаксации лишь тем, что в качестве очередного приближения к норме Барабанова выбирается некоторая линейная комбинация значений уже построенного приближения и некоей вспомогательной нормы. Соответственно, вторая схема названа итерационной схемой по методу линейной релаксации. Здесь также основная часть раздела посвящена доказательству сходимости предлагаемой итерационной процедуры. Рассмотрение двух схем обусловлено тем, что различные аспекты доказательства сходимости соответствующих итерационных процедур устанавливаются в них с различной степенью “тяжести”, и пока неясно какой из двух подходов может оказаться более плодотворным в дальнейшем. В разделе 4.4 рассматривается реализация итерационной схемы по методу тах-релаксации, адаптированная для вычислений с двумерными матрицами. Результаты численных вычислений, выполненных с помощью этой схемы иллюстрируются двумя примерами. В приложении А приводится код в системе MATLAB[®], иллюстрирующий вычисления в примере 4.24. Наконец, в заключительном разделе 4.5 кратко обсуждаются основные недостатки предлагаемого подхода.

Настоящий раздел подготовлен на основе публикаций [22, 100, 101]

4.2. Итерационная схема по методу тах-релаксации

Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$ — неприводимый набор вещественных $m \times m$ матриц. Пусть $\|\cdot\|_0$ — некоторая норма в \mathbb{R}^m и $e \neq 0$ — произвольный элемент из \mathbb{R}^m , для которого $\|e\|_0 = 1$.

Произвольную непрерывную функцию $\gamma(t, s)$, определенную при $t, s > 0$ и обладающую свойствами

$$\gamma(t, t) = t, \quad \min\{t, s\} < \gamma(t, s) < \max\{t, s\} \quad \text{при } t \neq s$$

будем называться в дальнейшем *функцией усреднения*. Примеры функций усреднения:

$$\gamma(t, s) = \frac{t+s}{2}, \quad \gamma(t, s) = \sqrt{ts}, \quad \gamma(t, s) = \frac{2ts}{t+s}.$$

Пусть задана некоторая функция усреднения $\gamma(\cdot, \cdot)$. Построим рекурсивно последовательности норм $\|\cdot\|_n$ и $\|\cdot\|_n^\circ$, $n = 1, 2, \dots$, по следующим правилам:

MR1: считая, что норма $\|\cdot\|_n$ уже известна, вычислим числовые величины

$$\rho_n^+ = \max_{x \neq 0} \frac{\max_i \|A_i x\|_n}{\|x\|_n}, \quad \rho_n^- = \min_{x \neq 0} \frac{\max_i \|A_i x\|_n}{\|x\|_n}, \quad \gamma_n = \gamma(\rho_n^-, \rho_n^+); \quad (4.5)$$

MR2: определим новую норму $\|\cdot\|_{n+1}$:

$$\|x\|_{n+1} = \max \left\{ \|x\|_n, \gamma_n^{-1} \max_i \|A_i x\|_n \right\} \quad (4.6)$$

и по ней определим норму $\|\cdot\|_{n+1}^\circ$:

$$\|x\|_{n+1}^\circ = \|x\|_{n+1} / \|e\|_{n+1}. \quad (4.7)$$

Предположим, что нам удалось доказать следующие факты:

A1: последовательности $\{\rho_n^+\}$ и $\{\rho_n^-\}$ сходятся;

A2: пределы последовательностей $\{\rho_n^+\}$ и $\{\rho_n^-\}$ совпадают:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n^-;$$

A3: нормы $\|\cdot\|_n^\circ$ поточечно сходятся к некоторому пределу $\|\cdot\|^*$.

Тогда функция $\|x\|^*$ будет полунормой в \mathbb{R}^m , не равной тождественно нулю, поскольку в силу (4.7) каждая норма $\|\cdot\|_n^\circ$ удовлетворяет калибрующему условию $\|e\|_n^\circ = 1$, и значит

$$\|e\|^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \|e\|_n^\circ = 1.$$

Заметим, что поскольку в силу (4.7) нормы $\|\cdot\|_n^\circ$ отличаются от $\|\cdot\|_n$ лишь числовыми множителями, то числа ρ_n^\pm можно определить также равенствами

$$\rho_n^+ = \max_{x \neq 0} \frac{\max_i \|A_i x\|_n^\circ}{\|x\|_n^\circ}, \quad \rho_n^- = \min_{x \neq 0} \frac{\max_i \|A_i x\|_n^\circ}{\|x\|_n^\circ}. \quad (4.8)$$

Тогда, переходя к пределу в соотношениях (4.8), получаем, что полунорма $\|x\|^*$ удовлетворяет “условию Барабанова”

$$\rho \|x\|^* = \max_i \|A_i x\|^*.$$

Но в силу [20, лемма 3] всякая не равная тождественно нулю полунорма, удовлетворяющая “условию Барабанова” для некоторого неприводимого набора матриц, является нормой Барабанова.

Таким образом, при выполнении указанных выше предположений A1, A2 и A3 итерационная процедура (4.5)–(4.7) приводит к построению нормы Барабанова и нахождению совместного спектрального радиуса набора матриц \mathcal{A} .

Простейшие свойства итерационной процедуры (4.5)–(4.7), подтверждающие справедливость предположений A1, A2 и A3, устанавливаются в следующих разделах.

Отметим, что процедура построения чисел ρ_n^\pm , которые как будет показано в следующем разделе предоставляют верхнюю и нижнюю оценки для совместного спектрального радиуса, сходна с методом приближения совместного спектрального радиуса, предложенным в [82].

4.2.1. Соотношения между числами ρ_n^\pm и совместным спектральным радиусом ρ .

Лемма 4.2. Пусть числа α, β таковы, что в некоторой норме $\|\cdot\|$ справедливы соотношения

$$\alpha \|x\| \leq \max_{A_i \in \mathcal{A}} \|A_i x\| \leq \beta \|x\|.$$

Тогда $\alpha \leq \rho \leq \beta$, где ρ — совместный спектральный радиус набора матриц \mathcal{A} .

Доказательство. Пусть $\|\cdot\|^*$ — некоторая норма Барабанова для набора матриц \mathcal{A} . Так как все нормы в \mathbb{R}^m эквивалентны, то найдутся такие константы $\sigma^- > 0$ и $\sigma^+ < \infty$, что

$$\sigma^- \|x\|^* \leq \|x\| \leq \sigma^+ \|x\|^*. \quad (4.9)$$

Рассмотрим при каждом $k = 1, 2, \dots$ функции

$$\Delta_k(x) = \max_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq r} \|A_{i_k} \dots A_{i_2} A_{i_1} x\| = \max_{i_k} \dots \max_{i_2} \max_{i_1} \|A_{i_k} \dots A_{i_2} A_{i_1} x\|.$$

Тогда, как легко видеть,

$$\alpha^k \|x\| \leq \Delta_k(x) \leq \beta^k \|x\|. \quad (4.10)$$

Аналогично, рассмотрим при каждом $k = 1, 2, \dots$ функции

$$\Delta_k^*(x) = \max_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq r} \|A_{i_k} \dots A_{i_2} A_{i_1} x\|^* = \max_{i_k} \dots \max_{i_2} \max_{i_1} \|A_{i_k} \dots A_{i_2} A_{i_1} x\|^*.$$

Для этих функций в силу определения нормы Барабанова справедливо более сильное чем (4.10) представление:

$$\Delta_k^*(x) \equiv \rho^k \|x\|^*. \quad (4.11)$$

Заметим теперь, что из (4.9) и определения функций $\Delta_k(x)$ и $\Delta_k^*(x)$ вытекают оценки

$$\sigma^- \Delta_k^*(x) \leq \Delta_k(x) \leq \sigma^+ \Delta_k^*(x).$$

Тогда в силу (4.10), (4.11)

$$\frac{\sigma^-}{\sigma^+} \alpha^k \leq \rho^k \leq \frac{\sigma^+}{\sigma^-} \beta^k, \quad \forall k,$$

откуда и следуют требуемые оценки $\alpha \leq \rho \leq \beta$. \square

Таким образом, из леммы 4.2 и определения (4.5) чисел ρ_n^\pm вытекает, что числа $\{\rho_n^-\}$ образуют семейство нижних оценок для совместного спектрального радиуса ρ набора матриц \mathcal{A} , а числа $\{\rho_n^+\}$ образуют семейство верхних оценок для совместного спектрального радиуса ρ , что позволяет при применении итерационной процедуры (4.5)–(4.7) оценить апостериорную точность нахождения совместного спектрального радиуса.

4.2.2. Сходимость последовательности норм $\{\|\cdot\|_n^\circ\}$. Пусть даны две нормы $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ в \mathbb{R}^m . Определим величины

$$e^-(\|\cdot\|', \|\cdot\|'') = \min_{x \neq 0} \frac{\|x\|'}{\|x\|''}, \quad e^+(\|\cdot\|', \|\cdot\|'') = \max_{x \neq 0} \frac{\|x\|'}{\|x\|''}. \quad (4.12)$$

Так как все нормы в \mathbb{R}^m эквивалентны, то величины $e^-(\|\cdot\|', \|\cdot\|'')$ и $e^+(\|\cdot\|', \|\cdot\|'')$ определены корректно, и при этом

$$0 < e^-(\|\cdot\|', \|\cdot\|'') \leq e^+(\|\cdot\|', \|\cdot\|'') < \infty.$$

Поэтому корректно определена и величина

$$\text{ecc}(\|\cdot\|', \|\cdot\|'') = \frac{e^+(\|\cdot\|', \|\cdot\|'')}{e^-(\|\cdot\|', \|\cdot\|'')} \geq 1, \quad (4.13)$$

называемая *эксцентриситетом* нормы $\|\cdot\|'$ относительно нормы $\|\cdot\|''$ (см., например, [192]).

Лемма 4.3. Пусть $\|\cdot\|^*$ — некоторая норма Барабанова для набора матриц \mathcal{A} . Тогда

$$\text{ecc}(\|\cdot\|_n^\circ, \|\cdot\|^*) = \text{ecc}(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*), \quad \forall n, \quad (4.14)$$

и при этом последовательность чисел $\text{ecc}(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*)$ не возрастает.

Доказательство. Заметим сначала, что в силу (4.7) каждая норма $\|\cdot\|_n^\circ$ отличается от соответствующей нормы $\|\cdot\|_n$ лишь числовым множителем, откуда в силу определения (4.12), (4.13) эксцентриситета норм следует (4.14).

Обозначим через ρ совместный спектральный радиус набора матриц \mathcal{A} . Тогда в силу определений функции $e^+(\cdot)$ и нормы Барабанова $\|\cdot\|^*$ из соотношений (4.5), (4.6) получаем:

$$\begin{aligned} \|x\|_{n+1} &= \max \left\{ \|x\|_n, \gamma_n^{-1} \max_i \|A_i x\|_n \right\} \leq \\ &\leq e^+(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*) \max \left\{ \|x\|^*, \gamma_n^{-1} \max_i \|A_i x\|^* \right\} = \\ &= e^+(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*) \max \left\{ \|x\|^*, \gamma_n^{-1} \rho \|x\|^* \right\}, \end{aligned}$$

откуда

$$e^+(\|\cdot\|_{n+1}, \|\cdot\|^*) \leq e^+(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*) \max \{1, \gamma_n^{-1} \rho\}. \quad (4.15)$$

Аналогично, в силу определений функции $e^-(\cdot)$ и нормы Барабанова $\|\cdot\|^*$ из соотношений (4.5), (4.6) получаем:

$$\begin{aligned} \|x\|_{n+1} &= \max \left\{ \|x\|_n, \gamma_n^{-1} \max_i \|A_i x\|_n \right\} \geq \\ &\geq e^-(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*) \max \left\{ \|x\|^*, \gamma_n^{-1} \max_i \|A_i x\|^* \right\} = \\ &= e^-(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*) \max \left\{ \|x\|^*, \gamma_n^{-1} \rho \|x\|^* \right\}, \end{aligned}$$

откуда

$$e^-(\|\cdot\|_{n+1}, \|\cdot\|^*) \geq e^-(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*) \max \{1, \gamma_n^{-1} \rho\}. \quad (4.16)$$

Разделив почленно неравенство (4.15) на (4.16), получаем

$$\text{ecc}(\|\cdot\|_{n+1}, \|\cdot\|^*) = \frac{e^+(\|\cdot\|_{n+1}, \|\cdot\|^*)}{e^-(\|\cdot\|_{n+1}, \|\cdot\|^*)} \leq \frac{e^+(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*)}{e^-(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*)} = \text{ecc}(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*).$$

Следовательно, последовательность чисел $\{\text{ecc}(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*)\}$ не возрастает. \square

Обозначим через $N_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$ топологическое пространство норм в \mathbb{R}^m с топологией равномерной сходимости на ограниченных подмножествах из \mathbb{R}^m .

Следствие 4.4. *Последовательность норм $\{\|\cdot\|_n^\circ\}$ компактна в $N_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$.*

Доказательство. Для каждого n и любого $x \neq 0$ по определению (4.12) функций $e^+(\cdot)$ и $e^-(\cdot)$ справедливы соотношения

$$e^-(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*) \leq \frac{\|x\|_n}{\|x\|^*} \leq e^+(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*)$$

и

$$e^-(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*) \leq \frac{\|e\|_n}{\|e\|^*} \leq e^+(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*),$$

откуда

$$\frac{1}{\text{ecc}(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*)} \frac{\|x\|^*}{\|e\|^*} \|e\|_n \leq \|x\|_n \leq \text{ecc}(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*) \frac{\|x\|^*}{\|e\|^*} \|e\|_n.$$

Но так как нормы $\{\|\cdot\|_n^\circ\}$ по построению удовлетворяют условию калибровки $\|e\|_n^\circ \equiv 1$, а по лемме 4.3 $\text{ecc}(\|\cdot\|_n^\circ, \|\cdot\|^*) \leq \text{ecc}(\|\cdot\|_0^\circ, \|\cdot\|^*)$, то

$$\frac{1}{\text{ecc}(\|\cdot\|_0, \|\cdot\|^*)} \frac{\|x\|^*}{\|e\|^*} \leq \|x\|_n \leq \text{ecc}(\|\cdot\|_0, \|\cdot\|^*) \frac{\|x\|^*}{\|e\|^*}.$$

Следовательно, нормы $\|\cdot\|_n^\circ$, $n \geq 1$, равностепенно непрерывны и равномерно ограничены на каждом ограниченном подмножестве \mathbb{R}^m . Более того, эти значения этих норм отделены от нуля на каждом ограниченном подмножестве \mathbb{R}^m , отделенном от нуля. Отсюда по теореме Арцела–Асколли и вытекает утверждение следствия. \square

Следствие 4.5. *Если хотя бы одна подпоследовательность норм из $\{\|\cdot\|_n^\circ\}$ сходится в $N_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$ к некоторой норме Барабанова, то и вся последовательность $\{\|\cdot\|_n^\circ\}$ сходится в $N_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$ к той же норме Барабанова.*

Доказательство. Пусть некоторая подпоследовательность $\{\|\cdot\|_{n_k}^\circ\}$ сходится в пространстве $N_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$ к некоторой норме Барабанова $\|\cdot\|^*$. Тогда по определению эксцентриситета одной нормы относительно другой

$$\text{ecc}(\|\cdot\|_{n_k}^\circ, \|\cdot\|^*) \rightarrow 1 \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

откуда в силу невозрастания эксцентриситетов $\text{ecc}(\|\cdot\|_n^\circ, \|\cdot\|^*)$ (см. лемму 4.3) следует более сильное соотношение

$$\text{ecc}(\|\cdot\|_n^\circ, \|\cdot\|^*) \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (4.17)$$

Заметим теперь, что по определению (4.12), (4.13) эксцентриситета одной нормы относительно другой справедливы оценки

$$\frac{1}{\text{ecc}(\|\cdot\|_n^\circ, \|\cdot\|^*)} \leq \frac{\|x\|_n^\circ}{\|x\|^*} \leq \text{ecc}(\|\cdot\|_n^\circ, \|\cdot\|^*),$$

откуда в силу (4.17) следует сходимость в пространстве $N_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$ последовательности норм $\{\|\cdot\|_n^\circ\}$ к норме $\|\cdot\|^*$. \square

Лемма 4.6. *Утверждение А3 является следствием утверждений А1 и А2.*

Доказательство. По следствию 4.4 последовательность норм $\{\|\cdot\|_n^\circ\}$ обладает подпоследовательностью $\{\|\cdot\|_{n_k}^\circ\}$ сходящейся к некоторой норме $\|\cdot\|^*$ в пространстве $N_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$. Тогда, переходя в соотношениях (4.8) к пределу при $n = n_k \rightarrow \infty$, получаем в силу предположений А1 и А2:

$$\rho = \frac{\max_i \|A_i x\|^*}{\|x\|^*}, \quad \forall x \neq 0,$$

т.е. $\|\cdot\|^*$ оказывается нормой Барабанова для набора матриц \mathcal{A} . Отсюда и из следствия 4.5 тогда вытекает, что последовательность $\{\|\cdot\|_n^\circ\}$ сходится к норме Барабанова $\|\cdot\|^*$ в пространстве $N_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$, что означает справедливость утверждения А3. \square

Таким образом, в силу леммы 4.6 для доказательства сходимости итерационной процедуры (4.5)–(4.7) необходимо установить только справедливость утверждений А1 и А2.

4.2.3. Сходимость последовательностей $\{\rho_n^\pm\}$. Оценим величину $\max_i \|A_i x\|_{n+1}$. По определению

$$\begin{aligned} \max_i \|A_i x\|_{n+1} &= \max_i \left\{ \max \left\{ \|A_i x\|_n, \gamma_n^{-1} \max_j \|A_i A_j x\|_n \right\} \right\} = \\ &= \max \left\{ \max_i \|A_i x\|_n, \gamma_n^{-1} \max_j \max_i \|A_i A_j x\|_n \right\}. \end{aligned}$$

Здесь в силу определения (4.5) величин ρ_n^\pm правая часть полученной цепочки равенств оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_n^- \max \left\{ \|x\|_n, \gamma_n^{-1} \max_j \|A_j x\|_n \right\} &\leq \\ &\leq \max \left\{ \max_i \|A_i x\|_n, \gamma_n^{-1} \max_j \max_i \|A_i A_j x\|_n \right\} \leq \\ &\rho_n^+ \max \left\{ \|x\|_n, \gamma_n^{-1} \max_j \|A_j x\|_n \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, по определению нормы $\|x\|_{n+1}$

$$\rho_n^- \|x\|_{n+1} \leq \max_i \|A_i x\|_{n+1} \leq \rho_n^+ \|x\|_{n+1},$$

откуда

$$\rho_n^- \leq \frac{\max_i \|A_i x\|_{n+1}}{\|x\|_{n+1}} \leq \rho_n^+, \quad \forall x \neq 0,$$

и значит,

$$\rho_n^- \leq \rho_{n+1}^- \leq \rho_{n+1}^+ \leq \rho_n^+.$$

Итак, нами доказана следующая

Лемма 4.7. Последовательность $\{\rho_n^-\}$ ограничена сверху каждым членом последовательности $\{\rho_n^+\}$ и при этом не убывает. Последовательность $\{\rho_n^+\}$ ограничена снизу каждым членом последовательности $\{\rho_n^-\}$ и при этом не возрастает.

В силу леммы 4.7 существуют пределы

$$\rho^- = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n^-, \quad \rho^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n^+, \quad \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(\rho_n^-, \rho_n^+)$$

причем

$$\rho^- \leq \gamma \leq \rho^+$$

и, следовательно, справедливо утверждение А1. Поэтому для доказательства сходимости итерационной процедуры (4.5)–(4.7) осталось установить только справедливость утверждения А2: $\rho^- = \rho^+$.

Доказательство справедливости утверждения А2 будем проводить “от противного”: предположим, что $\rho^- < \rho^+$ и придем к противоречию с этим предположением.

4.2.4. Переход к новой последовательности норм. Для упрощения дальнейших рассуждений перейдем к новой последовательности норм, для которой параметры ρ_n^\pm окажутся независимыми от n .

Как установлено в следствии 4.4 последовательность норм $\|\cdot\|_n^\circ$ компактна в пространстве $N_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$. Следовательно, найдется такая подпоследовательность индексов n_k , при которой последовательность норм $\|\cdot\|_{n_k}^\circ = \|\cdot\|_{n_k}/\|e\|_{n_k}$ сходится к некоторой норме $\|\cdot\|_0^\bullet$, удовлетворяющей условию калибровки $\|e\|_0^\bullet = 1$. При этом, переходя к пределу в соотношениях (4.8) в силу леммы 4.7 получаем, что

$$\rho^+ = \max_{x \neq 0} \frac{\max_i \|A_i x\|_0^\bullet}{\|x\|_0^\bullet}, \quad \rho^- = \min_{x \neq 0} \frac{\max_i \|A_i x\|_0^\bullet}{\|x\|_0^\bullet}, \quad \gamma = \gamma(\rho^-, \rho^+).$$

Теперь по индукции легко доказывается следующее утверждение.

Лемма 4.8. При каждом $n = 0, 1, 2, \dots$ последовательность норм $\|\cdot\|_{n_k+n}/\|e\|_{n_k}$ сходится к некоторой норме $\|\cdot\|_n^\bullet$. При этом для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ справедливы равенства

$$\max_{x \neq 0} \frac{\max_i \|A_i x\|_n^\bullet}{\|x\|_n^\bullet} = \rho^+, \quad \min_{x \neq 0} \frac{\max_i \|A_i x\|_n^\bullet}{\|x\|_n^\bullet} = \rho^-, \quad (4.18)$$

и рекуррентные соотношения

$$\|x\|_{n+1}^\bullet = \max \left\{ \|x\|_n^\bullet, \gamma^{-1} \max_i \|A_i x\|_n^\bullet \right\}. \quad (4.19)$$

4.2.5. Множества ω_n . Определим при каждом $n = 0, 1, 2, \dots$ множество

$$\omega_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \rho^- \|x\|_n^\bullet = \max_i \|A_i x\|_n^\bullet \right\}; \quad (4.20)$$

в силу (4.18) ω_n — это множество, на котором величина

$$\frac{\max_i \|A_i x\|_n^\bullet}{\|x\|_n^\bullet}$$

достигает своего минимума.

Лемма 4.9. Если $x \in \omega_n$, то $\|x\|_{n+1}^\bullet = \|x\|_n^\bullet$.

Доказательство. При $x = 0$ утверждение леммы очевидно, поэтому рассмотрим случай, когда $x \neq 0 \in \omega_n$. В этом случае из (4.20) и неравенства $\rho^- \leq \rho^+$ следует, что

$$\max_i \|A_i x\|_n^\bullet = \rho^- \|x\|_n^\bullet \leq \gamma \|x\|_n^\bullet$$

или, что то же,

$$\|x\|_n^\bullet \geq \gamma^{-1} \max_i \|A_i x\|_n^\bullet.$$

Отсюда по определению (4.19) нормы $\|\cdot\|_{n+1}^\bullet$ получаем требуемое равенство:

$$\|x\|_{n+1}^\bullet = \max \left\{ \|x\|_n^\bullet, \gamma^{-1} \max_i \|A_i x\|_n^\bullet \right\} = \|x\|_n^\bullet.$$

Лемма доказана. □

Лемма 4.10. Если $\rho^- < \rho^+$, то $\omega_{n+1} \subseteq \omega_n$ при каждом $n = 0, 1, 2, \dots$.

Доказательство. Пусть $x \in \omega_{n+1}$. Если $x = 0$, то очевидно $x \in \omega_n$, поэтому будем считать, что $x \neq 0$. По определению множества ω_{n+1} и нормы $\|\cdot\|_n^\bullet$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \max_i \|A_i x\|_{n+1}^\bullet &= \max_i \left\{ \max \left\{ \|A_i x\|_n^\bullet, \gamma^{-1} \max_j \|A_j A_i x\|_n^\bullet \right\} \right\} = \\ &= \max \left\{ \max_i \|A_i x\|_n^\bullet, \gamma^{-1} \max_{i,j} \|A_j A_i x\|_n^\bullet \right\} = \\ &= \rho^- \|x\|_{n+1}^\bullet = \rho^- \max \left\{ \|x\|_n^\bullet, \gamma^{-1} \max_i \|A_i x\|_n^\bullet \right\}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Предположим, что здесь

$$\|x\|_n^\bullet \leq \gamma^{-1} \max_i \|A_i x\|_n^\bullet. \quad (4.22)$$

Тогда из (4.21) получаем, что

$$\max \left\{ \max_i \|A_i x\|_n^\bullet, \gamma^{-1} \max_{i,j} \|A_j A_i x\|_n^\bullet \right\} = \rho^- \|x\|_{n+1}^\bullet = \gamma^{-1} \rho^- \max_i \|A_i x\|_n^\bullet.$$

Но так как по условию леммы $\rho^- < \rho^+$, то $\gamma = \gamma(\rho^-, \rho^+) > \rho^-$, и правая часть полученных равенств оказывается строго меньше, чем $\max_i \|A_i x\|_n^\bullet$. Но этого не может быть, поскольку левая часть тех же равенств уж никак не меньше, чем $\max_i \|A_i x\|_n^\bullet$.

Полученное противоречие вызвано предположением (4.22) и, следовательно, нами установлено, что при выполнении условия $x \neq 0 \in \omega_{n+1}$ должно выполняться строгое неравенство

$$\|x\|_n^\bullet > \gamma^{-1} \max_i \|A_i x\|_n^\bullet.$$

В этом случае из (4.21) получаем, что

$$\max \left\{ \max_i \|A_i x\|_n^\bullet, \gamma^{-1} \max_{i,j} \|A_j A_i x\|_n^\bullet \right\} = \rho^- \|x\|_n^\bullet. \quad (4.23)$$

Покажем, что равенство (4.23) влечет

$$\max_i \|A_i x\|_n^\bullet = \rho^- \|x\|_n^\bullet. \quad (4.24)$$

Действительно, в предположении противного по определению числа ρ^- должно было бы выполняться строгое неравенство $\max_i \|A_i x\|_n^\bullet > \rho^- \|x\|_n^\bullet$. Тогда левая часть равенства (4.23) должна была бы быть строго больше, чем $\rho^- \|x\|_n^\bullet$, т.е. правой части того же равенства, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что при выполнении условия $x \neq 0 \in \omega_{n+1}$ выполняется также равенство (4.24), означающее в силу (4.18), что $x \in \omega_n$. \square

Следствие 4.11. Если $\rho^- < \rho^+$, то $\omega = \bigcap_{n \geq 0} \omega_n \neq 0$ и

$$\|x\|_0^\bullet = \|x\|_1^\bullet = \dots = \|x\|_n^\bullet = \dots, \quad \forall x \neq 0 \in \omega. \quad (4.25)$$

Доказательство. По лемме 4.10 множества $\{\omega_n\}$ образуют систему вложенных замкнутых конических⁷ множеств. Тогда пересечение ω этих множеств также является замкнутым коническим множеством, невырождающимся в нулевую точку.

Для произвольной точки $x \in \omega$ при каждом целом $n \geq 0$ выполняется включение $x \in \omega_n$. Тогда по лемме 4.9 $\|x\|_{n+1}^\bullet = \|x\|_n^\bullet$, откуда и следуют равенства (4.25). \square

4.2.6. Завершение доказательства сходимости итерационной процедуры. По следствию 4.11 существует ненулевой вектор g , на котором все нормы $\|\cdot\|_n^\bullet$ принимают одинаковые значения:

$$\|g\|_0^\bullet = \|g\|_1^\bullet = \dots = \|g\|_n^\bullet = \dots.$$

Тогда в силу равномерной ограниченности эксцентриситетов норм $\|\cdot\|_n^\bullet$ относительно некоторой нормы Барабанова $\|\cdot\|^*$ (этот факт доказывается дословным повторением аналогичных рассуждений для норм $\|\cdot\|_n$) нормы $\|\cdot\|_n^\bullet$ образуют равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное относительно нормы Барабанова $\|\cdot\|^*$ семейство:

$$\exists \mu^\pm \in (0, \infty) : \quad \mu^- \|x\|^* \leq \|x\|_n^\bullet \leq \mu^+ \|x\|^*, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

и следовательно, семейство норм $\{\|\cdot\|_n^\bullet\}$ компактно в $N_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$.

Из определения (4.19) норм $\|\cdot\|_n^\bullet$ следует, кроме того, что

$$\|x\|_{n+1}^\bullet = \max \left\{ \|x\|_n^\bullet, \gamma^{-1} \max_i \|A_i x\|_n^\bullet \right\} \geq \|x\|_n^\bullet.$$

⁷Напомним, что множество X называется коническим, если вместе с каждой точкой $x \in X$ ему принадлежит и луч $\{tx : t \geq 0\}$.

Значит, нормы $\|\cdot\|_n^\bullet$ монотонно возрастают по n и ограничены (относительно нормы Барабанова $\|\cdot\|_n^*$) и потому поточечно сходятся к некоторой норме $\|\cdot\|^\bullet$. Более того в силу равностепенной непрерывности семейства норм $\{\|\cdot\|_n^\bullet\}$ относительно нормы Барабанова $\|\cdot\|_n^*$ нормы $\|\cdot\|_n^\bullet$ сходятся к норме $\|\cdot\|^\bullet$ в пространстве $N_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$.

Переходя теперь к пределу в соотношениях

$$\|x\|_{n+1}^\bullet = \max \left\{ \|x\|_n^\bullet, \gamma^{-1} \max_i \|A_i x\|_n^\bullet \right\} \geq \gamma^{-1} \max_i \|A_i x\|_n^\bullet,$$

являющихся следствием (4.19), получим, что

$$\|x\|^\bullet \geq \gamma^{-1} \max_i \|A_i x\|^\bullet.$$

Отсюда

$$\max_{x \neq 0} \frac{\max_i \|A_i x\|^\bullet}{\|x\|^\bullet} \leq \gamma. \quad (4.26)$$

С другой стороны, переходя к пределу в первом соотношении (4.18), имеем:

$$\max_{x \neq 0} \frac{\max_i \|A_i x\|^\bullet}{\|x\|^\bullet} = \rho^+. \quad (4.27)$$

Из соотношений (4.26) и (4.27) следует неравенство $\rho^+ \leq \gamma$, противоречащее предположению $\rho^- < \rho^+$, поскольку по определению функции $\gamma(\cdot, \cdot)$ при выполнении условия $\rho^- < \rho^+$ должно выполняться неравенство $\gamma = \gamma(\rho^-, \rho^+) < \rho^+$.

Полученное противоречие завершает доказательство равенства $\rho^- = \rho^+$, а с ним — и сходимости итерационной процедуры (4.5)–(4.7).

4.3. Итерационная схема по методу линейной релаксации

В этом разделе будет рассмотрен другой вариант итерационной процедуры построения норм Барабанова и вычисления совместного спектрального радиуса. Пусть снова как и в разделе 4.2 $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$ — неприводимый набор вещественных $m \times m$ матриц, $\|\cdot\|_0$ — некоторая норма в \mathbb{R}^m и $e \neq 0$ — произвольный элемент из \mathbb{R}^m , для которого $\|e\|_0 = 1$.

Пусть заданы числа λ^- и λ^+ , удовлетворяющие соотношениям

$$0 < \lambda^- \leq \lambda^+ < 1,$$

которые будут играть в дальнейшем роль границ параметров линейной релаксации. Построим рекурсивно последовательность норм $\|\cdot\|_n$, $n = 1, 2, \dots$, по следующим правилам:

LR1: считая, что норма $\|\cdot\|_n$ уже известна, вычислим величины

$$\rho_n^+ = \max_{x \neq 0} \frac{\max_i \|A_i x\|_n}{\|x\|_n}, \quad \rho_n^- = \min_{x \neq 0} \frac{\max_i \|A_i x\|_n}{\|x\|_n}, \quad \gamma_n = \max_i \|A_i e\|_n; \quad (4.28)$$

LR2: выберем произвольным образом числа $\lambda_n \in [\lambda^-, \lambda^+]$ и определим норму $\|\cdot\|_{n+1}$:

$$\|x\|_{n+1} = \lambda_n \|x\|_n + (1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1} \max_i \|A_i x\|_n. \quad (4.29)$$

Отметим, что норма (4.29) корректно определена при любом выборе γ_n , поскольку в силу неприводимости набора матриц $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$ векторы A_1x, \dots, A_rx ни при каком $x \neq 0$ не могут одновременно обратиться в нуль, а тогда $\rho_n^- > 0$ и $\gamma_n \geq \rho_n^- \|e\|_n > 0$.

Как видно, введенная итерационная процедура отличается от итерационной процедуры (4.5)–(4.7) лишь методом пересчета нормы $\|\cdot\|_n$ на втором шаге.

Как и в разделе 4.2 для доказательства сходимости итерационной процедуры (4.28), (4.29) к некоторой норме Барабанова $\|\cdot\|^*$ (а чисел ρ_n^\pm — к совместному спектральному радиусу ρ набора матриц \mathcal{A}) достаточно доказать справедливость утверждений А1, А2 и А3:

А1: последовательности $\{\rho_n^+\}$ и $\{\rho_n^-\}$ сходятся;

А2: пределы последовательностей $\{\rho_n^+\}$ и $\{\rho_n^-\}$ совпадают:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n^-;$$

А3: нормы $\|\cdot\|_n$ поточечно сходятся к некоторому пределу $\|\cdot\|^*$.

Необходимые свойства итерационной процедуры (4.28), (4.29), доказывающие справедливость утверждений А1, А2 и А3, устанавливаются ниже. Но прежде, чем перейти к доказательству утверждений А1, А2 и А3, сделаем два замечания.

Замечание 4.12. Для норм $\|\cdot\|_n$ выполняется следующее “условие калибровки”:

$$\|e\|_n \equiv 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

которое выводится по индукции из равенств (4.29). Тогда числа γ_n в силу (4.28) могут быть определены равенствами

$$\gamma_n = \frac{\max_i \|A_i e\|_n}{\|e\|_n}$$

и, следовательно,

$$\gamma_n \in [\rho_n^-, \rho_n^+], \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.30)$$

Замечание 4.13. Вместо итерационной процедуры (4.28), (4.29) можно рассмотреть формально более общую процедуру, в которой числа γ_n выбираются произвольным образом, лишь бы для них выполнялись включения (4.30), а нормировка получающихся норм осуществляется принудительно:

LR1': считая, что норма $\|\cdot\|_n$ уже известна, вычислим числовые величины

$$\rho_n^+ = \max_{x \neq 0} \frac{\max_i \|A_i x\|_n}{\|x\|_n}, \quad \rho_n^- = \min_{x \neq 0} \frac{\max_i \|A_i x\|_n}{\|x\|_n} \quad (4.31)$$

LR2': выберем произвольным образом числа $\lambda_n \in [\lambda^-, \lambda^+]$, $\gamma_n \in [\rho_n^-, \rho_n^+]$ и определим вспомогательную норму $\|\cdot\|_{n+1}^\circ$:

$$\|x\|_{n+1}^\circ = \lambda_n \|x\|_n + (1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1} \max_i \|A_i x\|_n,$$

а затем определим норму $\|\cdot\|_{n+1}$:

$$\|x\|_{n+1} = \|x\|_{n+1}^\circ / \|e\|_{n+1}^\circ \quad (4.32)$$

таким образом, чтобы для нее выполнялось калибрующее условие $\|e\|_{n+1} = 1$.

На деле, если выписать формулы для пересчета норм $\|x\|_{n+1}$ через $\|x\|_n$ и представить их в виде, аналогичном (4.29):

$$\|x\|_{n+1} = \lambda'_n \|x\|_n + (1 - \lambda'_n)(\gamma'_n)^{-1} \max_i \|A_i x\|_n,$$

то окажется, что соответствующие величины λ'_n будут в совокупности равномерно отделены от нуля и единицы, а число γ'_n будет в точности совпадать с величиной γ_n , определяемой (4.28). Соответствующие вычисления несложны, но достаточно громоздки, и потому опускаются.

Таким образом, рассмотрение итерационных процедур вида (4.31)–(4.32) не добавляет общности, и такие процедуры далее не рассматриваются!

4.3.1. Сходимость последовательности норм $\{\|\cdot\|_n\}$. Приступим к доказательству сходимости последовательности норм $\|\cdot\|_n$. Следующая лемма является аналогом леммы 4.3.

Лемма 4.14. Пусть $\|\cdot\|^$ — некоторая норма Барабанова для набора матриц \mathcal{A} . Тогда последовательность чисел $\text{ess}(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*)$ не возрастает.*

Доказательство. Обозначим через ρ совместный спектральный радиус набора матриц \mathcal{A} . Тогда в силу определений функции $e^+(\cdot)$ и нормы Барабанова $\|\cdot\|^*$ из соотношений (4.28), (4.29) получаем:

$$\begin{aligned} \|x\|_{n+1} &= \lambda_n \|x\|_n + (1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1} \max_i \|A_i x\|_n \leq \\ &\leq e^+(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*) \left(\lambda_n \|x\|^* + (1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1} \max_i \|A_i x\|^* \right) = \\ &= e^+(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*) \left(\lambda_n \|x\|^* + (1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1} \rho \|x\|^* \right), \end{aligned}$$

откуда

$$e^+(\|\cdot\|_{n+1}, \|\cdot\|^*) \leq e^+(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*) (\lambda_n + (1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1} \rho). \quad (4.33)$$

Аналогично, в силу определений функции $e^-(\cdot)$ и нормы Барабанова $\|\cdot\|^*$ из соотношений (4.28), (4.29) получаем:

$$\begin{aligned} \|x\|_{n+1} &= \lambda_n \|x\|_n + (1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1} \max_i \|A_i x\|_n \geq \\ &\geq e^-(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*) \left(\lambda_n \|x\|^* + (1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1} \max_i \|A_i x\|^* \right) = \\ &= e^-(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*) \left(\lambda_n \|x\|^* + (1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1} \rho \|x\|^* \right), \end{aligned}$$

откуда

$$e^-(\|\cdot\|_{n+1}, \|\cdot\|^*) \geq e^-(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*) (\lambda_n + (1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1} \rho). \quad (4.34)$$

Разделив почленно неравенство (4.33) на (4.34), получаем

$$\text{ess}(\|\cdot\|_{n+1}, \|\cdot\|^*) = \frac{e^+(\|\cdot\|_{n+1}, \|\cdot\|^*)}{e^-(\|\cdot\|_{n+1}, \|\cdot\|^*)} \leq \frac{e^+(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*)}{e^-(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*)} = \text{ess}(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*),$$

откуда и вытекает, что последовательность чисел $\{\text{ess}(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*)\}$ не возрастает. \square

Следствие 4.15. Последовательность норм $\{\|\cdot\|_n\}$ компактна в $N_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$.

Доказательство. Для каждого n и любого $x \neq 0$ по определению (4.12) функций $e^+(\cdot)$ и $e^-(\cdot)$ справедливы соотношения

$$e^-(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*) \leq \frac{\|x\|_n}{\|x\|^*} \leq e^+(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*)$$

и

$$e^-(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*) \leq \frac{\|e\|_n}{\|e\|^*} \leq e^+(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*),$$

откуда

$$\frac{1}{\text{ecc}(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*)} \frac{\|x\|^*}{\|e\|^*} \|e\|_n \leq \|x\|_n \leq \text{ecc}(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*) \frac{\|x\|^*}{\|e\|^*} \|e\|_n.$$

Но так как нормы $\|\cdot\|_n$ в силу замечания 4.12 удовлетворяют условию калибровки $\|e\|_n \equiv 1$, а по лемме 4.14 $\text{ecc}(\|\cdot\|_n, \|\cdot\|^*) \leq \text{ecc}(\|\cdot\|_0, \|\cdot\|^*)$, то

$$\frac{1}{\text{ecc}(\|\cdot\|_0, \|\cdot\|^*)} \frac{\|x\|^*}{\|e\|^*} \leq \|x\|_n \leq \text{ecc}(\|\cdot\|_0, \|\cdot\|^*) \frac{\|x\|^*}{\|e\|^*}.$$

Следовательно, нормы $\|\cdot\|_n^\circ$, $n \geq 1$, равностепенно непрерывны и равномерно ограничены на каждом ограниченном подмножестве \mathbb{R}^m . Более того, эти значения этих норм отделены от нуля на каждом ограниченном подмножестве \mathbb{R}^m , отделенном от нуля. Отсюда по теореме Арцела–Асколли и вытекает утверждение следствия. \square

Следствие 4.16. Если хотя бы одна подпоследовательность норм из $\{\|\cdot\|_n\}$ сходится в $N_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$ к некоторой норме Барабанова, то и вся последовательность $\{\|\cdot\|_n\}$ сходится в $N_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$ к той же норме Барабанова.

Лемма 4.17. Утверждение АЗ является следствием утверждений А1 и А2.

Доказательства следствия 4.16 и леммы 4.17 опускаем, т.к. они дословно повторяют доказательства следствия 4.5 и леммы 4.6, соответственно.

В силу леммы 4.17 для доказательства сходимости итерационной процедуры (4.28), (4.29) необходимо установить только справедливость утверждений А1 и А2.

4.3.2. Сходимость последовательностей $\{\rho_n^\pm\}$. Так же, как в разделе 4.2, из леммы 4.2 и определения (4.28) чисел ρ_n^\pm вытекает, что числа $\{\rho_n^-\}$ образуют семейство нижних оценок для совместного спектрального радиуса ρ набора матриц \mathcal{A} , а числа $\{\rho_n^+\}$ образуют семейство верхних оценок для совместного спектрального радиуса ρ , что позволяет при применении итерационной процедуры (4.28), (4.29) оценить апостериорную точность нахождения совместного спектрального радиуса.

Для доказательства сходимости последовательностей $\{\rho_n^\pm\}$ выведем сначала некоторые вспомогательные оценки величины $\max_i \|A_i x\|_{n+1}$. По определению

$$\max_i \|A_i x\|_{n+1} = \max_i \left\{ \lambda_n \|A_i x\|_n + (1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1} \max_j \|A_j A_i x\|_n \right\}. \quad (4.35)$$

Здесь в правой части при каждом i слагаемое $(1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1} \max_j \|A_j A_i x\|_n$ в силу определения (4.28) величин ρ_n^\pm оценивается следующим образом:

$$\rho_n^-(1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1} \|A_i x\|_n \leq (1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1} \max_j \|A_j A_i x\|_n \leq \rho_n^+(1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1} \|A_i x\|_n.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\max_i \{ \lambda_n \|A_i x\|_n + \rho_n^- (1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1} \|A_i x\|_n \} &\leq \\
&\leq \max_i \left\{ \lambda_n \|A_i x\|_n + (1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1} \max_j \|A_j A_i x\|_n \right\} \leq \\
&\leq \max_i \{ \lambda_n \|A_i x\|_n + \rho_n^+ (1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1} \|A_i x\|_n \}. \quad (4.36)
\end{aligned}$$

Здесь в силу определения (4.28), (4.29) величин ρ_n^- и нормы $\|x\|_{n+1}$

$$\begin{aligned}
\max_i \{ \lambda_n \|A_i x\|_n + \rho_n^- (1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1} \|A_i x\|_n \} &= \\
&= (\lambda_n + \rho_n^- (1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1}) \max_i \|A_i x\|_n = \\
&= \lambda_n \max_i \|A_i x\|_n + \rho_n^- (1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1} \max_i \|A_i x\|_n \geq \\
&\geq \rho_n^- \lambda_n \|x\|_n + \rho_n^- (1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1} \max_i \|A_i x\|_n = \rho_n^- \|x\|_{n+1}. \quad (4.37)
\end{aligned}$$

Аналогично, в силу определения (4.28), (4.29) величин ρ_n^+ и нормы $\|x\|_{n+1}$

$$\begin{aligned}
\max_i \{ \lambda_n \|A_i x\|_n + \rho_n^+ (1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1} \|A_i x\|_n \} &= \\
&= (\lambda_n + \rho_n^+ (1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1}) \max_i \|A_i x\|_n = \\
&= \lambda_n \max_i \|A_i x\|_n + \rho_n^+ (1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1} \max_i \|A_i x\|_n \leq \\
&\leq \rho_n^+ \lambda_n \|x\|_n + \rho_n^+ (1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1} \max_i \|A_i x\|_n = \rho_n^+ \|x\|_{n+1}. \quad (4.38)
\end{aligned}$$

Из оценок (4.35)–(4.38) получаем, что

$$\rho_n^- \|x\|_{n+1} \leq \max_i \|A_i x\|_{n+1} \leq \rho_n^+ \|x\|_{n+1},$$

откуда

$$\rho_n^- \leq \frac{\max_i \|A_i x\|_{n+1}}{\|x\|_{n+1}} \leq \rho_n^+, \quad \forall x \neq 0,$$

и значит,

$$\rho_n^- \leq \rho_{n+1}^- \leq \rho_{n+1}^+ \leq \rho_n^+.$$

Итак, доказана следующая

Лемма 4.18. Последовательность $\{\rho_n^-\}$ ограничена сверху любым членом последовательности $\{\rho_n^+\}$ и при этом не убывает. Последовательность $\{\rho_n^+\}$ ограничена снизу любым членом последовательности $\{\rho_n^-\}$ и при этом не возрастает.

В силу леммы 4.18 существуют пределы

$$\rho^- = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n^-, \quad \rho^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n^+$$

и, следовательно, справедливо утверждение А1. Поэтому для доказательства сходимости итерационной процедуры (4.28), (4.29) осталось установить только справедливость утверждения А2: $\rho^- = \rho^+$.

Доказательство справедливости последнего утверждения будем проводить “от противного”: предположим, что $\rho^- < \rho^+$ и придем к противоречию с этим предположением.

4.3.3. Переход к новой последовательности норм. Для упрощения дальнейших рассуждений перейдем к новой последовательности норм, для которой параметры ρ_n^\pm окажутся независимыми от n .

Как установлено в следствии 4.15 последовательность норм $\|\cdot\|_n$ компактна в пространстве $N_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$. Следовательно, найдется такая подпоследовательность индексов n_k , при которой последовательность норм $\|\cdot\|_{n_k}$ сходится к некоторой норме $\|\cdot\|_0^\bullet$, удовлетворяющей условию калибровки $\|e\|_0^\bullet = 1$, а подпоследовательности чисел λ_{n_k} и γ_{n_k} сходятся к некоторым числам μ_0 и η_0 , соответственно. При этом, переходя к пределу в соотношениях (4.28), в силу леммы 4.18 получаем, что

$$\rho^+ = \max_{x \neq 0} \frac{\max_i \|A_i x\|_0^\bullet}{\|x\|_0^\bullet}, \quad \rho^- = \min_{x \neq 0} \frac{\max_i \|A_i x\|_0^\bullet}{\|x\|_0^\bullet}, \quad \eta_0 = \frac{\max_i \|A_i e\|_0^\bullet}{\|e\|_0^\bullet}.$$

Теперь по индукции легко доказывается следующее утверждение.

Лемма 4.19. *При каждом $n = 0, 1, 2, \dots$ последовательность норм $\|\cdot\|_{n_k+n}$ сходится к некоторой норме $\|\cdot\|_n^\bullet$, а подпоследовательности чисел λ_{n_k+n} и γ_{n_k+n} сходятся к некоторым числам μ_n и η_n , соответственно. При этом для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ справедливы включения $\mu_n \in [\lambda^-, \lambda^+]$, равенства $\|e\|_n^\bullet = 1$ и*

$$\max_{x \neq 0} \frac{\max_i \|A_i x\|_n^\bullet}{\|x\|_n^\bullet} = \rho^+, \quad \min_{x \neq 0} \frac{\max_i \|A_i x\|_n^\bullet}{\|x\|_n^\bullet} = \rho^-, \quad \frac{\max_i \|A_i e\|_n^\bullet}{\|e\|_n^\bullet} = \eta_n, \quad (4.39)$$

а также рекуррентные соотношения

$$\|x\|_{n+1}^\bullet = \mu_n \|x\|_n^\bullet + (1 - \mu_n) \eta_n^{-1} \max_i \|A_i x\|_n^\bullet. \quad (4.40)$$

Отметим, что нормы (4.40), как и нормы (4.29), корректно определены, поскольку в силу неприводимости набора матриц $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$ векторы $A_1 x, \dots, A_r x$ ни при каком $x \neq 0$ не могут одновременно обратиться в нуль, а тогда $\rho^- > 0$ и $\eta_n \geq \rho^- > 0$.

4.3.4. Множества ω_n и Ω_n . Определим при каждом $n = 0, 1, 2, \dots$ множества

$$\omega_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \rho^- \|x\|_n^\bullet = \max_i \|A_i x\|_n^\bullet \right\}, \quad \Omega_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \rho^+ \|x\|_n^\bullet = \max_i \|A_i x\|_n^\bullet \right\}; \quad (4.41)$$

в силу (4.39) ω_n и Ω_n — это множества, на которых величина

$$\frac{\max_i \|A_i x\|_n^\bullet}{\|x\|_n^\bullet}$$

достигает своего минимума и максимума, соответственно.

Лемма 4.20. *Справедливы соотношения:*

$$\begin{aligned} \|x\|_{n+1}^\bullet &= (\mu_n + (1 - \mu_n) \eta_n^{-1} \rho^-) \|x\|_n^\bullet \quad \text{при } x \in \omega_n, \\ \|x\|_{n+1}^\bullet &= (\mu_n + (1 - \mu_n) \eta_n^{-1} \rho^+) \|x\|_n^\bullet \quad \text{при } x \in \Omega_n. \end{aligned}$$

Доказательство. При $x = 0$ утверждение леммы очевидно, поэтому рассмотрим случай, когда $x \neq 0 \in \omega_n$. В этом случае из (4.41) и неравенства $\rho^- \leq \rho^+$ следует, что

$$\max_i \|A_i x\|_n^\bullet = \rho^- \|x\|_n^\bullet.$$

Отсюда по определению (4.40) нормы $\|\cdot\|_{n+1}^\bullet$ получаем:

$$\|x\|_{n+1}^\bullet = \mu_n \|x\|_n^\bullet + (1 - \mu_n) \eta_n^{-1} \max_i \|A_i x\|_n^\bullet = (\mu_n + (1 - \mu_n) \eta_n^{-1} \rho^-) \|x\|_n^\bullet.$$

При $x \in \omega_n$ требуемое равенство доказано. Аналогично требуемое равенство доказывается при $x \in \Omega_n$. \square

Лемма 4.21. При каждом $n = 0, 1, 2, \dots$ справедливы включения $\omega_{n+1} \subseteq \omega_n$, $\Omega_{n+1} \subseteq \Omega_n$.

Доказательство. Пусть $x \in \omega_{n+1}$. При $x = 0$ утверждение леммы очевидно, поэтому будем считать, что $x \neq 0$. Тогда по определению множества ω_{n+1} имеет место равенство

$$\max_i \|A_i x\|_{n+1}^\bullet = \rho^- \|x\|_{n+1}^\bullet = \rho^- \left(\mu_n \|x\|_n^\bullet + (1 - \mu_n) \eta_n^{-1} \max_i \|A_i x\|_n^\bullet \right). \quad (4.42)$$

С другой стороны заменой в оценках (4.35)–(4.37) норм $\|\cdot\|_n$ на $\|\cdot\|_n^\bullet$, а параметров ρ_n^- , λ_n и γ_n на ρ^- , μ_n и η_n , соответственно, получаем следующую оценку для $\max_i \|A_i x\|_{n+1}^\bullet$:

$$\max_i \|A_i x\|_{n+1}^\bullet \geq \mu_n \max_i \|A_i x\|_n^\bullet + (1 - \mu_n) \eta_n^{-1} \rho^- \max_i \|A_i x\|_n^\bullet. \quad (4.43)$$

Поскольку по лемме 4.19 $\mu_n \geq \lambda^- > 0$, то из (4.42), (4.43) вытекает, что

$$\rho^- \|x\|_n^\bullet \geq \max_i \|A_i x\|_n^\bullet$$

или, что то же,

$$\rho^- \geq \frac{\max_i \|A_i x\|_n^\bullet}{\|x\|_n^\bullet}.$$

Но по определению числа ρ^- предыдущее неравенство может выполняться только для элементов $x \in \omega_n$. Таким образом, включение $\omega_{n+1} \subseteq \omega_n$ доказано.

Доказательство включения $\Omega_{n+1} \subseteq \Omega_n$ проводится аналогично, тем не менее для полноты изложения приведем и его.

Пусть $x \in \Omega_{n+1}$. При $x = 0$ утверждение леммы очевидно, поэтому будем считать, что $x \neq 0$. Тогда по определению множества Ω_{n+1} имеет место равенство

$$\max_i \|A_i x\|_{n+1}^\bullet = \rho^+ \|x\|_{n+1}^\bullet = \rho^+ \left(\mu_n \|x\|_n^\bullet + (1 - \mu_n) \eta_n^{-1} \max_i \|A_i x\|_n^\bullet \right). \quad (4.44)$$

С другой стороны заменой в оценках (4.35), (4.36), (4.38) норм $\|\cdot\|_n$ на $\|\cdot\|_n^\bullet$, а параметров ρ_n^- , λ_n и γ_n на ρ^+ , μ_n и η_n , соответственно, получаем следующую оценку для $\max_i \|A_i x\|_{n+1}^\bullet$:

$$\max_i \|A_i x\|_{n+1}^\bullet \leq \mu_n \max_i \|A_i x\|_n^\bullet + (1 - \mu_n) \eta_n^{-1} \rho^+ \max_i \|A_i x\|_n^\bullet. \quad (4.45)$$

Поскольку по лемме 4.19 $\mu_n \geq \lambda^- > 0$, то из (4.44), (4.45) вытекает, что

$$\rho^+ \|x\|_n^\bullet \leq \max_i \|A_i x\|_n^\bullet$$

или, что то же,

$$\rho^+ \leq \frac{\max_i \|A_i x\|_n^\bullet}{\|x\|_n^\bullet}.$$

Но по определению числа ρ^+ предыдущее неравенство может выполняться только для элементов $x \in \Omega_n$. Таким образом, включение $\Omega_{n+1} \subseteq \Omega_n$ также доказано. \square

Следствие 4.22. $\omega = \bigcap_{n \geq 0} \omega_n \neq 0$ и $\Omega = \bigcap_{n \geq 0} \Omega_n \neq 0$.

Доказательство. По лемме 4.21 множества $\{\omega_n\}$ образуют систему вложенных замкнутых конических множеств. Тогда пересечение ω этих множеств также является замкнутым коническим множеством, невырождающимся в нулевую точку. Аналогичный факт имеет место и для множеств $\{\Omega_n\}$. \square

4.3.5. Завершение доказательства сходимости итерационной процедуры. Выберем ненулевые вектора $g \in \cap_{n \geq 0} \omega_n$, $h \in \cap_{n \geq 0} \Omega_n$; по следствию 4.22 такие вектора существуют. Тогда по лемме 4.21 справедливы соотношения

$$\|g\|_{n+1}^\bullet = (\mu_n + (1 - \mu_n)\eta_n^{-1}\rho^-) \|g\|_n^\bullet, \quad \|h\|_{n+1}^\bullet = (\mu_n + (1 - \mu_n)\eta_n^{-1}\rho^+) \|h\|_n^\bullet, \quad n \geq 0.$$

Отсюда

$$\|g\|_n^\bullet = \xi_n^- \|g\|_0^\bullet, \quad \|h\|_n^\bullet = \xi_n^+ \|h\|_0^\bullet, \quad n \geq 0,$$

где

$$\xi_n^- = \prod_{k=0}^n \{\mu_k + (1 - \mu_k)\eta_k^{-1}\rho^-\}, \quad \xi_n^+ = \prod_{k=0}^n \{\mu_k + (1 - \mu_k)\eta_k^{-1}\rho^+\}.$$

В силу равномерной ограниченности эксцентриситетов норм $\|\cdot\|_n^\bullet$ относительно некоторой нормы Барабанова $\|\cdot\|^*$ (этот факт доказывается дословным повторением аналогичных рассуждений для норм $\|\cdot\|_n$) нормы $\{\|\cdot\|_n^\bullet\}$ образуют равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное относительно нормы Барабанова $\|\cdot\|^*$ семейство:

$$\exists \delta^\pm \in (0, \infty) : \quad \delta^- \|x\|^* \leq \|x\|_n^\bullet \leq \delta^+ \|x\|^*, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Но тогда последовательности $\{\|g\|_n^\bullet\}$ и $\{\|h\|_n^\bullet\}$ должны быть равномерно ограниченными и равномерно отделенными от нуля, а значит этим свойством должны обладать и последовательности $\{\xi_n^-\}$ и $\{\xi_n^+\}$. Покажем, что это возможно только при условии $\rho^- = \rho^+$.

Заметим, сначала, что из включений $\eta_k \in [\rho^-, \rho^+]$, справедливых в силу (4.39) при всех k , следуют оценки

$$\mu_k + (1 - \mu_k)\eta_k^{-1}\rho^- \leq 1, \quad k \geq 0, \quad (4.46)$$

$$\mu_k + (1 - \mu_k)\eta_k^{-1}\rho^+ \geq 1, \quad k \geq 0. \quad (4.47)$$

В предположении же, что $\rho^- < \rho^+$ из включений $\mu_n \in [\lambda^-, \lambda^+]$ и $\eta_k \in [\rho^-, \rho^+]$, имеющих место при всех k , вытекают более сильные оценки:

$$\mu_k + (1 - \mu_k)\eta_k^{-1}\rho^- \leq \lambda^+ + (1 - \lambda^+) \frac{2\rho^-}{\rho^- + \rho^+} < 1, \quad \text{если } \eta_k \in \left[\frac{\rho^- + \rho^+}{2}, \rho^+ \right], \quad (4.48)$$

$$\mu_k + (1 - \mu_k)\eta_k^{-1}\rho^+ \geq \lambda^- + (1 - \lambda^-) \frac{2\rho^+}{\rho^- + \rho^+} > 1, \quad \text{если } \eta_k \in \left[\rho^-, \frac{\rho^- + \rho^+}{2} \right]. \quad (4.49)$$

Заметим теперь, что при выполнении неравенства $\rho^- < \rho^+$ бесконечное количество чисел η_k попадает в один из интервалов $\left[\rho^-, \frac{\rho^- + \rho^+}{2} \right]$ или $\left[\frac{\rho^- + \rho^+}{2}, \rho^+ \right]$. Тогда либо для бесконечного числа индексов k будут выполняться оценки (4.48), а для остальных — оценки (4.46), и в этом случае $\xi_n^- \rightarrow 0$. Либо же для бесконечного числа индексов k будут выполняться оценки (4.49), а для остальных — оценки (4.47), и в этом случае $\xi_n^+ \rightarrow \infty$.

Итак, в любом случае предположение $\rho^- < \rho^+$ приводит к выводу о том, что последовательности $\{\xi_n^-\}$ и $\{\xi_n^+\}$ не могут одновременно быть равномерно ограниченными и равномерно отделенными от нуля.

Таким образом, доказательство равенства $\rho^- = \rho^+$, а с ним и сходимости итерационной процедуры (4.28), (4.29) завершены.

4.4. Вычислительная схема для двумерных матриц

Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$ — набор вещественных 2×2 матриц вида

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)} \\ a_{21}^{(i)} & a_{22}^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Пусть (r, φ) — полярные координаты в \mathbb{R}^2 . Тогда для произвольного вектора $x \in \mathbb{R}^2$ заданного декартовыми координатами $x = \{x_1, x_2\}$ имеем соотношения

$$x = \{r \cos \varphi, r \sin \varphi\} \quad \text{и} \quad r = r(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \varphi = \varphi(x) = \arctan(x_2/x_1).$$

Определим для произвольной нормы $\|\cdot\|$ функцию

$$R(\varphi) = \|\{\cos \varphi, \sin \varphi\}\|.$$

Тогда норма $\|x\|$ вектора x , имеющего полярные координаты (r, φ) , будет определяться равенством

$$\|x\| = rR(\varphi), \tag{4.50}$$

а единичная сфера в норме $\|\cdot\|$ будет задаваться как геометрическое место векторов x полярные координаты которых удовлетворяют соотношению (см. рисунок 4.1)

$$rR(\varphi) \equiv 1 \quad \text{или} \quad r = \frac{1}{R(\varphi)}.$$

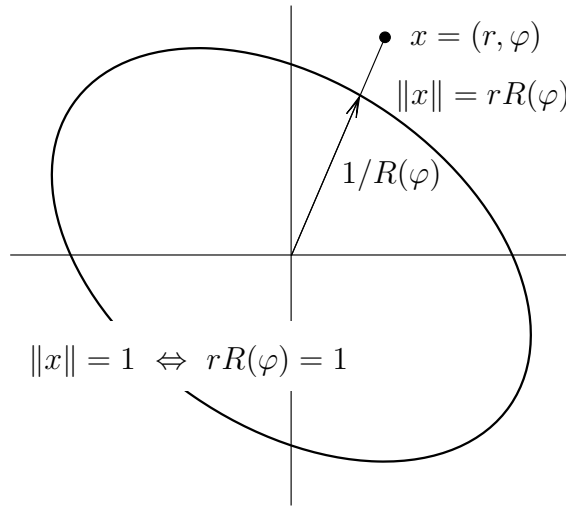


Рисунок 4.1 — Определение функции $R(\varphi)$.

Пусть теперь $R_n(\varphi)$ — это функция, задающая в полярных координатах график единичной сферы $\|x\|_n = 1$ нормы $\|\cdot\|_n$, определяемой итерационной процедурой (4.5)–(4.7). Перепишем соотношения (4.5)–(4.7) в терминах функций $R_n(\varphi)$. Для этого нам понадобится выразить в терминах функций $R_n(\varphi)$ выражения $\|A_i x\|_n$, $i = 0, 2, \dots, r$.

В силу (4.50)

$$\|A_i x\|_n = r(A_i x)R_n(\varphi(A_i x)).$$

Здесь по определению матрицы A_i

$$r(A_i x) = rH_i(\varphi),$$

где

$$H_i(\varphi) = \sqrt{\left(a_{11}^{(i)} \cos \varphi + a_{12}^{(i)} \sin \varphi\right)^2 + \left(a_{21}^{(i)} \cos \varphi + a_{22}^{(i)} \sin \varphi\right)^2}.$$

Аналогично, по определению матрицы A_i

$$\varphi(A_i x) = \Phi_i(\varphi),$$

где

$$\Phi_i(\varphi) = \arctan \left(\frac{a_{21}^{(i)} \cos \varphi + a_{22}^{(i)} \sin \varphi}{a_{11}^{(i)} \cos \varphi + a_{12}^{(i)} \sin \varphi} \right).$$

Из полученных соотношений получаем, что первые два из соотношений (4.5) предстанут в виде

$$\rho_n^+ = \max_{\varphi} \max_i \frac{H_i(\varphi) R_n(\Phi_i(\varphi))}{R_n(\varphi)}, \quad \rho_n^- = \min_{\varphi} \max_i \frac{H_i(\varphi) R_n(\Phi_i(\varphi))}{R_n(\varphi)},$$

или, что то же,

$$\rho_n^+ = \max_{\varphi} \frac{R_n^*(\varphi)}{R_n(\varphi)}, \quad \rho_n^- = \min_{\varphi} \frac{R_n^*(\varphi)}{R_n(\varphi)}, \quad (4.51)$$

где

$$R_n^*(\varphi) = \max_i \{H_i(\varphi) R_n(\Phi_i(\varphi))\}. \quad (4.52)$$

Соотношения же (4.6) предстанут в виде

$$rR_{n+1}(\varphi) = \max \{rR_n(\varphi), r\gamma_n^{-1} R_n^*(\varphi)\}$$

или, что равносильно,

$$R_{n+1}(\varphi) = \max \{R_n(\varphi), \gamma_n^{-1} R_n^*(\varphi)\} \quad (4.53)$$

А условие калибровки (4.7) предстанет в виде

$$rR_{n+1}^{\circ}(\varphi) = \frac{rR_{n+1}(\varphi)}{r_e R_{n+1}(\varphi_e)},$$

где (r_e, φ_e) — координаты вектора e . Взяв в качестве e вектор с полярными координатами $(1, 0)$, условие калибровки представим в виде

$$R_{n+1}^{\circ}(\varphi) = \frac{R_{n+1}(\varphi)}{R_{n+1}(0)}. \quad (4.54)$$

Итак, итерационная схема по методу макс-релаксации может быть представлена в следующем виде: пусть задана функция усреднения $\gamma(\cdot, \cdot)$. Положим $R_0(\varphi) \equiv 1$ и построим рекурсивно последовательности 2π -периодических функций $R_n(\varphi)$ и $R_n^{\circ}(\varphi)$, $n = 1, 2, \dots$, по следующим правилам:

MR1: считая, что функция $R_n(\varphi)$ известна, вычислим числовые величины ρ_n^+ и ρ_n^- в соответствии с формулами (4.51), (4.52) и положим $\gamma_n = \gamma(\rho_n^-, \rho_n^+)$;

MR2: определим новую функцию $R_{n+1}(\varphi)$ в соответствии с законом (4.53), а затем определим функцию $R_{n+1}^{\circ}(\varphi)$ формулой (4.54) и зададим норму $\|\cdot\|_{n+1}^{\circ}$ равенством $\|x\|_{n+1}^{\circ} = rR_{n+1}^{\circ}(\varphi)$, где (r, φ) — полярные координаты вектора x .

Ниже рассматриваются два примера результатов вычислений по предложенной модификации схемы MR1-MR2 для двумерных матриц.

Пример 4.23. Рассмотрим семейство $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$ двумерных матриц

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Функции $\Phi_i(\varphi)$, $H_i(\varphi)$, $R_n(\varphi)$, $R_n^*(\varphi)$ выбирались кусочно-линейными с узлами на сетке из 3000 точек на интервале $[-\pi, \pi]$. Для вычисления с помощью программы MATLAB[®] совместного спектрального радиуса $\rho(\mathcal{A})$ абсолютной погрешностью 10^{-3} потребовалось 13 итераций алгоритма MR1-MR2. При этом было получено значение $\rho(\mathcal{A}) = 1.617$. Приближение для нормы Барабанова $\|\cdot\|^*$ после 13-й итерации алгоритма MR1-MR2 представлено на рисунке 4.2 слева.

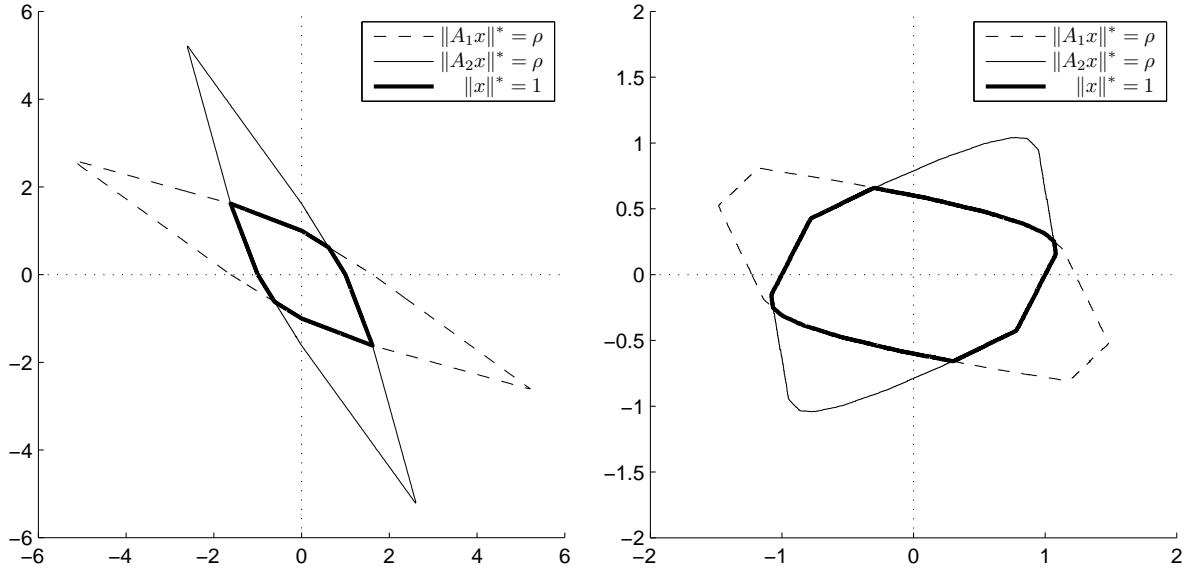


Рисунок 4.2 — Примеры вычисления нормы Барабанова для пары двумерных матриц.

Пример 4.24. Рассмотрим семейство $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$ двумерных матриц

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}.$$

Здесь функции $\Phi_i(\varphi)$, $H_i(\varphi)$, $R_n(\varphi)$, $R_n^*(\varphi)$ также выбирались кусочно-линейными с узлами на сетке из 3000 точек на интервале $[-\pi, \pi]$. Для вычисления с помощью программы MATLAB[®] совместного спектрального радиуса $\rho(\mathcal{A})$ с абсолютной погрешностью 10^{-3} потребовалось 24 итерации алгоритма MR1-MR2. При этом было получено значение $\rho(\mathcal{A}) = 1.228$. Приближение для нормы Барабанова $\|\cdot\|^*$ после 24-й итерации алгоритма MR1-MR2 представлено на рисунке 4.2 справа.

Как видно из рисунка 4.2 в приведенных примерах множества точек, удовлетворяющих соотношениям $\|A_1x\| = \rho$ и $\|A_2x\| = \rho$, имеют ровно 4 точки пересечения. Этот

факт был доказан в [20, 99] для случая, когда одна из матриц A_1, A_2 нижнетреугольная, другая верхнетреугольная, и обе они имеют неотрицательные элементы. В [20, 99] этот факт являлся одним из ключевых элементов построения контрпримера к гипотезе Лагариаса–Ванга о конечности. Справедлив ли этот факт в общем случае неизвестно, однако числовые эксперименты проведенные с помощью алгоритма MR1-MR2 с несколькими десятками пар матриц A_1, A_2 свидетельствуют в пользу этого.

Листинг программы в системе MATLAB®, использовавшийся для вычислений в примере 4.24, приведен в приложении А.

4.5. Замечания

В заключение отметим, что предложенные алгоритмы позволяют вычислить совместный спектральный радиус конечного семейства матриц с любой наперед заданной точностью и оценить апостериорную погрешность вычисления совместного спектрального радиуса.

Вопрос о точности и скорости приближения нормы Барабанова $\|\cdot\|^*$ с помощью норм $\|\cdot\|_n^\circ$ остается открытым. По-видимому, одна из трудностей в вычислении точности приближения нормы Барабанова $\|\cdot\|^*$ с помощью норм $\|\cdot\|_n^\circ$ кроется в том, что в общем случае норма Барабанова семейства матриц определяется неоднозначно. Именно для преодоления этой трудности выше и были предложены релаксационные, а не прямые схемы вычислений. Более того, если положить $\lambda_n \equiv 0$ в (4.29) при реализации алгоритма LR1-LR2, то, как показывают численные примеры, полученная прямая схема построения норм Барабанова может не обладать свойством сходимости.

Также открыт и вопрос о скорости сходимости последовательностей $\{\rho_n^+\}$ и $\{\rho_n^-\}$ к совместному спектральному радиусу.

Отметим также, что выше были предложены лишь алгоритмы вычисления совместного спектрального радиуса и нормы Барабанова. Вычислительные аспекты применения этих алгоритмов, такие как выбор сетки для представления $\Phi_i(\varphi), H_i(\varphi), R_n(\varphi), R_n^*(\varphi)$ в двумерном случае, оценка влияния погрешностей вычисления и пр. требуют дополнительного анализа.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ НОВЫХ МОДЕЛЕЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ ОПТИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ ТИПА ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ЛАЗЕРОВ И ЛАЗЕРОВ НА КВАНТОВЫХ ТОЧКАХ

5.1. Постановка задачи

Изучение нелинейной динамики оптических систем занимает важное место в современных исследованиях в области систем передачи информации и лазерной физики. Интерес к этой теме вызван причинами как фундаментального, так и прикладного характера. Лазеры и другие нелинейные системы, основанные на взаимодействии когерентного света с веществом, представляют собой пример самоорганизующихся систем, которые демонстрируют широкий спектр различных нелинейных режимов, от самых простых стационарных до сложных хаотических и пространственно-временных структур. Они являются удобными объектами для экспериментального изучения и теоретического анализа динамических состояний различного типа и их бифуркаций. С другой стороны, многие динамические режимы генерации лазеров, такие как, например, пассивная модуляция добротности, синхронизация мод, биение мод и т.д., имеют обширные технологические применения, включающие телекоммуникационные технологии, запись и хранение информации, точное машиностроение и измерительные системы, приложения в биологии и др. В связи с этим, исследование возможностей улучшения динамических характеристик лазеров представляет собой важную прикладную задачу. Полупроводниковые лазеры служат основными элементами современных телекоммуникационных оптических сетей. В частности, лазеры с синхронизованными модами являются компактными, дешевыми и надежными источниками коротких оптических импульсов с высокой частотой повторения (десятки и сотни ГГц и ТГц), приспособленными для применения в оптических коммуникациях. Новое поколение полупроводниковых лазеров, так называемые лазеры на квантовых точках, демонстрируют несколько важных технологических преимуществ по сравнению со стандартными полупроводниковыми лазерами, используемыми в настоящее время, и рассматриваются как потенциально новая база для телекоммуникационных приложений. Однако развитие технологий, включающих эти лазеры, требует улучшения параметров генерируемых световых импульсов, таких как ширина импульса, устойчивость к шуму, частота повторения импульсов и др. Проведенные исследования включали моделирование лазеров с синхронизованными модами, направленное на оптимизацию указанных параметров, в том числе при помощи синхронизации к источникам внешней модуляции.

5.2. Моделирование синхронизации мод и теоретический анализ

Нелинейная динамика одномодовых лазеров и лазеров с небольшим числом мод, активно исследовавшаяся в последние десятилетия, к настоящему времени сравнительно хорошо изучена. Вместе с тем, динамические процессы и бифуркации в лазерных моделях с очень большим или бесконечным числом степеней свободы пока еще изучены недостаточно. Особо важное значение в таких системах имеют приводящие к самоорганизации процессы синхронизации различных элементов системы. Основным настоящим объектом исследования являлась синхронизация мод в монолитных полупроводниковых лазерах, которые являются источниками коротких световых импульсов с высокой частотой повторения. При этом основное внимание уделялось малоизученным бифуркационным механизмам возникновения и нарушения синхронизации и сопутствующих ей режимов.

Первая группа результатов была получена в задачах о пассивной синхронизации

мод в полупроводниковом лазере, представляющей собой эффективный метод генерации коротких световых импульсов с высокими частотами повторения, используемых в телекоммуникационных технологиях. Так как длительность импульсов синхронизации мод обычно много меньше периода их повторения, с математической точки зрения они подобны лазерным автосолитонам. В качестве базовой модели пассивной синхронизации мод использовалась система трех дифференциальных уравнений с временным запаздыванием. Эта система, задающая временную эволюцию комплексной амплитуды электрического поля A , насыщенного усиления G и насыщенного поглощения Q , вносимых усиливающей и поглощающей секциями лазера, записывается в форме:

$$\gamma^{-1}\partial_t A + A = \sqrt{\kappa}e^{(1-i\alpha_g)G(t-T)/2-(1-i\alpha_q)Q(t-T)/2-i\varphi}A(t-T), \quad (5.1)$$

$$\partial_t G = g_0 - \gamma_g G - e^{-Q}(e^G - 1)|A|^2, \quad (5.2)$$

$$\partial_t Q = q_0 - \gamma_q Q - s(1 - e^{-Q})|A|^2. \quad (5.3)$$

Здесь коэффициенты ненасыщенного усиления и поглощения g_0 и q_0 описывают ток инжекции в усиливающей секции и напряжение, приложенное к поглощающей секции, соответственно. $\alpha_{g,q}$ и $\gamma_{g,q}$ - факторы уширения спектральной линии и скорости релаксации плотности носителей в поглощающей и усиливающей секциях, γ - параметр, характеризующий ширину линии спектрального фильтра, $\kappa < 1$ - коэффициент ослабления за проход резонатора, описывающий линейные нерезонансные потери, s - отношение интенсивностей насыщения в усиливающей и поглощающей секциях. Наконец, параметр временного запаздывания T равен времени обхода холодного резонатора.

Вблизи порога генерации, уравнение (5.1) может быть приведено к дифференциальному уравнению в частных производных типа Гинзбурга-Ландау. Эта редукция проясняет связь между моделью (5.1) – (5.3) и известным уравнением Хауса. Важным отличием модели (5.1) – (5.3) от моделей, основанных на уравнении Хауса, является то, что она не предполагает малости усиления и потерь за обход резонатора, слабого насыщения и бесконечно широкой спектральной полосы фильтра. Эти предположения, - в особенности, приближение малых усиления и потерь, - не справедливы для полупроводниковых лазеров. Единственные предположения, которые были использованы при выводе уравнений (5.1) – (5.3), касаются Лоренцевой формы линии спектрального фильтра и однонаправленной генерации в кольцевом лазере. Будучи более общими, чем классические модели, предложенные Нью и Хаусом, уравнения (5.1) – (5.3) включают обе эти модели в качестве предельных случаев. В то же время, решение этих уравнений приводит к результатам, хорошо согласующимся с экспериментальными результатами, типичными для полупроводниковых лазеров. Заметим также, что другая модель, основанная на дифференциальных уравнениях с временными запаздываниями, была ранее предложена Гуревичем и Ханиным для описания динамики твердотельного лазера.

В пределе бесконечной ширины полосы спектрального фильтра, эквивалентном приближению медленного поглотителя, было предложено аналитическое описание режима синхронизации мод, которое остается справедливым и в случае большого усиления и потерь за обход резонатора. В частности, этот подход позволил определить границы устойчивости режима синхронизации мод по критерию Нью, согласно которому параметр интегрального усиления за обход резонатора $G(t) - Q(t) + \ln \kappa$ должен быть отрицательным в течении всего интервала времени между двумя последовательными импульсами, когда амплитуда лазерного поля близка к нулю. Получено условие $s\kappa > 1$, являющееся необходимым для существования импульсов, устойчивых по критерию Нью, и обобщающее известное условие $s > 1$ на случай больших потерь за проход резонатора. Согласно полученным результатам, в диапазоне значений параметров, типичном для

полупроводниковых лазеров, границы неустойчивости импульсов синхронизации мод могут быть весьма хорошо аппроксимированы с помощью обобщения метода Нью.

Было построено аналитическое отображение, описывающее преобразование параметров импульса синхронизации мод после полного обхода резонатора. Нетривиальная неподвижная точка периода один этого отображения соответствует фундаментальному режиму синхронизации мод, а неподвижные точки периода два и больших периодов - гармоническим режимам синхронизации мод. Граница неустойчивости по отношению к пассивной модуляции добротности была найдена как бифуркационное множество в пространстве лазерных параметров, на котором два комплексных мультипликатора неподвижной точки периода один пересекают единичную окружность (бифуркация Неймарка-Сакера). Согласно полученным результатам, эта граница неустойчивости может быть весьма хорошо оценена в рамках подхода, в котором не учитывается спектральная фильтрация лазерного излучения. Однако, такой подход не годится для определения длительности импульса и его частоты повторения. Поэтому для этих целей использовался более реалистичный подход, основанный на вариационном методе. Было обнаружено, что граница неустойчивости пассивной модуляции добротности определяется главным образом произведением двух параметров: отношения интенсивностей насыщения s и коэффициента линейного ослабления за проход κ . При этом, если произведение $s\kappa$ зафиксировано, ее положение почти не зависит от каждого из этих двух параметров по отдельности. Оценки зависимости от лазерных параметров границы неустойчивости пассивной модуляции добротности и области устойчивости режима синхронизации мод находятся в качественном согласии с экспериментальными данными, полученными с монолитными полупроводниковыми лазерами, работающими в режиме пассивной синхронизации мод.

5.3. Численное моделирование и анализ

Вторая группа результатов была получена на основе численного исследования системы дифференциальных уравнений с запаздыванием (5.1) – (5.3), а также более сложных систем с запаздыванием, приспособляющих эту модель для описания лазеров на квантовых точках, и распределенных моделей, учитывающих линейную геометрию лазеров. Изучены бифуркации Андронова-Хопфа режима стационарной генерации и рождающиеся в точках этих бифуркаций решения с периодическими во времени интенсивностями лазерного поля. Показано, что, помимо бифуркации, ответственной за возникновение периодического решения, соответствующего фундаментальному режиму синхронизации мод, существуют бифуркации, приводящие к возникновению гармонических режимов синхронизации мод с периодом повторения импульсов в два, три и большее число раз меньшим времени обхода резонатора (подобные гармонические режимы с частотой повторения в два раза большей, чем у фундаментального режима, наблюдались экспериментально в монолитных полупроводниковых лазерах). Гармонические режимы могут сосуществовать с фундаментальным режимом синхронизации мод, приводя к эффектам гистерезиса, бистабильности и переключений между этими режимами.

Согласно полученным результатам, в кольцевом лазере самые короткие импульсы с самыми высокими пиковыми мощностями наблюдаются в случае, когда факторы уширения спектральной линии в усиливающей и поглощающей секциях равны друг другу, т.е. $\alpha_g = \alpha_q$. Уменьшение α_g относительно α_q приводит к уменьшению пиковой мощности и увеличению ширины импульса. С другой стороны, для $\alpha_g > \alpha_q$ наблюдался новый механизм разрушения режима синхронизации мод, связанный с переходом от

регулярных пульсаций синхронизации мод к хаотическому режиму генерации через перемежаемость. Из результатов численного анализа следует, что для значений факторов уширения спектральной линии отличных от нуля, этот последний механизм является весьма общим, как и известные механизмы, связанные с возникновением неустойчивости на частоте пассивной модуляции добротности, а также переход к гармоническим режимам синхронизации мод с двумя или большим числом импульсов в резонаторе.

Заметим, что критерий устойчивости режима синхронизации Нью имеет качественную природу. Он не учитывает того, что небольшие возмущения могут распространяться в промежутке между импульсами и, в конечном счете, в течение интервала времени порядка γ^{-1} быть поглощены передним или задним фронтом импульса. Это означает, что, даже тогда, когда критерий Нью не выполняется, усиление небольших возмущений не всегда разрушает импульс синхронизации мод. Факт существования устойчивых режимов синхронизации мод с импульсами, имеющими положительное интегральное усиление G на переднем и на заднем фронте, подтверждается численными расчетами. Подобные импульсы являются устойчивыми, но не удовлетворяют критерию устойчивости Нью, и разрушаются при достижении критической мощности шума, достаточной для разрушения режима синхронизации мод.

Дифференциальные уравнения с запаздыванием типа (5.1) – (5.3) были соответствующим образом модифицированы для описания активной и гибридной синхронизации мод и учета таких дополнительных физических эффектов, наблюдаемых в полупроводниковых лазерах, как быстрая нелинейность, связанная с внутризонными процессами релаксации. Кроме того, при определенных условиях, модель (5.1) – (5.3) была обобщена на случай линейного лазера. Была изучены модификации этой модели и модели (5.1) – (5.3), приспособленные для описания пассивной синхронизации мод в полупроводниковом лазере квантовых точек. Эти модификации учитывают процессы обмена между квантовыми точками и основной активной средой.

Был проведен численный анализ следующих моделей.

- Модель (5.1) – (5.3) описывает лазер с кольцевым резонатором. Была предложена распределенная модель пассивной синхронизации мод в лазере с линейной геометрией (основной для приложений), основанная на уравнениях бегущей волны. Была разработана численная схема приближенного интегрирования этой модели, использующая элементы аналитического интегрирования, которая позволила эффективно строить бифуркационные диаграммы в пространстве параметров модели. Было показано, что модели с кольцевой и линейной геометрией приводят в целом к близким бифуркационным диаграммам; были изучены различия, вызванные различием в геометрии резонатора [185].
- Были изучены модификации моделей пассивной синхронизации мод в лазерах с кольцевой и линейной геометрией типа уравнений с задержкой и уравнений в частных производных, обобщающие эти модели для описания процессов в лазерах на квантовых точках.
- Важным методом улучшения параметров импульсного режима генерации является синхронизация лазера к частоте внешнего источника, так называемый метод гибридной синхронизации мод. Синхронизация может осуществляться различными способами, в том числе при помощи вариации приложенного напряжения, либо инъекцией поля из другого лазера. Модели таких систем, полученные естественной модификацией моделей пассивной синхронизации мод в полупроводниковых

лазерах на квантовых точках, были изучены в [50, 135, 162], включая модели с задержкой и распределенные модели.

Для всех указанных моделей были построены бифуркационные диаграммы, позволившие оценить зону устойчивой генерации импульсов в пространстве параметров. Эта зона ограничена границами неустойчивостей (бифуркационными линиями) различного типа. Основными из них являются граница неустойчивости по отношению к пассивной модуляции добротности и переход к субгармоническим режимам генерации с двумя и более импульсами в резонаторе. Результаты находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными, полученными группами в Берлине и Корке.

Был проведен численный анализ чувствительности к возмущениям параметров и изучен эффект изменения различных параметров лазера на размер и положение зоны устойчивой генерации. Полученные результаты позволили сформулировать ряд достаточно простых рекомендаций по дизайну полупроводниковых лазеров на квантовых точках, направленных на улучшение параметров генерируемого сигнала. Был изучен эффект гибридной синхронизации при модулировании приложенного напряжения (тока) [162] и при инжекции света из одномодового и двухмодового лазеров [50, 135] на зону генерации импульсов и их параметры. Показано, что гибридная синхронизация мод приводит к существенному снижению негативного эффекта шума. Получены аналитические и численные оценки конусов синхронизации (языков Арнольда), находящиеся в хорошем согласовании с экспериментом, и изучены бифуркации, приводящие к рас-синхронизации мод. Описано изменение формы импульса при применении гибридной синхронизации мод.

5.4. Публикации по проекту, связанные с моделированием элементов оптических сетей

Основные результаты были опубликованы в следующих поддержанных Грантом статьях: [50, 135, 162, 185].

6. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОБЛЕМ СИНХРОНИЗАЦИИ СИСТЕМ, ВКЛЮЧАЮЩИХ ЭЛЕМЕНТЫ С ПАМЯТЬЮ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

6.1. Рассинхронизованные системы, включающие элементы с памятью

Целью этого раздела является развитие описания нового класса математических моделей, сердцем которых являются рассинхронизованные сети состоящие из элементов с памятью. По нашему мнению этот класс математических моделей имеет значительный потенциал для адекватного описания различных процессов в экономике, биологии, технике и т.д. Мы начнем с простейшей макро-экономической ситуации.

6.1.1. Постановка задачи Макроэкономика традиционно использует различные математические модели. Чтобы сделать эти модели работоспособными. Макроэкономисты вводят упрощающие предположения, ограничиваются разумно малым количеством агрегированных показателей. Характерная черта современных подходов заключается в формулировании гипотез, описывающих динамику процессов на микро-уровне, ведущих к пониманию динамики основных агрегированных характеристик на макро-уровне.

Например, макро-экономические модели могут быть нацелены на лучшее понимание изменения таких характеристик как уровень безработицы, или уровень инфляции в зависимости от шоков вызываемых значительными колебаниями экзогенных воздействий (цены на энергоносители-носители, базовые процентные ставки и так далее).

Отметим, что в отличии от естественных наук, макро-экономические модели редко поддаются прямому экспериментальному тестированию. Математические модели в экономике во многих случаях являются скорее ментальными конструкциями, предлагающими качественные описания ключевых тенденций изменения тех или иных макро-экономических характеристик. Многие современные макроэкономические концепции были выдвинуты в 1870-ых годах. При этом в рамках так называемой неоклассической революции, Edgeworth, Walras, Jevons и другие опирались на аналогии заимствованные из математической физики, в основном из гидромеханики.

В дальнейшем знаменитые экономисты, такие как [152], сконструировали гидро-механические устройства для определения равновесных рыночных цен и моделирования макроэкономических потоков. более 10 Машин Филлипса, или MONIAC-ов, было построено и использовано для целей обучения и анализа/предсказания экономических процессов. См. Рисунок 6.1.

Неоклассические макро-экономические модели были переосмыслены и аксиоматизированы начиная с 1930х годов, однако основополагающие парадигмы остались без существенных изменений. Ключевым аспектом современных подходов является концепция репрезентативных агентов, реагирующих немедленно и обратимо на изменения экономической ситуации. В частности, решения таких экономических агентов могут быть немедленно и бесплатно отменены. Как правило ансамбль репрезентативных агентов не диверсифицирован, и их поведение в естественном смысле синхронизованно. Эта концепция находится в согласии с гидродинамической аналогией. Поведение репрезентативных агентов принимающих решение, например, хранить ли сбережения в форме долларов, или в форме евро, моделируется системой двух соединенных резервуаров. Объем жидкости в каждом из резервуаров соответствует пропорции сбережений в форме долларов и евро соответственно. При этом относительный уровень жидкости определяется макро-экономическими характеристиками (в нашем случае, например, относительным размером базовой процентной ставки для каждой из валют). См. Рисунок 6.2.

Простые соображения демонстрируют неадекватность стандартной концепции ре-

презентативных агентов. Проблема с описанными моделями заключается в предположении, что репрезентативные агенты реагируют на изменение макро-экономической ситуации

- Синхронно
- Однотипно
- Без памяти; в частности, игнорируется память о предыдущих рецессиях и бумах.

В реальности все эти предположения не выполняются.

В следующем подразделе мы прокомментируем роль памяти в весьма актуальном в настоящее время контексте понимания долговременных последствий экономических кризисов.

6.1.2. Проклятия рецессий и благословения бумов Эмпирические данные подтверждают реальность проклятия рецессий. Например, Sahena [64] проанализировал данные Всемирного Банка относительно 192 стран в годах, чтобы выяснить приводит ли восстановление к тренду предшествующему рецессии. В работе Calvo *et al.* [63] проанализировано восстановление экономик развивающихся стран после рецессии в 1980 – 2004 годах, и восстановлению после Великой Депрессии в US в 1929 – 1932 годах. Принципиальное наблюдение заключается в том, что, хотя в обоих случаях в целом промышленное производство достигало пред-кризисных уровней в течение трех-четырех лет, но тренд развития стабилизировался на значительно более низком уровне по сравнению с предкризисными оценками. Одно из следствий этого наблюдения заключается в том, что страны подверженные частым послекризисным рецессиям (например многие Африканские страны) должны иметь более низкое равновесное значение роста их промышленности. В связи с тяжелым кризисом охватившим многие страны в настоящее время представляет интерес оценка предложенная в работе Cerra and Sahena [65] предполагаемых долговременных последствий этого кризиса. В этой работе предсказано, что в ведущих странах через 10 лет после окончания кризиса тренд роста GDP стабилизируется на уровне на 15% ниже чем докризисный тренд. Литература посвященная благословию бумов (boom blessings) посвящена в основном долговременному позитивному эффекту Американского бума 1990-х годов. Работа Caballero *et. al.* [62] посвящена вопросу положительной обратной связи между бумом биржи и ростом промышленного производства.

6.1.3. Модель памяти

Базовый пример Рассмотрим нормализованный случай, в котором единица капитала необходима чтобы произвести единицу продукции. Каждая фирма (или, более реалистично, каждый операционный отдел) стоит перед выбором:

- использовать имеющиеся финансовые ресурсы для фактического производства продукции (активная стратегия),
- временно законсервировать финансовые ресурсы в форме банковского депозита (пассивная стратегия)

Таким образом, каждая фирма или операционный отдел может трактоваться как Элементарный Носитель Экономических Интересов (ЭНЭИ), который переключается между двумя типами поведения: активным и пассивным. Таким образом, в момент времени t текущий уровень $x(t)$ активных фирм/юнитов. По определению, $0 \leq x \leq 1$.

Наша цель заключается в описании динамики $x(t)$ после некоторого начального момента $t_0 = 0$. Пусть, для определенности, $x(0) = 1$. В качестве управляющего (входного) воздействия мы рассматриваем репо ставка, I , определяемая Центральным Банком. Иными словами, переменное управляющее воздействие задается как $I(t) = \{\text{Function of } I(t)\}$. Ниже мы различаем значение функции $I(\tau)$ в момент времени $t \geq 0$, и всю предисторию $I_\tau(\cdot)$, начиная от начального момента времени 0 вплоть до момента τ . Для данного $\tau > 0$ величина $I(\tau)$ – это число, в то время как $I_\tau(\cdot)$ это функция определенная на промежутке $0 \leq t \leq \tau$. Мы предполагаем, что значение $x(\tau)$ в некоторый момент $\tau > 0$ зависит не только от текущего значения $I(\tau)$, но от всей предистории $I_\tau(\cdot)$. Иными словами, динамика изменения доли активных фирм описывается соотношением $\dot{x}(\tau) = \{\text{Function of the prehistory } I_\tau(\cdot)\}$. Отметим, что аналогичное уравнение без памяти, $\dot{x}(t) = F(I(t), x(t))$, в принципе не способно описать эффекты типа проклятия рецессий и благословения бумов, важность которых обсуждалась в предыдущем разделе.

Неидеальное реле как адиабатический предел математического описания памяти индивидуального экономического агента. Рассмотрим индивидуальную фирму ι . Как мы упомянули в предшествующем разделе, свойство фирмы быть в активном или пассивном состоянии включает существенный элемент памяти. Суть этой памяти заключается в том, что уровень $\beta(\iota)$ величины $I(t)$ при котором фирма активизируется, существенно превышает уровень $\alpha(\iota)$ величины $I(t)$ при котором фирма переключается в пассивное состояние. Иными, словами, для значений $I(t) \geq \beta(\iota)$ единственным равновесным состоянием для фирмы ι является активное поведение, в то время как для значений $I(t) \leq \alpha(\iota) < \beta(\iota)$ единственным равновесным состоянием для фирмы ι является пассивное поведение. Для значений $\alpha(\iota) < I(t) < \beta(\iota)$ фирма может быть как в активном так и в пассивном состоянии. Наконец, мы предполагаем, что фирма не изменяет свое состояние пока управляющее воздействие изменяется между указанными порогами

$$\alpha(\iota) < I(t) < \beta(\iota).$$

$R_{\alpha,\beta}$ определенный для данных пороговых значений $0 < \alpha < \beta < 1$. Этот оператор называется неидеальным реле. переменный выход этого оператора

$$z(t) = R_{\alpha,\beta} [t_0, \eta_0] y(t), \quad t \geq t_0,$$

зависит от переменного входа $y(t)$, $t \geq t_0$, и от начального состояния η_0 , которое равно нулю или единице. Неидеальное реле (называемое также гомеостатической нелинейностью) является важным элементарным в теории гистерезисных операторов, см. например [129].

Мы можем теперь сформулировать следующий принцип.

Лемма 6.1. В адиабатическом пределе зависимость динамика индивидуальной фирмы описывается неидеальным реле $R_{\alpha,\beta}$.

Нелинейность Прейсаха как адиабатический предел коллективной памяти

Лемма 6.2. Мы трактуем совокупность всех Элементарных Носителей Экономических Интересов, \mathcal{J} , как бесконечный ансамбль и предполагаем, что индивидуальные представители этого ансамбля функционируют независимо.

Причина для замены очень большого конечного ансамбля на бесконечный чисто техническая: удобнее интегрировать непрерывные функции, чем суммировать длинные конечные выражения. Как мы предположили ранее, каждому индивидуальному элементу $\iota \in \mathcal{J}$ отвечают два пороговых значения $\alpha(\iota)$ and $\beta(\iota)$, удовлетворяющие неравенствам $0 \leq \alpha(\iota) < \beta(\iota) \leq 1$. Предполагается, что для значений управляющего воздействия $I(t) \geq \beta(\iota)$ единственным равновесным поведением является активное, а для значений $I(t) \leq \alpha(\iota)$ единственным равновесным поведением является пассивное. Для $\alpha(\iota) < I(t) < \beta(\iota)$ agent ι может демонстрировать оба типа поведения в зависимости от предистории.

Лемма 6.3. Пары пороговых значений $(\alpha(\iota), \beta(\iota))$, $\iota \in \mathcal{J}$ распределены на ансамбле \mathcal{J} с некоторой плотностью $\mu(\alpha, \beta)$.

Лемма 6.4. Адиабатический предел соответствующего оператора W описывается уравнением

$$(\tilde{W}I)(t) = \int_0^1 \int_{\alpha}^1 z(\alpha, \beta) \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (6.1)$$

$$z(\alpha, \beta) = (R_{\alpha, \beta} I)(t).$$

Этот оператор был первоначально предложен в контексте теории ферромагнетизма см. [142, 156].

6.1.4. Рассинхронизованная модель экономической динамики Утверждение 6.4 применимо в ситуации когда управляющее меняется очень медленно. В этом случае агенты с (почти) одинаковыми пороговыми значениями реагируют на изменения входа (почти) синхронно. В реальности это далеко не так. Момент когда конкретный ЭНЭИ среагирует на изменений входа и перейдет в новое равновесное состояние в большой мере случаен и может существенно отличаться от момента достижения входом соответствующего порогового значения. Описание динамики такой рассинхронизованной системы представляет собой важную и непростую задачу. В этом разделе мы опишем один перспективный подход развитый в рамках настоящего проекта.

Равновесное значение управляющего воздействия (потенциала) Равновесное значение управляющего воздействия определяется как гипотетическое значение входа обладающее следующим свойством. Если $I(t) = y$ для $t \geq \tau$, то доля активных фирм не будет меняться в дальнейшем: $x(t) \equiv x(\tau)$, $t \geq (\tau)$. Разумеется этот гипотетический равновесный уровень в свою очередь зависит от всей предистории рассматриваемой экономической динамики.

Лемма 6.5. В каждый данный момент времени существует единственный равновесное равновесное управляющее воздействие $y = y(\tau)$.

Лемма 6.6. Значение

$$x(t)$$

непрерывно дифференцируемо и его производная $\dot{P}_{Safe}(t)$ в момент времени t пропорциональна разности между фактическим значением управляющего воздействия $I(t)$ и его равновесным значением: $y(t)$:

$$\dot{x}(t) = k(I(t) - y(t)). \quad (6.2)$$

Дифференциально-операторное уравнение (6.2) еще не является замкнутым описанием динамики рассинхронизованной системы с памятью. Чтобы завершить описание нам нужно еще описание зависимости между равновесным значением управления $y(t)$ и текущим фактическим значением управления $x(t)$.

Завершение описания динамики рассинхронизованной системы с памятью Нам остается предложить описание зависимости между функциями $y(\cdot)$ и $x(\cdot)$. Обозначим через Π совокупность всех допустимых пар. Кроме того, для заданного интервала $[0, \tau]$, обозначим через Π_τ подмножество совокупности Π состоящее из пар функций, определенных на этом интервале $0 \leq t \leq \tau$.

Лемма 6.7. *Совокупность Π инвариантна к выбору масштаба времени, т.е. если пара*

$$(x(\cdot), y(\cdot)), \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

принадлежит множеству Π_τ , то для каждого положительного γ пара $(x_\gamma(\cdot), y_\gamma(\cdot))$ определенная равенством

$$(x_\gamma(t), y_\gamma(t)) = (x(\gamma t), y(\gamma t)), \quad 0 \leq t \leq \tau/\gamma$$

принадлежит множеству $\Pi_{\tau/\gamma}$.

Последняя аксиома означает, что шкалирование времени в отношении входа влечет тоже самое шкалирование времени в отношении выхода.

Лемма 6.8. *Для данной функции $y(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, существует единственная функция $x(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, удовлетворяющая включению $(x(\cdot), y(\cdot)) \in \Pi$.*

В математическом смысле последнее Предположение означает, что существует оператор G , который соотносит единственную функцию $x(\cdot)$ ее “компаньону” в Π . From Предположение 6.7, влечет что оператор G должен быть инвариантен по отношению к выбору масштаба времени. Таким образом, соотношение (6.2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= k(I(t) - y(t)), \\ x(\cdot) &= Gy(\cdot) \end{aligned} \tag{6.3}$$

Нам остается предложить форму оператора G . Для этого мы исследуем предельное поведение процесса в “медленном времени”. Для заданных функций $y(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, и $x(\cdot) = Gy(\cdot)$, рассмотрим гипотетическую “медленную” функцию

$$y_\gamma(t) = y(\gamma t), \quad 0 \leq t \leq \tau/\gamma \tag{6.4}$$

для малых значений $\gamma \ll 1$. По Предположению 6.8 существует хорошо определенная функция

$$x_\gamma = Gy_\gamma.$$

Более того, по Предположению 6.7 Эта функция удовлетворяет равенству

$$x_\gamma(t) = x(\gamma t).$$

В частности существует вход $I_\gamma(t)$, такой что

$$\dot{x}_\gamma(t) = k(I_\gamma(t) - y_\gamma(t)), \tag{6.5}$$

$$x_\gamma(\cdot) = Gy_\gamma(\cdot). \tag{6.6}$$

Поскольку все процессы очень медленные, производная \dot{x}_γ очень мала. Таким образом, для достаточно малых γ должно выполняться соотношение

$$I_\gamma(t) \approx y_\gamma(t).$$

С другой стороны функция $x_\gamma(\cdot)$ удовлетворяет соотношениям

$$x_\gamma(\cdot) = WI_\gamma(\cdot) \approx GI_\gamma(\cdot) \quad (6.7)$$

(поскольку $I_\gamma(t) \approx y_\gamma(t)$.) Напомним, что мы нашли этот предел в разделе 6.1.3 (см. Предложение 6.4). Таким образом верно следующее утверждение:

Лемма 6.9. *Оператор G совпадает с оператором (6.1)*

Используя (6.6) и (6.7), мы приходим к равенству

$$(Gy_\gamma)(t) = \int_0^1 \int_\alpha^1 z(\alpha, \beta) \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (6.8)$$

$$z(\alpha, \beta) = (R_{\alpha, \beta} y_\gamma)(t).$$

Таким образом, наша система уравнений может быть записана в форме

$$\dot{x}(t) = k(I(t) - y(t))$$

$$x(t) = \int_0^1 \int_\alpha^1 z(\alpha, \beta) \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (6.9)$$

$$z(\alpha, \beta) = (R_{\alpha, \beta} y_\gamma)(t).$$

Для выбранной плотности $\mu(\alpha, \beta)$ это замкнутая система дифференциально-операторных уравнений. В численных экспериментах ниже мы используем так-называемую клин-плотность.

6.2. Динамика рассинхронизованных систем, содержащих элементы с памятью

В этом разделе мы проиллюстрируем основные качественные особенности поведения введенного выше класса рассинхронизованных систем, включающих элементы с памятью. Мы сосредоточимся на уравнениях связанных с моделированием макроэкономических потоков.

Рассмотрим уравнение (6.9), переписанное в более компактном виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= k(I(t) - y(t)) \\ x(t) &= (\mathcal{P}[\eta_0]y)(t) \end{aligned}$$

Это уравнение связывает поведение трех компонент макроэкономической динамики: $I(t)$ описывает входное или управляющее воздействие; $y(t)$ соответствует равновесному значению потенциала; наконец $x(t)$, описывает агрегированный уровень активности экономических агентов.

Типичная траектория рассматриваемой системы изображена на Рисунке 6.3. Наиболее важные черты этой траектории следующие.

- Обе величины $x(t)$ и $y(t)$ меняют направление своего изменения в один и тот же момент времени. Иными словами, $y(t_0)$ является локальным экстремумом функции $y(t)$ если и только если $x(t_0)$ является локальным экстремумом функции $x(t)$.

- График функции $y(t)$ изменяет направление в те моменты времени, когда он пересекает график функции. Это наблюдение означает также, что точки разворота функций y и x запаздывают по отношению к точкам разворота функции I .
- Функция $y(t)$ теряет гладкость в точках разворота.
- Система имеет множественные состояния равновесия.

Отмеченная выше асимметрия поведения величины $y(t)$ представляет несомненный интерес, поскольку асимметричное поведение такого типа характерно для динамики ряда важных макроэкономических индикаторов, см. Рисунок 6.4.

6.2.1. Периодические входы Рассмотрим подробнее поведение системы (6.9) по отношению к периодическим входным воздействиям. Этот случай представляет особый интерес в контексте макро-экономической динамики, поскольку циклы различных период (от одного до примерно пятидесяти лет) хорошо известны в этой области.

Для данного периодического входа, $I(t + T) = I(t)$, соответствующие сигналы $x(t)$ and $y(t)$, становятся периодическими с тем же периодом после длительного переходного процесса.

- *Поведение равновесного потенциала y по отношению к периодическому входу I*

Типичный переходный процесс показан на Рисунке 6.5. Видно, что траектория довольно быстро сходится к предельной замкнутой петле. Эта петля не зависит от начального состояния системы при $t = 0$, а целиком определяется входом $I(t)$.

- Зависимость предельных $I - y$ петель от частоты периодического входного воздействия показано на Рисунке 6.6. Эти петли в первом приближении похожи на эллипсы, но демонстрируют некоторую “угловатость” в районе самой высокой и самой низкой точек. Очевидно, равновесный потенциал y более выражено реагирует на медленно меняющийся вход.

- *Поведение $x - I$ петель*

Переходный процесс для этого случая показан на Рисунке 6.7. В этом случае разные начальные состояния могут приводить к разным предельным петлям.

Эти петли имеют одинаковую форму, но сдвинуты относительно друг друга по вертикали.

Зависимость $I - x$ петель от частоты входного воздействия показана на Рисунке 6.8.

- *Петли $x - y$* Типичные петли, демонстрирующие зависимость между величинами x и y , показаны на рисунке 6.9.

Зависимость площади этих петель от частоты входа показана на Рисунке 6.10.

6.2.2. Влияние кратковременных шоков Как было указано выше, экономическая ситуация “не забывает” предшествующие периоды рецессий и бумов.

В нашей модели это свойство отражено тем, что, даже в отдаленном будущем, выход $x(t)$ существенно зависит от начального состояния системы, в то время как равновесный потенциал быстро забывает предысторию, см. Рисунок 6.11.

6.2.3. Заключение Предложенная модель является моделью принципиально нового типа. Роль этой модели заключается в то чтобы учесть эффекты памяти и рассинхронизации в описании макроэкономической динамики. Мы развили наш подход исходя из первых принципов. Для того чтобы применить этот подход к анализу конкретных экономических систем, предстоит еще большая работа. Ключевым и самым трудным этапом этой будущей работы является, по-видимому идентификация соответствующих плотностей в интеграле (6.8).

6.3. Разработка программного обеспечения, реализующего устойчивые алгоритмы моделирования новых классов рассинхронизованных систем

Под руководством проф. Рачинского был создан комплекс программ реализующих устойчивые алгоритмы моделирования новых классов рассинхронизованных систем. Эти программы доступны online по адресу:

<http://euclid.ucc.ie/appliedmath/podes/index.html>

Этот комплекс программ предназначен для численного моделирования систем уравнений вида

$$\begin{cases} \beta x'(t) + \varepsilon(\mathcal{P}x)'(t) = f(t, x(t), \mathcal{P}x(t), \mathbf{y}(t)), \\ \mathbf{y}'(t) = \mathbf{g}(t, x(t), \mathcal{P}x(t), \mathbf{y}(t)), \end{cases} \quad (6.10)$$

где $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{g} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, f, \mathbf{g} – это гладкие функции. Как было показано выше, именно такие уравнения описывают динамику широких классов асинхронных систем включающих элементы с памятью. Отметим следующие возможности разработанного комплекса программ.

- возможность выбирать входные/управляющие сигналы из всех практически важных классов;
- возможность выбирать параметры сопутствующих численных алгоритмов (величину шага и т.д.);
- возможность вводить формулы для функций f, \mathbf{g} используя стандартные математические обозначения, такие как $\sin, \cos, \exp, \text{pow}, \dots$ арифметические операторы $*, +, -, /$, и т.д.
- ability to use uniform measure, to enter the necessary formulas for the measure using the provided inputs, or to import your measure as a Java class.
- возможность менять формат выходных данных, импортировать данные, используя стандартные классы языка Java и прочее.

6.4. Публикации по проекту, относящиеся к развитию описания нового класса математических моделей, сердцем которых являются рассинхронизованные сети состоящие из элементов с памятью.

Основные результаты по этой тематике были опубликованы в следующих поддержанных Грантом статьях: [39, 71, 89, 180].

7. РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ, БИФУРКАЦИЙ И СИНХРОНИЗАЦИИ РАССИНХРОНИЗОВАННЫХ СИСТЕМ

7.1. Постановка задачи

Основным объектом исследования настоящего раздела являлись системы, описанные в главе 2 "Исследование проблем синхронизации систем, включающих элементы с памятью и запаздыванием". Речи идет о моделях сетей достаточно общего вида, в которых отдельные элементы моделируются простыми преобразователями, например неидеальными реле с двумя состояниями, динамика которых определяется как общим внешним входом, так и интегральной характеристикой состояний всех элементов системы, то есть интегральной глобальной обратной связью, синхронизирующей функционирование этих элементов.

В качестве прототипа подобных систем изучалось уравнение

$$\frac{d(Px)}{dt} = f(t, x, u(t)), \quad (7.1)$$

в котором P — это оператор Пре́йзаха. В этом уравнении $u(t)$ является внешним входом; $(Px)(t)$ — это агрегированный выход компонент системы, моделируемых неидеальными реле; $x(t)$ — вход этих компонент; f — линейный или нелинейный преобразователь. Таким образом уравнение (7.1) динамически связывает скорость изменения агрегированного выхода системы с ее текущим состоянием и текущим значением входа. Если f не зависит от x , то обратная связь в системе отсутствует.

Отметим, что оператор Пре́йзаха делает систему негладкой. Состояние системы бесконечномерно, причем пространство состояний не обладает линейной структурой. В связи с этим при исследовании колебаний, устойчивости, бифуркаций и задач о синхронизации системы (7.1) необходима разработка новых методов, альтернативных классическим методам исследования гладких систем, основанным на теоремах о центральном многообразии, редукции размерности, полиномиальных разложениях нелинейностей, использовании интегральных многообразий и теории нормальных форм.

Отметим также, что уравнение (7.1) имеет ясную интерпретацию в контексте задач экономики и гидрологии (потoki в пористых средах). Подобные аналогии полезны при его анализе.

7.2. Устойчивость систем с отрицательными обратными связями

В качестве первого естественно возникающего класса систем (7.1) рассматривались системы, где все глобальные обратные связи отрицательны. Это означает, что функция f убывает по переменной x . Было показано, что такие системы обладают глобально устойчивой динамикой. В том числе, изучались системы с периодическим внешним входом $u(t)$. Показано, что, если функция $f(t, x, u(t))$ отрицательна на всем периоде при достаточно больших x и положительна при достаточно больших по абсолютной величине отрицательных x , то уравнение (7.1) имеет глобально асимптотически устойчивое периодическое решение. Отметим, что периодичность включает периодическую динамику состояний всех элементов системы [177].

Устойчивость систем (7.1) со стохастическими входами $u(t)$ изучена в [79].

Эффективные методы численного моделирования уравнения (7.1) с детерминированными или стохастическими входами основаны на использовании его регуляризации

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} + \frac{d(Px)}{dt} = f(t, x, u(t)),$$

сглаживающей производную решения x в точках ее разрыва. Такие точки возникают при каждом пересечении решением линий $f(t, x, u(t)) = 0$ на плоскости (t, x) . Сходимость решений регуляризованного уравнения к решениям уравнения (7.1) обоснована в [177].

7.3. Бифуркации в системах с положительной обратной связью

Положительные обратные связи могут дестабилизировать систему (7.1) и приводить к возникновению бифуркаций периодических режимов функционирования, неустойчивостям различного типа, сосуществованию нескольких устойчивых режимов и другим динамическим эффектам, см., например, рис. 7.1, 7.2. Анализ качественного поведения решений задачи Коши для таких систем, включая условия существования, единственности и нелокальной продолжимости решений, анализ поведения решений вблизи точек разрыва их производной, условия непрерывной зависимости решений от начальных данных (включающих начальное состояние всех компонент системы, то есть начальное состояние оператора Пре́йзаха) и локализацию зон чувствительности по отношению к возмущениям начальных данных и параметров проведен в [141].

Был предложен локальный метод исследования устойчивости периодических режимов системы (7.1) по отношению к широкому классу возмущений начальных данных (включающих возмущение бесконечномерного начального состояния нелинейности Пре́йзаха), приводящий к простым критериям бифуркации периодического режима типа седло-узла, показанного на рис. 7.2. Эти критерии полезны при численном построении решений методом продолжения по параметру и локализации точек бифуркации.

Точность численного решения уравнения (7.1) может быть повышена применением специальных численных процедур, основанных на асимптотических формулах для скачка производной решения в точках ее разрыва. Такие формулы выведены в [141].

Близкие к (7.1) системы с быстрой релаксацией состояний изучены в [155], где рассматривались сети бинарных компонент, взаимодействующие на трех различных шкалах времени. Самым быстрым предполагалось взаимодействие элемента сети с соседними элементами; такие локальные взаимодействия предполагались негативными (соседние элементы стремятся перейти в противоположные состояния). Входно-выходная характеристика такой системы в целом при определенных предположениях может моделироваться сингулярной функцией фрактальной структуры типа Канторовской функции. Более медленным предполагалось глобальное взаимодействие типа среднего поля, моделировавшееся глобальной положительной обратной связью. Изменение входа системы характеризовалось третьей самой медленной временной шкалой, по сравнению с которой обмен информации в канале обратной связи происходит быстро с малой задержкой. Было показано, что положительная обратная связь приводит к эффекту дискретизации состояний системы. Получено количественное описание входно-выходного соотношения системы в целом, являющееся специальным классом дискретных операторов Пре́йзаха.

7.4. Синхронизация систем и сетей с симметриями

В естественных ситуациях сети однотипных элементов обладают симметриями. Исследование бифуркаций и синхронизации таких систем требует применения специальных методов. В достаточно общей постановке речь идет о многокомпонентной системе, где каждая компонента является осциллятором. При этом система связанных осцилляторов симметрична (эквивариантна) по отношению к некоторой группе перестановок

компонент.

Основное внимание было уделено задаче о бифуркации Хопфа, то есть рождении циклов из положения равновесия при изменении параметров системы (не нарушающем ее симметрии). При сохранении эквивариантности эта задача, как правило, характеризуется наличием множественных ветвей циклов, причем циклы принадлежащие каждой ветви инвариантны относительно определенной подгруппы полной группы симметрий. Например, если цикл инвариантен относительно полной группы симметрий, то все его компоненты идентичны, то есть все осцилляторы функционируют синхронно. Если цикл инвариантен относительно подгруппы симметрий, не совпадающей с полной группой, то часть осцилляторов функционирует синхронно, а остальные "бездействуют".

Изучались системы, в которых каждый осциллятор содержит компоненту с памятью, моделируемую оператором Прейзаха и, следовательно, негладкую. В связи с этим потребовалось найти альтернативу гладким методам анализа эквивариантных систем. Был разработан метод исследования бифуркации Хопфа, основанный на использовании топологической степени Баланова - Кравцевича, предложенной недавно и приспособленной для анализа симметрических систем [43, 88]. Таким образом, эти исследования тесно связаны с задачами, изучавшимися в главе 2. Они также примыкают к исследованиям бифуркации Хопфа, проводившимся в главе 1 для индивидуальных оптических осцилляторов (лазеров).

Предложенный метод позволяет определять точки бифуркации Хопфа, оценить число рождающихся ветвей циклов для каждой точки бифуркации и классифицировать ветви в соответствии с подгруппами симметрий, оставляющими инвариантными составляющие ветвь циклы. Он также обеспечивает частичную информацию, полезную при анализе устойчивости и асимптотики циклов. Метод носит достаточно общий характер в задачах о бифуркации Хопфа для эквивариантных систем связанных осцилляторов, содержащих элементы с памятью.

Поясним полученные результаты на примере сети из восьми связанных идентичных осцилляторов Ван дер Поля, обладающей октагональной симметрией, в которой каждый осциллятор содержит элемент с памятью типа оператора Прейзаха. В этой электрической реализации осциллятор Ван дер Поля с памятью типа нелинейности Прейзаха возникает, например, при введении ферромагнитного элемента в индуктивную компоненту каждого осциллятора вследствие возникающей гистерезисной зависимости между магнетизацией элемента и напряженностью приложенного магнитного поля.

Уравнения, описывающие динамику такой системы, выписываются стандартным образом; для электрической реализации используются законы Кирхгофа, которые дополняются операторными соотношениями между магнетизацией и напряженностью магнитного поля в индуктивностях в форме оператора Прейзаха. Показано, что подобная система имеет 4 точки бифуркации Хопфа из нулевого положения равновесия при изменении скалярного параметра (например, сопротивления проводов, соединяющих осцилляторы). В двух из этих точек бифуркации рождается по одной ветви циклов, обладающих полной группой симметрий. В каждой из оставшихся двух точек бифуркации рождается по 27 ветвей циклов, характеризующихся различными симметрическими свойствами, которые полностью описаны. Результаты частично основаны на недавних работах авторов, посвященных анализу бифуркации Хопфа и исследованию глобального поведения рождающейся (единственной) ветви циклов для индивидуального осциллятора Ван дер Поля, содержащего элемент памяти.

7.5. Публикации по проекту, связанные с разработкой методов исследования колебаний, бифуркаций и синхронизации рассинхронизованных систем

Основные результаты были опубликованы в следующих поддержанных Грантом статьях: [43, 79, 88, 141, 155, 177, 182].

8. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ АЛГОРИТМОВ СИНТЕЗА УСТОЙЧИВЫХ РАССИНХРОНИЗОВАННЫХ СИСТЕМ И АЛГОРИТМОВ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ УСТОЙЧИВОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

8.1. Постановка задачи

При исследовании распределенных вычислений моделирующих динамики полетов нескольких беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) в связке возникает задача слежения одного аппарата за другим. Основная трудность заключается в том, что перестроение ведомого БПЛА относительно ведущего происходит со значительным запаздыванием. Целью данной работы является моделирование системы слежения с введением дополнительных размерностей в дифференциальное уравнение, моделирующее динамику полета БПЛА.

8.2. Разностные уравнения и результаты моделирования

В упрощенном виде динамику изменения высоты полета беспилотного летательного аппарата можно представить дифференциальным уравнением третьего порядка. Разностная схема для такого уравнения будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \alpha x_1(t) - k_1 x_2(t) + (x_{in}(t+1) - x_3(t)) \\ x_2(t+1) = x_2(t) + x_1(t)\delta t \\ x_3(t+1) = x_3(t) + x_2(t)\delta t \end{cases}$$

где x_3 – наблюдаемая координата БПЛА (высота), $x_2 = \frac{dx_3}{dt}$ – скорость изменения высоты, $\delta t = 0.1c$ – дискретное время пересчета координат.

Рассмотрим ситуацию с двумя беспилотными летательными аппаратами – ведущим и ведомым. В этом случае ставится задача слежения одного аппарата за другим. На вход системы слежения ведомого БПЛА поступает значение координаты x_3 ведущего. При этом наблюдается значительное запаздывание изменения значения x'_3 (высоты ведомого аппарата) по сравнению с x_3 . Результаты моделирования приведены на рис. 8.1.

Таким образом, динамика полета двух летательных аппаратов моделируется распределенными вычислениями, где уравнения беспилотных аппаратов описываются разностными уравнениями шестого порядка с независимыми интервалами дискретизации $\delta t = 0,1$ сек и независимым интервалом наблюдения за координатами ведущего с интервалом 0,5 сек. Попытаемся изменить динамику системы из двух беспилотников так, чтобы повысить точность слежения ведомого за изменением координат ведущего. Для этого расширим фазовое пространство системы. Для удобства реализации будем повышать порядок фазового пространства системы, описывающей динамику полета ведомого. Заметим, что в рассматриваемом примере рассинхронизованная система устойчива, поэтому попытаемся скорректировать динамику системы, расширив фазовое пространство незначительно. В отличие от примера в главе 1, где фазовое пространство было расширено на 5 порядков, в нашем случае удовлетворительных результатов удастся добиться, повысив порядок уравнений описывающих динамику системы всего на два порядка. Таким образом, динамика полета ведомого будет описываться уравнениями пятого порядка (см. уравнения ниже). Ошибку слежения ведомого за изменением высоты ведущего

$$[x_3(t+1) - x'_3(t)]$$

будем минимизировать подбором коэффициентов γ_1, γ_2 в уравнениях расширения фазового пространства. Результаты моделирования динамики слежения в расширенном

фазовом пространстве приведены на рис 8.4. Этот пример показывает, что метод расширения фазового пространства является эффективным инструментом изменения качества переходных процессов в рассинхронизованных системах. Заметим, что в классической теории управления аналогичные результаты достигаются с помощью введения корректирующих фильтров, т.е. расширения фазового пространства системы. Существенным отличием от синтеза корректирующих фильтров в синхронных системах является необходимость учета эффекта рассинхронизации и необходимость учитывать синхронизацию вычисления отдельных элементов расширенной системы с вычислениями в исходной системе. К сожалению, это обстоятельство в ряде случаев приводит к необходимости существенного повышения размерности фазового пространства рассинхронизованной системы по сравнению с синхронной.

Для более точного слежения x'_3 за x_3 можно применить следующий метод: скорректировать фазовое пространство, добавив в него дополнительные координаты. Физически это означает включение дополнительного фильтра второго порядка перед устройством слежения ведомого аппарата, который будет подавать на вход устройства слежения оценку скорости изменения наблюдаемой координаты.

Разностные уравнения для расширяющего фильтра будут выглядеть следующим образом:

Координата \hat{x}_2 данного фильтра второго порядка осуществляет слежение за скоростью x_2 изменения высоты x_3 , в то время как координата \hat{x}_3 следит собственно за высотой x_3 (см. рис. 8.2 и 8.3).

$$\begin{cases} x'_1(t+1) = \alpha x'_1(t) - k_1(x'_2(t) - \hat{x}_2(t)) + (x_3(t+1) - x'_3(t)) \\ x'_2(t+1) = x'_2(t) + x'_1(t)\delta t \\ x'_3(t+1) = x'_3(t) + x'_2(t)\delta t \end{cases},$$

что вкуче с разностной схемой фильтра

$$\begin{cases} \hat{x}_2(t+1) = \hat{x}_2(t) + \gamma_1(x_3(t+1) - \hat{x}_3(t)) \\ \hat{x}_3(t+1) = \hat{x}_3(t) + \hat{x}_2(t)\delta t + \gamma_2(x_3(t+1) - \hat{x}_3(t)) \end{cases}$$

дает дифференциальное уравнение пятого порядка.

8.3. Публикации по проекту

Основные результаты планируется опубликовать осенью 2010 года в журнале "Автоматика и телемеханика".

9. ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ПЕРЕФОРМУЛИРОВКА КРИТЕРИЕВ КУО V-ДОСТАТОЧНОСТИ РОСТКОВ ОТОБРАЖЕНИЙ

9.1. Постановка задачи

Многие задачи теории динамических систем и нелинейного анализа, зависящие от параметров, сводятся к исследованию структуры множества решений нелинейных уравнений, число переменных в которых превосходит число уравнений. Такого рода уравнения, как правило, оказываются достаточно сложными и нуждаются в того или иного рода упрощении для проведения их анализа. При этом такого рода “упрощение” может привести как к правильным так и к ложным выводам о структуре множества решений исходного уравнения. Часто интерес представляют не все решения соответствующих уравнений, а лишь так называемые малые решения. В этом случае одним из наиболее простых и популярных способов упрощения уравнений является их усечение, т.е. отбрасывание в тейлоровских разложениях соответствующих уравнений слагаемых высоких степеней. В настоящем разделе предлагаются полиномиальные необходимые и достаточные условия, позволяющие судить о том, в каких случаях метод усечения вещественных нелинейных уравнений допустим.

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — отображение, удовлетворяющее условию $f(0) = 0$. Рассмотрим множество решений уравнения

$$f(x) = 0. \quad (9.1)$$

Даже локально, в окрестности нулевой точки, это множество в общем случае может иметь достаточно сложную структуру. Как обычно, отображение f будем называть C^k -гладким, если все его компоненты имеют непрерывные частные производные до порядка k включительно. Если $f \in C^k$ в некоторой окрестности начала координат, то для каждого $r \leq k$ определен полином Тейлора $f^{(r)}(x)$ отображения $f(x)$ в точке $x = 0$, который будет называться r -усечением отображения $f(x)$. Переход от уравнения (9.1) к усеченному уравнению

$$f^{(r)}(x) = 0 \quad (9.2)$$

аналогичен анализу устойчивости по первому приближению в теории устойчивости или анализу бифуркаций по линеаризованным уравнениям в нелинейном анализе. Как показывает следующий пример, множества решений уравнений (9.1) и (9.2) могут оказаться топологически различными.

Пример 9.1. Отбросим в следующих уравнениях

$$x_1^2 - 2x_1x_2^2 + x_1^4 + x_2^4 + x_2^8 = 0, \quad x_1^2 - 2x_1x_2^2 + x_1^4 + x_2^4 - x_2^8 = 0$$

слагаемые выше 4-го порядка, т.е. произведем 4-усечение их левых частей. Тогда оба усеченных уравнения

$$x_1^2 - 2x_1x_2^2 + x_1^4 + x_2^4 = (x_1 - x_2^2)^2 + x_1^4 = 0$$

будут совпадать между собой и иметь единственное решение $x_1 = x_2 = 0$. Первое из полных уравнений также имеет то же самое единственное решение, $x_1 = x_2 = 0$, в то время как второе из полных уравнений имеет континуум решений, $x_1 = x_2^2$. Таким образом, усечение уравнений не всегда возможно, если мы интересуемся вопросом о структуре множества решений.

В свете приведенного примера естественно возникает вопрос о том, при каких условиях структура множества решений усеченного уравнения $f^{(r)}$ подобна структуре мно-

жества решений полного уравнения f . Эта проблема родственна проблеме достаточности струй отображений, которая, грубо говоря, заключается в поиске условий, при которых все отображения с одинаковым усечением имеют “одинаковую структуру”.

Следуя [47], напомним некоторые определения и результаты, относящиеся к проблеме достаточности струй отображений. Обозначим через $\mathcal{E}_{[k]}(n, m)$ множество ростков отображений $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ класса C^k . При каждом $r \leq k$ через $j^r f(0)$ обозначим r -струю отображения $f \in \mathcal{E}_{[k]}(n, m)$ в точке $0 \in \mathbb{R}^n$, которая может быть отождествлена с полиномом $f^{(r)}$, а через $J^r(n, m)$ обозначим множество всех r -струй отображений из $\mathcal{E}_{[k]}(n, m)$. Отображения $f, g \in \mathcal{E}_{[k]}(n, m)$ называются C^0 -эквивалентными, если существует такой локальный гомеоморфизм $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$, что $f = g \circ h$. Кроме того, отображения $f, g \in \mathcal{E}_{[k]}(n, m)$ называются v -эквивалентными (соответственно, sv -эквивалентными), если росток множества $f^{-1}(0)$ в точке $0 \in \mathbb{R}^n$ гомеоморфен ростку множества $g^{-1}(0)$ в точке $0 \in \mathbb{R}^n$ (соответственно, существует такой локальный гомеоморфизм $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$, что $h(f^{-1}(0)) = g^{-1}(0)$). При каждом $r \leq k$ струя $w \in J^r(n, m)$ называется C^0 -достаточной (соответственно, v -достаточной, sv -достаточной) в $\mathcal{E}_{[k]}(n, m)$, если любые два отображения $f, g \in \mathcal{E}_{[k]}(n, m)$ с $j^r f(0) = j^r g(0) = w$ являются C^0 -эквивалентными (соответственно, v -эквивалентными, sv -эквивалентными).

Очевидно, C^0 -достаточность струй влечет из sv -достаточность, в то время как последнее свойство влечет их v -достаточность. На самом деле, согласно [183] v -достаточность равносильна sv -достаточности.

В случае функций (т.е. при $m = 1$) имеет место следующий критерий C^0 -достаточности, установленный Н. Койпером, Т. Куо, Я. Бочнаком и С. Лоясиевичем в [58, 130, 131].

Теорема 9.2. *Струя $j^r f(0)$ отображения $f \in \mathcal{E}_{[r]}(n, 1)$ является C^0 -достаточной в $\mathcal{E}_{[r]}(n, 1)$ тогда и только тогда, когда найдутся такие положительные числа C, ε , что*

$$|\text{diag } f(x)| \geq C|x|^{r-1} \quad \text{при } |x| < \varepsilon. \quad (9.3)$$

Струя $j^r f(0)$ отображения $f \in \mathcal{E}_{[r+1]}(n, 1)$ является C^0 -достаточной в $\mathcal{E}_{[r+1]}(n, 1)$ тогда и только тогда, когда найдутся такие положительные числа $C, \delta, \varepsilon > 0$, что

$$|\text{diag } f(x)| \geq C|x|^{r-\delta} \quad \text{при } |x| < \varepsilon. \quad (9.4)$$

В [47] доказано, что условие Койпера-Куо (9.3) равносильно следующему условию Тома: существуют такие числа $K, \varepsilon > 0$, что

$$\sum_{i < j} \left| x_i \frac{\partial f}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2 + |f(x)|^2 \geq K|x|^{2r} \quad \text{при } |x| < \varepsilon. \quad (9.5)$$

Проверка как условий Койпера-Куо (9.3) и (9.4), так и условия Тома (9.5), может быть сведена к проблеме оценки скорости роста полиномиальных функций в окрестности их корней, которая в свою очередь равносильна вычислению так называемого показателя Лоясиевича полинома. Напомним, что согласно теореме Лоясиевича [30, 136, 137] для любого полинома $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющего условию $p(0) = 0$, существуют такие константы $C, \kappa > 0$, что

$$|p(x)| \geq C|x|^\kappa$$

в некоторой окрестности нулевого корня. Наименьшее κ , для которого выполняется приведенное выше неравенство, называется *локальным показателем Лоясиевича* полинома p и обозначается через $\mathcal{L}_0(p)$. Если нулевой корень полинома p изолирован, тогда

такое наименьшее κ существует и является рациональным числом [8, 30, 136, 137]. Более того, в этом случае $\mathcal{L}_0(p) \leq (d-1)^n + 1$ [86], где d — степень полинома p . Оценке показателя Лоясиевича посвящены многочисленные исследования, см., например, [38, 66, 72, 80, 81, 86, 98, 134] и библиографию в этих работах.

В случае общих отображений (т.е. при $n \geq m$) критерий v -достаточности (что равносильно sv -достаточности) был установлен Т. Куо [132].

Теорема 9.3. *Струя $j^r f(0)$ отображения $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{E}_{[r]}(n, m)$, где $n \geq m$, является v -достаточной (или, что равносильно, sv -достаточной) в $\mathcal{E}_{[r]}(n, m)$ тогда и только тогда, когда найдутся такие числа $C, \varepsilon, \sigma > 0$, что*

$$\mathcal{D}(\text{diag } f_1^{(r)}(x), \text{diag } f_2^{(r)}(x), \dots, \text{diag } f_m^{(r)}(x)) \geq C|x|^{r-1} \quad (9.6)$$

в $\mathcal{H}_r(f^{(r)}; \sigma) \cap \{|x| < \varepsilon\}$.

Струя $j^r f(0)$ отображения $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{E}_{[r+1]}(n, m)$, где $n \geq m$, является v -достаточной (или, что равносильно, sv -достаточной) в $\mathcal{E}_{[r+1]}(n, m)$ тогда и только тогда, когда для каждого полиномиального отображения $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)$ степени $r+1$, удовлетворяющего условию $j^r g(0) = j^r f(0)$, найдутся такие числа $C, \delta, \varepsilon, \sigma > 0$ (все зависящие от g), что

$$\mathcal{D}(\text{diag } f_1^{(r)}(x), \text{diag } f_2^{(r)}(x), \dots, \text{diag } f_m^{(r)}(x)) \geq C|x|^{r-\delta} \quad (9.7)$$

в $\mathcal{H}_{r+1}(g; \sigma) \cap \{|x| < \varepsilon\}$.

В приведенной теореме $\mathcal{H}_s(f; \sigma)$ обозначает так называемую рогообразную окрестность множества $f^{-1}(0)$,

$$\mathcal{H}_s(f; \sigma) = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| < \sigma|x|^s\},$$

а функция $\mathcal{D}(v_1, \dots, v_m)$ определяется равенством

$$\mathcal{D}(v_1, \dots, v_m) = \min_i \{\text{расстояние от } v_i \text{ до } V_i\} \quad (9.8)$$

где V_i — линейная оболочка векторов v_j , $j \neq i$.

К сожалению, проверка условий Куо (9.6) и (9.7) более сложна, чем проверка условий Койпера-Куо (9.3), (9.4) или условия Тома (9.5). Одна из проблем здесь, не самая главная, заключается в том, что функция $\mathcal{D}(v_1, \dots, v_m)$ определяется с помощью неявной формулы, что вызывает сложности при практическом вычислении ее значений. Более серьезной проблемой является то, что оценку значений функции

$$\mathcal{D}(\text{diag } f_1^{(r)}(x), \text{diag } f_2^{(r)}(x), \dots, \text{diag } f_m^{(r)}(x))$$

при проверке условия (9.6) необходимо проводить не в окрестности нуля, а в некоторой рогообразной окрестности множеств $(f^{(r)})^{-1}(0)$ или $g^{-1}(0)$ которые априорно неизвестны. Наконец, в случае v -достаточности в $\mathcal{E}_{[r+1]}(n, m)$ необходимо проверять выполнение условия (9.7) не в какой-либо одной рогообразной окрестности, а в целом семействе таких окрестностей, определяемых бесконечным числом полиномиальных отображений g степени $r+1$, удовлетворяющих соотношению $j^r g(0) = j^r f(0)$.

Не зная о работах Н. Койпера, Т. Куо, Я. Бочнака и С. Лоясиевича, автор предложил в [9] несколько отличный (в несколько иных терминах) критерий sv -достаточности ростков отображений, полное доказательство которого позднее было приведено в [31, гл. 8].

Теорема 9.4. Струя $j^r f(0)$ отображения $f \in \mathcal{E}_{[r]}(n, m)$, где $n \geq m$, $r \geq 2$, является sv -достаточной в $\mathcal{E}_{[r]}(n, m)$ тогда и только тогда, когда найдется такое число $q > 0$, что

$$|f^{(r)}(x)|^2|y|^2 + |(df^{(r)})^*(x)y|^2|x|^2 \geq q|x|^{2r}|y|^2 \quad (9.9)$$

для малых x всех y .

Струя $j^r f(0)$ отображения $f \in \mathcal{E}_{[r+1]}(n, m)$, где $n \geq m$, $r \geq 1$, является sv -достаточной в $\mathcal{E}_{[r]}(n, m)$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{|f^{(r)}(x)|^2|y|^2 + |(df^{(r)})^*(x)y|^2|x|^2}{|x|^{2r+2}|y|^2} \rightarrow \infty \quad (9.10)$$

при $x \rightarrow 0$, $x \neq 0$, равномерно по всем $y \neq 0$.

В приведенной теореме $(df)^*(x)$ обозначает матрицу, сопряженную к $df(x)$. Очевидно, матрица $(df)^*(x)$ состоит из m векторов-столбцов $\text{diag } f_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, m$. Если норма $|\cdot|$ в теореме 9.4 евклидова, то все функции в соотношениях (9.9), (9.10) полиномиальны. Следовательно, для проверки условий (9.9), (9.10) может быть применена техника оценки показателей Лоясиевача, упоминавшаяся выше. Стандартными рассуждениями [8, 137] может быть показано, что (9.10) на самом деле равносильно следующему условию, аналогичному условию (9.7): существуют такие числа $q, \delta > 0$, что

$$|f^{(r)}(x)|^2|y|^2 + |(df^{(r)})^*(x)y|^2|x|^2 \geq q|x|^{2r+2-2\delta}|y|^2 \quad (9.11)$$

для малых x и всех y .

Отметим, что техника доказательства теоремы 9.4 (несмотря на независимое доказательство) оказалась в значительной степени совпадающей с техникой доказательств теоремы 9.3. При этом, поскольку обе эти теоремы обеспечивают необходимые и достаточные условия sv -достаточности ростков отображений при одних и тех же предположениях, то условие (9.6) должно быть эквивалентно условию (9.9), а условие (9.7) должно быть эквивалентно условию (9.11). Тем не менее, прямого доказательства такой эквивалентности, до сих пор, насколько известно автору, не существовало.

Цель настоящего раздела достаточно скромна. Во-первых, хотелось бы переформулировать условия Куо (9.6), (9.7) таким образом, чтобы избежать проверки каких-либо неравенств в рогеобразных окрестностях априорно неизвестного множества $f^{-1}(0)$. Во-вторых, хотелось бы заменить функцию $\mathcal{D}(\cdot)$ в (9.6), (9.7) чем-либо более легко вычислимым в приложениях.

Для выполнения поставленной цели в разделе 9.2 сначала формулируются “квалифицированные” версии понятий регулярности множества малых ненулевых решений уравнения (9.1) и трансверсальности этого множества малым сферам. Соответствующие понятия играют ключевую роль в последующих конструкциях. В частности, в лемме 9.5 показывается, что для полиномиальных отображений такие модифицированные понятия регулярности и трансверсальности эквивалентны друг другу. Затем, в теореме 9.6 формулируется семейство равносильных друг другу условий (9.18), (9.19) v -достаточности (или, равносильно, sv -достаточности) ростков отображений, являющихся прямым (и несложным) обобщением условий (9.9), (9.11) из теоремы 9.4. Здесь показывается также, что условия (9.18), (9.19) могут трактоваться также как естественное обобщение как условий Куо (9.6), (9.7), так и условия Тома (9.5). Наконец, в разделе 9.4 дается прямое доказательство равносильности условий (9.18), (9.19) условиям Куо (9.6), (9.7), что и завершает доказательство теоремы 9.6.

9.2. Квалифицированная регулярность и трансверсальность

Прежде, чем перейти к формулировке основных результатов, введем некоторые понятия.

Всюду в дальнейшем $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает стандартное евклидово скалярное произведение в \mathbb{R}^n , а $|\cdot|$ обозначает соответствующую норму. Если $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — гладкое отображение, то через $(df)^*(x)$ обозначается матрица, сопряженная к $df(x)$. Очевидно, матрица $(df)^*(x)$ состоит из m вектор-столбцов $\text{diag } f_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Пусть имеется целое число $p \geq 1$. Тогда для каждого ростка $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ можно определить следующие вспомогательные функции переменных $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^m$:

$$\mathcal{R}_p(f; x, y) = |f(x)|^p |y|^p + |(df)^*(x)y|^p |x|^p \quad (9.12)$$

и

$$\mathcal{T}_p(f; x, y) = |f(x)|^p |y|^p + |(df)^*(x)y|^p |x|^p - |\langle (df)^*(x)y, x \rangle|^p. \quad (9.13)$$

Отметим, что обе функции $\mathcal{R}_p(f; x, y)$ и $\mathcal{T}_p(f; x, y)$ однородны по переменной y . Эти функции являются полиномами переменных x и y , если f полином и p четно.

Если функция $\mathcal{R}_p(f; x, y)$ положительна при $y \neq 0$ и малых $x \neq 0$, то $|(df)^*(x)y| > 0$ для каждого $y \neq 0$ и всех малых ненулевых решений x уравнения (9.1), т.е. производная отображения $f(x)$ регулярна на малых ненулевых решениях x уравнения (9.1). Таким образом, неравенство $\mathcal{R}(f; x, y) > 0$ при $x, y \neq 0$ может трактоваться как условие регулярности [36] малых ненулевых решений уравнения (9.1). Следовательно, соотношение

$$\mathcal{R}_p(f; x, y) \geq C|x|^{pq}|y|^p, \quad (9.14)$$

выполняющееся при некоторых $C, q > 0$ для малых x и всех y , может быть названо *условием квалифицированной регулярности* малых ненулевых решений уравнения (9.1).

Аналогично, если функция $\mathcal{T}_p(f; x, y)$ положительна при $y \neq 0$ и малых $x \neq 0$, то $|(df)^*(x)y| \cdot |x| > |\langle (df)^*(x)y, x \rangle|$ для каждого $y \neq 0$ и всех малых ненулевых решений x уравнения (9.1). Последнее неравенство есть алгебраическая запись того факта, что множество решений уравнения (9.1) трансверсально малым сферам $|x| = \varepsilon$ [36]. Следовательно, соотношение

$$\mathcal{T}_p(f; x, y) \geq C|x|^{pq}|y|^p, \quad (9.15)$$

выполняющееся при некоторых $C, q > 0$ для малых x и всех y , может быть названо *условием квалифицированной трансверсальности* множества решений уравнения (9.1) малым сферам $|x| = \varepsilon$.

Как показывает следующая лемма, для полиномиальных отображений f функции $\mathcal{R}_p(f; x, y)$ и $\mathcal{T}_p(f; x, y)$ при малых x в естественном смысле сравнимы.

Лемма 9.5. *Если отображение $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, удовлетворяющее условию $f(0) = 0$, полиномиально, то для любого $p \in \mathbb{N}$ (т.е. p — натуральное число) существует такая константа $\mu_p > 0$, что*

$$2^{1-p}\mathcal{R}_1^p(f; x, y) \leq \mathcal{R}_p(f; x, y) \leq 2\mathcal{R}_1^p(f; x, y), \quad (9.16)$$

$$\mu_p\mathcal{R}_p(f; x, y) \leq \mathcal{T}_p(f; x, y) \leq \mathcal{R}_p(f; x, y) \quad (9.17)$$

при малых x и всех y .

Если отображение f полиномиально, то по лемме 9.5 множество малых ненулевых решений уравнения (9.1) регулярно тогда и только тогда, когда оно трансверсально

малым сферам $|x| = \varepsilon$, что является известным фактом [32]. В этом случае множество малых ненулевых решений уравнения (9.1) является также квалифицированно регулярным (с некоторым параметром $q > 0$) в том и только том случае, когда оно квалифицированно трансверсально (с тем же самым параметром q) малым сферам $|x| = \varepsilon$. Более того, условия (9.14) и (9.15) с фиксированным $q > 0$ но различными $p \in \mathbb{N}$ эквивалентны друг другу.

9.3. Основные результаты

Теорема 9.6. Пусть задано произвольное $p \in \mathbb{N}$.

Струя $j^r f(0)$ отображения $f \in \mathcal{E}_{[r]}(n, m)$, где $n \geq m$, является v -достаточной (или, что равносильно, sv -достаточной) в $\mathcal{E}_{[r]}(n, m)$ тогда и только тогда, когда найдется такое число $q > 0$ (зависящее от p), что

$$\mathcal{K}(f^{(r)}; x, y) \geq q|x|^{pr}|y|^p \quad (9.18)$$

при малых x и всех y , где \mathcal{K} — любая из функций \mathcal{R}_p или \mathcal{I}_p .

Струя $j^r f(0)$ отображения $f \in \mathcal{E}_{[r+1]}(n, m)$, где $n \geq m$, является v -достаточной (или, что равносильно, sv -достаточной) в $\mathcal{E}_{[r+1]}(n, m)$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{\mathcal{K}(f^{(r)}; x, y)}{|x|^{pr+p}|y|^p} \rightarrow \infty \quad (9.19)$$

при $x \rightarrow 0$, $x \neq 0$, равномерно по всем $y \neq 0$, где \mathcal{K} — любая из функций \mathcal{R}_p или \mathcal{I}_p .

Очевидно, каждая функция $\mathcal{K}(f^{(r)}; x, y)$ в теореме 9.6 является полиномом переменных x и y однородным по y . Это позволяет упростить формулировку теоремы 9.6 в случае функций ($m = 1$). Положим

$$\mathcal{R}_p^*(f^{(r)}; x) = (f^{(r)}(x))^p + |\text{diag } f^{(r)}(x)|^p |x|^p$$

и

$$\mathcal{I}_p^*(f^{(r)}; x) = (f^{(r)}(x))^p + |\text{diag } f^{(r)}(x)|^p |x|^p - |\langle \text{diag } f^{(r)}(x), x \rangle|^p.$$

Теорема 9.7. Пусть задано произвольное $p \in \mathbb{N}$.

Струя $j^r f(0)$ функции $f \in \mathcal{E}_{[r]}(n, 1)$ является v -достаточной (или, что равносильно, sv -достаточной) в $\mathcal{E}_{[r]}(n, 1)$ тогда и только тогда, когда найдется такое число $q > 0$ (зависящее от p), что

$$\mathcal{K}^*(f^{(r)}; x) \geq q|x|^{pr} \quad (9.20)$$

при малых x , где \mathcal{K}^* — любая из функций \mathcal{R}_p^* или \mathcal{I}_p^* .

Струя $j^r f(0)$ функции $f \in \mathcal{E}_{[r+1]}(n, 1)$ является v -достаточной (или, что равносильно, sv -достаточной) в $\mathcal{E}_{[r+1]}(n, 1)$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{\mathcal{K}^*(f^{(r)}; x)}{|x|^{pr+p}} \rightarrow \infty \quad (9.21)$$

при $x \rightarrow 0$, $x \neq 0$, где \mathcal{K}^* — любая из функций \mathcal{R}_p^* или \mathcal{I}_p^* .

Замечание 9.8. Как известно [58, Lem. 2], для каждой аналитической функции $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, удовлетворяющей условию $h(0) = 0$, и каждого $0 < \theta < 1$ при всех малых x выполняется следующее неравенство Бочнака-Лоясевича:

$$|\text{diag } h(x)| \cdot |x| \geq \theta |h(x)|.$$

Отсюда следует, что для полинома $f^{(r)}(x)$ в теореме 9.7 найдется такое число $\gamma > 0$, что

$$\gamma \mathcal{R}_1^*(f^{(r)}; x) \leq |\text{diag } f^{(r)}(x)| \cdot |x| \leq \mathcal{R}_1^*(f^{(r)}; x)$$

при малых x . Полученные неравенства означают, что условия (9.20) и (9.21) с функцией $\mathcal{K}^* = \mathcal{R}_1^*$ эквивалентны условиям Койпера-Куо (9.3) и (9.4), соответственно.

Таким образом, условия (9.18) и (9.19) в теореме 9.6 могут рассматриваться как естественное обобщение условий Койпера-Куо (9.3) и (9.4), соответственно.

З а м е ч а н и е 9.9. Непосредственной проверкой показывает, что

$$\mathcal{F}_2^*(f^{(r)}; x) = \sum_{i < j} \left| x_i \frac{\partial f^{(r)}}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial f^{(r)}}{\partial x_i} \right|^2 + |f^{(r)}(x)|^2$$

и, значит, условие (9.20) с функцией $\mathcal{K}^* = \mathcal{F}_2^*$ есть не что иное как условие Тома (9.5) для функции $f^{(r)}$.

Таким образом, условия (9.18) и (9.19) в теореме 9.6 могут трактоваться как обобщение на случай отображений ($m > 1$) условия Тома (9.5).

В качестве примера применения сформулированных выше теорем рассмотрим классическую задачу о рождении малых автоколебаний из положения равновесия системы дифференциальных уравнений с параметром.

П р и м е р 9.10. Рассмотрим дифференциальное уравнение equation

$$u'' + \varepsilon u' + \omega^2 u + U(\varepsilon, u, u') = 0.$$

Будем предполагать, что ε — малый вещественный параметр, функция $U(\varepsilon, u, v)$ — гладкая, и $U(\varepsilon, 0, 0) \equiv U'_u(\varepsilon, 0, 0) \equiv U'_v(\varepsilon, 0, 0) \equiv 0$. С помощью подходящего “растяжения” времени и параметра ε рассматриваемое уравнение может быть приведено к следующему виду:

$$u'' + \frac{\lambda}{\pi} u' + u + \frac{1}{\omega^2} U\left(\frac{\lambda\omega}{\pi}, u, \omega u'\right) = 0. \quad (9.22)$$

Обозначим через $u = u(t, \lambda, \xi, \eta)$ решение уравнения (9.22), удовлетворяющее начальным условиям $u(0, \lambda, \xi, \eta) = \xi$, $u'_t(0, \lambda, \xi, \eta) = \eta$. Тогда задача существования T -периодических решений уравнения (9.22) оказывается эквивалентной [3, 27] задаче нахождения решений следующей недоопределенной системы нелинейных уравнений:

$$u(T, \lambda, \xi, \eta) = \xi, \quad u'_t(T, \lambda, \xi, \eta) = \eta. \quad (9.23)$$

Левые части последних уравнений могут быть легко вычислены, см., например, [27]. В частности, с точностью до слагаемых второго порядка малости по переменным $\tau = T - 2\pi$ и λ, ξ, η они имеют вид

$$u(T, \lambda, \xi, \eta) = \xi + \lambda\xi + \tau\eta + \dots, \quad u'_t(T, \lambda, \xi, \eta) = \eta - \tau\xi + \lambda\eta + \dots$$

Следовательно, 2-усечение системы уравнений (9.23) имеет вид

$$\lambda\xi + \tau\eta = 0, \quad \tau\xi - \lambda\eta = 0.$$

Множество решений этих уравнений состоит из двух двумерных подпространств в пространстве четверок $\{\tau, \lambda, \xi, \eta\}$, имеющих единственную общую точку — нулевую. Одно из этих подпространств определяется соотношениями $\tau = \lambda = 0$, а второе — соотношениями $\xi = \eta = 0$.

Теперь обозначим вектор $\{\tau, \lambda, \xi, \eta\}$ через x , введем вспомогательный вектор $y = \{y_1, y_2\}$ и положим

$$f(x) := \{u(T, \lambda, \xi, \eta) - \xi, u'_t(T, \lambda, \xi, \eta) - \eta\}.$$

Тогда $f \in \mathcal{E}_{[2]}(4, 2)$, и 2-усечение этого отображения имеет вид

$$f^{(2)}(x) = \{\lambda\xi + \tau\eta, \tau\xi - \lambda\eta\},$$

откуда

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2(f^{(2)}; x, y) &= ((\lambda\xi + \tau\eta)^2 + (\tau\xi - \lambda\eta)^2) (y_1^2 + y_2^2) + \\ & \quad ((\lambda y_1 + \tau y_2)^2 + (\tau y_1 - \lambda y_2)^2 + (\xi y_1 - \eta y_2)^2 + (\eta y_1 + \xi y_2)^2) (\tau^2 + \lambda^2 + \xi^2 + \eta^2). \end{aligned}$$

После приведения подобных членов, получаем

$$\mathcal{R}_2(f^{(2)}; x, y) = ((\tau^2 + \lambda^2)(\xi^2 + \eta^2) + |x|^4) |y|^2 \geq |x|^4 |y|^2.$$

Следовательно, по теореме 9.6 струя $j^2 f(0)$ *sv*-достаточна в $\mathcal{E}_{[2]}(4, 2)$. Тогда множество малых решений уравнений (9.23) состоит из пары двумерных многообразий, пересекающихся в единственной точке $\tau = \lambda = \xi = \eta = 0$. Существование одного такого многообразия решений уравнений (9.23) очевидно — это двумерное подпространство $\xi = \eta = 0$, отвечающее тривиальному периодическому решению $u(t) \equiv 0$ уравнения (9.22). Существование второго многообразия решений системы уравнений (9.23), проходящего через точку $\tau = \lambda = \xi = \eta = 0$, но отличающегося от подпространства $\xi = \eta = 0$, означает, что уравнения (9.23) имеют нетривиальные решения с произвольно малыми $\tau = T - 2\pi$, λ и $\{\xi, \eta\} \neq 0$. Следовательно, уравнение (9.22) имеет малые ненулевые периодические решения для некоторых произвольно малых значений параметра λ , см. [24, 27].

9.4. Доказательства

Всюду ниже через $O(t^k)$ с $k \geq 0$ будут обозначаться переменные, допускающие при малых t оценку сверху вида $c|t|^k$ с некоторой константой $c < \infty$. Аналогично, $o(t^k)$ будет обозначать переменные более высокого порядка малости, чем $|t|^k$, при малых t .

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 9.6 докажем сначала лемму 9.5.

9.4.1. Доказательство леммы 9.5 Неравенства (9.16) непосредственно вытекают из следующей двусторонней формы известных неравенств о степенных средних:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^p \leq \frac{x^p + y^p}{2} \leq (x+y)^p, \quad p \geq 1, \quad x, y \geq 0.$$

Поэтому в доказательстве нуждаются только неравенства (9.17) для заданного $p \in \mathbb{N}$.

Правое неравенство в (9.17) очевидно. Поэтому остается доказать только левое неравенство в (9.17), что будет сделано методом “от противного”.

Если левое неравенство в (9.17) не верно, то найдутся такие $x_i \rightarrow 0$ ($x_i \neq 0$), $y_i \neq 0$ и $\eta_i > 0$, что $\eta_i^p \mathcal{R}_p(f; x_i, y_i) > \mathcal{T}_p(f; x_i, y_i)$. В частности, $\mathcal{R}_p(f; x_i, y_i) > 0$. Так как функции $\mathcal{T}_p(f; x, y)$ и $\mathcal{R}_p(f; x, y)$ однородны по переменной y с одинаковой степенью однородности

$p \in \mathbb{N}$, то без ограничения общности можно считать, что $|y_i| = 1$ и $y_i \rightarrow y_*$, $|y_*| = 1$. Запишем следующую систему полиномиальных равенств и неравенств⁸:

$$\begin{aligned} |f(x)|^{2p}|y|^{2p} = u^{2p} \quad |(df)^*(x)y|^{2p}|x|^{2p} = v^{2p}, \quad \langle (df)^*(x)y, x \rangle^{2p} = w^{2p}, \\ u^p + v^p = \varphi^p, \quad u^p + v^p - w^p = \psi^p, \quad \eta^p \varphi^p > \psi^p, \\ |x|^2 > 0, \quad |y|^2 > 0, \quad \varphi > 0, \quad \psi \geq 0, \quad \eta > 0, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad w \geq 0. \end{aligned} \quad (9.24)$$

По определению последовательностей $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ и $\{\eta_i\}$ множество, определяемое соотношениями (9.24), не пусто и точка $x = \varphi = \psi = \eta = u = v = w = 0$, $y = y_*$ принадлежит его замыканию. Следовательно, по лемме об отборе кривых для полуалгебраических множеств (см., например, [32]) найдется число $\varepsilon > 0$, а также вещественно-аналитические в окрестности начала координат функции $x(t)$, $y(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\eta(t)$, удовлетворяющие условиям

$$x(0) = \varphi(0) = \psi(0) = \eta(0) = 0, \quad y(0) = y_*$$

и

$$x(t) \neq 0, \quad \varphi(t) > 0, \quad \psi(t) \geq 0, \quad \eta(t) > 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < \varepsilon,$$

такие, что

$$\psi^p(t) < \eta^p(t)\varphi^p(t) \quad \text{при} \quad 0 < t < \varepsilon$$

или, что то же самое в силу (9.12) и (9.13),

$$\begin{aligned} \varphi^p(t) = u^p(t) + v^p(t) = \\ |f(x(t))|^p |y(t)|^p + |(df)^*(x(t))y(t)|^p |x(t)|^p = \mathcal{R}_p(f; x(t), y(t)) \end{aligned} \quad (9.25)$$

и

$$\begin{aligned} \eta^p(t)\varphi^p(t) > \psi^p(t) = u^p(t) + v^p(t) - w^p(t) = \\ |f(x(t))|^p |y(t)|^p + |(df)^*(x(t))y(t)|^p |x(t)|^p - |\langle (df)^*(x(t))y(t), x(t) \rangle|^p = \\ \mathcal{T}_p(f; x(t), y(t)). \end{aligned} \quad (9.26)$$

Тогда

$$|f(x(t))| \cdot |y(t)| \leq \eta(t)\varphi(t), \quad (9.27)$$

откуда в силу (9.25)

$$|(df)^*(x(t))y(t)| \cdot |x(t)| \geq \varphi(t) (1 - \eta^p(t))^{1/p}. \quad (9.28)$$

Из соотношений (9.26) следует также, что

$$|(df)^*(x(t))y(t)|^p |x(t)|^p - |\langle (df)^*(x(t))y(t), x(t) \rangle|^p \leq \eta^p(t)\varphi^p(t).$$

Деля обе части последнего неравенства на $|(df)^*(x(t))y(t)|^p |x(t)|^p$, получаем в силу (9.28)

$$0 \leq 1 - \left(\frac{|\langle (df)^*(x(t))y(t), x(t) \rangle|}{|(df)^*(x(t))y(t)| \cdot |x(t)|} \right)^p \leq \frac{\eta^p(t)}{1 - \eta^p(t)}. \quad (9.29)$$

⁸Соотношения (9.24) полиномиальны, поскольку p — целое число, а норма $|\cdot|$ евклидова.

Поскольку функции $x(t), y(t), \varphi(t), \eta(t)$ по предположению вещественно-аналитичны при малых t , то они допускают следующие представления:

$$x(t) = x_* t^q + o(t^q), \quad x_* \neq 0, \quad q \geq 1, \quad (9.30)$$

$$y(t) = y_* + O(t), \quad |y_*| = 1, \quad (9.31)$$

$$\varphi(t) = \varphi_* t^r + o(t^r), \quad \varphi_* > 0, \quad r \geq 1, \quad (9.32)$$

$$\eta(t) = \eta_* t^s + o(t^s), \quad \eta_* > 0, \quad s \geq 1. \quad (9.33)$$

Так как $f(x)$ является полиномом, а функции $x(t), y(t)$ аналитичны, то функции

$$(df)^*(x(t))y(t)$$

и $f(x(t))$ также аналитичны, и $f(x(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Следовательно, в силу неравенств (9.27)–(9.29) найдутся такие целые числа $k \geq 1$ и $l \geq 0$, что

$$f(x(t)) = O(t^k) \quad k \geq 1, \quad (9.34)$$

$$(df)^*(x(t))y(t) = h_* t^l + o(t^l), \quad h_* \neq 0, \quad l \geq 0. \quad (9.35)$$

Подставляя теперь представления (9.31)–(9.34) для соответствующих функций в (9.27), получаем

$$O(t^k) \cdot |y_* + O(t)| \leq (\varphi_* t^r + o(t^r))(\eta_* t^s + o(t^s)),$$

откуда (поскольку $y_* \neq 0$)

$$k \geq r + s. \quad (9.36)$$

Аналогично, подставляя представления (9.31)–(9.33) и (9.35) для соответствующих функций в (9.28), мы получаем

$$|h_* t^l + o(t^l)| \cdot |x_* t^q + o(t^q)| \geq (\varphi_* t^r + o(t^r)) (1 - O(t))^{1/p},$$

откуда (поскольку $h_*, x_*, \varphi_* \neq 0$)

$$r \geq l + q. \quad (9.37)$$

Наконец, подставляя соотношения (9.30), (9.33) и (9.35) для соответствующих функций в (9.29), получаем

$$0 \leq 1 - \left(\frac{|\langle h_* t^l + o(t^l), x_* t^q + o(t^q) \rangle|}{|h_* t^l + o(t^l)| \cdot |x_* t^q + o(t^q)|} \right)^p \leq c (\eta_* t^s + o(t^s))^p$$

с некоторой константой $c < \infty$, откуда

$$0 \leq 1 - \left(\frac{|\langle h_*, x_* \rangle|}{|h_*| \cdot |x_*|} \right)^p + O(t) \leq O(t).$$

Следовательно, $|\langle h_*, x_* \rangle| = |h_*| \cdot |x_*|$ и поэтому $h_* = \lambda x_*$ при некотором $\lambda \neq 0$ (поскольку $h_*, x_* \neq 0$). Тогда в силу неравенства (9.35)

$$(df)^*(x(t))y(t) = \lambda x_* t^l + o(t^l). \quad (9.38)$$

Оценим теперь функцию $z(t) = \langle f(x(t)), y(t) \rangle$. Так как

$$\begin{aligned} z'(t) &= \langle df(x(t))x'(t), y(t) \rangle + \langle f(x(t)), y'(t) \rangle = \\ &= \langle x'(t), (df)^*(x(t))y(t) \rangle + \langle f(x(t)), y'(t) \rangle, \end{aligned}$$

то из формул (9.30), (9.31), (9.34) и (9.38) следует равенство

$$\begin{aligned} z'(t) &= \langle px_*t^{q-1} + O(t^q), \lambda x_*t^l + o(t^l) \rangle + \langle O(t^k), O(1) \rangle = \\ &= \lambda p|x_*|^2t^{q+l-1} + O(t^{q+l}) + O(t^k). \end{aligned}$$

Здесь в силу (9.36) и (9.37) $k \geq q + l + s$. Поэтому $O(t^k) = o(t^{q+l})$, а тогда

$$z'(t) = \lambda p|x_*|^2t^{q+l-1} + O(t^{q+l}).$$

Интегрируя обе части последнего равенства, получаем

$$\langle f(x(t)), y(t) \rangle = z(t) = \int_0^t z'(s) ds = \lambda \frac{q}{q+l} |x_*|^2 t^{q+l} + o(t^{q+l}). \quad (9.39)$$

Теперь отметим, что из очевидного соотношения $\langle f(x(t)), y(t) \rangle \leq |f(x(t))| \cdot |y(t)|$ и неравенств (9.39), (9.31) и (9.34) вытекает оценка

$$\lambda \frac{q}{q+l} |x_*|^2 t^{q+l} + o(t^{q+l}) \leq O(t^k) \cdot |y_* + O(t)|.$$

Так как здесь $x_*, y_* \neq 0$ то $k \leq q+l$. С другой стороны в силу (9.36) и (9.37) имеют место неравенства $k \geq q + l + s \geq q + l + 1$. Полученное противоречие доказывает лемму 9.5.

9.4.2. Доказательство теоремы 9.6 По лемме 9.5 условия (9.18) для различных $p \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{K} = \mathcal{R}_p$ или $\mathcal{K} = \mathcal{T}_p$ эквивалентны друг другу, и то же самое верно для условий (9.19). Поэтому для доказательства теоремы 9.6 необходимо только показать, что условие Куо (9.6) эквивалентно условию (9.18), в котором $\mathcal{K} = \mathcal{R}_1$:

$$|f^{(r)}(x)| \cdot |y| + |(df^{(r)})^*(x)y| \cdot |x| \geq q|x|^r|y| \quad (9.40)$$

при малых x и всех y , а условие Куо (9.7) эквивалентно условию (9.19), в котором $\mathcal{K} = \mathcal{R}_1$:

$$\frac{|f^{(r)}(x)| \cdot |y| + |(df^{(r)})^*(x)y| \cdot |x|}{|x|^{r+1}|y|} \rightarrow \infty \quad (9.41)$$

при $x \rightarrow 0$, $x \neq 0$, равномерно по всем $y \neq 0$.

Для доказательства эквивалентности условий (9.6) и (9.40) сначала для произвольного набора векторов $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ определим величину

$$\tilde{\mathcal{D}}(v_1, v_2, \dots, v_m) = \min \left| \sum_{i=1}^m y_i v_i \right|, \quad v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n, \quad (9.42)$$

где минимум берется по всем наборам из m вещественных чисел y_1, y_2, \dots, y_m , удовлетворяющих равенству $\sum_{i=1}^m y_i^2 = 1$.

Представим теперь вектор $(df^{(r)})^*(x)y$ в (9.40) в виде

$$(df^{(r)})^*(x)y \equiv \sum_{i=1}^m y_i \operatorname{diag} f_i^{(r)}(x)$$

где y_1, y_2, \dots, y_m — компоненты вектора y , а $f_1^{(r)}, f_2^{(r)}, \dots, f_m^{(r)}$ — компоненты отображения $f^{(r)}$. Тогда, беря минимум в левой части (9.40) по всем векторам y , удовлетворяющим соотношениям $\sum_{i=1}^m y_i^2 = 1$, получаем

$$\min_{y \neq 0} \frac{|(df^{(r)})^*(x)y|}{|y|} = \tilde{\mathcal{D}}(\operatorname{diag} f_1^{(r)}(x), \operatorname{diag} f_2^{(r)}(x), \dots, \operatorname{diag} f_m^{(r)}(x)). \quad (9.43)$$

Следовательно, соотношение (9.40) при малых x равносильно условию

$$|f^{(r)}(x)| + \tilde{\mathcal{D}}(\text{diag } f_1^{(r)}(x), \text{diag } f_2^{(r)}(x), \dots, \text{diag } f_m^{(r)}(x)) \cdot |x| \geq q|x|^r.$$

Тогда, учитывая, что

$$\tilde{\mathcal{D}}(v_1, v_2, \dots, v_m) \leq \mathcal{D}(v_1, v_2, \dots, v_m) \leq \sqrt{m} \tilde{\mathcal{D}}(v_1, v_2, \dots, v_m) \quad (9.44)$$

где \mathcal{D} — функция (9.8), см. [183, р. 348], можно утверждать, что соотношение (9.40) при малых x равносильно также условию

$$|f^{(r)}(x)| + \mathcal{D}(\text{diag } f_1^{(r)}(x), \text{diag } f_2^{(r)}(x), \dots, \text{diag } f_m^{(r)}(x)) \cdot |x| \geq \tilde{q}|x|^r \quad (9.45)$$

с подходящей константой $\tilde{q} > 0$.

Предположим, что выполнено условие (9.6). Тогда при $x \in \mathcal{H}_r(f^{(r)}; \sigma)$, $|x| < \varepsilon$, первое слагаемое в левой части (9.45) не меньше, чем $\sigma|x|^r$. В то же самое время при $x \notin \mathcal{H}_r(f^{(r)}; \sigma)$, $|x| < \varepsilon$, в силу (9.6) второе слагаемое в левой части (9.45) не меньше, чем $C|x|^r$. Таким образом, при $|x| < \varepsilon$ условие (9.6) влечет неравенство (9.45) с $\tilde{q} = \min\{\sigma, C\}$.

Пусть теперь неравенство (9.45) выполняется при $|x| < \varepsilon$ с некоторым $\varepsilon > 0$, тогда, очевидно, при $x \in \mathcal{H}_r(f^{(r)}; \frac{1}{2}\tilde{q})$ будет выполняться условие (9.6) с константой $C = \frac{1}{2}\tilde{q}$. Таким образом, неравенство (9.45) влечет условие (9.6) с константой $C = \frac{1}{2}\tilde{q}$.

Итак, условия (9.6) и (9.45) эквивалентны и, следовательно, условие Куо (9.6) эквивалентно условию (9.40).

Доказательство эквивалентности условий (9.7) и (9.41) несколько сложнее. Сначала, чтобы доказать, что из условия (9.7) вытекает условие (9.41), будет показано, что условие (9.7) не выполняется, если не выполняется условие (9.41). Для этого понадобится следующая лемма, доказательство которой приведено ниже в разделе 9.4.3.

Лемма 9.11. Пусть отображение $f^{(r)}(x)$ не удовлетворяет условию (9.41). Тогда найдутся такие $x_i \rightarrow 0$ ($x_i \neq 0$), $y_i \rightarrow 0$ и однородный полином $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ степени $r + 1$, что для отображения $g(x) = f^{(r)}(x) + h(x)$ справедливы оценки

$$|g(x_i)| \leq c|x_i|^{r+1+\delta'}, \quad |(dg)^*(x_i)y_i| \leq c|y_i| \cdot |x_i|^{r+\delta'} \quad (9.46)$$

с некоторыми константами $\delta' > 0$ и $c < \infty$.

Пусть теперь $\{x_i\}$ — некоторая последовательность, определяемая леммой 9.11. Тогда в силу первого неравенства (9.46) для каждого $\sigma > 0$ можно указать такое $\varepsilon > 0$, что при всех достаточно больших значениях индекса i будет выполняться неравенство

$$x_i \in \mathcal{H}_{r+1}(g; \sigma) \cap \{|x| < \varepsilon\}. \quad (9.47)$$

По лемме 9.11 $f^{(r)}(x) = g(x) - h(x)$, где $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — это однородный полином степени $r + 1$. Тогда $|(dh)^*(x)| \leq c_1|x|^r$ с некоторой константой c_1 , и в силу второго неравенства (9.46)

$$|(df^{(r)})^*(x_i)y_i| \leq c_2|y_i| \cdot |x_i|^r, \quad i = 1, 2, \dots,$$

с некоторой константой c_2 . Следовательно, в силу (9.42)

$$\tilde{\mathcal{D}}(\text{diag } f_1^{(r)}(x_i), \text{diag } f_2^{(r)}(x_i), \dots, \text{diag } f_m^{(r)}(x_i)) \leq c_3|x|^r, \quad i = 1, 2, \dots,$$

с некоторой константой c_3 , и в силу (9.44)

$$\mathcal{D}(\text{diag } f_1^{(r)}(x_i), \text{diag } f_2^{(r)}(x_i), \dots, \text{diag } f_m^{(r)}(x_i)) \leq c_3|x|^r, \quad i = 1, 2, \dots$$

Из последних неравенств вытекает, что для любых $C, \delta > 0$ при всех достаточно больших значениях индексов i справедливы оценки

$$\mathcal{D}(\text{diag } f_1^{(r)}(x_i), \text{diag } f_2^{(r)}(x_i), \dots, \text{diag } f_m^{(r)}(x_i)) < C|x|^{r-\delta}. \quad (9.48)$$

Соотношения (9.47) и (9.48) показывают, что условие (9.7) как для отображения $f^{(r)}$, так и для произвольного отображения g , определяемого леммой 9.11, не выполняется ни при каком выборе чисел $C, \delta, \varepsilon, \sigma > 0$.

Таким образом, доказательство того факта, что невыполнение условия (9.41) влечет невыполнение условия (9.7), завершено и, следовательно, из условия Куо (9.7) вытекает условие (9.41).

Осталось только доказать, что условие (9.41) влечет условие Куо (9.7). Для этого понадобится следующая лемма, доказательство которой вынесено в раздел 9.4.4 ниже.

Лемма 9.12. Пусть $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — такой полином степени $r + 1$, что $j^r g(0) = j^r f(0)$, где $f^{(r)}(x)$ удовлетворяет условию (9.41). Тогда

$$\frac{|g(x)| \cdot |y| + |(df^{(r)})^*(x)y| \cdot |x|}{|x|^{r+1}|y|} \rightarrow \infty \quad (9.49)$$

при $x \rightarrow 0$, $x \neq 0$, равномерно по всем $y \neq 0$.

Предположим теперь, что выполнено условие (9.41). Возьмем произвольный полином $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ степени $r + 1$, для которого $j^r g(0) = j^r f(0)$. Тогда по лемме 9.12 имеет место соотношение (9.49). Как нетрудно показать (см., например, [8, 137]), в этом случае найдутся такие положительные константы σ', δ' и $\varepsilon' < 1$, что

$$|g(x)| \cdot |y| + |(df^{(r)})^*(x)y| \cdot |x| \geq \sigma'|x|^{r+1-\delta'}|y| \quad (9.50)$$

при $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| < \varepsilon'$, и всех $y \in \mathbb{R}^m$.

Пусть x , $|x| < \varepsilon'$, принадлежит рогеобразной окрестности $\mathcal{H}_{r+1}(g; \sigma'/2)$ множества $g^{-1}(0)$. Тогда

$$|g(x)| < \frac{1}{2}\sigma'|x|^{r+1} \leq \frac{1}{2}\sigma'|x|^{r+1-\delta'}$$

и в силу (9.50)

$$|(df^{(r)})^*(x)y| \geq \frac{1}{2}\sigma'|x|^{r-\delta'}|y|.$$

Тогда на основании (9.42), (9.43),

$$\tilde{\mathcal{D}}(\text{diag } f_1^{(r)}(x), \text{diag } f_2^{(r)}(x), \dots, \text{diag } f_m^{(r)}(x)) \geq \frac{1}{2}\sigma'|x|^{r-\delta'},$$

и в силу (9.44),

$$\mathcal{D}(\text{diag } f_1^{(r)}(x), \text{diag } f_2^{(r)}(x), \dots, \text{diag } f_m^{(r)}(x)) \geq \frac{\sigma'}{2\sqrt{m}}|x|^{r-\delta'},$$

при $x \in \mathcal{H}_{r+1}(g; \sigma'/2) \cap \{|x| < \varepsilon'\}$, что в точности совпадает с условием Куо (9.7).

Таким образом, условие (9.41) влечет условие Куо (9.7), и доказательство теоремы 9.6 завершено.

9.4.3. Доказательство леммы 9.11. Обозначим через H класс полиномов переменной x вида $\eta(x) = \langle x, v \rangle^p \langle x, w \rangle^q u$, где $p + q = r + 1$ и $v, w \in \mathbb{R}^n$. Поскольку для таких полиномов справедливо равенств

$$d\eta(x)z = p\langle x, v \rangle^{p-1} \langle x, w \rangle^q \langle z, v \rangle u + q\langle x, v \rangle^p \langle x, w \rangle^{q-1} \langle z, w \rangle u,$$

то в силу тождества $\langle (d\eta)^*(x)y, z \rangle \equiv \langle y, d\eta(x)z \rangle$ справедливо также тождество

$$\langle (d\eta)^*(x)y, z \rangle \equiv p\langle x, v \rangle^{p-1} \langle x, w \rangle^q \langle z, v \rangle \langle y, u \rangle + q\langle x, v \rangle^p \langle x, w \rangle^{q-1} \langle z, w \rangle \langle y, u \rangle.$$

Поэтому

$$(d\eta)^*(x)y = p\langle x, v \rangle^{p-1} \langle x, w \rangle^q \langle y, u \rangle v + q\langle x, v \rangle^p \langle x, w \rangle^{q-1} \langle y, u \rangle w.$$

Последняя формула ниже понадобится в двух случаях:

$$(d\eta)^*(x)y = (r + 1)\langle x, v \rangle^r \langle y, u \rangle v, \quad (9.51)$$

если $\eta(x) = \langle x, v \rangle^{r+1} u$, и

$$(d\eta)^*(x)y = r\langle x, v \rangle^{r-1} \langle x, w \rangle \langle y, u \rangle v + q\langle x, v \rangle^r \langle x, w \rangle \langle y, u \rangle w, \quad (9.52)$$

если $\eta(x) = \langle x, v \rangle^r \langle x, w \rangle u$.

Для начала построим такой полином $\eta_i(x) \in H$, чтобы второе неравенство (9.46) удовлетворялось для отображения $g(x) = f^{(r)}(x) + \eta_i(x)$. Тогда, поскольку по предположению $f^{(r)}$ не удовлетворяет условию (9.41), по лемме об отборе кривых [32] найдется такая аналитическая в окрестности начала координат функция

$$x(t) = ut^\alpha + o(t^\alpha), \quad u \neq 0, \quad \alpha \geq 1 \text{ целое}, \quad (9.53)$$

$$y(t) = v + O(t), \quad |v| = 1, \quad (9.54)$$

для которой

$$|f^{(r)}(x(t))| \leq c|x(t)|^{r+1}, \quad |(df^{(r)})^*(x(t))y(t)| \leq c|x(t)|^r. \quad (9.55)$$

Очевидно, функция $(df^{(r)})^*(x(t))y(t)$ также аналитична. Если она тождественно равна нулю, то достаточно положить $\eta_1(x) \equiv 0$. В противном случае представим ее в следующем виде:

$$(df^{(r)})^*(x(t))y(t) = zt^\gamma + o(t^\gamma), \quad z \neq 0, \quad \gamma \geq 1 \text{ целое}. \quad (9.56)$$

Тогда из соотношений (9.53) и (9.55) следует, что $\gamma \geq \alpha r$. Если $\gamma > \alpha r$, то второе неравенство (9.46) выполняется при $\eta_1(x) \equiv 0$, и можно положить $\delta' = (\gamma - \alpha r)\alpha$. Таким образом, осталось рассмотреть только случай, когда

$$\gamma = \alpha r \quad (9.57)$$

Здесь имеются две возможности: $\langle u, z \rangle \neq 0$ и $\langle u, z \rangle = 0$.

а. Пусть $\langle u, z \rangle \neq 0$. Положим

$$\eta_1(x) = \rho \langle x, z \rangle^{r+1} v,$$

где $\rho \in \mathbb{R}^1$. Из (9.51) следует, что

$$(d\eta_1)^*(x)y = \rho(r + 1)\langle x, z \rangle^r \langle y, v \rangle z,$$

и, в силу (9.53), (9.54), (9.56) и (9.57), справедливы равенства:

$$\begin{aligned} (df^{(r)})^*(x(t))y(t) + (d\eta_1)^*(x(t))y(t) &= \\ &= zt^{\alpha r} + o(t^{\alpha r}) + \rho(r+1)\langle ut^\alpha + o(t^\alpha), z \rangle^r \langle v + O(t), v \rangle z = \\ &= zt^{\alpha r} + \rho(r+1)\langle u, z \rangle^r \langle v, v \rangle zt^{\alpha r} + o(t^{\alpha r}). \end{aligned}$$

Поэтому, если выбрать $\rho = \{(r+1)\langle u, z \rangle^r \langle v, v \rangle\}^{-1}$, то для отображения $f^{(r)}(x) + \eta_1(x)$ будет выполняться вторая оценка (9.46) с $\delta' = \delta'_1 = 1/(\alpha r)$.

б. Пусть $\langle u, z \rangle = 0$. Положим

$$\eta_1(x) = \rho \langle x, z \rangle \langle x, u \rangle^r v,$$

где $\rho \in \mathbb{R}^1$. Из (9.52) вытекает равенство

$$(d\eta_1)^*(x)y = \rho \langle x, u \rangle^r \langle y, v \rangle z + \rho r \langle x, u \rangle^{r-1} \langle x, z \rangle \langle y, v \rangle u,$$

из которого, в силу соотношений (9.53), (9.54), (9.56) и (9.57), получаем

$$\begin{aligned} (df^{(r)})^*(x(t))y(t) + (d\eta_1)^*(x(t))y(t) &= \\ &= zt^{\alpha r} + o(t^{\alpha r}) + \rho \langle ut^\alpha + o(t^\alpha), u \rangle^r \langle v + O(t), v \rangle z + \\ &\quad + \rho r \langle ut^\alpha + o(t^\alpha), u \rangle^{r-1} \langle ut^\alpha + o(t^\alpha), z \rangle \langle v + O(t), v \rangle u. \end{aligned}$$

Здесь по предположению множитель $\langle ut^\alpha + o(t^\alpha), z \rangle$ в последнем слагаемом имеет порядок $O(t^{\alpha+1})$, и поэтому все последнее слагаемое имеет порядок $O(t^{\alpha r+1})$. Следовательно,

$$(df^{(r)})^*(x(t))y(t) + (d\eta_1)^*(x(t))y(t) = \{1 + \rho \langle u, u \rangle^r \langle v, v \rangle\} t^{\alpha r} z + O(t^{\alpha r+1}).$$

Если теперь положить $\rho = -\{\langle u, u \rangle^r \langle v, v \rangle\}^{-1}$, то отображение $f^{(r)}(x) + \eta_1(x)$ и любая последовательность элементов $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$, в которой $t_i \rightarrow 0$, $t_i \neq 0$, будут удовлетворять второй оценке (9.46) с константой $\delta' = \delta'_1 = 1/(\alpha r)$.

Таким образом, требуемое отображение $\eta_1(x)$ построено. Отображение $h(x)$ будем искать теперь в виде $h(x) = \eta_1(x) + \eta_2(x)$ с такой константой $\eta_2(x)$, чтобы не нарушить второе неравенство (9.46) и в то же время удовлетворить первое из этих неравенств. Обозначим отображение $f^{(r)}(x) + \eta_1(x)$ через $g_1(x)$. Тогда по построению

$$|(dg_1)^*(x(t))y(t)| \leq \tilde{c}|x(t)|^{r+\delta'_1}, \quad (9.58)$$

$$|g_1(x(t))| \leq \tilde{c}|x(t)|^{r+1}. \quad (9.59)$$

Функция $g_1(x(t))$ аналитична. Если она тождественно равна нулю, то достаточно положить $\eta_2(x) \equiv 0$. В противном случае имеют место следующие представления:

$$g_1(x(t)) = wt^\mu + o(t^\mu), \quad w \neq 0, \quad \mu \geq 1 \text{ целое}, \quad (9.60)$$

$$(dg_1)^*(x(t))y(t) = O(t^\nu), \quad \nu \geq 1 \text{ целое}. \quad (9.61)$$

Из соотношений (9.58), (9.61) и (9.53) вытекает оценка

$$\nu \geq \alpha r + 1, \quad (9.62)$$

в то время как из соотношений (9.59), (9.60) и (9.53) следует, что $\mu \geq \alpha(r+1)$. Если $\mu > \alpha(r+1)$, то неравенства (9.46) выполняются при $\eta_2(x) \equiv 0$, $\delta' = \min\{\delta'_1, \delta'_2\}$, где $\delta'_2 = \mu/\alpha - (r+1)$. Следовательно, остается рассмотреть случай, когда

$$\mu = \alpha(r+1). \quad (9.63)$$

Оценим величину $\langle g_1(x(t)), y(t) \rangle$. С одной стороны, в силу (9.54) и (9.60),

$$\langle g_1(x(t)), y(t) \rangle = \langle wt^\mu + o(t^\mu), v + O(t) \rangle = \langle w, v \rangle t^\mu + O(t^{\mu+1}). \quad (9.64)$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} \langle g_1(x(t)), y(t) \rangle &= \int_0^t \langle dg_1(x(s))x'(s), y(s) \rangle ds + \int_0^t \langle g_1(x(s)), y'(s) \rangle ds = \\ &= \int_0^t \langle x'(s), (dg_1)^*(x(s))y(s) \rangle ds + \int_0^t \langle g_1(x(s)), y'(s) \rangle ds, \end{aligned}$$

откуда, разлагая подынтегральные выражения по степеням s и интегрируя полученные выражения, получаем равенства

$$\begin{aligned} \langle g_1(x(t)), y(t) \rangle &= \\ &= \int_0^t \langle \alpha us^{\alpha-1} + O(s^\alpha), O(s^\nu) \rangle ds + \int_0^t \langle ws^\mu + o(s^\mu), O(1) \rangle ds = \\ &= O(t^{\alpha+\nu}) + O(t^{\alpha+\nu+1}) + O(t^{\mu+1}) + o(t^{\mu+1}). \end{aligned}$$

Из полученных соотношений, в силу (9.62) и (9.63), следует, что $\langle g_1(x(t)), y(t) \rangle = O(t^{\mu+1})$. Поэтому, в силу (9.64),

$$\langle w, v \rangle = 0. \quad (9.65)$$

Положим теперь $\eta_2(x) = \rho \langle x, u \rangle^{r+1} w$, где $\rho = -\langle u, u \rangle^{-(r+1)}$. Тогда, в силу (9.53) и (9.60),

$$g_1(x(t)) + \eta_2(x(t)) = wt^{\alpha(r+1)} + o(t^{\alpha(r+1)}) - \langle u, u \rangle^{-(r+1)} \langle ut^\alpha + o(t^\alpha), u \rangle^{r+1} w,$$

откуда $g_1(x(t)) + \eta_2(x(t)) = O(t^{\alpha(r+1)+1})$. Значит, для отображения $g(x) = g_1(x) + \eta_2(x)$ и любой последовательности элементов $x_i = x(t_i)$, в которой $t_i \rightarrow 0$, $t_i \neq 0$, выполняется первая оценка (9.46) с константой $\delta' = 1/(\alpha(r+1))$.

Осталось проверить выполнение второй оценки (9.46). В силу (9.51)

$$(d\eta_2)^*(x)y = \rho(r+1) \langle x, u \rangle^r \langle y, w \rangle u,$$

и поэтому (см. (9.53), (9.54), (9.61))

$$\begin{aligned} (dg)^*(x(t))y(t) &= (dg_1)^*(x(t))y(t) + (d\eta_2)^*(x(t))y(t) = \\ &= O(t^\nu) + \rho(r+1) \langle ut^\alpha + o(t^\alpha), u \rangle^r \langle v + O(t), w \rangle u. \end{aligned}$$

Так как здесь множитель $\langle v + O(t), w \rangle$ во втором слагаемом в силу (9.65) имеет порядок $O(t)$, то все второе слагаемое имеет порядок $O(t^{\alpha r+1})$. Тогда в силу (9.62) $(dg)^*(x(t))y(t) = O(t^{\alpha r+1})$.

Итак, для любой последовательности пар $\{x_i, y_i\}$, в которой $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$, $t_i \rightarrow 0$, $t_i \neq 0$, выполняются неравенства (9.46) с константой $\delta' = \min\{1/(\alpha(r+1)), 1/(\alpha r)\}$. Доказательство леммы 9.11 завершено.

9.4.4. Доказательство леммы 9.12 Положим $\theta(x) = g(x) - f^{(r)}(x)$. Тогда θ будет однородным полиномом степени $r+1$. Следовательно, $|\theta(x)| \leq c|x|^{r+1}$ при всех достаточно малых значениях $|x|$, где c — некоторая константа. Тогда

$$|g(x)| \cdot |y| + |(df^{(r)})^*(x)y| \cdot |x| = |f^{(r)}(x) + \theta(x)| \cdot |y| + |(df^{(r)})^*(x)y| \cdot |x|,$$

и

$$\frac{|g(x)| \cdot |y| + |(df^{(r)})^*(x)y| \cdot |x|}{|x|^{r+1}|y|} \geq \frac{|f^{(r)}(x)| \cdot |y| + |(df^{(r)})^*(x)y| \cdot |x|}{|x|^{r+1}|y|} - \frac{|\theta(x)|}{|x|^{r+1}},$$

откуда

$$\frac{|g(x)| \cdot |y| + |(df^{(r)})^*(x)y| \cdot |x|}{|x|^{r+1}|y|} \geq \frac{|f^{(r)}(x)| \cdot |y| + |(df^{(r)})^*(x)y| \cdot |x|}{|x|^{r+1}|y|} - c.$$

Осталось применить формулу (9.41). Лемма 9.12 доказана.

10. РАЗРАБОТКА ПРОГРАММЫ ВНЕДРЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ НИР В ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС

Результаты исследований по проекту будут внедрены в образовательный процесс на базовой кафедре "Инфокоммуникационных систем и сетей" факультета радиотехники и кибернетики Московского физико-технического института (Государственного университета) в Институте радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. Программа курса "Анализ устойчивости рассинхронизованных дискретных систем" будет предложена для изучения студентами 5 курса, обучающимися на кафедре, и после утверждения ректоратом МФТИ будет внедрена в лекционную практику. Программа курса приведена в Приложении С.

11. ПАТЕНТНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ/ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР НА ТЕМУ: "СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО РАССИНХРОНИЗОВАННЫМ СИСТЕМАМ, ТЕОРИИ ОБОБЩЕННОГО СПЕКТРАЛЬНОГО РАДИУСА И МОДЕЛИРОВАНИЮ ЭЛЕМЕНТОВ ОПТИЧЕСКИХ СЕТЕЙ"

Данный проект относится к категории фундаментальных научно-исследовательских работ, и патентное исследование, как таковое, не играет здесь существенной роли. Тем не менее, поскольку на втором этапе проекта исследования могли касаться ряда прикладных задач моделирования элементов оптических сетей, мы провели соответствующий анализ основных патентных баз данных, см. Приложение D "Отчет о патентных исследованиях". Более важным в контексте новизны и перспективности полученных результатов является литературный обзор приведенный в этом разделе.

11.1. Рассинхронизованные системы и теория обобщенного спектрального радиуса

Появление современной теории совместного или обобщенного спектрального радиуса было вызвано рядом прикладных задач. Так, еще в 50-х годах XX-го века было замечено, что переход к асинхронному режиму управления и обработки информации позволяет избавиться от многочисленных недостатков, присущих традиционным (синхронным) системам управления. Первые работы такого типа появились в 50-х годах XX-го века (А.М. Ostrowski [149], J. Sklansky [176], G.M. Kranc [127, 128], R.E. Kalman [96] и др.) Интерес к системам с несинхронно работающими элементами усилился в конце 60-х — начале 70-х годов в связи с развитием вычислительной техники и, в особенности, с появлением многопроцессорных вычислительных комплексов, что потребовало разработки специальных классов вычислительных методов (S. Schechter [171], D. Chazan & W. Miranker [67], J.-C. Miellow [143–146], F. Robert [164–168]). Появилось значительное число публикаций с описаниями различных конкретных примеров вычислительных процедур, в которых за счет асинхронности выполнения различных фаз вычислительного алгоритма достигались те или иные преимущества. Оказалось, что классические математические методы плохо приспособлены для анализа рассинхронизованных систем. Это потребовало развития новых методов и новых подходов, которые в существенной мере были разработаны и описаны в опубликованных в 90-х годах монографиях (D.P. Bertsekas, J.N. Tsitsiklis [49]; Е.А. Асарин, В.С. Козякин, М.А. Красносельский, Н.А. Кузнецов [2]; E. Kaszkurewicz, A. Bhaya [97]). Выяснилось, в частности, что асинхронные системы обладают высокой помехоустойчивостью и надежностью, что делает их привлекательным объектом для использования при построении модульных технологий организации процессов управления и обработки информации. В значительной

мере задача анализа асимптотических свойств асинхронных линейных систем может быть сформулирована как задача анализа сходимости бесконечных матричных произведений некоммутируемых наборов матриц при различных предположениях о законах появления отдельных сомножителей в таких произведениях.

Аналогичная задача об оценке сходимости бесконечных матричных произведений, возникшая в 60-х годах XX-го века в вычислительной математике в связи с исследованием так называемых вейвлетов, привела к формальному определению характеристики, дающей ответ на вопрос, будет ли бесконечное произведение матриц сходиться или нет — это так называемый совместный спектральный радиус набора матриц (G.-C. Rota, G. Strang [169, 170]).

Пусть A — некоторая $d \times d$ матрица с элементами из поля $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Как известно, величиной, характеризующей экспоненциальную скорость роста или убывания степеней A^n матрицы A является ее спектральный радиус $\rho(A)$, который может быть выражен в терминах норм ее степеней $\|A^n\|$ с помощью известной формулы Гельфанда $\rho(A) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}$, широко используемой в различных математических конструкциях.

Для матриц понятие спектрального радиуса изначально определяется как максимум модулей ее собственных значений. При рассмотрении семейств матриц определить подобным образом понятие спектрального радиуса невозможно. В этом случае как раз формула Гельфанда послужила основой для определения некоей величины, близкой по смыслу к спектральному радиусу матрицы. Опишем соответствующую конструкцию. Пусть \mathcal{A} — набор $d \times d$ матриц. Тогда предел $\rho(\mathcal{A}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{A_{i_j} \in \mathcal{A}} \|A_{i_1} \cdots A_{i_n}\|^{1/n}$ (обобщенная формула Гельфанда) называется *совместным спектральным радиусом* набора матриц \mathcal{A} (G.-C. Rota, G. Strang [169, 170]). При этом соответствующий предел на деле от выбора нормы $\|\cdot\|$ не зависит. Более того, для любых $n \geq 1$ справедливы оценки $\rho(\mathcal{A}) \leq \sup_{A_{i_j} \in \mathcal{A}} \|A_{i_1} \cdots A_{i_n}\|^{1/n}$, и потому совместный спектральный радиус набора матриц \mathcal{A} может быть определен также с помощью формулы $\rho(\mathcal{A}) = \inf_{n \geq 1} \sup_{A_{i_j} \in \mathcal{A}} \|A_{i_1} \cdots A_{i_n}\|^{1/n}$.

Определение совместного спектрального радиуса в виде предела существенно затрудняет использование соответствующего понятия как в приложениях, так и в теоретических конструкциях. В попытках преодолеть этот недостаток помимо обобщенной формулы Гельфанда для вычисления $\rho(\mathcal{A})$ за последние годы предложено множество других эквивалентных формул, в которых норма в обобщенной формуле Гельфанда заменяется спектральным радиусом (I. Daubechies, J.C. Lagarias [73–76]; L. Elsner [78]), следом матрицы (Q. Chen, X.Zhou [68]) или произвольным однородным неотрицательным многочленом четной степени (P.A. Parrilo, A. Jadbabaie [150]). Использование аналога обобщенной формулы Гельфанда с однородными неотрицательными многочленами может дать более точные оценки $\rho(\mathcal{A})$ за счет того, что множество положительных однородных функций более богато, чем множество норм. В некоторых работах $\rho(\mathcal{A})$ определяется в терминах существования норм специального вида (Н. Барабанов [4–6, 45, 46]; В. Протасов [34, 35, 157–160]) — норм Барабанова или Протасова.

Несколько особняком стоит результат (V.D. Blondel, Yu. Nesterov [51]) устанавливающий, что в том случае, когда элементы всех матриц из \mathcal{A} неотрицательны, справедливы неравенства $r^{-1/n} \rho^{1/n}(A_1^{\otimes n} + \cdots + A_r^{\otimes n}) \leq \rho(\mathcal{A}) \leq \rho^{1/n}(A_1^{\otimes n} + \cdots + A_r^{\otimes n})$, где $A^{\otimes n}$ обозначает n -кратное кронекерово (или тензорное) произведение матрицы A на себя. Здесь представляется несколько удивительным тот факт, что правая и левая части неравенств не содержат смешанных произведений матриц из \mathcal{A} . Эти неравенства теоретически позволяют вычислить спектральный радиус $\rho(\mathcal{A})$ с любой требуемой точностью. Однако, с ростом n размерность матрицы $A_1^{\otimes n} + \cdots + A_r^{\otimes n}$ растет столь быстро, что даже при

умеренных значениях величин $d = 3, 4$, $r = 5, 6$ вычисления становятся практически невыполнимыми. Для случая, когда матрицы из \mathcal{A} произвольны, справедлив несколько более сложный аналог указанной формулы.

Общей чертой всех упомянутых определений совместного спектрального радиуса остается их неконструктивность — в этих определениях величина $\rho(\mathcal{A})$ по-прежнему определяется либо в виде некоего предела, либо как результат некоей “теоремы существования”, что существенно затрудняет анализ свойств совместного спектрального радиуса. Ряд качественных результатов, в которых устанавливается общая скорость сходимости в обобщенной формуле Гельфанда, а также показано, что $\rho(\mathcal{A})$ как функция от \mathcal{A} удовлетворяет условию Липшица и в определенном смысле монотонна, был получен в цикле исследований (F. Wirth [188–192]). Тем не менее, до последнего времени каких-либо эффективно вычисляемых оценок скорости сходимости к пределу в обобщенной формуле Гельфанда (и даже в классической формуле Гельфанда!) не было установлено, что существенно ограничивало область применимости определений совместного спектрального радиуса. В случае одной матрицы это не столь критично поскольку $\rho(A)$, как правило, может быть установлено другими методами. В случае же семейств матриц отсутствие эффективных оценок скорости сходимости величин $\sup_{A_{i_j} \in \mathcal{A}} \|A_{i_1} \cdots A_{i_n}\|^{1/n}$ к $\rho(\mathcal{A})$ более критично, поскольку альтернативных эффективных способов вычисления $\rho(\mathcal{A})$, насколько известно автору, до сих пор не найдено. Этот пробел до известной степени был восполнен соисполнителем проекта (В. Козьякин [10–22, 99–105, 107, 109, 110, 114–116]), которому удалось получить явные вычисляемые оценки скорости сходимости величин $\sup_{A_{i_j} \in \mathcal{A}} \|A_{i_1} \cdots A_{i_n}\|^{1/n}$ к $\rho(\mathcal{A})$ в общем случае. Эти оценки, по-видимому, новы даже для случая матричных семейств, состоящих из одной матрицы! Тем не менее и эти последние теоретические результаты, полученные автором проекта, мало пригодны для практических целей, поскольку даже при умеренных значениях величин размерности матриц $d = 3, 4$ и их числа $r = 5, 6$ в семействе \mathcal{A} необходимые вычисления становятся практически невыполнимыми.

Как оказалось, сложность вычисления совместного спектрального радиуса не кажущаяся и не результат “недостатка способностей” исследователей. В 1990г. один из соисполнителей проекта (В. Козьякин [12]) установил алгебраическую неразрешимость соответствующей задачи (в отличие от задачи вычисления спектрального радиуса для отдельных матриц, которая алгебраически разрешима), а затем и более общий факт — неопределимость этой задачи в ω -минимальных структурах. Позднее (V. Blondel, J.N. Tsitsiklis [54–56]) было установлено, что соответствующая задача, даже если она алгоритмически разрешима, NP-трудна уже в классе матриц с двоичными, 0 или 1, элементами. Тем более удивительным представляется недавний результат (R.M. Jungers, V. Protasov, V.D. Blondel, 2008 [93–95]), утверждающий, что в классе матриц с двоичными элементами вопрос о том, какое из соотношений верно: $\rho(\mathcal{A}) = 0$, $\rho(\mathcal{A}) = 1$ или $\rho(\mathcal{A}) > 1$, может быть решен с помощью конечного алгоритма за полиномиальное время.

В связи с тем, что во всех примерах, которые удалось “просчитать”, совместный спектральный радиус достигался на некотором произведении матриц из \mathcal{A} в 1995г. было высказано предположение (J. Lagarias, Y. Wang [133]) о том, что обобщенный спектральный радиус конечного набора матриц всегда достигается на некотором конечном произведении матриц. Эта “гипотеза о конечности” оказала значительное влияние на активность исследователей совместного спектрального радиуса. Первый контрпример к “гипотезе о конечности” был построен в 2002г. (T. Bousch, J. Mairesse [59]), а соответствующее доказательство существенно опиралось на конструкции теории меры. Позднее (V. D. Blondel, J. Theys, A.A. Владимиров [52, 53]) представили другое доказательство

контрпримера к гипотезе о конечности, которое было основано на комбинаторных свойствах перестановок произведений положительных матриц.

В теории динамических систем обобщенный спектральный радиус используется, в основном, для описания скорости сходимости или расходимости траекторий, описываемых произведениями матриц. В связи с этим, упомянутые выше методы построения контрпримера к гипотезе о конечности оказались не совсем удовлетворительными (с точки зрения лиц, занимающихся анализом динамических систем, конечно), поскольку они не дают достаточно конструктивного описания структуры траекторий с максимальной скоростью роста (или минимальной скоростью убывания). В связи с этим в 2005г. автором проекта (В.С. Козьякин [20, 99, 119]) было предложено еще одно доказательство контрпримера к гипотезе о конечности, выполненное в достаточно традиционной манере теории динамических систем, в основе которого лежали конструкции нелинейного анализа, основанные на теории числа вращения разрывных отображений окружности и анализ введенных В.С. Козьякиным так называемых экстремальных траекторий.

Отметим, впрочем, что все указанные выше три способа опровержения гипотезы Лагариаса-Ванга о конечности основаны на своего рода чистых “теоремах несуществования”, и до настоящего времени не известно ни одного конкретного семейства матриц, для которого гипотеза Лагариаса-Ванга о конечности была бы не верна!

Исследования последних лет показали, что в анализе свойств обобщенного спектрального радиуса весьма перспективным оказывается подход, основанный на применении так называемых норм Барабанова. Напомним, что как было показано в 1988г. (Н. Барабанов [4–6]) число ρ совпадает с совместным спектральным радиусом $\rho(\mathcal{A})$ неприводимого компактного семейства матриц \mathcal{A} тогда и только тогда, когда найдется такая норма $\|\cdot\|$ (норма Барабанова) в \mathbb{K}^d , что $\rho\|x\| \equiv \max_{A \in \mathcal{A}} \|Ax\|$. Несмотря на кажущуюся неконструктивность данного понятия, метод норм Барабанова оказался одним из самых эффективных в исследовании свойств совместного спектрального радиуса. В то же время конструктивных способов построения таких норм в известных публикациях найти не удалось. До последнего времени не было известно даже, как “выглядят” единичные шары таких норм в простейшем двумерном случае, хотя известно (В. Козьякин [19, 20, 99, 117, 119]), что геометрические свойства норм Барабанов принципиальным образом влияют на структуру наиболее быстрорастущих траекторий, порождаемых матричными произведениями, а при построении одного из вариантов опровержения известной гипотезы Лагариаса-Ванга о конечности В.С. Козьякиным существенно использовалась информация о геометрических свойствах единичных шаров норм Барабанова для некоторых специальных семейств матриц. Вместе с тем, несколько парадоксальным представляется тот факт, что в литературе не удалось найти сколько-нибудь детального анализа геометрических свойств единичных шаров норм Барабанова. Лишь в работах (N. Guglielmi, M. Zennaro [83–85]) предприняты попытки выяснения условий, когда норма Барабанова имеет вид политопа.

В связи с этим в 2008-2009г.г. соисполнителем проекта (В. Козьякин [22, 100–105, 107–110]) был проведен цикл исследований, в которых были разработаны численные алгоритмы построения норм Барабанова для неприводимых семейств матриц, позволившие одновременно приближенно вычислять совместный спектральный радиус и получать апостериорные оценки точности приближения совместного спектрального радиуса. Соответствующие алгоритмы были реализованы в системе MATLAB[®] для матриц низких размерностей. Полученные результаты существенно усилили известные до того алгоритмы вычисления совместного спектрального радиуса (R.K. Brayton, C.H. Tong [60, 61]; Н. Барабанов [4–6]; I. Daubechies, J.C. Lagarias [73–76]; G. Gripenberg [82]; M. Maesumi [138–140]).

Таким образом, анализ проблемы вычисления обобщенного спектрального радиуса является одним из ключевых при исследовании устойчивости рассинхронизованных систем, теория которых была создана и изложена в монографии Е.А. Асарина, В.С. Козякина, Н.А. Кузнецова и М.А. Красносельского “Анализ устойчивости рассинхронизованных дискретных систем” [2].

Одним из соисполнителей проекта (В.С. Козякин [12]) впервые дано формальное обоснование тезиса о том, что в общем случае исследование сходимости матричных произведений и вычисления обобщенного спектрального радиуса набора матриц является сложной задачей. В частности, в 1990 году им было показано, что вопрос о сходимости таких произведений является алгебраически неразрешимым, т.е. не может быть решен “формульно”. В 2003г. [18, 113] им было установлено более сильное утверждение о том, что соответствующая задача неопределима в o -минимальных структурах. При этом были разработаны новые конструкции доказательств, более простые в техническом плане и идейном плане.

В 2005г. одним из соисполнителей проекта предложено принципиально новое доказательство контрпримера к гипотезе о конечности Лагариаса-Ванга [19, 20, 99, 118, 119]. В основе доказательства лежит понятие экстремальных траекторий, позволившее конструктивно описать “наиболее быстро растущие траектории”, порождаемые наборами матриц. Определение экстремальных траекторий опирается на понятие экстремальные нормы введенное в 1988г. Н.Е. Барабановым. В работах участников проекта техника экстремальных норм существенно усилена, в частности проведен анализ свойств экстремальных норм наборов двумерных положительных матриц. С помощью метода норм Барабанова было установлено, что в ряде типичных ситуаций анализ сходимости произведений двумерных матриц сводится к исследованию свойств разрывных отображений окружности, сохраняющих ориентацию. В связи с этим было проведено детальное исследование свойств такого класса отображений окружности. Оказалось, что траектории разрывных отображений окружности, сохраняющих ориентацию, так же как и траектории гомеоморфизмов окружности, в некотором естественном смысле могут быть описаны штурмовыми символическими последовательностями, на такие отображения может быть в значительной степени распространена теория числа вращения Пуанкаре.

В 2008-2009г.г. одним из соисполнителей проекта был проведен цикл исследований [22, 100–104, 108–110, 120], в которых были разработаны численные алгоритмы построения норм Барабанова для неприводимых семейств матриц, позволившие одновременно приближенно вычислять совместный спектральный радиус и получать апостериорные оценки точности приближения совместного спектрального радиуса. Соответствующие алгоритмы были реализованы в системе MATLAB[®] для матриц низких размерностей. Полученные результаты существенно усилили известные до того алгоритмы вычисления совместного спектрального радиуса.

В 2008-2009г.г. автором проекта впервые были получены явные вычислимые оценки скорости приближения совместного спектрального радиуса с помощью обобщенной формулы Гельфанда [22, 100–105, 107–110, 120]. Эти оценки оказались новыми даже в классическом случае приближения спектрального радиуса матрицы с помощью обычной формулы Гельфанда! При получении соответствующих оценок показала свою эффективность техника “мер неприводимости”, разработанная автором проекта и А.В. Покровским в другом контексте в 1996г. [25, 26, 122–126].

11.2. Элементы оптических сетей - лазеры на квантовых точках с синхронизованными модами

Синхронизация мод в лазерах служит важным средством генерации коротких оптических импульсов для различных практических приложений от высокоскоростных телекоммуникаций до медицинской диагностики. В частности, монолитные полупроводниковые лазеры с пассивной, гибридной и активной синхронизацией мод являются компактными источниками пикосекундных импульсов с высокой частотой повторения, приспособленных для использования в телекоммуникационных сетевых технологиях, см. [92, 148]. Технология производства нового поколения таких лазеров основана на использовании материалов с квантовыми точками, см. [163]. Подобные лазеры демонстрируют многие преимущества по сравнению с обычными полупроводниковыми лазерами. Эти преимущества, включающие малый ток порога, устойчивость к шумам и сигналу обратной связи (отражениям), малое дрожание импульса и др., изучались, например, в [1, 69, 178]. Недавно было показано, что лазеры на квантовых точках с синхронизованными модами способны генерировать очень короткие импульсы [87, 179]. Благодаря дискретной природе электронных состояний в лазерах на квантовых точках, им свойственен ряд характеристик, отличающих их от обычных полупроводниковых лазеров, см. [161]. Поэтому возник интерес к разработке и анализу новых моделей и развитию новых методов, которые принимают во внимания специфические характеристики лазеров на квантовых точках. Так модели лазеров на квантовых точках должны учитывать процессы электронного обмена между дискретными энергетическими уровнями в квантовых точках и резервуаром с непрерывным спектром в основном материале. Они включают набор различных по скорости процессов, влияющих на качество выходного сигнала и динамику лазера в целом, см. [91]. Уравнения, описывающие динамику процессов обмена, предложены в [90, 184]. Упрощения этих моделей получены в [147, 172] предельным переходом к усеченной системе уравнений, основанном на использовании различия характерных временных шкал процессов, протекающих в материале с квантовыми точками. В [186, 187] разработаны модели типа уравнений с задержкой для лазеров на квантовых точках с синхронизованными модами. Близкий класс моделей типа уравнений в частных производных, включающих уравнения бегущей волны, предложен и изучен в [44].

В соответствующей части Проекта основное внимание уделялось малоизученным бифуркационным механизмам возникновения и нарушения синхронизации мод и сопутствующих ей режимов в моделях лазеров на квантовых точках.

ПРОВЕДЕНИЕ СЕМИНАРОВ ПО ТЕМЕ ИССЛЕДОВАНИЙ

По результатам исследований, был проведен ряд научных семинаров.

- Семинар под названием “Оценка динамики рассинхронизованных систем”. Он состоялся под руководством приглашенного исследователя и руководителя проекта заведующего кафедрой прикладной математики Университета г. Корк (Ирландия) профессора А.В. Покровского 8 декабря 2009 г. в 15.00 в читальном зале библиотеки ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.
- Семинар “Колебания, бифуркации и синхронизация рассинхронизованных систем с памятью и задержками”. Семинар был проведен под руководством приглашенного исследователя и руководителя проекта заведующего кафедрой прикладной математики Университета г. Корк (Ирландия) профессора А.В. Покровского 5

августа 2010 г. в 10.00 в читальном зале библиотеки ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

Программа семинаров и список участников представлены в приложении В.

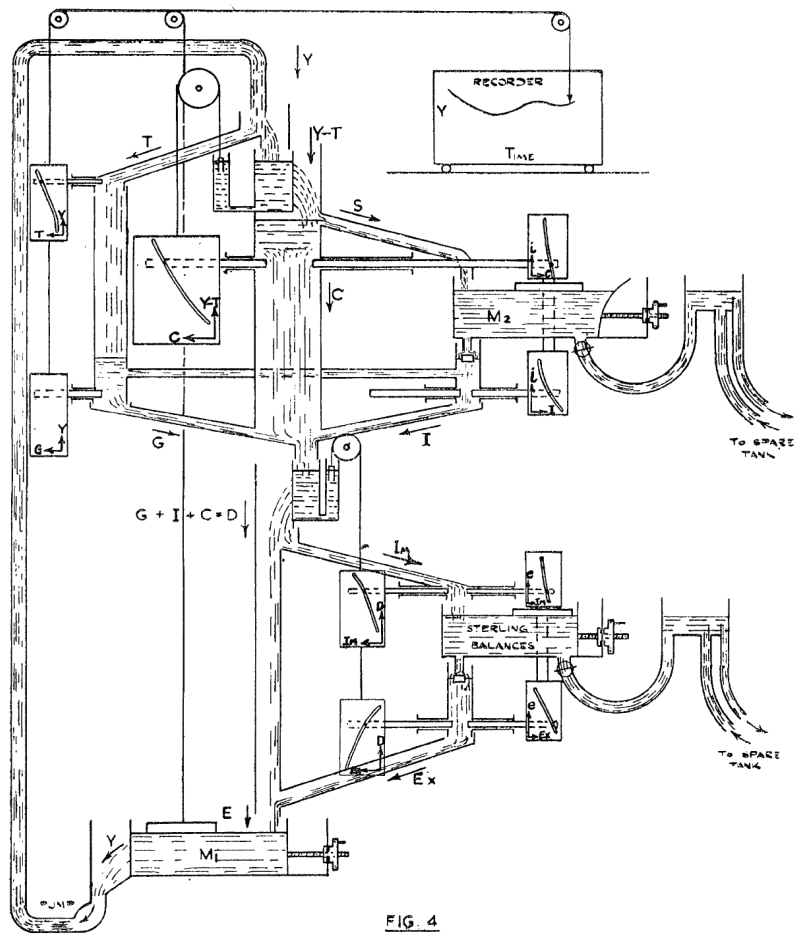


Рисунок 6.1 — Экономический Компьютер — MONIAC (Monetary National Income Automatic Computer), см. [152]. 13 таких устройств были построены в мире различными организациями и тщательно откалиброваны для моделирования макроэкономических процессов в различных странах.

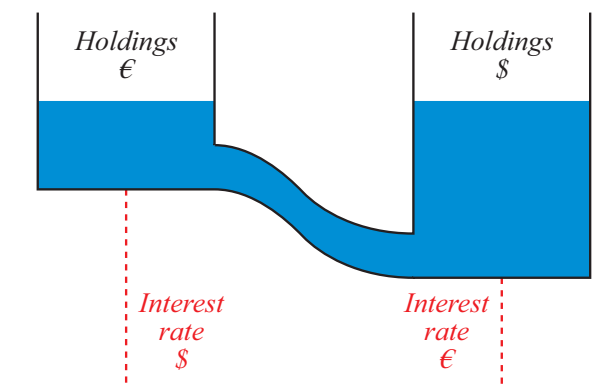


Рисунок 6.2 — Гидромеханическая модель агрегированного поведения репрезентативных инвесторов. Инвестируемые фонды плавно перетекают в форму валюты той страны, где выше базовая процентная ставка.

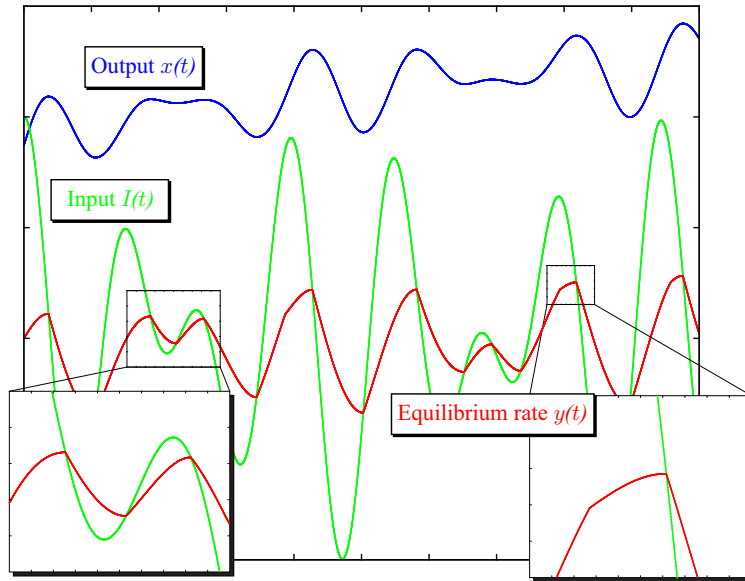


Рисунок 6.3 — Типичная траектория уравнения (6.9) описывающей динамику рассинхронизованной системы содержащей нелинейные элементы с памятью.

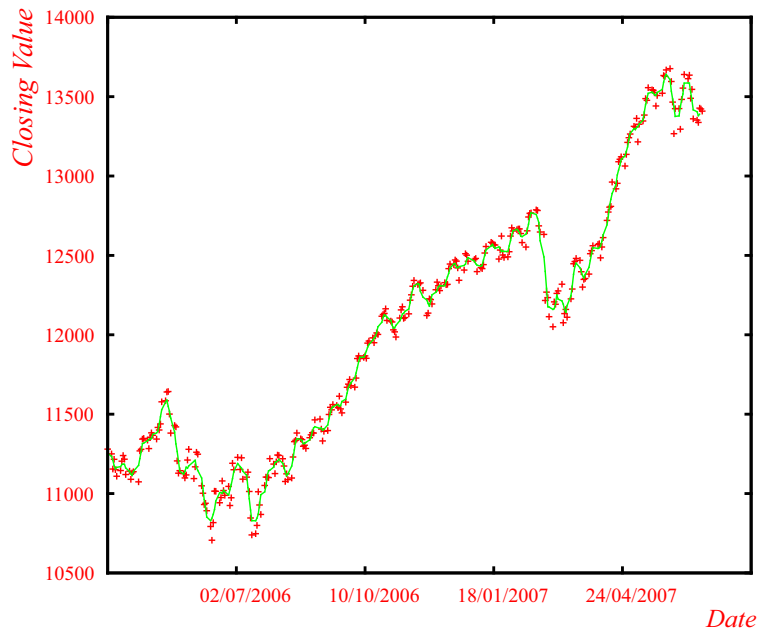


Рисунок 6.4 — Типичные данные для Dow Jones Industrial Average (DJIA). Точки разворота в июле 2006 года и в феврале 2007 года иллюстрируют асимметричное поведение, типичное для динамику рассинхронизованной систему содержащей нелинейные элементы с памятью (см. Рисунок 6.3).

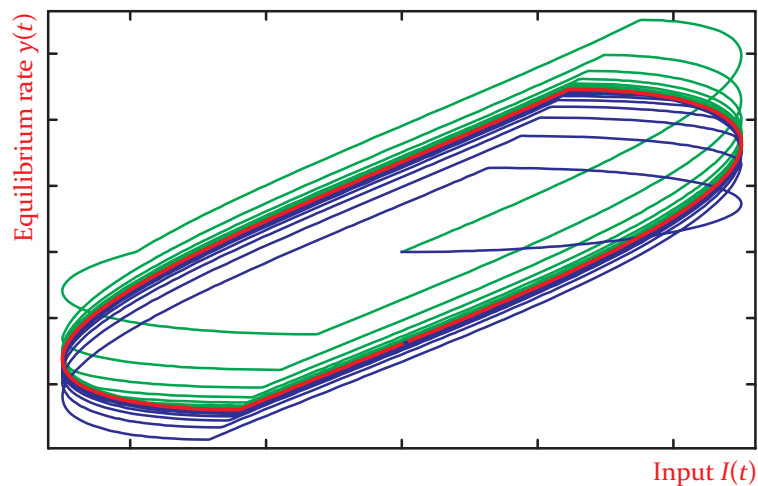


Рисунок 6.5 — Переходные процессы переменной $y(t)$ для простейшего периодического входа $I(t)$ и двух различных начальных состояний.

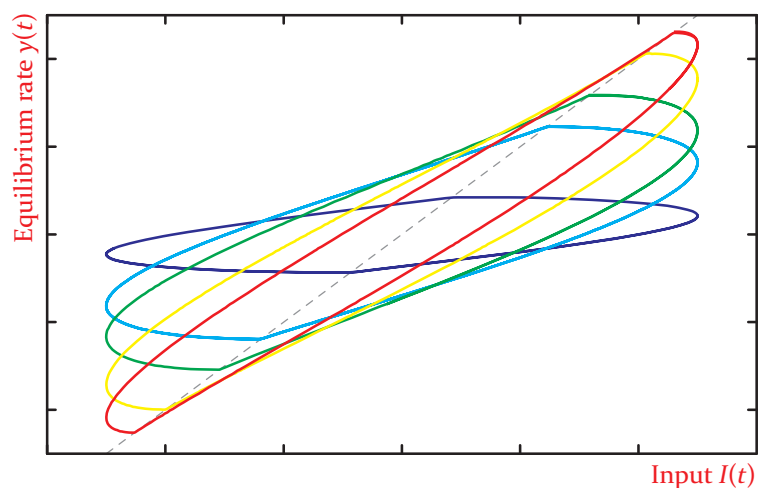


Рисунок 6.6 — Поведение пары $(y(t), I(t))$ для периодических входов различной частоты.

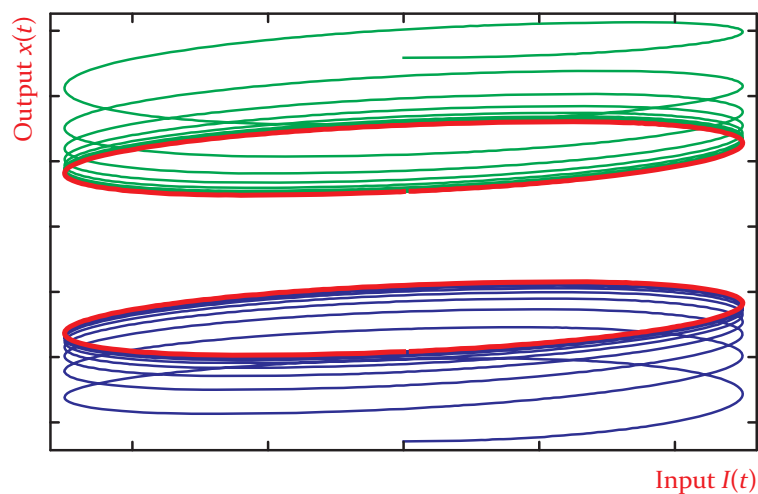


Рисунок 6.7 — Переходные процессы переменной $x(t)$ для простейшего периодического входа $I(t)$ и двух различных начальных состояний. Траектории сходятся к различным предельным петлям (красные замкнутые кривые).

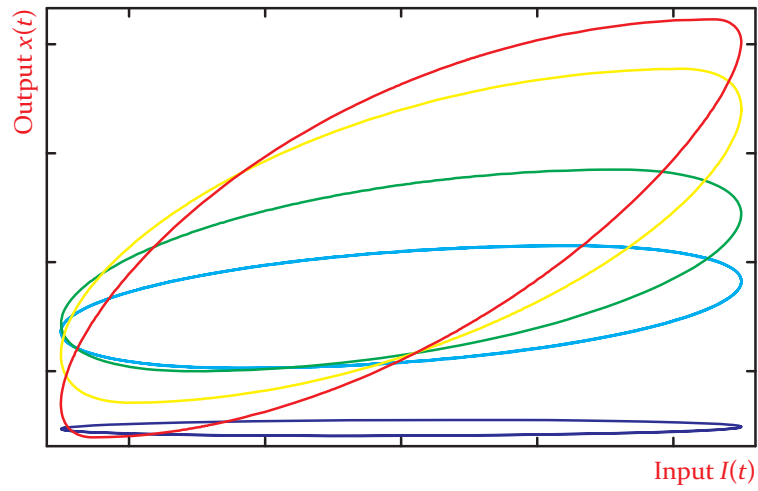


Рисунок 6.8 — Долговременная динамика выходного сигнала $x(t)$ для периодических входов различной частоты, и для одного и того же начального состояния. График соответствующий самой большой частоте показан черным, а самой маленькой частоте — красным.

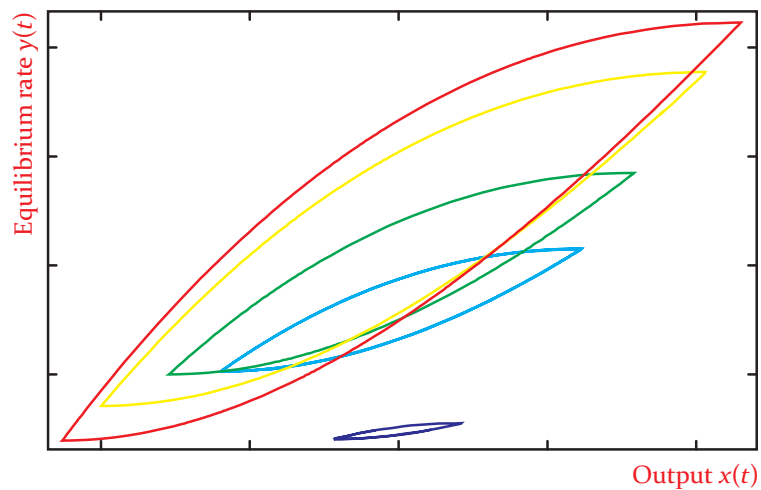


Рисунок 6.9 — Графики выходного сигнала, $x(t)$, относительно графиков равновесного потенциала, $y(t)$, для различных частот входного сигнала.

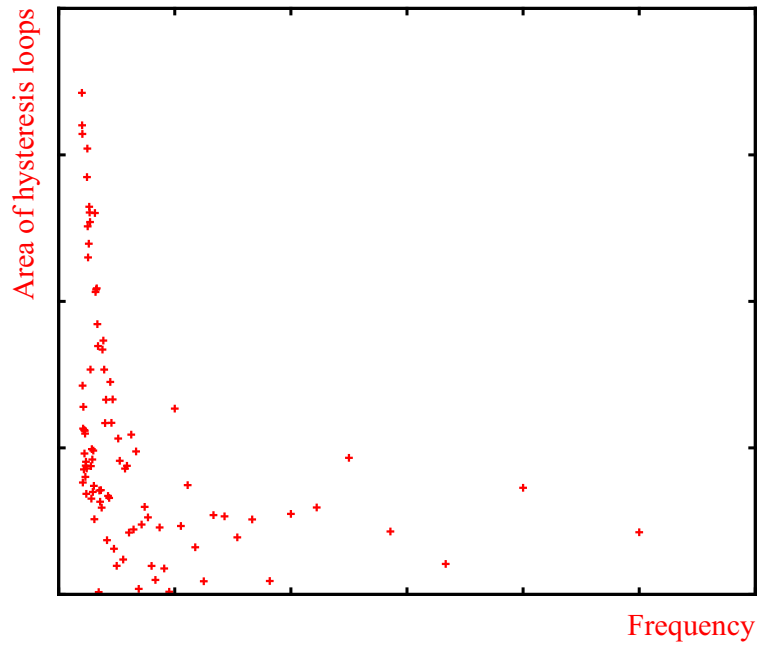


Рисунок 6.10 — Площади $x-y$ петель нормированные на единицу времени, вычисляемые по формуле $\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dx(t)$.

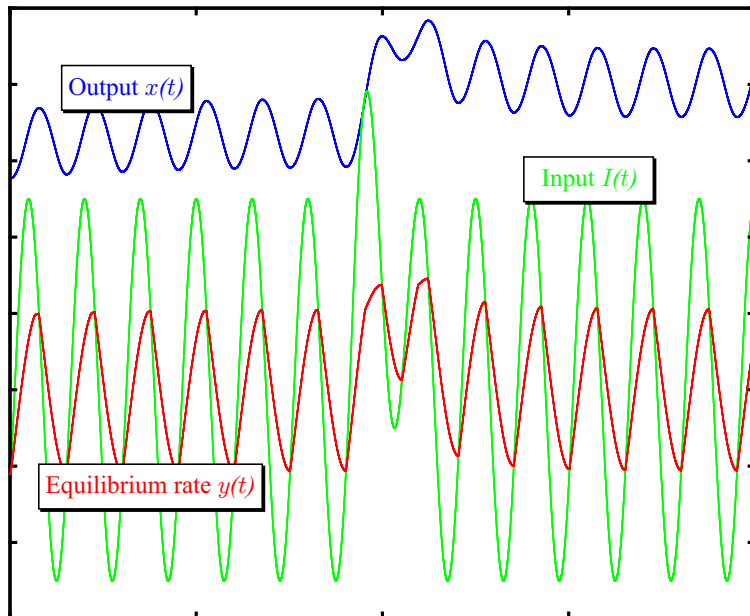


Рисунок 6.11 — Результат шоковых воздействий на систему. Вход $I(t)$ является периодическим, за исключением небольшого промежутка времени, где добавлено шоковое воздействие. Соответствующее значение равновесного потенциала $y(t)$ быстро возвращается к до-шоковому уровню; в тоже время выходная переменная $x(t)$ демонстрирует гидростатическое поведение.

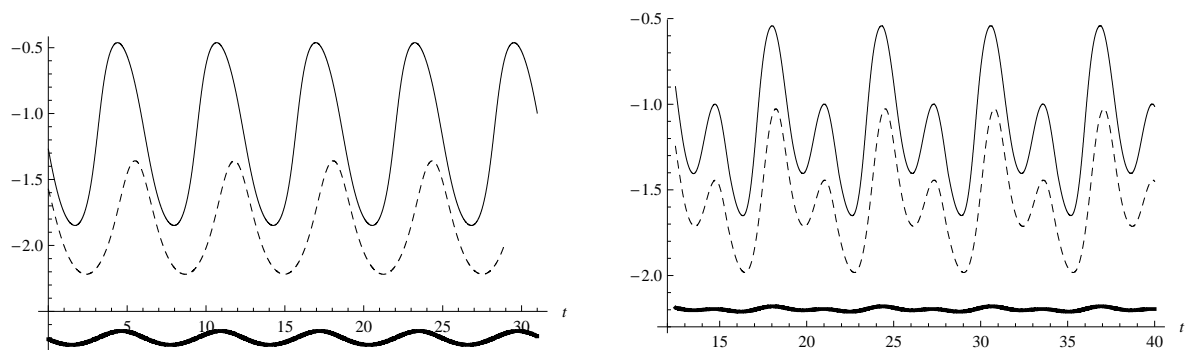


Рисунок 7.1 — Периодические решения уравнения (7.1) при двух различных входах $u(t)$. Верхнее и нижнее периодические решения, показанные сплошными линиями, на каждой панели устойчивы. Решение между ними, показанное пунктирной линией, неустойчиво. Система находится в зоне бистабильности.

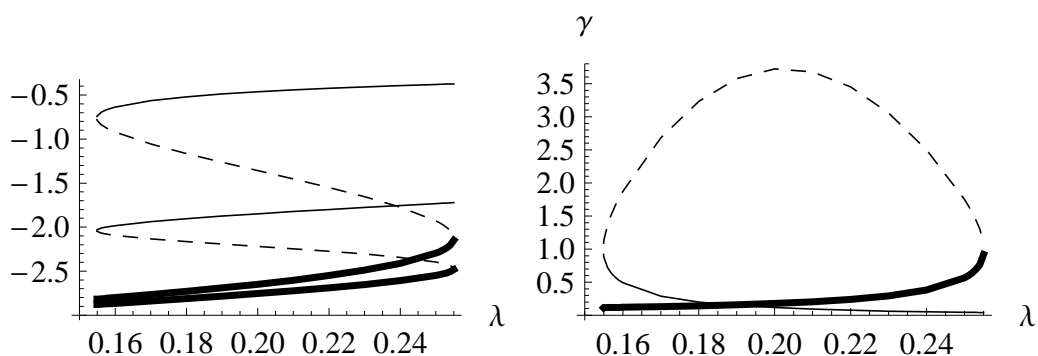


Рисунок 7.2 — Зависимость минимального и максимального значения периодических решений x уравнения (7.1) от параметра λ системы (слева). Точки, где S -образные линии делают разворот, соответствуют бифуркации седло-узла. Стиль линий соответствует рис. 7.1. Правая панель показывает зависимость характеристики γ периодических решений, определяющей их устойчивость, от параметра: решение устойчиво при $\gamma < 1$ и неустойчиво при $\gamma > 1$. В работе предложен эффективный метод вычисления величины γ , играющего роль характеристического мультипликатора периодического решения системы (7.1).

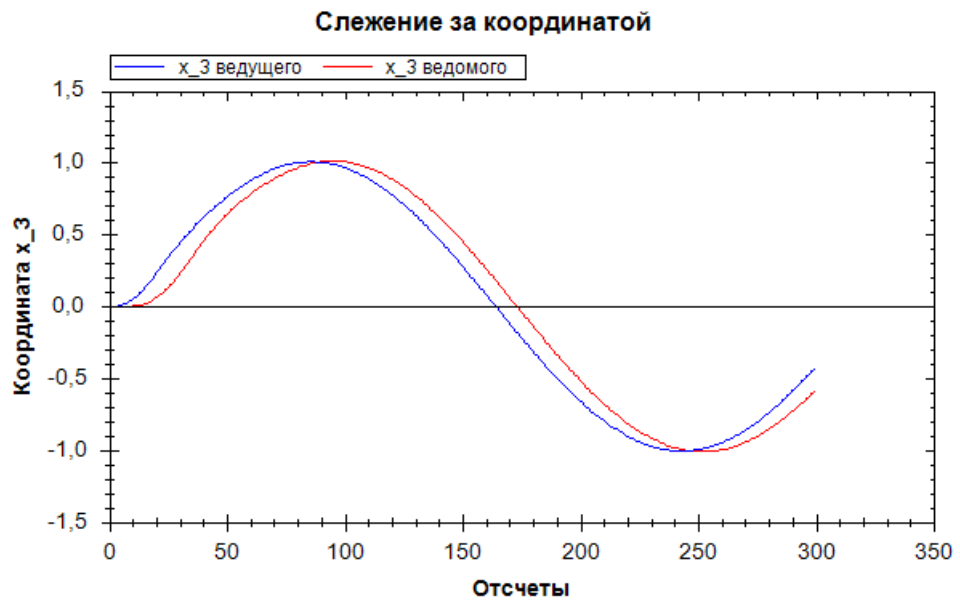


Рисунок 8.1 — Слежение за высотой ведущего БПЛА

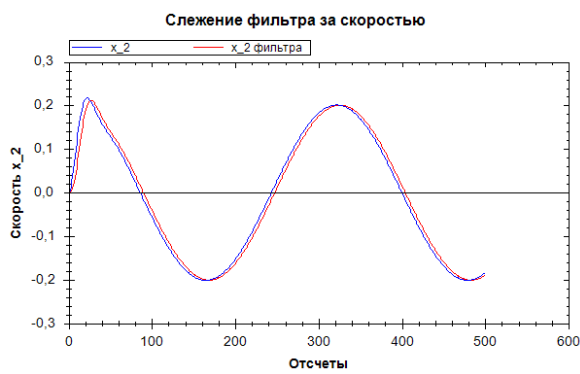


Рисунок 8.2 — Слежение фильтра за скоростью

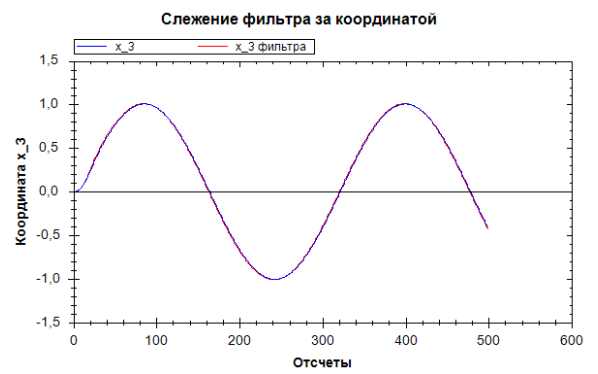


Рисунок 8.3 — Слежение фильтра за координатой

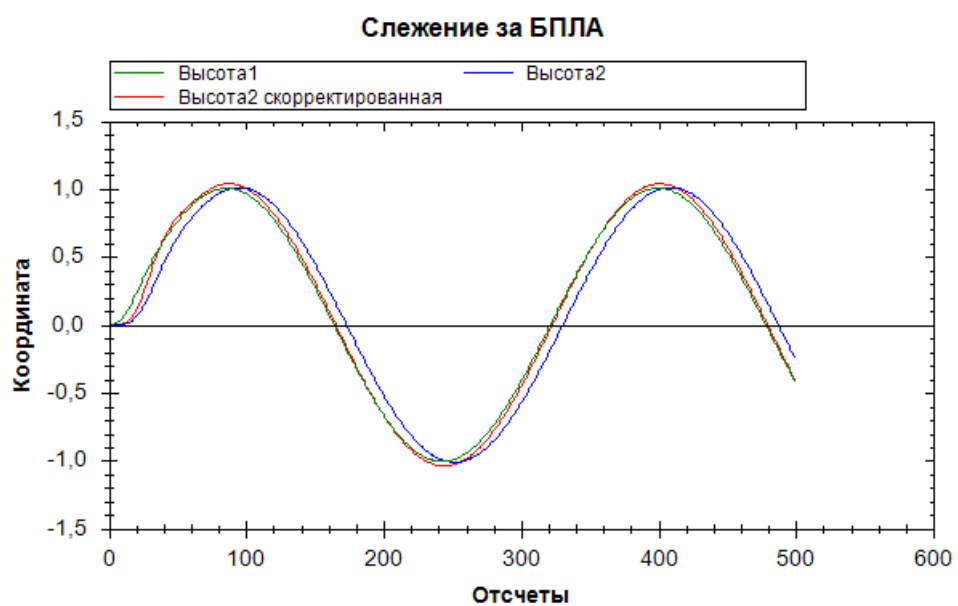


Рисунок 8.4 — Слежение за высотой ведущего БПЛА с учетом расширения фазового пространства

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в рамках настоящего исследования результаты существенно углубляют знания об исследуемых объектах. В то же время проведенные исследования порождают серию вопросов, на которых необходимо сосредоточиться в дальнейших исследованиях.

Разработан метод синтеза устойчивых рассинхронизованных систем с помощью пре- и пост- кодирования, позволяющий аппроксимировать решение синхронизованной системы с помощью решения рассинхронизованной системы большего порядка.

Наиболее важным вопросом, связанными с оценкой совместного спектрального радиуса, остается вопрос о точности и скорости приближения нормы Барабанова в алгоритмах MR1-MR2 и LR1-LR2. Также открыт и вопрос о скорости сходимости приближения совместного спектрального радиуса в этих алгоритмах. Отметим, кроме того, что в разделе 4 были предложены лишь алгоритмы вычисления совместного спектрального радиуса и нормы Барабанова. Вычислительные аспекты применения этих алгоритмов, такие как выбор сетки для представления соответствующих функций, оценка влияния погрешностей вычисления и пр. требуют дополнительного анализа.

Идеи теории асинхронных систем были успешно применены для анализа нелинейной динамики лазеров с очень большим или бесконечным числом степеней свободы. Изучены процессы приводящие к самоорганизации различных элементов системы. Основным объектом исследования являлась синхронизация мод в монолитных полупроводниковых лазерах, которые являются источниками коротких световых импульсов с высокой частотой повторения. При этом основное внимание уделялось малоизученным бифуркационным механизмам возникновения и нарушения синхронизации и сопутствующих ей режимов.

Развито описание нового класса математических моделей, в основе которых лежат рассинхронизованные сети, состоящие из элементов с памятью. Этот класс математических моделей имеет значительный потенциал для адекватного описания различных процессов в экономике, биологии, технике и т.д. Продемонстрирована роль предложенного класса математических моделей в весьма актуальном в настоящее время контексте понимания долговременных последствий экономических кризисов.

Для указанного в предыдущем абзаце класса математических моделей были развиты эффективные методы их качественного и численного исследования. В частности, был предложен локальный метод исследования устойчивости периодических режимов таких систем по отношению к широкому классу возмущений начальных данных, приводящий к простым критериям бифуркаций периодического режима типа седло-узла и бифуркации Хопфа. Эти критерии полезны при численном построении решений методом продолжения по параметру и локализации точек бифуркации. Разработано программное обеспечение, реализующее соответствующие алгоритмы.

Проведено успешное моделирование полученных алгоритмов синтеза устойчивых рассинхронизованных систем. В качестве тестовой была выбрана практически важная задача моделирования динамики полетов нескольких беспилотных летательных аппаратов, включая задачу слежения одного аппарата за другим.

Обоснованы эффективные методы упрощения систем нелинейных уравнений, применимые, в частности, к анализу уравнений, возникающих в теории рассинхронизованных систем. Эти методы основаны на отбрасывании в степенных разложениях соответствующих уравнений слагаемых высоких степеней. Предложен набор полиномиальных критериев, позволяющих судить, в каких случаях такое усечение допустимо при исследовании систем вещественных нелинейных уравнений конечной гладкости.

Проведенные по проекту исследования позволили решить ряд актуальных задач

анализа и синтеза нелинейных рассинхронизованных систем, проблем синхронизации систем с памятью и запаздываниями, задач о динамике, бифуркациях и синхронизации рассинхронизованных систем, проблем моделирования элементов оптических сетей. Вместе с тем, полученные результаты позволили идентифицировать новые важные и перспективные направления дальнейших исследований нелинейных рассинхронизованных систем и создали существенный задел для их проведения.

По окончании проекта результаты НИР будут внедрены в образовательный курс по теории асинхронных систем в МФТИ.

Работа по проекту под руководством приглашенного исследователя - профессора Покровского А.В. (Университет г. Корк, Ирландия), автора новых методов исследования устойчивости рассинхронизованных систем с неполными коррекциями, методов изучения устойчивости, бифуркаций и стабилизации сложных систем с памятью, специалистом в области исследования дискретизаций непрерывных динамических систем, способствовала обеспечению развития устойчивого и эффективного взаимодействия сотрудников Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, молодых ученых, аспирантов и студентов МФТИ с российскими учеными, работающими в Ирландии (Университет г. Корк), закреплению их в российской науке и образовании, использованию их опыта, навыков и знаний в области теории рассинхронизованных систем для развития отечественной системы науки, образования и высоких технологий.

Общение с учеными мирового уровня, выполнение работ под их руководством, несомненно, повышает качество подготовки молодых российских специалистов и способствует закреплению их в сфере науки и образования.

По результатам исследований, выполненных в рамках проекта “Анализ и синтез нелинейных и рассинхронизованных систем”, был проведен ряд научных семинаров в Институте радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН под руководством приглашенного исследователя и руководителя проекта заведующего кафедрой прикладной математики профессора Университета г. Корк (Ирландия) А.В. Покровского. Семинар под названием “Оценка динамики рассинхронизованных систем” состоялся 8 декабря 2009 г.; семинар “Колебания, бифуркации и синхронизация рассинхронизованных систем с памятью и задержками” был проведен 5 августа 2010 г. Программа семинаров приведена в приложении В.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. 35 ghz mode-locking of 1.3 nm quantum dot lasers / M. Kuntz, G. Fiol, M. Lammlin et al. // *Appl. Phys. Lett.* — 2004. — no. 85. — P. 843.
2. Анализ устойчивости рассинхронизованных дискретных систем / Е. А. Асарин, В. С. Козьякин, М. А. Красносельский, Н. А. Кузнецов. — М.: Наука, 1992. — 408 с.
3. Андронов, А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. — 2-е изд. — М.: Физматгиз, 1959. — 914 с.
4. Барабанов, Н. Е. О показателе Ляпунова дискретных включений. I / Н. Е. Барабанов // *Автоматика и телемеханика.* — 1988. — № 2. — С. 40–46.
5. Барабанов, Н. Е. О показателе Ляпунова дискретных включений. II / Н. Е. Барабанов // *Автоматика и телемеханика.* — 1988. — № 3. — С. 24–29.
6. Барабанов, Н. Е. О показателе Ляпунова дискретных включений. III / Н. Е. Барабанов // *Автоматика и телемеханика.* — 1988. — № 5. — С. 17–24.
7. Гельфанд, И. М. Нормированные кольца / И. М. Гельфанд // *Матем. сб.* — 1941. — Т. 9. — С. 3–24.
8. Горин, Е. А. Об асимптотических свойствах многочленов и алгебраических функций от нескольких переменных / Е. А. Горин // *Успехи матем. наук.* — 1961. — Т. 16, № 1 (97). — С. 91–118.
9. Козьякин, В. С. О пренебрежении малыми членами при исследовании нелинейных систем / В. С. Козьякин // *Автоматика и телемеханика.* — 1984. — № 10. — С. 38–43.
10. Козьякин, В. С. О наблюдаемости периодических режимов, возникающих при потере устойчивости положения равновесия импульсных систем / В. С. Козьякин // *Автоматика и телемеханика.* — 1985. — № 9. — С. 42–48.
11. Козьякин, В. С. Абсолютная устойчивость рассинхронизованных систем / В. С. Козьякин // *Доклады АН СССР.* — 1990. — Т. 312, № 5. — С. 1066–1070.
12. Козьякин, В. С. Алгебраическая неразрешимость задачи об абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем / В. С. Козьякин // *Автоматика и телемеханика.* — 1990. — № 6. — С. 41–47.
13. Козьякин, В. С. Об абсолютной устойчивости систем с несинхронно работающими импульсными элементами / В. С. Козьякин // *Автоматика и телемеханика.* — 1990. — № 10. — С. 56–63.
14. Козьякин, В. С. Об анализе устойчивости рассинхронизованных систем методами символической динамики / В. С. Козьякин // *Доклады АН СССР.* — 1990. — Т. 311, № 3. — С. 549–552.
15. Козьякин, В. С. Об устойчивости фазочастотно рассинхронизованных систем при возмущении моментов переключения компонент / В. С. Козьякин // *Автоматика и телемеханика.* — 1990. — № 8. — С. 35–42.

16. Козьякин, В. С. О возмущении линейных рассинхронизованных систем / В. С. Козьякин // *Доклады АН СССР*. — 1991. — Т. 316, № 1. — С. 54–57.
17. Козьякин, В. С. Об устойчивости линейных рассинхронизованных систем с несимметрическими матрицами / В. С. Козьякин // *Автоматика и телемеханика*. — 1991. — № 7. — С. 52–58.
18. Козьякин, В. С. О неопределимости в ϵ -минимальных структурах конечных наборов матриц, бесконечные произведения которых сходятся, ограничены или неограниченны / В. С. Козьякин // *Автоматика и телемеханика*. — 2003. — № 9. — С. 24–41.
19. Козьякин, В. С. Экстремальные нормы, разрывные отображения окружности и контрпример к гипотезе Лагариаса–Ванга о конечности / В. С. Козьякин // *Информационные процессы*. — 2005. — Т. 5, № 4. — С. 301–335.
20. Козьякин, В. С. Структура экстремальных траекторий дискретных линейных систем и гипотеза Лагариаса–Ванга о конечности / В. С. Козьякин // *Информационные процессы*. — 2006. — Т. 6, № 4. — С. 327–363.
21. Козьякин, В. С. О явных априорных оценках совместного спектрального радиуса с помощью обобщенной формулы Гельфанда / В. С. Козьякин. — Рук.
22. Козьякин, В. С. О вычислительных аспектах теории совместного спектрального радиуса / В. С. Козьякин // *Доклады АН*. — 2009. — Т. 427, № 2. — С. 160–164.
23. Козьякин, В. С. Полиномиальные критерии ν -достаточности струй в классах отображений конечной гладкости / В. С. Козьякин // *Доклады АН*. — 2010. — Т. 430, № 5. — С. 596–599.
24. Козьякин, В. С. Метод функционализации параметра в задаче о точках бифуркации / В. С. Козьякин, М. А. Красносельский // *Доклады АН СССР*. — 1980. — Т. 254, № 5. — С. 1061–1064.
25. Козьякин, В. С. Роль свойств типа управляемости в изучении устойчивости рассинхронизованных динамических систем / В. С. Козьякин, А. В. Покровский // *Доклады АН СССР*. — 1992. — Т. 324, № 1. — С. 60–64.
26. Козьякин, В. С. Квазиуправляемость и оценка амплитуд переходных процессов в дискретных системах / В. С. Козьякин, А. В. Покровский // *Известия РАН, серия МММИУ*. — 1997. — Т. 1, № 3. — С. 128–150.
27. Красносельский, М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский. — М.: Наука, 1966. — 332 с.
28. Кузнецов, Н. Моделирование системы слежения с введением дополнительных размерностей в дифференциальное уравнение / Н. Кузнецов, Н. Рябых. — Подготовлена к печати. — 12 рр.
29. Ляхов, А. Аналитическая модель передачи данных в сети ieee 802.16. / А. Ляхов, Д. Лукин // *Автоматика и телемеханика*. — 2009. — по. 11. — Рр. 87–100.
30. Мальгранж, Б. Идеалы дифференцируемых функций / Б. Мальгранж. Библиотека сборника “Математика”. — М.: Мир, 1968. — 132 с.

31. Математическая теория систем / Н. А. Бобылев, В. Г. Болтянский, С. Ю. Всехсвятский и др. — М.: Наука, 1986. — 165 с.
32. *Милнор, Дж.* Особые точки комплексных гиперповерхностей / Дж. Милнор. — М.: Мир, 1971. — 126 с.
33. Новый метод моделирования динамики рассинхронизованных систем, содержащих элементы с памятью / Д. Квилл, М. Красносельский, Н. Кузнецов et al. — Подготовлена к печати. — 15 pp.
34. *Протасов, В. Ю.* Совместный спектральный радиус и инвариантные множества линейных операторов / В. Ю. Протасов // *Фундамент. и прикл. матем.* — 1996. — Т. 2, № 1. — С. 205–231.
35. *Протасов, В. Ю.* Обобщенный совместный спектральный радиус. Геометрический подход / В. Ю. Протасов // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* — 1997. — Т. 61, № 5. — С. 99–136.
36. *Рохлин, В. А.* Начальный курс топологии. Геометрические главы / В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс. — М.: Наука, 1977. — 488 с.
37. *Хорн, Р.* Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. — М.: Мир, 1989. — 655 с.
38. *Abderrahmane, O. M.* On the Lojasiewicz exponent and Newton polyhedron / O. M. Abderrahmane // *Kodai Math. J.* — 2005. — Vol. 28, no. 1. — Pp. 106–110.
39. Analysis of threshold-type behaviour in mathematical models of the intrusion of a novel macroparasite in a host colony / L. Kalachev, T. Kelly, M. O’Callaghan et al. // *Mathematical Medicine & Biology.* — 2010 (to appear). — 400 pp.
40. *Ando, T.* Simultaneous contractibility / T. Ando, M.-H. Shih // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* — 1998. — Vol. 19, no. 2. — Pp. 487–498.
41. *Aulbach, B.* The dichotomy spectrum for noninvertible systems of linear difference equations / B. Aulbach, S. Siegmund // *J. Difference Equ. Appl.* — 2001. — Vol. 7, no. 6. — Pp. 895–913.
42. *Aulbach, B.* A spectral theory for nonautonomous difference equations / B. Aulbach, S. Siegmund // *New trends in difference equations (Temuco, 2000).* — London: Taylor & Francis, 2002. — Pp. 45–55.
43. *Balanov, Z.* On the equivariant hopf bifurcation in hysteretic networks of van der pol oscillators / Z. Balanov, W. Krawcewicz, D. Rachinskii // *Journal of Physics: Conference Series.* — To appear.
44. *Bandelow, U.* Influence of inhomogeneous injection on sidemode suppression in strongly coupled dfb semiconductor lasers / U. Bandelow, H. Wenzel, H. Wunsche // *Electron. Lett.* — 1992. — no. 28. — Pp. 1324–1326.
45. *Barabanov, N.* Lyapunov exponent and joint spectral radius: Some known and new results / N. Barabanov // *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference 2005, Seville, Spain, December 12–15.* — 2005. — Pp. 2332–2337.

46. *Barabanov, N. E.* Asymptotic behavior of extremal solutions and structure of extremal norms of linear differential inclusions of order three / N. E. Barabanov // *Linear Algebra Appl.* — 2008. — Vol. 428, no. 10. — Pp. 2357–2367.
47. *Bekka, K.* The Kuo condition, Thom’s type inequality and (c) -regularity / K. Bekka, S. Koike // *Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku.* — 1996. — no. 952. — Pp. 41–49.
48. *Berger, M. A.* Bounded semigroups of matrices / M. A. Berger, Y. Wang // *Linear Algebra Appl.* — 1992. — Vol. 166. — Pp. 21–27.
49. *Bertsekas, D. P.* Parallel and Distributed Computation. Numerical Methods / D. P. Bertsekas, J. N. Tsitsiklis. — Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989. — 715 pp.
50. Bifurcations in a model of monolithic passively mode-locked semiconductor laser / A. Vladimirov, U. Bandelow, G. Fiol, D. K. M. B. D. P. A. R. D. G., Arsenijevic // *WIAS preprint.* — 2010. — Vol. 1517. — Pp. 1–16.
51. *Blondel, V. D.* Computationally efficient approximations of the joint spectral radius / V. D. Blondel, Y. Nesterov // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* — 2005. — Vol. 27, no. 1. — Pp. 256–272.
52. *Blondel, V. D.* Switched systems that are periodically stable may be unstable / V. D. Blondel, J. Theys, A. A. Vladimirov // Proc. of the Symposium MTNS. — Notre-Dame, USA: 2002.
53. *Blondel, V. D.* An elementary counterexample to the finiteness conjecture / V. D. Blondel, J. Theys, A. A. Vladimirov // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* — 2003. — Vol. 24, no. 4. — Pp. 963–970.
54. *Blondel, V. D.* When is a pair of matrices mortal? / V. D. Blondel, J. N. Tsitsiklis // *Inform. Process. Lett.* — 1997. — Vol. 63, no. 5. — Pp. 283–286.
55. *Blondel, V. D.* The boundedness of all products of a pair of matrices is undecidable / V. D. Blondel, J. N. Tsitsiklis // *Systems Control Lett.* — 2000. — Vol. 41, no. 2. — Pp. 135–140.
56. *Blondel, V. D.* A survey of computational complexity results in systems and control / V. D. Blondel, J. N. Tsitsiklis // *Automatica J. IFAC.* — 2000. — Vol. 36, no. 9. — Pp. 1249–1274.
57. *Bochi, J.* Inequalities for numerical invariants of sets of matrices / J. Bochi // *Linear Algebra Appl.* — 2003. — Vol. 368. — Pp. 71–81.
58. *Bochnak, J.* A converse of the Kuiper-Kuo theorem / J. Bochnak, S. Łojasiewicz // Proceedings of Liverpool Singularities—Symposium, I (1969/70). — Berlin: Springer, 1971. — Pp. 254–261. Lecture Notes in Math., Vol. 192.
59. *Bousch, T.* Asymptotic height optimization for topical IFS, Tetris heaps, and the finiteness conjecture / T. Bousch, J. Mairesse // *J. Amer. Math. Soc.* — 2002. — Vol. 15, no. 1. — Pp. 77–111.
60. *Brayton, R. K.* Stability of dynamical systems: a constructive approach / R. K. Brayton, C. H. Tong // *IEEE Trans. Circuits Syst.* — 1979. — Vol. 26, no. 4. — Pp. 224–234.

61. *Brayton, R. K.* Constructive stability and asymptotic stability of dynamical systems / R. K. Brayton, C. H. Tong // *IEEE Trans. Circuits Syst.* — 1980. — Vol. 27, no. 11. — Pp. 1121–1130.
62. *Caballero, R.* Speculative growth: Hints from the us economy / R. Caballero, E. Farhi, M. L. Hammour // *American Economic Review.* — 2006. — Vol. 96. — Pp. 1159–1192.
63. *Calvo, G. A.* hoenix miracles in emerging markets: recovering without credit from systemic financial crises, / G. A. Calvo, A. Izquierdo, E. Talvi // *NBER Working Paper.* — 2006. — Vol. 12101.
64. *Cerra, V.* Growth dynamics: the myth of economic recovery / V. Cerra, S. C. Saxena // *IMF Working Paper.* — 2005. — Vol. WP/05/147.
65. *Cerra, V.* Growth dynamics: The myth of economic recovery / V. Cerra, S. C. Saxena // *American Economic Review.* — 2008. — Vol. 98.
66. *Chądzynski, J.* A set on which the Łojasiewicz exponent at infinity is attained / J. Chądzynski, T. Krasinski // *Ann. Polon. Math.* — 1997. — Vol. 67, no. 2. — Pp. 191–197.
67. *Chazan, D.* Chaotic relaxation / D. Chazan, W. Miranker // *Linear Algebra Appl.* — 1969. — Vol. 2. — Pp. 199–222.
68. *Chen, Q.* Characterization of joint spectral radius via trace / Q. Chen, X. Zhou // *Linear Algebra Appl.* — 2000. — Vol. 315, no. 1-3. — Pp. 175–188.
69. *Chu, Y.* Measurement of the linewidth enhancement factor of quantum dot lasers using external light injection / Y. Chu, R. V. Penty, I. H. White // *Conference on Lasers and Electro-Optics.* — Tokyo. — Pp. 390–401.
70. *Colella, D.* The characterization of continuous, four-coefficient scaling functions and wavelets / D. Colella, C. Heil // *IEEE Trans. Inform. Theory.* — 1992. — Vol. 38, no. 2, part 2. — Pp. 876–881.
71. *Cross, R.* Modelling macroeconomic flows related to large ensembles of elementary exchange operations / R. Cross, H. McNamara, A. Pokrovskii // *Physica B: Condensed Matter.* — 2008. — Vol. 403. — Pp. 451–455.
72. *D'Acunto, D.* Explicit bounds for the Łojasiewicz exponent in the gradient inequality for polynomials / D. D'Acunto, K. Kurdyka // *Ann. Polon. Math.* — 2005. — Vol. 87. — Pp. 51–61.
73. *Daubechies, I.* Two-scale difference equations. I. Existence and global regularity of solutions / I. Daubechies, J. C. Lagarias // *SIAM J. Math. Anal.* — 1991. — Vol. 22, no. 5. — Pp. 1388–1410.
74. *Daubechies, I.* Sets of matrices all infinite products of which converge / I. Daubechies, J. C. Lagarias // *Linear Algebra Appl.* — 1992. — Vol. 161. — Pp. 227–263.
75. *Daubechies, I.* Two-scale difference equations. II. Local regularity, infinite products of matrices and fractals / I. Daubechies, J. C. Lagarias // *SIAM J. Math. Anal.* — 1992. — Vol. 23, no. 4. — Pp. 1031–1079.

76. *Daubechies, I.* Corrigendum/addendum to: “Sets of matrices all infinite products of which converge” / I. Daubechies, J. C. Lagarias // *Linear Algebra Appl.* — 2001. — Vol. 327, no. 1-3. — Pp. 69–83.
77. Desynchronization of linear systems / A. F. Kleptsyn, M. A. Krasnosel’skiĭ, N. A. Kuznetsov, V. S. Kozjakin // *Math. Comput. Simulation.* — 1984. — Vol. 26, no. 5. — Pp. 423–431.
78. *Elsner, L.* The generalized spectral-radius theorem: an analytic-geometric proof / L. Elsner // *Linear Algebra Appl.* — 1995. — Vol. 220. — Pp. 151–159.
79. Energy dissipation in hydrological systems due to hysteresis / M. Brokate, S. McCarthy, A. Pimenov, A. Pokrovskii // *Environmental Modeling & Assessment.* — To appear.
80. *García Barroso, E.* On the Łojasiewicz numbers. II / E. García Barroso, T. Krasieński, A. Płoski // *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* — 2005. — Vol. 341, no. 6. — Pp. 357–360.
81. *García Barroso, E.* On the Łojasiewicz numbers / E. García Barroso, A. Płoski // *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* — 2003. — Vol. 336, no. 7. — Pp. 585–588.
82. *Gripenberg, G.* Computing the joint spectral radius / G. Gripenberg // *Linear Algebra Appl.* — 1996. — Vol. 234. — Pp. 43–60.
83. *Guglielmi, N.* On the asymptotic properties of a family of matrices / N. Guglielmi, M. Zennaro // *Linear Algebra Appl.* — 2001. — Vol. 322, no. 1-3. — Pp. 169–192.
84. *Guglielmi, N.* Polytope norms and related algorithms for the computation of the joint spectral radius / N. Guglielmi, M. Zennaro // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference 2005, Seville, Spain, December 12–15. — 2005. — Pp. 3007–3012.
85. *Guglielmi, N.* An algorithm for finding extremal polytope norms of matrix families / N. Guglielmi, M. Zennaro // *Linear Algebra Appl.* — 2008. — Vol. 428, no. 10. — Pp. 2265–2282.
86. *Gwoździewicz, J.* The Łojasiewicz exponent of an analytic function at an isolated zero / J. Gwoździewicz // *Comment. Math. Helv.* — 1999. — Vol. 74, no. 3. — Pp. 364–375.
87. High-power picosecond and femtosecond pulse generation from a two-section mode-locked quantum-dot laser / E. U. Rafailov, M. A. Cataluna, W. Sibbett et al. // *Appl. Phys. Lett.* — 2005. — no. 87. — P. 081107.
88. Hopf bifurcation in symmetric systems of coupled oscillators with preisach memory / Z. Balanov, W. Krawcewicz, D. Rachinskii, A. Zhezherun // *Nonlinearity.* — Submitted.
89. Hysteresis in the fundamentals of macroeconomics / R. Cross, H. McNamara, L. Kalachev, A. Pokrovskii // *Working Papers University of Strathclyde Business School.* — 2010. — Vol. 10-08.
90. Impact of intraband relaxation on the performance of a quantum-dot laser / A. Markus, J. Chen, O. Gauthier-Lafaye et al. // *IEEE J. Sel. Top. Quant. Electron.* — 2003. — no. 9. — Pp. 1308–1314.

91. Ingaas dots coupled to a reservoir of nonequilibrium free carriers / J. Gomis-Bresco, S. Dommers, V. Temnov et al. // *IEEE J. Quantum Electron.* — 2009. — no. 45. — Pp. 1121–1128.
92. *Jiang, L. A.* Semiconductor mode-locked lasers as pulse sources for high bit rate data transmission / L. A. Jiang, E. P. Ippen, H. Yokoyama // *Ultrahigh-Speed Optical Transmission Technology.* — Springer. — Pp. 21–51.
93. *Jungers, R.* The joint spectral radius / R. Jungers. — Berlin: Springer-Verlag, 2009. — Vol. 385 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences.* — Pp. xiv+144. — Theory and applications.
94. *Jungers, R. M.* On the finiteness property for rational matrices / R. M. Jungers, V. D. Blondel // *Linear Algebra Appl.* — 2008. — Vol. 428, no. 10. — Pp. 2283–2295.
95. *Jungers, R. M.* Efficient algorithms for deciding the type of growth of products of integer matrices / R. M. Jungers, V. Protasov, V. D. Blondel // *Linear Algebra Appl.* — 2008. — Vol. 428, no. 10. — Pp. 2296–2311.
96. *Kalman, R. E.* A unified approach to the theory of sampling systems / R. E. Kalman, J. Bertram // *J. Franklin Inst.* — 1959. — Vol. 267. — Pp. 405–436.
97. *Kaszakurewicz, E.* Matrix diagonal stability in systems and computation / E. Kaszkurewicz, A. Bhaya. — Boston, MA: Birkhäuser Boston Inc., 2000. — xiv+267 pp.
98. *Kollár, J.* An effective Łojasiewicz inequality for real polynomials / J. Kollár // *Period. Math. Hungar.* — 1999. — Vol. 38, no. 3. — Pp. 213–221.
99. *Kozyakin, V.* A dynamical systems construction of a counterexample to the finiteness conjecture / V. Kozyakin // *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference 2005, Seville, Spain, December 12–15.* — 2005. — Pp. 2338–2343.
100. *Kozyakin, V.* Iterative building of Barabanov norms and computation of the joint spectral radius for matrix sets. — ArXiv.org e-Print archive. — 2008. — October.
101. *Kozyakin, V.* On accuracy of approximation of the spectral radius by the Gelfand formula. — ArXiv.org e-Print archive. — 2008. — October.
102. *Kozyakin, V.* On explicit a priori estimates of the joint spectral radius by the generalized Gelfand formula. — ArXiv.org e-Print archive. — 2008. — October.
103. *Kozyakin, V.* A relaxation scheme for computation of the joint spectral radius of matrix sets. — ArXiv.org e-Print archive. — 2008. — October.
104. *Kozyakin, V.* An explicit Lipschitz constant for the joint spectral radius. — ArXiv.org e-Print archive. — 2009. — September.
105. *Kozyakin, V.* On accuracy of approximation of the spectral radius by the Gelfand formula / V. Kozyakin // *Linear Algebra Appl.* — 2009. — Vol. 431, no. 11. — Pp. 2134–2141.

106. *Kozyakin, V.* Polynomial reformulation of the Kuo criteria for v -sufficiency of map-germs. — ArXiv.org e-Print archive. — 2009. — July.
107. *Kozyakin, V.* An explicit Lipschitz constant for the joint spectral radius / *V. Kozyakin // Linear Algebra Appl.* — 2010. — Vol. 433, no. 1. — Pp. 12–18.
108. *Kozyakin, V.* Iterative building of Barabanov norms and computation of the joint spectral radius for matrix sets / *V. Kozyakin // DCDSB.* — 2010. — July. — Vol. 14, no. 1. — Pp. 143–158.
109. *Kozyakin, V.* Max-Relaxation iteration procedure for building of Barabanov norms: Convergence and examples. — ArXiv.org e-Print archive. — 2010. — February.
110. *Kozyakin, V.* On explicit a priori estimates of the joint spectral radius by the generalized Gelfand formula / *V. Kozyakin // Differential Equations and Dynamical Systems.* — 2010. — Vol. 18, no. 1 & 2. — Pp. 91–103.
111. *Kozyakin, V.* Polynomial reformulation of the Kuo criteria for v -sufficiency of map-germs / *V. Kozyakin // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B.* — 2010. — Vol. 14, no. 3. — Pp. 587–602.
112. *Kozyakin, V.* Sequences of arbitrages. — ArXiv.org e-Print archive. — 2010. — April.
113. *Kozyakin, V. S.* Indefinability in o -minimal structures of finite sets of matrices whose infinite products converge and are bounded or unbounded / *V. S. Kozyakin // Avtomat. i Telemekh.* — 2003. — no. 9. — Pp. 24–41. — in Russian, translation in Autom. Remote Control 64 (2003), no. 9, 1386–1400.
114. *Kozyakin, V. S.* Sturmian sequences generated by order preserving circle maps: Preprint 11/2003 / *V. S. Kozyakin.* — Cork: Boole Centre for Research in Informatics, University College Cork — National University of Ireland, 2003. — May.
115. *Kozyakin, V. S.* Discontinuous order preserving circle maps versus circle homeomorphisms: Preprint 12/2003 / *V. S. Kozyakin.* — Cork: Boole Centre for Research in Informatics, University College Cork — National University of Ireland, 2003. — May.
116. *Kozyakin, V. S.* Asynchronous systems: A short survey and problems: Preprint 13/2003 / *V. S. Kozyakin.* — Cork: Boole Centre for Research in Informatics, University College Cork — National University of Ireland, 2003. — May.
117. *Kozyakin, V. S.* Extremal norms, discontinuous circle maps and a counterexample to the finiteness conjecture / *V. S. Kozyakin // Information Processes.* — 2005. — Vol. 5, no. 4. — Pp. 301–335. — in Russian.
118. *Kozyakin, V. S.* Proof of a counterexample to the finiteness conjecture in the spirit of the theory of dynamical systems: Preprint 1005 / *V. S. Kozyakin.* — Berlin: Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, 2005. — January.
119. *Kozyakin, V. S.* Structure of extremal trajectories of discrete linear systems and the finiteness conjecture / *V. S. Kozyakin // Automat. Remote Control.* — 2007. — Vol. 68, no. 1. — Pp. 174–209.

120. *Kozyakin, V. S.* On the computational aspects of the theory of joint spectral radius / V. S. Kozyakin // *Dokl. Akad. Nauk.* — 2009. — Vol. 427, no. 2. — Pp. 160–164. — in Russian, translation in *Doklady Mathematics* 80 (2009), no. 1, 487–491.
121. *Kozyakin, V. S.* Polynomial criteria for the v -sufficiency of jets in classes of finitely smooth mappings / V. S. Kozyakin // *Dokl. Akad. Nauk.* — 2010. — Vol. 430, no. 5. — Pp. 596–599. — in Russian, translation in *Doklady Mathematics* 81 (2010), no. 1, 101–104.
122. *Kozyakin, V. S.* Transients in quasi-controllable systems. Overshooting, stability and instability / V. S. Kozyakin, N. A. Kuznetsov, A. V. Pokrovskii // Preprints of the 12th World IFAC Congress, Sydney, Australia, 18–23 July, 1993. — 1993. — Pp. 465–468.
123. *Kozyakin, V. S.* Quasi-controllability and estimates of amplitudes of transient regimes in discrete systems / V. S. Kozyakin, N. A. Kuznetsov, A. V. Pokrovskii // Proceedings of CESA'98 IMACS-IEEE Multiconference, Hammamet, Tunisia, April 1–4, 1998 / Ed. by P. Borne, M. Ksouri, A. El Kamel. — Vol. 1. — CD-ROM ISBN 2-9512309-0-7, 1998. — Pp. 266–271.
124. *Kozyakin, V. S.* The role of controllability-type properties in the study of the stability of desynchronized dynamical systems / V. S. Kozyakin, A. V. Pokrovskii // *Dokl. Akad. Nauk.* — 1992. — Vol. 324, no. 1. — Pp. 60–64. — in Russian, translation in *Soviet Phys. Dokl.* 37 (1992), no. 5, 213–215.
125. *Kozyakin, V. S.* Estimates of amplitudes of transient regimes in quasi-controllable discrete systems: CADSEM Report 96-005 / V. S. Kozyakin, A. V. Pokrovskii. — Geelong, Australia: Deakin University, 1996.
126. *Kozyakin, V. S.* Quasi-controllability and estimation of the amplitudes of transient regimes in discrete systems / V. S. Kozyakin, A. V. Pokrovskii // *Izv., Ross. Akad. Estestv. Nauk, Mat. Mat. Model. Inform. Upr.* — 1997. — Vol. 1, no. 3. — Pp. 128–150. — in Russian.
127. *Kranc, G. M.* Compensation of an error sampled system by a multirate controller. 2 / G. M. Kranc // *AIEE Trans.* — 1957. — Vol. 76. — Pp. 149–158.
128. *Kranc, G. M.* Input-output analysis of multirate feedback systems / G. M. Kranc // *IRE Trans. Automat. Contr.* — 1957. — Vol. 3. — Pp. 21–28.
129. *Krasnosel'skii, M. A.* Systems with Hysteresis / M. A. Krasnosel'skii, A. V. Pokrovskii. — New York: Springer-Verlag, 1989. — 400 pp.
130. *Kuiper, N. H.* C^1 -equivalence of functions near isolated critical points / N. H. Kuiper // Symposium on Infinite-Dimensional Topology (Louisiana State Univ., Baton Rouge, La., 1967). — Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1972. — Pp. 199–218. *Ann. of Math. Studies*, No. 69.
131. *Kuo, T.-C.* On C^0 -sufficiency of jets of potential functions / T.-C. Kuo // *Topology.* — 1969. — April. — Vol. 8. — Pp. 167–171.
132. *Kuo, T.-C.* Characterizations of v -sufficiency of jets / T.-C. Kuo // *Topology.* — 1972. — Vol. 11. — Pp. 115–131.

133. *Lagarias, J. C.* The finiteness conjecture for the generalized spectral radius of a set of matrices / J. C. Lagarias, Y. Wang // *Linear Algebra Appl.* — 1995. — Vol. 214. — Pp. 17–42.
134. *Lenarcik, A.* On the Łojasiewicz exponent of the gradient of a polynomial function / A. Lenarcik // *Ann. Polon. Math.* — 1999. — Vol. 71, no. 3. — Pp. 211–239.
135. Locking characteristics of a 40ghz hybrid mode-locked monolithic quantum dot laser / A. Vladimirov, M. Wolfrum, G. Fiol et al. // *Proc. of SPIE 7720.* — 2010. — Pp. 77200Y–1–8.
136. *Łojasiewicz, S.* Sur le problème de la division / S. Łojasiewicz // *Studia Math.* — 1959. — Vol. 18. — Pp. 87–136.
137. *Łojasiewicz, S.* Introduction to complex analytic geometry / S. Łojasiewicz. — Basel: Birkhäuser Verlag, 1991. — xiv+523 pp.
138. *Maesumi, M.* An efficient lower bound for the generalized spectral radius of a set of matrices / M. Maesumi // *Linear Algebra Appl.* — 1996. — Vol. 240. — Pp. 1–7.
139. *Maesumi, M.* Construction of optimal norms for semi-groups of matrices / M. Maesumi // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference 2005, Seville, Spain, December 12–15. — 2005. — Pp. 3013–3018.
140. *Maesumi, M.* Optimal norms and the computation of joint spectral radius of matrices / M. Maesumi // *Linear Algebra Appl.* — 2008. — Vol. 428, no. 10. — Pp. 2324–2338.
141. Mathematical models of hydrological systems with preisach hysteresis / P. Krejci, P. O’Kane, A. Pokrovskii, D. Rachinskii // *Physica D.* — Submitted.
142. *Mayergoyz, I. D.* Mathematical Models of Hysteresis / I. D. Mayergoyz. — New York: Springer-Verlag, 1991. — 400 pp.
143. *Miellow, J.-C.* Iterations chaotiques a retards / J.-C. Miellow // *C. R. Acad. sci. A.* — 1974. — Vol. 278. — Pp. 957–960.
144. *Miellow, J.-C.* Iterations chaotiques a retards / J.-C. Miellow // *Rev. automat. inform. et rech. operat.* — 1975. — Vol. 1, no. 9. — Pp. 55–82.
145. *Miellow, J.-C.* Iterations chaotiques a retards, etudes de la convergence dans le cas d’espaces partiellement ordonne / J.-C. Miellow // *C. R. Acad. sci. A.* — 1975. — Vol. 280. — Pp. 233–236.
146. *Miellow, J.-C.* La notion de h-accretivite, applications / J.-C. Miellow, P. Comte, P. Spiteri // *C. R. Acad. sci. A.* — Vol. 283. — Pp. 655–658.
147. A model for mode-locking in quantum dot lasers / E. Viktorov, P. Mandel, A. Vladimirov, U. Bandelow // *Appl. Phys. Lett.* — 2006. — no. 88. — P. 201102.
148. Monolithic 40 ghz mqw mode-locked lasers on gainasp/inp with low pulse widths and controlled q-switching / B. Huttl, R. Kaiser, C. Kindel et al. // *Appl. Phys. Lett.* — 2006. — no. 88. — P. 221104.
149. *Ostrowski, A. M.* On the linear iterative procedures for symmetric matrices / A. M. Ostrowski // *Rend. math. e appl.* — 1954. — Vol. 14, no. 1–2. — Pp. 140–163.

150. Parrilo, P. A. Approximation of the joint spectral radius using sum of squares / P. A. Parrilo, A. Jadbabaie // *Linear Algebra Appl.* — 2008. — Vol. 428, no. 10. — Pp. 2385–2402.
151. Periodic sequences of arbitrage: A tale of four currencies / R. Cross, V. Kozyakin, B. O’Callaghan, A. Pokrovskii. — Подготовлена к печати. — 28 pp.
152. Phillips, A. W. Mechanical models in economic dynamics / A. W. Phillips // *Economica.* — 1950. — Vol. 17. — Pp. 283–305.
153. Plischke, E. Duality results for the joint spectral radius and transient behavior / E. Plischke, F. Wirth // *Linear Algebra Appl.* — 2008. — Vol. 428, no. 10. — Pp. 2368–2384.
154. Plischke, E. Duality results for the joint spectral radius and transient behavior / E. Plischke, F. Wirth, N. Barabanov // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference 2005, Seville, Spain, December 12–15. — 2005. — Pp. 2344–2349.
155. Pokrovskii, A. Effect of positive feedback on devil’s staircase input-output relationship / A. Pokrovskii, D. Rachinskii // *Journal of Nonlinear Science.* — Submitted.
156. Preisach, F. Über die magnetische nachwirkung / F. Preisach // *Zeitschrift für Physik.* — 1935. — Vol. 94. — Pp. 277–302.
157. Protasov, V. The geometric approach for computing the joint spectral radius / V. Protasov // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference 2005, Seville, Spain, December 12–15. — 2005. — Pp. 3001–3006.
158. Protasov, V. Applications of the joint spectral radius to some problems of functional analysis, probability and combinatorics / V. Protasov // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference 2005, Seville, Spain, December 12–15. — 2005. — Pp. 3025–3030.
159. Protasov, V. Y. Extremal L_p -norms of linear operators and self-similar functions / V. Y. Protasov // *Linear Algebra Appl.* — 2008. — Vol. 428, no. 10. — Pp. 2339–2356.
160. Protasov, V. Yu. A generalization of the joint spectral radius: The geometrical approach / V. Yu. Protasov // *Facta Univ. Ser. Math. Inform.* — 1998. — no. 13. — Pp. 19–23.
161. Quantum Dot Lasers / V. V. M. Ustinov, A. Zhukov, A. Egorov, N. Maleev. — Oxford University Press.
162. Quantum-dot mode-locked lasers with dual mode optical injection / T. Habruseva, S. O’Donoghue, N. Rebrova et al. // *IEEE Photonics Technology Letters.* — 2010. — Vol. 22. — Pp. 359–361.
163. Rafailov, E. Mode-locked quantum-dot lasers / E. Rafailov, M. Cataluna, W. Sibbett // *Nature Photonics.* — 2007. — no. 1. — Pp. 395–401.
164. Robert, F. Block h-matrices et convergence des methodes iteratives classiques par blocks / F. Robert // *Linear Algebra Appl.* — 1969. — Vol. 2, no. 2. — Pp. 223–265.

165. *Robert, F.* Methodes iteratives serie parallele / F. Robert // *C. R. Acad. sci. A.* — 1970. — Vol. 271. — Pp. 847–850.
166. *Robert, F.* Contraction en norme vectorielle: convergence d'iterations chaotiques pour des equations non lineaires de point fixe a plusieurs variables / F. Robert // *Linear Algebra Appl.* — 1976. — Vol. 13. — Pp. 19–35.
167. *Robert, F.* Convergence locale d'iterations chaotiques lineaires / F. Robert // *C. R. Acad. sci. A.* — 1977. — Vol. 284. — Pp. 679–682.
168. *Robert, F.* Iterations chaotiques serie parallele pour des equations nonlineaires de point fixe / F. Robert, M. Charnay, F. Musy // *Aplikace Matematicky.* — 1975. — no. 20. — Pp. 1–38.
169. *Rota, G.-C.* A note on the joint spectral radius / G.-C. Rota, G. Strang // *Indag. Math.* — 1960. — Vol. 22. — Pp. 379–381.
170. *Rota, G.-C.* A note on the joint spectral radius / G.-C. Rota, W. G. Strang // *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A.* — 1960. — Vol. 63. — Pp. 379–381.
171. *Schechter, S.* Relaxation methods for convex problems / S. Schechter // *SIAM J. Numer. Anal.* — 1968. — Vol. 5. — Pp. 601–612.
172. Sensitivity of quantum-dot semiconductor lasers to optical feedback / D. O'Brien, S. Hegarty, G. Huyet, A. Uskov // *Opt. Lett.* — 2004. — no. 29. — Pp. 1–3.
173. *Shih, M.-H.* Fritz John's convexity theorem and discrete dynamics / M.-H. Shih // *Trends in Mathematics. Information Center for Mathematical Sciences.* — 1999. — Vol. 2, no. 1. — Pp. 66–68. http://trends.mathnet.or.kr/mathnet/kms_tex/973030.pdf.
174. *Shih, M.-H.* Simultaneous Schur stability / M.-H. Shih // *Linear Algebra Appl.* — 1999. — Vol. 287, no. 1-3. — Pp. 323–336.
175. *Shih, M.-H.* Asymptotic stability and generalized Gelfand spectral radius formula / M.-H. Shih, J.-W. Wu, C.-T. Pang // *Linear Algebra Appl.* — 1997. — Vol. 252. — Pp. 61–70.
176. *Sklansky, J.* Network compensation of error-sampled feedback systems: Ph.D. thesis. — N.Y., 1955. — 217 pp.
177. Stability results for a soil model with singular hysteretic hydrology / P. Krejci, P. O'Kane, A. Pokrovskii, D. Rachinskii // *WIAS preprint.* — 2008. — Vol. 1341. — Pp. 1–26.
178. Status and trends of short pulse generation using mode-locked lasers based on advanced quantum-dot active media / L. Shi, Y. H. Chen, B. Xu, Z. C. Wang // *J. Phys. D: Appl. Phys.* — 2007. — no. 40. — Pp. R307–318.
179. Subpicosecond high-power mode locking using flared waveguide monolithic quantum-dot lasers / M. G. Thompson, A. Rae, R. L. Sellin et al. // *Appl. Phys. Lett.* — 2006. — no. 88. — P. 133119.

180. Systems with hysteresis in mathematical biology via a canonical example / A. Pimenov, T. Kelly, A. Korobeinikov et al. // *Clustering Algorithms and Mathematical Modeling*. — New York: Nova Science Publishers, Inc., 2010.
181. *Theys, J.* Joint Spectral Radius: Theory and Approximations: Ph.D. thesis / Faculté des sciences appliquées, Département d'ingénierie mathématique, Center for Systems Engineering and Applied Mechanics. — Université Catholique de Louvain, 2005. — May. — 189 pp.
182. Topological degree in analysis of canard-type trajectories in 3-d systems / A. Pokrovskii, D. Rachinskii, V. Sobolev, A. Zhezherun // *arXiv:1004.3867v1*. — Submitted in *Applicable Analysis: Int. J.*
183. *Trotman, D. J. A.* Stratifications and finite determinacy / D. J. A. Trotman, L. C. Wilson // *Proc. London Math. Soc. (3)*. — 1999. — Vol. 78, no. 2. — Pp. 334–368.
184. Two-state switching and dynamics in quantum dot two-section lasers / A. Markus, M. Rossetti, V. Calligari et al. // *J. Appl. Phys.* — 2006. — no. 100. — P. 113104.
185. *Vladimirov, A.* Numerical study of dynamical regimes in a monolithic passively mode-locked semiconductor laser / A. Vladimirov, A. Pimenov, D. Rachinskii // *IEEE Journal of Quantum Electronics*. — 2009. — Vol. 45. — Pp. 462–468.
186. *Vladimirov, A.* Model for passive mode-locking in semiconductor lasers / A. Vladimirov, D. Turaev // *Phys. Rev. A*. — 2005. — no. 72. — P. 033808.
187. *Vladimirov, A.* Delay differential equations for mode-locked semiconductor lasers / A. Vladimirov, D. Turaev, G. Kozyreff // *Opt. Lett.* — 2004. — no. 29. — Pp. 1221–1223.
188. *Wirth, F.* On the calculation of time-varying stability radii / F. Wirth // *Internat. J. Robust Nonlinear Control*. — 1998. — Vol. 8, no. 12. — Pp. 1043–1058.
189. *Wirth, F.* The generalized spectral radius and extremal norms / F. Wirth // *Linear Algebra Appl.* — 2002. — Vol. 342. — Pp. 17–40.
190. *Wirth, F.* A monotonicity property of the joint spectral radius. — 2004.
191. *Wirth, F.* The generalized spectral radius is strictly increasing / F. Wirth // *Linear Algebra Appl.* — 2005. — Vol. 395. — Pp. 141–153.
192. *Wirth, F.* On the structure of the set of extremal norms of a linear inclusion / F. Wirth // *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005 Seville, Spain, December 12–15*. — 2005. — Pp. 3019–3024.

ПРИЛОЖЕНИЕ А: ЛИСТИНГ ПРОГРАММЫ В СИСТЕМЕ MATLAB

В этом разделе приводится листинг программы в системе MATLAB[®], использованной для вычислений в примере 4.24.

```
%% Initialization

% Closing of all graphs, clearing of all variables and of command
% window
close all;
clear all;
clc;
commandwindow;

% Specifying the number of points for the representation of the
% boundary of the Barabanov norm and making it even.
npoints=3000;
npoints=2*floor(npoints/2);

% Specifying the maximum number of iterations and the tolerance
% for computation of the J.S.R.
niter=1000;
tolerance=0.001;

% Specifying the pair of matrices for which the Barabanov norm
% and the J.S.R. are computed
A=[1,1;0,1];
B=[0.8,0.6;-0.6,0.8];

% Discretized angle array (phi) and radii array (R) to represent
% the boundary of the Barabanov norm in polar coordinates as the
% graph of the function R(phi).
phi=-pi:2*pi/npoints:pi;
sinphi=sin(phi(2)-phi(1));
sinphi2=sin(phi(3)-phi(1));
sinhalf=sinphi/sinphi2;
R=ones(1,npoints+1);

% Initialization of auxiliary variables
rAp=ones(1,npoints+1);
rBp=ones(1,npoints+1);
nA=ones(1,npoints+1);
nB=ones(1,npoints+1);
RA=ones(1,npoints+1);
RB=ones(1,npoints+1);
RAB=ones(1,npoints+1);
RABx=ones(1,npoints+1);
iR=ones(1,npoints+1);
iRA=ones(1,npoints+1);
iRB=ones(1,npoints+1);

%% Transforms in polar coordinates
```

```

phiA=atan2(A(2,1)*cos(phi)+A(2,2)*sin(phi),A(1,1)*cos(phi)+...
    A(1,2)*sin(phi));
rA=sqrt((A(1,1)*cos(phi)+A(1,2)*sin(phi)).^2+(A(2,1)*cos(phi)+...
    A(2,2)*sin(phi)).^2);
phiB=atan2(B(2,1)*cos(phi)+B(2,2)*sin(phi),B(1,1)*cos(phi)+...
    B(1,2)*sin(phi));
rB=sqrt((B(1,1)*cos(phi)+B(1,2)*sin(phi)).^2+(B(2,1)*cos(phi)+...
    B(2,2)*sin(phi)).^2);

%% Angle transformation maps

for m=1:1:npoints+1
    fn=npoints*(pi+phiA(m))/(2*pi)+1;
    nA(m)=round(fn);
    if (nA(m)<1)
        nA(m)=1;
    end
    if (nA(m)>(npoints+1))
        nA(m)=npoints+1;
    end
end

for m=1:1:npoints+1
    fn=npoints*(pi+phiB(m))/(2*pi)+1;
    nB(m)=round(fn);
    if (nB(m)<1)
        nB(m)=1;
    end
    if (nB(m)>(npoints+1))
        nB(m)=npoints+1;
    end
end

%% Iterative evaluation of R
%% Computation of the next iteration for the norm

i=0;
while (i<niter)
    i=i+1;
    for m=1:1:npoints+1
        rAp(m)=R(nA(m));
    end
    RA=rAp.*rA;
    for m=1:1:npoints+1
        rBp(m)=R(nB(m));
    end
    RB=rBp.*rB;
    RAB=max(RA,RB);

%% Making RAB locally convex in the case when
%% computation errors caused its inconconvexity

```

```

RABx(1)=min(RAB(1),sinhalf*(RAB(2)+RAB(npoints)));
RABx(npoints+1)=RABx(1);
for m=2:1:npoints
RABx(m)=min(RAB(m),sinhalf*(RAB(m-1)+RAB(m+1)));
end
RAB=RABx;

srmax=max(RAB./R);
srmin=min(RAB./R);
sout=strcat('i=%4d, Bounds for J.S.R.: %5.3f < r < %5.3f');
s = sprintf(sout,i,srmin,srmax);
disp(s);
sr=2/(srmax+srmin);
RX=max(sr*RAB,R);
nfact=RX(npoints/2+1);
R=RX/nfact;

if (abs(srmax-srmin)<tolerance)
    break;
end
end

%% Drawing
iR=1./R;
iRA=1./RA;
iRB=1./RB;
axRA=max(srmax.*iRA);
axRB=max(srmax.*iRB);
axR=max(iR);
maxR=ceil(min(max(axRA,axRB),2*axR));

hold off;
axis equal;
axis([-maxR maxR -maxR maxR]);
hold all;

plot((srmax.*iRA).*cos(phi),(srmax.*iRA).*sin(phi),'--',...
'Color',[0 0 0]);
plot((srmax.*iRB).*cos(phi),(srmax.*iRB).*sin(phi),'Color',...
[0 0 0]);
plot(iR.*cos(phi),iR.*sin(phi),'LineWidth',2,'Color',[0 0 0]);
legend({'$$|A_{1}x|^{*}=\rho$$','$$|A_{2}x|^{*}=\rho$$',...
'$$\sim\,|x|^{*}=1$$'],'Interpreter','latex','Location',...
'NorthEast');
line([-maxR maxR],[0 0],'Color',[0 0 0],'LineStyle',':');
line([0 0],[-maxR maxR],'Color',[0 0 0],'LineStyle',':');

```

ПРИЛОЖЕНИЕ В: ИНФОРМАЦИЯ О СЕМИНАРАХ ПО ТЕМЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Программа семинара 1

“Оценка динамики рассинхронизованных систем”

08 декабря 2009 г., 15.00

Читальный зал библиотеки ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН

1. Доклады:

1. А.В. Покровский. “Анализ и синтез нелинейных систем обработки информации и управления”.
2. Н.Г. Рябых. “Синтез устойчивых рассинхронизованных итерационных процессов методом пре- и пост-кодирования”.
3. Н.А. Кузнецов. “О ходе работ по проекту и подведение итогов первого этапа”.

2. Обсуждение

Список участников семинара:

1. Покровский А.В., Университет г. Корк, Ирландия
2. Кузнецов Н.А., ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
3. Козякин В.С., ИППИ им. А.А. Харкевича РАН
4. Рябых Н.Г., аспирант МФТИ
5. Антоненко М.Н., Институт автоматизации проектирования РАН
6. Щетинина Е.В., Самарский государственный университет
7. Гречишкина Н.А., ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
8. Юдин А.В., студент МФТИ
9. Левшин В.В., студент МФТИ
10. Давидюк Д.С., студент МФТИ
11. Березинский А.А., студент МФТИ
12. Смаль Д.А., аспирант МФТИ
13. Григорьев Ф.Н., ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
14. Кистлеров В.Л., ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
15. Целикин Ю.В., ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН

16. Студенты 4, 5, 6 курсов Факультета радиотехники и кибернетики МФТИ, обучающиеся на базовой кафедре “Инфокоммуникационные системы и сети” ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН

Программа семинара 2

“Колебания, бифуркации и синхронизация рассинхронизованных систем с памятью и задержками”

5 августа 2010 г., 10.00

Читальный зал библиотеки ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН

1. Доклады:

1. А.В. Покровский. “Петли гистерезиса, возникающие в многокомпонентных системах с локальными отрицательными связями и глобальной положительной обратной связью”.
2. Д.И. Рачинский. “Распределение конфигураций памяти в асинхронных системах со стохастическим входом”.
3. Н.А. Кузнецов. “Подведение итогов проекта”.

2. Обсуждение

Список участников семинара:

1. Покровский А.В., Университет г. Корк, Ирландия
2. Рачинский Д.И., Университет г. Корк, Ирландия
3. Кузнецов Н.А., ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
4. Козякин В.С., ИППИ им. А.А. Харкевича РАН
5. Рябых Н.Г., аспирант МФТИ
6. Лукин Д.В., аспирант МФТИ
7. Антоненко М.Н., Институт автоматизации проектирования РАН
8. Гречишкина Н.А., ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
9. Клецов А.В., ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
10. Юдин А.В., студент МФТИ
11. Левшин В.В., студент МФТИ
12. Сорокин М.В., студент МФТИ
13. Давидюк Д.С., студент МФТИ
14. Березинский А.А., студент МФТИ

15. Смаль Д.А., аспирант МФТИ
16. Григорьев Ф.Н., ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
17. Кистлеров В.Л., ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
18. Целикин Ю.В., ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
19. Студенты 4, 5, 6 курсов Факультета радиотехники и кибернетики МФТИ, обучающиеся на базовой кафедре “Инфокоммуникационные системы и сети” ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН

Тексты докладов и слайды презентаций приведены в виде отдельных файлов.

ПРИЛОЖЕНИЕ С

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РАССИНХРОНИЗОВАННЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Программа
для студентов 5 курса факультета радиотехники и кибернетики МФТИ
(Государственного университета)

Введение

1 Рассинхронизованные системы

- 1.1 Разностные уравнения
- 1.2 Устойчивость разностных уравнений
- 1.3 Системы импульсных уравнений и их рассинхронизация
- 1.4 Эквивалентное разностное уравнение
- 1.5 Начальная задача и оператор сдвига
- 1.6 Простейшие свойства рассинхронизованных систем
- 1.7 Обобщения рассинхронизованных систем

2 Устойчивость рассинхронизованных систем

- 2.1 Основные понятия
- 2.2 Устойчивость при разных начальных временах
- 2.3 Равномерная устойчивость
- 2.4 Устойчивость при фазочастотной рассинхронизации
- 2.5 Теорема о равномерно полных словарях
- 2.6 Рассинхронизация по фазе линейных систем
- 2.7 Экзотика рассинхронизованных систем

3 Абсолютная устойчивость

- 3.1 Абсолютная устойчивость рассинхронизованных систем
- 3.2 Абсолютная устойчивость разностных уравнений
- 3.3 Абсолютная асимптотическая устойчивость разностных уравнений
- 3.4 Признаки абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем
- 3.5 Абсолютная асимптотическая устойчивость при слабой рассинхронизации
- 3.6 Абсолютная асимптотическая устойчивость рассинхронизованных систем и абсолютная γ -асимптотическая устойчивость разностных уравнений
- 3.7 Абсолютная устойчивость и разностные включения

4 Метод эквивалентных норм

- 4.1 Спектральная норма
- 4.2 Критерии абсолютной устойчивости
- 4.3 Инвариантные множества
- 4.4 Необходимые условия
- 4.5 Алгебраические и полуалгебраические множества
- 4.6 Алгебраическая неразрешимость проблемы абсолютной устойчивости

5 Признаки устойчивости

- 5.1 Матрицы с неотрицательными элементами

- 5.2 Уравнения с неотрицательными матрицами
- 5.3 Согласованный базис
- 5.4 Уравнения с симметрическими матрицами
- 5.5 Двухкомпонентные уравнения со скалярными компонентами

6 Абсолютная устойчивость по Перрону

- 6.1 Устойчивость при постоянно действующих возмущениях и устойчивость по Перрону
- 6.2 Теорема об эквивалентной норме
- 6.3 Подчиненные системы
- 6.4 Вариация решений рассинхронизованных уравнений
- 6.5 Основная теорема
- 6.6 Возмущение уравнений с симметрическими матрицами
- 6.7 Устойчивость по первому приближению

7 Фазочастотная рассинхронизация

- 7.1 Рассинхронизация по фазе
- 7.2 Рассинхронизация по частоте
- 7.3 Двухкомпонентные системы
- 7.4 Алгоритмы Клепцына

8 Стохастические рассинхронизованные системы

- 8.1 Стохастическая рассинхронизация
- 8.2 Устойчивость стохастических рассинхронизованных систем
- 8.3 Метод динамики средних
- 8.4 Оценки показателей Ляпунова
- 8.5 Условия устойчивости
- 8.6 Метод инвариантных мер

ПРИЛОЖЕНИЕ D: ОТЧЕТ О ПАТЕНТНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Патентные исследования проведены в соответствии с ГОСТ Р 15.011-96. Отчет о патентных исследованиях прилагается в виде отдельного файла.