

АО «Федеральный научно-производственный центр
«Нижегородский научно-исследовательский
институт радиотехники»

На правах рукописи



ЗИМИНА Светлана Валерьевна

**Флуктуации в многоканальных
адаптивных системах**

Специальность 01.04.03 – радиофизика

ДИССЕРТАЦИЯ

**на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук**

Научный консультант:
доктор технических наук
Бляхман А. Б.

Нижний Новгород – 2021

Оглавление.

	Стр.
Введение.....	...6
Глава 1. Влияние флуктуаций весового вектора на статистические характеристики адаптивных антенных решёток с градиентными алгоритмами настройки.....	...31
1.1. Постановка задачи пространственной обработки сигналов в адаптивной антенной решётке с ограничениями.....	...31
1.2. Использование методов теории возмущений для статистического анализа характеристик ААР.....	...33
1.3. Корреляционные характеристики выходного сигнала ААР с учётом флуктуаций весового вектора.....	...41
1.4. Нахождение корреляционной матрицы флуктуаций весового вектора. Теоретическое и модельное исследование одномоментных статистических характеристик ААР.....	...43
1.5. Теоретическое и модельное исследование спектральных характеристик выходного сигнала ААР.....	...51
1.6. Анализ влияния флуктуаций весового вектора на характеристики эффективности работы ААР - диаграмму направленности, коэффициент направленного действия, коэффициент усиления, потери в выходном отношении сигнал / шум.....	...56
1.7. Выводы.....	...69
Глава 2. Анализ статистических характеристик адаптивных антенных решёток с быстрыми алгоритмами настройки на основе обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов.....	...71
2.1. Вывод итеративного алгоритма обращения выборочной оценки корреляционной матрицы для ААР с многократными линейными ограничениями.....	...71
2.2. Статистический анализ характеристик ААР с быстрым итеративным алгоритмом настройки.....	...78
2.3. Корреляционные характеристики выходного сигнала ААР.....	...81
2.4. Теоретическое и модельное исследование одномоментных статистических характеристик ААР.....	...84
2.5. Анализ спектральных характеристик ААР.....	...88

2.6. Характеристики эффективности работы ААР с учетом флуктуаций весового вектора - диаграмма направленности, коэффициент направленного действия, коэффициент усиления, потери в выходном отношении сигнал / шум.....	91
2.7. Исследование ААР, использующей алгоритм прямого обращения выборочной корреляционной матрицы.....	101
2.8. Выводы.....	106
Глава 3. Статистический анализ адаптивной антенной решётки, настраиваемой по алгоритму Хэбба, с учетом флуктуаций весового вектора.....	108
3.1. Использование методов теории возмущений для анализа статистических характеристик адаптивной антенны с алгоритмом Хэбба.....	108
3.2. Корреляционные характеристики выходного сигнала ААР при учёте флуктуаций весового вектора.....	114
3.3. Теоретическое и модельное исследование одномоментных характеристик ААР.....	122
3.4. Спектральные характеристики выходного сигнала ААР.....	128
3.5. Влияние флуктуаций весового вектора на характеристики эффективности работы ААР, настраиваемой по алгоритму Хэбба - диаграмму направленности, коэффициент направленного действия, коэффициент усиления, потери в выходном отношении сигнал / шум	140
3.6. Выводы.....	149
Глава 4. Анализ влияния флуктуаций весового вектора на статистические характеристики адаптивной антенной решетки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи с градиентными алгоритмами настройки.....	151
4.1. Статистический анализ характеристик «нелинейной» ААР с градиентными алгоритмами настройки.....	151
4.2. Корреляционные характеристики выходного сигнала ААР.....	156
4.3. Сравнение теоретического исследования и результатов численного моделирования одномоментных статистических характеристик ААР.....	160
4.4. Характеристики эффективности работы ААР с учетом флуктуаций весового вектора - диаграмма направленности, коэффициент направленного действия, коэффициент усиления, потери в выходном отношении сигнал / шум.....	172

4.5. Выводы.....	...189
Глава 5. Анализ статистических характеристик с учётом флуктуаций весового вектора адаптивной антенной решетки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по алгоритму рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов.....	...191
5.1. Использование методов теории возмущений для статистического анализа характеристик ААР.....	...191
5.2. Теоретическое и модельное исследование влияния флуктуаций весового вектора на корреляционные характеристики и мощность выходного сигнала ААР.....	...195
5.3. Матрица ковариации вектора весовых коэффициентов.....	...207
5.4. Характеристики эффективности работы ААР с учетом флуктуаций весового вектора - диаграмма направленности, коэффициент направленного действия, коэффициент усиления, потери в выходном отношении сигнал / шум.....	...210
5.5. Выводы.....	...219
Глава 6. Статистический анализ влияния флуктуаций весовых коэффициентов на характеристики искусственных нейронных сетей.....	...221
6.1. Искусственная нейронная сеть с дискретным градиентным алгоритмом настройки.....	...222
6.2. Искусственная нейронная сеть с алгоритмом рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов.....	...235
6.3. Искусственная нейронная сеть с алгоритмом Хэбба.....	...245
6.4. Характеристики эффективности работы искусственных нейронных сетей с учетом флуктуаций весового вектора - потери в выходном отношении сигнал / шум.....	...264
6.5. Выводы.....	...273
Заключение.....	...275
Публикации по теме диссертации.....	...281
Литература.....	...285
Приложение 1. Алгоритм непосредственного обращения выборочной ковариационной матрицы для антенной решётки, работающей по критерию минимизации среднего адаптивной квадрата ошибки, для конечной и бесконечной выборки входных данных и различных величин параметра α301

Приложение 2. Обобщение дискретного градиентного алгоритма на искусственную нейронную сеть.....	...302
Приложение 3. Обобщение алгоритма рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов на искусственную нейронную сеть.....	...305

Введение [49,116,121,165].

Диссертация посвящена исследованию флуктуаций, шумов и случайных процессов в стохастических системах (адаптивных антенных решётках и искусственных нейронных сетях) по специальности статистическая радиофизика. Разработаны новые методы анализа и статистической обработки сигналов в условиях воздействия помех. Диссертация представляется как научно-квалификационная работа, содержащая разработанные на основании выполненных автором исследований теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение.

Актуальность темы

В современной статистической радиофизике активно развивается научное направление, связанное со статистическим анализом адаптивных антенных систем - адаптивных антенных решёток (ААР) и искусственных нейронных сетей (ИНС) - адаптивных систем, используемых для пространственной фильтрации сигналов в изменяющейся помеховой обстановке. Отличительная особенность адаптивных антенн по сравнению с обычной (неадаптивной) антенной системой [1,2] состоит в том, что в процессе работы они могут автоматически изменять свои параметры (или даже структуру) “приспосабливаясь” к априори неизвестным или изменяющимся условиям функционирования [3,4]. Среди самых первых работ, посвящённых статистическому анализу адаптивных антенных решёток, можно отметить статьи [5,6]. В них описана наиболее общая схема ААР, а именно, адаптивная антенная решётка с многократными линейными ограничениями, и изложены некоторые методы статистического анализа таких систем. основополагающие результаты по общей теории и элементной базе адаптивных антенн были изложены в ряде монографий [7-20]. Наиболее полное изложение методов расчёта стационарных режимов работы ААР дано в работах А. А. Пистолькорса и О. С. Литвинова [21-27].

Под статистическим анализом адаптивных антенных решёток в данной работе мы будем понимать нахождение их характеристик с учётом флуктуаций адаптируемых (автоматически настраиваемых) параметров. Флуктуации адаптируемых параметров вызываются как внешними, так и внутренними случайными возмущениями. Величина флуктуаций зависит от алгоритма настройки антенной решётки. Статистический анализ адаптивных антенных решёток позволяет корректно определять сте-

пень подавления помех, предельную точность настройки адаптивных систем, а также количественно оценивать искажения полезного сигнала, возникающие из-за флуктуаций адаптируемых параметров.

Высокая скорость адаптации и достигаемая при этом высокая точность характеризуют успешность применения адаптивных систем. По этой причине повышение их скорости и точности настройки являются задачами, имеющими большое практическое значение. Однако увеличение скорости настройки приводит к большим флуктуациям весового вектора и, следовательно, снижает точность настройки в стационарном режиме работы. Поэтому изучение флуктуаций вектора весовых коэффициентов даёт разработчикам возможность реализовывать адаптивные системы с наилучшим соотношением характеристик скорость – точность настройки.

Статистическая теория адаптивных систем в настоящее время далека от своего завершения, хотя актуальность решения такого типа задач очевидна. Это связано с тем, что процесс настройки адаптируемых весовых коэффициентов описывается разностными (для дискретных алгоритмов) уравнениями. Данные уравнения в качестве коэффициентов содержат некоторые функции от входных сигналов, помех и внутренних шумов системы. Системы уравнений с сильно флуктуирующими случайными коэффициентами очень сложны для анализа, и это является общеизвестным фактом [28-30]. Общепринятые приближения гауссовости флуктуаций и «белого шума» (некоррелированности входного сигнала) оказываются слишком грубыми и приводят в ряде случаев даже к появлению качественно противоположных эффектов.

Обсудим основные работы, посвящённые исследуемому в диссертации вопросу. В начале 70-х годов появились первые статьи, в которых проводился анализ адаптивных антенных решёток с градиентными алгоритмами. Одной из первых работ, посвящённых статистическому анализу аналоговых адаптивных систем с учётом флуктуаций вектора весовых коэффициентов, является статья ([31], цит. по [49]). В ней методами теории возмущений было впервые проведено статистическое исследование адаптивной антенной решётки, максимизирующей отношение сигнал/шум (ААР МОСШ). В работе было использовано предположение о статистической независимости флуктуаций весового вектора и вектора входных сигналов. По этой причине, несмотря на корректное применение борновского приближения к расчёту самих флуктуаций весового вектора, произошло пренебрежение членами одного порядка малости по сравнению с оставленными членами ряда. В результате авторы

сделали неверный вывод об увеличении мощности помех на выходе адаптивной антенной решётки из-за флуктуаций вектора весовых коэффициентов.

В последующих работах неоднократно повторялись аналогичного типа ошибки. Так в статье ([32], цит. по [49]) автор проводил анализ многоканальной адаптивной системы с корреляционными обратными связями, настраивающейся по алгоритму с непрерывным временем, в предположении статистической независимости флуктуаций вектора весовых коэффициентов с вектором входных сигналов. В статье показано, что учёт флуктуаций весового вектора в этом приближении приводит к появлению дополнительной ошибки и увеличению остаточной мощности на выходе системы.

В ряде работ предлагали другие методы статистического анализа адаптивных систем, настраивающихся по непрерывным алгоритмам. Так, в статье ([33], цит. по [49]) для нахождения статистических характеристик выходного сигнала автор использовал хорошо развитую *технику гауссовской аппроксимации* по марковской совокупности переменных: весовой вектор – вектор входных сигналов (с учётом их статистической зависимости). Однако этот метод не позволил найти нужные статистические характеристики, а дисперсии флуктуаций весовых коэффициентов в стационарном режиме работы оказались стремящимися к нулю. Это наглядно продемонстрировало, что если при статистическом анализе данного класса адаптивных систем использовать предположение о совместном гауссовском вероятностном распределении, то корректно учесть флуктуации вектора весовых коэффициентов невозможно. Такое предположение является слишком сильным упрощением для анализа данной задачи.

В статье ([34], цит. по [49]) для ААР МОСШ, настраивающейся по непрерывному градиентному алгоритму первого порядка, был получен точный качественный результат, показавший, что в этой системе флуктуации коэффициентов могут привести только к уменьшению остаточной мощности помех на выходе адаптивной антенной решётки. Автору не удалось получить количественных оценок эффекта “перекompенсации”. (Эффект уменьшения выходной мощности адаптивной системы при учёте флуктуаций вектора весовых коэффициентов по сравнению с выходной мощностью при постоянном оптимальном весовом векторе будем называть эффектом “перекompенсации”).

Статья ([35], цит. по [49]) стала первой работой, в которой впервые корректно было количественно учтено влияние флуктуаций в одноканальном компенсаторе помех. Аппарат вариационных производных, использованный в ней для анализа,

позволил рассмотреть “не белые” входные воздействия и учесть тем самым корреляцию помех и управляющих напряжений (весовых коэффициентов).

В дальнейших работах были выявлены те причины, из-за которых эффект “перекомпенсации” имеет место, а именно: наличие статистической зависимости между вектором флуктуаций весовых коэффициентов и вектором входных сигналов (предположение о неравенстве нулю кумулянтной функции третьего порядка) и конечное время корреляции входных сигналов ([36-45], цит. по [49]).

Так в работе ([43], цит. по [49]) было показано, что корректный статистический анализ данной задачи связан с учётом *негауссовской статистической зависимости* весового вектора и вектора входных сигналов. Было обнаружено, например, что в адаптивных антенных решётках, настраивающихся по непрерывным градиентным алгоритмам, флуктуации весового вектора приводят к уменьшению суммарной мощности на выходе, т.е. к появлению эффекта “перекомпенсации”.

Отдельно стоит работа ([46], цит. по [49]), в которой рассматривается влияние на характеристики адаптивной антенной решётки быстрых флуктуаций параметров входных нерегулируемых элементов системы (случайного движения элементарных приёмников, изменения коэффициента усиления антенно-фидерного тракта), которые не были вызваны флуктуациями адаптируемых параметров. Было показано, что адаптивные антенные решётки более чувствительны к таким флуктуациям, чем обычные неадаптивные решётки.

Отдельно остановимся на диссертациях, посвящённых исследуемому вопросу [47-50]. В кандидатской диссертации О.В. Музыка ([47], цит. по [49]) проводился статистический анализ стохастических систем с сильными флуктуациями параметров, а в работе Позументова И.Е. ([48], цит. по [49]) были найдены статистические характеристики ААР с ограничениями, настраивающихся по непрерывным градиентным алгоритмам. Анализ проводился с учётом конечного времени корреляции полезного сигнала, помехи и собственных шумов элементов решётки. Было показано, что дисперсия флуктуаций компонент весового вектора уменьшается по сравнению с адаптивной антенной решёткой без ограничений в соответствии с числом наложенных линейно – независимых ограничений.

В докторской диссертации А.А. Мальцева [49] были разработаны точные и приближённые методы статистического анализа адаптивных систем с непрерывными градиентными алгоритмами настройки, позволяющие корректно рассчитывать флуктуации весовых коэффициентов и учитывать их влияние на статистические характеристики таких систем. В отличие от известных методов при этом не делается

предположений о статистической независимости или гауссовости совместного распределения вектора весовых коэффициентов и вектора входных сигналов.

В докторской диссертации О.В. Музыка [50] были разработаны методы анализа линейных и нелинейных стохастических систем. Так, например, в данной работе представлен метод матричных цепных дробей для нахождения статистических моментов выходного сигнала квазилинейных непрерывных стохастических систем, находящихся под воздействием интенсивных случайных сил. Приведённые в диссертации методы позволяют проводить статистический анализ не только линейных, но и нелинейных стохастических систем, подверженных интенсивным случайным воздействиям.

Внедрение ЭВМ и сигнальных процессоров, реализующих различные адаптивные алгоритмы обработки цифровых сигналов, привело к тому, что появился ряд работ, посвящённых статистическому анализу адаптивных систем с различными дискретными алгоритмами настройки. В одной из первых таких работ ([51], цит. по [49]) при рассмотрении ААР с дискретным градиентным алгоритмом настройки, минимизирующей средний квадрат ошибки (ААР МСКО), был сделан вывод об увеличении мощности выходного сигнала антенны из-за флуктуаций весового вектора. Этот эффект был назван автором эффектом рассогласования системы (misadjustment).

В целом ряде других работ также был сделан вывод об увеличении мощности сигнала на выходе адаптивной антенной решётки из-за флуктуаций вектора весовых коэффициентов [17, 52-60]. В статье [59] исследовалось влияние флуктуаций вектора весовых коэффициентов на характеристики узкополосной ААР, с дискретным градиентным алгоритмом настройки и многократными линейными ограничениями на диаграмму направленности (ДН). Авторы проводили «точный» анализ характеристик адаптивных антенных решёток с учетом флуктуаций вектора весовых коэффициентов, а также находили границы эффекта рассогласования. В работе делалось предположение независимости вектора весовых коэффициентов и вектора входных сигналов. Проводился также анализ выходной мощности ААР при учете флуктуаций весового вектора. Показано, что учёт флуктуаций приводит к увеличению выходной мощности ААР по сравнению с мощностью при постоянном стационарном векторе весовых коэффициентов. Показано также, что выходное отношение сигнал / шум определяется величиной коэффициента рассогласования и обратно пропорционально ему. В работе приводятся итеративные выражения для корреляционной матрицы флуктуаций весовых коэффициентов, и утверждается сходимость этого выражения.

Из формулы следует, что направление максимальных флуктуаций соответствует собственным векторам, при которых находятся близкие к нулю и близкие к $1/\text{коэффициент адаптации}$ собственные числа корреляционной матрицы входных сигналов в подпространстве ограничений.

В статье [60] вопрос, связанный с флуктуациями вектора весовых коэффициентов, рассматривался при статистическом анализе предлагаемого авторами гибридного адаптивного алгоритма подавления помех. Данный алгоритм является развитием алгоритма Фроста для случая сложной помеховой обстановки с большим количеством помех. Авторами получено итеративное выражение для корреляционной матрицы ошибок весовых коэффициентов, которое они сравнивают с аналогичной формулой для алгоритма Фроста. В работе показано, что корреляционная матрица ошибок нового алгоритма сходится быстрее, чем такое же выражение для алгоритма Фроста, если отношение мощности первой помехи к мощности шума больше, чем аналогичное отношения для второй помехи.

В статье [58] вопрос об эффекте рассогласования рассматривается в контексте определения постоянной времени сходимости предлагаемого авторами нового алгоритма для линейных решеток, предназначенного для выделения и отслеживания направленных источников. Авторы определяют коэффициент рассогласования как отношение суммарной выходной мощности с флуктуациями переменных, которые настраиваются, к оптимальной выходной мощности. В работе отмечается, что увеличение коэффициента рассогласования (*misadjustment*) уменьшает временную постоянную асимптотической сходимости предложенного авторами алгоритма, являясь обратно пропорциональной ей.

Во всех этих работах при статистическом анализе характеристик адаптивных антенных решёток подразумевается статистическая независимость текущих значений вектора весовых коэффициентов и вектора входных сигналов. Это основное предположение строго доказывается, если последовательные во времени выборочные значения входных сигналов независимы и поэтому может быть обосновано только для дискретных адаптивных систем, в которых настройка осуществляется по достаточно редким выборочным значениям входных сигналов.

Когда на адаптивную систему воздействуют мощные узкополосные (по сравнению с полосой полезного информационного сигнала) помехи, предположение о статистической независимости отсчётов входных сигналов заведомо не выполняется. Это связано с тем, что близкие отсчёты входных сигналов будут заведомо сильно коррелированы. Заметим, что учёт даже “удобной” модельной статистической зави-

симости выборочных значений входных процессов существенно усложняет задачу анализа адаптивных систем с дискретными алгоритмами, в силу чего ранее делались только асимптотические оценки их простейших статистических характеристик ([61], цит. по [49]).

Постепенно в литературе при исследовании вопроса о влиянии флуктуаций адаптируемых параметров на статистические характеристики адаптивных систем стали появляться экспериментальные и теоретические результаты, свидетельствующие о том, что наряду с избыточным шумом на выходе, может иметь место эффект подавления полезного сигнала на выходе адаптивной системы в присутствии внешних мощных квазигармонических помех, в том числе, и для адаптивных антенных решёток с дискретными градиентными алгоритмами настройки [62-65].

Дальнейшее развитие адаптивных систем было связано с использованием цифровых процессоров, которые позволяли реализовывать так называемые быстрые алгоритмы настройки. Эти алгоритмы обладают большей по сравнению с алгоритмом Фроста скоростью сходимости в сложной помеховой обстановке, но и требуют больших вычислительных затрат. По этой причине такие алгоритмы не могли быть использованы до появления цифровых процессоров. В монографиях [16-18] излагаются основы построения быстрых алгоритмов и их представления, удобные для реализации на цифровом процессоре. Анализ характеристик адаптивных антенных решёток с быстрыми алгоритмами с учётом флуктуаций настраиваемых весовых коэффициентов посвящено всего несколько работ [66-68].

В первой статье, опубликованной в 1974 году ([66], цит. по [49]), для адаптивной системы, работающей по критерию максимизации отношения сигнал/шум и настраиваемой по алгоритму прямого обращения выборочной корреляционной матрицы, исследовалось, как влияет замена истинной корреляционной матрицы её оценкой на различные статистические характеристики системы. В предположении, что оценка вектора весовых коэффициентов, полученная на основе выборочной корреляционной матрицы, фиксирована, авторами было найдено нормализованное отношение сигнал/шум (ОСШ). Данное отношение, нормализованное на верхнюю границу отношения сигнал/шум, показывает, что имеет место уменьшение точности настройки адаптивной антенны. Качество работы адаптивной антенны зависит от того, насколько близка выборочная оценка ковариационной матрицы к истинной ковариационной матрице.

В работе [67] дан статистический анализ ААР с многократными линейными ограничениями. В этой статье для оценивания корреляционной матрицы входных

сигналов также используется её выборочная оценка. Возникающие при этом флуктуации вектора весовых коэффициентов (в алгоритме непосредственного обращения матрицы) приводят к тому, что среднее значение мощности на выходе адаптивной антенной решётки (при использовании выборочной оценки корреляционной матрицы) меньше, чем выходная мощность, рассчитанная при использовании истинной корреляционной матрицы, т.е. имеет место эффект “перекомпенсации” мощности.

Статья [68] является развитием предыдущей работы. В ней уточняется полученное в [67] отношение сигнал/шум, а затем данное отношение вычисляется для формирователя лучей, использующего рекурсивную схему настройки вектора весовых коэффициентов. Авторы показали, что выходное отношение сигнал/шум, средний квадрат ошибки обеих изучаемых систем зависят от объёма выборки входных данных и числа степеней свободы (числа адаптируемых весовых коэффициентов за вычетом числа ограничений).

Представляет немалый интерес анализ влияния флуктуаций вектора весовых коэффициентов на характеристики адаптивных антенных решёток с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи. Это связано с тем, что ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи представляют собой особый класс адаптивных систем. Этот класс является промежуточным между классическими адаптивными антенными решётками, не содержащими нелинейную функцию в цепи корреляционной обратной связи, и искусственными нейронными сетями (ИНС). ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи являются, если следовать их схемам, различными вариантами искусственных нейронов (ИН).

Существует целое направление, посвящённое анализу характеристик адаптивных антенных решёток с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи (например, работы [69-72]). Однако работы [69-71] посвящены неадаптивным антеннам, и только в статье [72] обсуждаются вопросы адаптации в таких системах и вскользь упоминается о флуктуациях в контексте, что коэффициент адаптации должен быть достаточно мал, чтобы флуктуации вектора весовых коэффициентов не вносили искажения в полученные статистические характеристики такой нелинейной адаптивной антенной решётки. Работ же, в которых бы проводится анализ статистических характеристик адаптивных антенн с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, в литературе не встретилось.

В последнее время приобретает большое развитие научное направление, связанное с изучением функционирования искусственных нейронных сетей. Фундамен-

тальные основы работы этого типа адаптивных систем были изложены в монографиях [73-82]. Необходимо отметить, что большая часть отечественных публикаций по этой тематике посвящена решению различных прикладных задач (предсказания, распознавания образов, классификации) с помощью искусственных нейронных сетей. Теоретическому анализу общих основ функционирования ИНС в отечественной литературе уделено существенно меньше внимания. Не является исключением и анализ влияния флуктуаций весовых коэффициентов на статистические характеристики искусственных нейронных сетей – в отечественной литературе мне не встретилось ни одной работы на эту тему. В зарубежной литературе ситуация немногим лучше. Часть статей, найденная в иностранных журналах, посвящена исследованию эффектов ошибок квантования весовых коэффициентов на характеристики ИНС [83-84]. В этих работах было показано, что увеличение числа слоёв искусственной нейронной сети при учёте ошибок квантования весовых коэффициентов приводит к ухудшению качества работы сети [83]. Ошибки квантования (в том числе и весовых коэффициентов) приводят к накоплению ошибки в сигналах, проходящих через искусственную нейронную сеть от слоя к слою [84]. В статье [85] вводится понятие чувствительности ИНС к возмущениям входных сигналов и весовых коэффициентов. Авторы рассматривают чувствительность наиболее популярной и наиболее общего вида прямого распространения нейронной сети – многослоевого персептрона. Чувствительность определяется как математическое ожидание выходных ошибок ИНС в зависимости от возмущений входных сигналов и весовых коэффициентов. Чувствительность увеличивается вместе с входными возмущениями и возмущениями весовых коэффициентов, но это увеличение имеет границу и детерминировано структурой многослоевого персептрона, а именно, числом нейронов в слое и числом слоёв. Однако существует оптимальное число нейронов в слое, при котором чувствительность будет наиболее высокой. Чувствительность нейронной сети, пишут авторы, может сначала уменьшаться с ростом числа слоёв ИНС, а потом сохранять постоянную величину, в то время, как число слоёв будет возрастать [85].

Исследование влияния флуктуаций весовых коэффициентов на статистические характеристики искусственной нейронной сети встретилось только в одной работе [86]. В этой статье в предположении статистической независимости ошибок весовых коэффициентов и входных сигналов всех слоёв ИНС была получена корреляционная матрица вектора ошибок весовых коэффициентов, принадлежащего слою L . Было показано, что корреляционная матрица вектора ошибок весовых коэффициентов пропорциональна единичной матрице, т.е. в таких предположениях флуктуа-

ции весовых коэффициентов одинаковы во всех направлениях пространства входных сигналов. Авторами было найдено отношение шум / сигнал на выходе первого слоя Адалина и первого слоя Мадалина с учётом ошибок весовых коэффициентов и ошибок внешних входных сигналов. Данное отношение представляет собой дробь, в числителе которой находится дисперсия ошибок выходного сигнала рассматриваемого слоя ИНС, а в знаменателе – дисперсия самого этого выходного сигнала. Таким образом, чем выше флуктуации весовых коэффициентов, тем хуже отношение сигнал / шум первого слоя искусственной нейронной сети. В общем случае отношение помеха / сигнал слоя L Мадалина с сигмоидальной активационной функцией зависит от аналогичного отношения предыдущего слоя $L-1$ плюс отношение дисперсии ошибок весового вектора слоя L к дисперсии самого весового вектора L . Таким образом, по мере прохождения сигнала по искусственной нейронной сети происходит искажение его характеристик из-за флуктуаций весовых коэффициентов, тем большее, чем больше слоёв в сети.

Особое место в исследованиях влияния флуктуаций весовых коэффициентов на статистические характеристики адаптивных систем занимают работы, посвященные анализу с учётом флуктуаций настраиваемых параметров характеристик адаптивных фильтров. Так, в работе [87] предлагается новый адаптивный алгоритм, специально призванный к уменьшению флуктуаций весовых коэффициентов, возникающих вследствие высокой дисперсии входных данных. В указанной статье на основе выборочных данных ищется оптимальное значение весового вектора и тем самым достигается минимально возможная ошибка. Во время каждой итерации по заново вычисленной весовой переменной вычисляются оставшиеся весовые переменные. На каждой итерации изменяется только одна весовая переменная и после того, как все переменные были изменены, процесс повторяется. Алгоритм работает согласно принципу, что во время каждой итерации ошибка или уменьшается, или остается прежней, и после достаточных ее изменений достигается минимум наименьшего квадрата ошибки. Авторы отмечают, что коэффициент рассогласования фильтра соотносится с тем, насколько хорошо выборочная оценка корреляционной матрицы входных сигналов соответствует своему истинному значению. Большее количество выборок входных данных, взятых для оценки корреляционной матрицы входных сигналов, уменьшает изменение весовых коэффициентов, и фильтр ближе подходит к оптимальному решению.

В статье [88] исследуется влияние корреляции выборок входного сигнала на коэффициент рассогласования весовых коэффициентов в рекурсивном алгоритме

минимальных квадратов ошибки для Марковского процесса первого порядка. Указанный анализ проводился в предположении статистической независимости входного сигнала и вектора ошибок весовых коэффициентов. В работе приведён коэффициент рассогласования для ошибок весовых коэффициентов, определяемый как средний квадрат нормы флуктуационной части весового вектора. Авторы отмечают, что большие значения коэффициента автокорреляции между отсчётами входного сигнала приводят к росту величины коэффициента рассогласования весовой ошибки.

В работе [89] вопрос, связанный с коэффициентом рассогласования, рассматривается в прикладном аспекте как своего рода критерий качества работы адаптивной антенной решетки, функционирование которой авторы предлагают осуществлять с помощью упрощенного фильтра Калмана. В результате анализа в статье делается вывод, что коэффициент рассогласования находится между соответствующими коэффициентами рассогласования для алгоритма минимизации среднего квадрата ошибки и классического фильтра Калмана.

В статье [90] исследуется функционирование адаптивного фильтра с конечной импульсной характеристикой и проводится поиск минимума его коэффициента рассогласования. Структура новой адаптивной системы, предлагаемой авторами, состоит из двух адаптивных компонент – моделируемого фильтра и шумового «выбеленного» фильтра. Предложенный метод адаптивной фильтрации работает согласно модифицированному критерию минимизации среднего квадрата ошибки на основе функционала максимального правдоподобия. В предположении независимости последовательности входных данных и весовых коэффициентов автор приводит выражение коэффициента рассогласования минимального среднего квадрата ошибки, который зависит от величины коэффициента адаптации, дисперсии входного сигнала и шума, и всегда положителен. В статье отмечается также, что отношение коэффициентов рассогласования предлагаемого автором алгоритма и коэффициента рассогласования традиционного алгоритма минимизации среднего квадрата ошибки меньше единицы, т.е. новый алгоритм работает с меньшим уровнем флуктуаций настраиваемых коэффициентов.

В работе [91] исследуется поведение адаптивного фильтра, настраивающегося по алгоритму минимизации среднего квадрата ошибки для общего случая, в котором входное преобразование может не захватить точного входного подпространства. Авторы показали, что дисперсия весовых коэффициентов выше в случае, когда вектора входных сигналов статистически независимы между собой по сравнению с ситуацией зависимости векторов входных сигналов.

В работе [92] рассматривался адаптивный компенсатор помех, настраивающийся по алгоритму минимизации среднего квадрата ошибки. В предположении зависимости весовых коэффициентов от входных данных было получено, что минимальный средний квадрат ошибки при учёте флуктуаций весовых коэффициентов для фильтра, работающего по алгоритму МСКО, оказывается меньше, чем в Винеровском фильтре. Автор отмечает, что это нелинейный феномен, поскольку коэффициент рассогласования весовых коэффициентов зависит также и от требуемых входных данных.

В последние годы получают развитие исследования влияния флуктуаций весовых коэффициентов на статистические характеристики адаптивных систем в случае приема этими системами нестационарных сигналов [93-98]. Задачи, решаемые этими системами, различны – подавление отражений сигнала, идентификация неизвестной системы, пространственная фильтрация. Преимущественно проводится статистический анализ работы адаптивных фильтров. При статистическом анализе авторы также делают предположение о статистической независимости вектора входных сигналов и весового вектора. Чаще всего анализируется корреляционная матрица флуктуаций весового вектора, ее шпур, а также среднее квадратическое отклонение оценки весового вектора от его оптимального значения (MSD). Показано, что увеличение коэффициента адаптации приводит к росту MSD [97]. Кроме того, отмечается, что средняя выходная мощность адаптивной системы в стационарном состоянии за счет флуктуаций весовых коэффициентов больше минимального значения функционала качества, найденного при постоянном стационарном весовом векторе, а также увеличивается при росте коэффициента адаптации [93].

Еще одним направлением, в котором проводится исследование статистических характеристик адаптивных систем различных типов с учетом флуктуаций весовых коэффициентов, является анализ сходимости новых версий традиционных алгоритмов адаптации [98-99]. Так, в работе [98] исследуется сходимость LMS алгоритма, в котором используется вместо вектора входных сигналов функция его знака $\text{sign}(X)$, а в работе [99] – изучается сходимость нелинейного LMS алгоритма, где вместо вектора входных сигналов используется результат действия некоторой нелинейной функции на данный входной сигнал. Авторы получают теоретическую зависимость среднего значения вектора флуктуаций весовых коэффициентов, а также ковариационной матрицы флуктуаций весового вектора от времени. При проведении статистического анализа в обеих работах используется предположение о статистической независимости весового вектора и вектора входных сигналов.

Проведённое изучение литературы по вопросам анализа влияния флуктуаций настраиваемых весовых коэффициентов на адаптивные системы различных классов выявил недостаточность решения указанной проблемы. Прежде всего, обращает на себя внимание тот факт, что статистический анализ влияния флуктуаций на характеристики систем проводился в основном в предположении статистической независимости вектора входных сигналов и весового вектора, определяющего коэффициенты усиления в каналах адаптивных систем. Однако в реальных условиях такая зависимость имеется, поэтому необходимо учитывать статистическую зависимость этих двух векторов. Кроме того, неверное предположение о статистической независимости входных сигналов и весовых коэффициентов приводит к неверным результатам, свидетельствующим об увеличении мощности на выходе адаптивных систем под влиянием весовых коэффициентов по сравнению с мощностью, найденной при постоянном стационарном весовом векторе. Тем не менее, практика показывает, что флуктуации зачастую приводят к уменьшению мощности на выходе адаптивной системы и искажению выходного сигнала.

Следует также обратить внимание на недостаточное исследование вопроса влияния флуктуаций весовых коэффициентов на статистические характеристики искусственных нейронных сетей. Если анализ с учётом флуктуаций весовых коэффициентов характеристик адаптивных антенных решёток и адаптивных фильтров в известной литературе проводился, то искусственные нейронные сети внимание исследователей практически обошло стороной. Тем не менее, искусственные нейронные сети в последние годы приобретают все большую значимость, поскольку могут быть использованы при решении большого класса различных задач. Однако флуктуации весовых коэффициентов существенно искажают характеристики искусственных нейронных сетей и ухудшают качество их работы. Особую актуальность этот вопрос приобретает в связи с большим размером искусственных нейронных сетей (большим числом слоев и большим количеством нейронов в каждом слое) и тем самым, большим количеством весовых коэффициентов, каждый из которых может исказить работу сети в целом. По этой причине вопрос анализа статистических характеристик искусственных нейронных сетей с учётом флуктуаций весовых коэффициентов является достаточно актуальным.

Особо хотелось бы отметить узость анализа характеристик адаптивных систем с учётом флуктуаций настраиваемых параметров. В основном, в известных работах авторы описывают какую-нибудь одну характеристику, на примере которой видно влияние флуктуаций (например, коэффициент рассогласования, корреляцион-

ную матрицу флуктуаций весовых коэффициентов и др.) или просто методом компьютерного моделирования показывают, что предлагаемая ими новая адаптивная система (или улучшенный адаптивный алгоритм) имеют меньшие флуктуации настраиваемых параметров.

С учетом этого более актуальным является проведение комплексного анализа влияния флуктуаций весовых коэффициентов на различные статистические характеристики адаптивных систем (мощность и спектральную плотность мощности выходного сигнала, диаграмму направленности, коэффициент направленного действия, коэффициент полезного действия) различной структуры в наиболее общем случае негауссовской статистической зависимости между вектором входных сигналов и весовым вектором, поскольку это позволяет выявить все возможные эффекты, возникающие за счёт флуктуаций в функционировании данных систем, и даёт возможность оптимальным образом настроить их параметры.

И, наконец, обращает на себя внимание отсутствие методов анализа, позволяющих оценить влияние флуктуаций весовых коэффициентов на статистические характеристики адаптивных систем различной структуры, предназначенных для задач пространственной обработки сигналов, в наиболее общем случае статистической зависимости вектора входных сигналов и весового вектора.

Таким образом, анализ литературных источников выявил, что имеет место проблема влияния флуктуаций настраиваемых параметров на статистические характеристики адаптивных антенных систем, искажение статистических характеристик вследствие флуктуаций и ухудшение качества функционирования данных систем. Разработка методов анализа влияния флуктуаций весовых коэффициентов на характеристики адаптивных систем позволило бы решить данную проблему.

Решение данной проблемы представляется актуальным, поскольку запросы практики в современных условиях требуют высокого качества функционирования систем радиолокации, телекоммуникаций и мобильной связи. Учёт влияния флуктуаций весовых коэффициентов мог бы позволить минимизировать вносимые флуктуациями искажения в характеристики адаптивных систем, и тем самым достигнуть оптимального качества их функционирования. Разработке данных методов и посвящена диссертация.

Цель работы.

1. Разработка методов анализа статистических характеристик адаптивных антенных систем различной структуры при учёте флуктуаций настраиваемых весовых коэффициентов в наиболее общем случае негауссовской статистической зависимости между вектором входных сигналов и весовым вектором.
2. Повышение качества функционирования адаптивных антенных систем с учётом флуктуаций весовых коэффициентов в различных условиях помеховой обстановки.

Задачи исследования:

1. Разработка методов анализа статистических характеристик с учетом флуктуаций весовых коэффициентов узкополосных адаптивных антенных решёток, исключая возможность нелинейной функциональной зависимости входного и выходного сигналов в цепи корреляционной обратной связи, и настраивающихся по быстрому рекуррентному алгоритму и алгоритму Хэбба, в наиболее общем случае негауссовской статистической зависимости между вектором входных сигналов и весовым вектором.
2. Статистический анализ характеристик узкополосных ААР, содержащих нелинейную функцию в цепи корреляционной обратной связи, с учётом флуктуаций настраиваемого весового вектора в наиболее общем случае негауссовской статистической зависимости между вектором входных сигналов и вектором весовых коэффициентов. Для разработки методов были выбраны дискретный градиентный, быстрый рекуррентный алгоритм и алгоритм Хэбба.
3. Анализ с учетом флуктуаций весовых коэффициентов статистических характеристик искусственных нейронных сетей в наиболее общем случае негауссовской статистической зависимости между весовым вектором и вектором входных сигналов. Для разработки методов анализа были выбраны дискретный градиентный, быстрый рекуррентный алгоритмы и алгоритм Хэбба.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Впервые разработаны методы анализа с учётом флуктуаций весового вектора в наиболее общем случае негауссовской статистической зависимости между век-

тором входных сигналов и весовым вектором статистических характеристик узкополосных адаптивных антенных решеток, исключающих возможность нелинейной функциональной зависимости входного и выходного сигналов в цепи корреляционной обратной связи, и настраивающихся по быстрому рекуррентному алгоритму и алгоритму Хэбба. Данные методы основаны на использовании теории возмущений в предположении малости коэффициента адаптации, используемого для настройки адаптивных систем.

2. Для узкополосных ААР, содержащих нелинейную функцию в цепи корреляционной обратной связи, впервые разработаны методы статистического анализа их характеристик с учётом флуктуаций настраиваемых весовых коэффициентов в наиболее общем случае негауссовской статистической зависимости между весовым вектором и вектором входных сигналов. Методы были разработаны для дискретного градиентного, быстрого рекуррентного алгоритмов и алгоритма Хэбба. Данные методы предполагают, помимо использования теории возмущений, также разложение в ряд Вольтерра нелинейной функции, содержащейся в цепи корреляционной обратной связи адаптивных систем.
3. В наиболее общем случае негауссовской статистической зависимости между весовым вектором и вектором входных сигналов впервые разработаны методы анализа статистических характеристик многослойных полносвязных искусственных нейронных сетей с учётом флуктуаций настраиваемых весовых коэффициентов. Методы были разработаны для дискретного градиентного, быстрого рекуррентного алгоритмов и алгоритма Хэбба. Данные методы предполагают на основе имеющихся статистических характеристик отдельного искусственного нейрона получение рекуррентных соотношений этих же характеристик для каждого слоя искусственной нейронной сети. Дискретный градиентный и быстрый рекуррентный алгоритмы для настройки искусственных нейронных сетей также были использованы впервые.

Научная значимость

1. Разработка методов анализа статистических характеристик адаптивных антенных решёток различной структуры и многослойных полносвязных искусственных нейронных сетей с учётом флуктуаций настраиваемых весовых коэффициентов.
2. Получение аналитических результатов, описывающих специфику работы адаптивных антенных решёток и искусственных нейронных сетей при учёте флуктуа-

ций весового вектора для классических алгоритмов настройки ААР (дискретного градиентного и быстрого рекуррентного) и классического алгоритма настройки ИНС (алгоритма Хэбба);

3. Использование дискретного градиентного и быстрого рекуррентного алгоритмов – классических алгоритмов, используемых для работы адаптивных антенных решёток, для настройки искусственных нейронных сетей.

Практическая ценность

Практическая ценность результатов диссертационного исследования состоит в том, что разработанные в диссертации методы анализа статистических характеристик адаптивных антенных решёток и искусственных нейронных сетей позволяют повысить эффективность их функционирования в условиях сложной помеховой обстановки, поскольку оптимальное управление параметрами функционирования указанных адаптивных систем позволяет снизить уровень искажения выходного сигнала и добиться повышения отношения сигнал / шум на выходе адаптивных антенных решёток и искусственных нейронных сетей.

Полученные в диссертации экспериментальные и теоретические результаты представляют интерес для ряда научно – исследовательских учреждений, занимающихся разработкой радио- и гидроакустических адаптивных антенных решёток и искусственных нейронных сетей, а также в организациях, связанных с практическим использованием и разработкой подобных систем, таких как институт прикладной физики РАН (ИПФРАН, г. Нижний Новгород), Нижегородский институт радиотехники (ННИИРТ, г. Нижний Новгород), научно – производственное объединение “Полёт” (НПО “Полёт”, г. Нижний Новгород), Московский физико-технический институт (МФТИ, г. Москва), центр оптико – нейронных технологий НИИСИ РАН (ЦОНТ НИИСИ РАН, г. Москва) и научный центр нейрокомпьютеров (НЦН, г. Москва).

Методы исследований

При решении частных задач исследования использовались методы статистической радиофизики, теории адаптивных систем управления, линейной алгебры и теории

матриц. Математическое моделирование адаптивных антенных систем проводилось на языке Visual Basic 3.0 и в среде программирования MatLab 4.0 – 7.0, 2015.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Методы статистического анализа узкополосных адаптивных антенных решёток, имеющих алгоритм настройки нелинейный по весовому вектору (алгоритм Хэбба, весовой вектор рассчитывается, исходя из решения уравнения третьей степени) с учётом флуктуаций весовых коэффициентов.
2. Методы статистического анализа узкополосных адаптивных антенных решёток, содержащих нелинейную функцию в цепи корреляционной обратной связи, с учётом флуктуаций весового вектора. Статистический анализ флуктуаций весовых коэффициентов в адаптивных антенных решётках с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи принципиально связан с дифференцируемостью указанных нелинейных функций.
3. Методы статистического анализа полносвязных искусственных нейронных сетей с учетом флуктуаций весовых коэффициентов с нелинейным по весовому вектору алгоритмом настройки (алгоритмом Хэбба).
4. Методы статистического анализа полносвязных искусственных нейронных сетей с учетом флуктуаций весовых коэффициентов, каждый искусственный нейрон которых имеет нелинейную функциональную зависимость между входным и выходным сигналами в цепи корреляционной обратной связи.
5. Сравнительный анализ потерь, возникающих вследствие флуктуаций весовых коэффициентов в многоканальных адаптивных системах. В случае равных скоростей сходимости алгоритмов минимальные потери в выходном отношении сигнал / шум наблюдаются в линейных ААР, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму, а максимальные - в ААР с алгоритмом Хэбба.
6. Использование для настройки искусственных нейронных сетей дискретного градиентного и быстрого рекуррентного алгоритмов, применяемых в известной литературе для настройки адаптивных антенных решеток. Разработанный подход позволяет решать задачи выделения нейронной сетью полезного сигнала на фоне помех и получить преимущество в смысле меньшего уровня флуктуаций по сравнению с нейросетевыми алгоритмами (алгоритмом Хэбба).

Достоверность результатов обеспечивается:

1. Обоснованными допущениями и корректным выбором ограничений и исходных данных из практики разработки адаптивных антенных систем и построения искусственных нейронных сетей.
2. Сравнимостью аналитических результатов, описывающих на основе набора предположений ряд частных случаев, с общими результатами, полученными методами компьютерного моделирования.
3. Большой выборкой полученных данных (несколько миллионов выборочных точек), используемой для усреднения, при получении каждой точки на графиках статистических характеристик многоканальных адаптивных систем. Использование большой выборки данных привело к сходимости полученных результатов.
4. Совпадением результатов, полученных прямым вычислением по аналитическим формулам, и путём создания компьютерной имитационной модели реальных адаптивных антенных решёток и искусственных нейронных сетей, работающих в дискретном времени.

Апробация основных результатов

Результаты диссертационной работы докладывались на следующих международных и российских конференциях: на 4 – ой Нижегородской сессии молодых учёных (г. Нижний Новгород, 1999), 6 – ом Санкт – Петербургском симпозиуме по теории адаптивных систем (Санкт – Петербург, 1999), 3 – ей Международной конференции “Antenna Theory and Techniques” (Севастополь, Украина, 1999), 3 - ей Международной конференции и выставке “ Цифровая обработка сигналов и её применение” (Москва, 2000, 2004), на научных конференциях по радиофизике ННГУ (г. Нижний Новгород, 2000, 2001, 2002, 2004, 2005), Всероссийской научно-технической конференции «Интеллектуальные и информационные системы» (Тула, 2003, 2004, 2005, 2007, 2009), Всероссийской научно-технической конференции «Современные методы и средства обработки пространственно – временных сигналов» (Пенза, 2004), XLI Всероссийской конференции по проблемам математики, информатики, физики и химии (Москва, 2005, 2006), VII международной конференции «Оптико-электронные приборы и устройства в системах распознавания образов, обработки изображений и символьной информации» (Курск, 2005), Всероссийской конференции «Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации» (Суздаль,

2007, 2009), XIV Всероссийской научно-технической конференции «Нейроинформатика-2012», Международной научно-технической конференции «Информационные системы и технологии» (Нижний Новгород, 2014, 2015), Международной научно-технической конференции «Физика и технические приложения волновых процессов» (Нижний Новгород, 2014; Казань, 2015), XXIII Международная научно-техническая конференция «Радиолокация, навигация и связь» (Воронеж, 2017), Всероссийская научно-техническая конференция «Радиоэлектронная борьба в XXI веке» (Воронеж, 2018).

Публикации

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 1 коллективной монографии, 30 статьях в журналах, включенных в Список ведущих научных журналов и изданий, утвержденный ВАК РФ, (в том числе 9 публикаций в журналах, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования Scopus и Web of Science), 1 статье, опубликованной в журнале, зарегистрированном в РИНЦ, а также в 34 тезисах и трудах конференций [102,104-115,117-169]. 43 работы (в том числе 20 статей и раздел в коллективной монографии) из 66 выполнены без соавторов.

Вклад автора

Все материалы и результаты, вошедшие в данную диссертационную работу, подготовлены либо лично автором, либо совместно с соавторами работ, опубликованных по теме диссертации.

Структура и объём работы.

Диссертация объемом 307 страниц, включая 300 страниц основного текста, состоит из введения, шести глав и заключения, включает 38 рисунков, 14 таблиц и список цитируемой литературы из 180 наименований.

В первой главе рассматривается статистический анализ адаптивных антенных решёток с ограничениями, настраивающихся по градиентным алгоритмам, с учётом флуктуаций весового вектора.

В § 1.1 приведено нахождение оптимального весового вектора для ААР с ограничениями.

В § 1.2 методами теории возмущений стационарный весовой вектор для дискретного градиентного алгоритма был представлен в виде суммы весового вектора, найденного в нулевом приближении, и бесконечного числа поправок, представленных в виде многомерных бесконечных рядов.

В § 1.3 - 1.5 в первом, так называемом борновском, приближении рассматривается влияние флуктуаций весовых коэффициентов на корреляционные и спектральные характеристики антенных решёток, а также на мощность выходного сигнала антенны. В параграфах также приведены результаты компьютерного моделирования адаптивной антенной решётки с однократным линейным ограничением на диаграмму направленности с дискретным градиентным алгоритмом настройки. Найденные в результате компьютерного эксперимента значения выходной мощности и спектральной плотности мощности выходного сигнала ААР совпадают со значениями, полученными на основе теоретического анализа.

В § 1.6 приведён расчёт характеристик эффективности работы адаптивных антенных решеток - диаграммы направленности, коэффициента направленного действия, коэффициента полезного действия, потерь в выходном отношении сигнал / шум ААР в присутствии флуктуаций весового вектора.

В § 1.7 размещены выводы к материалу, изложенному в первой главе.

Во второй главе анализируется влияние флуктуаций весового вектора на статистические характеристики адаптивных антенных решёток с “быстрыми” алгоритмами настройки (алгоритмами непосредственного и итеративного обращения выборочной оценки ковариационной матрицы).

В § 2.1 приведён способ нахождения оптимального весового вектора для ААР с ограничениями в случае представления весового вектора в виде двух взаимно ортогональных компонент, одна из которых принадлежит подпространству ограничений, а другая к дополнительному (относительно подпространства ограничений) подпространству, а также вывод итеративного алгоритма обращения выборочной оценки ковариационной матрицы.

В § 2.2 методами теории возмущений стационарный весовой вектор для итеративного алгоритма обращения выборочной оценки ковариационной матрицы был представлен в виде суммы весового вектора, найденного в нулевом приближении, и

бесконечного числа поправок, представленных в виде многомерных бесконечных рядов.

В § 2.3 - 2.5 в первом, так называемом борновском, приближении рассматривается влияние флуктуаций весовых коэффициентов на корреляционные и спектральные характеристики антенных решёток, а также на мощность выходного сигнала антенны. В параграфах также приведены результаты компьютерного моделирования адаптивной антенной решётки с однократным линейным ограничением на диаграмму направленности с алгоритмом итеративного обращения выборочной оценки ковариационной матрицы.

В § 2.6 приведён расчёт характеристик эффективности работы адаптивных антенных решеток - диаграммы направленности, коэффициента направленного действия, коэффициента полезного действия, потерь в выходном отношении сигнал / шум ААР в присутствии флуктуаций весового вектора, а также вид диаграммы направленности, найденной в результате компьютерного моделирования.

В § 2.7 проводится статистический анализ алгоритма непосредственного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов и результаты компьютерного моделирования ААР, настраивающейся по данному алгоритму.

В § 2.8 размещены выводы к материалу, изложенному во второй главе.

В третьей главе приведен статистический анализ характеристик адаптивной антенной решётки, настраивающейся по классическому алгоритму настройки искусственных нейронных сетей – алгоритму Хэбба, применённому для целей пространственной обработки сигналов в адаптивной антенне.

В § 3.1 методами теории возмущений стационарный весовой вектор для алгоритма Хэбба был представлен в виде суммы вектора, найденного в нулевом приближении, и бесконечного числа поправок, представленных в виде многомерных бесконечных рядов.

В § 3.2 – 3.4 приведены найденные с учётом флуктуаций весового вектора характеристики выходного сигнала ААР, настраивающейся по алгоритму Хэбба – корреляционная функция, спектральная плотность мощности, а также мощность на выходе адаптивной антенны, а также результаты компьютерного моделирования.

В § 3.5 рассматриваются характеристики эффективности работы адаптивных антенных решеток, настраивающихся по алгоритму Хэбба – диаграмма направленности, коэффициент направленного действия, коэффициент полезного действия, потери в выходном отношении сигнал / шум с учётом флуктуаций весового вектора.

В § 3.6 размещены выводы к материалу третьей главы.

В четвёртой главе проводится анализ влияния флуктуаций весового вектора на статистические характеристики адаптивной антенной решетки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму.

В § 4.1 методами теории возмущений стационарный весовой вектор для дискретного градиентного алгоритма, примененного в адаптивной антенне с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, был представлен в виде суммы весового вектора, полученного в нулевом приближении, и бесконечного ряда поправок, записанных в виде многомерных бесконечных рядов.

В § 4.2 – 4.3 приведены с учетом флуктуаций весового вектора статистические характеристики выходного сигнала ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи (корреляционная функция и мощность на выходе адаптивной антенны), а также корреляционная матрица флуктуаций весовых коэффициентов. Даны также результаты компьютерного моделирования адаптивной антенной решетки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму.

В § 4.4 приведён расчёт характеристик эффективности работы ААР - диаграммы направленности, коэффициента направленного действия и коэффициента полезного действия, потерь в выходном отношении сигнал / шум в присутствии флуктуаций весового вектора.

В § 4.5 приведены выводы к материалу, изложенному в четвёртой главе.

В пятой главе представлен статистический анализ с учётом флуктуаций весовых коэффициентов характеристик адаптивной антенной решётки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму.

В § 5.1 методами теории возмущений стационарный весовой вектор для алгоритма рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов, примененного в адаптивной антенне с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, был представлен в виде суммы весового вектора, полученного в нулевом приближении, и бесконечного ряда поправок, записанных в виде многомерных бесконечных рядов.

В § 5.2 – 5.3 получены с учетом флуктуаций весового вектора корреляционная функция и мощность выходного сигнала ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, а также матрица ковариации флуктуаций весового вектора. Приведены результаты компьютерного моделирования адаптивной антенной решетки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраиваемой по быстрому рекуррентному алгоритму.

В § 5.4 приведён расчёт характеристик эффективности работы ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраиваемой по быстрому рекуррентному алгоритму - диаграммы направленности, коэффициента направленного действия, коэффициента полезного действия и потерь в выходном отношении сигнал / шум при учёте флуктуаций весового вектора.

В § 5.5 размещены выводы к материалу пятой главы.

В шестой главе проводится статистический анализ с учетом флуктуаций настраиваемых весовых коэффициентов характеристик искусственных нейронных сетей, настраиваемых по различным алгоритмам.

В § 6.1 – 6.2 представлены с учетом флуктуаций весовых коэффициентов статистические характеристики (корреляционные функции и мощности выходных сигналов различных слоев сети) многослойной полносвязной искусственной нейронной сети, настраиваемой соответственно по адаптированным для ИНС дискретному градиентному и быстрому рекуррентному алгоритмам при решении искусственной нейронной сетью задачи выделения полезного сигнала на фоне помех.

В § 6.3 даны результаты статистического анализа с учетом флуктуаций весовых коэффициентов характеристик многослойной полносвязной искусственной нейронной сети, настраиваемой по алгоритму Хэбба. Получены выражения для корреляционной функции и мощности выходного сигнала первых трех слоев сети. Приведён общий вид корреляционной функции и мощности произвольного слоя ИНС, показана закономерность возрастания числа коэффициентов, входящих в выражения корреляционной функции и мощности по мере возрастания номера слоя искусственной нейронной сети.

В § 6.4 приведён расчёт характеристики эффективности работы искусственных нейронных сетей – потерь в выходном отношении сигнал / шум, вызванных наличием флуктуаций весовых коэффициентов. Данная характеристика рассчитывается для первых двух слоев ИНС, настраиваемых по дискретному градиентному и быстрому рекуррентному алгоритмам, а также по алгоритму Хэбба.

В § 6.5 представлены выводы к главе 6.

В заключении приводятся основные результаты работы, следующие из них выводы и положения, выносимые на защиту.

В приложениях размещены алгоритм итеративного обращения выборочной корреляционной матрицы при различных методах оценивания корреляционной матрицы входных сигналов для ААР с ограничениями и ААР МСКО, а также обобщение дискретного градиентного и быстрого рекуррентного алгоритмов для применения их для настройки искусственных нейронных сетей.

Глава 1. Влияние флуктуаций весового вектора на статистические характеристики адаптивных антенных решёток с градиентными алгоритмами настройки.
1.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В АДАПТИВНОЙ АНТЕННОЙ РЕШЁТКЕ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ
 [16,49,65,116].

Рассмотрим работу адаптивной антенной решётки (ААР), имеющей N элементов, с многократными линейными ограничениями на диаграмму направленности. Схема данной ААР представлена на рис. 1.1. На приёмные элементы адаптивной антенной решётки в момент времени k поступает N -мерный вектор входных сигналов $\vec{X}(k)$. Настройка ААР осуществляется с помощью N -мерного весового вектора \vec{W} . В процессе настройки на выходе антенной решётки формируется выходной сигнал следующего вида:

$$Z(k) = \vec{W}^T(k) \vec{X}(k) = \vec{X}^T(k) \vec{W}(k). \quad (1.1.1)$$

Надстрочные знаки T , H , $*$ обозначают соответственно операции транспонирования, эрмитовского сопряжения и комплексного сопряжения.

Выходная мощность ААР представляет собой произведение выходного сигнала адаптивной антенны и комплексно сопряженного ему значения:

$$Z^2(k) = \vec{W}^H \vec{X}^*(k) \vec{X}^T(k) \vec{W}.$$

Можно показать, что математическое ожидание выходной мощности адаптивной антенной решётки (средняя по ансамблю выходная мощность) имеет вид:

$$\langle Z^2(k) \rangle = \langle \vec{W}^H \vec{X}^*(k) \vec{X}^T(k) \vec{W} \rangle = \vec{W}^H \mathbf{R}_{xx} \vec{W}, \quad (1.1.2)$$

где \mathbf{R}_{xx} - корреляционная матрица входных сигналов.

Будем считать, что весовой вектор удовлетворяет условию [49,65]:

$$\mathbf{C}^H \vec{W} = \vec{H},$$

где $\mathbf{C} \equiv [\vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_L]$ - матрица ограничений размерности $N \times L$. Столбцами данной матрицы являются линейно-независимые векторы ограничений \vec{C}_l (L - число вводимых ограничений). \mathbf{C}^H - матрица, эрмитово - сопряжённая с матрицей \mathbf{C} .

$\vec{H} \equiv \{H_1, \dots, H_L\}^T$ - вектор желаемого отклика адаптивной системы размерностью L , компоненты которого задают фиксированные коэффициенты усиления адаптивной системы в направлениях векторов \vec{C}_l^* .

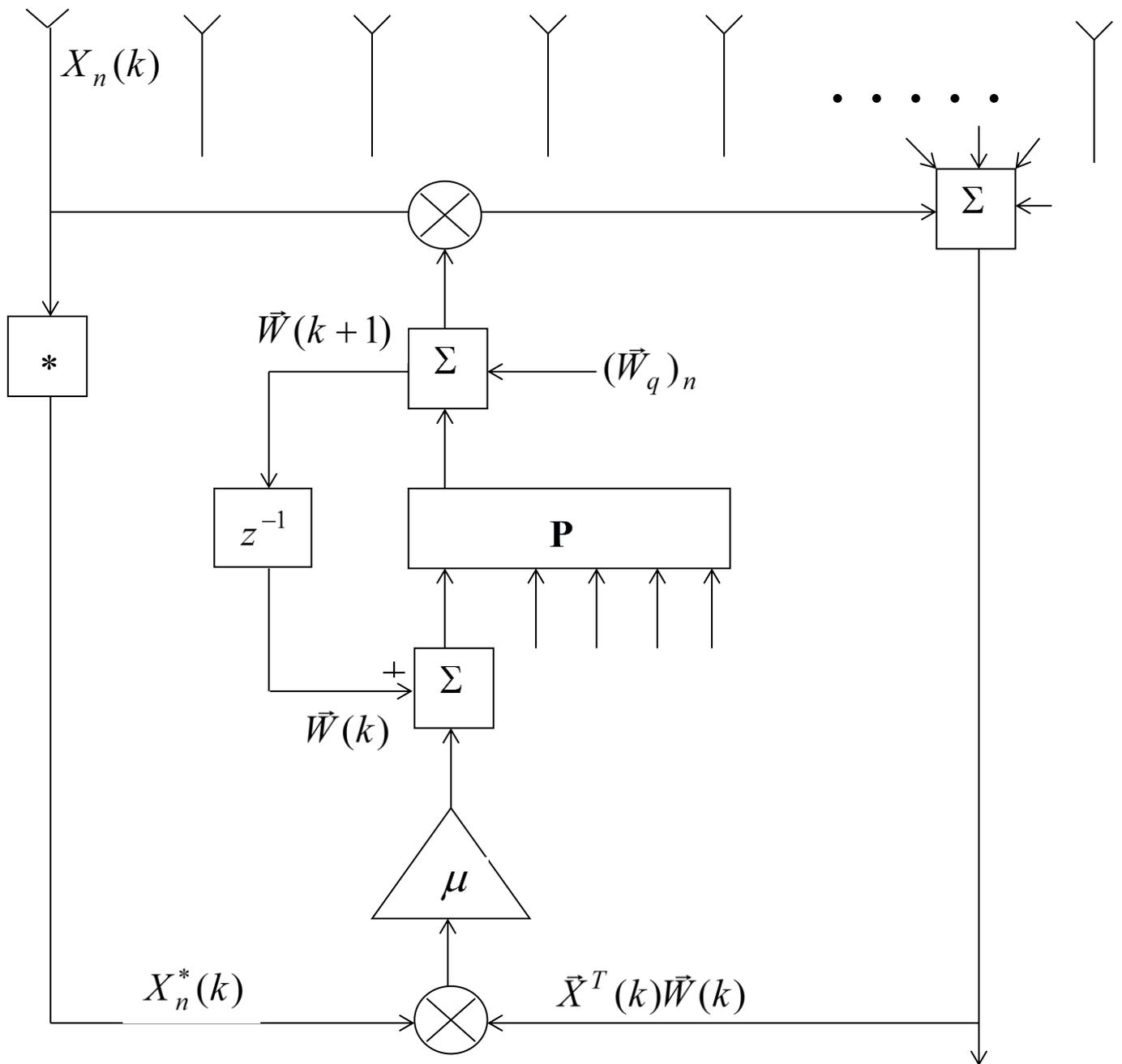


Рис. 1.1. Схема адаптивной антенной решётки с ограничениями, настраиваемой по дискретному градиентному алгоритму [65].

Задачу оптимизации с ограничениями можно сформулировать следующим образом [16,65]:

$$\text{минимизировать } \vec{W}^H \mathbf{R}_{xx} \vec{W} \quad (1.1.3)$$

$$\text{при условии } \mathbf{C}^H \vec{W} = \vec{H}. \quad (1.1.4)$$

Решение данной задачи можно найти методом множителей Лагранжа [16]. Суммируя целевую функцию, описываемую формулой (1.1.3), с левой частью уравнения ограничений (1.1.4), умноженной на L - мерный вектор неопределённых множителей Лагранжа $\vec{\lambda}$ (и вводя для простоты коэффициент 0.5 при целевой функции), сведём задачу оптимизации с ограничениями к задаче без ограничений. Для нахождения оптимального вектора весовых коэффициентов требуется минимизировать функцию Лагранжа следующего вида:

$$\mathbf{L}(\vec{W}) = \frac{1}{2} \vec{W}^H \mathbf{R}_{xx} \vec{W} + \vec{\lambda}^H [\mathbf{C}^H \vec{W} - \vec{H}]. \quad (1.1.5)$$

Градиент функции Лагранжа $\mathbf{L}(\vec{W})$ по весовому вектору \vec{W} определяется как:

$$\nabla_{\vec{W}} \mathbf{L}(\vec{W}) = \mathbf{R}_{xx} \vec{W} + \mathbf{C} \vec{\lambda}. \quad (1.1.6)$$

Чтобы найти минимум лагранжиана (1.1.5) приравняем нулю выражение (1.1.6), т. е.

$$\mathbf{R}_{xx} \vec{W} + \mathbf{C} \vec{\lambda} = 0, \quad (1.1.7)$$

откуда

$$\vec{W}_{opt} = -\mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C} \vec{\lambda}. \quad (1.1.8)$$

Найдём вектор множителей Лагранжа $\vec{\lambda}$. Этот вектор может быть получен из уравнения ограничений:

$$\mathbf{C}^H \vec{W}_{opt} = \vec{H} = \mathbf{C}^H [-\mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C} \vec{\lambda}] \quad (1.1.9)$$

можно показать, что вектор множителей Лагранжа равен:

$$\vec{\lambda} = -[\mathbf{C}^H \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C}]^{-1} \vec{H}, \quad (1.1.10)$$

здесь существование $[\mathbf{C}^H \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C}]^{-1}$ гарантируется положительной определённостью матрицы \mathbf{R}_{xx} . Объединив (1.1.8) и (1.1.10), получим оптимальный вектор весовых коэффициентов:

$$\vec{W}_{opt} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C} [\mathbf{C}^H \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C}]^{-1} \vec{H}. \quad (1.1.11)$$

1.2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ХАРАКТЕРИСТИК ААР [65,116].

Настройка весового вектора \vec{W} антенных решёток, настраивающихся по градиентным алгоритмам с ограничениями, описывается N - мерным векторным уравнением и в дискретном времени может быть записано в виде [16, 65]:

$$\vec{W}(k+1) = \mathbf{P}\{\vec{W}(k) - \mu \vec{X}^*(k) \vec{X}^T(k) \vec{W}(k)\} + \vec{W}_q, \quad (1.2.1)$$

где \vec{X} - вектор входных сигналов ($\langle \vec{X}(k) \rangle = 0$), μ - коэффициент усиления в цепи корреляционной обратной связи, $\vec{W}_q = \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \vec{H}$ - вектор комплексных весовых коэффициентов, соответствующий "желаемой" диаграмме направленности (ДН) покая (при отсутствии внешних помех), \mathbf{P} - проекционная матрица (матричный фильтр в контуре управления ААР). Данная матрица обеспечивает введение многократных линейных ограничений на пространственные характеристики ААР и имеет вид:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H, \quad (1.2.2)$$

Согласно [6, 16] матричный оператор \mathbf{P} осуществляет проекцию оценки градиента выходной мощности адаптивной антенной решётки в пространстве весовых коэффициентов $\vec{W} \equiv \{W_1, W_2, \dots, W_N\}^T$ на подпространство (гиперплоскость) ограничений [65]:

$$\mathbf{C}^H \vec{W} = \vec{H}. \quad (1.2.3)$$

Дискретный градиентный алгоритм с ограничениями, представленный в данном разделе формулами (1.2.1) – (1.2.3), является одним из классических алгоритмов настройки адаптивных антенных решеток. Многократные линейные ограничения в данном алгоритме, нужны, в частности, при его использовании для настройки широкополосной адаптивной антенной решетки с линиями задержки в каждом канале. Многократные линейные ограничения обеспечивают формирование частотной характеристики ААР в заданном направлении. Корректирующий пространственный фильтр с данной частотной характеристикой позволяет согласовать геометрию антенной решётки с плоским волновым фронтом сигналов [16].

Необходимо отметить, что градиентные адаптивные алгоритмы также используются для настройки искусственных нейронных сетей [73-77]. Искусственные нейронные сети – это достаточно новый класс нелинейных адаптивных систем. Системы обработки сигналов на основе нейронных сетей имеют в своем составе искусственные нейроны, близкие по структуре к структуре адаптивных антенных решёток, но с использованием нелинейных элементов. Для настройки искусственных нейронных сетей применяются градиентные алгоритмы, аналогичные градиентным алгоритмам в адаптивных антенных решётках.

Представленный в данном разделе дискретный градиентный алгоритм с ограничениями (1.2.1) – (1.2.3) в следующих главах диссертации будет использован для настройки адаптивной антенной решётки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, по схеме идентичной структуре искусственного нейрона, а также обобщен и использован для настройки многослойной полносвязной искусственной нейронной сети.

Для статистического анализа уравнения введём следующие обозначения [49,65]:

$$\vec{W} = \langle \vec{W} \rangle + \tilde{W}, \quad \mathbf{M}_{xx}(k) \equiv \mathbf{R}_{xx} + \tilde{\Phi}(k), \quad (1.2.4)$$

где вектор весовых коэффициентов \vec{W} и стохастическая матрица входных сигналов $\mathbf{M}_{xx} \equiv \vec{X}^*(k)\vec{X}^T(k)$ представлены в виде сумм их средних значений $\langle \vec{W} \rangle$, \mathbf{R}_{xx} и флуктуационных составляющих $\tilde{W}(k)$, $\tilde{\Phi}(k)$.

Весовой вектор \vec{W} при выполнении дальнейшего анализа удобно представлять в виде суммы двух взаимортогональных векторов [49,65]:

$$\vec{W} = \mathbf{P}\vec{W} + \mathbf{D}\vec{W},$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{I} - \mathbf{P} = \mathbf{C}(\mathbf{C}^H\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^H$ - проекционная матрица, дополнительная к \mathbf{P} . Для матриц \mathbf{C} , \mathbf{P} , \mathbf{D} и вектора \vec{W}_q справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{D} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}\mathbf{C} = \mathbf{C}^H\mathbf{P} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{D}\mathbf{C} = \mathbf{C}, \quad \mathbf{C}^H\mathbf{D} = \mathbf{C}^H, \quad \mathbf{P}\vec{W}_q = \vec{0}, \quad \mathbf{D}\vec{W}_q = \vec{W}_q. \end{aligned}$$

Геометрическая интерпретация алгоритма настройки адаптивной антенной решётки с однократным линейным ограничением показана на рис. 1.2 [49]. Из рисунка видно, что пространство весовых коэффициентов состоит из подпространства ограничений и дополнительного к нему. Настройка весового вектора происходит в подпространстве ограничений. Там же находится и оптимальный вектор весовых коэффициентов. Подпространство, дополнительное к подпространству ограничений представлено вектором \vec{W}_q . Оно ортогонально подпространству ограничений, что и демонстрируют приведённые выше формулы.

Усредняя (1.2.1) и используя обозначения (1.2.4), найдём точное уравнение для среднего значения весового вектора $\langle \vec{W} \rangle$ [65]:

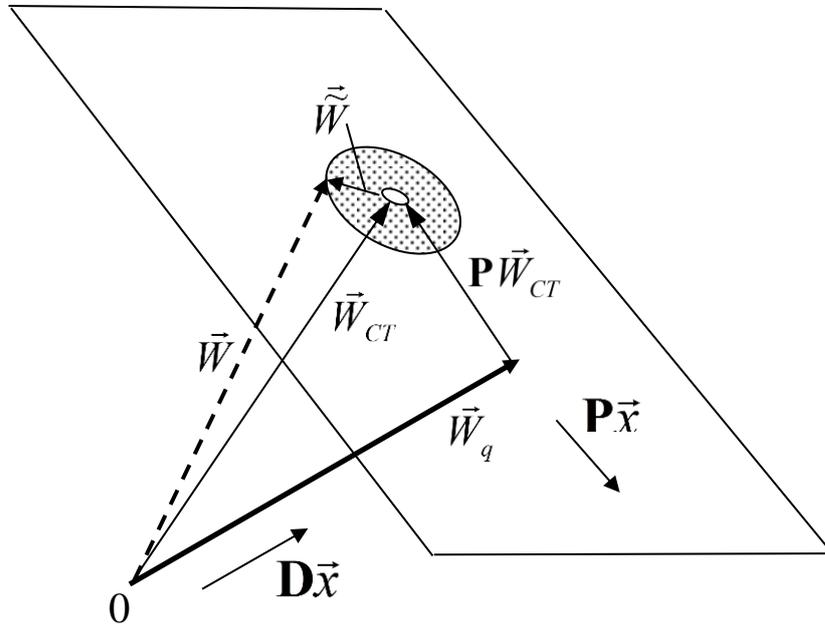


Рис. 1.2. Геометрическая интерпретация алгоритма с линейными пространственными ограничениями [49].

$$\langle \vec{W}(k+1) \rangle = \mathbf{P}\{\langle \vec{W}(k) \rangle - \mu \mathbf{R}_{xx} \langle \vec{W}(k) \rangle - \mu \vec{\Delta}_w\} + \vec{W}_q, \quad (1.2.5)$$

$$\text{где } \vec{\Delta}_w \equiv \langle \tilde{\Phi} \vec{W} \rangle \quad (1.2.6)$$

вектор кумулянтных функций третьего порядка, учитывающих статистическую зависимость флуктуаций весовых коэффициентов \vec{W} и входных сигналов $\vec{X}(k)$.

Для определения стационарного среднего значения весового вектора $\vec{W}_{CT} \equiv \langle \vec{W}(k) \rangle$ и других статистических характеристик адаптивной антенной решётки воспользуемся методом возмущений по параметру μ , который будем полагать малым ($\mu \ll 1$). В качестве нулевого приближения возьмём среднее значение весового вектора $\langle \vec{W} \rangle_0 \equiv \vec{W}_0$, получающееся из усреднения уравнения (1.2.1) в приближении "прямого замыкания" всех смешанных моментов [49,65]:

$$\vec{W}_0(k+1) = \mathbf{P}\{\vec{W}_0(k) - \mu \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_0(k)\} + \vec{W}_q. \quad (1.2.7)$$

В этом приближении мы вообще пренебрегаем флуктуациями вектора весовых коэффициентов, считая $\vec{W}(k) = \langle \vec{W}(k) \rangle_0 = \vec{W}_0(k)$. Отметим, что формула (1.2.7) получается из точного уравнения (1.2.5), если положить [49,65]:

$$\vec{\Delta}_w \equiv \langle \tilde{\Phi} \vec{W} \rangle = \vec{\Delta}_{w0} = \vec{0}. \quad (1.2.8)$$

Из сравнения (1.2.5) и (1.2.7) следует, что статистическая зависимость флуктуаций весового вектора, вообще говоря, влияет на среднее значение вектора весовых коэффициентов и это влияние эквивалентно добавке к вектору \vec{W}_q вектора $\mu \mathbf{P} \vec{\Delta}_w$, принадлежащего подпространству ограничений. Стационарное значение вектора весовых коэффициентов в нулевом приближении будет удовлетворять уравнению [65]:

$$\mathbf{D} \vec{W}_0 + \mu \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_0 = \vec{W}_q. \quad (1.2.9)$$

Решение данного уравнения было приведено выше [16,65]:

$$\vec{W}_{0CT} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C} [\mathbf{C}^H \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C}]^{-1} \vec{H}.$$

Вычитая (1.2.7) из (1.2.1), найдём уравнение для вектора поправки $\vec{W}_{\Pi}(k) \equiv \vec{W}(k) - \vec{W}_0(k)$ к нулевому приближению [65]:

$$\vec{W}_{\Pi}(k+1) = \mathbf{P}\{\vec{W}_{\Pi}(k) - \mu [\mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{\Pi}(k) + \tilde{\Phi}(k) \vec{W}(k)]\}. \quad (1.2.10)$$

В установившемся режиме $\vec{W}_{\Pi}(k) = \mathbf{P} \vec{W}_{\Pi}(k)$, $\mathbf{D} \vec{W}_{\Pi}(k) = \vec{0}$. Это означает, что все поправки (средние и флуктуационные) к нулевому приближению лежат в подпространстве ограничений. Поэтому матрицу $\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx}$ в (1.2.10) можно заменить на эквивалентную эрмитовскую $\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P}$. Переходя по следующим формулам [49,65]:

$$\bar{Y} = \mathbf{Q}^{-1}\bar{W}_{\Pi}, \bar{W}_{\Pi} = \mathbf{Q}\bar{Y}, \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^H \quad (1.2.11)$$

в \mathbf{Q} - матричное представление, диагонализующее эрмитовскую матрицу $\mathbf{PR}_{xx}\mathbf{P}$, получим для \bar{Y} уравнение [65]:

$$\bar{Y}(k+1) = \bar{Y}(k) - \mu\Lambda\bar{Y}(k) - \mu\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}\tilde{\Phi}(k)\bar{W}(k), \quad (1.2.12)$$

$$\text{где } \Lambda = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{PR}_{xx}\mathbf{PQ}. \quad (1.2.13)$$

Матрица $\mathbf{PR}_{xx}\mathbf{P}$ имеет L нулевых собственных значений, соответствующих ортонормированным векторам-столбцам \bar{C}_l матрицы ограничений \mathbf{C} . Значения остальных $N-L$ собственных чисел λ_n матрицы $\mathbf{PR}_{xx}\mathbf{P}$ заключены между наименьшим λ_{\min} и наибольшим λ_{\max} собственными числами матрицы \mathbf{R}_{xx} [5,49,65,144]. В итоге диагональная матрица Λ будет иметь следующий вид [65]:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \lambda_{N-L} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_{\min} \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{N-L} \leq \lambda_{\max}. \quad (1.2.14)$$

Стационарное решение уравнения (1.2.12) может быть записано в виде [65]:

$$\bar{Y}(k+1) = -\mu \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\lambda}(n) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} \tilde{\Phi}(k-n) [\bar{W}_0 - \mathbf{Q} \bar{Y}(k-n)], \quad (1.2.15)$$

где $\hat{\lambda}(k)$ - диагональная переходная матрица вида:

$$\hat{\lambda}(k) = \begin{bmatrix} (1 - \mu\lambda_1)^k & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & (1 - \mu\lambda_{N-L})^k & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.2.16)$$

Ряд теории возмущений по параметру μ , который будем считать малым ($\mu \ll 1$), можно построить, итерируя уравнение (1.2.15) [28,31]. В результате вектор $\bar{Y}(k)$ и вектор поправки $\bar{W}_{\Pi}(k) = \mathbf{Q}\bar{Y}(k)$ запишутся следующим образом [65]:

$$\bar{Y} = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3 + \dots, \quad (1.2.17)$$

$$\bar{W}_{\Pi}(k) = \mathbf{Q}\bar{Y}(k) = \bar{W}_{\Pi1}(k) + \bar{W}_{\Pi2}(k) + \bar{W}_{\Pi3}(k) + \dots \quad (1.2.18)$$

Члены ряда (1.2.17) соответственно будут равны [65]:

$$\begin{aligned}
& \langle \tilde{W}^H(m) [\mathbf{R}_{\xi\xi}(m, m+n) + \mathbf{R}_{SS}(m, m+n)] \tilde{W}(m+n) \rangle = \\
& = \langle \tilde{W}^H(m) \mathbf{R}_{\xi\xi} \tilde{W}(m+n) \rangle r_\xi^{|n|}, \\
& \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} [\mathbf{R}_{\xi\xi}(m, m+n) + \mathbf{R}_{SS}(m, m+n)] \mathbf{PQ} = \Lambda r_\xi^{|n|}.
\end{aligned}$$

С помощью выражений для поправок в первом борновском приближении (1.2.19) и равенств (1.2.20), можно получить различные статистические характеристики ААР с учётом флуктуаций весового вектора. Это и будет сделано ниже в данной главе.

1.3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА ААР С УЧЁТОМ ФЛУКТУАЦИЙ ВЕСОВОГО ВЕКТОРА [107,116,164].

Корреляционная функция выходного сигнала адаптивной антенной решётки может быть представлена следующим выражением [49,65]:

$$\begin{aligned} K_Z(m, m+n) \equiv & \langle Z^*(m)Z^T(m+n) \rangle = K_{Z_0}(m, m+n) + \\ & + \langle \tilde{W}^H(m)\tilde{\Phi}_{xx}(m, m+n) \rangle \bar{W}_{CT} + \bar{W}_{CT}^H \langle \tilde{\Phi}_{xx}(m, m+n)\tilde{W}(m+n) \rangle +, \\ & + \langle \tilde{W}^H(m)\bar{X}^*(m)\bar{X}^T(m+n)\tilde{W}(m+n) \rangle \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

где $K_{Z_0}(m, m+n) \equiv \bar{W}_{CT}^H \langle \bar{X}^*(m)\bar{X}^T(m+n) \rangle \bar{W}_{CT} = r_s^{|n|} \langle |Z|^2 \rangle_s + r_\xi^{|n|} \langle |Z|^2 \rangle_\xi$ - корреляционная функция выходного сигнала без учёта флуктуаций вектора весовых коэффициентов.

Кумулянтную функцию третьего порядка между вектором входных сигналов и вектором флуктуаций весовых коэффициентов можно представить в виде [49,65]:

$$\bar{\Delta}_w(m, m+n) \equiv \langle \tilde{\Phi}(m, m+n)\tilde{W}(m+n) \rangle, \quad (1.3.2)$$

где $\tilde{\Phi}(m, m+n) \equiv \bar{X}^*(m)\bar{X}^T(m+n) - \langle \bar{X}^*(m)\bar{X}^T(m+n) \rangle$ - «флуктуационная» часть корреляционной матрицы входных сигналов, (предположим дополнительно, что $\bar{X}(k)$ является комплексным гауссовским случайным вектором). В этом случае выражение для корреляционной функции выходного сигнала адаптивной антенной решётки запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} K_Z(m, m+n) \equiv & \langle Z^*(m)Z^T(m+n) \rangle = K_{Z_0}(m, m+n) + \\ & + \bar{\Delta}_w^H \bar{W}_{CT} + \bar{W}_{CT}^H \bar{\Delta}_w + \langle \tilde{W}^H(m)\bar{X}^*(m)\bar{X}^T(m+n)\tilde{W}(m+n) \rangle \end{aligned}$$

Для дальнейшего статистического анализа используем метод возмущений по параметру μ . Будем считать данный параметр малым. Тогда в первом борновском приближении можно получить выражения для слагаемых, входящих в формулу корреляционной функции выходного сигнала адаптивной антенной решётки (1.3.1), учитывающих влияние флуктуаций весовых коэффициентов:

$$\begin{aligned} & \bar{\Delta}_w^H \bar{W}_{CT} + \bar{W}_{CT}^H \bar{\Delta}_w = \\ & = \langle \tilde{W}^H(m)\tilde{\Phi}_{xx}(m, m+n) \rangle \bar{W}_{CT} + \bar{W}_{CT}^H \langle \tilde{\Phi}_{xx}(m, m+n)\tilde{W}(m+n) \rangle = \\ & - \mu \langle |Z|^2 \rangle_s \left\{ Sp(\mathbf{PR}_{SS})r_s^{|n|} \left[\frac{2r_s^2}{1-r_s^2} + |n| \right] + Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi}) \left[\frac{(r_s^{|n|} + r_\xi^{|n|})r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} + r_\xi \frac{r_s^{|n|} - r_\xi^{|n|}}{r_s - r_\xi} \right] \right\} \\ & - \mu \langle |Z|^2 \rangle_\xi \left\{ Sp(\mathbf{PR}_{SS}) \left[\frac{(r_s^{|n|} + r_\xi^{|n|})r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} + r_s \frac{r_s^{|n|} - r_\xi^{|n|}}{r_s - r_\xi} \right] + Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi}) r_\xi^{|n|} \left[\frac{2r_\xi^2}{1-r_\xi^2} + |n| \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

В формуле (1.3.1) последнее слагаемое состоит из суммы двух слагаемых:

$$\begin{aligned} & \langle \vec{W}^H(m) \vec{X}^*(m) \vec{X}^T(m+n) \vec{W}(m+n) \rangle = \\ & \langle \vec{W}^H(m) \mathbf{R}_{xx}(m, m+n) \vec{W}(m+n) \rangle + \langle \vec{W}^H(m) \mathbf{\Phi}_{xx}(m, m+n) \vec{W}(m+n) \rangle \end{aligned}$$

Однако, если пренебречь слагаемыми второго порядка малости по коэффициенту адаптации μ , то можно приближённо записать:

$$\begin{aligned} & \langle \vec{W}^H(m) \vec{X}^*(m) \vec{X}^T(m+n) \vec{W}(m+n) \rangle \approx \langle \vec{W}^H(m) \mathbf{R}_{xx}(m, m+n) \vec{W}(m+n) \rangle = \\ & = \frac{1}{2} \mu \langle |Z|^2 \rangle_s \frac{1+r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} \left\{ Sp(\mathbf{P}\mathbf{R}_{ss}) r_s^{|n|} + Sp(\mathbf{P}\mathbf{R}_{\xi\xi}) r_\xi^{|n|} \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \mu \langle |Z|^2 \rangle_\xi \frac{1+r_\xi^2}{1-r_\xi^2} \left\{ Sp(\mathbf{P}\mathbf{R}_{ss}) r_s^{|n|} + Sp(\mathbf{P}\mathbf{R}_{\xi\xi}) r_\xi^{|n|} \right\} \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

После преобразований окончательное выражение для корреляционной функции выходного сигнала ААР (1.3.1) в стационарном режиме работы имеет вид:

$$\begin{aligned} K_Z(n) &= r_s^{|n|} \langle |Z|^2 \rangle_s + r_\xi^{|n|} \langle |Z|^2 \rangle_\xi + \\ & + \frac{1}{2} \mu \langle |Z|^2 \rangle_s \frac{1+r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} \left\{ Sp(\mathbf{P}\mathbf{R}_{ss}) r_s^{|n|} + Sp(\mathbf{P}\mathbf{R}_{\xi\xi}) r_\xi^{|n|} \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \mu \langle |Z|^2 \rangle_\xi \frac{1+r_\xi^2}{1-r_\xi^2} \left\{ Sp(\mathbf{P}\mathbf{R}_{ss}) r_s^{|n|} + Sp(\mathbf{P}\mathbf{R}_{\xi\xi}) r_\xi^{|n|} \right\} \\ & - \mu \langle |Z|^2 \rangle_s \left\{ Sp(\mathbf{P}\mathbf{R}_{ss}) r_s^{|n|} \left[\frac{2r_s^2}{1-r_s^2} + |n| \right] + Sp(\mathbf{P}\mathbf{R}_{\xi\xi}) \left[\frac{(r_s^{|n|} + r_\xi^{|n|}) r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} + r_\xi \frac{r_s^{|n|} - r_\xi^{|n|}}{r_s - r_\xi} \right] \right\} - \\ & - \mu \langle |Z|^2 \rangle_\xi \left\{ Sp(\mathbf{P}\mathbf{R}_{ss}) \left[\frac{(r_s^{|n|} + r_\xi^{|n|}) r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} + r_s \frac{r_s^{|n|} - r_\xi^{|n|}}{r_s - r_\xi} \right] + Sp(\mathbf{P}\mathbf{R}_{\xi\xi}) r_\xi^{|n|} \left[\frac{2r_\xi^2}{1-r_\xi^2} + |n| \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Учитывая выполнение равенств (1.2.20), формулу (1.3.5) можно упростить. Из равенств (1.2.20) следует, что $Sp(\mathbf{P}\mathbf{R}_{ss}) = 0$. Подставляя это условие в (1.3.5), получаем выражение для корреляционной функции выходного сигнала адаптивной антенной решётки:

$$\begin{aligned} K_Z(n) &= r_s^{|n|} \langle |Z|^2 \rangle_s + r_\xi^{|n|} \langle |Z|^2 \rangle_\xi + \\ & + \frac{1}{2} \mu \langle |Z|^2 \rangle_s \frac{1+r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} Sp(\mathbf{P}\mathbf{R}_{\xi\xi}) r_\xi^{|n|} + \frac{1}{2} \mu \langle |Z|^2 \rangle_\xi \frac{1+r_\xi^2}{1-r_\xi^2} Sp(\mathbf{P}\mathbf{R}_{\xi\xi}) r_\xi^{|n|} \\ & - \mu \langle |Z|^2 \rangle_s Sp(\mathbf{P}\mathbf{R}_{\xi\xi}) \left[\frac{(r_s^{|n|} + r_\xi^{|n|}) r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} + r_\xi \frac{r_s^{|n|} - r_\xi^{|n|}}{r_s - r_\xi} \right] - \\ & - \mu \langle |Z|^2 \rangle_\xi Sp(\mathbf{P}\mathbf{R}_{\xi\xi}) r_\xi^{|n|} \left[\frac{2r_\xi^2}{1-r_\xi^2} + |n| \right] \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Запишем формулу (1.3.6) в случае воздействия на адаптивную антенну мощной узкополосной по сравнению с полезным сигналом, помехи ($r_\xi \gg r_s$). Учёт условия узкополосности приводит выражение (1.3.6) к виду:

$$K_Z(n) = r_\xi^{|n|} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \mu \left[\frac{1 - 3r_\xi^2}{1 - r_\xi^2} - 2|n| \right] Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi}) \right\} \bar{W}_{CT}^+ \mathbf{R}_{\xi\xi} \bar{W}_{CT} + \left\{ r_s^{|n|} - \frac{1}{2} \mu Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi}) r_\xi^{|n|} \right\} \bar{W}_{CT}^+ \mathbf{R}_{ss} \bar{W}_{CT}, |n| > 0, r_\xi \gg r_s. \quad (1.3.7)$$

Из (1.3.7) видно, что в случае воздействия на ААР мощной помехи имеют место искажения полезного сигнала на выходе адаптивной антенны (эффект «перекompенсации») [65]. Необходимо отметить, что данный эффект более удобно комментировать на спектральном языке. Ниже в этой главе такой анализ будет проведён.

1.4. НАХОЖДЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ФЛУКТУАЦИЙ ВЕСОВОГО ВЕКТОРА. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И МОДЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОМОМЕНТНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ААР [108-109,114,116,164].

Найдём корреляционную матрицу флуктуаций весовых коэффициентов $\mathbf{K}_{\bar{W}} \equiv \langle \bar{W}^* \bar{W}^T \rangle$ и суммарную мощность выходного сигнала адаптивной антенной решётки $\langle |Z|^2 \rangle_{CT}$.

Получим формулу для вектора $\bar{\Delta}_W$, который учитывает статистическую зависимость вектора входных сигналов $\bar{X}(k)$ и весового вектора $\bar{W}(k)$. Для этого подставим (1.2.19) в (1.2.6). Тогда в борновском приближении $\bar{\Delta}_W$ запишется в виде:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_W &\equiv \langle \Phi \bar{W} \rangle \approx \bar{\Delta}_{W1} \equiv \langle \Phi \mathbf{Q} \bar{Y}_1 \rangle = \\ &- \mu \mathbf{R}_{ss} \bar{W}_{0CT} \left\{ Sp(\mathbf{PR}_{ss}) \frac{r_s^2}{1 - r_s^2} + Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi}) \frac{r_\xi r_s}{1 - r_\xi r_s} \right\} - \\ &- \mu \mathbf{R}_{\xi\xi} \bar{W}_{0CT} \left\{ Sp(\mathbf{PR}_{ss}) \frac{r_\xi r_s}{1 - r_\xi r_s} + Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi}) \frac{r_\xi^2}{1 - r_\xi^2} \right\} \end{aligned}$$

Необходимо отметить, что в процессе вычисления средних значений, в которые входят кратные суммы, использовалось предположение о малости времени корреляции входных сигналов по сравнению со временем релаксации системы [49,65]. Запишем данное условие в несколько видоизмененной форме [65]:

$$\mu \lambda_n \frac{r^2}{1-r^2} < \mu \sum_{n=1}^{N-L} \lambda_n \frac{r^2}{1-r^2} = \mu \frac{r^2}{1-r^2} Sp(\mathbf{PR}_{xx}) \ll 1$$

Приведенное выше выражение представляет собой достаточное условие применимости методов теории возмущений для анализа влияния флуктуаций на статистические характеристики ААР с дискретным градиентным алгоритмом настройки. Оно накладывает ограничения на величину параметров μ, r .

Для линейной эквидистантной ААР с однократным линейным ограничением эта формула может быть записана через характеристики помеховой обстановки:

$$\frac{\mu r^2}{1-r^2} \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} \pi_n \frac{(N-1)^2}{N} + \pi_{\xi} (N-1) \right\} \ll 1,$$

где π_n, π_{ξ} - соответственно мощности n -ого помехового сигнала и собственного шума адаптивной антенной решётки.

Матрица ковариации весового вектора в совпадающие моменты времени в борновском приближении может быть представлена в виде [49,65]:

$$K_{\tilde{W}}(m, m) \equiv \langle \tilde{W}^*(m) \tilde{W}^T(m) \rangle \cong \mathbf{Q}^* \langle \tilde{Y}_1^*(m) \tilde{Y}_1^T(m) \rangle \mathbf{Q}^T. \quad (1.4.1)$$

Вид корреляционной матрицы $\langle \tilde{Y}_1^* \tilde{Y}_1^T \rangle$ можно получить, используя (1.2.19):

$$\langle \tilde{Y}_1^* \tilde{Y}_1^T \rangle = \frac{1}{2} \mu \frac{1+r_{\xi}^2}{1-r_{\xi}^2} \langle |Z|^2 \rangle_{\xi} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \mu \frac{1+r_s r_{\xi}}{1-r_s r_{\xi}} \langle |Z|^2 \rangle_s \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (1.4.2)$$

здесь \mathbf{I} - единичная матрица размерности $(N-L) \times (N-L)$, размерность общей матрицы, в которую входит \mathbf{I} , составляет $N \times N$.

Окончательный вид корреляционной матрицы флуктуаций весового вектора получим, подставив (1.4.2) в (1.4.1):

$$K_{\tilde{W}} = \frac{1}{2} \mu \frac{1+r_{\xi}^2}{1-r_{\xi}^2} \langle |Z|^2 \rangle_{\xi} \mathbf{P}^* + \frac{1}{2} \mu \frac{1+r_s r_{\xi}}{1-r_s r_{\xi}} \langle |Z|^2 \rangle_s \mathbf{P}^*. \quad (1.4.3)$$

Из выражения (1.4.3) видно, что в адаптивной антенне, настраивающейся по градиентному алгоритму, флуктуации весового вектора изотропны – одинаковы во всех направлениях пространства весовых коэффициентов. Это связано с тем, что собственные числа матрицы \mathbf{P}^* равны друг другу. Поскольку данная матрица в направлениях ограничений имеет собственные числа, равные нулю, то в направлениях ограничений флуктуации отсутствуют.

Суммарную мощность флуктуаций весовых коэффициентов адаптивной антенной решётки легко получить из (1.4.3):

$$\begin{aligned}
Sp(K_{\vec{W}}) &= \frac{1}{2} \mu \frac{1+r_\xi^2}{1-r_\xi^2} \langle |Z|^2 \rangle_\xi Sp(\mathbf{P}^*) + \frac{1}{2} \mu \frac{1+r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} \langle |Z|^2 \rangle_s Sp(\mathbf{P}^*) = \\
&= \frac{1}{2} \mu \frac{1+r_\xi^2}{1-r_\xi^2} \langle |Z|^2 \rangle_\xi (N-L) + \frac{1}{2} \mu \frac{1+r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} \langle |Z|^2 \rangle_s (N-L)
\end{aligned} \tag{1.4.4}$$

поскольку

$$Sp(\mathbf{P}) = Sp[\mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H] = N - L. \tag{1.4.5}$$

Суммарная мощность на выходе адаптивной антенной решётки может быть записана в виде:

$$\langle |Z|^2 \rangle_{CT} = \langle |Z|^2 \rangle_0 + \bar{\Delta}_W^H \bar{W}_{CT} + \bar{W}_{CT}^H \bar{\Delta}_W + \langle \bar{W}^H(m) \bar{X}^*(m) \bar{X}^T(m) \bar{W}(m) \rangle, \tag{1.4.6}$$

$$\text{где } \langle |Z|^2 \rangle_0 \equiv \bar{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} \bar{W}_{CT} = \bar{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss} \bar{W}_{CT} + \bar{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi} \bar{W}_{CT} = \langle |Z|^2 \rangle_s + \langle |Z|^2 \rangle_\xi \tag{1.4.7}$$

- выходная мощность без учёта флуктуаций весового вектора.

Если в формулах (1.3.3), (1.3.4), положить $n=0$, то можно найти слагаемые, входящие в выражение (1.4.6) и учитывающие влияние флуктуаций весовых коэффициентов. Тогда имеем:

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta}_W^H \bar{W}_{CT} + \bar{W}_{CT}^H \bar{\Delta}_W &= -\mu \langle |Z|^2 \rangle_s \left\{ Sp(\mathbf{P}_{ss}) \frac{2r_s^2}{1-r_s^2} + Sp(\mathbf{P}_{\xi\xi}) \frac{2r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} \right\} - \\
&\quad - \mu \langle |Z|^2 \rangle_\xi \left\{ Sp(\mathbf{P}_{ss}) \frac{2r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} + Sp(\mathbf{P}_{\xi\xi}) \frac{2r_\xi^2}{1-r_\xi^2} \right\}
\end{aligned} \tag{1.4.8}$$

$$\begin{aligned}
\langle \bar{W}^H(m) \bar{X}^*(m) \bar{X}^T(m) \bar{W}(m) \rangle &\cong \langle \bar{W}^H(m) \mathbf{R}_{xx} \bar{W}(m) \rangle = \\
&= \frac{1}{2} \mu \langle |Z|^2 \rangle_s \frac{1+r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} [Sp(\mathbf{P}_{ss}) + Sp(\mathbf{P}_{\xi\xi})] + \\
&\quad + \frac{1}{2} \mu \langle |Z|^2 \rangle_\xi \frac{1+r_\xi^2}{1-r_\xi^2} [Sp(\mathbf{P}_{ss}) + Sp(\mathbf{P}_{\xi\xi})]
\end{aligned} \tag{1.4.9}$$

В итоге получим следующее выражение для мощности выходного сигнала ААР:

$$\begin{aligned}
\langle |Z|^2 \rangle_{CT} &= \langle |Z|^2 \rangle_s + \langle |Z|^2 \rangle_\xi - \\
&\quad - \mu \langle |Z|^2 \rangle_s \left\{ Sp(\mathbf{P}_{ss}) \frac{2r_s^2}{1-r_s^2} + Sp(\mathbf{P}_{\xi\xi}) \frac{2r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} \right\} - \\
&\quad - \mu \langle |Z|^2 \rangle_\xi \left\{ Sp(\mathbf{P}_{ss}) \frac{2r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} + Sp(\mathbf{P}_{\xi\xi}) \frac{2r_\xi^2}{1-r_\xi^2} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \mu \langle |Z|^2 \rangle_s \frac{1 + r_s r_\xi}{1 - r_s r_\xi} \{Sp(\mathbf{PR}_{ss}) + Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi})\} + \\
& + \frac{1}{2} \mu \langle |Z|^2 \rangle_\xi \frac{1 + r_\xi^2}{1 - r_\xi^2} \{Sp(\mathbf{PR}_{ss}) + Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi})\}
\end{aligned} \tag{1.4.10}$$

Необходимо отметить, что из выполнения равенств (1.2.20) следует, что $Sp(\mathbf{PR}_{ss}) = 0$. В этом случае формула (1.4.10) несколько упростится:

$$\begin{aligned}
& \langle |Z|^2 \rangle_{CT} = \\
& = \left\{ 1 + \frac{1}{2} \mu \frac{1 - 3r_\xi^2}{1 - r_\xi^2} Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi}) \right\} \langle |Z|^2 \rangle_\xi + \left\{ 1 + \frac{1}{2} \mu \frac{1 - 3r_s r_\xi}{1 - r_s r_\xi} Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi}) \right\} \langle |Z|^2 \rangle_s
\end{aligned} \tag{1.4.11}$$

Заметим, что при $r_s = r_\xi$ эта формула переходит в выражение суммарной мощности выходного сигнала адаптивной антенной решётки, найденное в статье [65]:

$$\langle |Z|^2 \rangle_{CT} = \left\{ 1 + \frac{1}{2} \mu \frac{1 - 3r_\xi^2}{1 - r_\xi^2} Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi}) \right\} \langle |Z|^2 \rangle_0 \tag{1.4.12}$$

Из выражения (1.4.12) следует, что величина выходной мощности ААР с градиентным алгоритмом настройки, при учёте флуктуаций весовых коэффициентов определяется коэффициентом корреляции между отсчётами входных сигналов r_ξ и их эффективной мощностью $Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi})$. Выходная мощность $\langle |Z|^2 \rangle_{CT}$ может быть как больше мощности, полученной при стационарном весовом векторе $\langle |Z|^2 \rangle_0$ (эффект «рассогласования» (misadjustment), [17]), так и меньше её. Второй эффект (эффект уменьшения выходной мощности) – назовём, как и выше в данной главе, эффектом «перекомпенсации» [49,65,116].

Вернёмся к формуле (1.3.7) корреляционной функции выходного сигнала адаптивной антенной решётки, полученной для случая прихода на антенную решётку мощной узкополосной помехи ($r_\xi \gg r_s$), и положим в ней $n=0$. Тогда получим выражение для выходной мощности ААР в случае выполнения условия узкополосности:

$$\langle |Z|^2 \rangle_{CT} = \left\{ 1 + \frac{1}{2} \mu \frac{1 - 3r_\xi^2}{1 - r_\xi^2} Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi}) \right\} \langle |Z|^2 \rangle_\xi + \left\{ 1 - \frac{1}{2} \mu Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi}) \right\} \langle |Z|^2 \rangle_s \tag{1.4.13}$$

С помощью компьютерного моделирования была проведена проверка справедливости полученных формул для мощности выходного сигнала ААР.

РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.

Моделировалась N - элементная узкополосная адаптивная антенная решётка ($N=7$), настраиваемая по градиентному алгоритму (1.1.1) с однократными линейными ограничениями ($L=1$) на диаграмму направленности. Расстояние между элементами адаптивной антенной решётки было равно половине длины волны входных сигналов. В этом случае матрица ограничений C имеет размерность $[N \times 1]$ и равна $C \equiv \vec{C}_1 = \vec{S}^*$, где $\vec{S} = [1, \exp\{-j2\pi \sin \theta_s\}, \dots, \exp\{-j(N-1)\pi \sin \theta_s\}]$ - вектор - фазор полезного сигнала.

Предполагалось, что на адаптивную антенну поступают статистически независимые полезный сигнал и одна помеха с равными коэффициентами корреляции между отсчётами. Углы прихода полезного сигнала и помехи были равны соответственно $\Theta_s=0^\circ$, $\Theta_\xi=45^\circ$. Комплексные входные сигналы были сформированы с помощью рекурсивных фильтров первого порядка из двух независимых источников гауссовского “белого” шума. Мощность помехи была в 100 раз (на 20 dB) больше мощности полезного сигнала. В адаптивной антенной решётке присутствовал также собственный шум. Мощность собственного шума ААР составляла 0.1 (-10 dB) мощности полезного сигнала.

Чтобы проверить выражение (1.4.11) (коэффициенты автокорреляции сигнала и помехи предполагались равными $r_s = r_\xi = r$), проводилось сравнение изменения

относительной величины выходной мощности $M = \frac{1}{2} \mu \frac{1-3r^2}{1-r^2} Sp(\mathbf{P}\mathbf{R}_{\xi\xi}) \cdot 100\%$ (на всех

рисунках кривые 1) с соответствующим значением, найденным путём компьютерно-

го моделирования: $M = \frac{\langle |Z|^2 \rangle_{CT} - \langle |Z|^2 \rangle_0}{\langle |Z|^2 \rangle_0} \cdot 100\%$ (на всех рисунках кривые 2)

(рис.1.3 – 1.5).

Экспериментальное определение мощности выходного сигнала адаптивной антенной решётки велось путём усреднения по времени реализации выходного случайного процесса. Стартовым весовым вектором служил \vec{W}_{CT} , который находили путём численного итеративного решения (с точностью $\varepsilon=10^{-10}$) стационарного теоретического уравнения. Длина реализации определялась соотношением $2 \cdot 10^3 \tau_x$, где τ_x - время автокорреляции входных сигналов (в дискретных временных отсчётах).

Исследовалась зависимость величины “перекompенсации” мощности от значения r - коэффициента корреляции между отсчётами входных сигналов при величине коэффициента адаптации $\mu=10^{-3}$. Результаты приведены на рис.1.3.

Из сравнения теоретических кривых и кривых, полученных методом компьютерного моделирования, рисунка 1.3 можно видеть, что влияние флуктуаций весового вектора на мощность выходного сигнала адаптивной антенны зависит от уровня коррелированности отсчётов входных сигналов. При $r \leq 0.735$ на выходе адаптивной антенны имеет место мощность сигнала, большая минимальной мощности (эффект рассогласования), при $r > 0.735$ имеет место эффект “перекомпенсации” – выходная мощность сигнала адаптивной антенной решётки становится меньше минимальной мощности, полученной без учёта флуктуаций весового вектора. Конечное время усреднения при получении значений “перекомпенсации” мощности и наличие в адаптивной антенной решётке собственного шума приводит к некоторым различиям между теоретическими и экспериментальными данными.

На рис. 1.4 и рис. 1.5 приведены результаты теоретического и модельного (при компьютерном моделировании) измерения мощности на выходе адаптивной антенной решётки в зависимости от коэффициента адаптации μ для различных коэффициентов корреляции между отсчётами r .

Из рисунков можно видеть, что в случае высокой коррелированности отсчётов входных сигналов ($r=0.9$, рис. 1.4) имеет место достаточно хорошее согласование теоретических результатов и результатов, полученных путём компьютерного моделирования. В случае входных сигналов с некоррелированными отсчётами ($r=0$, рис. 1.5) расхождение между теорией и компьютерным моделированием может быть объяснено тем, что выражение (1.4.11) рассчитывалось в первом борновском приближении. При больших μ следует учитывать приближения более высокого порядка.

Таким образом, проведённое исследование подтвердило теоретические результаты статьи [65] и показало, что в адаптивных антеннах, настраивающихся по градиентным алгоритмам, из-за флуктуаций весового вектора может наблюдаться как увеличение мощности выходного сигнала, так и её уменьшение.

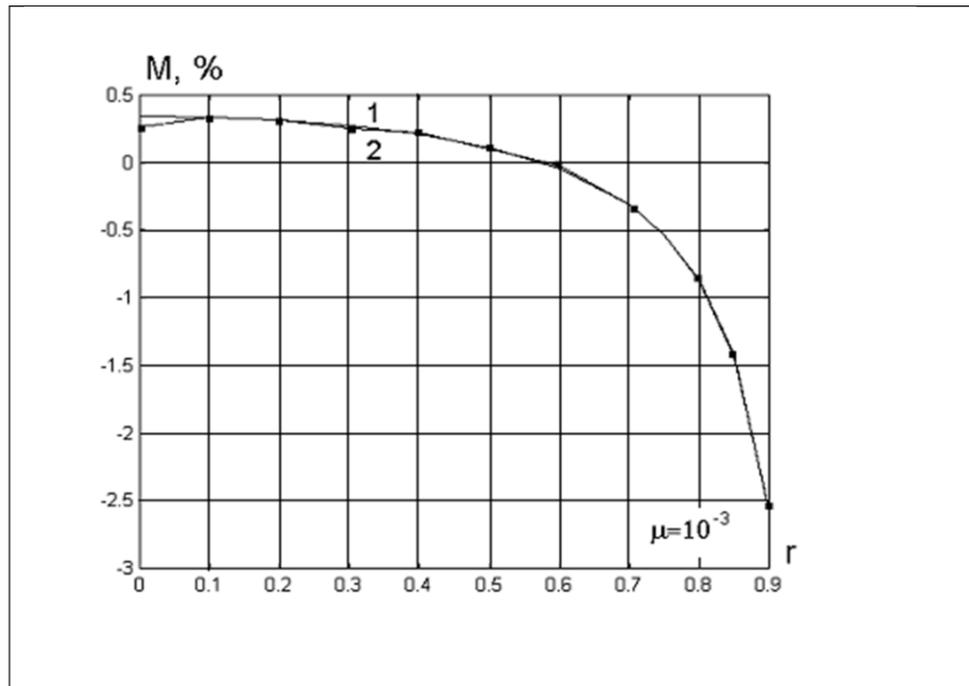


Рис. 1.3. Зависимость «перекompенсации» мощности выходного сигнала ААР M от коэффициента корреляции между отсчётами входных сигналов r (1 – теория, 2 – компьютерное моделирование).

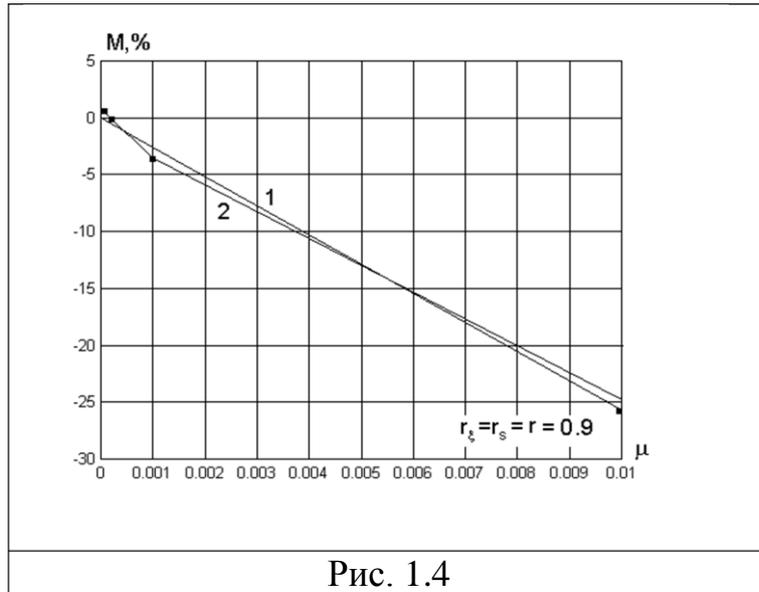


Рис. 1.4

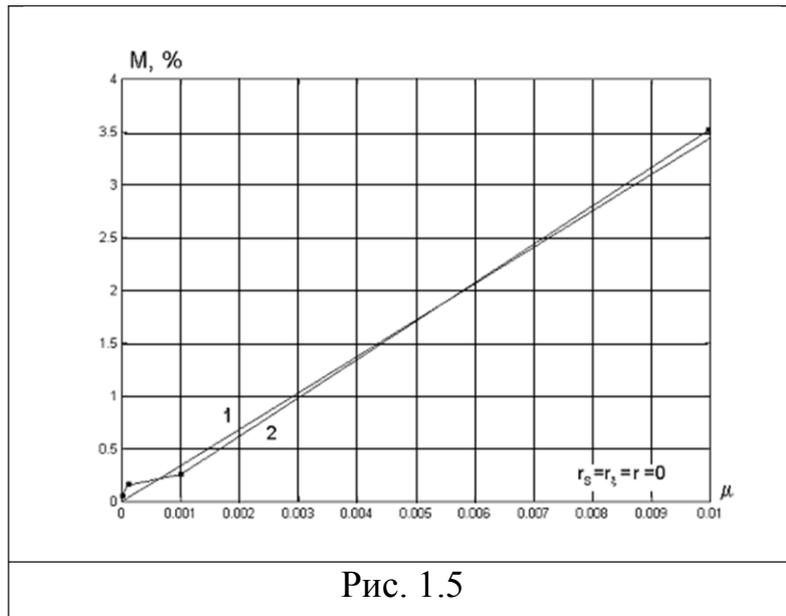


Рис. 1.5

Зависимость «перекompенсации» мощности выходного сигнала от коэффициента адаптации μ при различных коэффициентах корреляции между отсчётами входных сигналов (1 – теория, 2 – компьютерное моделирование).

1.5. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И МОДЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЫХОДНОГО СИГНАЛА ААР [107,116].

Рассмотрим влияние флуктуаций весовых коэффициентов на спектральные характеристики сигнала на выходе адаптивной антенной решётки. Спектральная плотность мощности (СПМ) дискретного по времени выходного сигнала определяется формулой [17]:

$$S_Z(\Omega) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_Z(n) z^{-n} \quad (1.5.1)$$

Чтобы получить выражение для дискретного спектра мощности выходного сигнала ААР, подставим формулу корреляционной функции выходного сигнала адаптивной антенной решётки, полученную без упрощений, в выражение СПМ ((1.3.5) в (1.5.1)). Тогда имеем:

$$\begin{aligned} S_Z(\Omega) &= \frac{z(1-r_s^2)}{z(1+r_s^2) - r_s(1+z^2)} \\ \{ <|Z|^2>_s [1 + \frac{1}{2} \mu (\frac{1+r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} - \frac{4r_s^2}{1-r_s^2}) Sp(\mathbf{PR}_{ss}) - \mu (\frac{r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} + \frac{r_\xi}{r_s - r_\xi}) Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi})] + \\ &+ <|Z|^2>_\xi \frac{1}{2} \mu (\frac{1+r_\xi^2}{1-r_\xi^2} - \frac{2r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} + \frac{2r_s}{r_\xi - r_s}) Sp(\mathbf{PR}_{ss}) \} + \\ &+ \frac{z(1-r_\xi^2)}{z(1+r_\xi^2) - r_\xi(1+z^2)} \\ \{ <|Z|^2>_s [\frac{1}{2} \mu \frac{r_s + r_\xi}{r_s - r_\xi} Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi})] + \\ &+ <|Z|^2>_\xi [1 - \mu (\frac{r_s}{r_\xi - r_s} + \frac{r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi}) Sp(\mathbf{PR}_{ss}) + \frac{1}{2} \mu \frac{1-3r_\xi^2}{1-r_\xi^2} Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi})] - \\ &- [\frac{r_s z}{(1-r_s z)^2} + \frac{r_s z^{-1}}{(1-r_s z^{-1})^2}] \mu <|Z|^2>_s Sp(\mathbf{PR}_{ss}) - \\ &- [\frac{r_\xi z}{(1-r_\xi z)^2} + \frac{r_\xi z^{-1}}{(1-r_\xi z^{-1})^2}] \mu <|Z|^2>_\xi Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi}) \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Необходимо отметить, что формулу (1.5.2) можно упростить. Для этого учтём, что $Sp(\mathbf{PR}_{ss}) = 0$ (это следует из выполнения равенств (1.2.20)). Тогда выражение для спектральной плотности мощности выходного сигнала адаптивной антенной решётки может быть записано в виде:

$$\begin{aligned}
S_Z(\Omega) &= \frac{z(1-r_s^2)}{z(1+r_s^2)-r_s(1+z^2)} \left\{ \langle |Z|^2 \rangle_s \left[1 - \mu \left(\frac{r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} + \frac{r_\xi}{r_s - r_\xi} \right) Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi}) \right] \right\} + \\
&+ \frac{z(1-r_\xi^2)}{z(1+r_\xi^2)-r_\xi(1+z^2)} \times \\
&\times \left\{ \langle |Z|^2 \rangle_s \frac{1}{2} \mu \frac{r_s + r_\xi}{r_s - r_\xi} Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi}) + \langle |Z|^2 \rangle_\xi \left[1 + \frac{1}{2} \mu \frac{1-3r_\xi^2}{1-r_\xi^2} Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi}) \right] \right\} - \\
&- \left[\frac{r_\xi z}{(1-r_\xi z)^2} + \frac{r_\xi z^{-1}}{(1-r_\xi z^{-1})^2} \right] \langle |Z|^2 \rangle_\xi \mu Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi})
\end{aligned} \tag{1.5.3}$$

Проанализируем формулу (1.5.3) в случае воздействия на антенную решётку мощной, узкополосной, по сравнению с полезным сигналом, помехи. В этом случае $r_\xi \gg r_s$, и выражение (1.5.3) для СПМ выходного сигнала ААР можно несколько упростить и записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
S_Z(\Omega) &= \frac{1-r_\xi^2}{1+r_\xi^2-2r_\xi \cos \Omega} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \mu \frac{1-3r_\xi^2}{1-r_\xi^2} Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi}) \right\} \bar{W}_{CT}^+ \mathbf{R}_{\xi\xi} \bar{W}_{CT} - \\
&- \mu Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi}) \frac{2r_\xi((1+r_\xi^2) \cos \Omega - 2r_\xi)}{((1+r_\xi^2) - 2r_\xi \cos \Omega)^2} \bar{W}_{CT}^+ \mathbf{R}_{\xi\xi} \bar{W}_{CT} + \\
&+ \left\{ \frac{1-r_s^2}{1+r_s^2-2r_s \cos \Omega} - \frac{1}{2} \mu Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi}) \frac{1-r_\xi^2}{1+r_\xi^2-2r_\xi \cos \Omega} \right\} \bar{W}_{CT}^+ \mathbf{R}_{ss} \bar{W}_{CT}
\end{aligned} \tag{1.5.4}$$

Из формулы (1.5.4) видно, что флуктуации вектора весовых коэффициентов при воздействии на ААР мощной помехи приводят к искажениям СПМ выходного сигнала адаптивной антенной решётки. Необходимо отметить, что искажаются как полезный, так и помеховый сигналы на выходе адаптивной антенны.

Вернёмся к выражению (1.3.7), полученному для случая воздействия на адаптивную антенную решётку мощной, узкополосной по сравнению с сигналом, помехи ($r_\xi \gg r_s$):

$$\begin{aligned}
K_Z(n) &= r_\xi^{|n|} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \mu \left[\frac{1-3r_\xi^2}{1-r_\xi^2} - 2|n| \right] Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi}) \right\} \bar{W}_{CT}^+ \mathbf{R}_{\xi\xi} \bar{W}_{CT} + \\
&+ \left\{ r_s^{|n|} - \frac{1}{2} \mu Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi}) r_\xi^{|n|} \right\} \bar{W}_{CT}^+ \mathbf{R}_{ss} \bar{W}_{CT}, \quad |n| > 0, \quad r_\xi \gg r_s.
\end{aligned}$$

Первое слагаемое в данной формуле соответствует помеховому сигналу:

$$K_Z(n) \approx r_\xi^{|n|} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \mu \left[\frac{1-3r_\xi^2}{1-r_\xi^2} - 2|n| \right] Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi}) \right\} \bar{W}_{CT}^+ \mathbf{R}_{\xi\xi} \bar{W}_{CT}, \tag{1.5.5}$$

второе слагаемое представляет собой корреляционную функцию полезного сигнала на выходе адаптивной антенной решётки:

$$K_Z(n) = \left\{ r_s^{|n|} - \frac{1}{2} \mu Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi}) r_\xi^{|n|} \right\} \vec{W}_{CT}^+ \mathbf{R}_{ss} \vec{W}_{CT}, \quad (1.5.6)$$

данной функции соответствует следующий дискретный спектр мощности:

$$S_Z(\Omega) = \left\{ \frac{1 - r_s^2}{1 + r_s^2 - 2r_s \cos \Omega} - \frac{1}{2} \mu Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi}) \frac{1 - r_\xi^2}{1 + r_\xi^2 - 2r_\xi \cos \Omega} \right\} \vec{W}_{CT}^+ \mathbf{R}_{ss} \vec{W}_{CT}. \quad (1.5.7)$$

Из формул (1.5.6), (1.5.7) видно, что эффект “перекompенсации” (уменьшение мощности выходного сигнала адаптивной антенной решётки по сравнению с мощностью полезного сигнала) приводит к появлению провала в спектральной плотности мощности полезного сигнала на частотах действия мощных помех. Необходимо отметить, что именно такой характер искажений СПМ полезного сигнала экспериментально наблюдался в работах [62-64].

РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.

Моделировалась (на языке Visual Basic 3.0) узкополосная ААР с однократным линейным ограничением на диаграмму направленности в направлении полезного сигнала, имеющая семь элементов. Весовые коэффициенты адаптивной антенной решётки настраивались по дискретному градиентному алгоритму с проекционной матрицей: $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{1}{N} \vec{W}_q \vec{W}_q^+$. В качестве входного сигнала на антенную решётку подавалась сумма полезного сигнала и одной помехи. Полезный сигнал приходил с направления, нормального к плоскости решётки. Помеха приходила под углом 45° к нормали решётки. Отсчёты комплексных огибающих полезного сигнала и помехи формировались из гауссовского белого шума с помощью рекурсивных фильтров. Данные фильтры позволяли задавать разные коэффициенты автокорреляции между отсчётами как полезного сигнала, так и помехи. Мощность помехи была в 100 раз (на 20 дБ) больше мощности полезного сигнала. В адаптивной антенной решётке присутствовал также собственный шум (комплексный белый гауссовский шум). Его мощность составляла 0.1 (-10 дБ) от мощности полезного сигнала.

Стационарный вектор весовых коэффициентов \vec{W}_{CT} (оптимальный весовой вектор) находили путём численного итеративного решения (с точностью $\varepsilon=10^{-10}$) стационарного теоретического уравнения. В процессе работы адаптивной антенной решётки стартовыми весовыми коэффициентами для градиентного алгоритма служили численно полученные значения весового вектора. Значения СПМ полезного

сигнала и выходного сигнала ААР вычислялись по полученным в компьютерном моделировании реализациям данных случайных процессов. Общая длина обрабатываемых реализаций равнялась $4 \cdot 10^3$ времён автокорреляции помехи. Величина «перекомпенсации» спектра вычислялась на нулевой частоте комплексной амплитуды по формулам:

в компьютерном эксперименте $M = \frac{S_s(0) - S_z(0)}{S_s(0)} \cdot 100\%$, где $S_s(0)$ - СПМ полезного

сигнала на нулевой частоте;

в теории $M = \frac{1}{2} \mu Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi}) \cdot \frac{1+r_\xi}{1-r_\xi} \cdot \frac{1-r_s}{1+r_s} \cdot 100\%$.

В процессе компьютерного моделирования выяснялась зависимость значений «перекомпенсации» от величины коэффициента адаптации μ (при $r_s=0$, $r_\xi=0.9$) (см. рис.1.6) и от величины r_ξ (при $r_s=0$, $\mu=10^{-3}$) (см. рис.1.7).

Из рисунков можно видеть, что величина провала в СПМ увеличивается при увеличении коэффициента адаптации μ (ширина полос входных сигналов считается фиксированной). Величина провала в спектральной плотности мощности также увеличивается при увеличении коэффициента корреляции между отсчётами помехи r_ξ (уменьшении полосы помехи), при этом величина коэффициента адаптации μ считается заданной, а полоса полезного сигнала r_s фиксирована. Графики показывают хорошее согласие между теоретическими результатами и результатами компьютерного моделирования.

В наиболее интересном для практики случае, когда векторы - фазоры помех не попадают в защищённое ограничениями подпространство векторов \vec{C}_l (например, когда источники помех находятся вне главного лепестка диаграммы направленности ААР), остаточная мощность помехи на выходе антенной решётки оказывается много меньше мощности полезного сигнала, поскольку помеха достаточно хорошо подавляется уже при пространственной обработке:

$$\vec{W}_{CT}^+ \mathbf{R}_{\xi\xi} \vec{W}_{CT} \ll \vec{W}_{CT}^+ \mathbf{R}_{ss} \vec{W}_{CT}. \quad (1.5.8)$$

Поскольку первое слагаемое в формуле (1.3.7) существенно меньше второго, то «перекомпенсация» сказывается преимущественно на полезном сигнале. Таким образом, эффект «перекомпенсации» является вредным явлением, приводящим к снижению эффективности обработки сигналов в адаптивной антенной решётке.

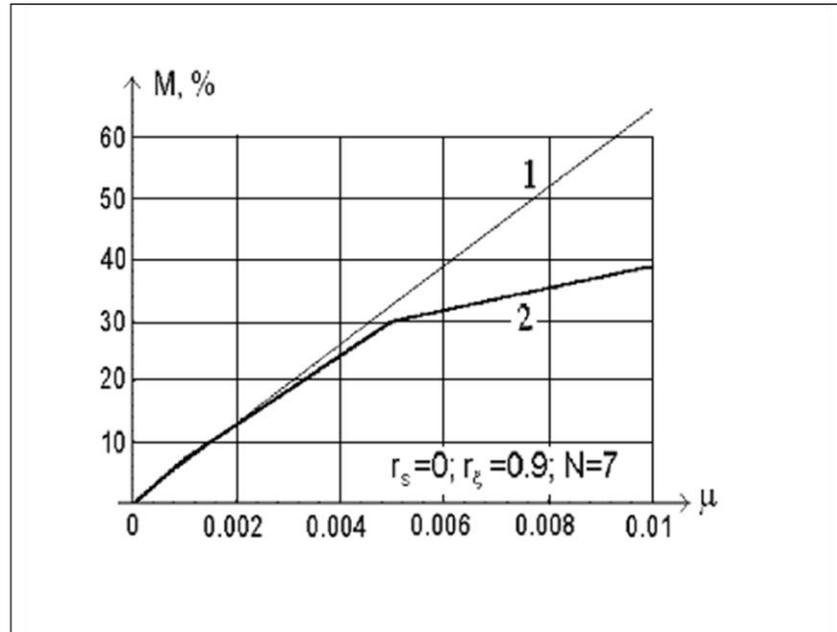


Рис. 1.6. Зависимость «перекомпенсации» спектральной плотности мощности выходного сигнала ААР от коэффициента адаптации μ (1 – теория, 2 – компьютерное моделирование).

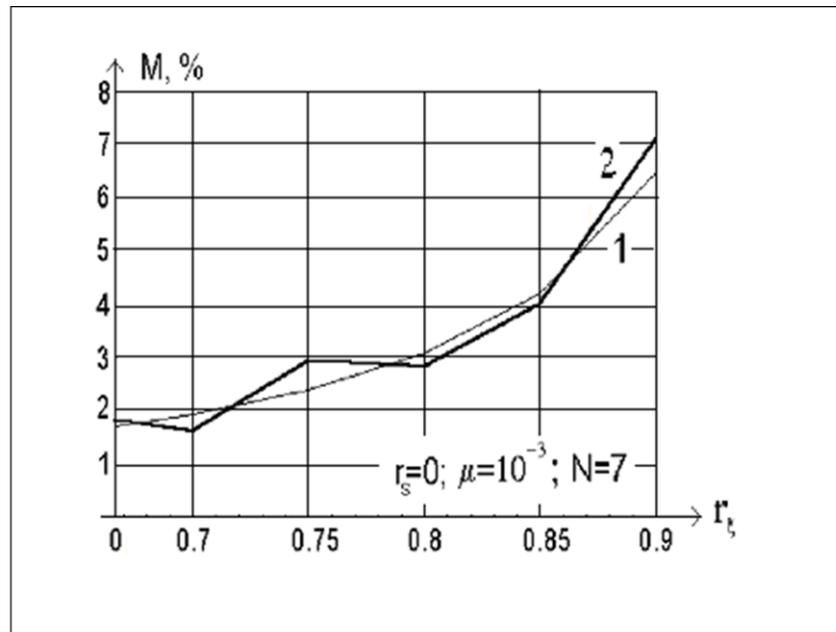


Рис. 1.7. Зависимость «перекомпенсации» спектральной плотности мощности выходного сигнала ААР от величины коэффициента корреляции между отсчётами помехи (1- теория, 2 – компьютерное моделирование).

1.6. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ФЛУКТУАЦИЙ ВЕСОВОГО ВЕКТОРА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ ААР - ДИАГРАММУ НАПРАВЛЕННОСТИ, КОЭФФИЦИЕНТ НАПРАВЛЕННОГО ДЕЙСТВИЯ, КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ, ПОТЕРИ В ВЫХОДНОМ ОТНОШЕНИИ СИГНАЛ / ШУМ [108-109,116,146-147,169].

Диаграмма направленности антенны [108-109,116].

В классической статистической теории антенн диаграмма направленности (ДН) записывается в виде суммы двух слагаемых: диаграммы направленности в отсутствие флуктуаций фазы (или амплитуды) антенны и искажений формы диаграммы, вносимых флуктуациями [2].

Необходимо уточнить способ измерения ДН ААР, поскольку она изменяется в зависимости от матрицы ограничений \mathbf{P} , действующих помех и параметров полезного сигнала. Будем считать, что пробный сигнал \vec{S}_{np} , с помощью которого измеряется диаграмма направленности, не влияет на стационарный весовой вектор, поскольку имеет малую мощность.

Среднюю по мощности диаграмму направленности $g_{cp}(\theta)$, (здесь θ - угол прихода пробного сигнала по отношению к нормали линейной антенны), можно представить следующим образом [49]:

$$g_{cp}(\theta) = \langle |\vec{S}_{np}^T \vec{W}(k)|^2 \rangle. \quad (1.6.1)$$

Подставим в выражение (1.6.1) представление вектора весовых коэффициентов в виде:

$$\vec{W} = \langle \vec{W} \rangle + \vec{\tilde{W}}. \quad (1.6.2)$$

Тогда получим формулу для диаграммы направленности [49]:

$$g_{cp}(\theta) = g_0(\theta) + g_{\tilde{W}}(\theta), \quad (1.6.3)$$

здесь

$$g_0(\theta) = \vec{W}_{CT}^H \vec{S}_{np}^* \vec{S}_{np}^T \vec{W}_{CT} - \quad (1.6.4)$$

- ДН адаптивной антенны без учёта флуктуаций весовых коэффициентов;

$$g_{\tilde{W}}(\theta) = \vec{S}_{np}^T \langle \vec{\tilde{W}}(k) \vec{\tilde{W}}^H(k) \rangle \vec{S}_{np}^* - \quad (1.6.5) - - \\ = \vec{S}_{np}^T \mathbf{K}_{\tilde{W}} \vec{S}_{np}^* \geq 0$$

- дополнительный член в диаграмме направленности, обусловленный увеличением

эквивалентной мощности пробного сигнала на выходе адаптивной антенны из-за модуляции его флуктуациями весового вектора [49].

Запишем «флуктуационную» диаграмму направленности ААР $g_{\bar{w}}(\theta)$ для нашей задачи. С этой целью подставим формулу для матрицы ковариации весовых коэффициентов:

$$\mathbf{K}_{\bar{w}} = \frac{1}{2} \mu \left\{ \langle |Z|^2 \rangle_{\xi} \frac{1+r_{\xi}^2}{1-r_{\xi}^2} + \langle |Z|^2 \rangle_s \frac{1+r_s r_{\xi}}{1-r_s r_{\xi}} \right\} \mathbf{P}^* \quad (1.6.6)$$

в выражение (1.6.5). Тогда, если учесть свойства проекционной матрицы \mathbf{P} , то можно записать «флуктуационную» диаграмму направленности в форме:

$$g_{\bar{w}}(\theta) = \frac{1}{2} \mu \langle |Z|^2 \rangle_{\xi} \frac{1+r_{\xi}^2}{1-r_{\xi}^2} |\mathbf{P}\bar{\mathbf{S}}_{np}^*|^2 + \frac{1}{2} \mu \langle |Z|^2 \rangle_s \frac{1+r_s r_{\xi}}{1-r_s r_{\xi}} |\mathbf{P}\bar{\mathbf{S}}_{np}^*|^2 \quad (1.6.7)$$

Выражение (1.6.7) состоит из двух слагаемых, величина которых пропорциональна остаточной мощности на выходе ААР помехи (для первого слагаемого) и выходной мощности полезного сигнала (для второго слагаемого). В общем случае флуктуационная диаграмма направленности не является изотропной, поскольку её форма определяется модулем проекции вектора-фазора пробного сигнала на подпространство ограничений.

Пример. Анализ ДН для адаптивной антенной решётки с однократным линейным ограничением.

Найдём вид флуктуационной диаграммы направленности для адаптивной антенны с однократным линейным ограничением. С этой целью преобразуем выражение (1.6.7), учитывая, что проекционная матрица для ААР с однократным линейным ограничением может быть записана следующим образом:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{1}{N} \bar{\mathbf{C}}_1 \bar{\mathbf{C}}_1^+ \quad (1.6.8)$$

После преобразований получим следующее выражение (отметим, что $\bar{\mathbf{S}}_{np}^T \bar{\mathbf{S}}_{np}^* = N$):

$$g_{\bar{w}}(\theta) = \frac{1}{2} \mu \langle |Z|^2 \rangle_{\xi} \frac{1+r_{\xi}^2}{1-r_{\xi}^2} N [1 - |f(U)|^2] + \frac{1}{2} \mu \langle |Z|^2 \rangle_s \frac{1+r_s r_{\xi}}{1-r_s r_{\xi}} N [1 - |f(U)|^2] \quad (1.6.9)$$

$$\text{где } f(U) = \frac{1}{N} \bar{S}^T \bar{S}_{np}^* = \frac{\sin \frac{N}{2} U}{N \sin \frac{U}{2}} e^{j \frac{N-1}{2} U} -$$

нормированная ДН равноамплитудной антенной решётки, сфазированной на нормально падающую волну ($U = \pi \sin \theta$, θ - угол прихода пробного сигнала).

Флуктуационная ДН ААР с однократным линейным ограничением ($U_\xi = \pi \sin \theta_\xi = 0.25\pi$; $U_s = \pi \sin \theta_s = 0$) показана на рис. 1.8 (кривая 2). (На кривой 1 приведена флуктуационная ДН ААР МОСШ). Из рисунка можно видеть, что для систем без ограничений флуктуационная ДН является изотропной, т. е. не зависит от угла прихода пробного сигнала θ . Из рисунка также следует, что флуктуационная диаграмма направленности адаптивной антенной решётки с однократным линейным ограничением не является изотропной. В направлении полезного сигнала она становится равной нулю из-за “жестких” (не флуктуирующих) ограничений.

Результаты, представленные на рисунке 1.8, хорошо согласуются с выводами работы [49]. В работе [49] исследуются адаптивные антенные решетки, работающие по градиентному алгоритму с ограничениями и имеющими в качестве переменной не дискретное (как в данной работе), а непрерывное время. Можно утверждать, что выводы статистического анализа в отношении «флуктуационной» диаграммы направленности для дискретных адаптивных систем совпадают с выводами для систем с непрерывным временем.

На рис. 1.9 показана средняя ДН адаптивной антенной решётки с однократным линейным ограничением при учёте флуктуаций вектора весовых коэффициентов (кривая 1) и без их учёта (кривая 2) в зависимости от угла прихода пробного сигнала. Угол прихода помехи обозначен стрелкой. Из рисунка можно видеть, что флуктуационная составляющая приводит к «замазыванию» нулей средней ДН ААР с однократным линейным ограничением. В адаптивной антенной решётке, работающей по критерию максимизации отношения сигнал / шум и имеющей изотропную диаграмму направленности, данного эффекта не наблюдается.

Необходимо отметить, что в работе [49] также отмечается эффект «замазывания» нулей средней по мощности диаграммы направленности для ААР с непрерывным градиентным алгоритмом и однократным линейным ограничением, что свидетельствует о внутреннем единстве градиентных алгоритмов с ограничениями в дискретном и непрерывном времени. Этот факт заслуживает упоминания, поскольку статистический анализ для систем в непрерывном и дискретном времени проводится

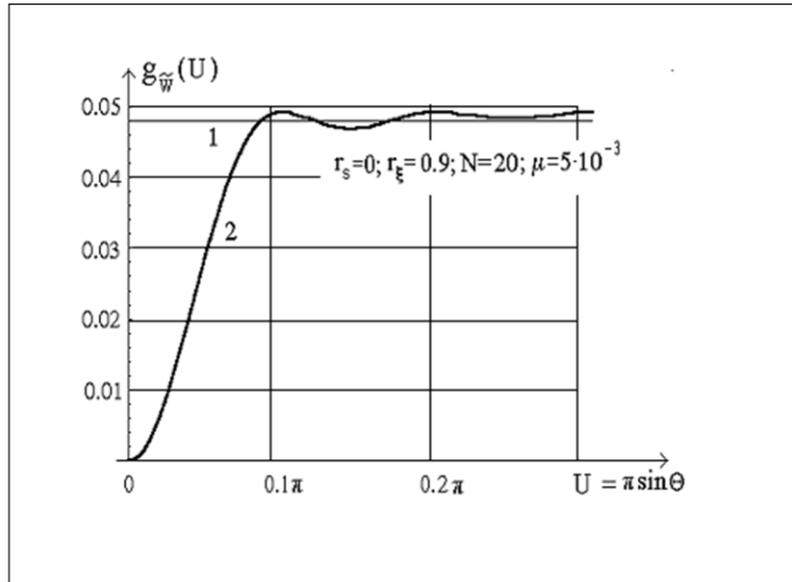


Рис. 1.8. Флуктуационная диаграмма направленности ААР МОСШ (кривая 1) и ААР с однократным линейным ограничением (кривая 2).

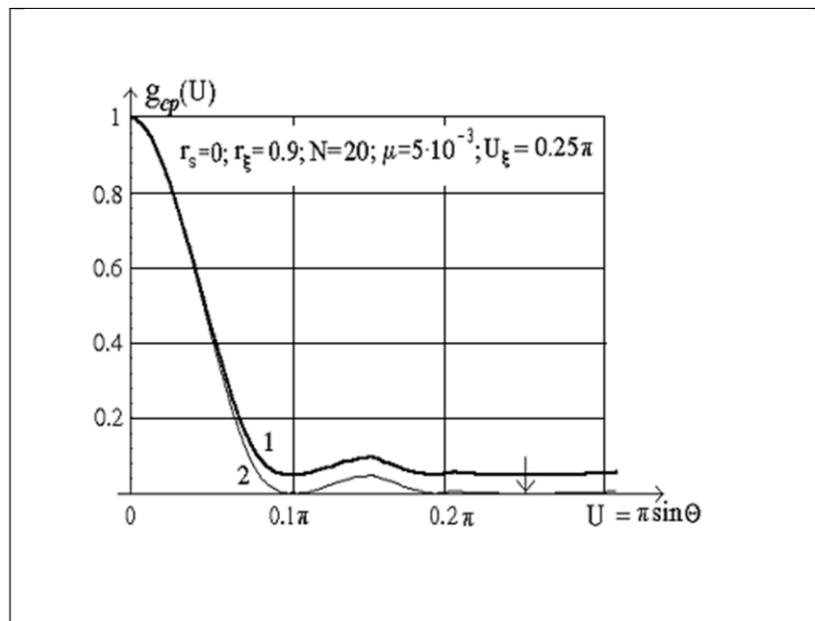


Рис. 1.9. Средняя диаграмма направленности ААР с однократным линейным ограничением при учёте флуктуаций весового вектора (кривая 1) и без их учёта (кривая 2) в зависимости от угла прихода пробного сигнала.

на основе различных математических операций – интегрирования для систем с непрерывным временем и суммирования бесконечных рядов для систем с дискретным временем.

Коэффициент направленного действия антенны [146-147].

Коэффициент направленного действия (КНД) антенны – это число, которое показывает, во сколько раз мощность излучения антенны в данном направлении больше мощности излучения гипотетической изотропной (ненаправленной) антенны, отнесенной к единице телесного угла, при условии равенства мощностей обеих антенн [171].

Согласно определению, коэффициент направленного действия может быть описан следующим выражением:

$$D(\theta, \varphi) = 4\pi \frac{g_{cp}(\theta, \varphi)}{\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} g_{cp}(\theta, \varphi) \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi} \quad (1.6.10)$$

Коэффициент направленного действия – это функция углов θ и φ , которая изменяется от 0 (в направлении нулей диаграммы направленности) до своего максимального значения D_{\max} в направлении максимума главного лепестка диаграммы направленности, когда $g_{cp}(\theta, \varphi)$ становится равной 1 [171].

Найдем коэффициент направленного действия с учётом флуктуаций настраиваемого весового вектора для адаптивной антенной решётки, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму с многократными линейными ограничениями на диаграмму направленности. Как было показано выше в данном разделе, средняя по мощности ДН, найденная при учёте флуктуаций весового вектора, представляет собой сумму диаграммы направленности без учёта флуктуаций весовых коэффициентов и «флуктуационной» диаграммы направленности (формулы (1.6.3) – (1.6.5), (1.6.7)).

По этой причине коэффициент направленного действия адаптивной антенны также будет представлять собой сумму двух слагаемых – «стационарного» и «флуктуационного». В нашем случае КНД будет зависеть только от вертикального угла θ :

$$D(\theta) = D_0(\theta) + D_{\tilde{w}}(\theta). \quad (1.6.11)$$

Здесь:

$$D_0(\theta) = 4\pi \frac{g_0(\theta)}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} (g_0(\theta) + g_{\tilde{W}}(\theta)) \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi} \quad (1.6.12)$$

- КНД, который условно можно назвать найденным без учёта флуктуаций весового вектора. Условно потому, что «флуктуационная» ДН присутствует в знаменателе выражения (1.6.12).

«Флуктуационный» коэффициент направленного действия может быть записан в виде:

$$D_{\tilde{W}}(\theta) = 4\pi \frac{g_{\tilde{W}}(\theta)}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} (g_0(\theta) + g_{\tilde{W}}(\theta)) \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi} \quad (1.6.13)$$

Выражение (1.6.13) также только условно может быть названо «флуктуационным» КНД, поскольку в знаменателе данной формулы присутствует диаграмма направленности, найденная без учёта флуктуаций весового вектора.

Учитывая, что диаграммы направленности («стационарная» и «флуктуационная») не зависят в нашем случае от угла φ , проинтегрируем знаменатели выражений

(1.6.12) и (1.6.13) по данной переменной ($\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$). Тогда коэффициент направ-

ленного действия, найденный при постоянном стационарном весовом векторе, приобретает вид:

$$D_0(\theta) = \frac{2g_0(\theta)}{\int_0^\pi (g_0(\theta) + g_{\tilde{W}}(\theta)) \sin \theta \cdot d\theta} \quad (1.6.14)$$

а «флуктуационный» КНД можно записать следующим образом:

$$D_{\tilde{W}}(\theta) = \frac{2g_{\tilde{W}}(\theta)}{\int_0^\pi (g_0(\theta) + g_{\tilde{W}}(\theta)) \sin \theta \cdot d\theta} \quad (1.6.15)$$

Опираясь на выражения (1.6.4) и (1.6.7), запишем конкретный вид «стационарного» коэффициента направленного действия для ААР, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму. Тогда получим:

$$D_0(\theta) = \frac{2\vec{W}_{CT}^H \vec{S}_{np}^* \vec{S}_{np}^T \vec{W}_{CT}}{\int_0^\pi (\vec{W}_{CT}^H \vec{S}_{np}^* \vec{S}_{np}^T \vec{W}_{CT} + \frac{\mu}{2} \langle |Z|^2 \rangle >_0 \frac{1+r^2}{1-r^2} |\mathbf{P}\vec{S}_{np}^*|^2) \sin \theta \cdot d\theta} \quad (1.6.16)$$

Из формулы «стационарного» коэффициента направленного действия видно, что флуктуации весового вектора уменьшают его величину, поскольку в знаменателе (1.6.16) присутствует дополнительное («флуктуационное») слагаемое.

Запишем вид «флуктуационного» КНД ААР, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму с многократными линейными ограничениями:

$$D_{\tilde{W}}(\theta) = \frac{\mu \langle |Z|^2 \rangle_0 \frac{1+r^2}{1-r^2} |\mathbf{P}\tilde{S}_{np}^*|^2}{\int_0^\pi (\tilde{W}_{CT}^H \tilde{S}_{np}^* \tilde{S}_{np}^T \tilde{W}_{CT} + \frac{\mu}{2} \langle |Z|^2 \rangle_0 \frac{1+r^2}{1-r^2} |\mathbf{P}\tilde{S}_{np}^*|^2) \sin \theta \cdot d\theta}. \quad (1.6.17)$$

«Флуктуационный» коэффициент направленного действия больше нуля, поэтому можно думать, что флуктуации весового вектора приводят к некоторому, пропорциональному величине коэффициента адаптации μ , увеличению КНД. Однако необходимо отметить, что учёт флуктуаций весового вектора приводит к искажениям формы коэффициента направленного действия как функции угла θ . Более конкретно, как же именно искажается форма КНД, можно сказать, лишь рассмотрев пример, в котором был бы определен конкретный вид проекционной матрицы \mathbf{P} .

Пример. Адаптивная антенная решетка, максимизирующая отношение сигнал / шум (ААР МОСШ).

Для адаптивной антенны, максимизирующей отношение сигнал / шум, проекционная матрица \mathbf{P} равна единичной матрице. «Флуктуационная» ДН ААР МОСШ имеет следующий вид:

$$g_{\tilde{W}} = \sigma_{\tilde{W}}^2 N, \quad (1.6.18)$$

где $\sigma_{\tilde{W}}^2$ - дисперсия флуктуаций весового вектора; N - число элементов антенны.

Тогда:

$$\int_0^\pi g_{\tilde{W}}(\theta) \sin \theta \cdot d\theta = \int_0^\pi \sigma_{\tilde{W}}^2 N \sin \theta \cdot d\theta = 2\sigma_{\tilde{W}}^2 N. \quad (1.6.19)$$

В итоге коэффициент направленного действия ААР МОСШ может быть записан следующим образом:

$$D(\theta)_{\text{ААР МОСШ}} = \frac{g_0(\theta) + \sigma_{\tilde{W}}^2 N}{\sigma_{\tilde{W}}^2 N + \frac{1}{2} \int_0^\pi g_0(\theta) \sin \theta \cdot d\theta}, \quad (1.6.20)$$

Из выражения (1.6.20) следует, что флуктуации весового вектора увеличивают числитель и знаменатель КНД ААР МОСШ на постоянную величину и тем самым приводят к увеличению коэффициента направленного действия без искажения его зависимости от угла θ .

Коэффициент усиления адаптивной антенной решётки [146].

Коэффициент усиления адаптивной антенной решетки определяется как произведение коэффициента полезного действия антенны η и коэффициента направленного действия $D(\theta, \varphi)$ [171]:

$$G(\theta, \varphi) = \eta D(\theta, \varphi). \quad (1.6.21)$$

Коэффициент усиления определяется как число, которое показывает, во сколько раз мощность излучения антенны в данном направлении больше мощности излучения изотропной антенны, отнесённой к единице телесного угла, при условии равенства мощностей, подводимых к антеннам [171].

Учёт флуктуаций весового вектора приведёт к тому, что коэффициент усиления адаптивной антенны будет состоять из двух слагаемых – «стационарного» (найденного при постоянном стационарном весовом векторе) и «флуктуационного». Учитывая также, что в нашем случае все характеристики зависят только от вертикального угла θ , получаем:

$$G(\theta) = \eta D_0(\theta) + \eta D_{\tilde{W}}(\theta) = G_0(\theta) + G_{\tilde{W}}(\theta), \quad (1.6.22)$$

где $G_0(\theta) = \eta D_0(\theta)$ - коэффициент усиления адаптивной антенны, полученный при постоянном стационарном весовом векторе;

$G_{\tilde{W}}(\theta) = \eta D_{\tilde{W}}(\theta)$ - «флуктуационный» коэффициент усиления ААР.

Распишем конкретный вид коэффициентов усиления адаптивной антенной решётки, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму с многократными линейными ограничениями. Тогда коэффициент усиления, найденный при постоянном стационарном весовом векторе, может быть записан следующим образом:

$$G_0(\theta) = \frac{2\eta \vec{W}_{CT}^H \vec{S}_{np}^* \vec{S}_{np}^T \vec{W}_{CT}}{\int_0^\pi (\vec{W}_{CT}^H \vec{S}_{np}^* \vec{S}_{np}^T \vec{W}_{CT} + \frac{\mu}{2} \langle |Z|^2 \rangle_0 \frac{1+r^2}{1-r^2} |\mathbf{P}\vec{S}_{np}^*|^2) \sin \theta \cdot d\theta}. \quad (1.6.23)$$

Из формулы (6.1.23) можно видеть, что «стационарный» коэффициент усиления уменьшается без потери формы своей зависимости по углу θ из-за флуктуаций ве-

сового вектора, поскольку в его знаменателе присутствует «флуктуационная» диаграмма направленности.

«Флуктуационный» коэффициент усиления адаптивной антенны, настраиваемой по дискретному градиентному алгоритму с многократными линейными ограничениями, имеет вид:

$$G_{\tilde{W}}(\theta) = \frac{\eta\mu \langle |Z|^2 \rangle_0 \frac{1+r^2}{1-r^2} |\mathbf{P}\tilde{S}_{np}^*|^2}{\int_0^\pi (\tilde{W}_{CT}^H \tilde{S}_{np}^* \tilde{S}_{np}^T \tilde{W}_{CT} + \frac{\mu}{2} \langle |Z|^2 \rangle_0 \frac{1+r^2}{1-r^2} |\mathbf{P}\tilde{S}_{np}^*|^2) \sin \theta \cdot d\theta}. \quad (1.6.24)$$

Из выражения (6.1.24) следует, что «флуктуационный» коэффициент усиления антенны количественно вносит вклад в общий коэффициент усиления антенны. Данный вклад имеет первый порядок малости по коэффициенту адаптации μ . С первого взгляда, вроде бы наличие флуктуаций весового вектора в адаптивной антенне – это положительное явление, поскольку увеличивается коэффициент усиления ААР. Однако если учесть, что коэффициент усиления есть функция угла θ , то нетрудно видеть, что флуктуации весового вектора приводят к «замазыванию» направлений усиления адаптивной антенны. Более того, вклад флуктуаций весового вектора в общий коэффициент усиления уменьшен за счёт присутствия и в знаменателях выражений коэффициентов усиления «флуктуационного» слагаемого («флуктуационной» диаграммы направленности).

Таким образом, флуктуации весового вектора влияют на коэффициент направленного действия и коэффициент усиления антенны двояко: с одной стороны, данные коэффициенты увеличиваются из-за флуктуаций, хотя и на величину первого порядка малости по коэффициенту адаптации μ , а с другой – «размазываются» за счёт «флуктуационных» слагаемых, что уменьшает направленность действия и усиление адаптивной антенны.

Потери в выходном отношении сигнал / шум, вызванные наличием флуктуаций весового вектора [169].

Флуктуации весового вектора ухудшают качество настройки адаптивных антенных решеток и эффективность их работы. В качестве одного из возможных показателей эффективности можно использовать потери в выходном отношении сигнал / шум, вызванные флуктуациями:

$$\tilde{\eta} = 10 \cdot \lg \left(\frac{SNR_{fl}}{SNR_{opt}} \right) \quad (1.6.25)$$

Здесь

$$SNR_{fl} = \frac{\langle |Z|^2 \rangle_s}{\langle |Z|^2 \rangle_{CT} - \langle |Z|^2 \rangle_s} \quad (1.6.26)$$

- выходное отношение сигнал / шум, найденное с учетом флуктуаций весового вектора;

$$SNR_{opt} = \frac{\langle |Z|^2 \rangle_s}{\langle |Z|^2 \rangle_0 - \langle |Z|^2 \rangle_s} \quad (1.6.27)$$

- выходное отношение сигнал / шум, найденное без учета флуктуаций весового вектора.

Из формулы (1.6.25) можно видеть, что потери в данной записи выражаются в дБ. Возможны две ситуации:

1. Если флуктуации не вносят потерь в выходное отношение сигнал / шум, то

$$\frac{SNR_{fl}}{SNR_{opt}} = 1. \text{ Тогда логарифм единицы равен нулю, и потери } \tilde{\eta} = 0.$$

2. Если выходное отношение сигнал / шум, найденное с учетом флуктуаций весового вектора меньше оптимального выходного отношения сигнал / шум, то

$$\frac{SNR_{fl}}{SNR_{opt}} < 1 \text{ и } \tilde{\eta} < 0.$$

Теоретически можно было бы представить ситуацию, когда выходное отношение сигнал / шум, найденное с учетом флуктуаций весового вектора больше оптимального выходного отношения сигнал / шум и $\frac{SNR_{fl}}{SNR_{opt}} > 1$, тогда бы коэффициент

потерь был бы положительным $\tilde{\eta} > 0$. Формально математически этот случай может иметь место, если имеют место явления «перекомпенсации» выходной мощности ААР. Однако на практике явление «перекомпенсации» искажает выделяемый адаптивной антенной полезный сигнал, и это ухудшает выходное отношение сигнал/шум. Для этого случая формула потерь должна быть переопределена и записана с модулем отрицательных слагаемых.

Используя формулу выходной мощности ААР, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму (1.4.12), а также учитывая, что корреляционная мат-

рица входных сигналов адаптивной антенной решетки состоит из суммы корреляционных матриц полезного сигнала, помех и собственного шума адаптивной антенны $\mathbf{R}_{XX} = \mathbf{R}_{SS} + \mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}$ и, соответственно, мощности полезного сигнала и помех на выходе антенны при постоянном стационарном весовом векторе имеют вид

$\langle |Z|^2 \rangle_S = \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{SS} \vec{W}_{CT}$, $\langle |Z|^2 \rangle_\xi = \vec{W}_{CT}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT}$ имеем следующее выражение потерь в выходном отношении сигнал / шум ААР из-за флуктуаций весового вектора:

$$\tilde{\eta} = 10 \cdot \lg \left(\frac{\vec{W}_{CT}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT}}{\vec{W}_{CT}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT} + \left| \frac{1}{2} \mu \frac{1-3r^2}{1-r^2} Sp(\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}) \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT} \right|} \right) \quad (1.6.28)$$

На рисунке 1.10 представлена зависимость потерь в выходном отношении сигнал / шум от величины коэффициента адаптации μ . График построен для адаптивной антенной решетки, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму с однократными линейными ограничениями ($L=1$) на диаграмму направленности, имеющей 7 элементов ($N=7$). Расстояние между элементами было равно половине длины волны ($d = \lambda / 2$). Для однократных ограничений матрица \mathbf{C} имеет размерность $[N \times 1]$ и равна $\mathbf{C} \equiv \vec{C}_1 = \vec{S}^*$, где \vec{S} - вектор волнового фронта полезного сигнала.

Предполагалось, что на ААР поступают статистически независимые полезный сигнал и одна помеха $r_S = r_\xi = 0.5$. Комплексные амплитуды входных сигналов формировались из двух независимых источников гауссовского “белого” шума. Углы прихода полезного сигнала и помехи были равны соответственно $\theta_S = 0^\circ$, $\theta_\xi = 45^\circ$, мощность помехи была в 100 раз больше мощности полезного сигнала. В каждом элементе ААР присутствовал также некоррелированный собственный шум, мощность которого составляла 0.1 мощности полезного сигнала.

Из рисунка 1.10 можно видеть, что имеют место потери из-за флуктуаций весового вектора в выходном отношении сигнал / шум адаптивной антенной решетки с однократным линейным ограничением, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму. Из рисунка также следует, что по мере увеличения коэффициента

адаптации μ растут потери, вызванные наличием флуктуаций весового вектора. Таким образом, в практической работе необходимо учитывать, что скорость настройки адаптивной антенной решетки ограничена потерями в выходном отношении сигнал / шум, обусловленными флуктуациями весового вектора. Чем выше коэффициент адаптации, тем выше скорость настройки ААР, но и выше потери в выходном отношении сигнал / шум, обусловленные наличием этих флуктуаций. Конкретное значение коэффициента адаптации необходимо выбирать из той величины скорости настройки ААР и потерь, которые приемлемы для решения данной практической задачи.

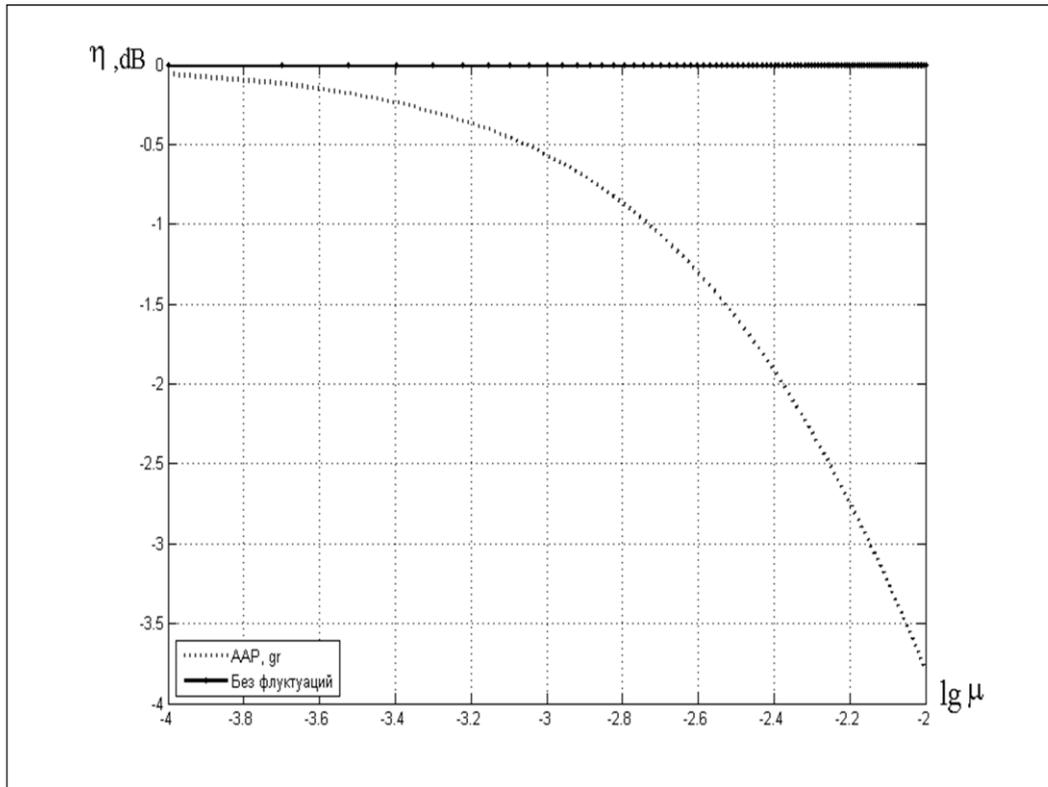


Рис.1.10. Потери η в выходном отношении сигнал / шум в зависимости от величины коэффициента адаптации μ . ААР с дискретным градиентным алгоритмом настройки.

1.7. ВЫВОДЫ [116].

Проведённое в первой главе исследование статистических характеристик адаптивной антенной решетки, настраиваемой по дискретному градиентному алгоритму с многократными линейными ограничениями на диаграмму направленности, с учетом флуктуаций весовых коэффициентов позволяет сделать следующие выводы:

1. Статистический анализ влияния флуктуаций настраиваемого весового вектора на характеристики «линейных» адаптивных антенных решёток (без нелинейной функции в цепи корреляционной обратной связи) с дискретным градиентным алгоритмом настройки и различными коэффициентами автокорреляции между отсчётами входных сигналов необходимо проводить методами теории возмущений. Данные методы позволяют учесть негауссовскую статистическую зависимость между весовым вектором и вектором входных сигналов.
2. Учет негауссовской статистической зависимости между весовым вектором и вектором входных сигналов позволяет теоретически описать явления как рассогласования [51], так и «перекомпенсации» [49,65,116] в статистических характеристиках выходного сигнала ААР с дискретным временем, наблюдающиеся при работе адаптивных антенных решёток.
3. Учет различных значений коэффициентов автокорреляции между отсчётами полезного сигнала и помех дает возможность аналитически проследить влияние флуктуаций весового вектора на статистические характеристики как полезной части выходного сигнала ААР, так и остаточной помехи на выходе адаптивной антенны. Это позволяет проанализировать процесс обработки сигнала в ААР и качество выделения адаптивной антенной решеткой полезного сигнала на фоне помех.
4. Исследование мощности выходного сигнала ААР в случае входных сигналов с различными коэффициентами автокорреляции между отсчётами позволило проследить процесс пространственной фильтрации и возникающие при этом эффекты во временной области. Выходная мощность адаптивной антенной решётки, настраиваемой по дискретному градиентному алгоритму, может изменяться под влиянием флуктуаций весового вектора, по сравнению со значениями, полученными при постоянном стационарном (оптимальном) векторе весовых коэффициентов. Исследование показало, что мощность выходного сигнала ААР увеличивается при некоррелированных входных сигналах (эффект рассогласования,

misadjustment [51]) и уменьшается при больших значениях коэффициентов автокорреляции между отсчётами входных сигналов (эффект «перекомпенсации») [49,65,116].

5. Исследование спектральной плотности мощности выделяемого адаптивной антенной сигнала в случае входных сигналов с различными коэффициентами автокорреляции между отсчётами позволило проследить процесс пространственной фильтрации и возникающие при этом эффекты в спектральной области. Исследование показало, что флуктуации весового вектора приводят к искажениям спектра выходного сигнала ААР, настраиваемой по дискретному градиентному алгоритму с ограничениями. Эти искажения состоят в уширении спектра выходного сигнала адаптивной антенной решётки, а также в его провале на частотах действия мощной узкополосной помехи (эффект «перекомпенсации»).
6. Исследование корреляционной матрицы флуктуаций весового вектора в случае входных сигналов с различными коэффициентами автокорреляции между отсчётами позволило проследить влияние коэффициентов автокорреляции полезного сигнала и помех на величину собственных значений данной матрицы. Анализ собственных значений матрицы ковариации флуктуаций весового вектора также показал, что флуктуации вектора весовых коэффициентов изотропны – одинаковы во всех направлениях в подпространстве ограничений пространства весовых коэффициентов.
7. Исследование «флуктуационной» диаграммы направленности ААР в случае входных сигналов с различными коэффициентами автокорреляции между отсчётами позволило аналитически изучить влияние величин коэффициентов автокорреляции полезного сигнала и помех на значения данной ДН. «Флуктуационная» диаграмма направленности адаптивной антенной решётки с однократным линейным ограничением равна нулю в направлении ограничений (направлении прихода полезного сигнала). Во всех остальных направлениях «флуктуационная» диаграмма направленности имеет уровень, в 20 раз меньший, чем уровень главного лепестка средней по мощности диаграммы направленности.

Глава 2. Анализ статистических характеристик адаптивных антенных решёток с быстрыми алгоритмами настройки на основе обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов.

2.1. ВЫВОД ИТЕРАТИВНОГО АЛГОРИТМА ОБРАЩЕНИЯ ВЫБОРОЧНОЙ ОЦЕНКИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ ААР С МНОГОКРАТНЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ [113,116].

Рассмотрим работу узкополосной адаптивной антенной решётки, имеющей N элементов, с многократными линейными ограничениями на диаграмму направленности. Функциональная схема такой ААР, настраивающейся по быстрому алгоритму, приведена на рис. 2.1. Из рисунка следует, что в отличие от градиентного алгоритма, вектор весовых коэффициентов и вектор входных сигналов проектируются в подпространство ограничений различными матричными операторами. Матричный оператор \mathbf{P} , как и в градиентном алгоритме, осуществляет проекцию вектора весовых коэффициентов в подпространство ограничений, а матричный оператор $\mathbf{P}(\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_k\mathbf{P})^+$ проектирует в это подпространство вектор входных сигналов. При этом данный оператор совершает операцию поворота вектора проекции для скорейшего достижения адаптивной антенной решёткой оптимального состояния.

Для дальнейшего анализа найдём другой вид оптимального весового вектора ААР с ограничениями, эквивалентный тому, что приведён в первой главе (1.1.11). Необходимо отметить, что вектор весовых коэффициентов может быть представлен в виде суммы двух слагаемых двумя способами:

$$\vec{W} = \vec{W}_q + \vec{V}, \quad (2.1.1)$$

$$\vec{W} = \vec{W}_q + \mathbf{P}\vec{V}, \quad (2.1.2)$$

из (2.1.1) и (2.1.2) следует, что вектор \vec{V} является проекцией вектора весовых коэффициентов в подпространство ограничений, а \vec{W}_q - есть проекция вектора весовых коэффициентов в подпространство, дополнительное к подпространству ограничений. Представления (2.1.1) и (2.1.2) эквивалентны, поскольку для обоих равенств выполняются соотношения: $\mathbf{P}\vec{W} = \mathbf{P}\vec{V}$; $\mathbf{D}\vec{W} = \vec{W}_q$. Такая запись весового вектора содержит в себе уравнение ограничений, поскольку при умножении обеих частей данных равенств слева на матрицу ограничений \mathbf{C}^H , получим после преобразований уравнение ограничений.

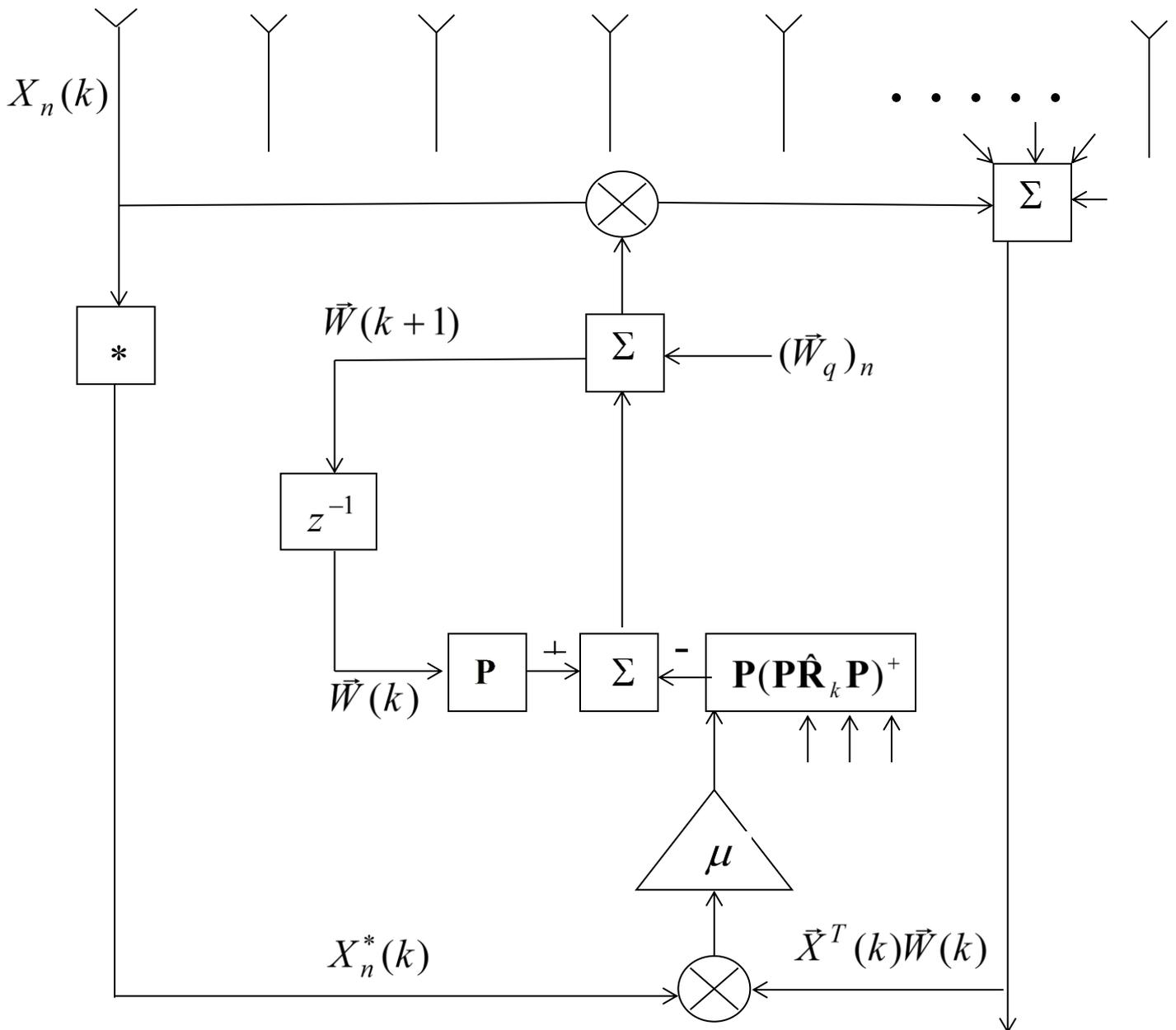


Рис. 2.1. Схема адаптивной антенной решётки с ограничениями, настраивающейся по алгоритму итеративного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы.

Представление вектора весовых коэффициентов в виде (2.1.2) позволяет свести задачу минимизации выходной мощности антенной решётки с ограничениями к эквивалентной задаче без ограничений, т.е. к задаче минимизации выходной мощности адаптивной антенной решётки следующего вида:

$$\bar{W}^H \mathbf{R}_{xx} \bar{W} = (\bar{W}_q + \mathbf{P}\bar{V})^H \mathbf{R}_{xx} (\bar{W}_q + \mathbf{P}\bar{V}) \rightarrow \min. \quad (2.1.3)$$

Чтобы найти оптимальный вектор весовых коэффициентов, запишем более подробно формулу (2.1.3):

$$\begin{aligned} \langle Z^2(k) \rangle &= \bar{W}^H \mathbf{R}_{xx} \bar{W} = (\bar{W}_q + \mathbf{P}\bar{V})^H \mathbf{R}_{xx} (\bar{W}_q + \mathbf{P}\bar{V}) = \\ &= \bar{W}_q^H \mathbf{R}_{xx} \bar{W}_q + \bar{V}^H \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P} \bar{V} + \bar{W}_q^H \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \bar{V} + \bar{V}^H \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \bar{W}_q. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Получим минимальное значение выходной мощности (2.1.4).

Пусть $(\cdot)_n$ - есть n-ый элемент комплексного вектора (\cdot) . Частные производные от мощности $\langle Z^2(k) \rangle$ по V_n с соответствующими реальной и мнимой частями могут быть записаны в виде:

$$\frac{\partial \langle |Z|^2 \rangle}{\partial (\text{Re}V_n)} = 2 \text{Re}(\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P} \bar{V})_n + 2 \text{Re}(\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \bar{W}_q)_n \quad (2.1.5)$$

$$\frac{\partial \langle |Z|^2 \rangle}{\partial (\text{Im}V_n)} = 2 \text{Im}(\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P} \bar{V})_n + 2 \text{Im}(\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \bar{W}_q)_n \quad (2.1.6)$$

Приравнивая формулы (2.1.5) и (2.1.6) к нулю, имеем:

$$\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P} \bar{V} = -\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \bar{W}_q. \quad (2.1.7)$$

С помощью операции обращения матрицы это уравнение не может быть решено, поскольку матрица $\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P}$ - сингулярная. Она имеет, как минимум, одно нулевое собственное число с некоторым собственным вектором \vec{C}_i . Однако, можно использовать операцию псевдообращения $\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P}$, чтобы получить общее решение. Для этой цели умножим левую и правую части выражения (2.1.7) на псевдообратную матрицу $(\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P})^+$:

$$\hat{\bar{V}} = -(\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \bar{W}_q + \bar{A}_1. \quad (2.1.8)$$

Вектор \bar{A}_1 является некоторым вектором, лежащим вне пространства ограничений и представляет собой неизвестную часть решения. В адаптивной антенной решётке с однократным линейным ограничением для инвертируемой \mathbf{R}_{xx} существует только один такой вектор:

$$\bar{A}_1 = k \vec{C}_1 = k \bar{W}_q. \quad (2.1.9)$$

Необходимо отметить, что поскольку мы используем представление весового вектора в виде (2.1.2) и $\mathbf{P}\vec{A}_1 = \vec{0}$, то вектор \vec{A}_1 не оказывает влияния на вид оптимального вектора весовых коэффициентов в подпространстве ограничений. По этой причине вектор \vec{A}_1 в случае адаптивной антенной решётки с однократным линейным ограничением можно не рассматривать. В итоге оптимальный весовой вектор имеет вид [18]:

$$\vec{W}_{opt} = \vec{W}_q - (\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\vec{W}_q. \quad (2.1.10)$$

Можно показать, что данное выражение для оптимального вектора весовых коэффициентов эквивалентно формуле (1.1.11), представленной в главе 1 для адаптивной антенной решётки с ограничениями [67,172].

Выведем алгоритм рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов. Для этого в формуле оптимального вектора весовых коэффициентов (2.1.10) заменим точное значение корреляционной матрицы входных сигналов \mathbf{R}_{xx} на её оценку $\hat{\mathbf{R}}_k$:

$$\hat{\mathbf{R}}_k = (1 - \alpha) \sum_{n=-\infty}^k \alpha^n \vec{X}^*(k-n) \vec{X}^T(k-n), \quad (2.1.11)$$

где \vec{X} - вектор входных сигналов, α - коэффициент “забывания”, уменьшает вклад в выборочную корреляционную матрицу более ранних по времени выборок входных сигналов по сравнению с более поздними.

Можно получить вид оптимального вектора на k -ом и $(k-1)$ -ом шаге (при достаточно больших моментах времени):

$$\vec{W}(k) = \vec{W}_q - (\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_k\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_k\vec{W}_q \quad (2.1.12)$$

$$\vec{W}(k-1) = \vec{W}_q - (\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_{k-1}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_{k-1}\vec{W}_q. \quad (2.1.13)$$

Вычтем (2.1.12)-(2.1.13):

$$\vec{W}(k) - \vec{W}(k-1) = (\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_{k-1}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_{k-1}\vec{W}_q - (\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_k\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_k\vec{W}_q. \quad (2.1.14)$$

Однако:

$$\vec{W}(k) = \vec{W}_q + \vec{V}(k); \quad \vec{W}(k-1) = \vec{W}_q + \vec{V}(k-1). \quad (2.1.15)$$

Подставляя (2.1.15) в (2.1.14), получаем:

$$\vec{V}(k) - \vec{V}(k-1) = [(\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_{k-1}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_{k-1} - (\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_k\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_k] \vec{W}_q. \quad (2.1.16)$$

Для преобразования формулы (2.1.16) нам потребуется выражение для рекуррентного обращения (псевдоинвертирования) матрицы $\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_k\mathbf{P}$. Получим её. Из выражения

(2.1.11) следует, что рекурсивная запись выборочной корреляционной матрицы может быть представлена в виде:

$$\hat{\mathbf{R}}_k = \alpha \hat{\mathbf{R}}_{k-1} + (1 - \alpha) \bar{X}^*(k) \bar{X}^T(k). \quad (2.1.17)$$

Тогда $(\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_k\mathbf{P})^+$ запишется так:

$$(\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_k\mathbf{P})^+ = (\alpha\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_{k-1}\mathbf{P} + (1 - \alpha)\mathbf{P}\bar{X}^*(k)\bar{X}^T(k)\mathbf{P})^+ \quad (2.1.18)$$

Делая в (2.1.18) замену переменных $\bar{x}(k) = \sqrt{1 - \alpha} \bar{X}^*(k)$, получим следующее представление матрицы $(\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_k\mathbf{P})^+$:

$$(\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_k\mathbf{P})^+ = (\mathbf{P}\alpha\hat{\mathbf{R}}_{k-1}\mathbf{P} + \mathbf{P}\bar{x}(k)\bar{x}^H(k)\mathbf{P})^+. \quad (2.1.19)$$

Чтобы преобразовать формулу (2.1.19) используем тождество [18]:

$$(\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\bar{x}\bar{x}^H\mathbf{P})^+ = \mathbf{P}(\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{D} + \mathbf{P}\bar{x}\bar{x}^H\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}, \quad (2.1.20)$$

где \mathbf{A} - некоторая квадратная $N \times N$ матрица.

Тогда выражение (2.1.19) запишется в виде:

$$(\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_k\mathbf{P})^+ = \mathbf{P}(\mathbf{P}\alpha\hat{\mathbf{R}}_{k-1}\mathbf{P} + \mathbf{D} + \mathbf{P}\bar{x}(k)\bar{x}^H(k)\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}. \quad (2.1.21)$$

Если учесть ещё одно тождество [18], то правую часть (2.1.21) можно упростить:

$$(\mathbf{B} + \bar{X}\bar{X}^H)^{-1} = \mathbf{B}^{-1} - \frac{\mathbf{B}^{-1}\bar{X}\bar{X}^H\mathbf{B}^{-1}}{1 + \bar{X}^H\mathbf{B}^{-1}\bar{X}}, \quad (2.1.22)$$

где \mathbf{B} - невырожденная квадратная матрица.

Обозначим через $\mathbf{B} = \mathbf{P}\alpha\hat{\mathbf{R}}_{k-1}\mathbf{P} + \mathbf{D}$ и подставим (2.1.22) в (2.1.21). В итоге получим:

$$(\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_k\mathbf{P})^+ = \mathbf{P}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P} - \frac{(\mathbf{P}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P})\bar{x}(k)\bar{x}^H(k)(\mathbf{P}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P})}{1 + \bar{x}^H(k)(\mathbf{P}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P})\bar{x}(k)}. \quad (2.1.23)$$

Чтобы ещё более упростить рекуррентную формулу для матрицы $(\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_k\mathbf{P})^+$ (2.1.23) воспользуемся ещё одним тождеством [18]:

$$(\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P})^+ = \mathbf{P}(\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P},$$

$$\text{где } \mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{D}. \quad (2.1.24)$$

Кроме того, вынесем в (2.1.23) коэффициент α из под знака псевдообращения и перейдём к исходным переменным. Тогда формула (2.1.23) примет следующий вид:

$$(\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_k\mathbf{P})^+ = \frac{1}{\alpha}(\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_{k-1}\mathbf{P})^+ - \frac{\frac{1 - \alpha}{\alpha^2}(\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_{k-1}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\bar{X}^*(k)\bar{X}^T(k)\mathbf{P}(\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_{k-1}\mathbf{P})^+}{1 + \frac{1 - \alpha}{\alpha} \bar{X}^T(k)\mathbf{P}(\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_{k-1}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\bar{X}^*(k)}. \quad (2.1.25)$$

Вернёмся к выводу алгоритма обращения выборочной корреляционной матрицы и найдём вид $(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_k\mathbf{P})^+\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_k$, чтобы преобразовать выражение (2.1.16). Для этого подставим в $(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_k\mathbf{P})^+\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_k$ формулы (2.1.17) и (2.1.25):

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_k\mathbf{P})^+\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_k &= (\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{P})^+\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{k-1} + \frac{1-\alpha}{\alpha}(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{P})^+\mathbf{P}\bar{\mathbf{X}}^*(k)\bar{\mathbf{X}}^T(k) - \\ &- \frac{1-\alpha}{\alpha\gamma}(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{P})^+\mathbf{P}\bar{\mathbf{X}}^*(k)\bar{\mathbf{X}}^T(k)\mathbf{P}(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{P})^+\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{k-1} - \\ &- \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha^2\gamma}(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{P})^+\mathbf{P}\bar{\mathbf{X}}^*(k)\bar{\mathbf{X}}^T(k)\mathbf{P}(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{P})^+\mathbf{P}\bar{\mathbf{X}}^*(k)\bar{\mathbf{X}}^T(k), \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

$$\text{где } \gamma = 1 + \frac{1-\alpha}{\alpha}\bar{\mathbf{X}}^T(k)\mathbf{P}(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{P})^+\mathbf{P}\bar{\mathbf{X}}^*(k). \quad (2.1.27)$$

Последнее слагаемое выражения (2.1.26) имеет второй порядок малости по сравнению с остальными величинами, входящими в формулу, поэтому мы им пренебрегаем. Подставим оставшиеся слагаемые выражения (2.1.26) в (2.1.16) и преобразуем полученную формулу:

$$\begin{aligned} \vec{W}(k) - \vec{W}(k-1) &= -\frac{1-\alpha}{\alpha}(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{P})^+\mathbf{P}\bar{\mathbf{X}}^*(k)\bar{\mathbf{X}}^T(k)\vec{W}_q + \\ &+ \frac{1-\alpha}{\alpha\gamma}(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{P})^+\mathbf{P}\bar{\mathbf{X}}^*(k)\bar{\mathbf{X}}^T(k)\mathbf{P}(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{P})^+\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{k-1}\vec{W}_q. \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

Упростим выражение (2.1.28). Для этих целей представим вектор \vec{W}_q следующим образом:

$$\vec{W}_q = \vec{W}(k-1) - \mathbf{P}\vec{V}(k-1). \quad (2.1.29)$$

Подставляя (2.1.29) в (2.1.28), имеем:

$$\begin{aligned} \vec{W}(k) - \vec{W}(k-1) &= -\frac{1-\alpha}{\alpha}(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{P})^+\mathbf{P}\bar{\mathbf{X}}^*(k)\bar{\mathbf{X}}^T(k)\vec{W}(k-1) + \\ &+ \frac{1-\alpha}{\alpha}(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{P})^+\mathbf{P}\bar{\mathbf{X}}^*(k)\bar{\mathbf{X}}^T(k)\mathbf{P}\vec{V}(k-1) + \\ &+ \frac{1-\alpha}{\alpha\gamma}(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{P})^+\mathbf{P}\bar{\mathbf{X}}^*(k)\bar{\mathbf{X}}^T(k)\mathbf{P}(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{P})^+\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{k-1}\vec{W}(k-1) - \\ &- \frac{1-\alpha}{\alpha\gamma}(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{P})^+\mathbf{P}\bar{\mathbf{X}}^*(k)\bar{\mathbf{X}}^T(k)\mathbf{P}(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{P})^+(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{P})\vec{V}(k-1) \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

При больших k $\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{k-1}\vec{W}_{k-1} \approx \vec{0}$, а $(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{P})^+(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{P}) \approx \mathbf{P}$, тогда:

$$\begin{aligned} \vec{W}(k) - \vec{W}(k-1) &= -\frac{1-\alpha}{\alpha}(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{P})^+\mathbf{P}\bar{\mathbf{X}}^*(k)\bar{\mathbf{X}}^T(k)\vec{W}(k-1) + \\ &+ \frac{1-\alpha}{\alpha}(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{R}_{k-1}\mathbf{P})^+\mathbf{P}\bar{\mathbf{X}}^*(k)\bar{\mathbf{X}}^T(k)\mathbf{P}\vec{V}(k-1) \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right). \end{aligned} \quad (2.1.31)$$

Представляя γ в числителе формулы (2.1.31) в явном виде (2.1.27), получаем:

$$\begin{aligned} \vec{V}(k) - \vec{V}(k-1) = & -\frac{1-\alpha}{\alpha} (\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_{k-1}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\vec{X}^*(k)\vec{X}^T(k)\vec{W}(k-1) + \\ & + \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha^2\gamma} (\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_{k-1}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\vec{X}^*(k)\vec{X}^T(k)\mathbf{P}\vec{V}(k-1)\vec{X}^T(k)\mathbf{P}(\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_{k-1}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\vec{X}^*(k) \end{aligned} \quad (2.1.32)$$

Второе слагаемое правой части выражения (2.1.32), имеет второй порядок малости по сравнению с остальными слагаемыми, по этой причине мы им пренебрегаем. Кроме того, $\alpha \cong 1$, и поэтому $\frac{1-\alpha}{\alpha} \cong 1-\alpha$. Необходимо отметить, что при больших k : $(\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_{k-1}\mathbf{P})^+ \cong (\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_k\mathbf{P})^+$. В итоге формула (2.1.32) приобретает свой окончательный вид:

$$\vec{V}(k) = \vec{V}(k-1) - (1-\alpha)(\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_k\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\vec{X}^*(k)\vec{X}^T(k)\vec{W}(k-1).$$

Запишем теперь полный вид алгоритма рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов:

$$\vec{W}(k) = \vec{W}_q + \mathbf{P}\vec{V}(k) \quad (2.1.33)$$

$$\vec{V}(k) = \vec{V}(k-1) - (1-\alpha)(\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_k\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\vec{X}^*(k)\vec{X}^T(k)\vec{W}(k-1) \quad (2.1.34)$$

$$(\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_k\mathbf{P})^+ = \mathbf{Q} - \frac{(1-\alpha)\mathbf{Q}\mathbf{P}\vec{X}^*(k)\vec{X}^T(k)\mathbf{P}\mathbf{Q}}{1+(1-\alpha)\vec{X}^T(k)\mathbf{P}\mathbf{Q}\mathbf{P}\vec{X}^*(k)}, \quad (2.1.35)$$

$$\text{где } \mathbf{Q} = \frac{1}{\alpha} (\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_{k-1}\mathbf{P})^+. \quad (2.1.36)$$

В следующих разделах данной главы будут найдены статистические характеристики адаптивной антенной решётки, настраивающейся по данному алгоритму, с учётом флуктуаций вектора весовых коэффициентов.

2.2. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ААР С БЫСТРЫМ ИТЕРАТИВНЫМ АЛГОРИТМОМ НАСТРОЙКИ [115,116].

N - мерное уравнение настройки весового вектора \vec{W} адаптивных антенных решёток, работающих по алгоритму рекуррентного обращения выборочной оценки ковариационной матрицы входных сигналов с ограничениями, в дискретном времени имеет вид [18]:

$$\vec{W}(k+1) = P\{\vec{V}(k) - (1-\alpha) \cdot (\mathbf{PR}_k \mathbf{P})^+ \cdot \mathbf{P} \cdot \vec{X}^*(k+1) \vec{X}^T(k+1) \vec{W}(k)\} + \vec{W}_q. \quad (2.2.1)$$

Указанный алгоритм отличается от градиентного алгоритма наличием матричного коэффициента адаптации $(1-\alpha) \cdot (\mathbf{PR}_k \mathbf{P})^+$, который позволяет осуществлять поворот вектора градиента в подпространстве ограничений для скорейшего достижения ААР своего оптимального состояния.

Чтобы проанализировать выражение (2.2.1) воспользуемся формулами первой главы (1.2.4), которые позволяют представить весовой вектор \vec{W} и стохастическую матрицу входных сигналов $\vec{X}^*(k) \vec{X}^T(k)$ в виде сумм их средних значений и флуктуационных составляющих.

Найдём уравнение для среднего значения весового вектора $\langle \vec{W} \rangle$ в приближении, что $(\mathbf{PR}_k \mathbf{P})^+ \approx (\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+ = const$. Для этого усредним (2.2.1) и используем обозначения (1.2.4):

$$\langle \vec{W}(k+1) \rangle = \mathbf{P} \langle \vec{V}(k+1) \rangle - (1-\alpha) \mathbf{P} (\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+ \{ \mathbf{PR}_{xx} \langle \vec{W}(k) \rangle - \vec{\Delta}_w \} + \vec{W}_q. \quad (2.2.2)$$

Мы предположили выше, что оценку псевдообратной корреляционной матрицы входных сигналов при анализе можно заменить на истинное значение псевдообратной матрицы. Это предположение справедливо при малых флуктуациях и достаточно больших моментах времени k , когда адаптивная антенна находится в стационарном состоянии. Именно стационарное состояние и изучается в данной работе на предмет выявления влияния флуктуаций вектора весовых коэффициентов.

Чтобы определить стационарное среднее значение весового вектора $\vec{W}_{CT} \equiv \langle \vec{W}(k) \rangle$ и других статистических характеристик адаптивной антенны воспользуемся методом возмущений по параметру $(1-\alpha)$. Будем полагать его малым ($(1-\alpha) \ll 1$). В качестве нулевого приближения возьмём среднее значение весового вектора $\langle \vec{W} \rangle_0 \equiv \vec{W}_0$, которое получается из усреднения уравнения (2.2.1) в приближении "прямого размыкания" всех смешанных моментов:

$$\vec{W}_0(k+1) = \mathbf{P} \vec{V}_0(k+1) - (1-\alpha) \mathbf{P} (\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{xx} \vec{W}_0(k) + \vec{W}_q. \quad (2.2.3)$$

В этом приближении мы пренебрегаем флуктуациями вектора весовых коэффициентов, считая $\vec{W}(k) = \langle \vec{W}(k) \rangle_0 = \vec{W}_0(k)$. В нулевом приближении стационарное значение вектора весовых коэффициентов будет удовлетворять уравнению:

$$\mathbf{D}\vec{W}_0 + (1 - \alpha)(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\vec{W}_0 = \vec{W}_q. \quad (2.2.4)$$

Решение уравнения (2.2.4) может быть записано в виде:

$$\vec{W}_{0CT} = \vec{W}_q - (\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\vec{W}_q. \quad (2.2.5)$$

Для адаптивной антенной решётки с однократным линейным ограничением на диаграмму направленности решение (2.2.5) записывается следующим образом:

$$\vec{W}_{0CT} = \vec{W}_q - \frac{\frac{\pi_{\xi}}{\pi_{\xi 1}} (\vec{\xi}^T \vec{W}_q) \mathbf{P} \vec{\xi}^*}{1 + \frac{\pi_{\xi}}{\pi_{\xi 1}} \vec{\xi}^T \mathbf{P} \vec{\xi}^*}, \quad (2.2.6)$$

где $\pi_{\xi}, \pi_{\xi 1}$ - мощности соответственно помехи и собственного шума адаптивной антенны, $\vec{\xi}$ - вектор - фазор помехи.

Получим уравнение для вектора поправки $\vec{W}_{\Pi}(k) \equiv \vec{W}(k) - \vec{W}_0(k)$ к нулевому приближению. Для этой цели введём вектор поправки для \vec{V} : $\vec{V}_{\Pi}(k) \equiv \vec{V}(k) - \vec{V}_0(k)$, и после этого вычтем (2.2.3) из (2.2.1). Учтём также, что $\vec{W}_{\Pi}(k) \equiv \mathbf{P}\vec{V}_{\Pi}(k)$, $\mathbf{P}\vec{W}_{\Pi}(k) \equiv \mathbf{P}\vec{V}_{\Pi}(k)$. Тогда после преобразований имеем:

$$\vec{W}_{\Pi}(k+1) = \mathbf{P}\{\vec{W}_{\Pi}(k) - (1 - \alpha)(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}[\mathbf{R}_{xx}\vec{W}_{\Pi}(k) + \tilde{\Phi}(k+1)\vec{W}(k)]\}. \quad (2.2.7)$$

Поскольку в установившемся режиме настройка адаптивной антенной решётки и флуктуации вектора весовых коэффициентов происходят в подпространстве ограничений и матрицу $\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}$ в (2.2.4) можно заменить на эквивалентную эрмитовскую $\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P}$, то для дальнейшего анализа перейдём в \mathbf{Q} - матричное представление, диагонализующее эрмитовскую матрицу $\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P}$.

В \mathbf{Q} - матричном представлении алгоритм настройки вектора весовых коэффициентов приобретает вид:

$$\vec{Y}(k+1) = \hat{\alpha}\vec{Y}(k) - (1 - \alpha)\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\tilde{\Phi}(k+1)\vec{W}(k), \quad (2.2.8)$$

где \vec{Y} - вектор поправки в \mathbf{Q} - матричном представлении;

$$\Lambda = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P}\mathbf{Q}, \quad (2.2.9)$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \vdots & \mathbf{O} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{O} & \vdots & \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

Стационарное решение уравнения (2.2.8) имеет вид:

$$\vec{Y}(k+1) = -(1-\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\alpha}^n \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \tilde{\Phi}(k+1-n) [\vec{W}_0 + \mathbf{Q} \vec{Y}(k-n)], \quad (2.2.10)$$

где α - коэффициент, определяющий скорость забывания корреляционной функцией предыдущих отсчётов сигналов.

Итерируя уравнение (2.2.10), можно построить ряд теории возмущений по малому параметру $(1-\alpha) \ll 1$ [28,65,170]. Тогда вектор $\vec{Y}(k)$ и соответствующий ему вектор поправки $\vec{W}_{\Pi}(k) = \mathbf{Q} \vec{Y}(k)$ можно записать следующим образом:

$$\vec{Y} = \vec{Y}_1 + \vec{Y}_2 + \vec{Y}_3 + \dots, \quad (2.2.11)$$

$$\vec{W}_{\Pi}(k) = \mathbf{Q} \vec{Y}(k) = \vec{W}_{\Pi 1}(k) + \vec{W}_{\Pi 2}(k) + \vec{W}_{\Pi 3}(k) + \dots \quad (2.2.12)$$

Члены ряда (2.2.11) соответственно будут равны:

$$\begin{aligned} \vec{Y}_1(k+1) &= -(1-\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\alpha}^n \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \tilde{\Phi}(k+1-n) \vec{W}_{0CT}, \\ \vec{Y}_2(k+1) &= -(1-\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\alpha}^n \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \tilde{\Phi}(k+1-m) \mathbf{Q} \vec{Y}_1(k-n) = \\ &= (1-\alpha)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\alpha}^{m+n} \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \tilde{\Phi}(k+1-n) (\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \tilde{\Phi}(k+1-n-m-1) \vec{W}_{0CT}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

$$\vec{Y}_{p+1}(k+1) = -(1-\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\alpha}^n \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \tilde{\Phi}(k+1-n) \mathbf{Q} \vec{Y}_p(k-n).$$

Чтобы вычислить средние значения членов ряда поправок (2.2.13) предположим, что исследуемая адаптивная антенна является узкополосной, т.е. корреляционная матрица входных сигналов может быть представлена в виде произведения пространственной и временной частей, как и в первой главе.

Ряд поправок (2.2.13) даёт возможность вычислять различные статистические характеристики с учётом флуктуаций вектора весовых коэффициентов с любой степенью точности. Однако, все поправки, начиная со второй, могут не учитываться при анализе, поскольку имеют следующий порядок малости по отношению к первой поправке. В силу этого будем находить статистические характеристики в первом, так называемом, борновском, приближении.

2.3 КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА ААР [115,116].

Найдём корреляционную функцию выходного сигнала ААР с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки, с учётом флуктуаций вектора весовых коэффициентов. В первой главе было предположено, что входной сигнал $\bar{X}(k)$ является комплексным гауссовским, случайным вектором и имеет место негауссовская статистическая зависимость между флуктуациями весового вектора и вектором входных сигналов. В этих предположениях был получен общий вид корреляционной функции (1.3.1):

$$\begin{aligned} K_Z(m, m+n) &\equiv \langle Z^*(m)Z^T(m+n) \rangle = \\ &= \langle (\bar{X}^T(m)\bar{W}(m-1))^* (\bar{X}^T(m+n)\bar{W}(m+n-1)) \rangle = \\ &= K_{Z_0}(m, m+n) + \\ &+ \langle \bar{W}^H(m-1)\bar{\Phi}_{xx}(m, m+n) \rangle \bar{W}_{CT} + \bar{W}_{CT}^H \langle \bar{\Phi}_{xx}(m, m+n)\bar{W}(m+n-1) \rangle + \\ &+ \langle \bar{W}^H(m-1)\bar{X}^*(m)\bar{X}^T(m+n)\bar{W}(m+n-1) \rangle \end{aligned}$$

С помощью метода возмущений по малому параметру $(1-\alpha)$, можно с учётом флуктуаций вектора весовых коэффициентов найти в первом борновском приближении выражения для слагаемых, входящих в данную формулу:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_w^H \bar{W}_{CT} + \bar{W}_{CT}^H \bar{\Delta}_w &= \langle \bar{W}^H(m-1)\bar{\Phi}_{xx}(m, m+n) \rangle \bar{W}_{CT} + \\ &+ \bar{W}_{CT}^H \langle \bar{\Phi}_{xx}(m, m+n)\bar{W}(m+n-1) \rangle = \\ &- (1-\alpha) \langle |Z|^2 \rangle_s Sp((\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{\xi\xi}) \left[\frac{(r_s^{|n|} + r_\xi^{|n|})r_s r_\xi}{1 - r_s r_\xi} + r_\xi \frac{r_s^{|n|} - r_\xi^{|n|}}{r_s - r_\xi} \right] - \\ &- (1-\alpha) \langle |Z|^2 \rangle_\xi Sp((\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{\xi\xi}) r_\xi^{|n|} \left[\frac{2r_\xi^2}{1 - r_\xi^2} + |n| \right] \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

$$\begin{aligned} &\langle \bar{W}^H(m-1)\bar{X}^*(m)\bar{X}^T(m+n)\bar{W}(m+n-1) \rangle \cong \\ &\cong \langle \bar{W}^H(m-1)\mathbf{R}_{xx}(m, m+n)\bar{W}(m+n-1) \rangle = \\ &= \frac{1}{2}(1-\alpha)r_\xi^{|n|} \left\{ \langle |Z|^2 \rangle_s \frac{1+r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} + \langle |Z|^2 \rangle_\xi \frac{1+r_\xi^2}{1-r_\xi^2} \right\} Sp((\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{\xi\xi}) \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Подставляя формулы (2.3.1), (2.3.2) в выражение (1.3.1) и проводя преобразования, получим формулу корреляционной функции выходного сигнала антенной решётки, настраивающейся по быстрому алгоритму, в стационарном режиме работы:

$$\begin{aligned} K_Z(n) &= r_s^{|n|} \langle |Z|^2 \rangle_s + r_\xi^{|n|} \langle |Z|^2 \rangle_\xi + \\ &+ \frac{1}{2}(1-\alpha)r_\xi^{|n|} \left\{ \langle |Z|^2 \rangle_s \frac{1+r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} + \langle |Z|^2 \rangle_\xi \frac{1+r_\xi^2}{1-r_\xi^2} \right\} Sp((\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{\xi\xi}) \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

$$\begin{aligned}
& - (1 - \alpha) \langle |Z|^2 \rangle_S Sp((\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{\xi\xi}) \left[\frac{(r_S^{|n|} + r_\xi^{|n|}) r_S r_\xi}{1 - r_S r_\xi} + r_\xi \frac{r_S^{|n|} - r_\xi^{|n|}}{r_S - r_\xi} \right] - \\
& - (1 - \alpha) \langle |Z|^2 \rangle_\xi Sp((\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{\xi\xi}) r_\xi^{|n|} \left[\frac{2r_\xi^2}{1 - r_\xi^2} + |n| \right]
\end{aligned}$$

Из (2.3.3) можно видеть, что флуктуации вектора весовых коэффициентов приводят к искажениям выходного сигнала ААР и его корреляционной функции. Сравнение данного выражения с соответствующей формулой, полученной для антенной решётки с градиентным алгоритмом настройки, показывает, что отличия определяются величинами коэффициентов адаптации μ и $(1 - \alpha)$ обоих алгоритмов, а также значениями $Sp(\mathbf{PR}_{\xi\xi})$ и $Sp((\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{\xi\xi})$, и носят, скорее количественный, чем качественный, характер.

Для наглядности проанализируем формулу (2.3.3) в случае воздействия на антенную решётку мощной узкополосной по сравнению с полезным сигналом, помехи ($r_\xi \gg r_S$). При выполнении условия узкополосности имеем:

$$\begin{aligned}
& K_Z(n) = \\
& = r_\xi^{|n|} \left\{ 1 + \frac{1}{2} (1 - \alpha) \left[\frac{1 - 3r_\xi^2}{1 - r_\xi^2} - 2|n| \right] Sp((\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{\xi\xi}) \right\} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi} \vec{W}_{CT} + \\
& + \left\{ r_S^{|n|} - \frac{1}{2} (1 - \alpha) Sp((\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{\xi\xi}) r_\xi^{|n|} \right\} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{SS} \vec{W}_{CT}
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Из выражения (2.3.4) следует, что в адаптивной антенной решётке с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки воздействие мощной помехи приводит к искажениям корреляционных характеристик выходного сигнала. Это явление в первой главе было названо эффектом «перекомпенсации». Обсуждение данного эффекта проведём позднее, в разделе о спектральных характеристиках выходного сигнала адаптивной антенной решётки. Непосредственно ниже рассмотрим одномоментные статистические характеристики ААР, настраиваемой по быстрому рекуррентному алгоритму.

Необходимо отметить, что в процессе вычисления средних значений, в которые входят кратные суммы, использовалось предположение о малости времени корреляции входных сигналов по сравнению со временем релаксации системы. Запишем данное условие в несколько видоизмененной форме:

$$\mu \lambda_n \frac{r^2}{1 - r^2} < \mu \sum_{n=1}^{N-L} \lambda_n \frac{r^2}{1 - r^2} = \mu \frac{r^2}{1 - r^2} Sp((\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{xx}) \ll 1$$

Данное выражение представляет собой достаточное условие применимости методов теории возмущений для анализа влияния флуктуаций на статистические характеристики ААР с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки. Оно накладывает ограничения на величину параметров μ, r .

2.4. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И МОДЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОМОМЕНТНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ААР [108,114,115,116].

Найдём корреляционную матрицу флуктуаций вектора весовых коэффициентов $K_{\vec{w}} \equiv \langle \vec{W}^* \vec{W}^T \rangle$ и суммарную мощность выходного сигнала ААР $\langle |Z|^2 \rangle_{CT}$.

В совпадающие моменты времени матрицу ковариации весового вектора в первом (борновском) приближении можно представить следующим образом [49,65]:

$$K_{\vec{w}}(m, m) \equiv \langle \vec{W}^*(m) \vec{W}^T(m) \rangle \cong \mathbf{Q}^* \langle \bar{Y}_1^*(m) \bar{Y}_1^T(m) \rangle \mathbf{Q}^T. \quad (2.4.1)$$

Для получения формулы, описывающей матрицу $K_{\vec{w}}$, подставим выражение для первой поправки к вектору весовых коэффициентов (2.2.13) в (2.4.1). В итоге после преобразований получим окончательный вид корреляционной матрицы флуктуаций вектора весовых коэффициентов:

$$K_{\vec{w}} = \frac{1}{2}(1 - \alpha) \left\{ \frac{1 + r_\xi^2}{1 - r_\xi^2} \langle |Z|^2 \rangle_\xi + \frac{1 + r_s r_\xi}{1 - r_s r_\xi} \langle |Z|^2 \rangle_s \right\} [(\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+]^*. \quad (2.4.2)$$

Из формулы (2.4.2) следует, флуктуации в адаптивной антенной решётке, настраиваемой по быстрому рекуррентному алгоритму, не являются изотропными. Их величина определяется собственными числами матрицы $[(\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+]^*$, а направления – ориентацией собственных векторов данной матрицы. Неизотропность флуктуаций в пространстве весовых коэффициентов составляет одно из отличий быстрого рекуррентного алгоритма от дискретного градиентного.

Суммарная мощность флуктуаций весовых коэффициентов адаптивной антенной решётки находится по формуле:

$$Sp(K_{\vec{w}}) = \frac{1}{2}(1 - \alpha) \left\{ \frac{1 + r_\xi^2}{1 - r_\xi^2} \langle |Z|^2 \rangle_\xi + \frac{1 + r_s r_\xi}{1 - r_s r_\xi} \langle |Z|^2 \rangle_s \right\} Sp([(\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+]^*). \quad (2.4.3)$$

Необходимо отметить, что из-за проблем с определением $Sp([(\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+]^*)$ для произвольной ААР с многократными линейными ограничениями в общем случае нахождение вида $Sp(K_{\vec{w}})$ затруднено. Однако в случае антенной решётки с однократным линейным ограничением $Sp([(\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+]^*)$ легко находится:

$$Sp([(\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+]^*) = \frac{1}{\pi_{\xi 1}} \frac{(N - 1) + \frac{\pi_\xi}{\pi_{\xi 1}} N(N - 2) [1 - |f(U_\xi)|^2]}{1 + \frac{\pi_\xi}{\pi_{\xi 1}} N [1 - |f(U_\xi)|^2]}. \quad (2.4.4)$$

где π_ξ - мощность помехи, а π_{ξ_1} - мощность собственного шума ААР, $U_\xi = \pi \cdot \text{Sin} \theta_\xi$ - угол прихода помехи.

Конкретный вид суммарной мощности флуктуаций вектора весовых коэффициентов для адаптивной антенной решётки с однократным линейным ограничением на ДН легко получить, если подставить (2.4.4) в (2.4.3):

$$Sp(K_{\bar{W}}) = \frac{1}{2}(1-\alpha) \left\{ \frac{1+r_\xi^2}{1-r_\xi^2} \langle |Z|^2 \rangle_\xi + \frac{1+r_S r_\xi}{1-r_S r_\xi} \langle |Z|^2 \rangle_S \right\} \times \\ \times \frac{1}{\pi_{\xi_1}} \frac{(N-1) + \frac{\pi_\xi}{\pi_{\xi_1}} N(N-2)[1 - |f(U_\xi)|^2]}{1 + \frac{\pi_\xi}{\pi_{\xi_1}} N[1 - |f(U_\xi)|^2]} \quad (2.4.5)$$

Сравним данное выражение с общей формулой для $Sp(K_{\bar{W}})$. Эта формула была найдена в первой главе для адаптивной антенной решётки, настраиваемой по градиентному алгоритму. Сравнение показывает, что вид суммарной мощности флуктуаций вектора весовых коэффициентов ААР, настраиваемой по быстрому рекуррентному алгоритму, существенно усложняется. В нём появляется явная зависимость от мощностей помехи и собственного шума ААР, а также достаточно сложная функциональная зависимость от угла прихода помехи.

Найдём мощность выходного сигнала ААР. Согласно выражению (1.4.6), выходная мощность адаптивной антенной решётки состоит из четырёх слагаемых. Первое слагаемое есть выходная мощность без учёта флуктуаций весового вектора. Остальные слагаемые определяются флуктуациями вектора весовых коэффициентов. Они записаны в предположении негауссовской статистической зависимости между вектором весовых коэффициентов и вектором входных сигналов:

$$\langle |Z|^2 \rangle_{CT} = \langle |Z|^2 \rangle_0 + \bar{\Delta}_W^H \bar{W}_{CT} + \bar{W}_{CT}^H \bar{\Delta}_W + \langle \bar{W}^H (m-1) \bar{X}^* (m) \bar{X}^T (m) \bar{W} (m-1) \rangle.$$

Если положить $n=0$ в выражениях (2.3.1), (2.3.2), то можно найти слагаемые в формуле (1.4.6), учитывающие влияние флуктуаций весового вектора. В итоге имеем:

$$\bar{\Delta}_W^H \bar{W}_{CT} + \bar{W}_{CT}^H \bar{\Delta}_W = \\ = -(1-\alpha) \left\{ \langle |Z|^2 \rangle_S \frac{2r_S r_\xi}{1-r_S r_\xi} + \langle |Z|^2 \rangle_\xi \frac{2r_\xi^2}{1-r_\xi^2} \right\} Sp((\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{\xi\xi}), \quad (2.4.6)$$

$$\begin{aligned}
& \langle \bar{W}^H(m-1) \bar{X}^*(m) \bar{X}^T(m) \bar{W}(m-1) \rangle \cong \langle \bar{W}^H(m-1) \mathbf{R}_{xx} \bar{W}(m-1) \rangle = \\
& = \frac{1}{2}(1-\alpha) \left\{ \langle |Z|^2 \rangle_s \frac{1+r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} + \langle |Z|^2 \rangle_\xi \frac{1+r_\xi^2}{1-r_\xi^2} \right\} Sp((\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+ + \mathbf{P}\mathbf{R}_{\xi\xi}). \quad (2.4.7)
\end{aligned}$$

Подставляя выражения (2.4.6) и (2.4.7) в формулу (1.4.6) и проводя преобразования, получим окончательное выражение для выходной мощности ААР, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму:

$$\begin{aligned}
\langle |Z|^2 \rangle_{CT} = & \left\{ 1 + \frac{1}{2}(1-\alpha) \frac{1-3r_\xi^2}{1-r_\xi^2} Sp((\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+ + \mathbf{P}\mathbf{R}_{\xi\xi}) \right\} \langle |Z|^2 \rangle_\xi + \\
& + \left\{ 1 + \frac{1}{2}(1-\alpha) \frac{1-3r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} Sp((\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+ + \mathbf{P}\mathbf{R}_{\xi\xi}) \right\} \langle |Z|^2 \rangle_s \quad (2.4.8)
\end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай равных коэффициентов автокорреляции между отсчётами полезного сигнала и помехи $r_s = r_\xi$. При этом предположении выражение мощности выходного сигнала адаптивной антенной решётки (2.4.8) упрощается и принимает вид:

$$\langle |Z|^2 \rangle_{CT} = \left\{ 1 + \frac{1}{2}(1-\alpha) \frac{1-3r_\xi^2}{1-r_\xi^2} Sp((\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+ + \mathbf{P}\mathbf{R}_{\xi\xi}) \right\} \langle |Z|^2 \rangle_0. \quad (2.4.9)$$

Из формулы (2.4.9) видно, что флуктуации вектора весовых коэффициентов в адаптивной антенной решётке, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму, могут приводить как к увеличению мощности на выходе ААР (эффекту рассогласования, *misadjustment*, Уидроу [17]), так и к её уменьшению (эффекту “перекомпенсации” [49,65,116]) по сравнению с величиной мощности выходного сигнала при постоянном стационарном векторе весовых коэффициентов. Аналогичные эффекты присутствовали также в дискретном градиентном алгоритме.

Найдём формулу выходной мощности ААР, в которой учтено условие узкополосности помехи по сравнению с полезным сигналом ($r_\xi \gg r_s$). Для этого положим $n=0$ в выражении (2.3.4), описывающем корреляционную функцию выходного сигнала адаптивной антенной решётки в случае прихода на ААР мощной узкополосной помехи:

$$\begin{aligned}
\langle |Z|^2 \rangle_{CT} = & \left\{ 1 + \frac{1}{2}(1-\alpha) \frac{1-3r_\xi^2}{1-r_\xi^2} Sp((\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+ + \mathbf{P}\mathbf{R}_{\xi\xi}) \right\} \langle |Z|^2 \rangle_\xi + \\
& + \left\{ 1 - \frac{1}{2}(1-\alpha) Sp((\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+ + \mathbf{P}\mathbf{R}_{\xi\xi}) \right\} \langle |Z|^2 \rangle_s \quad (2.4.10)
\end{aligned}$$

Ниже приведены результаты проверки формул данного раздела методом компьютерного моделирования.

РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.

Для проверки обоснованности приближений, которые были сделаны при теоретическом анализе флуктуаций вектора весовых коэффициентов адаптивной антенной решётки, было проведено численное моделирование узкополосной ААР, содержащей N - элементов ($N=7$). Эта адаптивная антенная решётка настраивалась по быстрому рекуррентному алгоритму (2.2.1) и имела однократное линейное ограничение ($L=1$) на ДН. Расстояние между элементами бралось равным половине длины волны. Для однократных ограничений матрица \mathbf{C} имеет размерность $[N \times 1]$ и равна $\mathbf{C} \equiv \vec{C}_1 = \vec{S}^*$, где \vec{S} - вектор волнового фронта полезного сигнала.

Предполагалось, что на адаптивную антенну поступают статистически независимые полезный сигнал и одна помеха с некоррелированными отсчётами. Углы прихода полезного сигнала и помехи были равны соответственно $\Theta_s=0^0$, $\Theta_\xi=45^0$. Комплексные входные сигналы были формированы с помощью рекурсивных фильтров первого порядка из двух независимых источников гауссовского “белого” шума. Мощность помехи была в 10 раз больше мощности полезного сигнала. В адаптивной антенной решётке присутствовал также некоррелированный собственный шум. Мощность собственного шума ААР составляла 0.1 мощности полезного сигнала.

Чтобы проверить результаты статистического анализа, в компьютерном эксперименте находилась выходная мощность ААР. Определение мощности выходного сигнала велось в стационарном режиме работы путём усреднения по 40000 независимых отсчётов. На рис. 2.2 приведён график зависимости выходной мощности адаптивной антенной решётки от величины коэффициента адаптации быстрого рекуррентного алгоритма $\mu_R = 1 - \alpha$. Теоретическая зависимость описывается кривой (1), модельная зависимость - кривой (2). Из рисунка видно, что компьютерное моделирование подтверждает гипотезу линейного роста мощности выходного сигнала адаптивной антенной решётки с увеличением коэффициента адаптации, возникающего при флуктуациях вектора весовых коэффициентов в ААР. Конечное время усреднения приводит к некоторому расхождению результатов статистического анализа и численного моделирования.

Для рассматриваемой с 7-ми элементной адаптивной антенной решётки была исследована также зависимость выходного отношения сигнал / шум $\left(\frac{S}{N}\right)_{out}$ от вели-

чины коэффициента адаптации μ_R быстрого алгоритма (рис. 2.3). Необходимо отметить, что при отсутствии флуктуаций в ААР ($\bar{W} = \bar{W}_{opt}$) данное отношение имеет

постоянное значение $\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = 69$ (кривая 3) и находится по формуле

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{\langle |Z|^2 \rangle_s}{\langle |Z|^2 \rangle_0 - \langle |Z|^2 \rangle_s}.$$

Флуктуации приводят к ухудшению отношения сигнал/шум на выходе адаптивной антенной решётки. Величина уменьшения зависит от

величины коэффициента адаптации μ_R . Теоретическое выходное отношение сигнал / шум при учёте флуктуаций весовых коэффициентов (для случая, когда коэффициенты корреляции между отсчётами входных сигналов таковы, что отсутствует эффект "перекомпенсации": $r_\xi < 1/\sqrt{3}$; $r_s < 1/3r_\xi$) может быть рассчитано с учётом

выражений (1.4.7), (2.4.8) из формулы $\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{\langle |Z|^2 \rangle_s}{\langle |Z|^2 \rangle_{CT} - \langle |Z|^2 \rangle_s}$ (кривая 1). Отношение сигнал/шум на выходе адаптивной антенной решётки для случая компьютерного моделирования находилось с помощью формулы -

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{N^2 \langle |S_{(1)}|^2 \rangle_s}{\langle |N \cdot S_{(1)} - \bar{W}^T \cdot \bar{X}|^2 \rangle} \quad (\text{кривая 2}).$$

Из рисунка 2.3 можно видеть, что отношение сигнал/шум на выходе ААР, найденное при учёте флуктуаций вектора весовых коэффициентов, резко убывает при увеличении коэффициента адаптации μ_R . Выходное отношение сигнал/шум, рассчитанное с учётом флуктуаций вектора весовых коэффициентов, уже при $\mu_R \geq 0.01$ значительно меньше (в два раза), чем отношение сигнал/шум на выходе адаптивной антенной решётки, найденное без учёта флуктуаций.

2.5. АНАЛИЗ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ААР [115,116].

Рассмотрим влияние флуктуаций весового вектора на спектральные характеристики выходного сигнала ААР, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму. В первой главе было показано, что спектр дискретного сигнала на выходе адаптивной антенной решётки описывается выражением (1.5.1) и может быть записан в виде [17]:

$$S_Z(\Omega) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_Z(n) z^{-n}$$

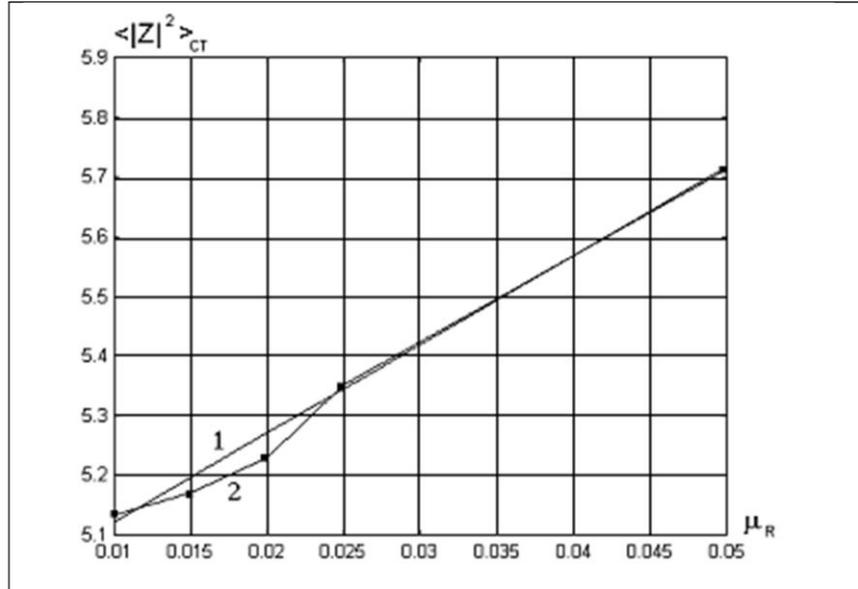


Рис. 2.2. Зависимость выходной мощности ААР от величины коэффициента адаптации быстрого рекуррентного алгоритма μ_R (1 - теория, 2 – компьютерное моделирование).

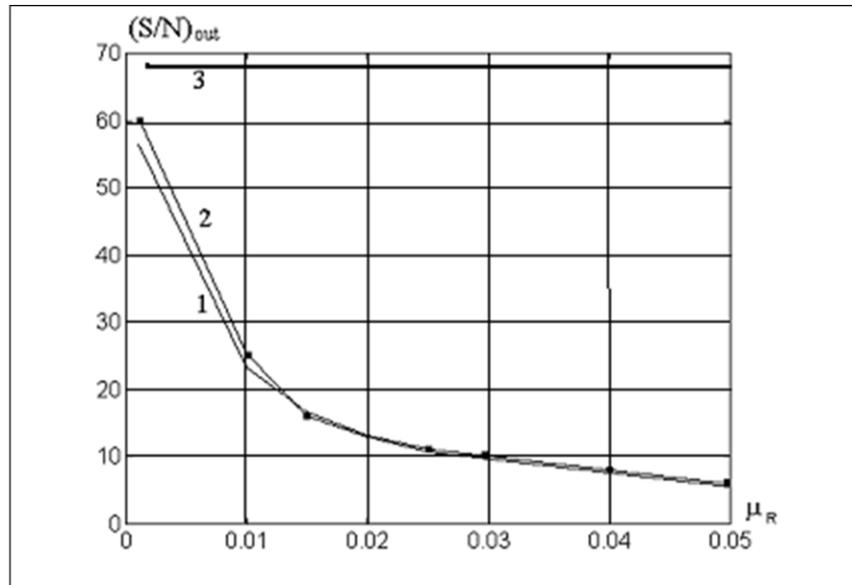


Рис. 2.3. Зависимость выходного отношения сигнал/шум $(S/N)_{out}$ от величины коэффициента адаптации μ_R (1 – теория, 2 – компьютерное моделирование, 3 – отношение сигнал/шум в случае отсутствия флуктуаций в антенной решётке).

Получим формулу спектральной плотности мощности выходного сигнала ААР. Для этого подставим формулу для корреляционной функции выходного сигнала адаптивной антенной решётки (2.3.3) в выражение (1.5.1),:

$$\begin{aligned}
S_Z(\Omega) = & \\
= & \frac{z(1-r_S^2)}{z(1+r_S^2)-r_S(1+z^2)} \langle |Z|^2 \rangle_s \left[1 - (1-\alpha) \left(\frac{r_S r_\xi}{1-r_S r_\xi} + \frac{r_\xi}{r_S - r_\xi} \right) Sp((\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{\xi\xi}) \right] + \\
+ & \frac{z(1-r_\xi^2)}{z(1+r_\xi^2)-r_\xi(1+z^2)} \{ \langle |Z|^2 \rangle_s \frac{1}{2} (1-\alpha) \frac{r_S + r_\xi}{r_S - r_\xi} Sp((\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{\xi\xi}) + \\
+ & \langle |Z|^2 \rangle_\xi \left[1 + \frac{1}{2} (1-\alpha) \frac{1-3r_\xi^2}{1-r_\xi^2} Sp((\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{\xi\xi}) \right] - \\
- & \left[\frac{r_\xi z}{(1-r_\xi z)^2} + \frac{r_\xi z^{-1}}{(1-r_\xi z^{-1})^2} \right] \langle |Z|^2 \rangle_\xi (1-\alpha) Sp((\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{\xi\xi})
\end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Выражение (2.5.1) отражает влияние флуктуаций вектора весовых коэффициентов на спектр выходного сигнала адаптивной антенной решётки. Тем не менее, эта формула не является наглядной и удобной для обсуждения. По этой причине преобразуем формулу (2.5.1) в случае воздействия на адаптивную антенную решётку мощной, узкополосной, по сравнению с сигналом, помехи ($r_\xi \gg r_S$). При этих предположениях данное выражение можно упростить, и СПМ дискретного выходного сигнала адаптивной антенной решётки может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned}
S_Z(\Omega) = & \\
= & \frac{1-r_\xi^2}{1+r_\xi^2-2r_\xi \cos \Omega} \left\{ 1 + \frac{1}{2} (1-\alpha) \frac{1-3r_\xi^2}{1-r_\xi^2} Sp((\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{\xi\xi}) \right\} \bar{\mathbf{W}}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi} \bar{\mathbf{W}}_{CT} - \\
- & (1-\alpha) Sp((\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{\xi\xi}) \frac{2r_\xi ((1+r_\xi^2) \cos \Omega - 2r_\xi)}{((1+r_\xi^2) - 2r_\xi \cos \Omega)^2} \bar{\mathbf{W}}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi} \bar{\mathbf{W}}_{CT} + \\
+ & \left\{ \frac{1-r_S^2}{1+r_S^2-2r_S \cos \Omega} - \frac{1}{2} (1-\alpha) Sp((\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{\xi\xi}) \frac{1-r_\xi^2}{1+r_\xi^2-2r_\xi \cos \Omega} \right\} \bar{\mathbf{W}}_{CT}^H \mathbf{R}_{SS} \bar{\mathbf{W}}_{CT}
\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

Рассмотрим последнее слагаемое формулы (2.5.2). Оно описывает СПМ полезного сигнала на выходе ААР. Из данного выражения видно, что воздействие мощной помехи на адаптивную антенную решётку приводит к появлению таких флуктуаций вектора весовых коэффициентов, которые создают «провал» в спектре полезного выходного сигнала на частотах действия этой помехи - эффекту «перекомпенсации». Необходимо отметить, что эффект «перекомпенсации» имеет место и для помехового сигнала на выходе адаптивной антенной решётки. В стационарном состоянии при хорошей компенсации остаточная мощность помехи на выходе ААР много меньше

мощности полезного выходного сигнала. По этой причине влияние флуктуаций сказывается, преимущественно, на полезном сигнале, что ухудшает точность настройки ААР. Сравним выражение (2.5.2) с аналогичной формулой (1.5.4), полученной в первой главе для градиентного алгоритма. Сравнение показывает, что отличия между данными формулами носят, в основном, количественный, а не качественный характер. Таким образом, в адаптивных антенных решётках, настраивающихся по обоим алгоритмам, могут наблюдаться как эффект рассогласования, так и эффект «перекompенсации». Вид эффекта зависит от характеристик входных сигналов.

2.6. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ ААР С УЧЕТОМ ФЛУКТУАЦИЙ ВЕСОВОГО ВЕКТОРА - ДИАГРАММА НАПРАВЛЕННОСТИ, КОЭФФИЦИЕНТ НАПРАВЛЕННОГО ДЕЙСТВИЯ, КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ, ПОТЕРИ В ВЫХОДНОМ ОТНОШЕНИИ СИГНАЛ / ШУМ [108,112,116,147,150,169].

Диаграмма направленности антенны.

Рассмотрим влияние флуктуаций вектора весовых коэффициентов на ДН ААР, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму. В первой главе было показано, что флуктуации вектора весовых коэффициентов приводят к тому, что выражение средней по мощности ДН $g_{cp}(\theta)$ состоит из двух слагаемых: ДН адаптивной антенной решётки без учёта флуктуаций весового вектора $g_0(\theta)$ и флуктуационной диаграммы направленности $g_{\vec{w}}(\theta)$:

$$g_{cp}(\theta) = g_0(\theta) + g_{\vec{w}}(\theta) = \vec{W}_{CT}^H \vec{S}_{np}^* \vec{S}_{np}^T \vec{W}_{CT} + \vec{S}_{np}^T \mathbf{K}_{\vec{w}} \vec{S}_{np}^*.$$

Получим выражение флуктуационной ДН адаптивной антенной решётки, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму. С этой целью подставим формулу для $\mathbf{K}_{\vec{w}}$ (2.4.2) в выражение (1.6.5), описывающее $g_{\vec{w}}(\theta)$. После преобразований и учёта свойств матрицы $[(\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+]^*$, получим флуктуационную диаграмму направленности ААР с быстрым рекуррентным алгоритмом:

$$g_{\vec{w}}(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \alpha) \left\{ \langle |Z|^2 \rangle_{\xi} \frac{1 + r_{\xi}^2}{1 - r_{\xi}^2} + \langle |Z|^2 \rangle_s \frac{1 + r_s r_{\xi}}{1 - r_s r_{\xi}} \right\} \left| [(\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+ \cdot \vec{S}_{np}^*]^2 \right|. \quad (2.6.1)$$

Из формулы (2.6.1) видно, что форма флуктуационной ДН определяется модулем некоторого вектора, полученного путём проецирования вектора – фазора пробного сигнала в подпространство ограничений и поворота там этой проекции на некоторый угол. В общем случае $g_{\vec{w}}(\theta)$ будет отличаться от флуктуационной диаграммы

направленности адаптивной антенной решётки, настраивающейся по градиентному алгоритму. Это связано с тем, что форма флукуационной диаграммы направленности ААР с градиентным алгоритмом определяется свойствами $|\mathbf{P}\vec{S}_{np}^*|^2$ - модуля проекции вектора – фазора пробного сигнала в подпространстве ограничений без операции поворота.

Пример. Флукуационная ДН ААР с однократным линейным ограничением, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму.

Если подставить в формулу (2.6.1) конкретный вид проекционной матрицы \mathbf{P} для адаптивной антенной решётки с однократным линейным ограничением (1.6.8), то можно найти выражение флукуационной ДН ААР, настраивающейся по алгоритму рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов. Тогда получим следующую формулу:

$$g_{\vec{w}}(\theta) = \frac{1}{2}(1-\alpha) \frac{N}{\pi_{\xi 1}} \left[\langle |Z|^2 \rangle_{\xi} \frac{1+r_{\xi}^2}{1-r_{\xi}^2} + \langle |Z|^2 \rangle_s \frac{1+r_s r_{\xi}}{1-r_s r_{\xi}} \right] \cdot \left[(1-|f(U)|^2) - \frac{\pi_{\xi} N (|f(U_{\xi}-U)| - |f(U)| \cdot |f(U_{\xi})|)^2}{\pi_{\xi 1} \left(1 + \frac{\pi_{\xi} N}{\pi_{\xi 1}} (1-|f(U_{\xi})|^2) \right)} \right], \quad (2.6.2)$$

На рис. 2.4 приведён график флукуационной ДН, вычисленной согласно выражению (2.6.2), в зависимости от угла прихода пробного сигнала θ . Стрелкой указано направление, с которого поступает помеха. Из рисунка можно видеть, что флукуационная диаграмма направленности адаптивной антенной решётки с однократным линейным ограничением, настраивающейся по алгоритму рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов, не является изотропной: она имеет минимальное значение в направлении помехи и равна нулю в направлении прихода полезного сигнала.

РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.

Было проведено численное моделирование узкополосной ААР, имеющей N - элементов ($N=7$), с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки (2.2.7). Данная адаптивная антенная решётка имела однократные линейные ограничения ($L=1$) на ДН. Расстояние между элементами было равно половине длины волны. Для однократных ограничений матрица \mathbf{C} имеет размерность $[N \times 1]$ и равна $\mathbf{C} \equiv \vec{C}_1 = \vec{S}^*$, где \vec{S} - вектор волнового фронта полезного сигнала.

Предполагалось, что на адаптивную антенну поступают статистически независимые полезный сигнал и одна помеха с некоррелированными отсчётами. Углы прихода полезного сигнала и помехи были равны соответственно $\Theta_s=0^0$, $\Theta_\xi =45^0$. Комплексные входные сигналы были сформированы с помощью рекурсивных фильтров первого порядка из двух независимых источников гауссовского “белого” шума. Мощность помехи была в 10 раз больше мощности полезного сигнала. В адаптивной антенной решётке присутствовал также некоррелированный собственный шум. Мощность собственного шума ААР составляла 0.1 мощности полезного сигнала. Коэффициент "забывания" принимался равным $\alpha = 0.99$.

Определение статистических характеристик адаптивной антенной решетки при компьютерном моделировании велось в стационарном режиме работы путём усреднения по 40000 независимых отсчетов. В процессе компьютерного моделирования находилась флуктуационная ДН ААР (рис. 2.5).

На рисунке 2.5 теоретическая зависимость представлена кривой 1, результаты компьютерного моделирования показаны кривой 2. Стрелкой показан угол прихода помехи на ААР. Из рисунка можно видеть, что в направлении прихода полезного сигнала флуктуационная ДН равна нулю из-за наложенных на адаптивную антенную решётку ограничений, а в направлении помехового сигнала - имеет минимальное значение. Из рисунка 2.5 также видно, что диаграмма направленности, полученная при компьютерном моделировании, хорошо согласуется с ДН, найденной в результате статистического анализа.

Коэффициент направленного действия антенны.

Найдём коэффициент направленного действия с учётом флуктуаций весового вектора адаптивной антенной решётки, настраивающейся по алгоритму рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов. Согласно результатам, полученным в предыдущей главе, общий вид коэффициента направленного действия можно записать следующим образом:

$$D(\theta) = \frac{2g_0(\theta) + 2g_{\tilde{w}}(\theta)}{\int_0^\pi (g_0(\theta) + g_{\tilde{w}}(\theta)) \sin \theta \cdot d\theta}. \quad (2.6.3)$$

Из выражения (2.6.3) видно, что коэффициент направленного действия адаптивной антенны представляет собой сумму двух слагаемых: полученного при постоянном стационарном весовом векторе и «флуктуационного» слагаемого.

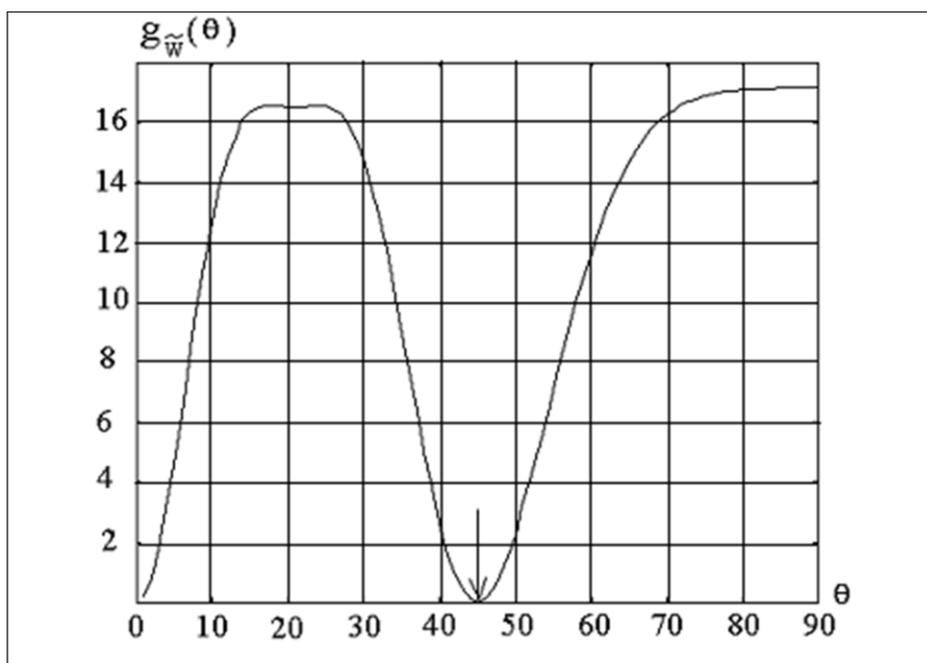


Рис. 2.4. Флуктуационная диаграмма направленности ААР с однократным линейным ограничением, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму, в зависимости от угла прихода пробного сигнала θ . Стрелкой указано направление, с которого поступает помеха.

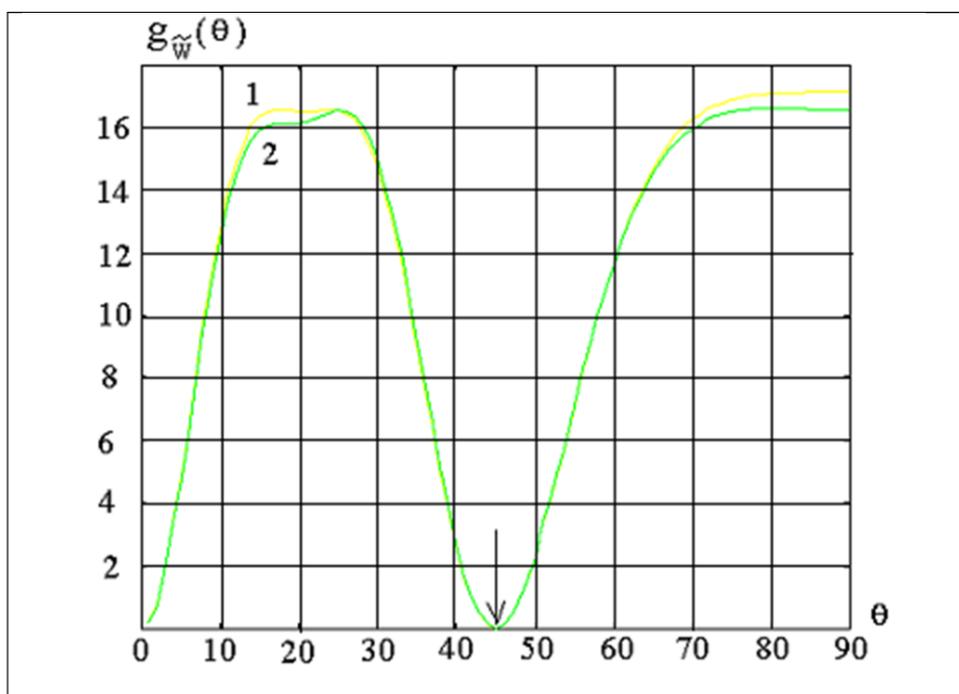


Рис. 2.5. Флуктуационная диаграмма направленности ААР с однократным линейным ограничением, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму
(1 – теория, 2 – компьютерное моделирование).

«Стационарный» коэффициент направленного действия для адаптивной антенной решетки, настраиваемой по быстрому рекуррентному алгоритму, имеет вид:

$$D_0(\theta) = \frac{2\vec{W}_{CT}^H \vec{S}_{np}^* \vec{S}_{np}^T \vec{W}_{CT}}{\int_0^\pi (\vec{W}_{CT}^H \vec{S}_{np}^* \vec{S}_{np}^T \vec{W}_{CT} + \frac{(1-\alpha)}{2} \langle |Z|^2 \rangle_0 \frac{1+r^2}{1-r^2} |(\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+ \vec{S}_{np}^*|^2) \sin \theta \cdot d\theta} \quad (2.6.4)$$

В формуле (2.6.4) для простоты рассмотрен случай равенства коэффициентов автокорреляции между отсчётами полезного сигнала и помех $r_S = r_\xi = r$.

«Флуктуационный» коэффициент направленного действия ААР, настраиваемой по быстрому рекуррентному алгоритму, может быть представлен в виде:

$$D_{\vec{W}}(\theta) = \frac{(1-\alpha) \langle |Z|^2 \rangle_0 \frac{1+r^2}{1-r^2} |(\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+ \vec{S}_{np}^*|^2}{\int_0^\pi (\vec{W}_{CT}^H \vec{S}_{np}^* \vec{S}_{np}^T \vec{W}_{CT} + \frac{(1-\alpha)}{2} \langle |Z|^2 \rangle_0 \frac{1+r^2}{1-r^2} |(\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+ \vec{S}_{np}^*|^2) \sin \theta \cdot d\theta} \quad (2.6.5)$$

Из выражений (2.6.4) и (2.6.5) можно видеть, что флуктуации весовых коэффициентов приводят, с одной стороны, к увеличению коэффициента направленного действия, но с другой стороны, к «размазыванию» этого направленного действия по направлениям угла θ .

Для того, чтобы более наглядно представить, как же именно флуктуации весового вектора искажают форму коэффициента направленного действия, рассмотрим пример.

Пример. Коэффициент направленного действия адаптивной антенной решетки с однократным линейным ограничением, настраиваемой по быстрому рекуррентному алгоритму.

Запишем коэффициент направленного действия с учётом флуктуаций весового вектора адаптивной антенной решетки, настраиваемой по быстрому рекуррентному алгоритму с однократным линейным ограничением на диаграмму направленности. Тогда имеем:

$$\begin{aligned}
& 2g_0(\theta) + (1-\alpha) \frac{N}{\pi_{\xi 1}} \times \\
& \times \left[\frac{1+r_{\xi}^2}{1-r_{\xi}^2} \langle |Z|^2 \rangle_{\xi} + \frac{1+r_S r_{\xi}}{1-r_S r_{\xi}} \langle |Z|^2 \rangle_S \right] \times \left\{ \frac{(1-|f(U)|^2) - \frac{\pi_{\xi} N}{\pi_{\xi 1}} \times \left(|f(U-U_{\xi})| - |f(U)| \cdot |f(U_{\xi})| \right)^2}{1 + \frac{\pi_{\xi} N}{\pi_{\xi 1}} (1-|f(U)|^2)} \right\} \\
D(\theta) = & \frac{\int_0^{\pi} \left\{ \left[g_0(\theta) + \frac{1-\alpha}{2} \frac{N}{\pi_{\xi 1}} \times \left[\frac{1+r_{\xi}^2}{1-r_{\xi}^2} \langle |Z|^2 \rangle_{\xi} + \frac{1+r_S r_{\xi}}{1-r_S r_{\xi}} \langle |Z|^2 \rangle_S \right] \right] \times \left\{ \frac{(1-|f(U)|^2) - \frac{\pi_{\xi} N}{\pi_{\xi 1}} \times \left(|f(U-U_{\xi})| - |f(U)| \cdot |f(U_{\xi})| \right)^2}{1 + \frac{\pi_{\xi} N}{\pi_{\xi 1}} (1-|f(U)|^2)} \right\} \right\} \sin \theta \cdot d\theta}{\pi} \quad (2.6.6)
\end{aligned}$$

Здесь:

$g_0 = \vec{W}_{CT}^H \vec{S}_{np}^* \vec{S}_{np}^T \vec{W}_{CT}$ - ДН, найденная при постоянном стационарном весовом векторе; $\pi_{\xi}, \pi_{\xi 1}$ - соответственно мощности помехи на входе ААР и мощность собственного шума, присутствующего в адаптивной антенне; N - число приемных антенных элементов. $U = \pi \sin \theta$; $U_{\xi} = \pi \sin \theta_{\xi}$, где θ и θ_{ξ} - углы прихода пробного сигнала и помехи соответственно.

В данном примере для больше наглядности представлен случай прихода на адаптивную антенную решетку полезного сигнала и помех с различными коэффициентами автокорреляции между отсчетами r_S и r_{ξ} соответственно.

Из формулы (2.6.6) можно видеть, что флуктуации весового вектора приводят в целом к ухудшению коэффициента направленного действия, и хотя имеет место его увеличение на величину, пропорциональную коэффициенту адаптации $(1-\alpha)$, тем не менее, из-за флуктуаций весового вектора страдает распределение коэффициента направленного действия по углу θ .

Коэффициент усиления адаптивной антенной решётки.

Найдем с учетом флуктуаций настраиваемых весовых коэффициентов коэффициент усиления адаптивной антенной решётки, настраивающейся по алгоритму рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов. Коэффициент усиления в данном случае представляет собой сумму двух слагаемых – найденного при постоянном стационарном весовом векторе и «флуктуационного» коэффициента усиления и имеет вид:

$$G(\theta) = \eta \frac{2\vec{W}_{CT}^H \vec{S}_{np}^* \vec{S}_{np}^T \vec{W}_{CT} + (1 - \alpha) \langle |Z|^2 \rangle_0 \frac{1 + r^2}{1 - r^2} |(\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \vec{S}_{np}^*|^2}{\int_0^\pi (\vec{W}_{CT}^H \vec{S}_{np}^* \vec{S}_{np}^T \vec{W}_{CT} + \frac{(1 - \alpha)}{2} \langle |Z|^2 \rangle_0 \frac{1 + r^2}{1 - r^2} |(\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \vec{S}_{np}^*|^2) \sin \theta \cdot d\theta} \quad (2.6.7)$$

Из выражения (2.6.7) следует, что флуктуации весового вектора увеличивают величину коэффициента усиления. Однако это увеличение имеет первый порядок малости по коэффициенту адаптации $(1 - \alpha)$, а потому незначительно. С другой стороны, флуктуации весовых коэффициентов искажают величину коэффициента усиления адаптивной антенны по направлениям угла θ .

Таким образом, флуктуации весовых коэффициентов оказывают двойное действие на коэффициент направленного действия и коэффициент усиления адаптивной антенной решётки, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму. С одной стороны, флуктуации увеличивают значения этих коэффициентов (правда незначительно, на величину, даже меньшую, чем первого порядка малости по коэффициенту адаптации $(1 - \alpha)$, поскольку в знаменателе данных выражений присутствует тоже «флуктуационное» слагаемое – «флуктуационная» диаграмма направленности. С другой стороны, флуктуации весового вектора вносят искажения в форму КНД и КУ по углу θ .

Потери в выходном отношении сигнал / шум, вызванные наличием флуктуаций весового вектора.

Флуктуации весового вектора ухудшают качество настройки адаптивных антенных решеток и эффективность их работы. В качестве одного из возможных показателей эффективности можно использовать потери в выходном отношении сигнал / шум, вызванные флуктуациями:

$$\tilde{\eta} = 10 \cdot \lg \left(\frac{SNR_{fl}}{SNR_{opt}} \right) \quad (2.6.8)$$

Как отмечалось в первой главе, здесь SNR_{fl} - выходное отношение сигнал / шум, найденное с учетом флуктуаций весового вектора; SNR_{opt} - выходное отношение сигнал / шум, найденное без учета флуктуаций весового вектора.

Используя формулу выходной мощности ААР, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму (2.4.9), а также, учитывая, что корреляционная матрица входных сигналов адаптивной антенной решетки состоит из суммы корреляционных матриц полезного сигнала, помех и собственного шума адаптивной антенны $\mathbf{R}_{XX} = \mathbf{R}_{SS} + \mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}$ и, соответственно, мощности полезного сигнала и помех на выходе антенны при постоянном стационарном весовом векторе имеют вид

$\langle |Z|^2 \rangle_S = \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{SS} \vec{W}_{CT}$, $\langle |Z|^2 \rangle_{\xi} = \vec{W}_{CT}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT}$ имеем следующее выражение потерь в выходном отношении сигнал / шум ААР из-за флуктуаций весового вектора:

$$\tilde{\eta} = 10 \cdot \lg \left(\frac{\vec{W}_{CT}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT}}{\vec{W}_{CT}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT} + \frac{1}{2} \mu \frac{1-3r^2}{1-r^2} Sp((\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}) \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT}} \right) \quad (2.6.9)$$

На рисунке 2.6 представлена зависимость потерь в выходном отношении сигнал / шум от величины коэффициента адаптации μ . График построен для адаптивной антенной решетки, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму с однократными линейными ограничениями ($L=1$) на диаграмму направленности, имеющей 7 элементов ($N=7$). Расстояние между элементами было равно половине длины волны ($d = \lambda / 2$). Для однократных ограничений матрица \mathbf{C} имеет размерность $[N \times 1]$ и равна $\mathbf{C} \equiv \vec{C}_1 = \vec{S}^*$, где \vec{S} - вектор волнового фронта полезного сигнала.

Предполагалось, что на ААР поступают статистически независимые полезный сигнал и одна помеха $r_S = r_{\xi} = 0.5$. Комплексные амплитуды входных сигналов формировались из двух независимых источников гауссовского “белого” шума. Углы прихода полезного сигнала и помехи были равны соответственно $\theta_S = 0^\circ$, $\theta_{\xi} = 45^\circ$, мощность помехи была в 100 раз больше мощности полезного сигнала. В каждом

элементе ААР присутствовал также некоррелированный собственный шум, мощность которого составляла 0.1 мощности полезного сигнала.

Из рисунка 2.6 можно видеть, что имеют место потери из-за флуктуаций весового вектора в выходном отношении сигнал / шум адаптивной антенной решетки с однократным линейным ограничением, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму. Из рисунка также следует, что по мере увеличения коэффициента адаптации μ растут потери, вызванные наличием флуктуаций весового вектора, причем потери в выходном отношении сигнал / шум больше в ААР с дискретным градиентным алгоритмом (кривая ААР gr), чем в адаптивной антенне с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки (кривая ААР smi).

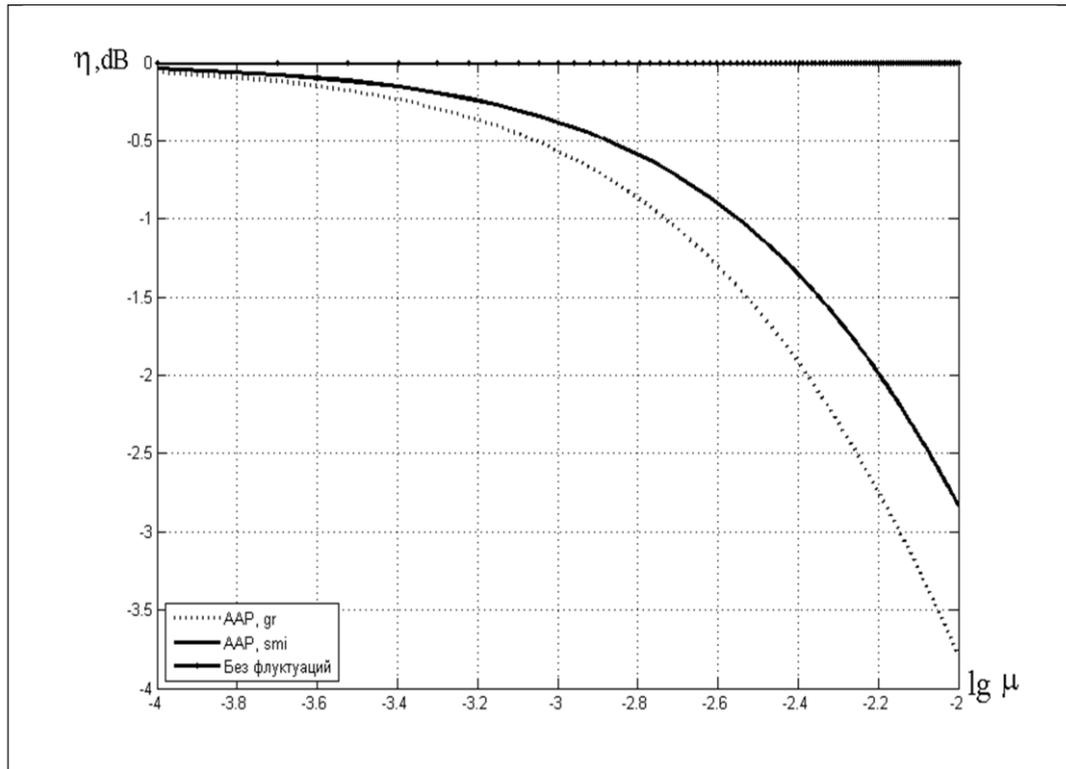


Рис.2.6. Потери η в выходном отношении сигнал / шум в зависимости от величины коэффициента адаптации μ . ААР с быстрым рекуррентным и дискретным градиентным алгоритмом настройки.

2.7. ИССЛЕДОВАНИЕ ААР, ИСПОЛЬЗУЮЩЕЙ АЛГОРИТМ ПРЯМОГО ОБРАЩЕНИЯ ВЫБОРОЧНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ [116].

Исследованию флуктуаций вектора весовых коэффициентов посвящено достаточно мало работ. Тем не менее, важность изучения данного вопроса признаётся большинством специалистов, деятельность которых связана с адаптивными антенными решётками [16-18]. В работах [67-68] была проанализирована адаптивная антенная решётка, настраиваемая по алгоритму прямого обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов. Данная оценка корреляционной матрицы входных сигналов была получена на основе выборок входных данных различной длины. В статьях показано, что замена истинной корреляционной матрицы её оценкой приводит к уменьшению выходной мощности адаптивной антенной решётки (эффекту «перекомпенсации»). Необходимо отметить, что в работах отсутствовали результаты численного моделирования, которые бы подтвердили описанные в статьях эффекты. В диссертационной работе приведены данные компьютерного моделирования, подтверждающие выводы этих статей.

Рассмотрим работу N - элементной ААР с многократными линейными ограничениями на ДН. Как указывалось в начале данной главы, оптимальный вектор весовых коэффициентов такой адаптивной антенной решётки, может быть представлен суммой двух слагаемых. Первое слагаемое принадлежит подпространству ограничений. Второе слагаемое принадлежит дополнительному подпространству:

$$\vec{W}_{opt} = \vec{W}_q - (\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{xx} \vec{W}_q. \quad (2.7.1)$$

Истинное значение мощности на выходе адаптивной антенной решётки при оптимальной работе ААР можно получить, если в выражение мощности выходного сигнала $p = \vec{W}^H \mathbf{R}_{xx} \vec{W}$ подставить формулу для оптимального вектора весовых коэффициентов (2.7.1). Тогда получим:

$$p = \vec{W}_q^H \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_q - \vec{W}_q^H \mathbf{R}_{xx} (\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{xx} \vec{W}_q. \quad (2.7.2)$$

Пусть на ААР поступают статистически независимые полезный сигнал и помеха. Тогда корреляционная матрица входных сигналов \mathbf{R}_{xx} может быть представлена в виде суммы сигнальной \mathbf{R}_{ss} и помеховой $\mathbf{R}_{\xi\xi}$ корреляционных матриц $\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{R}_{ss} + \mathbf{R}_{\xi\xi}$. В этом случае можно видеть, что выражение мощности на выходе ААР распадается на два слагаемых:

$p = p_s + p_\xi$, где

$$p_s = \vec{W}_q^H \mathbf{R}_{ss} \vec{W}_q \quad (2.7.3)$$

$$p_{\xi} = \bar{W}_q^H \mathbf{R}_{\xi\xi} \bar{W}_q - \bar{W}_q^H \mathbf{R}_{\xi\xi} (\mathbf{P} \mathbf{R}_{\xi\xi} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \mathbf{R}_{\xi\xi} \bar{W}_q \quad (2.7.4)$$

соответственно сигнальная и помеховая части выходной мощности.

Необходимо отметить, что на практике истинное значение \mathbf{R}_{xx} неизвестно и оценивается из данных. Предположим, что на адаптивную антенную решётку поступает M - векторов данных $\bar{x}(n)$, $n = 1, 2, \dots, M$. Выборочная оценка корреляционной матрицы $\hat{\mathbf{R}}_{xx}$ имеет вид:

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx} = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \bar{x}(n) \bar{x}^H(n). \quad (2.7.5)$$

Введём матрицу данных $\mathbf{X} = [\bar{x}(1) \bar{x}(2) \dots \bar{x}(M)]$. Тогда с учётом структуры входных сигналов, поступающих на адаптивную антенную решётку, получим, что данная матрица может быть представлена в виде суммы двух слагаемых:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{ss} + \mathbf{X}_{\xi\xi}, \quad (2.7.6)$$

где \mathbf{X}_{ss} - матрица данных полезного сигнала; $\mathbf{X}_{\xi\xi}$ - матрица данных помехи.

Выражение (2.7.5) в матричном виде запишется следующим образом:

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx} = \frac{1}{M} \mathbf{X} \mathbf{X}^H = \frac{1}{M} [\mathbf{X}_{ss} \mathbf{X}_{ss}^H + \mathbf{X}_{ss} \mathbf{X}_{\xi\xi}^H + \mathbf{X}_{\xi\xi} \mathbf{X}_{ss}^H + \mathbf{X}_{\xi\xi} \mathbf{X}_{\xi\xi}^H] \quad (2.7.7)$$

Из (2.7.7) можно видеть, что оценка корреляционной матрицы состоит из оценок автокорреляционных матриц полезного сигнала и помехи, а также из оценок взаимных корреляционных матриц входных сигналов. В выражении (2.7.7) используется только M - выборочных векторов. По этой причине некоррелированность полезного сигнала и помехи не достигается. В силу этого при дальнейшем анализе необходимо учитывать как автокорреляционные, так и кросскорреляционные слагаемые.

Получим выборочную оценку весового вектора \hat{W} . Для этого подставим выражение выборочной корреляционной матрицы (2.7.7) в формулу оптимального вектора весовых коэффициентов (2.7.1). Тогда имеем:

$$\hat{W} = \bar{W}_q - (\mathbf{P} \hat{\mathbf{R}}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \hat{\mathbf{R}}_{xx} \bar{W}_q = \bar{W}_q - (\mathbf{P} \mathbf{X}_{\xi\xi} \mathbf{X}_{\xi\xi}^H \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \mathbf{X}_{\xi\xi} (\mathbf{X}_{ss}^H + \mathbf{X}_{\xi\xi}^H) \bar{W}_q \quad (2.7.8)$$

Формула для оценки мощности выходного сигнала \hat{p} получается при подстановке в выражение мощности (2.7.2) выборочной оценки корреляционной матрицы $M^{-1} \mathbf{X} \mathbf{X}^H$ вместо её истинного значения \mathbf{R}_{xx} :

$$\hat{p} = \frac{1}{M} [\bar{W}_q^H \mathbf{X} \mathbf{X}^H \bar{W}_q - \bar{W}_q^H \mathbf{X} \mathbf{X}^H \mathbf{P} (\mathbf{P} \mathbf{X} \mathbf{X}^H \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \mathbf{X} \mathbf{X}^H \bar{W}_q] \quad (2.7.9)$$

В формуле (2.7.9) оценка мощности выходного сигнала \hat{p} не равна сумме оценок сигнальной и помеховой частей выходной мощности $\hat{p}_s + \hat{p}_{\xi}$, получаемых из

(2.7.3) и (2.7.4) посредством подстановки $\mathbf{R}_{ss} = M^{-1} \mathbf{X}_{ss} \mathbf{X}_{ss}^H$ и $\mathbf{R}_{\xi\xi} = M^{-1} \mathbf{X}_{\xi\xi} \mathbf{X}_{\xi\xi}^H$ (в (2.7.3) и (2.7.4) соответственно). Это связано с тем, что существуют также ненулевые кросскорреляционные слагаемые $\mathbf{X}_{ss} \mathbf{X}_{\xi\xi}^H$ и $\mathbf{X}_{\xi\xi} \mathbf{X}_{ss}^H$.

Оценка мощности выходного сигнала \hat{p} является случайной величиной. По этой причине она имеет свои статистические характеристики. В [65] показано, что полученная оценка мощности является смещённой и её среднее значение имеет вид:

$$E\{\hat{p}\} = \frac{M - K}{M} p, \quad (2.7.10)$$

где K - число адаптивных степеней свободы; M - число векторов данных ($M \geq K + 1$). Множитель $(M - K)/M$ определяет сходимость при адаптации среднего значения выходной мощности как функции от M и представляет собой потери, возникающие из-за оценивания корреляционной матрицы \mathbf{R}_{xx} .

Таким образом, при замене корреляционной матрицы \mathbf{R}_{xx} её оценкой среднее значение выходной мощности ААР уменьшается по сравнению с точным значением мощности выходного сигнала. Возникает эффект «перекомпенсации».

РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.

Моделировалась (на MatLab 4.0) 7-ми элементная узкополосная ААР с однократным линейным ограничением на ДН в направлении полезного сигнала. Расстояние между элементами ААР было равно половине длины волны входных сигналов.

В этом случае матрица \mathbf{C} имеет размерность $[N \times 1]$ и равна $\mathbf{C} = \vec{C}_1 = \vec{S}^*$, где $\vec{S} = \{\exp\{-j\pi \sin \Theta_s\}, \exp\{-j2\pi \sin \Theta_s\}, \dots, \exp\{-j7\pi \sin \Theta_s\}\}$ - вектор - фазор полезного сигнала. Весовой вектор адаптивной антенной решетки настраивался по алгоритму непосредственного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы, т.е. в выражение оптимального вектора весовых коэффициентов подставлялась выборочная оценка корреляционной матрицы входных сигналов. Выходной сигнал ААР находили посредством умножения массива входных данных, (на основе которого была получена данная выборочная оценка корреляционной матрицы), на вектор весовых коэффициентов, найденный с помощью этой же оценки.

На ААР подавалась сумма полезного сигнала, приходящего с направления, нормального к плоскости решётки, и одной помехи, приходящей под углом 45° к нормали решётки. Комплексные амплитуды входных сигналов формировались из двух независимых источников гауссовского «белого» шума. Мощность помехи была в 10 раз больше мощности полезного сигнала. В ААР присутствовал также собственный шум, мощность которого составляла 0.1 мощности полезного сигнала.

Определение статистических характеристик адаптивной антенной решётки при компьютерном моделировании велось путём усреднения по ансамблю из 2000 реализаций. Для нахождения эффектов, описанных в статье [67], длина одной реализации менялась и была равна последовательно 10, 20, 50 и 100 выборкам.

При компьютерном моделировании определялись значения мощности выходного сигнала ААР в зависимости от количества выборок входных данных. Найденное значение мощности выходного сигнала адаптивной антенной решётки (для заданной длины реализации входных сигналов) является случайной величиной. Среднее значение мощности на выходе антенны было получено путём усреднения значений мощности, найденных на основе ансамбля реализаций входных сигналов.

Полученное среднее значение мощности выходного сигнала ААР сравнивалось с аналитически найденным средним, представленным в выражении (2.7.10):

$$E\{\hat{p}\} = \frac{M - K}{M} p, \text{ где } p = \bar{W}_{opt}^H \mathbf{R}_{xx} \bar{W}_{opt} - \text{выходная мощность адаптивной антенны при}$$

оптимальном значении вектора весовых коэффициентов (2.7.1), полученном на основе истинного значения корреляционной матрицы. Численный расчёт оптимального значения мощности выходного сигнала ААР для нашей задачи дал значение $p = 4.9718$. Число адаптивных степеней свободы для адаптивной антенной решётки, имеющей 7 элементов, равно $K = N - 1 = 7 - 1 = 6$.

График зависимости среднего значения выходной мощности ААР $E\{\hat{p}\}$ от числа выборок входных данных M показан на рис. 2.7. Кривая (1) представляет теоретические значения мощности выходного сигнала ААР, найденные согласно выражению (2.7.10). Результаты компьютерного моделирования иллюстрируются кривой (2). Значение мощности на выходе ААР при оптимальном векторе весовых коэффициентов показано кривой (3). Из рисунка можно видеть, что при увеличении количества выборок входных сигналов мощность на выходе ААР приближается к своему оптимальному значению. Таким образом, достаточно хорошее согласование теоретических результатов и результатов компьютерного моделирования подтверждает справедливость статистического анализа.

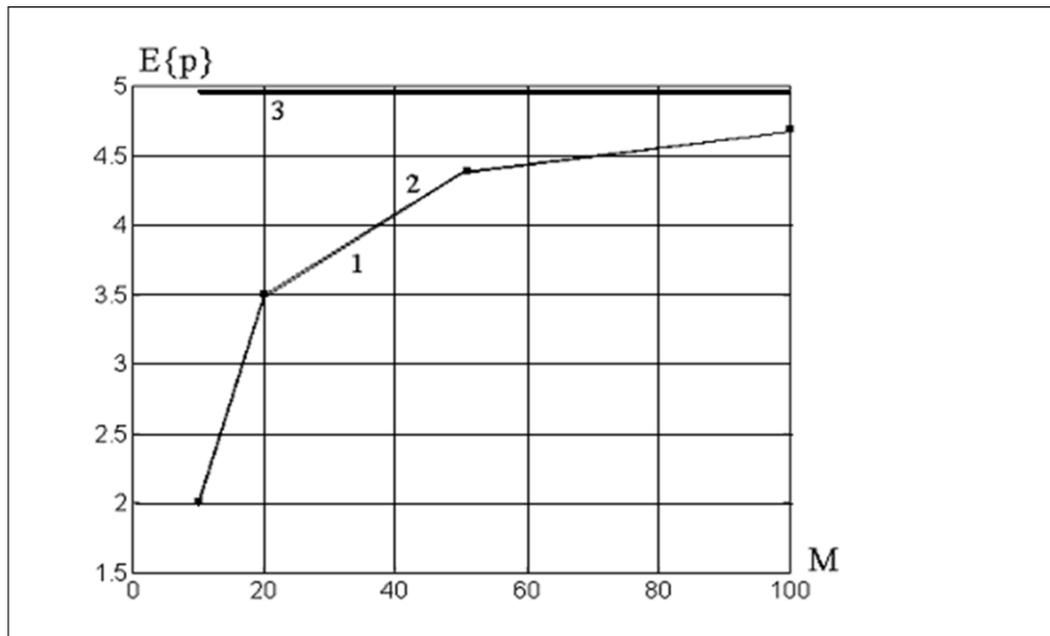


Рис. 2.7. Зависимость среднего значения мощности $E\{p\}$ на выходе антенной решётки от числа выборок входных данных M (1 – теория, 2 – компьютерное моделирование, 3 - значение выходной мощности при оптимальном весовом векторе).

2.8. ВЫВОДЫ [116].

Проведённое во второй главе исследование статистических характеристик адаптивной антенной решетки с алгоритмом рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов с учетом флуктуаций настраиваемого весового вектора позволяет сделать следующие выводы:

1. Статистический анализ влияния флуктуаций весовых коэффициентов на характеристики адаптивных антенных решёток без нелинейной функции в цепи корреляционной обратной связи с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки и различными коэффициентами автокорреляции между отсчётами входных сигналов необходимо проводить методами теории возмущений. Данные методы позволяют учесть негауссовскую статистическую зависимость между весовым вектором и вектором входных сигналов.
2. Анализ статистических характеристик ААР, настраивающихся по быстрым алгоритмам, показал, что флуктуации вектора весовых коэффициентов приводят к искажениям выходного сигнала адаптивных антенных решёток, его мощности и спектра. Данные искажения определяются величиной коэффициентов автокорреляции между отсчётами полезного сигнала и помехи. Статистический анализ позволил показать, что в адаптивных антенных решетках с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки, также как и в ААР с дискретным градиентным алгоритмом, могут иметь место из-за флуктуаций весового вектора как эффект рассогласования [51], так и эффект «перекомпенсации» [49,65,116].
3. Исследование корреляционной матрицы флуктуаций весового вектора в случае входных сигналов с различными коэффициентами автокорреляции между отсчётами для ААР с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки позволило проследить влияние коэффициентов автокорреляции полезного сигнала и помех на величину собственных значений данной матрицы. Исследование показало, что флуктуации вектора весовых коэффициентов в ААР, настраиваемой по быстрому рекуррентному алгоритму, неизотропны: отсутствуют в направлениях ограничений, а внутри подпространства ограничений определяются величиной ненулевых собственных чисел матрицы $[(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+]^*$ и направлением соответствующих им собственных векторов, а также значениями коэффициентов автокорреляции между отсчётами полезного сигнала и помех.
4. Исследование «флуктуационной» диаграммы направленности адаптивной антенной решётки, настраиваемой по быстрому рекуррентному алгоритму, в случае

выходных сигналов с различными коэффициентами автокорреляции между отсчетами позволило аналитически изучить влияние величин коэффициентов автокорреляции полезного сигнала и помех на значения данной ДН. Флуктуационная ДН адаптивной антенной решётки с однократным линейным ограничением минимальна в направлении помехи и имеет нулевое значение в направлении прихода полезного сигнала (направлении ограничений). Величина флуктуационной диаграммы направленности при различных углах прихода пробного сигнала определяется значениями коэффициентов автокорреляции между отсчетами полезного сигнала и помех, приходящих на адаптивную антенну.

5. Флуктуации весовых коэффициентов приводят к ухудшению коэффициента направленного действия и коэффициента усиления адаптивной антенной решётки, настраиваемой по быстрому рекуррентному алгоритму – искажениям данных статистических характеристик по углу θ .
6. Флуктуации весового вектора приводят к потерям в выходном отношении сигнал/шум адаптивной антенной решетки с однократным линейным ограничением, настраиваемой по быстрому рекуррентному алгоритму. По мере увеличения коэффициента адаптации μ растут потери, вызванные наличием флуктуаций весового вектора. Потери в выходном отношении сигнал/шум меньше в ААР с быстрым рекуррентным алгоритмом, чем в адаптивной антенне с дискретным градиентным алгоритмом настройки.

Глава 3. Статистический анализ характеристик адаптивной антенной решетки, настраиваемой по алгоритму Хэбба.

Алгоритм Хэбба является классическим алгоритмом настройки искусственной нейронной сети (ИНС) [75,82]. Он позволяет (в зависимости от формы записи алгоритма) выделять самый мощный или самый слабый по мощности сигнал из суммы полезного сигнала и помех, поступающих на приёмные элементы адаптивной системы. По этой причине алгоритм Хэбба может быть использован для решения задач пространственной фильтрации. Другие алгоритмы настройки искусственной нейронной сети менее пригодны для решения задач пространственной фильтрации. Они могут быть более подходящими для решения другого класса задач – распознавания образов, задач прогнозирования и пр. [75,82]. Кроме того, алгоритм Хэбба не является градиентным и к тому же имеет высокую степень нелинейности по весовому вектору. Весовой вектор входит в уравнение алгоритма в третьей степени.

В силу этого представляет интерес разработка методов статистического анализа с учетом флуктуаций весового вектора адаптивных антенных решеток, настраиваемых по алгоритму Хэбба – классическому нейросетевому алгоритму, нелинейному по весовому вектору и не являющемуся градиентным. Данные методы представляют собой переходный этап от анализа адаптивных антенных решеток с градиентными алгоритмами настройки к искусственным нейронным сетям, в которых для настройки используются не только градиентные алгоритмы. Разработка методов статистического анализа ААР с алгоритмом Хэбба даёт возможность в дальнейшем получить методы анализа искусственных нейронных сетей с учетом флуктуаций весовых коэффициентов.

3.1. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК АДАПТИВНОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ, НАСТРАИВАЮЩЕЙСЯ ПО АЛГОРИТМУ ХЭББА [138,142].

Рассмотрим работу N -элементной адаптивной антенной решетки. Пусть настройка вектора весовых коэффициентов \vec{W} данной системы осуществляется по алгоритму Хэбба и в дискретном времени имеет вид:

$$\vec{W}(k+1) = \vec{W}(k) + \mu \cdot y(k) \cdot [\vec{X}^*(k) - y^*(k) \cdot \vec{W}(k)]. \quad (3.1.1)$$

Здесь $\vec{X}(k)$ – вектор входных сигналов в момент времени k , $y(k)$ – выходной сигнал ААР, μ – масштабный коэффициент, определяющий скорость сходимости алгоритма адаптации (1), "*" – знак комплексного сопряжения.

Данный алгоритм осуществляет успешное функционирование при выполнении двух уравнений ограничений [75,77,82]:

$$|W_-| \leq |W_i| \leq |W_+|, \quad (3.1.2)$$

$$\sum_{i=1}^N |W_i| = const = C. \quad (3.1.3)$$

Адаптивная антенная решетка, настраиваемая по алгоритму Хэбба, будет выделять один полезный сигнал, а искусственная нейронная сеть с алгоритмом Хэбба дает возможность выделить все приходящие на её приемные элементы сигналы. Это становится возможным при условии, что число слоев искусственной нейронной сети равно числу входных сигналов. Каждый последующий слой ИНС выделяет следующий по мощности входной сигнал, начиная от самого мощного и заканчивая самым слабым по мощности сигналом, или, наоборот – от самого слабого по мощности сигнала к самому мощному, в зависимости от формы записи алгоритма Хэбба [75,82].

Проведём статистический анализ уравнения (3.1.1) методами теории возмущений, которые подробно изложены в работах [65,107]. Введём следующие обозначения:

$$\vec{W} = \langle \vec{W} \rangle + \tilde{\vec{W}}, \quad \mathbf{M}_{xx}(k) \equiv \mathbf{R}_{xx} + \tilde{\Phi}(k) \quad (3.1.4)$$

где случайный вектор весовых коэффициентов \vec{W} и стохастическая матрица входных сигналов $\mathbf{M}_{xx} \equiv \vec{X}^*(k) \vec{X}^T(k)$ представлены в виде сумм их средних значений $\langle \vec{W} \rangle$, \mathbf{R}_{xx} и флуктуационных составляющих $\tilde{\vec{W}}(k)$, $\tilde{\Phi}(k)$.

Найдём уравнение для среднего значения весового вектора $\langle \vec{W} \rangle$ вблизи стационарного состояния. Для этой цели усредним выражение (3.1.1), используя для этого обозначения (3.1.4). Тогда получим:

$$\begin{aligned} \langle \vec{W}(k+1) \rangle = & \langle \vec{W}(k) \rangle + \mu \langle \vec{X}^*(k) \vec{X}^T(k) \vec{W}(k) \rangle - \\ & - \mu \langle |y(k)|^2 \vec{W}(k) \rangle \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Для определения стационарного среднего значения весового вектора $\vec{W}_{CT} \equiv \langle \vec{W}(k) \rangle$ и других статистических характеристик ААР воспользуемся методом теории возмущений по параметру μ , который будем полагать малым ($\mu \ll 1$). В

качестве нулевого приближения возьмём среднее значение весового вектора $\langle \vec{W} \rangle_0 \equiv \vec{W}_0$, получающееся из уравнения (3.1.5), в приближении «прямого размыкания» всех смешанных моментов:

$$\begin{aligned} \vec{W}_0(k+1) &= \vec{W}_0(k) + \mu \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_0(k) - \\ &- \mu \langle |y(k)|^2 \rangle \vec{W}_0(k) \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Стационарный весовой вектор в нулевом приближении будет удовлетворять уравнению:

$$\mathbf{R}_{xx} \vec{W}_0 = \langle |y(k)|^2 \rangle \vec{W}_0 \quad (3.1.7)$$

Из уравнения (3.1.7) следует, что стационарный весовой вектор алгоритма Хэбба является собственным вектором корреляционной матрицы входных сигналов \mathbf{R}_{xx} , соответствующим собственному числу $\lambda = \langle |y(k)|^2 \rangle$ данной матрицы.

Проведём анализ статистических характеристик адаптивной антенной решётки при учёте флуктуаций весовых коэффициентов. Для этого получим уравнение для вектора поправки к нулевому приближению:

$$\vec{W}_{\Pi} \equiv \vec{W}(k) - \vec{W}_0. \quad (3.1.8)$$

Вычтем из формулы (3.1.1) выражение (3.1.6). Тогда получим:

$$\begin{aligned} \vec{W}_{\Pi}(k+1) &= \vec{W}_{\Pi}(k) + \mu \vec{X}^*(k) \vec{X}^T(k) \vec{W}(k) - \mu \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_0(k) - \\ &- \mu |y(k)|^2 \vec{W}(k) + \mu \langle |y(k)|^2 \rangle \vec{W}_0(k) \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Для дальнейшего преобразования выражения (3.1.8) учтём, что в стационарном состоянии мгновенное значение выходной мощности стремится к своему среднему значению:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |y|^2 = \langle |y|^2 \rangle_{CT}. \quad (3.1.10)$$

Тогда, учитывая (3.1.9), выражение (3.1.8) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \vec{W}_{\Pi}(k+1) &= \vec{W}_{\Pi}(k) - \mu \langle |y|^2 \rangle_{CT} \vec{W}_{\Pi}(k) + \\ &+ \mu \vec{X}^*(k) \vec{X}^T(k) \vec{W}(k) - \mu \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_0(k) \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Учтём также, что стохастическая матрица входных сигналов имеет вид:

$$\mathbf{M}_{xx} \equiv \vec{X}^*(k) \vec{X}^T(k) = \mathbf{R}_{xx} + \tilde{\Phi}_{xx}(k).$$

Это позволяет переписать формулу (3.1.10) следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{W}_{\Pi}(k+1) &= \vec{W}_{\Pi}(k) - \mu \langle |y|^2 \rangle_{CT} \vec{W}_{\Pi}(k) + \\ &+ \mu \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{\Pi}(k) + \mu \tilde{\Phi}_{xx}(k) \vec{W}(k) \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Перейдём в \mathbf{Q} -матричное представление, диагонализирующее корреляционную матрицу входных сигналов \mathbf{R}_{xx} :

$$\bar{\Psi} = \mathbf{Q}^{-1}\bar{W}_{\Pi}; \bar{W}_{\Pi} = \mathbf{Q}\bar{\Psi}; \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^H, \quad (3.1.13)$$

где $\bar{\Psi}$ - вектор поправки к нулевому приближению в \mathbf{Q} -матричном представлении.

Подставляя формулу (3.1.12) в выражение (3.1.11), получим вид уравнения для вектора поправки в \mathbf{Q} -матричном представлении:

$$\bar{\Psi}(k+1) = (\mathbf{I} - \mu \langle |y|^2 \rangle_{CT}) \mathbf{I} + \mu \Lambda) \bar{\Psi}(k) + \mu \mathbf{Q}^{-1} \tilde{\Phi}_{xx}(k) \bar{W}(k) \quad (3.1.14)$$

$$\text{Здесь } \Lambda = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix}, \quad (3.1.15)$$

- матрица собственных значений корреляционной матрицы входных сигналов

\mathbf{R}_{xx} :

$$\lambda_{\max} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_N = \lambda_{\min}.$$

Решение уравнения (3.1.14) может быть записано в виде:

$$\bar{\Psi}(k+1) = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\lambda}(n) \mathbf{Q}^{-1} \tilde{\Phi}_{xx}(k-n) [\bar{W}_0 + \mathbf{Q} \bar{\Psi}(k-n)]. \quad (3.1.16)$$

Здесь $\hat{\lambda}(k)$ - диагональная матрица, имеющая вид, представленный ниже:

$$\hat{\lambda}(k) = \begin{bmatrix} (1 - \mu \langle |y|^2 \rangle_{CT} + \mu \lambda_1)^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (1 - \mu \langle |y|^2 \rangle_{CT} + \mu \lambda_2)^k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & (1 - \mu \langle |y|^2 \rangle_{CT} + \mu \lambda_N)^k \end{bmatrix} \quad (3.1.17)$$

Обсудим сходимость элементов матрицы $\hat{\lambda}(k)$ при больших значениях k (в стационарном режиме работы). Рассмотрим сходимость элемента матрицы $\hat{\lambda}_{11}(k)$ и учтём, что $\langle |y|^2 \rangle_{CT} = \lambda_1$. Тогда:

$$\hat{\lambda}_{11}(k) = (1 - \mu \langle |y|^2 \rangle_{CT} + \mu \lambda_1)^k = (1 - \mu \lambda_1 + \mu \lambda_1)^k = 1^k = 1. \quad (3.1.18)$$

Из выражения (3.1.18) следует, что элемент $\hat{\lambda}_{11}(k)$ при сколь угодно больших k будет равен единице.

Рассмотрим сходимость произвольного диагонального элемента матрицы $\hat{\lambda}_{ii}(k)$, $i \neq 1$ (остальные элементы матрицы $\hat{\lambda}(k)$, не лежащие на диагонали, равны нулю):

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\lambda}_{ii}(k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - \mu \langle |y|^2 \rangle_{CT} + \mu \lambda_i)^k = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - \mu(\lambda_1 - \lambda_i))^k = 0 \end{aligned} \quad , \text{ т.к. } 0 < \mu(\lambda_1 - \lambda_i) < 1 \quad (3.1.19)$$

Таким образом, из формул (3.1.18) и (3.1.19) следует, что элементы матрицы $\hat{\lambda}(k)$ являются быстро спадающими с ростом k . Исключение составляет элемент $\hat{\lambda}_{11}(k)$, который при любых значениях k равен единице.

Обобщая сказанное выше, можно видеть, что при $k \rightarrow \infty$ матрица $\hat{\lambda}(k)$ принимает вид:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\lambda}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.1.20)$$

Ряд теории возмущений по малому параметру μ ($\mu \ll 1$) можно построить, итерируя уравнение (3.1.15). В результате вектор $\vec{\Psi}(k)$ и соответствующий ему вектор поправки $\vec{W}_{\Pi}(k) = \mathbf{Q}\vec{\Psi}(k)$ будут представлены в виде суммы слагаемых, каждое из которых соответствует приближениям различного порядка:

$$\vec{\Psi} = \vec{\Psi}_1 + \vec{\Psi}_2 + \vec{\Psi}_3 + \dots, \quad (3.1.21)$$

$$\vec{W}_{\Pi}(k) = \mathbf{Q}\vec{\Psi}(k) = \vec{W}_{\Pi 1}(k) + \vec{W}_{\Pi 2}(k) + \vec{W}_{\Pi 3}(k) + \dots \quad (3.1.22)$$

Члены ряда (3.1.21) соответственно будут равны:

$$\begin{aligned} \vec{\Psi}_1(k+1) &= \mu \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\lambda}(n) \mathbf{Q}^{-1} \tilde{\Phi}_{xx}(k-n) \vec{W}_{0CT} \\ \vec{\Psi}_2(k+1) &= \mu \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\lambda}(n) \mathbf{Q}^{-1} \tilde{\Phi}_{xx}(k-n) \mathbf{Q} \vec{\Psi}_1(k-n) = \\ &= \mu^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{\lambda}(n) \mathbf{Q}^{-1} \tilde{\Phi}_{xx}(k-n) \mathbf{Q} \hat{\lambda}(m) \mathbf{Q}^{-1} \tilde{\Phi}_{xx}(k-n-m-1) \vec{W}_{0CT} \\ \vec{\Psi}_{p+1}(k+1) &= \mu \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\lambda}(n) \mathbf{Q}^{-1} \tilde{\Phi}_{xx}(k-n) \mathbf{Q} \vec{\Psi}_p(k-n) \end{aligned} \quad ; \quad (3.1.23)$$

Для вычисления средних значений ряда поправок (3.1.22) необходимо задать конкретный вид временной зависимости вектора входных сигналов. Ниже рассмотрим случай узкополосной антенной решётки и будем считать, что на приёмные элементы ААР поступают полезный сигнал и помехи с различными

коэффициентами автокорреляции между соседними отсчётами. Корреляционную функцию полезного сигнала зададим формулой:

$$\mathbf{R}_{SS}(k, k+n) \equiv \langle \vec{S}^*(k) \vec{S}^T(k+n) \rangle = \mathbf{R}_{SS} r_S^{|n|},$$

а корреляционную функцию помех выражением:

$$\mathbf{R}_{\xi\xi}(k, k+n) \equiv \langle \vec{\xi}^*(k) \vec{\xi}^T(k+n) \rangle = \mathbf{R}_{\xi\xi} r_\xi^{|n|},$$

где r_S, r_ξ - коэффициенты корреляции между соседними отсчётами полезного сигнала и помехи соответственно. Общая корреляционная матрица входных сигналов, с учётом некоррелированности (между собой) полезного сигнала и помех, примет следующий вид:

$$\mathbf{R}_{xx}(k, k+n) \equiv \langle \vec{X}^*(k) \vec{X}^T(k+n) \rangle = \mathbf{R}_{SS}(k, k+n) + \mathbf{R}_{\xi\xi}(k, k+n) = \mathbf{R}_{SS} r_S^{|n|} + \mathbf{R}_{\xi\xi} r_\xi^{|n|}. \quad (3.1.24)$$

В следующих разделах данной статьи получены аналитические выражения для основных статистических характеристик адаптивной антенной решётки, настраиваемой по алгоритму Хэбба.

3.2 КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА ААР ПРИ УЧЕТЕ ФЛУКТУАЦИЙ ВЕСОВОГО ВЕКТОРА [137-138,142].

Рассмотрим влияние флуктуаций весовых коэффициентов на корреляционные характеристики сигнала на выходе ААР. Из формул (3.1.4) и (3.1.23) видно, что в первом (борновском) приближении поправка к среднему значению весового вектора равна нулю $\langle \vec{\Psi}_1(k) \rangle = 0$, $\langle \vec{W}_{\text{Пл}}(k) \rangle = 0$, поскольку $\langle \vec{\Phi}_{xx}(k) \rangle = 0$. Будем предполагать, что вектор входных сигналов $\vec{X}(k)$ является комплексным гауссовским случайным вектором.

Корреляционная функция выходного сигнала ААР может быть записана в виде [49]:

$$\begin{aligned} K_y(m, m+n) &\equiv \langle y^H(m)y(m+n) \rangle = \\ &= \langle [\vec{X}^T(m)\vec{W}(m)]^H [\vec{X}^T(m+n)\vec{W}(m+n)] \rangle = \\ &= \langle \vec{W}^H(m)\vec{X}^*(m)\vec{X}^T(m+n)\vec{W}(m+n) \rangle \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Для того, чтобы учесть наличие флуктуаций в ААР, подставим в данную формулу выражения (3.1.4), представляющие стохастическую матрицу входных сигналов и весовой вектор в виде сумм их средних значений и флуктуационных составляющих.

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} K_y(m, m+n) &= K_{yCT}[n] + 2\vec{W}_{CT} \langle \vec{\Phi}_{xx}(m, m+n)\vec{W}(m+n) \rangle + \\ &+ \langle \vec{W}^H(m)\mathbf{R}_{xx}(m, m+n)\vec{W}(m+n) \rangle + \langle \vec{W}^H(m)\vec{\Phi}_{xx}(m, m+n)\vec{W}(m+n) \rangle \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Здесь:

$$K_{yCT}[n] \equiv \vec{W}_{CT}^H \langle \vec{X}^*(m)\vec{X}^T(m+n) \rangle \vec{W}_{CT} = r_s^{|n|} \langle |y|^2 \rangle_{0s} + r_\xi^{|n|} \langle |y|^2 \rangle_{0\xi} \quad (3.2.3)$$

корреляционная функция выходного сигнала при постоянном стационарном весовом векторе \vec{W}_{CT} .

Вычислим в первом (борновском) приближении каждое слагаемое, входящее в формулу для корреляционной функции выходного сигнала (3.2.2). Для этого учтём, что в первом приближении можно считать, что $\vec{W} \cong \vec{W}_{\text{Пл}} = \mathbf{Q}\vec{\Psi}_1$. Подставляя из формулы (3.1.23) выражение для $\vec{\Psi}_1$ в каждое слагаемое формулы (3.2.2) и проводя преобразования, получаем следующие формулы для слагаемых, входящих в $K_y(m, m+n)$. Первое слагаемое представлено выражением (3.2.3). Второе слагаемое имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \vec{W}_{CT}^H \langle \tilde{\Phi}_{xx}(m, m+n) \vec{W}(m+n) \rangle = \mu \langle |y|^2 \rangle_{0s} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) \frac{r_s^n}{1-r_s} + \\
& + \mu \langle |y|^2 \rangle_{0\xi} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) \frac{r_\xi^n}{1-r_\xi} + \\
& + \mu \langle |y|^2 \rangle_{0s} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) \left[\frac{r_\xi r_s^n - r_\xi^{n+1}}{r_s - r_\xi} + \frac{r_\xi^{n+1} r_s}{1 - r_s r_\xi} \right] + \\
& + \mu \langle |y|^2 \rangle_{0\xi} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) \left[\frac{r_s r_\xi^n - r_s^{n+1}}{r_\xi - r_s} + \frac{r_s^{n+1} r_\xi}{1 - r_s r_\xi} \right]
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Третье слагаемое может быть описано следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{W}^H(m) \mathbf{R}_{xx}(m, m+n) \vec{W}(m+n) \rangle = \mu^2 (\langle |y|^2 \rangle_{0s} r_s^{|n|} + \langle |y|^2 \rangle_{0\xi} r_\xi^{|n|}) \times \\
& \{ \langle |y|^2 \rangle_{0s} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) \left[\frac{1+r_s^2}{1-r_s^2} - r_s^{2n} \frac{r_s^2}{(1-r_s^2)^2} \right] + \\
& + \langle |y|^2 \rangle_{0\xi} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) \left[\frac{1+r_\xi^2}{1-r_\xi^2} - r_\xi^{2n} \frac{r_\xi^2}{(1-r_\xi^2)^2} \right] + \\
& + \langle |y|^2 \rangle_{0s} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) \left[1 - \frac{(r_s r_\xi)^{n+1}}{(1-r_s r_\xi)^2} \right] + \\
& + \langle |y|^2 \rangle_{0\xi} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) \left[1 - \frac{(r_s r_\xi)^{n+1}}{(1-r_s r_\xi)^2} \right] \}
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Четвертое слагаемое можно представить выражением:

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{W}^H(m) \tilde{\Phi}_{xx}(m, m+n) \vec{W}(m+n) \rangle = \\
& = \mu^2 \sum_{i=s}^{\xi} r_i^n \frac{r_i^2 (3 - r_i^2 - r_i^{2n})}{(1 - r_i^2)^2} (\langle |y|^2 \rangle_{0i})^3 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mu^2 \sum_{s \square \xi} \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{r_s^{n+2}(r_s^n - r_s^n r_\xi^2 + 1) + r_s r_\xi^{n+1}(3 - r_s^2 - r_s^{2n})}{(1 - r_s r_\xi)(1 - r_s^2)} + \right. \\ & \left. + \frac{r_s^{n+1} r_\xi (2 - r_s^n r_\xi^n)}{(1 - r_s r_\xi)^2} + \frac{r_s^{n+2}(r_\xi + 1)}{(r_s - r_\xi)(1 - r_s^2)} - \right. \\ & \left. - \frac{2r_s^{n+2} r_\xi}{(r_s - r_\xi)(1 - r_s r_\xi)} \right) (\langle |y|^2 \rangle_{0s})^2 < |y|^2 \rangle_{0\xi} \end{aligned} \right\} + \\
& + \mu^2 \sum_{i=s}^{\xi} \left\{ \frac{r_i^2 (2 - r_i^2)}{(1 - r_i^2)} r_i^n Sp^2(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ii}) \langle |y|^2 \rangle_{0i} \right\} + \\
& + \mu^2 \sum_{s \square \xi} \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{-r_\xi^{n+1} r_s^2}{(r_s - r_\xi)(1 - r_s r_\xi)} + \frac{r_\xi r_s^{n+2}}{(r_s - r_\xi)(1 - r_s^2)} + \right. \\ & \left. + \frac{r_s^{n+2}}{(1 - r_s r_\xi)(1 - r_s^2)} \right) Sp^2(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) \langle |y|^2 \rangle_{0\xi} \end{aligned} \right\} + \\
& + \mu^2 \sum_{s \square \xi} \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{r_s^{n+2} r_\xi}{(r_s - r_\xi)(1 - r_s^2)} - \frac{r_s^2 r_\xi^{1+n}}{(r_s - r_\xi)(1 - r_s r_\xi)} + \right. \\ & \left. + \frac{r_s r_\xi^{n+1}}{(1 - r_s r_\xi)^2} + \frac{r_s^{n+1} r_\xi (2 - r_s^2)}{(1 - r_s r_\xi)(1 - r_s^2)} \right) \times \\ & \left. \times Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) \langle |y|^2 \rangle_{0s} \right\} \end{aligned} \quad (3.2.6)
\end{aligned}$$

Здесь под обозначением $s \square \xi$ понимается, что суммирование выражения, стоящего под знаком суммы, производится с симметричным выражением, где коэффициенты полезного сигнала r_s и помехи r_ξ поменялись местами.

Суммируя приведённые слагаемые (3.2.3)-(3.2.6) и проводя преобразования, получаем, что выражение для корреляционной функции выходного сигнала является суммой трёх слагаемых:

$$K_y[n] = K_s[n] + K_\xi[n] + K_{CM}[n], \quad (3.2.7)$$

где

$$\begin{aligned}
K_s[n] = & \langle |y|^2 \rangle_{0s} r_s^{|n|} \times \left\{ 1 + \mu \frac{2}{1-r_s} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) + \mu \frac{2r_\xi}{r_s - r_\xi} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) + \right. \\
& + \mu^2 \frac{1+r_s^2}{1-r_s^2} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) \langle |y|^2 \rangle_s + \mu^2 Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) \langle |y|^2 \rangle_{0s} + \\
& + \mu^2 \frac{r_s^2(3-r_s^2)}{(1-r_s^2)^2} (\langle |y|^2 \rangle_{0s})^2 + \mu^2 \frac{r_s^2(2-r_s^2)}{1-r_s^2} Sp^2(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) + \\
& + \mu^2 \frac{r_s r_\xi^2}{(r_s - r_\xi)(1-r_s r_\xi)} Sp^2(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) + \mu^2 \frac{r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} \left(\frac{2}{1-r_s^2} + \frac{r_s}{r_s - r_\xi} \right) \times \\
& \times Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) \left. \right\} + \\
& + \langle |y|^2 \rangle_{0s} r_\xi^{|n|} \times \left\{ 2\mu \frac{r_\xi(1-r_s^2)}{(r_s - r_\xi)(1-r_s r_\xi)} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) - \right. \\
& - \mu^2 \frac{r_\xi^3(1-r_s^2)}{(1-r_\xi^2)(r_s - r_\xi)(1-r_s r_\xi)} Sp^2(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) - \\
& - \mu^2 \frac{r_s r_\xi^2(1-r_s^2)}{(r_s - r_\xi)(1-r_s r_\xi)^2} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) \left. \right\} + \\
& + (\langle |y|^2 \rangle_{0s})^2 r_s^{3|n|} \left\{ -\mu^2 \frac{r_s^2}{(1-r_s^2)^2} \right\} \times \left\{ Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) + \langle |y|^2 \rangle_{0s} \right\} + \\
& + (\langle |y|^2 \rangle_{0s})^2 r_s^{2|n|} r_\xi^{|n|} \times \left\{ -\mu^2 \frac{r_s r_\xi}{(1-r_s r_\xi)^2} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) \right\}
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

-«сигнальная часть корреляционной функции выходного сигнала ААР;

$$\begin{aligned}
K_\xi[n] = & \langle |y|^2 \rangle_{0\xi} r_\xi^{|n|} \times \left\{ 1 + \mu \frac{2}{1-r_\xi} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) - \mu \frac{2r_s}{r_s - r_\xi} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) + \right. \\
& + \mu^2 \frac{1+r_\xi^2}{1-r_\xi^2} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) \langle |y|^2 \rangle_{0\xi} + \mu^2 Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) \langle |y|^2 \rangle_{0\xi} + \\
& + \mu^2 \frac{r_\xi^2(3-r_\xi^2)}{(1-r_\xi^2)^2} (\langle |y|^2 \rangle_{0\xi})^2 + \mu^2 \frac{r_\xi^2(2-r_\xi^2)}{1-r_\xi^2} Sp^2(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) - \\
& - \mu^2 \frac{r_\xi r_s^2}{(r_s - r_\xi)(1-r_s r_\xi)} Sp^2(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) - \\
& - \mu^2 \frac{r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} \times \left\{ \frac{-2}{1-r_\xi^2} + \frac{r_\xi}{r_s - r_\xi} \right\} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) \left. \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \langle |y|^2 \rangle_{0\xi} r_s^{|n|} \times \left\{ 2\mu \frac{r_s(1-r_\xi^2)}{(r_s-r_\xi)(1-r_s r_\xi)} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) + \right. \\
& + \mu^2 \frac{r_s^3(1-r_\xi^2)}{(1-r_s^2)(r_s-r_\xi)(1-r_s r_\xi)} Sp^2(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) + \\
& + \mu^2 \frac{r_s^2 r_\xi(1-r_\xi^2)}{(r_s-r_\xi)(1-r_s r_\xi)^2} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) \left. \right\} + \\
& + (\langle |y|^2 \rangle_{0\xi})^2 r_\xi^{3|n|} \left\{ -\mu^2 \frac{r_\xi^2}{(1-r_\xi^2)^2} \right\} \times \left\{ Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) - \langle |y|^2 \rangle_{0s} \right\} + \\
& + (\langle |y|^2 \rangle_{0\xi})^2 r_\xi^{2|n|} r_s^{|n|} \times \left\{ -\mu^2 \frac{r_s r_\xi}{(1-r_s r_\xi)^2} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) \right\}
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

--«помеховая» часть корреляционной функции выходного сигнала ААР;

$$\begin{aligned}
K_{CM}[n] = & \mu^2 \sum_{s \leftrightarrow \xi} \left[\langle |y|^2 \rangle_{0s} \langle |y|^2 \rangle_{0\xi} r_s^{|n|} \times \right. \\
& \left. \times \left\{ \frac{1+r_\xi^2}{1-r_\xi^2} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) + Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) \right\} \right] + \\
& + \mu^2 \sum_{s \leftrightarrow \xi} \left[\langle |y|^2 \rangle_{0s} \langle |y|^2 \rangle_{0\xi} r_s^{|n|} r_\xi^{2|n|} \times \right. \\
& \left. \times \left\{ \frac{r_\xi^2(2r_s-1) + r_s r_\xi (r_\xi^2 - r_s r_\xi^3 - 1)}{(1-r_\xi^2)^2 (1-r_s r_\xi)^2} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) \right\} \right] + \\
& + \mu^2 \sum_{s \leftrightarrow \xi} \left[(\langle |y|^2 \rangle_{0s})^2 \langle |y|^2 \rangle_{0\xi} r_s^{|n|} \times \frac{r_s}{(1-r_s r_\xi)(r_s-r_\xi)} \times \right. \\
& \left. \times \left\{ r_s \frac{1+r_s(1-r_\xi-r_\xi^2)}{1-r_s^2} - \frac{2r_\xi^2(1-r_s^2)}{1-r_s r_\xi} \right\} \right] + \\
& + \mu^2 \sum_{s \leftrightarrow \xi} \left[(\langle |y|^2 \rangle_{0s})^2 \langle |y|^2 \rangle_{0\xi} r_s^{2|n|} \times \left\{ \frac{r_s^2(1-r_\xi^2)}{(1-r_s r_\xi)(1-r_s^2)} \right\} \right] + \\
& + \mu^2 \sum_{s \leftrightarrow \xi} \left[(\langle |y|^2 \rangle_{0s})^2 \langle |y|^2 \rangle_{0\xi} r_s^{2|n|} r_\xi^{|n|} \times \left\{ \frac{-r_s r_\xi}{(1-r_s r_\xi)^2} \left(1 + \frac{1-r_s r_\xi}{1-r_s^2} \right) \right\} \right] + \\
& + \mu^2 \sum_{s \leftrightarrow \xi} \left[(\langle |y|^2 \rangle_{0s})^2 \langle |y|^2 \rangle_{0\xi} r_\xi^{|n|} \times \left\{ \frac{r_s r_\xi (3-r_s^2)}{(1-r_s r_\xi)(1-r_s^2)} \right\} \right]
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

--«смешанная» часть корреляционной функции выходного сигнала ААР.

Первые два слагаемых в выражении (3.2.7) представляют собой вклад полезного сигнала и помехи в корреляционную функцию выходного сигнала адаптивной антенной решётки, настраиваемой по алгоритму Хэбба. Из формул (3.2.8) – (3.2.9) можно видеть, что только первое слагаемое в первой скобке каждого выражения является корреляционной функцией выходного сигнала ААР при постоянном стационарном весовом векторе. Остальные слагаемые данных выражений «флуктуационные» - обусловлены флуктуациями настраиваемых весовых коэффициентов и имеют первый и второй порядок малости по коэффициенту адаптации μ . Необходимо отметить, что слагаемых второго порядка малости существенно больше, чем слагаемых, пропорциональных коэффициенту адаптации в первой степени.

Появление третьего слагаемого в формуле, представляющей общий вид корреляционной функции на выходе ААР с алгоритмом Хэбба (3.2.7), обусловлено негауссовской статистической зависимостью между вектором весовых коэффициентов и вектором входных сигналов, которая приводит в процессе обработки сигналов в адаптивной антенне к взаимодействию «сигнальной» и «помеховой» компонент входного сигнала. Механизмом, передающим это взаимодействие в выходной сигнал ААР, служат флуктуации весового вектора. Из формулы (3.2.10) можно видеть, что «смешанная» часть корреляционной функции выходного сигнала является слагаемым второго порядка малости по коэффициенту адаптации μ .

Таким образом, учёт флуктуаций весового вектора при анализе корреляционной функции выходного сигнала адаптивной антенной решётки, настраиваемой по существенно нелинейному (третьего порядка по весовому вектору) алгоритму – алгоритму Хэбба, в случае полезного сигнала и помехи с различными коэффициентами автокорреляции между отсчётами приводит к появлению «флуктуационных» слагаемых в выражении выходной корреляционной функции, а также к эффекту взаимодействия полезного сигнала и помехи в процессе обработки сигналов в адаптивной антенне.

Рассмотрим вид корреляционной функции выходного сигнала адаптивной антенной решётки, настраиваемой по алгоритму Хэбба, в случае прихода на неё полезного сигнала и помех с одинаковыми коэффициентами автокорреляции между отсчётами $r_s = r_\xi = r$. В этом случае выражение для корреляционной функции существенно упрощается и приобретает следующую форму:

$$K_y[n] = A \cdot r^{|n|} + C \cdot r^{3|n|}, \quad (3.2.11)$$

Здесь A - коэффициент при первой степени временной части корреляционной матрицы входных сигналов ААР:

$$\begin{aligned}
 A = & \langle |y|^2 \rangle_{CT} \times \left\{ 1 + \frac{2\mu}{1-r} Sp(\vec{W}_{CT}^* \vec{W}_{CT}^H R_{XX}) + \right. \\
 & + \mu^2 \frac{1+r^2}{1-r^2} Sp(\vec{W}_{CT}^* \vec{W}_{CT}^H R_{XX}) \langle |y|^2 \rangle_{CT} + \\
 & \left. + \mu^2 \frac{3r^2 - r^4}{(1-r^2)^2} (\langle |y|^2 \rangle_{CT})^2 + \mu^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2(\vec{W}_{CT}^* \vec{W}_{CT}^H R_{XX}) \right\}
 \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

C - коэффициент при третьей степени временной части корреляционной матрицы входных сигналов ААР:

$$C = -\mu^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} (\langle |y|^2 \rangle_{CT})^2 \times \{ Sp(\vec{W}_{CT}^* \vec{W}_{CT}^H R_{XX}) + \langle |y|^2 \rangle_{CT} \}. \quad (3.2.13)$$

Из формул (3.2.11) – (3.2.13) следует, что в наиболее простом случае прихода на адаптивную антенную решётку, настраивающуюся по алгоритму Хэбба, полезного сигнала и помех с одинаковыми коэффициентами автокорреляции между отсчётами учёт флуктуаций настраиваемого весового вектора приводит к появлению дополнительных («флуктуационных») слагаемых в выражении выходной корреляционной функции (все слагаемые, кроме первого, в коэффициенте A и весь коэффициент C). Необходимо отметить, что коэффициент C имеет отрицательные значения, что ещё более искажает сигнал на выходе антенны.

Таким образом, учёт флуктуаций весового вектора в адаптивной антенной решётке, настраивающейся по алгоритму Хэбба, в наиболее простом случае прихода на ААР полезного сигнала и помех с одинаковыми коэффициентами автокорреляции между отсчётами приводит к появлению дополнительных («флуктуационных») слагаемых не только при первой степени временной части корреляционной матрицы входных сигналов $r^{|n|}$, но также и при третьей степени $r^{3|n|}$ временной части этой матрицы, которая отсутствует в структуре входного сигнала адаптивной антенной решётки.

При вычислении средних, в которые входят кратные суммы, использовалось предположение о малости времени корреляции входных сигналов по сравнению со временем релаксации системы. Это условие в несколько видоизмененной форме можно записать так:

$$\begin{aligned} & \mu \frac{1}{1-r^2} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX}) + \mu \frac{r^2}{1-r^2} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX}) = \\ & = \mu \frac{1+r^2}{1-r^2} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX}) \ll 1 \end{aligned}$$

Данная формула накладывает ограничения на величину параметров μ, r и представляет собой достаточное условие применимости методов теории возмущений для анализа влияния флуктуаций на статистические характеристики адаптивной антенной решетки, настраиваемой по алгоритму Хэбба.

Если выразить данную формулу через геометрические характеристики помеховой обстановки и адаптивной антенной решетки, то она примет вид:

$$\mu \frac{1+r^2}{1-r^2} \pi_1 N \ll 1,$$

где π_1 - мощность выделяемого антенной сигнала.

3.3. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И МОДЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОМОМЕНТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ААР С АЛГОРИТМОМ ХЭББА С УЧЕТОМ ФЛУКТУАЦИЙ ВЕСОВОГО ВЕКТОРА [137-138,140].

Получим выражение для выходной мощности ААР, настраивающейся по алгоритму Хэбба. Для этого положим $n = 0$ в формулах корреляционной функции (3.2.7) – (3.2.10). Тогда имеем:

$$\langle |y|^2 \rangle_{CT} = \langle |y|^2 \rangle_s + \langle |y|^2 \rangle_\xi + \gamma_{CM}, \quad (3.3.1)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} \langle |y|^2 \rangle_s = & \langle |y|^2 \rangle_{0s} \times \left\{ 1 + \mu \frac{2}{1-r_s} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) + \mu \frac{2r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) + \right. \\ & + \mu^2 \frac{r_\xi^2 (1+r_s r_\xi)}{(1-r_\xi^2)(1-r_s r_\xi)} Sp^2(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) + \mu^2 \frac{r_s^2 (2-r_s^2)}{1-r_s^2} Sp^2(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) + \\ & + \mu^2 \frac{r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} \frac{(1-r_s^2) + 2(1-r_s r_\xi)}{1-r_s^2} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) \left. \right\} + \\ & + (\langle |y|^2 \rangle_{0s})^2 \times \left\{ \mu^2 \frac{1-r_s^2 (1+r_s^2)}{(1-r_s^2)^2} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) + \right. \\ & + \mu^2 \frac{1-3r_s r_\xi + r_s^2 r_\xi^2}{(1-r_s r_\xi)^2} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) \left. \right\} + \\ & + (\langle |y|^2 \rangle_{0s})^3 \times \left\{ \mu^2 \frac{r_s^2 (2-r_s^2)}{(1-r_s^2)^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

-«сигнальная» часть выходной мощности;

$$\begin{aligned} \langle |y|^2 \rangle_\xi = & \langle |y|^2 \rangle_{0\xi} \times \left\{ 1 + \mu \frac{2}{1-r_\xi} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) + \mu \frac{2r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) + \right. \\ & + \mu^2 \frac{r_s^2 (1+r_s r_\xi)}{(1-r_s^2)(1-r_s r_\xi)} Sp^2(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) + \mu^2 \frac{r_\xi^2 (2-r_\xi^2)}{1-r_\xi^2} Sp^2(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) + \\ & + \mu^2 \frac{r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} \frac{(1-r_\xi^2) + 2(1-r_s r_\xi)}{1-r_\xi^2} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) \left. \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\langle |y|^2 \rangle_{0\xi})^2 \times \left\{ \mu^2 \frac{1 - r_\xi^2 (1 + r_\xi^2)}{(1 - r_\xi^2)^2} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) + \right. \\
& + \mu^2 \frac{1 - 3r_s r_\xi + r_s^2 r_\xi^2}{(1 - r_s r_\xi)^2} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) \left. \right\} + \\
& + (\langle |y|^2 \rangle_{0\xi})^3 \times \left\{ \mu^2 \frac{r_\xi^2 (2 - r_\xi^2)}{(1 - r_\xi^2)^2} \right\}
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

-«помеховая» часть выходной мощности;

$$\begin{aligned}
\gamma_{CM} = & \mu^2 \langle |y|^2 \rangle_{0s} \langle |y|^2 \rangle_{0\xi} \sum_{s \leftrightarrow \xi} \left[\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{1 - r_s^2} \left(2 - \frac{r_s r_\xi}{(1 - r_s r_\xi)^2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{r_s^2}{(1 - r_s^2)^2} \left(1 - \frac{r_\xi (2 - r_s)}{(1 - r_s r_\xi)^2} \right) \right\} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) \right] + \\ & + \mu^2 \sum_{s \leftrightarrow \xi} \left[\langle |y|^2 \rangle_{0s} \right]^2 \langle |y|^2 \rangle_{0\xi} \times \frac{(1 - r_s r_\xi) (2r_s^3 - 3r_s r_\xi^2 - r_s^3 r_\xi) + r_s^3 r_\xi^2 (1 - r_s^2 - r_\xi^2)}{(1 - r_s r_\xi)^2 (1 - r_s^2) (r_s - r_\xi)} \end{aligned} \right] \tag{3.3.4}
\end{aligned}$$

-«смешанная» часть выходной мощности.

Из формул (3.3.1) – (3.3.4) можно видеть, что в составе выражения выходной мощности ААР, настраивающейся по алгоритму Хэбба, также имеется «сигнальная» и «помеховая» составляющие, а также составляющая, обусловленная взаимодействием полезного сигнала и помехи в процессе обработки сигналов в данной антенне.

Из выражений (3.3.2) – (3.3.3) следует, что только первое слагаемое в первой скобке каждой из формул представляет «сигнальную» и «помеховую» части мощности при постоянном стационарном весовом векторе. Остальные слагаемые обусловлены присутствием флуктуаций весового вектора. «Флуктуационные» слагаемые в выражениях (3.3.2) – (3.3.3) имеют первый и второй порядок малости по коэффициенту адаптации μ . Необходимо отметить также, что «флуктуационные» слагаемые, находящиеся при второй степени «сигнальной» и «помеховой» мощности, найденных при постоянном стационарном весовом векторе, могут иметь отрицательные значения.

Обратимся к формуле (3.3.4). Из неё следует, что «смешанная» часть выходной мощности – это выражение, появление которого обусловлено флуктуациями весового вектора. Все слагаемые данного выражения имеют второй порядок малости

по коэффициенту адаптации μ . «Смешанная» часть выходной мощности также может иметь отрицательные значения.

Наличие слагаемых в выражении выходной мощности, имеющих отрицательные значения, создаёт принципиальную возможность появления эффекта «перекompенсации» [49,65] на выходе адаптивной антенной решётки, настраиваемой по алгоритму Хэбба – ситуации, когда выходная мощность оказывается меньше мощности, найденной при постоянном стационарном весовом векторе.

При положительных значениях «флуктуационных» слагаемых, входящих в выражение выходной мощности, на выходе адаптивной антенны с алгоритмом Хэбба будет иметь место эффект рассогласования [17], т.е. ситуация, когда выходная мощность оказывается больше значений мощности, найденной при постоянном стационарном весовом векторе.

Рассмотрим выражение выходной мощности в наиболее простом случае прихода на адаптивную антенную решетку, настраиваемую по алгоритму Хэбба, входных сигналов с одинаковыми коэффициентами автокорреляции между отсчётами $r_s = r_\xi = r$. Для этого необходимо положить $n = 0$ в формуле корреляционной функции выходного сигнала (3.2.11). Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \langle |y|^2 \rangle_{CT} = & \langle |y|^2 \rangle_0 \times \left\{ 1 + \frac{2\mu}{1-r} Sp(\vec{W}_{CT}^* \vec{W}_{CT}^H R_{XX}) \right\} + \\ & + \mu^2 \frac{1+r^2}{1-r^2} Sp(\vec{W}_{CT}^* \vec{W}_{CT}^H R_{XX}) \langle |y|^2 \rangle_0 + \\ & + \mu^2 \frac{3r^2 - r^4}{(1-r^2)^2} (\langle |y|^2 \rangle_0)^2 + \mu^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2(\vec{W}_{CT}^* \vec{W}_{CT}^H R_{XX}) \} - \\ & - \mu^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} (\langle |y|^2 \rangle_0)^2 \times \{ Sp(\vec{W}_{CT}^* \vec{W}_{CT}^H R_{XX}) + \langle |y|^2 \rangle_0 \} \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Из формулы (3.3.5) следует, что флуктуации весового вектора приводят к появлению дополнительных слагаемых, причём знак этих слагаемых как положительный, так и отрицательный. По этой причине в ААР, настраиваемой по алгоритму Хэбба, выходная мощность может быть как больше, так и меньше мощности, найденной при постоянном стационарном весовом векторе, т.е. может иметь место как эффект рассогласования [17], так и эффект «перекompенсации» [49,65].

Таким образом, анализ выходной мощности при учёте флуктуаций весового вектора показал, что в адаптивной антенной решётке, настраиваемой по алгоритму Хэбба, в процессе обработки сигналов имеет место искажение выходного сигнала вследствие флуктуаций, что проявляет себя в появлении эффекта рассогласования

или эффекта «перекомпенсации» в зависимости от уровня автокоррелированности отсчётов полезного сигнала и помехи.

РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.

Моделировалась N - элементная полуволновая линейная узкополосная адаптивная антенная решётка ($N=7$), работающая по алгоритму Хэбба (3.1.1). Предполагалось, что на ААР поступают статистически независимые два входных сигнала с одинаковыми коэффициентами корреляции между отсчётами $r_S = r_\xi = 0$. Углы прихода первого и второго сигналов были соответственно равны $\Theta_S=45^0$ и $\Theta_\xi=0^0$. Мощность первого сигнала была в 100 раз больше мощности второго сигнала. В ААР присутствовал также собственный шум, мощность которого составляла 0.1 (-10 dB) мощности второго сигнала. Нормирование значений мощностей входных сигналов было осуществлено относительно мощности собственного шума ААР, которая была приведена к единице.

Проводилось сравнение теоретически найденного относительного изменения величины выходной мощности адаптивной антенной решётки, настраивающейся по алгоритму Хэбба,

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2\mu}{1-r} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX}) + \frac{\mu^2 r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX}) + \\ + \mu^2 \frac{1-r^2-r^4}{(1-r^2)^2} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX}) \langle |Z|^2 \rangle_0 + \\ + \mu^2 \frac{2r^2-r^4}{(1-r^2)^2} (\langle |Z|^2 \rangle_0)^2 \end{array} \right\} \times 100\%$$

с соответствующим значением, полученным на основании компьютерного модели-

$$\text{рования: } M = \frac{\langle |Z|^2 \rangle_{CT} - \langle |Z|^2 \rangle_0}{\langle |Z|^2 \rangle_0} \cdot 100\% \quad (\text{рис. 3.1}).$$

Определение мощности выходного сигнала ААР при компьютерном моделировании велось путём усреднения по ансамблю 20000 реализаций выходного случайного процесса. Длина реализации была равна 100 дискретным временным отсчетам. Стартовыми весовыми коэффициентами служили \vec{W}_{CT} , определяемые формулой (3.1.7). Исследовалась зависимость величины M от значения μ - коэффициента адаптации.

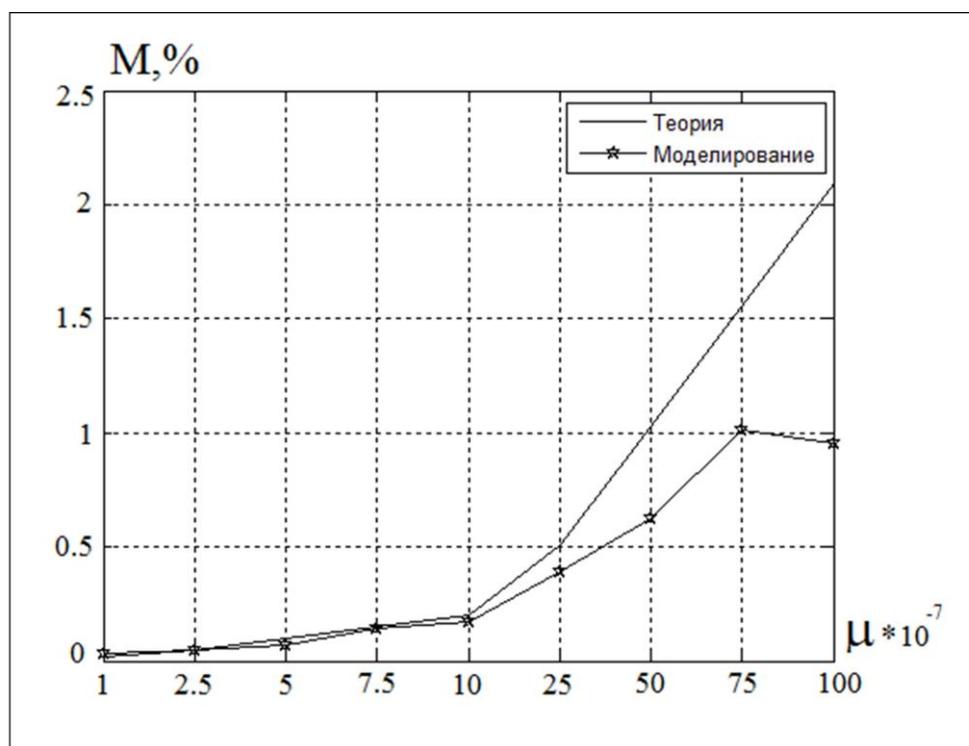


Рис. 3.1. Зависимость относительного изменения мощности выходного сигнала адаптивной антенной решётки M от коэффициента адаптации μ .

Из сравнения теоретических кривых и кривых, полученных методом компьютерного моделирования, рисунка 3.1 можно видеть, что влияние флуктуаций весовых коэффициентов на мощность сигнала на выходе ААР зависит от величины коэффициента адаптации μ . По мере роста коэффициента адаптации увеличивается величина рассогласования выходной мощности со своим значением, полученным при постоянном стационарном весовом векторе. Имеет место эффект misadjustment, $M > 0$. Некоторые различия между теоретическими и экспериментальными данными обусловлены конечным временем усреднения при получении модельных значений мощности и наличием в ААР собственного шума. Различия между теоретическими результатами и результатами компьютерного моделирования при величинах коэффициента адаптации $\mu \geq 5 \times 10^{-6}$ обусловлены несоблюдением малости параметра μ , по которому строился ряд теории возмущений.

МАТРИЦА КОВАРИАЦИИ ВЕКТОРА ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ.

Ковариационную матрицу флуктуаций весового вектора в стационарном режиме работы в совпадающие моменты времени в первом (борновском) приближении можно представить следующим образом [49,65]:

$$\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{w}}} \equiv \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{w}}}(m, m) \equiv \langle \tilde{\mathbf{W}}^*(m) \tilde{\mathbf{W}}^T(m) \rangle \approx \mathbf{Q}^* \langle \tilde{\Psi}_1^* \tilde{\Psi}_1^T \rangle \mathbf{Q}^T. \quad (3.3.6)$$

Используя формулы (3.1.23) для поправок к весовому вектору можно получить вид матрицы ковариации флуктуаций весовых коэффициентов:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{w}}}(k, k) &= \\ &= \mu^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \langle (\mathbf{Q} \hat{\lambda}(n) \mathbf{Q}^{-1})^* \tilde{\Phi}_{XX}(k-n) (\tilde{\mathbf{W}}_{cm}^* \tilde{\mathbf{W}}_{cm}^T) \tilde{\Phi}_{XX}^T(k-m) (\mathbf{Q} \hat{\lambda}(m) \mathbf{Q}^{-1})^T \rangle. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Проводя операцию усреднения и учитывая, что адаптивная антенная решётка является узкополосной, получаем выражение:

$$\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{w}}}(k, k) = \mu^2 \langle |y|^2 \rangle_{cm} \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} Sp(\tilde{\mathbf{W}}_{cm}^* \tilde{\mathbf{W}}_{cm}^T \mathbf{R}_{XX}) (\tilde{\mathbf{W}}_{cm}^* \tilde{\mathbf{W}}_{cm}^H)^*. \quad (3.3.8)$$

Для того, чтобы понять смысл выражения (3.3.8), вспомним, что стационарным весовым вектором адаптивной антенной решётки, настраивающейся по алгоритму Хэбба, является собственный вектор $\tilde{\mathbf{q}}_1$ корреляционной матрицы входных сигналов \mathbf{R}_{XX} , соответствующий ее максимальному собственному числу λ_1 . Тогда формула (3.3.8) переписется в виде:

$$\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{w}}}(k, k) = \mu^2 \langle |y|^2 \rangle_{cm} \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} Sp(\tilde{\mathbf{q}}_1^* \tilde{\mathbf{q}}_1^T \mathbf{R}_{XX}) (\tilde{\mathbf{q}}_1^* \tilde{\mathbf{q}}_1^H)^* \quad (3.3.9)$$

Направление максимальных флуктуаций весового вектора определяется собственным вектором матрицы $\mathbf{K}_{\vec{w}}$, соответствующим её максимальному собственному числу. Как следует из вышеприведённого выражения, корреляционная матрица флуктуаций весового вектора $\mathbf{K}_{\vec{w}}$ прямо пропорциональна матрице $(\vec{q}_1^* \vec{q}_1^H)^*$, составленной на основе оптимального весового вектора \vec{q}_1 антенной решётки, настраиваемой по алгоритму Хэбба. По этой причине направления флуктуаций весовых коэффициентов определяются собственными векторами данной матрицы.

Прежде, чем проанализировать направление максимальных флуктуаций весового вектора в ААР с алгоритмом Хэбба, вспомним, что оптимальный вектор \vec{q}_1 данной антенной решётки является оптимальной оценкой вектора самого мощного из входных сигналов $\vec{X}_1(k)$ [75,82]. Матрица, сформированная на основе такого вектора, имеет единственное ненулевое собственное число, которому в качестве собственного вектора соответствует вектор \vec{q}_1 . Это означает, что в адаптивной антенной решётке с алгоритмом Хэбба флуктуации весовых коэффициентов будут максимальны в направлении самого мощного из входных сигналов.

В разделе, приведённом ниже, рассматриваются спектральные характеристики (а именно, спектральная плотность мощности) выходного сигнала ААР с алгоритмом Хэбба при учёте флуктуаций весовых коэффициентов.

3.4. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ МОЩНОСТИ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА ААР, НАСТРАИВАЮЩЕЙСЯ ПО АЛГОРИТМУ ХЭББА, ПРИ УЧЕТЕ ФЛУКТУАЦИЙ ВЕСОВОГО ВЕКТОРА [140,142].

Дискретный спектр мощности выходного сигнала может быть получен из выражения корреляционной функции по формуле [17]:

$$S_y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_y[n] z^{-n}, \quad (3.4.1)$$

где $z = \exp\{j\Omega\}$.

Учитывая, что корреляционная функция выходного сигнала (3.2.7) состоит из трёх частей – «сигнальной», «помеховой» и «смешанной», последовательно получим три слагаемых, составляющих спектральную плотность мощности. Для наших целей удобно переписать все части корреляционной функции в виде полиномов по степеням коэффициентов автокорреляции между отсчётами полезного сигнала r_s и поме-

хи r_ξ . Тогда «сигнальная» часть корреляционной функции запишется следующим образом:

$$K_s[n] = A_s r_s^{|n|} + B_s r_\xi^{|n|} + C_s r_s^{3|n|} + D_s r_s^{2|n|} r_\xi^{|n|}, \quad (3.4.2)$$

здесь:

$$\begin{aligned} A_s = & \langle |y|^2 \rangle_{0s} \times \left\{ 1 + \mu \frac{2}{1-r_s} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) + \mu \frac{2r_\xi}{r_s - r_\xi} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) + \right. \\ & + \mu^2 \langle |y|^2 \rangle_{0s} \left(\frac{1+r_s^2}{1-r_s^2} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) + Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) \right) + \\ & + \mu^2 \frac{r_s^2(3-r_s^2)}{(1-r_s^2)^2} (\langle |y|^2 \rangle_{0s})^2 + \mu^2 \frac{r_s^2(2-r_s^2)}{1-r_s^2} Sp^2(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) + \\ & + \mu^2 \frac{r_s r_\xi^2}{(r_s - r_\xi)(1 - r_s r_\xi)} Sp^2(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) + \\ & \left. + \mu^2 \frac{r_s r_\xi}{1 - r_s r_\xi} \left(\frac{2}{1-r_s^2} + \frac{r_s}{r_s - r_\xi} \right) Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) \right\} \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

-коэффициент при первой степени временной части корреляционной функции полезного сигнала $r_s^{|n|}$;

$$\begin{aligned} B_s = & \langle |y|^2 \rangle_{0s} \times \left\{ -2\mu \frac{r_\xi(1-r_s^2)}{(r_s - r_\xi)(1 - r_s r_\xi)} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) - \right. \\ & - \mu^2 \frac{r_\xi^3(1-r_s^2)}{(1-r_\xi^2)(r_s - r_\xi)(1 - r_s r_\xi)} Sp^2(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) - \\ & \left. - \mu^2 \frac{r_s r_\xi^2(1-r_s^2)}{(r_s - r_\xi)(1 - r_s r_\xi)^2} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) \right\} - \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

-коэффициент при первой степени временной части корреляционной функции помехи $r_\xi^{|n|}$;

$$C_s = -\mu^2 \frac{r_s^2}{(1-r_s^2)^2} (\langle |y|^2 \rangle_{0s})^2 \{ Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) + \langle |y|^2 \rangle_{0s} \} - \quad (3.4.5)$$

-коэффициент при третьей степени временной части корреляционной функции полезного сигнала $r_s^{3|n|}$;

$$D_s = (\langle |y|^2 \rangle_{0_s})^2 \times \left\{ -\mu^2 \frac{r_s r_\xi}{(1 - r_s r_\xi)^2} \right\} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) - \quad (3.4.6)$$

-коэффициент при произведении второй степени временной части корреляционной функции полезного сигнала $r_s^{2|n|}$ и первой степени временной части корреляционной функции помехи $r_\xi^{|n|}$.

Подставляя формулы (3.4.2) – (3.4.6) в выражение дискретного спектра мощности (3.4.1), получаем следующую формулу «сигнальной» части спектральной плотности мощности на выходе ААР, настраивающейся по алгоритму Хэбба, с учётом флуктуаций весовых коэффициентов:

$$S_s(\Omega) = A_s \frac{1 - r_s^2}{1 - 2r_s \cos \Omega + r_s^2} + B_s \frac{1 - r_\xi^2}{1 - 2r_\xi \cos \Omega + r_\xi^2} + \quad (3.4.7)$$

$$+ C_s \frac{1 - r_s^6}{1 - 2r_s^3 \cos \Omega + r_s^6} + D_s \frac{1 - (r_s^2 r_\xi)^2}{1 - 2(r_s^2 r_\xi) \cos \Omega + (r_s^2 r_\xi)^2}.$$

Поступая аналогичным образом, имеем следующую запись «помеховой» части корреляционной функции на выходе адаптивной антенны с алгоритмом Хэбба:

$$K_\xi[n] = A_\xi r_s^{|n|} + B_\xi r_\xi^{|n|} + Q_\xi r_\xi^{3|n|} + E_\xi r_s^{|n|} r_\xi^{2|n|}, \quad (3.4.8)$$

где коэффициенты корреляционной функции имеют вид:

$$A_\xi = \langle |y|^2 \rangle_{0_\xi} \times \left\{ 2\mu \frac{r_s(1 - r_\xi^2)}{(r_s - r_\xi)(1 - r_s r_\xi)} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) + \right.$$

$$+ \mu^2 \frac{r_s^3(1 - r_\xi^2)}{(1 - r_s^2)(r_s - r_\xi)(1 - r_s r_\xi)} Sp^2(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) +$$

$$\left. + \mu^2 \frac{r_s^2 r_\xi(1 - r_\xi^2)}{(r_s - r_\xi)(1 - r_s r_\xi)^2} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) \right\} - \quad (3.4.9)$$

-коэффициент при первой степени временной части корреляционной функции полезного сигнала $r_s^{|n|}$;

$$B_\xi = \langle |y|^2 \rangle_{0_\xi} \times \left\{ 1 + \mu \frac{2}{1 - r_\xi} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) - \mu \frac{2r_s}{r_s - r_\xi} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) + \right.$$

$$\left. + \mu^2 \langle |y|^2 \rangle_{0_\xi} \left(\frac{1 + r_\xi^2}{1 - r_\xi^2} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) + Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \mu^2 \frac{r_\xi^2 (3 - r_\xi^2)}{(1 - r_\xi^2)^2} (\langle |y|^2 \rangle_{0_\xi})^2 + \mu^2 \frac{r_\xi^2 (2 - r_\xi^2)}{1 - r_\xi^2} Sp^2(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) - \\
& - \mu^2 \frac{r_\xi r_s^2}{(r_s - r_\xi)(1 - r_s r_\xi)} Sp^2(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) - \\
& - \mu^2 \frac{r_s r_\xi}{1 - r_s r_\xi} \left(\frac{-2}{1 - r_\xi^2} + \frac{r_\xi}{r_s - r_\xi} \right) Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) \}
\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

-коэффициент при первой степени временной части корреляционной функции помехи $r_\xi^{|n|}$;

$$Q_\xi = -\mu^2 \frac{r_\xi^2}{(1 - r_\xi^2)^2} (\langle |y|^2 \rangle_{0_\xi})^2 \{ Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) + \langle |y|^2 \rangle_{0_\xi} \} - \tag{3.4.11}$$

-коэффициент при третьей степени временной части корреляционной функции помехи $r_\xi^{3|n|}$;

$$E_\xi = (\langle |y|^2 \rangle_{0_\xi})^2 \times \left\{ -\mu^2 \frac{r_s r_\xi}{(1 - r_s r_\xi)^2} \right\} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) - \tag{3.4.12}$$

-коэффициент при произведении первой степени временной части корреляционной функции полезного сигнала $r_s^{|n|}$ и второй степени временной части корреляционной функции помехи $r_\xi^{2|n|}$.

Тогда «помеховая» часть спектральной плотности мощности ААР, настраивающейся по алгоритму Хэбба, запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
S_\xi(\Omega) = & A_\xi \frac{1 - r_s^2}{1 - 2r_s \cos \Omega + r_s^2} + B_\xi \frac{1 - r_\xi^2}{1 - 2r_\xi \cos \Omega + r_\xi^2} + \\
& + Q_\xi \frac{1 - r_\xi^6}{1 - 2r_\xi^3 \cos \Omega + r_\xi^6} + E_\xi \frac{1 - (r_s r_\xi^2)^2}{1 - 2(r_s r_\xi^2) \cos \Omega + (r_s r_\xi^2)^2} .
\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

И, наконец, запишем вид «смешанной» части спектральной плотности мощности на выходе адаптивной антенной решётки, настраивающейся по алгоритму Хэбба, с учётом флуктуаций весового вектора. Для этого представим «смешанную» часть корреляционной функции выходного сигнала в виде полинома по степеням коэффициентов автокорреляции между отсчётами полезного сигнала r_s и помехи r_ξ :

$$K_{CM}[n] = A_{CM} r_s^{|n|} + B_{CM} r_\xi^{|n|} + D_{CM} r_s^{2|n|} r_\xi^{|n|} + E_{CM} r_s^{|n|} r_\xi^{2|n|} + F_{CM} r_s^{2|n|} + G_{CM} r_\xi^{2|n|} \tag{3.4.14}$$

Тогда соответствующая данному выражению спектральная плотность мощности имеет вид:

$$\begin{aligned}
S_{CM}(\Omega) = & A_{CM} \frac{1-r_s^2}{1-2r_s \cos \Omega + r_s^2} + B_{CM} \frac{1-r_\xi^2}{1-2r_\xi \cos \Omega + r_\xi^2} + \\
& + D_{CM} \frac{1-(r_s^2 r_\xi^2)^2}{1-2(r_s^2 r_\xi^2) \cos \Omega + (r_s^2 r_\xi^2)^2} + E_{CM} \frac{1-(r_s r_\xi^2)^2}{1-2(r_s r_\xi^2) \cos \Omega + (r_s r_\xi^2)^2} + . \quad (3.4.15) \\
& + F_{CM} \frac{1-r_s^4}{1-2r_s^2 \cos \Omega + r_s^4} + G_{CM} \frac{1-r_\xi^4}{1-2r_\xi^2 \cos \Omega + r_\xi^4}
\end{aligned}$$

Здесь:

$$\begin{aligned}
A_{CM}(r_s; r_\xi) = & \mu^2 \langle |y|^2 \rangle_{0s} \langle |y|^2 \rangle_{0\xi} \times \left\{ \frac{1+r_\xi^2}{1-r_\xi^2} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{\xi\xi}) + Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) \right\} + \\
& + \mu^2 (\langle |y|^2 \rangle_{0s})^2 \langle |y|^2 \rangle_{0\xi} \times \frac{r_s}{(1-r_s r_\xi)(r_s - r_\xi)} \times \left\{ r_s \frac{1+r_s(1-r_\xi-r_\xi^2)}{1-r_s^2} - 2r_\xi^2 \frac{1-r_s^2}{1-r_s r_\xi} \right\} + \\
& + \mu^2 \langle |y|^2 \rangle_{0s} (\langle |y|^2 \rangle_{0\xi})^2 \frac{r_s r_\xi (3-r_\xi^2)}{(1-r_s r_\xi)(1-r_\xi^2)}
\end{aligned} \quad ; \quad (3.4.16)$$

$$B_{CM}(r_s; r_\xi) = A_{CM}(r_\xi; r_s) - \quad (3.4.17)$$

-коэффициенты при первой степени временной части корреляционной функции соответственно полезного сигнала $r_s^{|n|}$ и помехи $r_\xi^{|n|}$;

$$\begin{aligned}
D_{CM}(r_s; r_\xi) = & \mu^2 \langle |y|^2 \rangle_{0s} \langle |y|^2 \rangle_{0\xi} \times \frac{r_s^2(2r_\xi-1) + r_s r_\xi (r_s^2 - r_s^3 r_\xi - 1)}{(1-r_s^2)^2 (1-r_s r_\xi)^2} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{ss}) + \\
& + \mu^2 (\langle |y|^2 \rangle_{0s})^2 \langle |y|^2 \rangle_{0\xi} \times \left\{ \frac{-r_s r_\xi}{(1-r_s r_\xi)^2} \left(1 + \frac{1-r_s r_\xi}{1-r_s^2} \right) \right\}
\end{aligned} \quad (3.4.18)$$

$$E_{CM}(r_s; r_\xi) = D_{CM}(r_\xi; r_s) - \quad (3.4.19)$$

-коэффициенты при временной части корреляционных функций следующего вида $r_s^{2|n|} r_\xi^{|n|}$ и $r_s^{|n|} r_\xi^{2|n|}$ соответственно;

$$F_{CM}(r_s; r_\xi) = \mu^2 (\langle |y|^2 \rangle_{0s})^2 \langle |y|^2 \rangle_{0\xi} \times \frac{r_s^2(1-r_\xi^2)}{(1-r_s r_\xi)(1-r_s^2)}, \quad (3.4.20)$$

$$G_{CM}(r_s; r_\xi) = F_{CM}(r_\xi; r_s) - \quad (3.4.21)$$

-коэффициенты при второй степени временной части корреляционной функции соответственно полезного сигнала $r_s^{2|n|}$ и помехи $r_\xi^{2|n|}$.

Суммируя все части корреляционной функции (3.4.2), (3.4.8), (3.4.14), получим в представленных обозначениях в виде полинома следующее окончательное выражение:

$$K_y[n] = (A_s + A_\xi + A_{CM})r_s^{|n|} + (B_s + B_\xi + B_{CM})r_\xi^{|n|} + C_s r_s^{3|n|} + Q_\xi r_\xi^{3|n|} + \\ + (D_s + D_{CM})r_s^{2|n|}r_\xi^{|n|} + (E_\xi + E_{CM})r_s^{|n|}r_\xi^{2|n|} + F_{CM}r_s^{2|n|} + G_{CM}r_\xi^{2|n|} \quad (3.4.22)$$

Сравним данную формулу с формулой корреляционной функции входных сигналов (3.1.24). Из сравнения выражений видно, что на входе адаптивной антенной решётки имеют место такие составляющие полезного сигнала и помехи, скорость убыви корреляционной функции которых пропорциональна соответственно $r_s^{|n|}$ и $r_\xi^{|n|}$.

Присутствующие при обработке входных сигналов в ААР, настраивающейся по алгоритму Хэбба, флуктуации весового вектора приводят к появлению в выходном сигнале адаптивной антенны таких составляющих, корреляционная функция которых имеет иные скорости убыви во времени, пропорциональные $r_s^{2|n|}$, $r_\xi^{2|n|}$, $r_s^{3|n|}$, $r_\xi^{3|n|}$, $r_s^{2|n|}r_\xi^{|n|}$, $r_s^{|n|}r_\xi^{2|n|}$. Появление указанных составляющих в выходном сигнале адаптивной антенной решётки приводит также к искажениям спектральной плотности мощности на выходе антенны.

Для пояснения сказанного запишем полное выражение выходного дискретного спектра мощности, соответствующее корреляционной функции (3.4.22) выходного сигнала ААР, настраивающейся по алгоритму Хэбба:

$$S_y(\Omega) = (A_s + A_\xi + A_{CM}) \frac{1 - r_s^2}{1 - 2r_s \cos \Omega + r_s^2} + (B_s + B_\xi + B_{CM}) \frac{1 - r_\xi^2}{1 - 2r_\xi \cos \Omega + r_\xi^2} + \\ + C_s \frac{1 - r_s^6}{1 - 2r_s^3 \cos \Omega + r_s^6} + Q_\xi \frac{1 - r_\xi^6}{1 - 2r_\xi^3 \cos \Omega + r_\xi^6} + \\ + (D_s + D_{CM}) \frac{1 - (r_s^2 r_\xi)^2}{1 - 2(r_s^2 r_\xi) \cos \Omega + (r_s^2 r_\xi)^2} + (E_\xi + E_{CM}) \frac{1 - (r_s r_\xi^2)^2}{1 - 2(r_s r_\xi^2) \cos \Omega + (r_s r_\xi^2)^2} + \\ + F_{CM} \frac{1 - r_s^4}{1 - 2r_s^2 \cos \Omega + r_s^4} + G_{CM} \frac{1 - r_\xi^4}{1 - 2r_\xi^2 \cos \Omega + r_\xi^4} \quad (3.4.23)$$

Для того, чтобы обсудить выражение (3.4.23), запишем общий вид спектральной плотности мощности на выходе ААР без учёта флуктуаций весового вектора:

$$S_y(\Omega) = \hat{A} \frac{1 - r_s^2}{1 - 2r_s \cos \Omega + r_s^2} + \hat{B} \frac{1 - r_\xi^2}{1 - 2r_\xi \cos \Omega + r_\xi^2}, \quad (3.4.24)$$

где $\hat{A} = \langle |y|^2 \rangle_{0s}$ и $\hat{B} = \langle |y|^2 \rangle_{0\xi}$ - «сигнальная» и «помеховая» части выходной мощности при постоянном стационарном весовом векторе.

Сравнение формул (3.4.23) и (3.4.24) показывает, что флуктуации весового вектора приводят к изменениям величин «сигнальной» и «помеховой» частей спектра выходного сигнала (первое и второе слагаемые формулы (3.4.23)), а также к появлению дополнительных слагаемых в выражении спектральной плотности мощности.

Таким образом, флуктуации весовых коэффициентов искажают выходной сигнал адаптивной антенной решётки, настраиваемой по алгоритму Хэбба, вносят дополнительные слагаемые в его корреляционную функцию и дискретный спектр мощности.

Пример. Спектральная плотность мощности выходного сигнала адаптивной антенной решётки, настраиваемой по алгоритму Хэбба, в случае прихода на ААР входных сигналов с одинаковыми коэффициентами автокорреляции между отсчётами.

Рассмотрим влияние флуктуаций весовых коэффициентов на спектральные характеристики сигнала на выходе ААР. Спектральная плотность мощности (СПМ) дискретного по времени выходного сигнала определяется выражением [17]:

$$S_y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_y[n] \cdot z^{-n}, \quad (3.4.25)$$

где

$$z = \exp\{j\Omega\}, \quad (3.4.26)$$

Ω - нормированная частота; $K_y[n]$ - корреляционная функция на выходе адаптивной антенной решётки.

В предыдущем разделе было показано, что с учётом флуктуаций весового вектора корреляционная функция выходного сигнала ААР, настраиваемой по алгоритму Хэбба, имеет вид:

$$K_y[n] = A \cdot r^{|n|} + C \cdot r^{3|n|}, \quad (3.4.27)$$

где коэффициенты A и C записываются следующим образом:

$$A = \langle |y|^2 \rangle_{CT} \times \left\{ 1 + \frac{2\mu}{1-r} Sp(\vec{W}_{CT}^* \vec{W}_{CT}^H R_{XX}) + \right. \\ \left. + \mu^2 \frac{1+r^2}{1-r^2} Sp(\vec{W}_{CT}^* \vec{W}_{CT}^H R_{XX}) \right\} \langle |y|^2 \rangle_{CT} + \quad (3.4.28)$$

$$+ \mu^2 \frac{3r^2 - r^4}{(1-r^2)^2} (\langle |y|^2 \rangle_{CT})^2 + \mu^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2(\vec{W}_{CT}^* \vec{W}_{CT}^H R_{XX}) \}$$

$$C = -\mu^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} (\langle |y|^2 \rangle_{CT})^2 \times \{ Sp(\vec{W}_{CT}^* \vec{W}_{CT}^H R_{XX}) + \langle |y|^2 \rangle_{CT} \}. \quad (3.4.29)$$

Подставляя выражение для корреляционной функции в формулу дискретного спектра мощности ((20) – (22) в (18)), имеем:

$$S_y(\Omega) = A \cdot \left\{ \frac{rz}{1-rz} + \frac{z}{z-r} \right\} + C \cdot \left\{ \frac{r^3z}{1-r^3z} + \frac{z}{z-r^3} \right\}, \quad (3.4.30)$$

Из формулы (3.4.30) можно видеть, что учёт флуктуаций весовых коэффициентов приводит к появлению искажений в спектре мощности выходного сигнала ААР с алгоритмом Хэбба.

Для наглядности сравним данное выражение с аналогичной формулой спектральной плотности мощности, только полученной без учёта флуктуаций весового вектора. Поскольку корреляционная функция сигнала на выходе ААР без учёта флуктуаций весовых коэффициентов имеет вид:

$$K_y[n] = \langle |y|^2 \rangle_0 \cdot r^{|n|}, \quad (3.4.31)$$

то дискретный спектр мощности запишется следующим образом:

$$S_y(\Omega) = \langle |y|^2 \rangle_0 \times \left\{ \frac{rz}{1-rz} + \frac{z}{z-r} \right\}. \quad (3.4.32)$$

Сравнивая формулы спектральных плотностей мощности без учёта (3.4.32) и при учёте (3.4.30) флуктуаций настраиваемых весовых коэффициентов, видим, что СПМ без учёта флуктуаций (3.4.32) является первым слагаемым в выражении (3.4.30) дискретного спектра мощности выходного сигнала, найденного с учётом флуктуаций, если в него подставить коэффициенты A и C , и записать данное выражение в явном виде. Все остальные слагаемые в формуле (3.4.30) обусловлены учётом флуктуаций весового вектора.

Таким образом, флуктуации настраиваемых весовых коэффициентов приводят к появлению ряда дополнительных слагаемых в выражении для спектральной плотности мощности. Данные слагаемые, как следует из формул для коэффициентов A и C (3.4.28) – (3.4.29) имеют первый и второй порядок малости по μ - коэффи-

циенту адаптации и зависят также от r - коэффициента автокорреляции между отсчётами входных сигналов. Необходимо отметить, что коэффициенты A и C имеют разные знаки. При любых значениях r коэффициент A принимает положительные значения, а коэффициент C - отрицательные.

В таблице 3.1, представленной ниже, приведены численные значения коэффициентов A и C в зависимости от значений коэффициентов автокорреляции между отсчётами входных сигналов r . Предполагалось, что на полуволновую адаптивную антенную решётку, настраивающуюся по алгоритму Хэбба с числом элементов $N = 7$ поступают два входных сигнала. Первый сигнал, мощность которого была принята равной 1, приходил с направления $\theta_1 = 45^\circ$. Второй сигнал, мощность которого составила 0.1 мощности первого сигнала, приходил под углом $\theta_2 = 0^\circ$. В ААР присутствовал также собственный шум, мощность которого была в 100 раз меньше мощности первого сигнала. Коэффициент адаптации $\mu = 0.01$.

Таблица 3.1

r	0	0.5	0.9	0.95	0.97	0.99	Без флукт.
A	8.1604	9.3397	20.979	40.573	75.4	398.779	7.0296
C	0	-0.0325	-1.6409	-6.943	-19.7	-180.998	0

Из таблицы можно видеть, что на протяжении всего диапазона изменений коэффициента $r \in [0;1)$ коэффициенты A и C сохраняют неизменными собственные знаки: $A > 0$; $C \leq 0$. Кроме того, по мере стремления r к единице, т.е. при переходе входных сигналов от случая некоррелированных отсчётов к случаю сильно коррелированных отсчётов, происходит увеличение значений модулей коэффициентов A и C , причём данное увеличение проявляется особенно значительно при $r \in [0.9;0.99]$.

Для большей наглядности приведём запись выражения для дискретного спектра мощности на выходе ААР, настраивающейся по алгоритму Хэбба, записанного через Ω - нормированную частоту. Для этого подставим формулу (3.4.26) для нормированной частоты в выражение спектральной плотности мощности (3.4.30). Тогда имеем:

$$S_y(\Omega) = A \cdot \frac{1-r^2}{1-2r \cdot \cos \Omega + r^2} + C \cdot \frac{1-r^6}{1-2r^3 \cdot \cos \Omega + r^6}. \quad (3.4.33)$$

Для того, чтобы понять формулу (3.4.33), запишем её значения на нулевой частоте. Итак, при $\Omega = 0$ данное выражение имеет вид:

$$S_y(0) = A \cdot \frac{1+r}{1-r} + C \cdot \frac{1+r^3}{1-r^3}. \quad (3.4.34)$$

Из выражения (3.4.34) следует, что максимальное значение спектральной плотности мощности выходного сигнала определяется величиной коэффициента автокорреляции между отсчётами входных сигналов r . В таблице 3.2, представленной ниже, даны значения $S_y(0)$ в зависимости от коэффициента r . Параметры адаптивной антенной решётки и помеховая обстановка были те же, что и в случае таблицы 3.1.

Таблица 3.2

r	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	0.95	0.97	0.99
$S_y(0)$	8.160	10.124	16.059	27.977	62.20	388	1491	4520	$6.74 \cdot 10^4$
$S_{y_0}(0)$	7.029	8.591	13.054	21.088	39.83	133	274	461	1399
$\Delta S_y(0)$	1.130	1.532	3.004	6.885	22.37	255	1220	4058	$6.59 \cdot 10^4$

Из таблицы 3.2 можно видеть, что флуктуации весового вектора приводят к эффекту рассогласования [17], при котором спектральная плотность мощности выходного сигнала ААР, найденная с учётом флуктуаций, при любых значениях коэффициента автокорреляции между отсчётами входных сигналов r всегда имеет большие значения, чем соответствующая величина СПМ, рассчитанная при постоянном стационарном весовом векторе.

На рисунках, приведённых ниже, показаны графики спектральной плотности мощности выходного сигнала адаптивной антенной решётки, настраиваемой по алгоритму Хэбба в зависимости от уровня коррелированности отсчётов входных сигналов. Данные графики были построены для адаптивной антенной решётки, содержащей $N = 7$ элементов, расположенных вдоль прямой. На ААР приходили два входных сигнала, заданные в виде плоских волн. Первый сигнал с мощностью, принятой за единицу, приходил с направления $\theta_1 = 45^\circ$ относительно нормали, проведённой к плоскости решётки. Второй сигнал, мощность которого составляла 0.1 мощности первого сигнала, приходил под углом $\theta_2 = 0^\circ$. В ААР присутствовал также собственный шум, мощность которого была в 100 раз меньше мощности первого сигнала. Коэффициент адаптации $\mu = 0.01$.

На рисунках 3.2 и 3.3 показан дискретный спектр мощности выходного сигнала при низкоррелированных ($r = 0.1$) и высокоррелированных ($r = 0.7$)

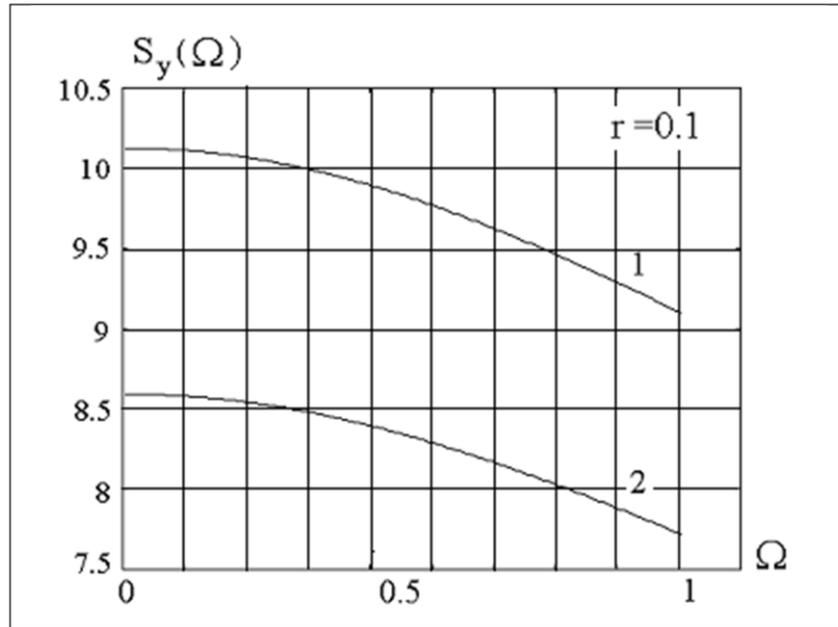


Рис. 3.2. Дискретный спектр мощности выходного сигнала при низкоррелированных ($r = 0.1$) отсчётах входных сигналов (кривая 1 – СПМ при учёте флуктуаций весового вектора; кривая 2 – СПМ без учёта флуктуаций весового вектора).

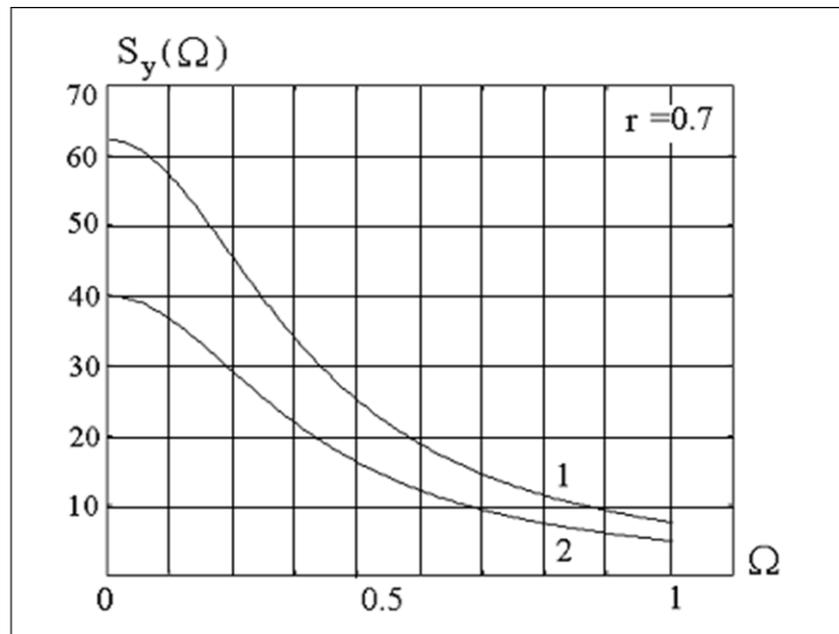


Рис. 3.3. Дискретный спектр мощности выходного сигнала при высокоррелированных ($r = 0.7$) отсчётах входных сигналов (кривая 1 – СПМ при учёте флуктуаций весового вектора; кривая 2 – СПМ без учёта флуктуаций весового вектора).

отсчётах входных сигналов (кривая 1 – СПМ при учёте флуктуаций весового вектора; кривая 2 – СПМ без учёта флуктуаций весового вектора). Из рисунков можно видеть, что флуктуации весового вектора приводят к искажению спектральной плотности мощности на выходе антенны и увеличению ее значений, что свидетельствует о появлении эффекта рассогласования, описанного в работе [17].

Таким образом, проведённое исследование показало, что флуктуации весового вектора адаптивной антенной решётки, настраиваемой по алгоритму Хэбба, приводят к искажениям выходного сигнала данной ААР, что отражается в спектральной плотности мощности этого сигнала.

3.5 ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ ВЕСОВОГО ВЕКТОРА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ ААР, НАСТРАИВАЮЩЕЙСЯ ПО АЛГОРИТМУ ХЭББА - ДИАГРАММУ НАПРАВЛЕННОСТИ, КОЭФФИЦИЕНТ НАПРАВЛЕННОГО ДЕЙСТВИЯ, КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ, ПОТЕРИ В ВЫХОДНОМ ОТНОШЕНИИ СИГНАЛ / ШУМ [140,147,150,169].

Диаграмма направленности антенны.

Флуктуации весового вектора искажают выходной сигнал адаптивной антенной решётки, и это приводит к появлению дополнительных слагаемых в различных статистических характеристиках ААР, в том числе и в диаграмме направленности адаптивной антенны.

Рассмотрим среднюю по мощности ДН $g_{cp}(\theta)$, где θ - угол прихода пробного сигнала \vec{S}_{tr} относительно нормали, проведённой к плоскости антенной решётки [49]:

$$g_{cp} = \langle |\vec{S}_{np}^T \vec{W}(k)|^2 \rangle. \quad (3.5.1)$$

Подставляя в выражение (3.5.1) представление весового вектора (3.1.4), получаем формулу для диаграммы направленности, состоящую из суммы двух слагаемых – диаграммы направленности при постоянном стационарном весовом векторе и «флуктуационной» диаграммы направленности [49]:

$$g_{cp}(\theta) = g_0(\theta) + g_{\vec{w}}(\theta), \quad (3.5.2)$$

где

$$g_0(\theta) = \vec{W}_{CT}^H \vec{S}_{np}^* \vec{S}_{np}^T \vec{W}_{CT} - \quad (3.5.3)$$

- диаграмма направленности ААР без учёта флуктуаций весовых коэффициентов;

$$g_{\vec{w}}(\theta) = \vec{S}_{np}^H \mathbf{K}_{\vec{w}}(k, k) \vec{S}_{np} - \quad (3.5.4)$$

- дополнительный член, обусловленный увеличением эквивалентной мощности пробного сигнала на выходе ААР по причине модуляции его флуктуациями весовых коэффициентов [49].

Найдем конкретный вид диаграммы направленности при постоянном стационарном весовом векторе для адаптивной антенной решётки, настраиваемой по алгоритму Хэбба. Для этого вспомним, что оптимальным весовым вектором для алгоритма Хэбба (3.1.1) является собственный вектор корреляционной матрицы входных сигналов \vec{q}_1 , соответствующий её максимальному собственному числу и удовлетворяющий уравнению [75,82]:

$$\mathbf{R}_{xx} \vec{q}_1 = \lambda_1 \vec{q}_1 \quad (3.5.5)$$

где λ_1 - максимальное собственное число корреляционной матрицы входных сигналов \mathbf{R}_{xx} .

Подставляя \vec{q}_1 вместо \vec{W}_{CT} в выражение (3.5.3) и проводя преобразования, получим следующий вид диаграммы направленности без учёта флуктуаций весового вектора для ААР, настраивающейся по алгоритму Хэбба:

$$g_0(\theta) = N^2 |f(U_1 - U)|^2, \quad (3.5.6)$$

где $U = \pi \sin \theta$, θ - угол прихода пробного сигнала; $U_1 = \pi \sin \theta_1$ - угол прихода самого мощного сигнала;

$$f(U) = \frac{1}{N} \vec{S}^T \vec{S}_r^* = \frac{\sin(NU/2)}{N \sin(U/2)} \exp(j \frac{N-1}{2} U) - \text{нормированная ДН равноамплитудной}$$

антенной решётки, сфазированной на нормально падающую волну.

Найдём вид «флуктуационной» диаграммы направленности для адаптивной антенной решётки, настраивающейся по алгоритму Хэбба. Для этого подставим в выражение «флуктуационной» ДН (3.5.4) формулу ковариационной матрицы флуктуаций весового вектора:

$$\mathbf{K}_{\vec{w}}(k, k) = \mu^2 \langle |y|^2 \rangle_{CT} \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} Sp(\vec{W}_{CT}^* \vec{W}_{CT}^T \mathbf{R}_{xx}) (\vec{W}_{CT}^* \vec{W}_{CT}^H)^*$$

Тогда получим следующий вид «флуктуационной» диаграммы направленности ААР с алгоритмом Хэбба:

$$g_{\vec{w}}(\theta) = \mu^2 \langle |y|^2 \rangle_0 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} \lambda_1 N^3 |f(U_1 - U)|^2 - \quad (3.5.7)$$

На рисунках, приведённых ниже, приведены графики средней и «флуктуационной» диаграмм направленности при нулевых значениях коэффициента автокорреляции между отсчётами входных сигналов r . Графики строились для случая $N = 7$ - элементной полуволновой адаптивной антенной решётки, элементы которой располагались вдоль прямой. Угол прихода сигналов θ отсчитывался относительно нормали, проведённой к плоскости решётки. Угол прихода наиболее мощного сигнала (мощность которого была принята за 1), составлял $\theta_1 = 45^\circ$. Вторым по мощности сигнал (со значением мощности 0.1 относительно мощности первого) приходил с направления нормали, проведённой к плоскости решётки ($\theta_2 = 0^\circ$). В ААР присутствовал также собственный шум, мощность которого была в 100 раз меньше мощно-

сти первого сигнала. Адаптивная антенная решётка настраивалась по алгоритму Хэбба с коэффициентом адаптации $\mu = 0.01$. На рисунке 3.4 изображена «флуктуационная» диаграмма направленности рассматриваемой ААР в зависимости от угла прихода пробного сигнала θ при некоррелированных отсчётах входных сигналов ($r = 0$). Из рисунка можно видеть, что в случае некоррелированных отсчётов входных сигналов «флуктуационная» ДН имеет положительные значения, с максимумом флуктуаций, приходящимся на направление, соответствующее углу прихода наиболее мощного сигнала.

Для пояснения эффекта, показанного на рисунке 3.4, на рисунке 3.5 приведены графики средней по мощности диаграммы направленности g_{cp} (кривая 1) и ДН, найденной без учёта флуктуаций весового вектора g_0 (кривая 2) в зависимости от угла прихода пробного сигнала θ . Из рисунка следует, что учёт флуктуаций весовых коэффициентов приводит к увеличению значений средней по мощности диаграммы направленности по сравнению с ДН, найденной без учета флуктуаций, причём максимальное значение флуктуаций соответствует углу прихода наиболее мощного сигнала, который алгоритм Хэбба и выделяет при настройке ААР из смеси с другими сигналами и шумом.

Коэффициент направленного действия антенны.

Найдём коэффициент направленного действия с учётом флуктуаций весового вектора адаптивной антенной решётки, настраивающейся по алгоритму Хэбба. Согласно результатам, полученным в первой главе, общий вид коэффициента направленного действия можно записать следующим образом:

$$D(\theta) = \frac{2g_0(\theta) + 2g_{\tilde{w}}(\theta)}{\int_0^{\pi} (g_0(\theta) + g_{\tilde{w}}(\theta)) \sin \theta \cdot d\theta}. \quad (3.5.8)$$

Из выражения (3.5.8) видно, что коэффициент направленного действия адаптивной антенны представляет собой сумму двух слагаемых: полученного при постоянном стационарном весовом векторе и «флуктуационного» слагаемого.

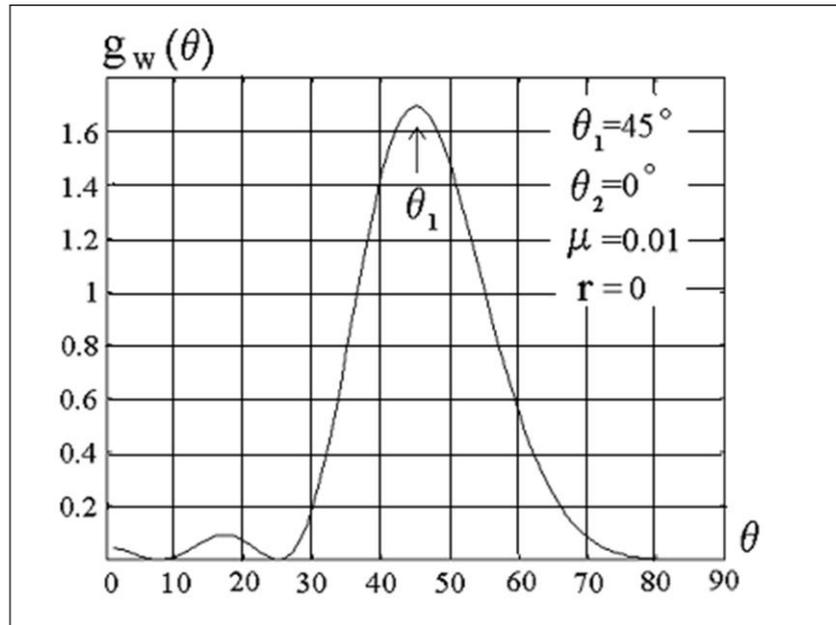


Рис. 3.4. Зависимость «флуктуационной» диаграммы направленности адаптивной антенной решётки от угла прихода пробного сигнала θ при некоррелированных отсчётах входных сигналов ($r = 0$). Коэффициент адаптации $\mu = 0.01$.

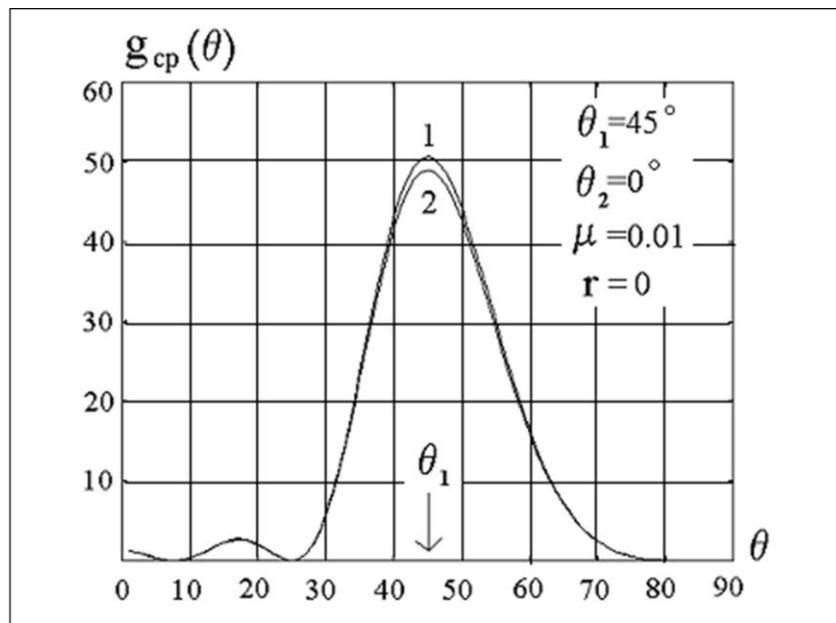


Рис. 3.5. Зависимость средней по мощности диаграммы направленности g_{av} (кривая 1) и ДН, найденной без учёта флуктуаций весового вектора g_0 (кривая 2) от угла прихода пробного сигнала θ при некоррелированных отсчётах входных сигналов ($r = 0$). Коэффициент адаптации $\mu = 0.01$.

«Стационарный» коэффициент направленного действия для адаптивной антенной решетки, настраивающейся по алгоритму Хэбба, имеет вид:

$$D_0(\theta) = \frac{2g_0(\theta)}{\int_0^\pi (g_0(\theta) + \mu^2 < |Z|^2 >_0 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} Sp(\vec{W}_{CT}^* \vec{W}_{CT}^T \mathbf{R}_{XX}) |\vec{W}_{CT}^T \vec{S}_{np}^*|^2) \sin \theta \cdot d\theta} \quad (3.5.9)$$

Здесь $g_0 = \vec{W}_{CT}^H \vec{S}_{np}^* \vec{S}_{np}^T \vec{W}_{CT}$ - ДН, найденная при постоянном стационарном весовом векторе. В формуле (3.5.9) для простоты рассмотрен случай равенства коэффициентов автокорреляции между отсчётами полезного сигнала и помех $r_S = r_\xi = r$.

«Флуктуационный» коэффициент направленного действия ААР, настраивающейся по алгоритму Хэбба, может быть представлен в виде:

$$D_{\vec{W}}(\theta) = \frac{2\mu^2 < |Z|^2 >_0 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} Sp(\vec{W}_{CT}^* \vec{W}_{CT}^T \mathbf{R}_{XX}) |\vec{W}_{CT}^T \vec{S}_{np}^*|^2}{\int_0^\pi (g_0(\theta) + \mu^2 < |Z|^2 >_0 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} Sp(\vec{W}_{CT}^* \vec{W}_{CT}^T \mathbf{R}_{XX}) |\vec{W}_{CT}^T \vec{S}_{np}^*|^2) \sin \theta \cdot d\theta} \quad (3.5.10)$$

Из выражений (3.5.9) и (3.5.10) можно видеть, что флуктуации весовых коэффициентов приводят, с одной стороны, к увеличению коэффициента направленного действия, но с другой стороны, к «размазыванию» этого направленного действия по направлениям угла θ .

Коэффициент усиления адаптивной антенной решётки.

Найдем с учетом флуктуаций настраиваемых весовых коэффициентов коэффициент усиления адаптивной антенной решётки, настраивающейся по алгоритму Хэбба. Коэффициент усиления в данном случае представляет собой сумму двух слагаемых – найденного при постоянном стационарном весовом векторе и «флуктуационного» коэффициента усиления и имеет вид:

$$G(\theta) = \eta \frac{2g_0(\theta) + 2\mu^2 < |Z|^2 >_0 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} Sp(\vec{W}_{CT}^* \vec{W}_{CT}^T \mathbf{R}_{XX}) |\vec{W}_{CT}^T \vec{S}_{np}^*|^2}{\int_0^\pi (g_0(\theta) + \mu^2 < |Z|^2 >_0 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} Sp(\vec{W}_{CT}^* \vec{W}_{CT}^T \mathbf{R}_{XX}) |\vec{W}_{CT}^T \vec{S}_{np}^*|^2) \sin \theta \cdot d\theta} \quad (3.5.11)$$

Из выражения (3.5.11) следует, что флуктуации весового вектора увеличивают величину коэффициента усиления. Однако это увеличение имеет второй порядок малости по коэффициенту адаптации μ , а потому незначительно. С другой стороны,

флуктуации весовых коэффициентов искажают величину коэффициента усиления адаптивной антенны по направлениям угла θ .

Таким образом, флуктуации весовых коэффициентов оказывают двойственное действие на коэффициент направленного действия и коэффициент усиления адаптивной антенной решётки, настраиваемой по алгоритму Хэбба. С одной стороны, флуктуации увеличивают значения этих коэффициентов правда незначительно, на величину, даже меньшую, чем второго порядка малости по коэффициенту адаптации μ , поскольку в знаменателе данных выражений присутствует тоже «флуктуационное» слагаемое – «флуктуационная» диаграмма направленности. С другой стороны, флуктуации весового вектора вносят искажения в форму КНД и КУ по углу θ .

Потери в выходном отношении сигнал / шум, вызванные наличием флуктуаций весового вектора.

Рассмотрим в качестве одного из возможных показателей эффективности работы адаптивной антенной решетки потери в выходном отношении сигнал / шум, вызванные флуктуациями:

$$\tilde{\eta} = 10 \cdot \lg \left(\frac{SNR_{fl}}{SNR_{opt}} \right) \quad (3.5.12)$$

Как отмечалось в первой главе, здесь SNR_{fl} – выходное отношение сигнал / шум, найденное с учетом флуктуаций весового вектора; SNR_{opt} – выходное отношение сигнал / шум, найденное без учета флуктуаций весового вектора.

Используя формулу выходной мощности ААР, настраиваемой по алгоритму Хэбба (3.3.5), и учитывая, что корреляционная матрица входных сигналов адаптивной антенной решетки состоит из суммы корреляционных матриц полезного сигнала, помех и собственного шума адаптивной антенны $\mathbf{R}_{XX} = \mathbf{R}_{SS} + \mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}$ и, соответственно, мощности полезного сигнала и помех на выходе антенны при постоянном стационарном весовом векторе имеют вид

$\langle |Z|^2 \rangle_S = \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{SS} \vec{W}_{CT}$, $\langle |Z|^2 \rangle_{\xi} = \vec{W}_{CT}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT}$ получим выражение для остаточной мощности помехи на выходе ААР с алгоритмом Хэбба:

$$\begin{aligned}
A_{Hebb} = & \langle |y|^2 \rangle_{CT} - \langle |y|^2 \rangle_S = \vec{W}_{CT}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT} + \\
& \langle |y|^2 \rangle_0 \times \left\{ \frac{2\mu}{1-r} Sp(\vec{W}_{CT}^* \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX}) + \right. \\
& + \mu^2 \frac{1+r^2}{1-r^2} Sp(\vec{W}_{CT}^* \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX}) \langle |y|^2 \rangle_0 + \\
& + \mu^2 \frac{3r^2 - r^4}{(1-r^2)^2} (\langle |y|^2 \rangle_0)^2 + \mu^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2(\vec{W}_{CT}^* \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX}) \left. \right\} - \\
& - \mu^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} (\langle |y|^2 \rangle_0)^2 \times \{ Sp(\vec{W}_{CT}^* \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX}) + \langle |y|^2 \rangle_0 \}
\end{aligned} \tag{3.5.13}$$

После преобразований имеем следующее выражение потерь в выходном отношении сигнал / шум ААР, настраивающейся по алгоритму Хэбба, из-за флуктуаций весового вектора:

$$\tilde{\eta} = 10 \cdot \lg \left(\frac{\vec{W}_{CT}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT}}{A_{Hebb}} \right) \tag{3.5.14}$$

На рисунке 3.6 представлена зависимость потерь в выходном отношении сигнал / шум от величины коэффициента адаптации μ . График построен для адаптивной антенной решетки, настраивающейся по алгоритму Хэбба, имеющей 7 элементов ($N=7$). Расстояние между элементами было равно половине длины волны ($d = \lambda / 2$).

Предполагалось, что на ААР поступают статистически независимые два сигнала $r_1 = r_2 = 0.5$. Комплексные амплитуды входных сигналов формировались из двух независимых источников гауссовского “белого” шума. Углы прихода сигналов были равны соответственно $\theta_1 = 45^\circ$, $\theta_2 = 0^\circ$, мощность первого сигнала была в 100 раз больше мощности второго сигнала. В каждом элементе ААР присутствовал также некоррелированный собственный шум, мощность которого составляла 0.1 мощности второго сигнала. Необходимо отметить, что ААР, настраивающаяся по алгоритму Хэбба, выделяет самый мощный сигнал и гасит все остальные, имеющие меньшую мощность. Таким образом, в данной задаче адаптивная антенна выделяла сигнал, приходящий с направления $\theta_1 = 45^\circ$.

Из рисунка 3.6 можно видеть, что имеют место потери из-за флуктуаций весового вектора в выходном отношении сигнал / шум адаптивной антенной решетки, настраивающейся по алгоритму Хэбба. Из рисунка также следует, что по мере увеличения коэффициента адаптации μ растут потери, вызванные наличием флуктуа-

ций весового вектора. Если сравнить графики потерь в выходном отношении сигнал / шум, приведенные в первых двух главах для ААР с дискретным градиентным и быстрым рекуррентным алгоритмами, то можно видеть, что потери в ААР с алгоритмом Хэбба существенно больше, и при этом настройка данной антенны идет медленнее – имеет место другой диапазон значений коэффициента адаптации μ , при котором потери можно считать приемлемыми (от 10^{-5} до $5 \cdot 10^{-3}$ в ААР с алгоритмом Хэбба и от 10^{-4} до $5 \cdot 10^{-2}$ в ААР с ограничениями).

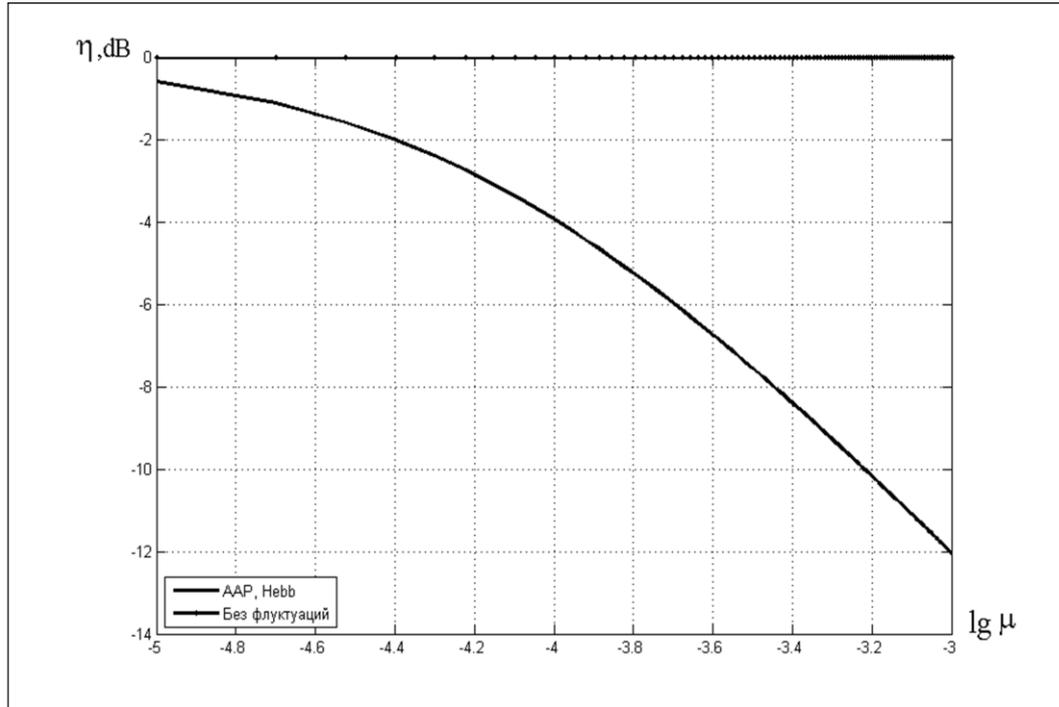


Рис.3.6. Потери η в выходном отношении сигнал / шум в зависимости от величины коэффициента адаптации μ .
ААР с алгоритмом Хебба.

3.6. ВЫВОДЫ.

Проведённое в третьей главе исследование статистических характеристик адаптивной антенной решетки, настраиваемой по классическому алгоритму настройки искусственных нейронных сетей - алгоритму Хэбба, с учетом флуктуаций весового вектора позволяет сделать следующие выводы:

1. Алгоритм Хэбба является существенно нелинейным по весовому вектору алгоритмом адаптации. Весовой вектор входит в него в третьей степени.
2. Статистический анализ влияния флуктуаций настраиваемого весового вектора на характеристики «линейных» по структуре адаптивных антенных решёток с существенно нелинейным по весовому вектору алгоритмом адаптации - алгоритмом Хэбба и различными коэффициентами автокорреляции между отсчётами входных сигналов необходимо проводить методами теории возмущений. Данные методы позволяют учесть негауссовскую статистическую зависимость между весовым вектором и вектором входных сигналов.
3. Учёт флуктуаций весового вектора в адаптивной антенной решётке, настраиваемой по алгоритму Хэбба, позволяет выявить искажения выходного сигнала ААР, которые вносят флуктуации весовых коэффициентов. Данные искажения выходного сигнала адаптивной антенной решётки математически проявляют себя в появлении в выражениях корреляционной функции, мощности и спектральной плотности мощности выходного сигнала ААР дополнительных слагаемых, обусловленных флуктуациями весового вектора.
4. В составе формул корреляционной функции, мощности и спектральной плотности мощности выходного сигнала ААР, полученных с учетом флуктуаций весовых коэффициентов, имеются «сигнальная» и «помеховая» составляющие, а также составляющая, обусловленная взаимодействием полезного сигнала и помехи в процессе обработки сигналов посредством алгоритма Хэбба в данной антенне и связанная с наличием флуктуаций весового вектора. Такая составляющая взаимодействия полезного сигнала и помех отсутствовала в ААР с дискретным градиентным и быстрым рекуррентным алгоритмами.
5. Флуктуации весового вектора приводят к искажению спектральной плотности мощности на выходе адаптивной антенной решетки, настраиваемой по алгоритму Хэбба, и увеличению ее значений по сравнению со спектральной плотностью мощности, найденной без учёта флуктуаций весовых коэффициентов.

6. Флуктуации весовых коэффициентов приводят к появлению «флуктуационных частей» в диаграмме направленности, коэффициенте направленного действия адаптивной антенной решётки, настраиваемой по алгоритму Хэбба, что искажает указанные характеристики ААР.
7. При входных сигналах с некоррелированными отсчетами учёт флуктуаций весовых коэффициентов приводит к увеличению значений средней по мощности диаграммы направленности по сравнению с ДН, найденной без учета флуктуаций, причём максимальное значение флуктуаций соответствует углу прихода наиболее мощного сигнала, который выделяет алгоритм Хэбба при настройке ААР.
8. Результаты компьютерного моделирования показали, что для входных сигналов антенной решетки, мощность которых была нормирована относительно собственного шума ААР (мощность собственного шума 1, мощности первого и второго сигнала соответственно 1000 и 10) первое борновское приближение перестает соблюдаться при значении коэффициента адаптации $\mu \geq 5 \times 10^{-6}$. Это связано с несоблюдением малости параметра μ , по которому строился ряд теории возмущений.

Глава 4. Анализ влияния флуктуаций весового вектора на статистические характеристики адаптивной антенной решётки с нелинейной функцией в цепи обратной связи с градиентными алгоритмами настройки.

Использование адаптивных антенных решёток для пространственной обработки сигналов позволяет добиться улучшения качества работы различных систем, применяемых в радиолокации и связи. ААР с нелинейной функцией в цепи обратной связи способны решать большее число задач по сравнению с линейными адаптивными антенными решётками, но при этом содержат в себе трудности для аналитического изучения. Адаптивные антенные решётки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи являются простейшим обобщением линейных ААР и по схеме представляют собой вариант искусственного нейрона, используемого для построения искусственных нейронных сетей. По этой причине представляется интересным исследование влияния флуктуаций весового вектора на статистические характеристики такой системы. Представленная задача решалась без уточнения конкретного вида нелинейной функции в цепи обратной связи, предполагалось только, что она может быть разложена в ряд Вольтерра [177].

В настоящем разделе детально исследуется влияние флуктуаций весовых коэффициентов на характеристики адаптивных антенных решёток с многократными линейными ограничениями, настраивающихся по дискретному градиентному алгоритму и содержащих нелинейную функцию в цепи корреляционной обратной связи.

4.1. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК «НЕЛИНЕЙНОЙ» ААР С ДИСКРЕТНЫМ ГРАДИЕНТНЫМ АЛГОРИТМОМ НАСТРОЙКИ [117].

Рассмотрим работу N - элементной адаптивной антенной решётки с многократными линейными ограничениями на диаграмму направленности, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму и содержащей нелинейную функцию в цепи обратной связи. Настройка вектора весовых коэффициентов \vec{W} данной системы описывается N - мерным векторным уравнением и в дискретном времени будет иметь вид:

$$\vec{W}(k+1) = \mathbf{P}\{\vec{W}(k) - \mu \cdot \vec{X}^*(k) \cdot Z(k)\} + \vec{W}_q. \quad (4.1.1)$$

Здесь $\vec{X}(k)$ - вектор комплексных огибающих входных сигналов на приёмных элементах решётки. При анализе предполагалось, что вектор входных сигналов и вектор весовых коэффициентов связаны между собой негауссовской статистической зави-

симостью. \mathbf{P} - проекционная матрица (матричный фильтр в контуре управления адаптивной антенной решётки), обеспечивающая введение многократных линейных ограничений на диаграмму направленности ААР вида $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H$; $\mathbf{C} \equiv [\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_L]$ - матрица ограничений размерности $N \times L$, столбцами которой являются линейно - независимые векторы ограничений \bar{C}_l , L - число вводимых ограничений; μ - коэффициент адаптации дискретного градиентного алгоритма; \bar{W}_q - вектор комплексных весовых коэффициентов, соответствующих диаграмме направленности покоя (при отсутствии внешних помех); \mathbf{H} , $*$, $+$ соответственно знаки эрмитовского и комплексного сопряжения, а также псевдообращения, \mathbf{I} - единичная $N \times N$ матрица [65].

В выражении (4.1.1) $Z(k)$ - выходной сигнал антенной решётки, который может быть записан в виде ряда Вольтерра [177]:

$$Z(k) = F[y(k)] = \sum_{j=1}^{N_1} a_j \cdot y^j(k), \quad (4.1.2)$$

где $F[\]$ - нелинейная функция в цепи корреляционной обратной связи, $y(k)$ - выходной сигнал линейной части ААР, a_j - коэффициенты разложения нелинейности F в ряд Вольтерра [177]. Указанные коэффициенты могут быть представлены следующим образом [177]:

$$a_j = \frac{1}{j!} F^{(j)}[y=0]. \quad (4.1.3)$$

Использование нелинейной функции в цепи корреляционной обратной связи адаптивной антенной решётки обеспечивает устойчивую работу ААР при больших значениях коэффициента адаптации. Это становится возможным, если выбранная нелинейная функция ограничена сверху и снизу, как, например, сигмоидальная функция, которая используется в схемах искусственных нейронов при формировании искусственной нейронной сети [79]. Кроме того, наличие нелинейной функции в цепи корреляционной обратной связи адаптивной антенной решётки позволяет более эффективно работать адаптивной системе с негауссовским входными сигналами (с негауссовской плотностью вероятности) [20].

Запишем выходной сигнал $Z(k)$ в матричной форме. Введём два N_1 -мерных вектора: вектор коэффициентов ряда Вольтерра $\bar{A} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{N_1}]^T$ и вектор $\bar{Y}(k) = [y(k) \ y^2(k) \ \dots \ y^{N_1}(k)]^T$, представляющий собой вектор степеней выходного

сигнала линейной части адаптивной антенной решётки. Тогда выходной сигнал ААР примет вид:

$$Z(k) = \bar{A}^T \cdot \bar{Y}(k). \quad (4.1.4)$$

Учитывая (4.1.4), перепишем уравнение (4.1.1) следующим образом:

$$\bar{W}(k+1) = \mathbf{P}\{\bar{W}(k) - \mu \cdot \bar{X}^*(k) \cdot \bar{A}^T \cdot \bar{Y}(k)\} + \bar{W}_q. \quad (4.1.5)$$

Для статистического анализа уравнения (4.1.5) воспользуемся методами теории возмущений по коэффициенту адаптации μ , который будем полагать малым. Данные методы были подробно изложены в [49,65,107,115-116]. Введём следующие обозначения:

$$\bar{W} = \langle \bar{W} \rangle + \tilde{\bar{W}}, \quad \bar{Y} = \langle \bar{Y} \rangle + \tilde{\bar{Y}}, \quad \mathbf{M}_{XX}(k) \equiv \mathbf{R}_{XX} + \tilde{\Phi}(k) \quad (4.1.6)$$

где случайный весовой вектор $\tilde{\bar{W}}$, вектор степеней выходного сигнала линейной части адаптивной антенной решётки $\tilde{\bar{Y}}$ и стохастическая матрица $\mathbf{M}_{XX} \equiv \bar{X}^*(k)\bar{X}^T(k)$ представлены в виде сумм их средних значений $\langle \bar{W} \rangle$, $\langle \bar{Y} \rangle$, \mathbf{R}_{XX} и флуктуационных составляющих $\tilde{\bar{W}}(k)$, $\tilde{\bar{Y}}(k)$, $\tilde{\Phi}(k)$ [49,65].

Усредняя (4.1.5) и используя обозначения (4.1.6), найдём уравнение для $\langle \bar{W} \rangle$ вблизи стационарного состояния, учитывая при этом, что $\mathbf{R}_{XA} = \mathbf{0}$ - корреляционная матрица входных сигналов и коэффициентов ряда Вольтерра является нулевой матрицей, поскольку \bar{A} - детерминированный вектор, а среднее значение вектора входных сигналов равно нулю:

$$\langle \bar{W}(k+1) \rangle = \mathbf{P}\{\langle \bar{W}(k) \rangle - \mu \cdot \bar{\Delta}_{XA}\} + \bar{W}_q. \quad (4.1.7)$$

Здесь $\bar{\Delta}_{XA} \equiv \langle \tilde{\Phi}_{XA} \tilde{\bar{Y}} \rangle$ - вектор кумулянтных функций третьего порядка, учитывающих статистическую зависимость флуктуаций выходного сигнала линейной части ААР $\tilde{\bar{Y}}$ (и, следовательно, флуктуаций весовых коэффициентов $\tilde{\bar{W}}$) и входных сигналов $\bar{X}(k+1)$.

Для определения стационарного среднего значения вектора весовых коэффициентов $\bar{W}_{CT} \equiv \langle \bar{W}(k) \rangle$ и других статистических характеристик адаптивной антенной решётки воспользуемся методом возмущений по параметру μ , который будем полагать малым ($\mu \ll 1$). В качестве нулевого приближения возьмём среднее значение вектора весовых коэффициентов $\langle \bar{W} \rangle_0 \equiv \bar{W}_0$, получающееся из усреднения уравнения (4.1.5) в приближении "прямого размыкания" всех смешанных моментов:

$$\bar{W}_0(k+1) = \mathbf{P}\bar{W}_0(k) + \bar{W}_q. \quad (4.1.8)$$

В этом приближении мы вообще пренебрегаем флуктуациями весового вектора, считая $\vec{W}(k) = \langle \vec{W}(k) \rangle_0 = \vec{W}_0(k)$. Заметим, что для получения (4.1.8) из уравнения (4.1.7) следует положить:

$$\bar{\Delta}_{XA} \equiv \langle \mathbf{\Phi}_{XA} \vec{Y} \rangle = \bar{\Delta}_{XA} = \vec{0}. \quad (4.1.9)$$

Стационарное значение весового вектора в нулевом приближении будет удовлетворять уравнению:

$$\mathbf{D} \vec{W}_0 = \vec{W}_q, \quad (4.1.10)$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{I} - \mathbf{P} = \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H$ - проекционная матрица, дополнительная к \mathbf{P} .

Решение уравнения (4.1.10) имеет вид:

$$\vec{W}_{0CT} = \mathbf{D}^+ \vec{W}_q. \quad (4.1.11)$$

Для анализа флуктуаций весового вектора около стационарного решения найдём уравнение для вектора поправки $\vec{W}_{\Pi}(k) \equiv \vec{W}(k) - \vec{W}_0 = \langle \vec{W}_{\Pi}(k) \rangle + \vec{\tilde{W}}(k)$ к нулевому приближению. Вычитая выражение (4.1.8) из формулы (4.1.5), получим вид данного уравнения:

$$\vec{W}_{\Pi}(k+1) = \mathbf{P} \{ \vec{W}_{\Pi}(k) - \mu \cdot \mathbf{\Phi}_{XA}(k+1) \cdot \vec{Y}(k) \}. \quad (4.1.12)$$

В установившемся режиме $\vec{W}_{\Pi}(k) = \mathbf{P} \vec{W}_{\Pi}(k)$, $\mathbf{D} \vec{W}_{\Pi}(k) = \vec{0}$. Это означает, что все поправки (средние и флуктуационные) к нулевому приближению лежат в подпространстве ограничений. Поэтому матрицу $\mathbf{P} \mathbf{R}_{XA}$ можно заменить на эквивалентную эрмитовскую $\mathbf{P} \mathbf{R}_{XA} \mathbf{P}$.

Преобразуем уравнение для флуктуаций (4.1.12), переходя в \mathbf{Q} - матричное представление, диагоналирующее эрмитовскую матрицу $\mathbf{P} \mathbf{R}_{XA} \mathbf{P}$, по следующим формулам:

$$\vec{\Psi} = \mathbf{Q}^{-1} \vec{W}_{\Pi}, \quad \vec{W}_{\Pi} = \mathbf{Q} \vec{\Psi}, \quad \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^H, \quad (4.1.13)$$

Тогда получим для $\vec{\Psi}$ - флуктуационной составляющей весового вектора в \mathbf{Q} - матричном представлении следующее уравнение:

$$\vec{\Psi}(k+1) = \vec{\Psi}(k) - \mu \cdot \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{\Phi}_{XA}(k) \vec{Y}(k). \quad (4.1.14)$$

$$\text{Здесь } \Lambda_{XA} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{R}_{XA} \mathbf{P} \mathbf{Q} = \mathbf{0}. \quad (4.1.15)$$

Решение уравнения (4.1.14) можно формально записать следующим образом:

$$\vec{\Psi}(k+1) = -\mu \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\lambda}(n) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{\Phi}_{XA}(k-n) [\vec{Y}_0(k) + \mathbf{Q} \vec{\Psi}(k-n)], \quad (4.1.16)$$

здесь $\hat{\lambda}(k)$ - диагональная матрица следующего вида:

4.2. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА ААР [117-118,164].

Рассмотрим влияние флуктуаций весовых коэффициентов на корреляционную функцию сигнала на выходе адаптивной антенной решётки. Непосредственно из (4.1.6) и (4.1.19) видно, что в первом (борновском) приближении поправка к среднему значению весового вектора равна нулю $\langle \bar{\Psi}_1(k) \rangle = 0$, $\langle \bar{W}_{\text{Пл}}(k) \rangle = 0$, поскольку $\langle \bar{\Phi}_{\text{ХА}}(k) \rangle = 0$. Для нахождения моментных функций более высокого порядка всюду ниже будем дополнительно предполагать, что $\bar{X}(k)$ является комплексным гауссовским случайным вектором.

Корреляционная функция выходного сигнала может быть записана в виде [49,65]:

$$\begin{aligned} K_Z(m, m+n) &\equiv \langle Z^H(m)Z(m+n) \rangle = \\ &= \langle (F[y(m)])^H (F[y(m+n)]) \rangle = \langle (\bar{A}^T \bar{Y}(m))^H (\bar{A}^T \bar{Y}(m+n)) \rangle = \\ &= \bar{Y}_{CT}^H \mathbf{R}_{AA} \bar{Y}_{CT} + \langle \bar{Y}^H(m) \bar{A}^* \bar{A}^T \bar{Y}(m+n) \rangle. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

В данной формуле первое слагаемое найдено при постоянном стационарном весовом векторе (и, следовательно, при постоянном стационарном выходном сигнале линейной части адаптивной антенной решётки).

Стационарный выходной сигнал линейной части ААР определяется выражением:

$$\bar{Y}_{CT} = [y_{CT} \ y_{CT}^2 \ \dots \ y_{CT}^{N_1}]^T = [\bar{X}^T \bar{W}_{CT} \ (\bar{X}^T \bar{W}_{CT})^2 \ \dots \ (\bar{X}^T \bar{W}_{CT})^{N_1}]^T, \quad (4.2.2)$$

где стационарный весовой вектор \bar{W}_{CT} представлен формулой (4.1.11).

Последнее слагаемое в (4.2.1) может быть представлено в виде произведения двух сомножителей:

$$\begin{aligned} \langle \bar{Y}^H(m) \bar{A}^* \bar{A}^T \bar{Y}(m+n) \rangle &= \langle \bar{Y}^H(m) \bar{A}^* \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} \bar{A}^T \bar{Y}(m+n) \rangle = \langle [\mathbf{Q} \bar{A}^T \bar{Y}(m)]^H [\mathbf{Q} \bar{A}^T \bar{Y}(m+n)] \rangle = \\ &= \left\langle \left[\mathbf{Q} \sum_{j=1}^{N_1} a_j (\bar{X}(m) \bar{W}(m))^j \right]^H \left[\mathbf{Q} \sum_{p=1}^{N_1} a_p (\bar{X}(m+n) \bar{W}(m+n))^p \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Найдём значение выражения (4.2.3) в первом борновском приближении. Для этого учтём, что флуктуационную часть весового вектора можно считать приближённо равной значению первой поправки к весовому вектору, находимую методом теории возмущений $\bar{W}(m) \cong \bar{W}_{\text{Пл}}(m)$. Тогда получим:

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{Y}^H(m) \vec{A}^* \vec{A}^T \vec{Y}(m+n) \rangle \cong \\
& \cong \left\langle \left[\mathbf{Q} \sum_{j=1}^{N_1} a_j (\vec{X}(m) \vec{W}_{\Pi\Pi}(m))^j \right]^H \left[\mathbf{Q} \sum_{p=1}^{N_1} a_p (\vec{X}^T(m+n) \vec{W}_{\Pi\Pi}(m+n))^p \right] \right\rangle. \quad (4.2.4)
\end{aligned}$$

Для нахождения окончательного вида (4.2.4) воспользуемся формулами (4.1.19). После преобразований имеем:

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{Y}^H(m) \vec{A}^* \vec{A}^T \vec{Y}(m+n) \rangle = \\
& \cong \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{p=1}^{N_1} \left\{ \mu^{j+p} a_j a_p \times \right. \\
& \left. \times \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \langle (\vec{Y}_{0CT}^H \tilde{\Phi}_{XA}^H(m-n_1) \mathbf{P} \vec{X}^*(m))^j (\vec{X}^T(m+n) \mathbf{P} \tilde{\Phi}_{XA}^H(m+n-n_2) \vec{Y}_{0CT})^p \rangle \right\}. \quad (4.2.5)
\end{aligned}$$

Из выражения (4.2.5) видно, что последнее слагаемое корреляционной функции сигнала на выходе ААР с нелинейной функцией в цепи обратной связи представляет собой смешанную моментную функцию $j+p$ -ого порядка. Для вычисления такой функции необходимо использовать операцию $j+p$ -кратного дифференцирования случайного процесса, которая позволяет свести вычисления к нахождению смешанной моментной функции второго порядка, а затем результат необходимо проинтегрировать $j+p$ раз для получения общего вида данного слагаемого.

В данной работе мы будем считать, что ряд Вольтерра (4.1.2) содержит в себе только первое слагаемое, а остальные малы, и ими можно пренебречь, т.е. $N_1 = 1$.

Рассчитаем корреляционную функцию выходного сигнала ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму, в предположении, что первый коэффициент разложения нелинейной функции в ряд Вольтерра a_1 много больше остальных коэффициентов $a_{2,3,\dots}$ этого ряда. В этом случае имеем:

$$\begin{aligned}
& K_Z(m, m+n) \equiv \langle Z^H(m) Z(m+n) \rangle = \\
& = \langle (F[y(m)])^H (F[y(m+n)]) \rangle = \langle (\vec{A}^T \vec{Y}(m))^H (\vec{A}^T \vec{Y}(m+n)) \rangle \\
& \cong \langle [a_1 y(m)]^H [a_1 y(m+n)] \rangle = \\
& = a_1^2 \left\{ \begin{aligned} & \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX}(m, m+n) \vec{W}_{CT} + 2 \vec{W}_{CT}^H \langle \tilde{\Phi}_{XX}(m, m+n) \vec{W}(m+n) \rangle + \\ & + \langle \vec{W}^H(m) \mathbf{R}_{XX}(m, m+n) \vec{W}(m+n) \rangle + \\ & + \langle \vec{W}^H(m) \tilde{\Phi}_{XX}(m, m+n) \vec{W}(m+n) \rangle \end{aligned} \right\} \quad (4.2.6)
\end{aligned}$$

Найдём последовательно слагаемые, входящие в выражение для корреляционной функции (4.2.6). Первое слагаемое выражения (4.2.6) может быть представлено в виде:

$$K_{z0}[n] = \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx}(m, m+n) \vec{W}_{CT} = \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{CT} r^{|n|} \quad (4.2.7)$$

Формула (4.2.7) является корреляционной функцией выходного сигнала при постоянном стационарном весовом векторе \vec{W}_{CT} .

Второе слагаемое (4.2.6) в первом борновском приближении имеет следующий вид:

$$\vec{W}_{CT}^H \langle \tilde{\Phi}_{xx}(m, m+n) \tilde{W}(m+n) \rangle = -\frac{\mu a_1}{1-r^2} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{CT} r^{|n|} Sp(\mathbf{PR}_{xx}) \quad (4.2.8)$$

Третье слагаемое формулы (4.2.6) может быть записано следующим образом:

$$\langle \tilde{W}^H(m) \mathbf{R}_{xx}(m, m+n) \tilde{W}(m+n) \rangle = \mu^2 a_1^2 \frac{1-r^2-r^{2n+2}}{(1-r^2)^2} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{CT} r^{|n|} Sp(\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{PR}_{xx}) \quad (4.2.9)$$

И, наконец, последнее слагаемое корреляционной функции выходного сигнала (4.2.6) в первом борновском приближении запишется в виде:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{W}^H(m) \tilde{\Phi}_{xx}(m, m+n) \tilde{W}(m+n) \rangle = & \mu^2 a_1^2 \frac{3-r^2(1+r^{2n})}{(1-r^2)^2} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{PR}_{xx} \mathbf{PR}_{xx} \vec{W}_{CT} r^{|n|} + \\ & + \mu^2 a_1^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{CT} r^{|n|} Sp^2(\mathbf{PR}_{xx}) \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Тогда окончательное выражение для корреляционной функции выходного сигнала адаптивной антенной решётки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму, в стационарном режиме работы примет вид:

$$K_z(m, m+n) = a_1^2 r^{|n|} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{CT} \times \left\{ \begin{aligned} & 1 - \frac{2\mu a_1}{1-r^2} Sp(\mathbf{PR}_{xx}) + \mu^2 a_1^2 \frac{1-r^2-r^{2n+2}}{(1-r^2)^2} Sp(\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{PR}_{xx}) + \\ & + \mu^2 a_1^2 \frac{3-r^2(1+r^{2n})}{(1-r^2)^2} \frac{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{PR}_{xx} \mathbf{PR}_{xx} \vec{W}_{CT}}{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{CT}} + \mu^2 a_1^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2(\mathbf{PR}_{xx}) \end{aligned} \right\} \quad (4.2.11)$$

Из выражения (4.2.11) видно, что влияние флуктуаций весового вектора определяется коэффициентом адаптации μ , взятом в первой и второй степенях, а также коэффициентом автокорреляции между отсчётами входного сигнала r . Нелинейная функция в цепи обратной связи адаптивной антенной решётки в данном случае

представлена коэффициентом a_1 , также влияющим на статистические характеристики ААР.

Вернемся к формуле (4.2.5). В первом борновском приближении для частного случая $j = p$ можно получить вид корреляционной функции на выходе ААР для любого N_1 :

$$K_Z[n] \cong K_{CTZ}[n] + \left. \begin{aligned} & r^{|n|} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT} \left[\frac{1-r^2-r^{2n+2}}{(1-r^2)^2} Sp(\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}) + \right. \\ & + \sum_{j=1}^{N_1} \mu^{2j} a_j^{2j+2} \left. + \frac{3-r^2(1+r^{2n})}{(1-r^2)^2} \frac{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX} \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT}}{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT}} + \right. \\ & \left. + \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2(\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}) \right] \end{aligned} \right\}^j \quad (4.2.12)$$

Из выражения (4.2.11) также следует, что в формуле для корреляционной функции на выходе ААР присутствуют слагаемые второго порядка малости по коэффициенту адаптации μ . Корректный статистический анализ требует вычисления слагаемых такого же порядка малости для второго приближения, что дает следующий вид корреляционной функции:

$$K_Z(m, m+n) = a_1^2 r^{|n|} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT} \times \left. \begin{aligned} & \left[1 - \frac{2\mu a_1}{1-r^2} Sp(\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}) + \mu^2 a_1^2 \frac{1-r^2-r^{2n+2}}{(1-r^2)^2} Sp(\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}) + \right. \\ & + 2\mu^2 a_1^2 \frac{r^2}{1-r^2} \frac{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} (\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT}}{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT}} + \\ & + \mu^2 a_1^2 \left[\frac{3-r^2(1+r^{2n})}{(1-r^2)^2} + \frac{1}{1-r^3} \right] \frac{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX} \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT}}{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT}} + \\ & \left. + \mu^2 a_1^2 \left[\frac{r^2}{(1-r^2)^2} + \frac{1}{1-r} \right] Sp^2(\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.2.13)$$

При вычислении средних, в которые входят кратные суммы, использовалось предположение о малости времени корреляции входных сигналов по сравнению со временем релаксации системы. Это условие в несколько видоизмененной форме можно записать так:

$$\mu a_1 \lambda_n \frac{1}{1-r^2} < \mu a_1 \sum_{n=1}^{N-L} \lambda_n \frac{1}{1-r^2} = \mu a_1 \frac{1}{1-r^2} Sp(\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}) \ll 1. \quad (4.2.14)$$

Если выразить данную формулу через геометрические характеристики помеховой обстановки, то для линейной эквидистантной адаптивной антенной решетки с

нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи и однократным линейным ограничением она примет вид:

$$\frac{\mu a_1}{1-r^2} \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} \pi_n \frac{(N-1)^2}{N} + \pi_{\xi} (N-1) \right\} \ll 1, \quad (4.2.15)$$

здесь π_n, π_{ξ} - мощности n-ого помехового сигнала и собственного шума ААР.

Данные формулы накладывают ограничения на величину параметров μ, r и представляет собой достаточное условие применимости методов теории возмущений для анализа влияния флуктуаций на статистические характеристики адаптивной антенной решетки, содержащей нелинейную функцию в цепи корреляционной обратной связи и настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму.

4.3. СРАВНЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ И РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОДНОМОМЕНТНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ААР [117-120,122-124,128-129,164].

Рассмотрим более подробно одномоментные характеристики флуктуаций весовых коэффициентов и их влияние на суммарную мощность выходного сигнала $\langle |Z|^2 \rangle_{CT}$. Матрицу ковариации вектора весовых коэффициентов в стационарном режиме работы в совпадающие моменты времени в борновском приближении можно представить так [49,65]:

$$\mathbf{K}_{\vec{W}} \equiv \langle \vec{W}^* \vec{W}^T \rangle = K_{\vec{W}}(m, m) \equiv \langle \vec{W}^*(m) \vec{W}^T(m) \rangle \cong \mathbf{Q}^* \langle \vec{\Psi}_1^*(m) \vec{\Psi}_1^T(m) \rangle \mathbf{Q}^T. \quad (4.3.1)$$

Используя (4.1.19), можно получить вид корреляционной матрицы для вектора весовых коэффициентов $\vec{\Psi}$ (4.1.13) в \mathbf{Q} - матричном представлении $\langle \vec{\Psi}_1^* \vec{\Psi}_1^T \rangle$:

$$\begin{aligned} & \langle \vec{\Psi}_1^* \vec{\Psi}_1^T \rangle = \\ & \mathbf{Q}^* \left\langle \mu^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \left(\hat{\lambda}(n) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} \vec{\Phi}_{XA}(m-1-n) \vec{Y}_{OCT} \right)^* \left(\hat{\lambda}(n_1) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} \vec{\Phi}_{XA}(m-1-n_1) \vec{Y}_{OCT} \right)^T \right\rangle \mathbf{Q}^T. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Вычисляя (4.3.2) и учитывая, что адаптивная антенная решётка является узкополосной, получаем:

$$\mathbf{K}_{\vec{W}} = \mu^2 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} Sp(\vec{Y}_{CT}^* \vec{Y}_{CT}^T \mathbf{R}_{AA}) \cdot (\mathbf{P} \mathbf{R}_{XX} \mathbf{P})^* \quad (4.3.3)$$

Из приведённой формулы видно, что поскольку собственные числа корреляционной матрицы входных сигналов \mathbf{R}_{XX} при воздействии внешних помех различны, то в общем случае собственные числа корреляционной матрицы флуктуаций весового

вектора $\mathbf{K}_{\mathcal{P}}$ также различны. Поэтому флуктуации весового вектора в ААР с нелинейной функцией в цепи обратной связи, настраиваемой по дискретному градиентному алгоритму, неизотропны в пространстве весовых коэффициентов. Они равны нулю в направлении ограничений, максимальны в направлении помех, а во всех остальных направлениях имеют минимальную ненулевую величину, определяемую мощностью собственного шума адаптивной антенной решётки. Заметим, что для линейной ААР с градиентным алгоритмом настройки флуктуации весов изотропны, т.е. являются одинаковыми по величине во всех направлениях подпространства ограничений [65,107].

Рисунок 4.1 иллюстрирует выводы, которые следуют из выражения (4.3.3). На нём качественно показана диаграмма рассеяния в подпространстве ограничений для случайного весового вектора ААР с нелинейной функцией в цепи обратной связи, настраиваемой по дискретному градиентному алгоритму (4.1.1). Для сравнения на этом же рисунке приведена диаграмма рассеяния для случайного весового вектора адаптивной антенной решётки с дискретным градиентным алгоритмом настройки, не содержащей нелинейной функции в цепи обратной связи (4.2.2). Из рисунка можно видеть, что для нелинейного дискретного градиентного алгоритма поверхностью равной вероятности рассеяния является эллипсоид, большая полуось которого соответствует направлению помехового сигнала, т.е. флуктуации весового вектора в ААР с нелинейной функцией в цепи обратной связи максимальны в направлении прихода помехи. Расположение малой полуоси эллипсоида соответствует другим $(N - 2)$ -м собственным векторам матрицы $\mathbf{K}_{\mathcal{P}}$, в направлении которых флуктуации существенно меньше и определяются величиной мощности собственного шума данной адаптивной антенной решётки. На этом же рисунке приведена поверхность равной вероятности диаграммы рассеяния для линейного дискретного градиентного алгоритма, при котором собственные числа матрицы $\mathbf{K}_{\mathcal{P}}$ равны друг другу, и данная поверхность является сферой, т.е. флуктуации весового вектора в ААР, не содержащей нелинейной функции в цепи обратной связи, являются изотропными.

Суммарную мощность сигнала на выходе адаптивной антенной решётки с учётом флуктуаций весовых коэффициентов можно записать в виде [49,65]:

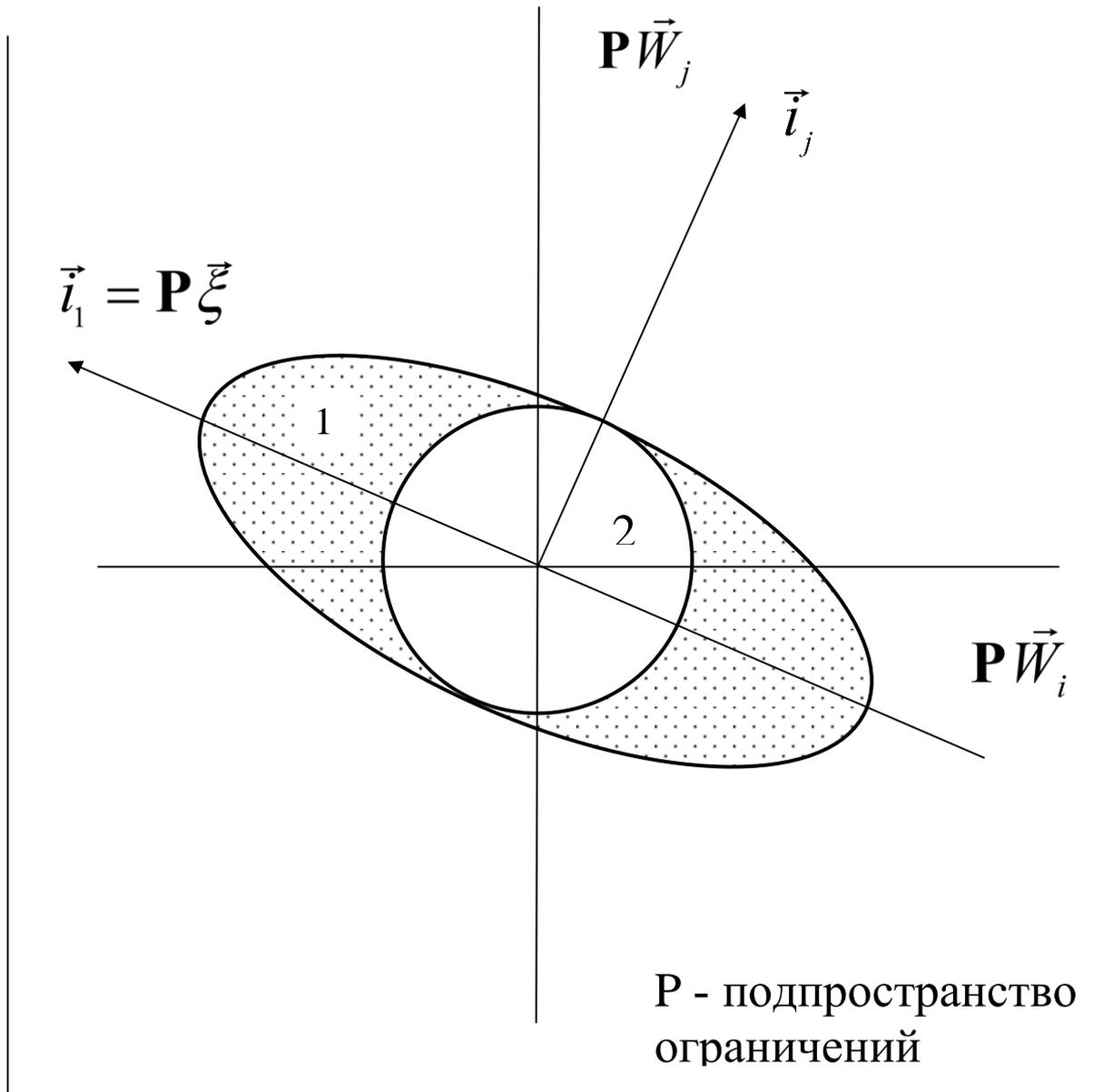


Рис.4.1. Диаграмма рассеяния в подпространстве ограничений для случайного весового вектора ААР с нелинейной функцией в цепи обратной связи, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму.

$$\begin{aligned}
\langle |Z|^2 \rangle_{CT} &= \langle Z^H(k)Z(k) \rangle = \langle [F(y(k))]^H [F(y(k))] \rangle = \\
&= \langle [\bar{A}^T \bar{Y}(k)]^H [\bar{A}^T \bar{Y}(k)] \rangle = \\
&= \langle |Z|^2 \rangle_0 + \langle \bar{Y}^H(k) \bar{A}^* \bar{A}^T(m) \bar{Y}(k) \rangle
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

$$\text{где } \langle |Z|^2 \rangle_0 \equiv \bar{Y}_{CT}^H \mathbf{R}_{AA} \bar{Y}_{CT} \tag{4.3.5}$$

-выходная мощность без учёта флуктуаций весовых коэффициентов.

Однако для случая, когда первый коэффициент разложения нелинейной функции в ряд Вольтерра a_1 много больше коэффициентов следующих порядков $a_{2,3,\dots}$ этого ряда, формула (4.3.4) приобретает вид:

$$\langle |Z|^2 \rangle_{CT} = \langle Z^H(k)Z(k) \rangle = \langle [F(y(k))]^H [F(y(k))] \rangle \approx \langle [a_1 y(m)]^H [a_1 y(m)] \rangle, \tag{4.3.6}$$

Данная характеристика может быть получена из общего выражения для корреляционной функции выходного сигнала (4.2.11). Формула мощности выходного сигнала ААР получается из (4.2.11), если в данном выражении положить $n=0$. Тогда после преобразований получим:

$$\begin{aligned}
\langle |Z|^2 \rangle_{CT} &= a_1^2 \langle |Z|^2 \rangle_0 \times \\
&\times \left\{ 1 - \frac{2\mu a_1}{1-r^2} Sp(\mathbf{PR}_{XX}) + \mu^2 a_1^2 \frac{1-2r^2}{(1-r^2)^2} Sp(\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{PR}_{XX}) + \right. \\
&\left. + \mu^2 a_1^2 \frac{3-2r^2}{(1-r^2)^2} \frac{\bar{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \mathbf{PR}_{XX} \mathbf{PR}_{XX} \bar{W}_{CT}}{\bar{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \bar{W}_{CT}} + \mu^2 a_1^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2(\mathbf{PR}_{XX}) \right\}.
\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Здесь $\langle |Z|^2 \rangle_0 = \bar{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \bar{W}_{CT}$ - выходная мощность ААР, найденная при постоянном стационарном весовом векторе.

Сравним формулу (4.3.7) с выражением, найденным для адаптивной антенной решётки с дискретным градиентным алгоритмом настройки без нелинейной функции в цепи обратной связи [65]:

$$\langle |Z|^2 \rangle_{CT} = \left\{ 1 + \frac{1}{2} \mu \frac{1-3r^2}{1-r^2} Sp(\mathbf{PR}_{XX}) \right\} \bar{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \bar{W}_{CT} \tag{4.3.8}$$

Сравнение выражений (4.3.7) и (4.3.8) показывает, что качественное влияние флуктуаций на выходную мощность одинаковое. При настройке как ААР с нелинейной функцией в цепи обратной связи, так и адаптивной антенной решётки без нелинейности может наблюдаться как увеличение выходной мощности, так и её уменьшение в зависимости от величины коэффициента корреляции входных сигналов r . Однако в первом случае флуктуации весового вектора зависят от большего числа параметров ($a_1, r, \mu, Sp(\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{PR}_{XX}), Sp(\mathbf{PR}_{XX})$), в то время как в антенной решётке без не-

линейной функции в цепи обратной связи имеет место зависимость флуктуаций только от r , μ , $Sp(\mathbf{PR}_{xx})$.

Для произвольного значения N_1 - числа слагаемых в разложении нелинейной функции в ряд Вольтерра имеем следующее выражение для выходной мощности ААР:

$$\begin{aligned} \langle |Z|^2 \rangle_{CT} \cong & \langle |Z|^2 \rangle_0 + \\ & + \sum_{j=1}^{N_1} \mu^{2j} a_j^{2j+2} \left\{ \begin{aligned} & \langle |Z|^2 \rangle_0 \left[\frac{1-2r^2}{(1-r^2)^2} Sp(\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{PR}_{xx}) + \right. \\ & + \frac{3-2r^2}{(1-r^2)^2} \frac{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{PR}_{xx} \mathbf{PR}_{xx} \vec{W}_{CT}}{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{CT}} + \\ & \left. + \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2(\mathbf{PR}_{xx}) \right] \end{aligned} \right\}^j \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Кроме того, корректный статистический анализ, учитывающий слагаемые второго порядка малости по коэффициенту адаптации μ из второго приближения дает мощность на выходе ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму:

$$\begin{aligned} \langle |Z|^2 \rangle_{CT} = & a_1^2 \langle |Z|^2 \rangle_0 \times \\ & \times \left\{ \begin{aligned} & 1 - \frac{2\mu a_1}{1-r^2} Sp(\mathbf{PR}_{xx}) + \mu^2 a_1^2 \frac{1-2r^2}{(1-r^2)^2} Sp(\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{PR}_{xx}) + \\ & + 2\mu^2 a_1^2 \frac{r^2}{1-r^2} \frac{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} (\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{xx} \vec{W}_{CT}}{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{CT}} + \\ & + \mu^2 a_1^2 \left[\frac{3-2r^2}{(1-r^2)^2} + \frac{1}{1-r^3} \right] \frac{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{PR}_{xx} \mathbf{PR}_{xx} \vec{W}_{CT}}{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{CT}} + \\ & + \mu^2 a_1^2 \left[\frac{r^2}{(1-r^2)^2} + \frac{1}{1-r} \right] Sp^2(\mathbf{PR}_{xx}) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Было проведено численное оценивание величин слагаемых, входящих в выражение (4.3.10). Оценивание было проведено для 7-ми элементной полуволновой ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму с однократным линейным ограничением. На вход указанной антенной решётки подавались статистически независимые полезный сигнал и помеха, приходившие соответственно под углами 0° и 45° к нормали, проведённой к плоскости решётки. Мощность помехи была в 100 раз больше мощности полезного сигнала. В ААР присутствовал также собственный шум, мощность которого была в 1000 раз меньше мощности помехи. В качестве нелинейной функции в

цепи обратной связи рассматривалась функция – сигмоид $F[y]=1/(1+e^{-ay})$, где $a=0.5$ – коэффициент, определяющий конкретный вид данной функции. Для $\mu=0.0001$; $r=0.5$ были получены следующие значения слагаемых, входящих в выражение (4.3.10):

$$c_0 = a_1^2 \cdot \langle |Z|^2 \rangle_0 = 0.0103$$

$$c_1 = -\frac{2\mu a_1^3}{1-r^2} Sp(\mathbf{PR}_{xx}) \cdot \langle |Z|^2 \rangle_0 = -3.1321 \cdot 10^{-6};$$

$$c_2 = \mu^2 a_1^4 \frac{1-2r^2}{(1-r^2)^2} Sp(\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{PR}_{xx}) \cdot \langle |Z|^2 \rangle_0 = 1.1867 \cdot 10^{-10}$$

$$c_3 = 2\mu^2 a_1^4 \frac{r^2}{1-r^2} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} (\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{xx} \vec{W}_{CT} = 2.6859 \cdot 10^{-8};$$

$$c_4 = \mu^2 a_1^4 \left[\frac{3-2r^2}{(1-r^2)^2} + \frac{1}{1-r^3} \right] \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{PR}_{xx} \mathbf{PR}_{xx} \vec{W}_{CT} = 1.8635 \cdot 10^{-9};$$

$$c_5 = \mu^2 a_1^4 \left[\frac{r^2}{(1-r^2)^2} + \frac{1}{1-r} \right] Sp^2(\mathbf{PR}_{xx}) \cdot \langle |Z|^2 \rangle_0 = 2.3762 \cdot 10^{-10}$$

Оценивание показало, что поправка к выражению выходной мощности, найденная в первом борновском приближении, на шесть порядков меньше мощности, найденной при постоянном стационарном весовом векторе. Поправки к выражению выходной мощности, найденные во втором приближении, меньше поправок первого порядка в 100 – 10000 раз. Таким образом, можно не учитывать второе приближение при анализе работы адаптивной антенной решетки с учетом флуктуаций весового вектора.

Для количественного сравнения влияния флуктуаций весового вектора на величину выходной мощности были построены графики зависимости флуктуационной

$$\text{части выходной мощности } M = \frac{\langle |Z|^2 \rangle_{CT} - \langle |Z|^2 \rangle_0}{\langle |Z|^2 \rangle_{CT}} \cdot 100\% \text{ от величины коэффициента адаптации } \mu \text{ и коэффициента корреляции между отсчётами входных сигналов } r.$$

Сравнивались адаптивные антенные решётки с нелинейной функцией в цепи обратной связи и без неё. Рассматривались ААР с однократным линейным ограничением в направлении полезного сигнала, настраивающиеся по дискретному градиентному алгоритму. На входы указанных антенных решёток подавались статистически независимые полезный сигнал и помеха, приходившие соответственно под углами 0° и 45° к нормали, проведённой к плоскости решёток. Мощность помехи была в 10 раз больше мощности полезного сигнала. В ААР присутствовал также собственный

шум, мощность которого была в 100 раз меньше мощности помехи. В качестве нелинейной функции в цепи обратной связи рассматривалась функция – сигмоид $F[y]=1/(1+e^{-ay})$, где a - коэффициент, определяющий конкретный вид данной функции.

На рисунке 4.2 и рисунке 4.3 представлена зависимость «флуктуационной» части выходной мощности адаптивной антенной решётки при наличии (рисунок 4.2) и отсутствии (рисунок 4.3) нелинейной функции в цепи корреляционной обратной связи от величины коэффициента адаптации μ .

Из рисунков видно, что при поступлении входных сигналов с некоррелированными отсчётами ($r = 0$, кривые 1) флуктуации вносят существенно больший вклад в величину выходной мощности ААР, не содержащей нелинейную функцию в цепи обратной связи, по сравнению с антенной решёткой, имеющей такую функцию. Надо отметить, что в данной ситуации в адаптивной антенной решётке, не содержащей нелинейную функцию в цепи корреляционной обратной связи, флуктуации приводят к увеличению выходной мощности по сравнению с мощностью, получаемой при стационарном весовом векторе ($M > 0$, эффект misadjustment [17]). В адаптивной антенне с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи имеет место эффект «перекомпенсации», поскольку выходная мощность при учёте флуктуаций меньше мощности, найденной при постоянном стационарном весовом векторе.

При входных сигналах с сильно коррелированными отсчётами ($r = 0.9$, кривые 2) флуктуации вносят также существенно больший вклад в величину выходной мощности ААР, не имеющей нелинейную функцию в цепи обратной связи. Необходимо подчеркнуть, что в данном случае в сравниваемых антенных решётках имеют место одинаковые эффекты. Так и в ААР с нелинейной функцией в цепи обратной связи, и в адаптивной антенне без нелинейной функции имеет место эффект «перекомпенсации» - выходная мощность становится меньше мощности, найденной при постоянном стационарном весовом векторе ($M < 0$, [49,65,107,115-116]).

На рисунке 4.4 представлен график зависимости флуктуационной части выходной мощности M от величины коэффициента корреляции между отсчётами входных сигналов r при фиксированном коэффициенте адаптации ($\mu = 0.001$). Из рисунка 4.4 можно видеть, что флуктуации весового вектора вносят существенно меньший вклад в величину выходной мощности антенной решётки с нелинейной функцией в цепи обратной связи (кривая 1) по сравнению с ААР, не имеющей нелинейной функции в цепи корреляционной обратной связи (кривая 2). Необходимо

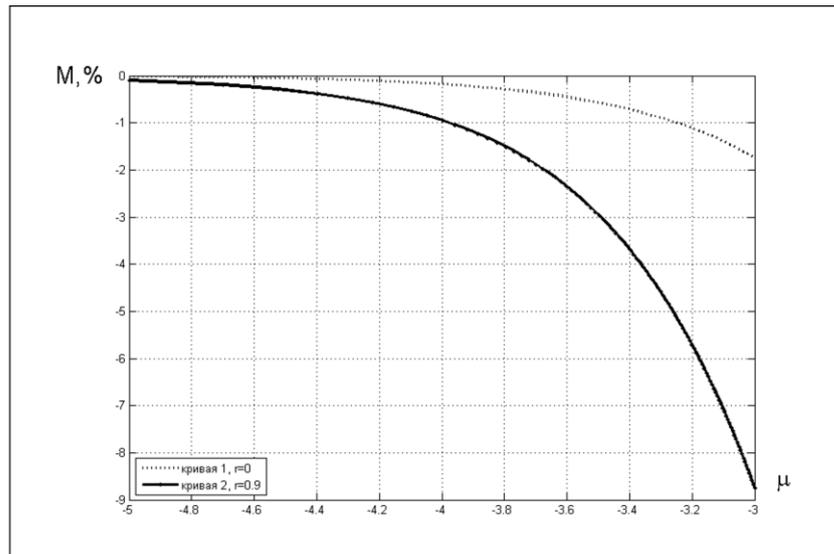


Рис. 4.2. Зависимость «флуктуационной» части выходной мощности адаптивной антенной решётки при наличии нелинейной функции в цепи обратной связи от величины коэффициента адаптации μ (кривая 1 - $r = 0$, кривая 2 - $r = 0.9$).

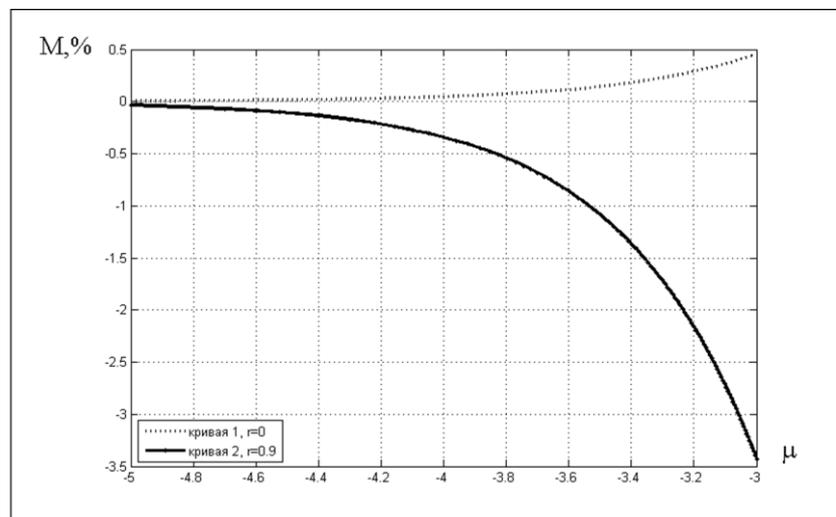


Рис. 4.3. Зависимость «флуктуационной» части выходной мощности адаптивной антенной решётки при отсутствии нелинейной функции в цепи обратной связи от величины коэффициента адаптации μ (кривая 1 - $r = 0$, кривая 2 - $r = 0.9$).

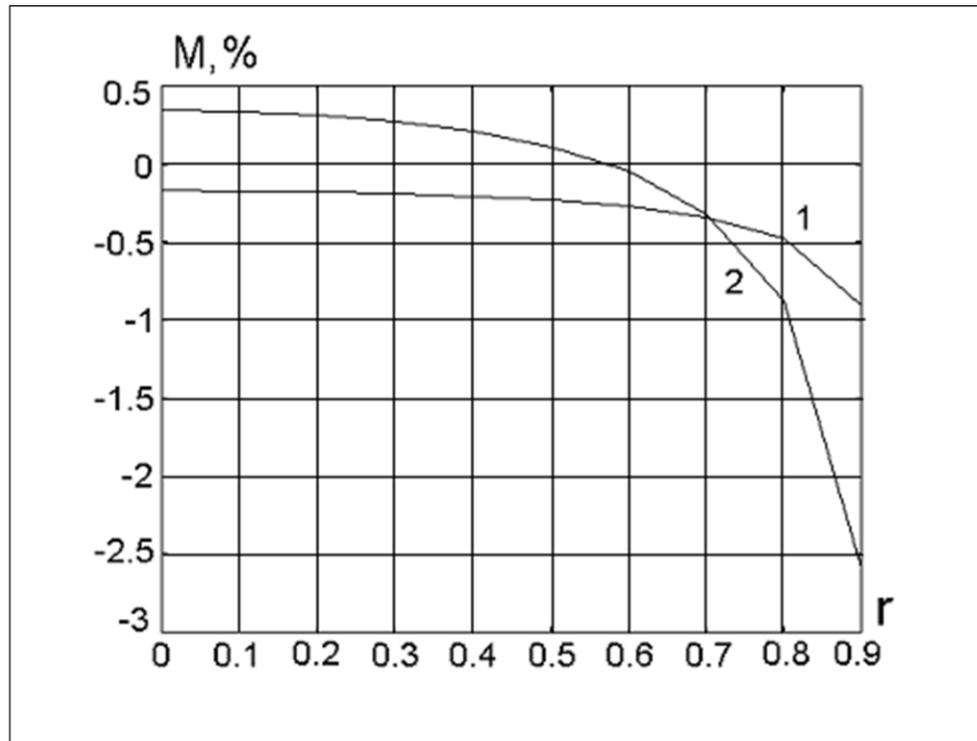


Рис. 4.4. Зависимость флуктуационной части выходной мощности M от величины коэффициента корреляции между отсчётами входных сигналов r . Коэффициент адаптации $\mu = 0.001$ (кривая 1 – ААР с нелинейной функцией в цепи ОС, кривая 2 – ААР без нелинейной функции в цепи ОС).

отметить, что в ААР с нелинейной функцией в цепи обратной связи имеет место эффект «перекомпенсации» вне зависимости от величины r (кривая 1), а в антенной решётке, не содержащей нелинейной функции в цепи обратной связи – по мере увеличения r эффект misadjustment постепенно сменяется эффектом «перекомпенсации» (кривая 2).

РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.

Моделировалась N - элементная узкополосная ААР ($N=7$) с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, работающая по градиентному алгоритму (4.1.1) с однократными линейными ограничениями ($L=1$) на диаграмму направленности. Расстояние между элементами ААР, расположенными вдоль линии, было равно половине длины волны входных сигналов. В качестве нелинейной функции, присутствующей в цепи корреляционной обратной связи была выбрана функция – сигмоид $F[y]=1/(1+e^{-ay})$, где $a=0.5$.

Предполагалось, что на ААР поступают статистически независимые полезный сигнал и одна помеха с одинаковыми коэффициентами корреляции между отсчётами $r_s = r_\xi = 0$. Углы прихода полезного сигнала и помехи были равны соответственно $\Theta_s=0^\circ$, $\Theta_\xi=45^\circ$. Мощность помехи была в 100 раз больше мощности полезного сигнала. В ААР присутствовал также собственный шум, мощность которого составляла 0.1 (-10 dB) мощности полезного сигнала. Нормирование мощностей входных сигналов было осуществлено относительно мощности собственного шума ААР (мощность собственного шума была равна 1, мощности полезного сигнала и помехи были равны соответственно 10 и 1000).

Для проверки формулы (4.3.6) проводилось сравнение теоретически найденного изменения относительной величины выходной мощности ААР

$$M = \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\mu a_1}{1-r^2} Sp(\mathbf{PR}_{xx}) + \mu^2 a_1^2 \frac{1-2r^2}{(1-r^2)^2} Sp(\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{PR}_{xx}) + \\ & + \mu^2 a_1^2 \frac{3-2r^2}{(1-r^2)^2} \frac{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{PR}_{xx} \mathbf{PR}_{xx} \vec{W}_{CT}}{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{CT}} + \mu^2 a_1^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2(\mathbf{PR}_{xx}) \end{aligned} \right\} \times 100\%$$

с соответствующим значением, полученным на основании компьютерного модели-

рования: $M = \frac{\langle |Z|^2 \rangle_{CT} - \langle |Z|^2 \rangle_0}{\langle |Z|^2 \rangle_0} \cdot 100\%$ в зависимости от величины коэффициента

адаптации μ (рис. 4.5).

Определение мощности выходного сигнала ААР при компьютерном моделировании велось путём усреднения по ансамблю 200000 реализаций выходного случайного процесса. Длина реализации была равна 100 дискретным временным отсчетам. Стартовыми весовыми коэффициентами служили \bar{w}_{CT} , определяемые формулой (4.1.11).

Исследовалась зависимость величины “перекомпенсации” мощности от значения μ - коэффициента адаптации.

Из сравнения теоретических кривых и кривых, полученных методом компьютерного моделирования, рисунка 4.5 можно видеть, что влияние флуктуаций весовых коэффициентов на мощность сигнала на выходе ААР зависит от величины коэффициента адаптации μ . По мере роста коэффициента адаптации увеличивается величина рассогласования выходной мощности со своим значением, полученным при постоянном стационарном весовом векторе. Имеет место эффект перекомпенсации $M < 0$. Некоторые различия между теоретическими и модельными данными обусловлены конечным временем усреднения при получении значений относительной величины выходной мощности M и наличием в ААР собственного шума. Различия между теоретическими результатами и результатами компьютерного моделирования при величинах коэффициента адаптации $\mu \geq 5 \times 10^{-5}$ обусловлены несоблюдением малости параметра μ , по которому строился ряд теории возмущений.

Таким образом, проведённое исследование показало, что в ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму с однократным линейным ограничением, из-за флуктуаций весовых коэффициентов наблюдается уменьшение мощности выходного сигнала, по сравнению с мощностью, полученной при постоянном стационарном весовом векторе, тем большее, чем больше значение коэффициента адаптации μ .

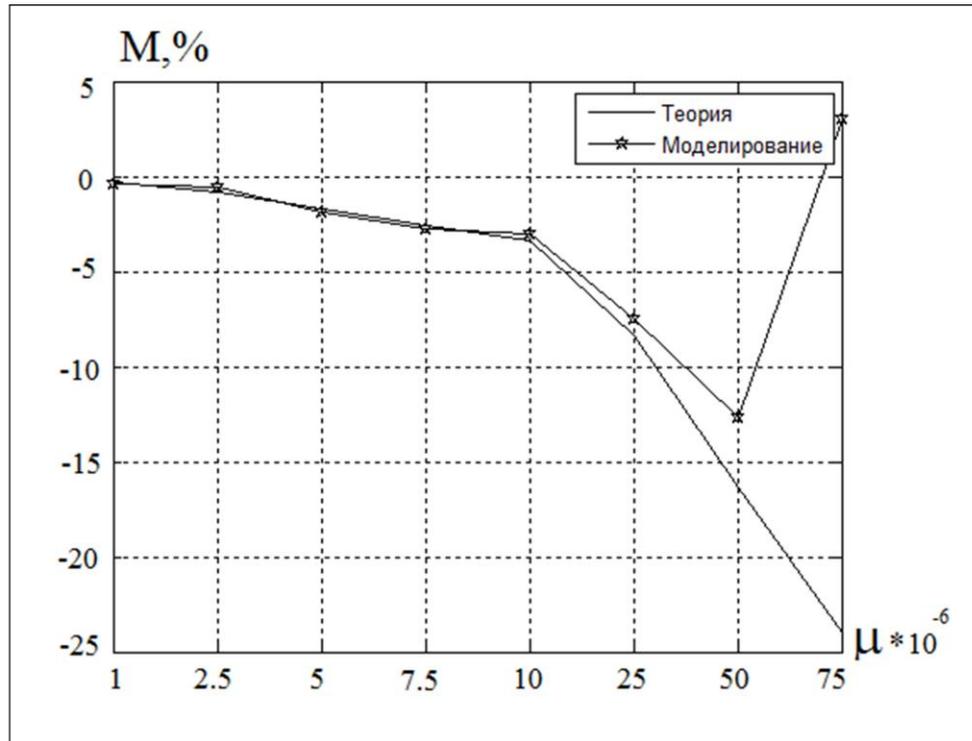


Рис. 4.5. Зависимость относительной величины выходной мощности адаптивной антенной решетки M от значений коэффициента адаптации μ .

4.4. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ ААР С УЧЕТОМ ФЛУКТУАЦИЙ ВЕСОВОГО ВЕКТОРА - ДИАГРАММА НАПРАВЛЕННОСТИ, КОЭФФИЦИЕНТ НАПРАВЛЕННОГО ДЕЙСТВИЯ, КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ, ПОТЕРИ В ВЫХОДНОМ ОТНОШЕНИИ СИГНАЛ / ШУМ [124-125,146-147,169].

Рассмотрим достаточно общую схему N - элементной узкополосной адаптивной антенной решётки с линейными ограничениями на диаграмму направленности, содержащую нелинейную функцию в цепи корреляционной обратной связи.

Настройка вектора весовых коэффициентов \vec{W} антенных решёток, работающих по одному из градиентных методов, описывается N - мерным векторным уравнением и в дискретном времени имеет вид:

$$\vec{W}(k+1) = \mathbf{P}\{\vec{W}(k) - \mu \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{X}^*(k)Z(k)\} + \vec{W}_q. \quad (4.4.1)$$

Здесь $\vec{X}(k)$ - вектор комплексных огибающих входных сигналов на приёмных элементах решётки. При анализе предполагалось, что вектор входных сигналов и вектор весовых коэффициентов связаны между собой негауссовской статистической зависимостью. \mathbf{P} - проекционная матрица, обеспечивающая введение многократных линейных ограничений на диаграмму направленности ААР вида [49,65]:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H; \quad (4.4.2)$$

$\mathbf{C} \equiv [\vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_L]$ - матрица ограничений размерности $N \times L$, столбцами которой являются линейно - независимые векторы ограничений \vec{C}_l , L - число вводимых ограничений; μ - коэффициент адаптации; $\vec{W}_q = \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \vec{H}$ - вектор комплексных весовых коэффициентов, соответствующих диаграмме направленности покоя (при отсутствии внешних помех); +, H, * соответственно знаки псевдообращения, эрмитовского и комплексного сопряжения, \mathbf{I} - единичная $N \times N$ матрица [49,65].

Поясним оставшиеся обозначения. \mathbf{B} - матрица, вид которой определяется конкретным алгоритмом настройки, по которому работает адаптивная антенная решётка. Так для дискретного градиентного алгоритма $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, а для быстрого рекуррентного алгоритма - $\mathbf{B} = (\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}$.

В выражении (4.4.1) $Z(k)$ - выходной сигнал антенной решётки, который может быть записан в виде ряда Вольтерра [177]:

$$Z(k) = F[y(k)] = \sum_{j=1}^{N_1} a_j \cdot y^j(k), \quad (4.4.3)$$

где $F[\]$ - нелинейная функция в цепи обратной связи, $y(k)$ - выходной сигнал линейной части ААР, a_j - коэффициенты разложения нелинейности F в ряд Вольтерра [177]. Указанные коэффициенты могут быть представлены следующим образом [177]:

$$a_j = \frac{1}{j!} F^{(j)}[y=0]. \quad (4.4.4)$$

Запишем выходной сигнал $Z(k)$ в матричной форме. Введём два N_1 -мерных вектора: вектор коэффициентов ряда Вольтерра $\vec{A} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{N_1}]^T$ и вектор $\vec{Y}(k) = [y(k) \ y^2(k) \ \dots \ y^{N_1}(k)]^T$, представляющий собой вектор степеней выходного сигнала линейной части адаптивной антенной решётки. Тогда выходной сигнал ААР примет вид:

$$Z(k) = \vec{A}^T \cdot \vec{Y}(k). \quad (4.4.5)$$

Учитывая (4.4.5), перепишем уравнение (4.4.1) следующим образом:

$$\vec{W}(k+1) = \mathbf{P}\{\vec{W}(k) - \mu \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{X}^*(k) \cdot \vec{A}^T \cdot \vec{Y}(k)\} + \vec{W}_q. \quad (4.4.6)$$

Будем считать, что на приёмные элементы рассматриваемой узкополосной ААР поступает входной сигнал с коэффициентом автокорреляции r между соседними временными отсчётами. Приближение узкополосности позволяет представить матричную корреляционную функцию входных сигналов адаптивной антенной решётки в виде произведения пространственной и временной частей:

$$\mathbf{R}_{XX}(k, k+n) \equiv \langle \vec{X}^*(k) \vec{X}^T(k+n) \rangle = \mathbf{R}_{XX} r^{|n|}, \quad (4.4.7)$$

где r - коэффициент корреляции между отсчётами входного сигнала;

\mathbf{R}_{XX} - пространственная часть корреляционной матрицы входных сигналов.

Необходимо подчеркнуть, что данная модель матричной корреляционной функции входных сигналов позволяет рассматривать случай воздействия на ААР произвольного числа помех, действующих с разных направлений, с одинаковыми коэффициентами корреляции между отсчётами.

Для подробного анализа уравнения (4.4.1) воспользуемся методом последовательных приближений и введём следующие обозначения:

$$\vec{W} = \langle \vec{W} \rangle + \vec{\tilde{W}}, \quad \vec{Y} = \langle \vec{Y} \rangle + \vec{\tilde{Y}}, \quad \mathbf{M}_{XX}(k) \equiv \mathbf{R}_{XX} + \vec{\Phi}(k) \quad (4.4.8)$$

где случайный весовой вектор \vec{W} , вектор степеней выходного сигнала линейной части адаптивной антенной решётки \vec{Y} и стохастическая матрица $\mathbf{M}_{XX} \equiv \vec{X}^*(k)\vec{X}^T(k)$ представлены в виде сумм их средних значений $\langle \vec{W} \rangle$, $\langle \vec{Y} \rangle$, \mathbf{R}_{XX} и «флуктуационных» составляющих $\vec{W}(k)$, $\vec{Y}(k)$, $\vec{\Phi}(k)$.

Для нахождения матрицы ковариации весовых коэффициентов [49,65]:

$$\mathbf{K}_{\vec{W}}(m, m) \equiv \langle \vec{W}^*(m)\vec{W}^T(m) \rangle \quad (4.4.9)$$

воспользуемся методом возмущений по параметру μ , который будем полагать малым ($\mu \ll 1$). В качестве нулевого приближения возьмём среднее значение весового вектора $\langle \vec{W} \rangle_0 \equiv \vec{W}_0$, получающееся из усреднения уравнения (4.4.1) в приближении "прямого размыкания" всех смешанных моментов [65]:

$$\vec{W}_0(k+1) = \mathbf{P}\vec{W}_0(k) + \vec{W}_q. \quad (4.4.10)$$

Запишем уравнение для вектора поправки к нулевому приближению

$$\vec{W}_{\Pi}(k) \equiv \vec{W}(k) - \vec{W}_0 = \langle \vec{W}_{\Pi}(k) \rangle + \vec{W}(k):$$

$$\vec{W}_{\Pi}(k+1) = \mathbf{P}\{\vec{W}_{\Pi}(k) - \mu \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{\Phi}_{XA}(k+1) \cdot \vec{Y}(k)\}. \quad (4.4.11)$$

Решая данное уравнение методами теории возмущений в стационарном режиме работы ААР, можно получить в первом борновском приближении следующее выражение для матрицы ковариации весовых коэффициентов адаптивной антенной решётки, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму:

$$\mathbf{K}_{\vec{W}} = \mu^2 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} Sp(\vec{Y}_{CT}^* \vec{Y}_{CT}^T \mathbf{R}_{AA}) \cdot (\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^* \quad (4.4.12)$$

В случае ААР с алгоритмом рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов данная характеристика будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{K}_{\vec{W}} = \mu^2 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} Sp(\vec{Y}_{CT}^* \vec{Y}_{CT}^T \mathbf{R}_{AA}) \cdot [(\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+]^* \quad (4.4.13)$$

Здесь \vec{Y}_{CT} - вектор степеней выходного сигнала линейной части ААР, найденного при постоянном стационарном весовом векторе; $\mathbf{R}_{AA} = \vec{A}^* \cdot \vec{A}^T$ - матрица, полученная из коэффициентов ряда Вольтерра.

Из формул (4.4.12) и (4.4.13) видно, что поскольку собственные числа матриц

$(\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^*$ и $[(\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+]^*$ определяются мощностью помехи, приходящей на ААР, и мощностью собственного шума (СШ) антенны и поэтому различны в разных направлениях подпространства ограничений, то и флуктуации весового вектора для обоих алгоритмов настройки ААР являются неизотропными. В направлении ограничений они в обоих случаях равны нулю. В направлении прихода помехи флуктуации имеют максимальное значение для дискретного градиентного алгоритма, и минимальное – для быстрого рекуррентного алгоритма. В остальных направлениях флуктуации имеют одинаковую величину, определяемую мощностью собственного шума ААР, для первого алгоритма настройки, и $1/\text{мощность СШ ААР}$ – для второго.

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕКТОРА ФЛУКТУАЦИЙ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ.

Рассмотрим более подробно матрицу ковариации весовых коэффициентов (выражения (4.4.12) и (4.4.13)) для наиболее часто используемых схем адаптивных антенных решёток.

ААР без ограничений.

Предположим, что адаптивная система работает по критерию максимизации отношения сигнал – шум (ААР МОСШ). В этом случае матрица ограничений \mathbf{P} равна единичной матрице $\mathbf{P} = \mathbf{I}$. Тогда выражение для матрицы ковариации весовых коэффициентов ААР МОСШ, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму, получается, если подставить $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ в формулу (4.4.12):

$$\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{w}}} = \mu^2 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} Sp(\tilde{\mathbf{Y}}_{CT}^* \tilde{\mathbf{Y}}_{CT}^T \mathbf{R}_{AA}) \cdot (\mathbf{R}_{XX})^* \quad (4.4.14)$$

Из формулы видно, что флуктуации весового вектора имеют максимальное значение в направлении прихода помехи. Второй по величине максимум наблюдается в направлении прихода полезного сигнала (поскольку второе по величине собственное число матрицы \mathbf{R}_{XX} - это собственное число, определяемое мощностью полезного сигнала). Во всех остальных направлениях флуктуации одинаковы и минимальны и определяются величиной мощности собственного шума ААР.

Для ААР МОСШ с быстрым рекуррентным алгоритмом данное выражение примет следующий вид:

$$\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{w}}} = \mu^2 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} Sp(\tilde{\mathbf{Y}}_{CT}^* \tilde{\mathbf{Y}}_{CT}^T \mathbf{R}_{AA}) \cdot [(\mathbf{R}_{XX})^+]^* \quad (4.4.15)$$

Из формулы (4.4.15) следует, что имеет место ситуация, противоположная описанной для дискретного градиентного алгоритма – флуктуации минимальны в

направлении прихода помехи, второй по величине минимум наблюдается в направлении прихода полезного сигнала, а во всех остальных направлениях флуктуации максимальны и одинаковы по величине.

Таким образом, из выражений (4.4.14) и (4.4.15) видно, что в антенных решётках, работающих по критерию максимизации отношения сигнал – шум, с обоими рассматриваемыми алгоритмами настройки флуктуации весового вектора неизотропны так же, как и в системах с многократными линейными ограничениями.

Для сравнения приведём выражение для матрицы ковариации весовых коэффициентов ААР МОСШ, настраиваемой по дискретному градиентному алгоритму, но не имеющей нелинейной функции в цепи обратной связи [108]:

$$\mathbf{K}_{\tilde{W}} = \frac{1}{2} \mu \cdot \left\{ \langle |Z|^2 \rangle_{\xi} \frac{1+r_{\xi}^2}{1-r_{\xi}^2} + \langle |Z|^2 \rangle_S \frac{1+r_S r_{\xi}}{1-r_S r_{\xi}} \right\} \times \mathbf{I}, \text{ где} \quad (4.4.16)$$

r_S, r_{ξ} - соответственно коэффициенты автокорреляции между отсчётами полезного сигнала и помехи; $\langle |Z|^2 \rangle_S, \langle |Z|^2 \rangle_{\xi}$ - мощности (соответственно) полезного сигнала и помехи на выходе ААР при постоянном стационарном весовом векторе.

Сравнение показывает, что именно присутствие нелинейной функции в цепи обратной связи антенной решётки обуславливает неизотропность флуктуаций весового вектора, поскольку в линейной ААР МОСШ флуктуации изотропны.

Ещё одна особенность, на которую необходимо обратить внимание, состоит в том, что флуктуации весового вектора в антенной решётке, содержащей нелинейную функцию в цепи обратной связи, имеют по μ второй порядок малости, в то время, как в линейной ААР – первый. Это означает, что флуктуации существенно меньше в адаптивной антенне, содержащей нелинейную функцию в цепи обратной связи по сравнению с ААР, не имеющей такой функции.

Из выражений (4.4.14) и (4.4.15) нетрудно получить формулы для дисперсии флуктуаций весовых коэффициентов в адаптивных антенных решётках, работающих по критерию максимизации отношения сигнал – шум. Так для ААР с дискретным градиентным алгоритмом настройки это выражение имеет вид:

$$\sigma_W^2 = \mu^2 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} Sp(\vec{Y}_{CT}^* \vec{Y}_{CT}^T \mathbf{R}_{AA}) \cdot \pi_X, \quad (4.4.17)$$

где π_X - суммарная мощность входных сигналов и собственного шума ААР.

Для адаптивной антенной решётки, настраиваемой по быстрому рекуррентному алгоритму, дисперсия флуктуаций весового вектора описывается формулой:

$$\sigma_w^2 = \mu^2 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} Sp(\vec{Y}_{CT}^* \vec{Y}_{CT}^T \mathbf{R}_{AA}) \cdot \left\{ \frac{1}{\pi_{\xi_1}} - \frac{\pi_{\xi} / \pi_{\xi}^2}{1 + \pi_{\xi} N / \pi_{\xi_1}} \right\}, \quad (4.4.18)$$

где π_{ξ} - мощность помехи; π_{ξ_1} - мощность собственного шума ААР.

Из выражений (4.4.17) и (4.4.18) следует, что в ААР МОСШ, настраивающихся по любому из рассматриваемых алгоритмов, дисперсии флуктуаций всех весовых коэффициентов одинаковы и равны между собой.

ААР с однократным линейным ограничением.

Найдём вид ковариационной матрицы весовых коэффициентов для адаптивной антенны с однократным линейным ограничением. Будем считать, что полезный сигнал приходит с направления, перпендикулярного к плоскости решётки. В этом случае матрицу ограничений можно записать в виде:

$$\mathbf{C} \equiv \vec{C}_1 = \vec{S}^* = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T. \quad (4.4.19)$$

Учитывая (4.4.19), уравнение поверхности ограничений можно записать следующим образом:

$$\vec{C}_1^H \vec{W} = \vec{S}^T \vec{W} = N. \quad (4.4.20)$$

Подставляя (4.4.20) в (4.4.2), нетрудно получить явное выражение проекционной матрицы для ААР с однократным линейным ограничением:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{1}{N} \vec{C}_1 \vec{C}_1^H. \quad (4.4.21)$$

Будем рассматривать случай поступления на адаптивную антенную решётку одной помехи. Предположим также, что в ААР присутствует собственный шум. Тогда корреляционная матрица входных сигналов будет иметь вид:

$$\mathbf{R}_{XX} = \pi_{\xi_1} \mathbf{I} + \pi_S \vec{S}^* \vec{S}^T + \pi_{\xi} \vec{S}_1^* \vec{S}_1^T, \quad (4.4.22)$$

где \vec{S} , \vec{S}_1 - соответственно вектора - фазоры полезного сигнала и помехи; π_{ξ_1} , π_S , π_{ξ} - мощности собственного шума ААР, полезного сигнала и помехи соответственно.

Чтобы найти матрицу ковариации весового вектора, подставим формулу для проекционной матрицы (4.4.21) и выражение для корреляционной матрицы входных сигналов (4.4.22) в общую формулу для $\mathbf{K}_{\vec{W}}$ ААР дискретным градиентным алгоритмом настройки (4.4.12), а затем в выражение для $\mathbf{K}_{\vec{W}}$ антенной решётки с быстрым рекуррентным алгоритмом (4.4.13).

Тогда после преобразований получим для адаптивной антенной решётки, настраиваемой по дискретному градиентному алгоритму:

$$\mathbf{K}_{\tilde{W}} = \mu^2 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} Sp(\tilde{Y}_{CT}^* \tilde{Y}_{CT}^T \mathbf{R}_{AA}) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \pi_{\xi_1} \mathbf{I} + \pi_{\xi} \vec{S}_1 \vec{S}_1^H + \left(-\frac{\pi_{\xi_1}}{N} + \pi_{\xi} |f(U_{\xi})|^2 \right) \vec{S} \vec{S}^H - \\ - \pi_{\xi} (f^*(U_{\xi}) \cdot \vec{S} \vec{S}_1^H + (f^*(U_{\xi}) \cdot \vec{S} \vec{S}_1^H)^H) \end{array} \right\} \quad (4.4.23)$$

где $f(U) = \frac{1}{N} \vec{S}^T \vec{S}_{np}^* = \frac{\sin(NU/2)}{N \sin(U/2)} \exp(j \frac{N-1}{2} U)$ - нормированная диаграмма

направленности равноамплитудной антенной решётки, сфазированной на нормально падающую волну; $U = \pi \sin \theta$; θ - угол прихода пробного сигнала (в нашем случае данный угол равен углу прихода помехи $\theta = \theta_{\xi}$ и, следовательно, $U = U_{\xi} = \pi \sin \theta_{\xi}$).

Для адаптивной антенной решётки с алгоритмом рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов формула для $\mathbf{K}_{\tilde{W}}$ будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{K}_{\tilde{W}} = \mu^2 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} Sp(\tilde{Y}_{CT}^* \tilde{Y}_{CT}^T \mathbf{R}_{AA}) \times \left\{ \frac{1}{\pi_{\xi_1}} \mathbf{P}^* - \frac{\pi_{\xi}}{\pi_{\xi_1}^2} \cdot \frac{(\vec{S}_1 - f^*(U_{\xi}) \vec{S})(\vec{S}_1 - f^*(U_{\xi}) \vec{S})^H}{1 + (\pi_{\xi} N / \pi_{\xi_1}) [1 - |f(U_{\xi})|^2]} \right\} \quad (4.4.24)$$

Необходимо отметить, что в выражении (4.4.24) проекционная матрица описывается формулой (4.4.21).

Приведённые выражения ((4.4.23) и (4.4.24)) для матрицы ковариации весовых коэффициентов адаптивных антенных решёток с однократным линейным ограничением не являются столь прозрачными для интерпретации, как выражения для ААР МОСШ. Однако они позволяют получить формулы для дисперсии флуктуаций весового вектора и обсудить полученный теоретический результат.

Можно показать, что в адаптивной антенной решётке с однократным линейным ограничением, настраиваемой по дискретному градиентному алгоритму, дисперсия флуктуаций весовых коэффициентов имеет вид:

$$\sigma_{W_i}^2 = \mu^2 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} Sp(\bar{Y}_{CT}^* \bar{Y}_{CT}^T \mathbf{R}_{AA}) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \pi_{\xi_1} \frac{N-1}{N} + \pi_{\xi} [1 + |f(U_{\xi})|^2] - \\ - \pi_{\xi} [(f(U_{\xi}) \exp\{-j \frac{2\pi}{d} i \sin \theta_{\xi}\})^* + \\ + f(U_{\xi}) \exp\{-j \frac{2\pi}{d} i \sin \theta_{\xi}\}] \end{array} \right\}, \quad (4.4.25)$$

где i - номер весового вектора, определяющий величину набега фазы при падении на ААР плоской волны; $1/d$ - число пространственных периодов волны, «убирающихся» между соседними антенными элементами.

Для адаптивной антенной решётки с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки дисперсия флуктуаций весового вектора описывается следующим выражением:

$$\sigma_{W_i}^2 = \mu^2 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} Sp(\bar{Y}_{CT}^* \bar{Y}_{CT}^T \mathbf{R}_{AA}) \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi_{\xi_1}} \cdot \frac{N-1}{N} - \\ \frac{\pi_{\xi}}{\pi_{\xi_1}^2} \cdot \frac{1 + |f(U_{\xi})|^2 - 2|f(U_{\xi})| \cos\left\{U_{\xi} \left(\frac{N-1}{2} - \frac{2}{d} i\right)\right\}}{1 + (\pi_{\xi} N / \pi_{\xi_1}) [1 - |f(U_{\xi})|^2]} \end{array} \right\} \quad (4.4.26)$$

Из формул (4.4.25) и (4.4.26) следует, что дисперсия флуктуаций весового вектора представляет собой вектор, т.е. является различной для каждого весового коэффициента W_i . Это справедливо для обоих рассматриваемых алгоритмов настройки ААР.

Необходимо отметить, что ни в адаптивных антеннах, работающих по критерию максимизации отношения сигнал – шум, как с нелинейной функцией в цепи обратной связи, так и без неё, ни в адаптивной антенной решётке с однократным линейным ограничением, не содержащих нелинейную функцию в цепи обратной связи [108], дисперсия не являлась вектором. Все весовые коэффициенты имели одинаковую величину дисперсии флуктуаций. Появление вектора дисперсии свидетельствует о том, что каждый весовой коэффициент флуктуирует, имея собственную величину дисперсии.

Диаграмма направленности антенны.

Флуктуации весового вектора приводят к появлению дополнительных «флуктуационных» слагаемых в различных статистических характеристиках адаптивных антенных решёток, в том числе и в диаграмме направленности адаптивной антенны.

Рассмотрим среднюю по мощности ДН $g_{cp}(\theta)$, где θ - угол прихода пробного сигнала \vec{S}_{np} относительно нормали, проведённой к плоскости антенной решётки [49,116]:

$$g_{cp}(\theta) = \left\langle \left| F(\vec{S}_{np}^T \vec{W}(k)) \right|^2 \right\rangle. \quad (4.4.27)$$

Подставляя в (4.4.27) представление весового вектора (4.4.8), получаем формулу для диаграммы направленности [49]:

$$g_{cp}(\theta) = g_0(\theta) + g_{\tilde{W}}(\theta), \quad (4.4.28)$$

где

$$g_0(\theta) = \vec{Y}_{CT}^H \mathbf{R}_{AA} \vec{Y}_{CT} - \quad (4.4.29)$$

- диаграмма направленности ААР без учёта флуктуаций весовых коэффициентов;

$$g_{\tilde{W}}(\theta) = \left\langle \vec{Y}^H(k) \mathbf{R}_{AA} \vec{Y}(k) \right\rangle - \quad (4.4.30)$$

- дополнительный член, обусловленный увеличением эквивалентной мощности пробного сигнала на выходе ААР из-за модуляции его флуктуациями весовых коэффициентов.

Для простоты предположим, что в ряде Вольтерра разложения нелинейной функции, находящейся в цепи обратной связи, первое слагаемое существенно больше остальных, и ими можно пренебречь ($a_1 \gg a_{2,3,\dots}$). Тогда для этого случая ДН при постоянном стационарном весовом векторе имеет вид:

$$g_0(\theta) = a_1^2 \vec{W}_{CT}^H \vec{S}_{np}^* \vec{S}_{np}^T \vec{W}_{CT}, \quad (4.4.31)$$

а «флуктуационная» диаграмма направленности описывается выражением:

$$g_{\tilde{W}}(\theta) = a_1^2 \vec{S}_{np}^H \mathbf{K}_{\tilde{W}} \vec{S}_{np}. \quad (4.4.32)$$

Представим в «развёрнутом» виде «флуктуационную» ДН ААР. Для этого подставим формулу ковариационной матрицы весового вектора (4.4.12) в (4.4.32). Тогда для адаптивной антенной решётки, настраиваемой по дискретному градиентному алгоритму, имеем:

$$g_{\tilde{W}}(\theta) = \mu^2 a_1^2 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} \langle |Z|^2 \rangle_0 \cdot \left| (\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P})^* \vec{S}_{np} \right|^2, \quad (4.4.33)$$

где $a_1^2 < |Z|^2 >_0 = a_1^2 \bar{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \bar{W}_{CT}$ - выходная мощность ААР при постоянном стационарном весовом векторе.

Поступая аналогичным образом (подставляя (4.4.13) в (4.4.32)), получаем выражение для «флуктуационной» диаграммы направленности ААР с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки:

$$g_{\bar{W}}(\theta) = \mu^2 a_1^2 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} < |Z|^2 >_0 \cdot \left| [(\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+]^* \bar{S}_{np} \right|^2. \quad (4.4.34)$$

Из формул (4.4.33) и (4.4.34) видно, что «флуктуационная» диаграмма направленности в общем случае не является изотропной, и её форма определяется квадратом модуля произведения пробного сигнала и матриц $(\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^*$ (или $[(\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+]^*$).

Рассмотрим более подробно флуктуационную ДН для адаптивной антенной решётки с однократным линейным ограничением. Для адаптивных антенных решёток, работающих по данному алгоритму, флуктуационная диаграмма направленности имеет вид (подставляем формулу для проекционной матрицы (4.4.21) в выражение (4.4.33)):

$$g_{\bar{W}}(\theta) = \mu^2 a_1^2 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} < |Z|^2 >_0 \times \left\{ N\pi_{\xi 1} [1 - |f(U)|^2] + N^2 \pi_{\xi} [|f(U_{\xi} - U)| - |f(U_{\xi})| \cdot |f(U)|]^2 \right\}. \quad (4.4.35)$$

Для ААР с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки флуктуационная ДН описывается выражением:

$$g_{\bar{W}}(\theta) = \mu^2 a_1^2 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} < |Z|^2 >_0 \times \frac{N}{\pi_{\xi 1}} \left\{ [1 - |f(U)|^2] - \frac{N\pi_{\xi}}{\pi_{\xi 1}} \cdot \frac{[|f(U_{\xi} - U)| - |f(U_{\xi})| \cdot |f(U)|]^2}{1 + (N\pi_{\xi} / \pi_{\xi 1}) [1 - |f(U_{\xi})|^2]} \right\}. \quad (4.4.36)$$

Для обсуждения данных формул на рисунке 4.6 построены графики флуктуационной ДН в зависимости от прихода пробного сигнала для ААР с дискретным градиентным (кривая 1) и быстрым рекуррентным (кривая 2) алгоритмами настройки в случае прихода на антенную решётку входных сигналов с некоррелированными отсчётами ($r = 0$).

При построении рассматривалась 7 – элементная полуволновая адаптивная антенная решётка с однократным линейным ограничением в направлении прихода

полезного сигнала и сигмоидальной нелинейной функцией в цепи обратной связи [79] ($a = 0.5$). На ААР поступал полезный сигнал, приходивший с направления, нормального к плоскости решётки, и одна помеха – с направления 45° по отношению к нормали, проведённой к плоскости решётки. Мощность полезного сигнала была в 10 раз меньше мощности помехи. В ААР присутствовал также собственный шум, мощность которого была в 100 раз меньше мощности помехи. Коэффициент адаптации был равен $\mu = 10^{-4}$.

Из рисунка видно, что флуктуационная диаграмма направленности адаптивной антенной решётки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи и с дискретным градиентным алгоритмом настройки имеет максимум в направлении прихода помехи ($\theta_H = 45^\circ$), а флуктуационная ДН ААР, настраиваемой по быстрому рекуррентному алгоритму – минимум в этом же направлении. В направлении ограничений флуктуационная диаграмма направленности равна нулю для обоих алгоритмов настройки.

Таким образом, проведённый статистический анализ показал, что флуктуационная диаграмма направленности адаптивной антенной решётки с однократным линейным ограничением, содержащая нелинейную функцию в цепи обратной связи, неизотропна как для дискретного градиентного, так и для быстрого рекуррентного алгоритмов, причём её минимальное или максимальное значение в направлении прихода помехи определяется уровнем коррелированности отсчётов входных сигналов.

Коэффициент направленного действия антенны.

Найдём коэффициент направленного действия с учётом флуктуаций весового вектора адаптивной антенной решётки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраиваемой по дискретному градиентному алгоритму. Согласно результатам, полученным в первой главе, общий вид коэффициента направленного действия можно записать следующим образом:

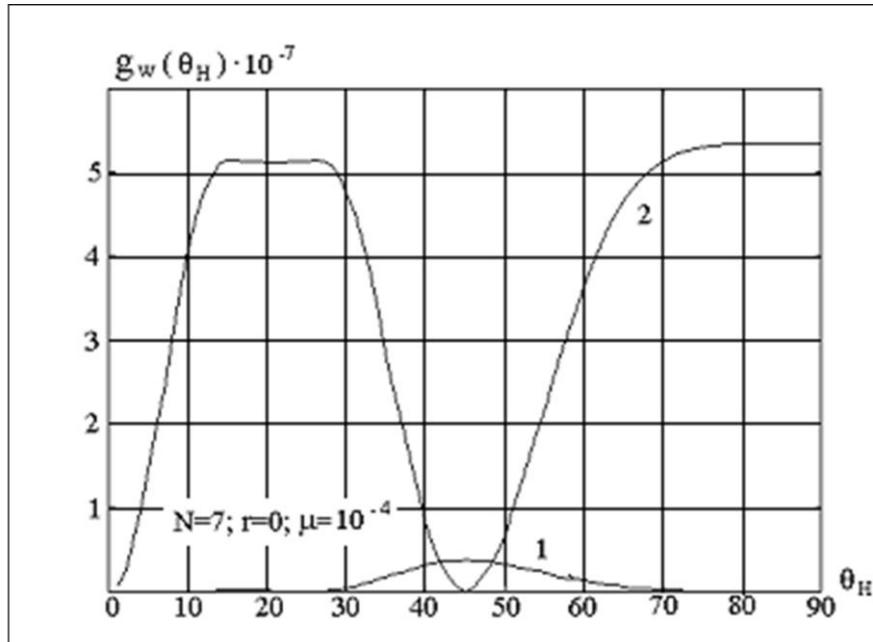


Рис. 4.6. Флуктуационная диаграмма направленности $g_{\tilde{w}}$ в зависимости от угла прихода пробного сигнала θ_{np} в случае поступления на ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи сигналов с некоррелированными отсчетами $r=0$ (кривая 1 – дискретный градиентный алгоритм, кривая 2 – быстрый рекуррентный алгоритм).

$$D(\theta) = \frac{2g_0(\theta) + 2g_{\tilde{w}}(\theta)}{\int_0^\pi (g_0(\theta) + g_{\tilde{w}}(\theta)) \sin \theta \cdot d\theta}. \quad (4.4.37)$$

Из выражения (4.4.37) видно, что коэффициент направленного действия адаптивной антенны представляет собой сумму двух слагаемых: полученного при постоянном стационарном весовом векторе и «флуктуационного» слагаемого.

«Стационарный» коэффициент направленного действия для адаптивной антенной решетки, настраивающейся по нелинейному дискретному градиентному алгоритму, имеет вид:

$$D_0(\theta) = \frac{2g_0(\theta)}{\int_0^\pi (g_0(\theta) + \mu^2 a_1^2 \langle |Z|^2 \rangle_0 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} |(PR_{xx}P)^* \vec{S}_{np}|^2) \sin \theta \cdot d\theta} \quad (4.4.38)$$

Здесь $g_0 = a_1^2 \vec{W}_{CT}^H \vec{S}_{np}^* \vec{S}_{np}^T \vec{W}_{CT}$ - диаграмма направленности, найденная при постоянном стационарном весовом векторе.

«Флуктуационный» коэффициент направленного действия ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму, может быть представлен в виде:

$$D_{\tilde{w}}(\theta) = \frac{2\mu^2 a_1^2 \langle |Z|^2 \rangle_0 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} |(PR_{xx}P)^* \vec{S}_{np}|^2}{\int_0^\pi (g_0(\theta) + \mu^2 a_1^2 \langle |Z|^2 \rangle_0 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} |(PR_{xx}P)^* \vec{S}_{np}|^2) \sin \theta \cdot d\theta} \quad (4.4.39)$$

Из выражений (4.4.38) и (4.4.39) можно видеть, что флуктуации весовых коэффициентов приводят, с одной стороны, к увеличению коэффициента направленного действия, но с другой стороны, к «размазыванию» этого направленного действия по направлениям угла θ .

Коэффициент усиления адаптивной антенной решётки.

Найдем с учетом флуктуаций настраиваемых весовых коэффициентов коэффициент усиления адаптивной антенной решётки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму с многократными линейными ограничениями. Коэффициент усиления в данном случае представляет собой сумму двух слагаемых – найденного при посто-

янном стационарном весовом векторе и «флуктуационного» коэффициента усиления и имеет вид:

$$G(\theta) = \eta \frac{2g_0(\theta) + 2\mu^2 a_1^2 \langle |Z|^2 \rangle >_0 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} |(PR_{xx} P)^* \vec{S}_{np}|^2}{\int_0^\pi (g_0(\theta) + \mu^2 a_1^2 \langle |Z|^2 \rangle >_0 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} |(PR_{xx} P)^* \vec{S}_{np}|^2) \sin \theta \cdot d\theta} \quad (4.4.40)$$

Из выражения (4.4.40) следует, что флуктуации весового вектора увеличивают величину коэффициента усиления. Однако это увеличение имеет второй порядок малости по коэффициенту адаптации μ , а потому незначительно. С другой стороны, флуктуации весовых коэффициентов искажают величину коэффициента усиления адаптивной антенны по направлениям угла θ .

Таким образом, флуктуации весовых коэффициентов оказывают двойное действие на коэффициент направленного действия и коэффициент усиления адаптивной антенной решётки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму с многократными линейными ограничениями. С одной стороны, флуктуации увеличивают значения этих коэффициентов (правда незначительно), на величину, даже меньшую, чем второго порядка малости по коэффициенту адаптации μ , поскольку в знаменателе данных выражений присутствует тоже «флуктуационное» слагаемое – «флуктуационная» диаграмма направленности. С другой стороны, флуктуации весового вектора вносят искажения в форму КНД и КУ по углу θ .

Потери в выходном отношении сигнал / шум, вызванные наличием флуктуаций весового вектора.

Рассмотрим в качестве одного из возможных показателей эффективности работы адаптивной антенной решетки потери в выходном отношении сигнал / шум, вызванные флуктуациями:

$$\tilde{\eta} = 10 \cdot \lg \left(\frac{SNR_{fl}}{SNR_{opt}} \right) \quad (4.4.41)$$

Как отмечалось в первой главе, здесь SNR_{fl} - выходное отношение сигнал / шум, найденное с учетом флуктуаций весового вектора; SNR_{opt} - выходное отношение сигнал / шум, найденное без учета флуктуаций весового вектора.

Используя формулу выходной мощности ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму с ограничениями (4.3.7), и учитывая, что корреляционная матрица вход-

ных сигналов адаптивной антенной решетки состоит из суммы корреляционных матриц полезного сигнала, помех и собственного шума адаптивной антенны $\mathbf{R}_{XX} = \mathbf{R}_{SS} + \mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}$ и, соответственно, мощности полезного сигнала и помех

на выходе антенны при постоянном стационарном весовом векторе имеют вид

$\langle |Z|^2 \rangle_S = \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{SS} \vec{W}_{CT}$, $\langle |Z|^2 \rangle_\xi = \vec{W}_{CT}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT}$ получим выражение для остаточной мощности помехи на выходе ААР с дискретным градиентным алгоритмом:

$$A_{grf} = \langle |Z|^2 \rangle_{CT} - \langle |Z|^2 \rangle_{sk} = a_1^2 \cdot \vec{W}_{CT}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT} + a_1^2 \cdot \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT} \times \left\{ \begin{aligned} & \left| -\frac{2\mu a_1}{1-r^2} Sp(\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}) \right| + \left| \mu^2 a_1^2 \frac{1-2r^2}{(1-r^2)^2} Sp(\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX} \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}) \right| + \\ & \left| \mu^2 a_1^2 \frac{3-2r^2}{(1-r^2)^2} \frac{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX} \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT}}{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT}} \right| + \left| \mu^2 a_1^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2(\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}) \right| \end{aligned} \right\}. \quad (4.4.42)$$

После преобразований имеем следующее выражение потерь в выходном отношении сигнал / шум ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму с ограничениями, из-за флуктуаций весового вектора:

$$\tilde{\eta} = 10 \cdot \lg \left(\frac{a_1^2 \cdot \vec{W}_{CT}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT}}{A_{grf}} \right) \quad (4.4.43)$$

На рисунке 4.7 представлена зависимость потерь в выходном отношении сигнал / шум адаптивной антенной решетки от величины коэффициента адаптации μ . График построен для адаптивной антенной решётки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму с однократными линейными ограничениями ($L=1$) на диаграмму направленности, имеющей 7 элементов ($N=7$). Расстояние между элементами было равно половине длины волны ($d = \lambda / 2$). Для однократных ограничений матрица \mathbf{C} имеет размерность $[N \times 1]$ и равна $\mathbf{C} \equiv \vec{C}_1 = \vec{S}^*$, где \vec{S} - вектор волнового фронта полезного сигнала. В качестве нелинейной функции была выбрана функция-сигмоид

$$F[y] = \frac{1}{1 + \exp\{-a \cdot y\}}, \quad a = 0.5.$$

Предполагалось, что на ААР поступают статистически независимые полезный сигнал и одна помеха $r_S = r_\xi = 0.5$. Комплексные амплитуды входных сигналов формировались из двух независимых источников гауссовского “белого” шума. Углы

прихода полезного сигнала и помехи были равны соответственно $\theta_s=0^0$, $\theta_\xi=45^0$, мощность помехи была в 100 раз больше мощности полезного сигнала. В каждом элементе ААР присутствовал также некоррелированный собственный шум, мощность которого составляла 0.1 мощности полезного сигнала.

Из рисунка 4.7 можно видеть, что имеют место потери из-за флуктуаций весового вектора в выходном отношении сигнал / шум адаптивной антенной решетки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму. Из рисунка также следует, что по мере увеличения коэффициента адаптации μ растут потери, вызванные наличием флуктуаций весового вектора. Данные потери имеют наибольшую величину в адаптивной антенной решетке без нелинейной функции в цепи корреляционной обратной связи с дискретным градиентным алгоритмом настройки (кривая ААР gr) и наименьшую величину в ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи с тем же алгоритмом настройки (кривая ААР grf). Адаптивная антенная решетка с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки без нелинейной функции в цепи корреляционной обратной связи занимает промежуточное положение (кривая ААР smi).

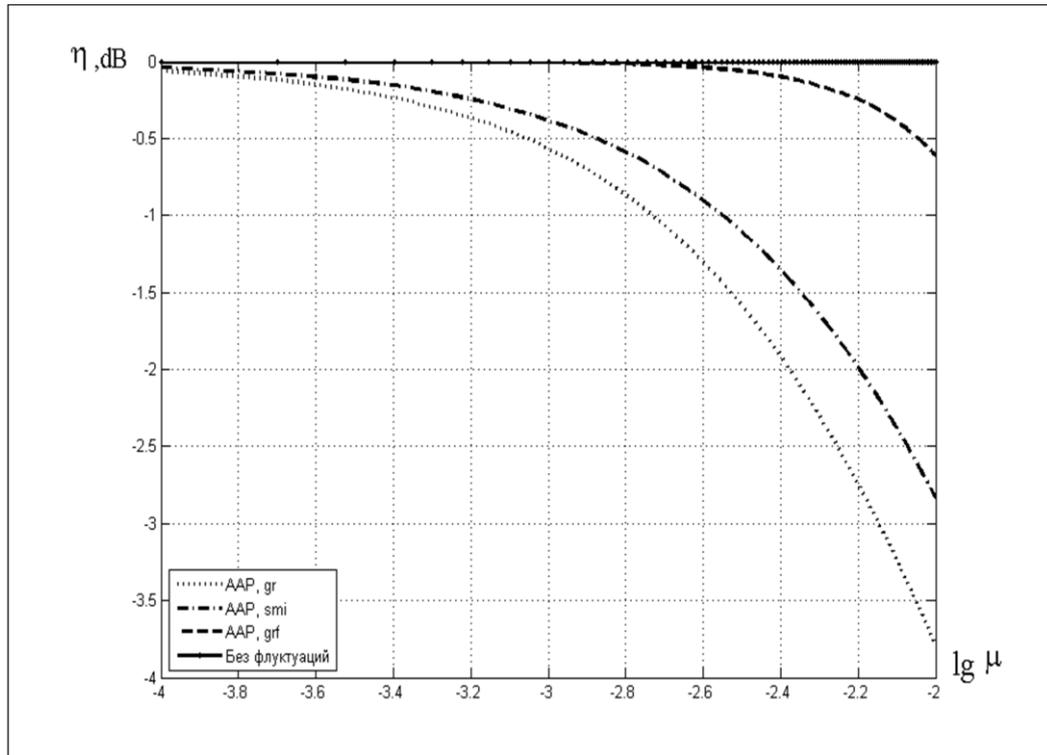


Рис. 4.7. Потери η в выходном отношении сигнал / шум в зависимости от величины коэффициента адаптации μ . ААР grf - ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи с дискретным градиентным алгоритмом настройки.

4.5. ВЫВОДЫ.

Проведённое в четвёртой главе исследование статистических характеристик адаптивной антенной решетки, содержащей нелинейную функцию в цепи корреляционной обратной связи, с дискретным градиентным алгоритмом настройки с учетом флуктуаций весового вектора позволяет сделать следующие выводы:

1. Статистический анализ влияния флуктуаций весовых коэффициентов на характеристики адаптивных антенных решёток с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи и дискретным градиентным алгоритмом настройки необходимо проводить методами теории возмущений. Данные методы позволяют учесть негауссовскую статистическую зависимость между весовым вектором и вектором входных сигналов.
2. Для успешного применения методов теории возмущений при статистическом анализе ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи и дискретным градиентным алгоритмом настройки необходимо, чтобы нелинейная функция была N раз дифференцируемая. Это позволяет применить при статистическом анализе разложение данной функции в ряд Вольтерра.
3. Флуктуации весового вектора приводят к искажениям выходного сигнала ААР. Используемый алгоритм настройки адаптивной антенны определяет вид «флуктуационных» слагаемых в статистических характеристиках выходного сигнала ААР. Алгоритм настройки адаптивной антенной решетки определяет конкретный вид зависимости «флуктуационных» слагаемых от коэффициента автокорреляции между отсчетами входных сигналов и от корреляционной матрицы входных сигналов.
4. Исследование показало, что флуктуации весового вектора в ААР с линейным дискретным градиентным алгоритмом настройки изотропны во всех направлениях подпространства ограничений. В ААР с нелинейной функцией в цепи обратной связи флуктуации весового вектора неизотропны в пространстве ограничений: максимальны в направлении прихода помехи, а во всех остальных направлениях имеют, как правило, много меньшую величину (пропорциональную значению мощности собственного шума ААР). В направлениях, заданных ограничениями, флуктуации весового вектора отсутствуют.
5. Дисперсия флуктуаций весового вектора для ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи представляет собой вектор, т.е. является различной для каждого весового коэффициента W_i . Это справедливо для обоих рассматриваемых алгоритмов настройки ААР – дискретного градиентного и быстрого рекуррентного

алгоритмов с ограничениями на диаграмму направленности. Ни в адаптивных антеннах, работающих по критерию МОСШ, как с нелинейной функцией в цепи обратной связи, так и без неё, ни в «линейной» ААР с однократным линейным ограничением [108], дисперсия не являлась вектором. Все весовые коэффициенты имели одинаковую величину дисперсии флуктуаций. Появление вектора дисперсии свидетельствует о том, что каждый весовой коэффициент флуктуирует, имея собственную величину дисперсии.

- б. Имеют место потери из-за флуктуаций весового вектора в выходном отношении сигнал / шум адаптивной антенной решетки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраиваемой по дискретному градиентному алгоритму. По мере увеличения коэффициента адаптации μ растут потери, вызванные наличием флуктуаций весового вектора. Данные потери имеют наибольшую величину в ААР без нелинейной функции в цепи корреляционной обратной связи с дискретным градиентным алгоритмом настройки и наименьшую величину в ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи с тем же алгоритмом настройки. Адаптивная антенная решетка с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки без нелинейной функции в цепи корреляционной обратной связи занимает промежуточное положение.

Глава 5. Анализ статистических характеристик адаптивной антенной решетки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по алгоритму рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов с учетом флуктуаций весового вектора.

5.1. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ХАРАКТЕРИСТИК ААР [126].

Рассмотрим работу N - элементной адаптивной антенной решётки с многократными линейными ограничениями и нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по алгоритму рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов

$$\hat{\mathbf{R}}_k = (1 - \alpha) \sum_{n=-\infty}^k \alpha^n \vec{X}^*(k-n) \vec{X}^T(k-n),$$

где $\mathbf{x}(k)$ - вектор входных сигналов, α - коэффициент “забывания”, который уменьшает вклад в выборочную корреляционную матрицу $\hat{\mathbf{R}}_k$ более ранних по времени выборок входных сигналов по сравнению с более поздними; индексы T, H, *, + обозначают соответственно знаки транспонирования, эрмитовского и комплексного сопряжения, а также псевдообращения.

Настройка вектора весовых коэффициентов \vec{W} такой ААР описывается N - мерным векторным уравнением, которое в дискретном времени имеет вид:

$$\vec{W}(k+1) = \mathbf{P} \{ \vec{W}(k) - \mu \cdot (\mathbf{P} \hat{\mathbf{R}}_k \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \cdot \vec{X}^*(k+1) \cdot Z(k) \} + \vec{W}_q. \quad (5.1.1)$$

Здесь $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H$ - проекционная матрица (матричный фильтр в контуре управления ААР), обеспечивающая введение многократных линейных ограничений на диаграмму направленности (ДН) антенной решётки; $\mathbf{C} \equiv [\vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_L]$ - матрица ограничений размерности $N \times L$, столбцами которой являются линейно - независимые векторы ограничений \vec{C}_l , L - число вводимых ограничений; $\mu = 1 - \alpha$ - коэффициент адаптации быстрого рекуррентного алгоритма; \vec{W}_q - вектор комплексных весовых коэффициентов, соответствующих диаграмме направленности покоя (при отсутствии внешних помех); \mathbf{I} - единичная матрица с размерностью $N \times N$ [65].

В выражении (5.1.1) $Z(k)$ - выходной сигнал антенной решётки, который может быть записан в виде ряда Вольтерра [177]:

$$Z(k) = F[y(k)] = \sum_{j=1}^{N_1} a_j \cdot y^j(k), \quad (5.1.2)$$

где $F[\]$ - нелинейная функция в цепи обратной связи, $y(k)$ - выходной сигнал линейной части ААР, a_j - коэффициенты разложения нелинейности F в ряд Вольтерра [177]. Указанные коэффициенты могут быть представлены следующим образом [177]:

$$a_j = \frac{1}{j!} F^{(j)}[y=0]. \quad (5.1.3)$$

Разложение (5.1.2) является также разложением нелинейной функции F в ряд Тейлора в нулевой точке, поскольку, как видно из формулы (5.1.3), коэффициенты данного ряда получаются путем нахождения значений различных производных раскладываемой функции в нуле.

Выходной сигнал $Z(k)$ может быть записан в матричной форме:

$$Z(k) = \vec{A}^T \cdot \vec{Y}(k), \quad (5.1.4)$$

где $\vec{A} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{N_1}]^T$ - N_1 -мерный вектор коэффициентов ряда Вольтерра; $\vec{Y}(k) = [y(k) \ y^2(k) \ \dots \ y^{N_1}(k)]^T$ - N_1 -мерный вектор степеней выходного сигнала линейной части ААР.

Проведём статистический анализ уравнения (5.1.1) методами теории возмущений, подробно изложенным в [65,107]. Для этого, учитывая (5.1.4), перепишем уравнение (5.1.1) следующим образом:

$$\vec{W}(k+1) = \mathbf{P}\{\vec{W}(k) - \mu \cdot (\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_k \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \cdot \vec{X}^*(k+1) \cdot \vec{A}^T \cdot \vec{Y}(k)\} + \vec{W}_q. \quad (5.1.5)$$

Введём следующие обозначения:

$$\vec{W} = \langle \vec{W} \rangle + \vec{\tilde{W}}, \quad \vec{Y} = \langle \vec{Y} \rangle + \vec{\tilde{Y}}, \quad \mathbf{M}_{xx}(k) \equiv \mathbf{R}_{xx} + \vec{\Phi}(k) \quad (5.1.6)$$

где случайный весовой вектор \vec{W} , вектор степеней выходного сигнала линейной части адаптивной антенной решётки \vec{Y} и стохастическая матрица $\mathbf{M}_{xx} \equiv \vec{X}^*(k) \vec{X}^T(k)$ представлены в виде сумм их средних значений $\langle \vec{W} \rangle$, $\langle \vec{Y} \rangle$, \mathbf{R}_{xx} и флуктуационных составляющих $\vec{\tilde{W}}(k)$, $\vec{\tilde{Y}}(k)$, $\vec{\Phi}(k)$ [49,65,116].

Найдём уравнение для $\langle \vec{W} \rangle$ вблизи стационарного состояния. Для этого усредним (5.1.5), используя обозначения (5.1.6). При усреднении будем учитывать, что $\mathbf{R}_{xA} = \mathbf{0}$ - корреляционная матрица входных сигналов и коэффициентов ряда Вольтерра является нулевой матрицей, поскольку \vec{A} - детерминированный вектор, а среднее значение вектора входных сигналов равно нулю. При усреднении положим также, что $(\mathbf{P}\hat{\mathbf{R}}_k \mathbf{P})^+ \approx (\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx} \mathbf{P})^+ = const$. Данное предположение может считаться

справедливым в стационарном режиме работы ААР, который и рассматривается в данной работе, поскольку в этом режиме при неизменных статистических характеристиках входных сигналов их корреляционная матрица, (и следовательно, псевдо-обратная к ней) уже оценена ААР достаточно точно и может быть при анализе заменена на её истинное значение. Тогда в указанных предположениях имеем:

$$\langle \vec{W}(k+1) \rangle = \mathbf{P} \{ \langle \vec{W}(k) \rangle - \mu \cdot (\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+ \mathbf{P} \cdot \Delta_{xA} \} + \vec{W}_q. \quad (5.1.7)$$

Здесь $\Delta_{xA} \equiv \langle \tilde{\Phi}_{xA} \tilde{Y} \rangle$ - вектор кумулянтных функций третьего порядка, учитывающих статистическую зависимость флуктуаций выходного сигнала линейной части ААР \tilde{Y} (и, следовательно, флуктуаций весовых коэффициентов \vec{W}) и входных сигналов $\vec{X}(k+1)$.

Для определения стационарного среднего значения вектора весовых коэффициентов $\vec{W}_{CT} \equiv \langle \vec{W}(k) \rangle$ и других статистических характеристик адаптивной антенной решётки воспользуемся методом возмущений по параметру μ , который будем полагать малым ($\mu \ll 1$). В качестве нулевого приближения возьмём среднее значение вектора весовых коэффициентов $\langle \vec{W} \rangle_0 \equiv \vec{W}_0$, получающееся из усреднения уравнения (5.1.1) в приближении "прямого размыкания" всех смешанных моментов:

$$\vec{W}_0(k+1) = \mathbf{P} \{ \vec{W}_0(k) - \mu \cdot (\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+ \mathbf{P} \cdot \langle \vec{X}^*(k+1) \rangle \cdot \langle Z(k) \rangle \} + \vec{W}_q. \quad (5.1.8)$$

Предполагая, что среднее значение вектора входных сигналов равно нулю $\langle \vec{X}^*(k+1) \rangle = 0$, получаем:

$$\vec{W}_0(k+1) = \mathbf{P}\vec{W}_0(k) + \vec{W}_q. \quad (5.1.9)$$

Стационарное значение весового вектора в нулевом приближении будет удовлетворять уравнению:

$$\mathbf{D}\vec{W}_0 = \vec{W}_q, \quad (5.1.10)$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{I} - \mathbf{P} = \mathbf{C}(\mathbf{C}^H\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^H$ - проекционная матрица, дополнительная к \mathbf{P} .

Из формулы (5.1.10) следует, что выражение для стационарного значения весового вектора имеет вид:

$$\vec{W}_{0CT} = \mathbf{D}^+ \vec{W}_q. \quad (5.1.11)$$

Проведём анализ статистических характеристик ААР при учёте флуктуаций весового вектора. Для этого найдём уравнение для вектора поправки к нулевому приближению:

$$\vec{W}_\Pi(k) \equiv \vec{W}(k) - \vec{W}_0. \quad (5.1.12)$$

Необходимо учесть, что вектор поправок лежит в подпространстве ограничений:

$$\vec{W}_\Pi(k) = \mathbf{P}\vec{W}_\Pi(k), \quad \mathbf{D}\vec{W}_\Pi(k) = \vec{0}. \quad (5.1.13)$$

Тогда, вычитая из выражения (5.1.1) уравнение (5.1.9), получаем:

$$\vec{W}_\Pi(k+1) = \mathbf{P}\{\vec{W}_\Pi(k) - \mu \cdot (\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+ \mathbf{P} \cdot \vec{X}^*(k+1)\vec{A}^T\vec{Y}(k)\}. \quad (5.1.14)$$

Заметим, что, учитывая (5.1.6), второе слагаемое в правой части формулы (5.1.14) может быть представлено в виде:

$$\mu \cdot \mathbf{P} \cdot (\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+ \mathbf{P} \cdot \vec{X}^*(k+1)\vec{A}^T\vec{Y}(k) = \mu \cdot \mathbf{P} \cdot (\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+ \mathbf{P} \cdot \tilde{\Phi}_{xA}(k+1) \cdot \vec{Y}(k). \quad (5.1.15)$$

Тогда, подставляя (5.1.15) в выражение (5.1.14), имеем:

$$\vec{W}_\Pi(k+1) = \mathbf{P}\{\vec{W}_\Pi(k) - \mu \cdot (\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+ \mathbf{P} \cdot \tilde{\Phi}_{xA}(k+1) \cdot \vec{Y}(k)\} \quad (5.1.16)$$

Поскольку все поправки к весовому вектору (средние и флуктуационные) лежат в подпространстве ограничений (формулы (5.1.13)), то можно перейти в \mathbf{Q} - матричное представление, диагонализирующее эрмитовскую матрицу $\mathbf{P}\mathbf{R}_{xA}\mathbf{P}$, по следующим формулам [49,65]:

$$\vec{\Psi} = \mathbf{Q}^{-1}\vec{W}_\Pi, \quad \vec{W}_\Pi = \mathbf{Q}\vec{\Psi}, \quad \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^H, \quad (5.1.17)$$

где $\vec{\Psi}$ - вектор поправки к нулевому приближению в \mathbf{Q} - матричном представлении.

Тогда уравнение (5.1.16) в \mathbf{Q} - матричном представлении запишется в виде:

$$\vec{\Psi}(k+1) = \vec{\Psi}(k) - \mu \cdot \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P} \cdot (\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+ \mathbf{P} \cdot \tilde{\Phi}_{xA}(k+1)\vec{Y}(k). \quad (5.1.18)$$

Здесь $\Lambda_{xA} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{R}_{xA}\mathbf{P}\mathbf{Q} = \mathbf{0}$. Решение уравнения (5.1.18) может быть записано следующим образом:

$$\vec{\Psi}(k+1) = -\mu \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\lambda}(n)\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^+\mathbf{P} \cdot \tilde{\Phi}_{xA}(k+1-n)[\vec{Y}_0(k) + \mathbf{Q}\vec{\Psi}(k-n)], \quad (5.1.19)$$

здесь $\hat{\lambda}(k)$ - диагональная матрица следующего вида:

$$\hat{\lambda}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \vdots & \mathbf{O} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{O} & \vdots & \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

Итерируя уравнение (5.1.19), можно построить ряд теории возмущений по малому параметру $\mu \ll 1$ [65]. В результате вектор $\vec{\Psi}(k)$ и соответствующий ему вектор поправки $\vec{W}_\Pi(k) = \mathbf{Q}\vec{\Psi}(k)$ запишутся в виде суммы слагаемых, принадлежащих приближениям различного порядка:

$$\vec{\Psi} = \vec{\Psi}_1 + \vec{\Psi}_2 + \vec{\Psi}_3 + \dots, \quad (5.1.20)$$

$$\vec{W}_\Pi(k) = \mathbf{Q}\vec{\Psi}(k) = \vec{W}_{\Pi1}(k) + \vec{W}_{\Pi2}(k) + \vec{W}_{\Pi3}(k) + \dots. \quad (5.1.21)$$

коэффициентов. Второе слагаемое в выражении (5.2.1) возникает вследствие учёта флуктуаций весового вектора в адаптивной антенной решётке.

Стационарный выходной сигнал линейной части ААР определяется выражением:

$$\vec{Y}_{CT} = [y_{CT} \ y_{CT}^2 \ \dots \ y_{CT}^{N_1}]^T = [(\vec{X}^T \vec{W}_{CT}) (\vec{X}^T \vec{W}_{CT})^2 \ \dots \ (\vec{X}^T \vec{W}_{CT})^{N_1}]^T, \quad (5.2.2)$$

где стационарный весовой вектор \vec{W}_{CT} представлен формулой (5.1.11).

Рассмотрим более подробно второе слагаемое, входящее в выражение корреляционной функции выходного сигнала (5.2.1):

$$\begin{aligned} < \vec{Y}^H(m) \vec{A}^* \vec{A}^T \vec{Y}(m+n) > = < \vec{Y}^H(m) \vec{A}^* \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} \vec{A}^T \vec{Y}(m+n) > = < [\mathbf{Q} \vec{A}^T \vec{Y}(m)]^H [\mathbf{Q} \vec{A}^T \vec{Y}(m+n)] > = \\ &= < \left[\mathbf{Q} \sum_{j=1}^{N_1} a_j (\vec{X}(m) \vec{W}(m))^j \right]^H \left[\mathbf{Q} \sum_{p=1}^{N_1} a_p (\vec{X}^T(m+n) \vec{W}(m+n))^p \right] >. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

В первом борновском приближении флуктуационная часть вектора весовых коэффициентов приближённо равна значению первой поправки к весовому вектору $\vec{W}(m) = \vec{W}_{\text{П}}(m)$. Учитывая это, получаем:

$$\begin{aligned} < \vec{Y}^H(m) \vec{A}^* \vec{A}^T \vec{Y}(m+n) > \cong \\ \cong < \left[\mathbf{Q} \sum_{j=1}^{N_1} a_j (\vec{X}(m) \vec{W}_{\text{П}}(m))^j \right]^H \left[\mathbf{Q} \sum_{p=1}^{N_1} a_p (\vec{X}^T(m+n) \vec{W}_{\text{П}}(m+n))^p \right] >. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Используя формулы (5.1.22), описывающие вид поправок различного порядка к весовому вектору в \mathbf{O} - матричном представлении, имеем:

$$\begin{aligned} < \vec{Y}^H(m) \vec{A}^* \vec{A}^T \vec{Y}(m+n) > = \\ \cong \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{p=1}^{N_1} \mu^{j+p} a_j a_p \times \\ \times \left\{ \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} < (\vec{Y}_{0CT}^H \tilde{\Phi}_{XA}^H(m+1-n_1) \mathbf{P}[(\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P})^+]^H \mathbf{P} \vec{X}^*(m))^j \cdot \right. \\ \left. \cdot (\vec{X}^T(m+n) \mathbf{P}(\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \tilde{\Phi}_{XA}(m+n+1-n_2) \vec{Y}_{0CT})^p > \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Из выражения (5.2.5) можно видеть, что «флуктуационное» слагаемое корреляционной функции выходного сигнала ААР с нелинейной функцией в цепи обратной связи даже в первом борновском приближении представляет собой смешанную моментную функцию $j+p$ -ого порядка. Чтобы вычислить такую функцию, необходимо использовать операцию $j+p$ -кратного дифференцирования случайного процесса. Это позволяет свести все вычисления к нахождению смешанной моментной функ-

ции второго порядка, а затем для получения общего вида данного слагаемого результат необходимо проинтегрировать $j + p$ раз. Однако в данной статье мы рассмотрим простейший случай, когда при разложении нелинейной функции ААР в ряд Вольтерра первое слагаемое ряда существенно больше остальных ($a_1 \gg a_2, a_3, \dots$). В этом случае можно считать, что вклад всех членов ряда, начиная со второго, в выражения различных статистических характеристик антенной решётки мал и им можно пренебречь. Данное условие, например, описывает сигмоидальную нелинейную функцию, используемую при моделировании искусственных нейронных сетей [79-80].

Рассчитаем корреляционную функцию выходного сигнала ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму, в предположении, что первый коэффициент разложения нелинейной функции в ряд Вольтерра a_1 много больше остальных коэффициентов $a_{2,3,\dots}$ этого ряда. В этом случае имеем:

$$\begin{aligned}
 K_Z(m, m+n) &\equiv \langle Z^H(m)Z(m+n) \rangle = \\
 &= \langle (F[y(m)])^H (F[y(m+n)]) \rangle = \langle (\vec{A}^T \vec{Y}(m))^H (\vec{A}^T \vec{Y}(m+n)) \rangle \\
 &\cong \langle [a_1 y(m)]^H [a_1 y(m+n)] \rangle = \\
 &= a_1^2 \left\{ \begin{aligned} &\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX}(m, m+n) \vec{W}_{CT} + 2 \vec{W}_{CT}^H \langle \tilde{\Phi}_{XX}(m, m+n) \vec{W}(m+n) \rangle + \\ &+ \langle \vec{W}^H(m) \mathbf{R}_{XX}(m, m+n) \vec{W}(m+n) \rangle + \\ &+ \langle \vec{W}^H(m) \tilde{\Phi}_{XX}(m, m+n) \vec{W}(m+n) \rangle \end{aligned} \right\} \quad (5.2.6)
 \end{aligned}$$

Найдём последовательно слагаемые, входящие в выражение для корреляционной функции (5.2.6). Первое слагаемое выражения (5.2.6) может быть представлено в виде:

$$K_{Z0}[n] = \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX}(m, m+n) \vec{W}_{CT} = \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT} r^{|n|} \quad (5.2.7)$$

Формула (5.2.7) является корреляционной функцией выходного сигнала при постоянном стационарном весовом векторе \vec{W}_{CT} .

Второе слагаемое (5.2.6) в первом борновском приближении имеет следующий вид:

$$\vec{W}_{CT}^H \langle \tilde{\Phi}_{XX}(m, m+n) \vec{W}(m+n) \rangle = -\frac{\mu a_1}{1-r^2} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT} r^{|n|} Sp((\mathbf{P} \mathbf{R}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \mathbf{R}_{XX}) \quad (5.2.8)$$

Третье слагаемое формулы (5.2.6) может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{W}^H(m) \mathbf{R}_{xx}(m, m+n) \vec{W}(m+n) \rangle = \\
& = \mu^2 a_1^2 \frac{1-r^2-r^{2n+2}}{(1-r^2)^2} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{CT} r^{|n|} Sp((\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} (\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx})
\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

И, наконец, последнее слагаемое корреляционной функции выходного сигнала (5.2.6) в первом борновском приближении запишется в виде:

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{W}^H(m) \vec{\Phi}_{xx}(m, m+n) \vec{W}(m+n) \rangle = \\
& = \mu^2 a_1^2 \frac{3-r^2(1+r^{2n})}{(1-r^2)^2} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} (\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} (\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{CT} r^{|n|} + \\
& + \mu^2 a_1^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{CT} r^{|n|} Sp^2(\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx})
\end{aligned} \tag{5.2.10}$$

Тогда окончательное выражение для корреляционной функции выходного сигнала адаптивной антенной решётки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму, в стационарном режиме работы примет вид:

$$\begin{aligned}
K_z(m, m+n) &= a_1^2 r^{|n|} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{CT} \times \\
& \times \left\{ \begin{aligned}
& 1 - \frac{2\mu a_1}{1-r^2} Sp((\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx}) + \\
& + \mu^2 a_1^2 \frac{1-r^2-r^{2n+2}}{(1-r^2)^2} Sp((\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} (\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx}) + \\
& + \mu^2 a_1^2 \frac{3-r^2(1+r^{2n})}{(1-r^2)^2} \frac{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} (\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} (\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{CT}}{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{CT}} + \\
& + \mu^2 a_1^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2((\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx})
\end{aligned} \right\}
\end{aligned} \tag{5.2.11}$$

Из выражения (5.2.11) видно, что флуктуации весовых коэффициентов приводят к искажениям выходного сигнала ААР, причём величина искажений определяется величиной слагаемых, начиная со второго, в формуле корреляционной функции. Эти слагаемые являются следствием учёта флуктуаций весового вектора. Необходимо также отметить, влияние флуктуаций весового вектора определяется коэффициентом адаптации μ , взятом в первой и второй степенях, а также коэффициентом автокорреляции между отсчётами входного сигнала r . Нелинейная функция в цепи обратной связи адаптивной антенной решётки в данном случае представлена коэффициентом a_1 , также влияющим на статистические характеристики ААР.

Вернемся к формуле (5.2.5). В первом борновском приближении для частного случая $j = p$ можно получить вид корреляционной функции на выходе ААР для любого N_1 :

$$K_Z[n] \cong K_{CTZ}[n] + \left. \begin{aligned} & r^{|n|} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT} \left[\frac{1-r^2-r^{2n+2}}{(1-r^2)^2} Sp((\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX} (\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX}) + \right. \\ & + \sum_{j=1}^{N_1} \mu^{2j} a_j^{2j+2} \left. \left\{ + \frac{3-r^2(1+r^{2n})}{(1-r^2)^2} \frac{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} (\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX} (\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX} \vec{W}_{CT}}{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2((\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX}) \right\} \right] \end{aligned} \right\}^j \quad (5.2.12)$$

Из выражения (5.2.11) также следует, что в формуле для корреляционной функции на выходе ААР присутствуют слагаемые второго порядка малости по коэффициенту адаптации μ . Корректный статистический анализ требует вычисления слагаемых такого же порядка малости для второго приближения, что дает следующий вид корреляционной функции:

$$K_Z(m, m+n) = a_1^2 r^{|n|} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT} \times \left. \begin{aligned} & \left[1 - \frac{2\mu a_1}{1-r^2} Sp((\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX}) + \right. \\ & + \mu^2 a_1^2 \frac{1-r^2-r^{2n+2}}{(1-r^2)^2} Sp((\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX} (\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX}) + \\ & \times \left. \left\{ + 2\mu^2 a_1^2 \frac{r^2}{1-r^2} \frac{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} (\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ (\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX} \vec{W}_{CT}}{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT}} + \right. \right. \\ & + \mu^2 a_1^2 \left[\frac{3-r^2(1+r^{2n})}{(1-r^2)^2} + \frac{1}{1-r^3} \right] \frac{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} (\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX} (\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX} \vec{W}_{CT}}{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT}} + \\ & \left. \left. + \mu^2 a_1^2 \left[\frac{r^2}{(1-r^2)^2} + \frac{1}{1-r} \right] Sp^2((\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX}) \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.2.13)$$

При вычислении средних, в которые входят кратные суммы, использовалось предположение о малости времени корреляции входных сигналов по сравнению со временем релаксации системы. Это условие в несколько видоизмененной форме можно записать так:

$$\mu a_1 \lambda_n \frac{1}{1-r^2} < \mu a_1 \sum_{n=1}^{N-L} \lambda_n \frac{1}{1-r^2} = \mu a_1 \frac{1}{1-r^2} Sp((\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX}) \ll 1$$

Данная формула накладывает ограничения на величину параметров μ, r и представляет собой достаточное условие применимости методов теории возмущений для анализа влияния флуктуаций на статистические характеристики адаптивной антенной решетки, содержащей нелинейную функцию в цепи корреляционной обратной связи и настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму.

Запишем выражение для выходной мощности адаптивной антенной решётки с нелинейной функцией в цепи обратной связи, настраивающейся по алгоритму рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов. Для этого необходимо положить $n = 0$ в формуле (5.2.11), описывающей корреляционную функцию выходного сигнала ААР:

$$\begin{aligned} \langle |Z|^2 \rangle_{CT} &= a_1^2 \times \langle |Z|^2 \rangle_0 \\ &\times \left\{ \begin{aligned} &1 - \frac{2\mu a_1}{1-r^2} Sp((\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}) + \\ &+ \mu^2 a_1^2 \frac{1-2r^2}{(1-r^2)^2} Sp((\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX} (\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}) + \\ &+ \mu^2 a_1^2 \frac{3-2r^2}{(1-r^2)^2} \frac{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} (\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX} (\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT}}{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT}} + \\ &+ \mu^2 a_1^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2((\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

здесь $\langle |Z|^2 \rangle_0 \equiv \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT}$ - выходная мощность антенной решётки, найденная при постоянном стационарном весовом векторе.

Из выражения (5.2.14) можно видеть, что выходная мощность ААР с нелинейной функцией в цепи обратной связи может быть как больше, так и меньше мощности, найденной при постоянном стационарном весовом векторе, т.е. может иметь место как эффект рассогласования [17], так и эффект «перекомпенсации» [49,65], как и в адаптивной антенной решетке, не содержащей нелинейной функции в цепи корреляционной обратной связи.

Для произвольного значения N_1 - числа слагаемых в разложении нелинейной функции в ряд Вольтерра имеем следующее выражение для выходной мощности ААР:

$$\begin{aligned} \langle |Z|^2 \rangle_{CT} &\cong \langle |Z|^2 \rangle_0 + \\ &+ \sum_{j=1}^{N_1} \mu^{2j} a_j^{2j+2} \left\{ \begin{aligned} &\langle |Z|^2 \rangle_0 \left[\frac{1-2r^2}{(1-r^2)^2} Sp((\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX} (\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}) + \right. \\ &+ \frac{3-2r^2}{(1-r^2)^2} \frac{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} (\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX} (\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT}}{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT}} + \\ &\left. + \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2((\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}) \right] \end{aligned} \right\}^j \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

Кроме того, корректный статистический анализ, учитывающий слагаемые второго порядка малости по коэффициенту адаптации μ из второго приближения дает мощность на выходе ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму:

$$\begin{aligned} <|Z|^2>_{CT} = a_1^2 <|Z|^2>_0 \times \\ & \left\{ \begin{aligned} & 1 - \frac{2\mu a_1}{1-r^2} Sp((\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX}) + \\ & + \mu^2 a_1^2 \frac{1-2r^2}{(1-r^2)^2} Sp((\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX} (\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX}) + \\ & + 2\mu^2 a_1^2 \frac{r^2}{1-r^2} \frac{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} (\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ (\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX} \vec{W}_{CT}}{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT}} + \\ & + \mu^2 a_1^2 \left[\frac{3-2r^2}{(1-r^2)^2} + \frac{1}{1-r^3} \right] \frac{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} (\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX} (\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX} \vec{W}_{CT}}{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT}} + \\ & + \mu^2 a_1^2 \left[\frac{r^2}{(1-r^2)^2} + \frac{1}{1-r} \right] Sp^2((\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX}) \end{aligned} \right\} \quad (5.2.16) \end{aligned}$$

Было проведено численное оценивание величин слагаемых, входящих в выражение (5.2.16). Оценивание было проведено для 7-ми элементной полуволновой ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму с однократным линейным ограничением. На вход указанной антенной решётки подавались статистически независимые полезный сигнал и помеха, приходившие соответственно под углами 0° и 45° к нормали, проведённой к плоскости решётки. Мощность помехи была в 100 раз больше мощности полезного сигнала. В ААР присутствовал также собственный шум, мощность которого была в 1000 раз меньше мощности помехи. В качестве нелинейной функции в цепи обратной связи рассматривалась функция – сигмоид $F[y] = 1/(1 + e^{-ay})$, где $a = 0.5$ – коэффициент, определяющий конкретный вид данной функции. Для $\mu = 0.0001$; $r = 0.5$ были получены следующие значения слагаемых, входящих в выражение (5.2.16):

$$c_{smi0} = a_1^2 \cdot <|Z|^2>_0 = 0.0103$$

$$c_{smi1} = -\frac{2\mu a_1^3}{1-r^2} Sp((\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX}) \cdot <|Z|^2>_0 = -2.0643 \cdot 10^{-6};$$

$$c_{smi2} = \mu^2 a_1^4 \frac{1-2r^2}{(1-r^2)^2} Sp((\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX} (\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX}) \cdot <|Z|^2>_0 = 8.6012 \cdot 10^{-12}$$

$$c_{smi3} = 2\mu^2 a_1^4 \frac{r^2}{1-r^2} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} (\mathbf{P} \mathbf{R}_{XX} \mathbf{P})^+ (\mathbf{P} \mathbf{R}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT} = 2.9521 \cdot 10^{-9};$$

$$c_{smi4} = \mu^2 a_1^4 \left[\frac{3-2r^2}{(1-r^2)^2} + \frac{1}{1-r^3} \right] \times \\ \times \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} (\mathbf{P} \mathbf{R}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \mathbf{R}_{XX} (\mathbf{P} \mathbf{R}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT} = 2.2513 \cdot 10^{-10};$$

$$c_{smi5} = \mu^2 a_1^4 \left[\frac{r^2}{(1-r^2)^2} + \frac{1}{1-r} \right] Sp^2((\mathbf{P} \mathbf{R}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \mathbf{R}_{XX}) \cdot \langle |Z|^2 \rangle_0 = 1.0322 \cdot 10^{-10}$$

Оценивание показало, что поправка к выражению выходной мощности, найденная в первом борновском приближении, на шесть порядков меньше мощности, найденной при постоянном стационарном весовом векторе. Поправки к выражению выходной мощности, найденные во втором приближении, меньше поправок первого порядка в $10^3 - 10^6$ раз. Таким образом, можно не учитывать второе приближение при анализе работы адаптивной антенной решетки с учетом флуктуаций весового вектора.

Для количественного сравнения влияния флуктуаций весового вектора на величину выходной мощности были построены графики зависимости флуктуационной

$$\text{части выходной мощности } M = \frac{\langle |Z|^2 \rangle_{CT} - \langle |Z|^2 \rangle_0}{\langle |Z|^2 \rangle_{CT}} \cdot 100\% \text{ от величины коэффициента}$$

корреляции между отсчётами входных сигналов r и коэффициента a , определяющего форму нелинейной функции обратной связи (рис.5.1, рис. 5.2).

Сравнивались адаптивные антенные решётки с нелинейной функцией в цепи обратной связи, настраивающиеся по дискретному градиентному и быстрому рекуррентному алгоритмам. Рассматривались ААР с однократным линейным ограничением в направлении полезного сигнала. На входы указанных антенных решёток подавались статистически независимые полезный сигнал и помеха, приходившие соответственно под углами 0° и 45° к нормали, проведённой к плоскости решёток. Мощность помехи была в 10 раз больше мощности полезного сигнала. В ААР присутствовал также собственный шум, мощность которого была в 100 раз меньше мощности помехи. В качестве нелинейной функции в цепи обратной связи рассматривалась функция – сигмоид $F[y] = 1/(1 + e^{-ay})$, где a - коэффициент, определяющий конкретный вид данной функции.

На рисунке 5.1 представлена зависимость флуктуационной части выходной мощности адаптивной антенной решётки от величины коэффициента корреляции между отсчётами входных сигналов r (кривая 1 – ААР с быстрым рекуррентным

алгоритмом настройки; кривая 2 – ААР с дискретным градиентным алгоритмом настройки).

Из рисунка видно, что по мере увеличения коэффициента корреляции между отсчётами входных сигналов увеличивается величина остаточной мощности на выходе адаптивных антенных решёток, вносимая флуктуациями весового вектора. Из рисунка также следует, что при коэффициенте корреляции $r < 0.7$ флуктуации в антенной решётке с быстрым рекуррентным алгоритмом (кривая 1) приводят к меньшему увеличению мощности выходного сигнала, чем в ААР с дискретным градиентным алгоритмом (кривая 2). При больших значениях коэффициента корреляции $r > 0.7$ искажения выходного сигнала вследствие флуктуаций имеют существенно большую величину в антенной решётке с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки по сравнению с ААР, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму. Надо отметить, что в данной ситуации флуктуации приводят к увеличению выходной мощности по сравнению с мощностью, получаемой при стационарном весовом векторе ($M > 0$, эффект misadjustment [17]).

На рисунке 5.2 представлен график зависимости флуктуационной части выходной мощности M от величины коэффициента a , определяющего форму нелинейной функции в цепи обратной связи (кривая 1 – ААР с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки; кривая 2 – ААР с дискретным градиентным алгоритмом настройки). Как уже отмечалось, в качестве нелинейной функции в цепи обратной связи была выбрана функция – сигмоид $F[y] = 1/(1 + e^{-ay})$. Величина коэффициента a определяет форму нелинейной функции. Так, при $a = 0$ функция в цепи обратной связи представляет собой постоянное значение на уровне 0.5, а при $a \rightarrow 1$ - вид функции приближается к виду пороговой функции.

Из рисунка можно видеть, что флуктуации весового вектора вносят существенно меньший вклад в величину выходной мощности антенной решётки с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки (кривая 1) по сравнению с ААР, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму (кривая 2). Необходимо отметить, что по мере увеличения коэффициента a (приближения вида нелинейной функции к пороговой функции) растёт и остаточная мощность на выходе антенных решёток, вносимая флуктуациями.

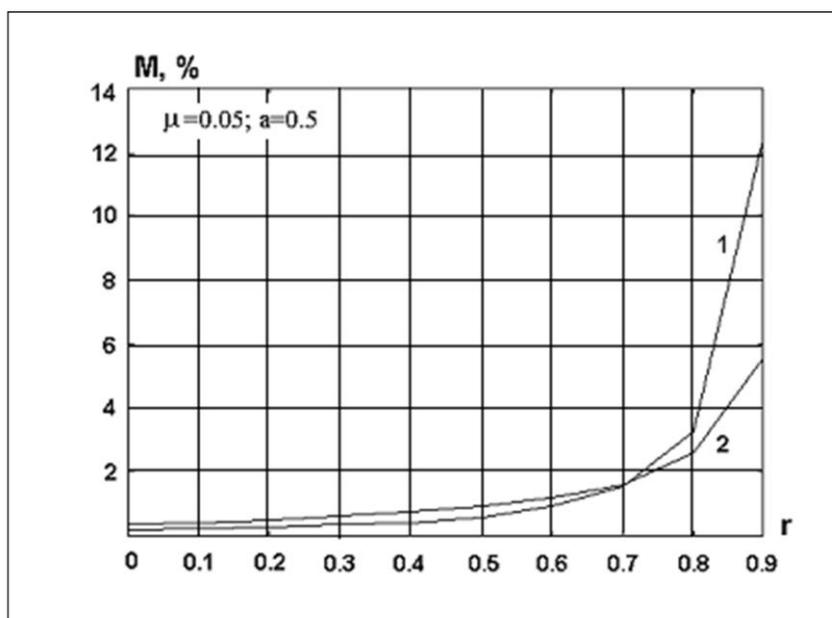


Рис. 5.1. Зависимость флуктуационной части выходной мощности M ААР с нелинейной функцией в цепи обратной связи от коэффициента корреляции между отсчетами входных сигналов r : 1 – ААР с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки; 2 – ААР с дискретным градиентным алгоритмом настройки ($\mu = 0.05$; $a = 0.5$).

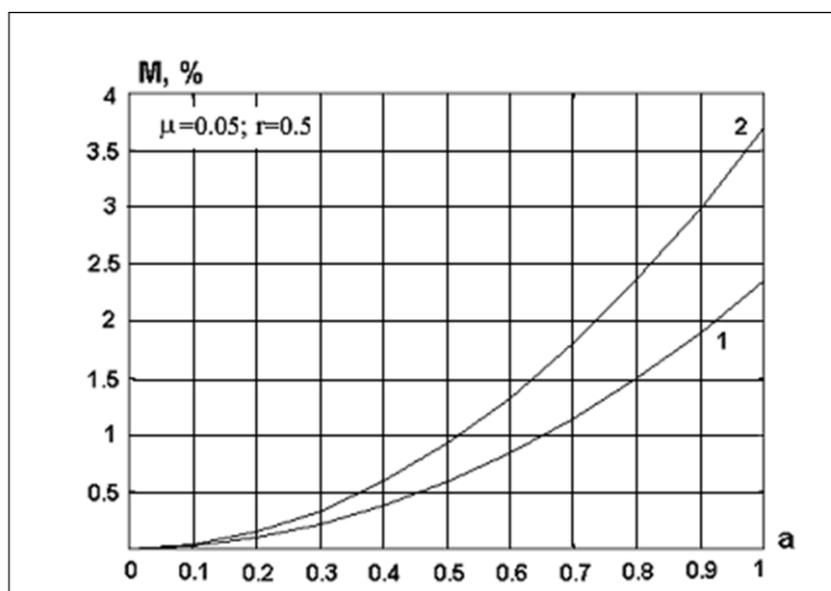


Рис. 5.2. Зависимость флуктуационной части выходной мощности M ААР с нелинейной функцией в цепи обратной связи от коэффициента a , определяющего форму нелинейной функции в цепи обратной связи: 1 – ААР с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки; 2 – ААР с дискретным градиентным алгоритмом настройки ($\mu = 0.05$; $r = 0.5$).

РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.

Моделировалась N - элементная узкополосная ААР ($N=7$) с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, работающая по алгоритму рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов (5.1.1) с однократным линейным ограничением ($L=1$) на диаграмму направленности. Расстояние между элементами ААР было равно половине длины волны входных сигналов. В качестве нелинейной функции, присутствующей в цепи корреляционной обратной связи была выбрана функция – сигмоид $F[y]=1/(1+e^{-ay})$, где $a=0.5$.

Предполагалось, что на ААР поступают статистически независимые полезный сигнал и одна помеха с одинаковыми коэффициентами корреляции между отсчетами $r_S = r_\xi = 0$. Углы прихода полезного сигнала и помехи были равны соответственно $\Theta_S=0^0$, $\Theta_\xi=45^0$. Мощность помехи была в 10 раз больше мощности полезного сигнала. В ААР присутствовал также собственный шум, мощность которого составляла 0.1 (-10 dB) мощности полезного сигнала.

Для проверки формулы (5.2.11) проводилось сравнение теоретически найденной величины относительного изменения выходной мощности

$$M = \left\{ \begin{aligned} & -\frac{2\mu a_1}{1-r^2} Sp((\mathbf{PR}_{xx}\mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{xx}) + \\ & + \mu^2 a_1^2 \frac{1-2r^2}{(1-r^2)^2} Sp((\mathbf{PR}_{xx}\mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{xx} (\mathbf{PR}_{xx}\mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{xx}) + \\ & + \mu^2 a_1^2 \frac{3-2r^2}{(1-r^2)^2} \frac{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} (\mathbf{PR}_{xx}\mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{xx} (\mathbf{PR}_{xx}\mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{xx} \vec{W}_{CT}}{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{CT}} + \\ & + \mu^2 a_1^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2((\mathbf{PR}_{xx}\mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{xx}) \end{aligned} \right\} \times 100\% \text{ (кривая 1) с}$$

соответствующим значением, полученным в результате компьютерного моделиро-

$$\text{вания: } M = \frac{\langle |Z|^2 \rangle_{CT} - \langle |Z|^2 \rangle_0}{\langle |Z|^2 \rangle_0} \cdot 100\% \text{ (кривая 2) (рис. 5.3).}$$

Определение при компьютерном моделировании мощности выходного сигнала ААР велось путём усреднения по ансамблю 500000 реализаций выходного случайного процесса.

Длина реализации была равна 10 дискретным временным отсчетам. Стартовыми весовыми коэффициентами служили \vec{W}_{CT} , определяемые формулой (5.1.11).

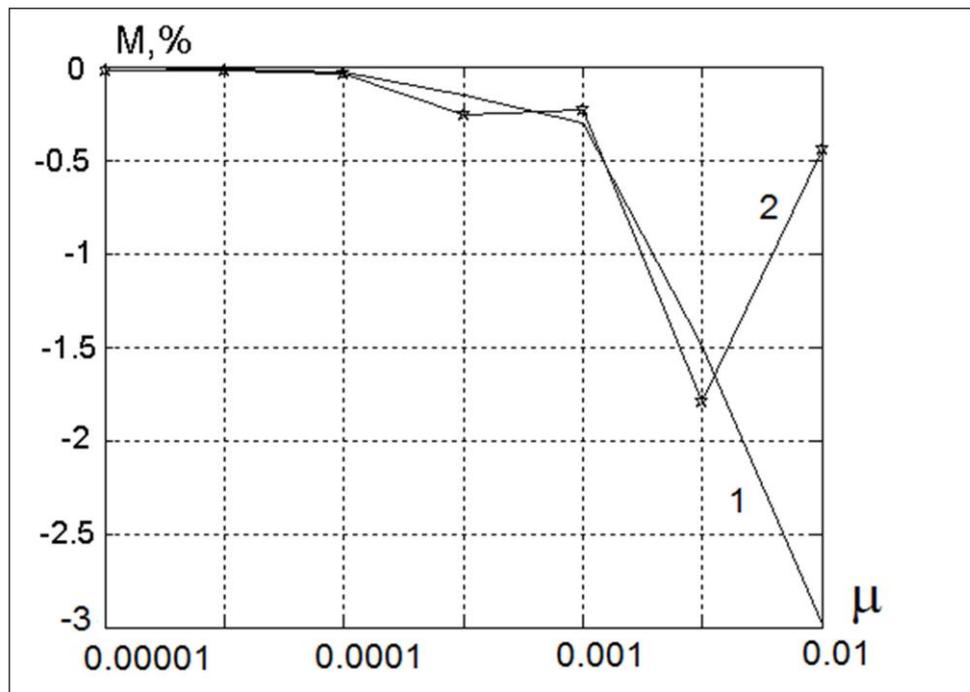


Рис. 5.3. Зависимость изменения относительной величины выходной мощности M ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму, от значений коэффициента адаптации μ (кривая 1 – теория; кривая 2 – результаты компьютерного моделирования).

Исследовалась зависимость величины относительного изменения выходной мощности M от значения μ - коэффициента адаптации. Из сравнения теоретических кривых и кривых, полученных методом компьютерного моделирования, можно видеть, что влияние флуктуаций весовых коэффициентов на мощность сигнала на выходе ААР зависит от величины коэффициента адаптации μ . По мере роста коэффициента адаптации растет величина рассогласования выходной мощности со своим значением, полученным при постоянном стационарном весовом векторе. При значении коэффициента адаптации $\mu = 10^{-2}$ начинают наблюдаться существенные различия между теоретическими значениями M и значениями, найденными в результате компьютерного моделирования. Это может быть связано с нарушением предположения о малости коэффициента адаптации, использованного при применении методов теории возмущений для решения данной задачи. При данных параметрах программы имеет место эффект «перекомпенсации» выходной мощности ААР ($M < 0$), описанный в работах [49,65]. Некоторые различия между теоретическими значениями и данными компьютерного моделирования обусловлены конечным временем усреднения при получении значений относительного изменения выходной мощности M и наличием в ААР собственного шума.

Таким образом, проведенный статистический анализ показал, что в адаптивной антенной решётке с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму, из-за флуктуаций весовых коэффициентов наблюдается как уменьшение мощности выходного сигнала, по сравнению с мощностью, полученной при постоянном стационарном весовом векторе (эффект «перекомпенсации» [49,65]), так и ее увеличение (эффект рассогласования [17]).

5.3. МАТРИЦА КОВАРИАЦИИ ВЕКТОРА ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ [124,126].

Матрица ковариации весового вектора в стационарном режиме работы в совпадающие моменты времени в первом (борновском) приближении может быть записана в виде [49,65,116]:

$$\mathbf{K}_{\vec{w}} \equiv K_{\vec{w}}(m, m) \equiv \langle \vec{W}^*(m) \vec{W}^T(m) \rangle \cong \mathbf{Q}^* \langle \vec{\Psi}_1^*(m) \vec{\Psi}_1^T(m) \rangle \mathbf{Q}^T. \quad (5.3.1)$$

Используя формулы (5.1.22), можно получить вид корреляционной матрицы для вектора весовых коэффициентов $\vec{\Psi}$ в \mathbf{Q} - матричном представлении $\langle \vec{\Psi}_1^* \vec{\Psi}_1^T \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \vec{\Psi}_1^* \vec{\Psi}_1^T \rangle = & \mathbf{Q}^* \langle \mu^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} (\hat{\lambda}(n) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P}(\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \tilde{\Phi}_{XA}(m-n) \vec{Y}_{0CT}^*) \times \\ & \times (\hat{\lambda}(n_1) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P}(\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \tilde{\Phi}_{XA}(m-n_1) \vec{Y}_{0CT})^T \rangle \mathbf{Q}^T. \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Вычисляя (5.3.2) и учитывая, что адаптивная антенная решётка является узкополосной (5.1.23), получаем:

$$\mathbf{K}_{\vec{w}} = \mu^2 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} Sp(\vec{Y}_{CT}^* \vec{Y}_{CT}^T \mathbf{R}_{AA}) \cdot [(\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P})^+]^* \quad . \quad (5.3.3)$$

Из приведённого выражения следует, что поскольку собственные числа корреляционной матрицы входных сигналов \mathbf{R}_{xx} при воздействии внешних помех различны, то в общем случае собственные числа матрицы ковариации вектора весовых коэффициентов $\mathbf{K}_{\vec{w}}$ также будут различными. По этой причине флуктуации весового вектора антенной решётки с нелинейной функцией в цепи обратной связи, настраиваемой по быстрому рекуррентному алгоритму, неизотропны в пространстве весовых коэффициентов. Они равны нулю в направлении ограничений, минимальны в направлении помех, а во всех остальных направлениях имеют максимальную величину, пропорциональную значению $1/\text{мощность}$ собственного шума ААР. Необходимо отметить, что в антенной решётке, не имеющей нелинейной функции в цепи обратной связи, флуктуации весового вектора также неизотропны и имеют такое же распределение направлений максимальных и минимальных флуктуаций. Однако данные флуктуации имеют первый порядок малости по μ , а не второй, как в случае присутствия нелинейной функции [115].

Проведённый статистический анализ характеристик адаптивных антенных решёток с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи и алгоритмом рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов, при учёте флуктуаций настраиваемого весового вектора позволил показать, что наличие нелинейности в цепи корреляционной обратной связи приводит к качественно тем же эффектам, что и в линейном случае. В таких ААР может иметь место как эффект рассогласования (misadjustment) [17], так и эффект «перекompенсации» [49,65] выходной мощности. Вид эффекта зависит от величины коэффициента автокорреляции между отсчётами входных сигналов.

Необходимо также отметить, что в адаптивных антенных решётках с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки также имеет место неизотропность флуктуаций весового век-

тора в пространстве весовых коэффициентов, т.е. различный уровень флуктуаций в разных направлениях пространства весовых коэффициентов.

Найденные эффекты рассогласования и «перекompенсации» в адаптивных антенных решетках с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи и алгоритмом рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов имеют второй порядок малости по коэффициенту адаптации μ по сравнению с ААР, не имеющей нелинейной функции в цепи корреляционной обратной связи. По этой причине выраженность эффектов рассогласования и «перекompенсации» в адаптивных антенных решетках с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи существенно меньше, чем в ААР, не имеющих нелинейной функции в цепи корреляционной обратной связи.

5.4 ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ ААР С УЧЕТОМ ФЛУКТУАЦИЙ ВЕСОВОГО ВЕКТОРА - ДИАГРАММА НАПРАВЛЕННОСТИ, КОЭФФИЦИЕНТ НАПРАВЛЕННОГО ДЕЙСТВИЯ, КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ, ПОТЕРИ В ВЫХОДНОМ ОТНОШЕНИИ СИГНАЛ / ШУМ [126,147,150,169].

Диаграмма направленности антенны.

Флуктуации весового вектора искажают выходной сигнал адаптивной антенной решётки, и это приводит к появлению дополнительных слагаемых в различных статистических характеристиках ААР, в том числе и в диаграмме направленности адаптивной антенны.

Рассмотрим среднюю по мощности ДН $g_{av}(\theta)$, где θ - угол прихода пробного сигнала \vec{S}_{tr} относительно нормали, проведённой к плоскости антенной решётки [49]:

$$g_{cp}(\theta) = \left\langle \left| F(\vec{S}_{np}^T \vec{W}(k)) \right|^2 \right\rangle. \quad (5.4.1)$$

Подставляя в выражение (5.4.1) представление весового вектора (5.1.6), получаем формулу для диаграммы направленности, состоящую из суммы двух слагаемых – диаграммы направленности при постоянном стационарном весовом векторе и «флуктуационной» диаграммы направленности [49,116]:

$$g_{cp}(\theta) = g_0(\theta) + g_{\vec{w}}(\theta), \quad (5.4.2)$$

где

$$g_0(\theta) = \vec{Y}_{CT}^H \mathbf{R}_{AA} \vec{Y}_{CT} - \quad (5.4.3)$$

- диаграмма направленности ААР без учёта флуктуаций весовых коэффициентов;

$$g_{\vec{w}}(\theta) = \left\langle \vec{Y}^H(k) \mathbf{R}_{AA} \vec{Y}(k) \right\rangle - \quad (5.4.4)$$

- дополнительный член, обусловленный увеличением эквивалентной мощности пробного сигнала на выходе ААР из-за модуляции его флуктуациями весовых коэффициентов.

Для простоты предположим, что в ряде Вольтерра разложения нелинейной функции, находящейся в цепи обратной связи, первое слагаемое существенно больше остальных, и ими можно пренебречь ($a_1 \gg a_{2,3,\dots}$). Тогда для этого случая ДН при постоянном стационарном весовом векторе имеет вид:

$$g_0(\theta) = a_1^2 \vec{W}_{CT}^H \vec{S}_{np}^* \vec{S}_{np}^T \vec{W}_{CT}, \quad (5.4.5)$$

а «флуктуационная» диаграмма направленности описывается выражением:

$$g_{\tilde{W}}(\theta) = a_1^2 \tilde{S}_{np}^H \mathbf{K}_{\tilde{W}} \tilde{S}_{np}. \quad (5.4.6)$$

Представим в «развёрнутом» виде «флуктуационную» ДН ААР, настраивающейся по нелинейному быстрому рекуррентному алгоритму. Для этого подставим формулу ковариационной матрицы весового вектора (5.3.3) в (5.4.6). Тогда имеем:

$$g_{\tilde{W}}(\theta) = \mu^2 a_1^2 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} \langle |Z|^2 \rangle_0 \cdot \left| [(\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+]^* \tilde{S}_{np} \right|^2. \quad (5.4.7)$$

где $a_1^2 \langle |Z|^2 \rangle_0 = a_1^2 \tilde{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \tilde{W}_{CT}$ - выходная мощность ААР при постоянном стационарном весовом векторе.

Из формулы (5.4.7) видно, что «флуктуационная» диаграмма направленности в общем случае не является изотропной, и её форма определяется квадратом модуля произведения пробного сигнала и матрицы $[(\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+]^*$.

Рассмотрим более подробно флуктуационную ДН для адаптивной антенной решётки с однократным линейным ограничением. Для ААР с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки флуктуационная ДН описывается выражением:

$$g_{\tilde{W}}(\theta) = \mu^2 a_1^2 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} \langle |Z|^2 \rangle_0 \times \frac{N}{\pi_{\xi 1}} \left\{ \left[1 - |f(U)|^2 \right] - \frac{N\pi_{\xi}}{\pi_{\xi 1}} \cdot \frac{[|f(U_{\xi} - U)| - |f(U_{\xi})| \cdot |f(U)|]^2}{1 + (N\pi_{\xi} / \pi_{\xi 1})[1 - |f(U_{\xi})|^2]} \right\}. \quad (5.4.8)$$

Коэффициент направленного действия антенны.

Найдём коэффициент направленного действия с учётом флуктуаций весового вектора адаптивной антенной решётки нелинейной функцией обратной связи, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму. Согласно результатам, полученным в первой главе, общий вид коэффициента направленного действия можно записать следующим образом:

$$D(\theta) = \frac{2g_0(\theta) + 2g_{\tilde{W}}(\theta)}{\int_0^{\pi} (g_0(\theta) + g_{\tilde{W}}(\theta)) \sin \theta \cdot d\theta}. \quad (5.4.9)$$

Из выражения (5.4.9) видно, что коэффициент направленного действия адаптивной антенны представляет собой сумму двух слагаемых: полученного при постоянном стационарном весовом векторе и «флуктуационного» слагаемого.

«Стационарный» коэффициент направленного действия для адаптивной антенной решетки, настраиваемой по быстрому рекуррентному алгоритму, имеет вид:

$$D_0(\theta) = \frac{2g_0(\theta)}{\int_0^\pi (g_0(\theta) + \mu^2 a_1^2 \langle |Z|^2 \rangle_0 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} |[(\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+]^* \vec{S}_{np}|^2) \sin \theta \cdot d\theta} \quad (5.4.10)$$

Здесь $g_0 = a_1^2 \vec{W}_{CT}^H \vec{S}_{np}^* \vec{S}_{np}^T \vec{W}_{CT}$ - диаграмма направленности, найденная при постоянном стационарном весовом векторе.

«Флуктуационный» коэффициент направленного действия ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраиваемой по быстрому рекуррентному алгоритму, может быть представлен в виде:

$$D_{\vec{w}}(\theta) = \frac{2\mu^2 a_1^2 \langle |Z|^2 \rangle_0 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} |[(\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+]^* \vec{S}_{np}|^2}{\int_0^\pi (g_0(\theta) + \mu^2 a_1^2 \langle |Z|^2 \rangle_0 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} |[(\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+]^* \vec{S}_{np}|^2) \sin \theta \cdot d\theta} \quad (5.4.11)$$

Из выражений (5.4.10) и (5.4.11) можно видеть, что флуктуации весовых коэффициентов приводят, с одной стороны, к увеличению коэффициента направленного действия, но с другой стороны, к «размазыванию» этого направленного действия по направлениям угла θ .

Коэффициент усиления адаптивной антенной решётки.

Найдем с учетом флуктуаций настраиваемых весовых коэффициентов коэффициент усиления адаптивной антенной решётки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраиваемой по быстрому рекуррентному алгоритму. Коэффициент усиления в данном случае представляет собой сумму двух слагаемых – найденного при постоянном стационарном весовом векторе и «флуктуационного» коэффициента усиления и имеет вид:

$$G(\theta) = \eta \frac{2g_0(\theta) + 2\mu^2 a_1^2 \langle |Z|^2 \rangle_0 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} |[(\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+]^* \vec{S}_{np}|^2}{\int_0^\pi (g_0(\theta) + \mu^2 a_1^2 \langle |Z|^2 \rangle_0 \frac{1-r+r^2}{(1-r)^2} |[(\mathbf{PR}_{xx} \mathbf{P})^+]^* \vec{S}_{np}|^2) \sin \theta \cdot d\theta} \quad (5.4.12)$$

Из выражения (5.4.12) следует, что флуктуации весового вектора увеличивают величину коэффициента усиления. Однако это увеличение имеет второй порядок малости по коэффициенту адаптации μ , а потому незначительно. С другой стороны,

флуктуации весовых коэффициентов искажают величину коэффициента усиления адаптивной антенны по направлениям угла θ .

Таким образом, флуктуации весовых коэффициентов оказывают двойственное действие на коэффициент направленного действия и коэффициент усиления адаптивной антенной решётки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму. С одной стороны, флуктуации увеличивают значения этих коэффициентов (правда незначительно), на величину, даже меньшую, чем второго порядка малости по коэффициенту адаптации μ , поскольку в знаменателе данных выражений присутствует тоже «флуктуационное» слагаемое – «флуктуационная» диаграмма направленности. С другой стороны, флуктуации весового вектора вносят искажения в форму КНД и КУ по углу θ .

Потери в выходном отношении сигнал / шум, вызванные наличием флуктуаций весового вектора.

Рассмотрим в качестве одного из возможных показателей эффективности работы адаптивной антенной решетки потери в выходном отношении сигнал / шум, вызванные флуктуациями:

$$\tilde{\eta} = 10 \cdot \lg \left(\frac{SNR_{fl}}{SNR_{opt}} \right) \quad (5.4.13)$$

Как отмечалось в первой главе, здесь SNR_{fl} – выходное отношение сигнал / шум, найденное с учетом флуктуаций весового вектора; SNR_{opt} – выходное отношение сигнал / шум, найденное без учета флуктуаций весового вектора.

Используя формулу выходной мощности ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму с ограничениями (5.2.14), и учитывая, что корреляционная матрица входных сигналов адаптивной антенной решетки состоит из суммы корреляционных матриц полезного сигнала, помех и собственного шума адаптивной антенны $\mathbf{R}_{XX} = \mathbf{R}_{SS} + \mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}$ и, соответственно, мощности полезного сигнала и помех на выходе антенны при постоянном стационарном весовом векторе имеют вид

$\langle |Z|^2 \rangle_S = \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{SS} \vec{W}_{CT}$, $\langle |Z|^2 \rangle_{\xi} = \vec{W}_{CT}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT}$ получим выражение для остаточной мощности помехи на выходе ААР с быстрым рекуррентным алгоритмом:

$$\begin{aligned}
A_{smif} = & \langle |Z|^2 \rangle_{CT} - \langle |Z|^2 \rangle_{sk} = a_1^2 \cdot \vec{W}_{CT}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT} + a_1^2 \cdot \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT} \times \\
& \left\{ \begin{aligned}
& \left| -\frac{2\mu a_1}{1-r^2} Sp((\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}) \right| + \\
& + \left| \mu^2 a_1^2 \frac{1-2r^2}{(1-r^2)^2} Sp((\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX} (\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}) \right| + \\
& + \left| \mu^2 a_1^2 \frac{3-2r^2}{(1-r^2)^2} \frac{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} (\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX} (\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT}}{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT}} \right| + \\
& + \left| \mu^2 a_1^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2((\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}) \right|
\end{aligned} \right\} \cdot \quad (5.4.14)
\end{aligned}$$

После преобразований имеем следующее выражение потерь в выходном отношении сигнал / шум из-за флуктуаций весового вектора ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму с ограничениями:

$$\tilde{\eta} = 10 \cdot \lg \left(\frac{a_1^2 \cdot \vec{W}_{CT}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT}}{A_{smif}} \right) \quad (5.4.15)$$

На рисунке 5.4 представлена зависимость потерь в выходном отношении сигнал / шум адаптивной антенной решетки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи от величины коэффициента адаптации μ . График построен для ААР, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму с однократными линейными ограничениями ($L=1$) на диаграмму направленности, имеющей 7 элементов ($N=7$). Расстояние между элементами было равно половине длины волны ($d = \lambda / 2$). Для однократных ограничений матрица \mathbf{C} имеет размерность $[N \times 1]$ и равна $\mathbf{C} \equiv \vec{C}_1 = \vec{S}^*$, где \vec{S} - вектор волнового фронта полезного сигнала. В качестве

нелинейной функции была выбрана функция-сигмоид $F[y] = \frac{1}{1 + \exp\{-a \cdot y\}}$, $a = 0.5$.

Предполагалось, что на ААР поступают статистически независимые полезный сигнал и одна помеха $r_s = r_\xi = 0.5$. Комплексные амплитуды входных сигналов формировались из двух независимых источников гауссовского “белого” шума. Углы прихода полезного сигнала и помехи были равны соответственно $\theta_s = 0^\circ$, $\theta_\xi = 45^\circ$, мощность помехи была в 100 раз больше мощности полезного сигнала. В каждом элементе ААР присутствовал также некоррелированный собственный шум, мощность которого составляла 0.1 мощности полезного сигнала.

Из рисунка 5.4 можно видеть, что имеют место потери из-за флуктуаций весового вектора в выходном отношении сигнал / шум адаптивной антенной решетки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму. Из рисунка также следует, что по мере увеличения коэффициента адаптации μ растут потери, вызванные наличием флуктуаций весового вектора. Потери имеют наибольшую величину в адаптивной антенной решетке без нелинейной функции в цепи корреляционной обратной связи с дискретным градиентным алгоритмом настройки (кривая ААР gr) и наименьшую величину в ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки (кривая ААР smif). Адаптивная антенная решетка с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки без нелинейной функции в цепи корреляционной обратной связи, а также ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи с дискретным градиентным алгоритмом настройки занимают промежуточное положение (кривые ААР smi, ААР grf).

Рассмотрим, каковы будут потери в выходном отношении сигнал / шум рассмотренных адаптивных антенных решеток в случае равных скоростей сходимости изученных алгоритмов. Условие равных скоростей сходимости данных алгоритмов приведено ниже:

$$\begin{aligned} \mu_{smi} &= \mu_{gr} \lambda_{\max PRP} \\ \mu_{grf} &= \mu_{gr} / a_1 \\ \mu_{smif} &= \mu_{gr} \lambda_{\max PRP} / a_1 \\ \mu_{Hebb} &= \frac{\mu_{gr} \lambda_{\max R}}{\lambda_{\max R} + \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT}} \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

Из формулы (5.4.16) можно видеть, что коэффициенты адаптации всех изученных алгоритмов для всех схем ААР записаны через коэффициент адаптации дискретного градиентного алгоритма линейной ААР μ_{gr} . При таком соотношении между коэффициентами адаптации были построены графики потерь в выходном отношении сигнал / шум адаптивных антенных решеток с нелинейной и без нелинейной функции в цепи корреляционной обратной связи, настраивающихся по дискретному градиентному, быстрому рекуррентному алгоритмам и алгоритму Хэбба.

На рисунке 5.5 представлена зависимость потерь в выходном отношении сигнал / шум адаптивной антенной решетки от величины коэффициента адаптации μ_{gr} дискретного градиентного алгоритма. Расчеты велись для ААР, имеющей 7 элементов ($N=7$). Расстояние между элементами было равно половине длины волны (

$d = \lambda / 2$). Графики построены для адаптивных антенн, содержащих и не содержащих нелинейную функцию в цепи корреляционной обратной связи, и настраивающихся по дискретному градиентному и быстрому рекуррентному алгоритму с однократными линейными ограничениями ($L=1$) на диаграмму направленности, а также для ААР с алгоритмом Хэбба.

Предполагалось, что на адаптивные антенные решетки поступают статистически независимые два сигнала $r_1 = r_2 = 0.5$. Комплексные амплитуды входных сигналов формировались из двух независимых источников гауссовского “белого” шума. Углы прихода сигналов были равны соответственно $\theta_1 = 45^\circ$, $\theta_2 = 0^\circ$, мощность первого сигнала была в 100 раз больше мощности второго сигнала. В каждом элементе ААР присутствовал также некоррелированный собственный шум, мощность которого составляла 0.1 мощности второго сигнала. Необходимо отметить, что ААР, настраиваемая по алгоритму Хэбба, выделяет самый мощный сигнал и подавляет все остальные сигналы, имеющие меньшую мощность. Таким образом, ААР с алгоритмом Хэбба выделяла сигнал, приходящий с направления $\theta_1 = 45^\circ$.

Из рисунка 5.5 можно видеть, что по мере увеличения коэффициента адаптации μ_{gr} растут потери в выходном отношении сигнал / шум адаптивных антенных решеток со всеми изученными алгоритмами настройки. Из рисунка также следует, что при равных скоростях сходимости алгоритмов наименьшие потери наблюдаются в ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраиваемой по дискретному градиентному алгоритму (кривая ААР grf), а наибольшие – в адаптивной антенне с алгоритмом Хэбба (кривая ААР Hebb). Потери в обеих ААР с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки (кривые ААР smi и ААР smif), а также в линейной адаптивной антенной решетке с дискретным градиентным алгоритмом (кривая ААР gr) занимают промежуточное положение.

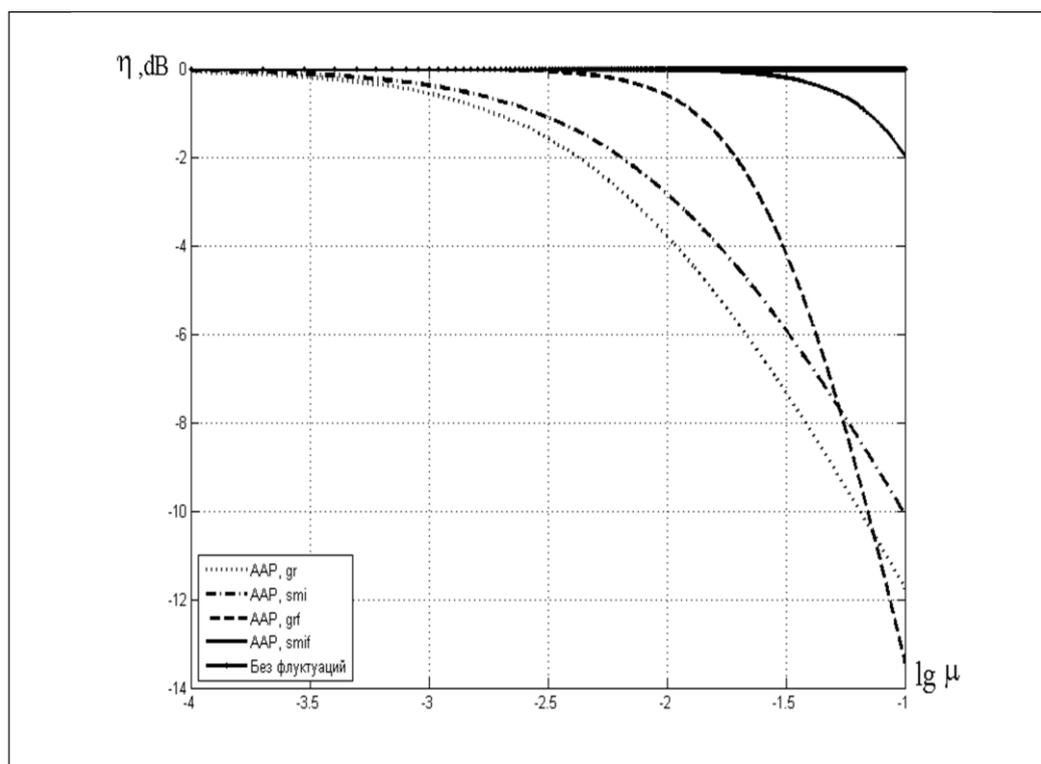


Рис. 5.4. Потери η в выходном отношении сигнал / шум в зависимости от величины коэффициента адаптации μ . AAP smif - AAP с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки.

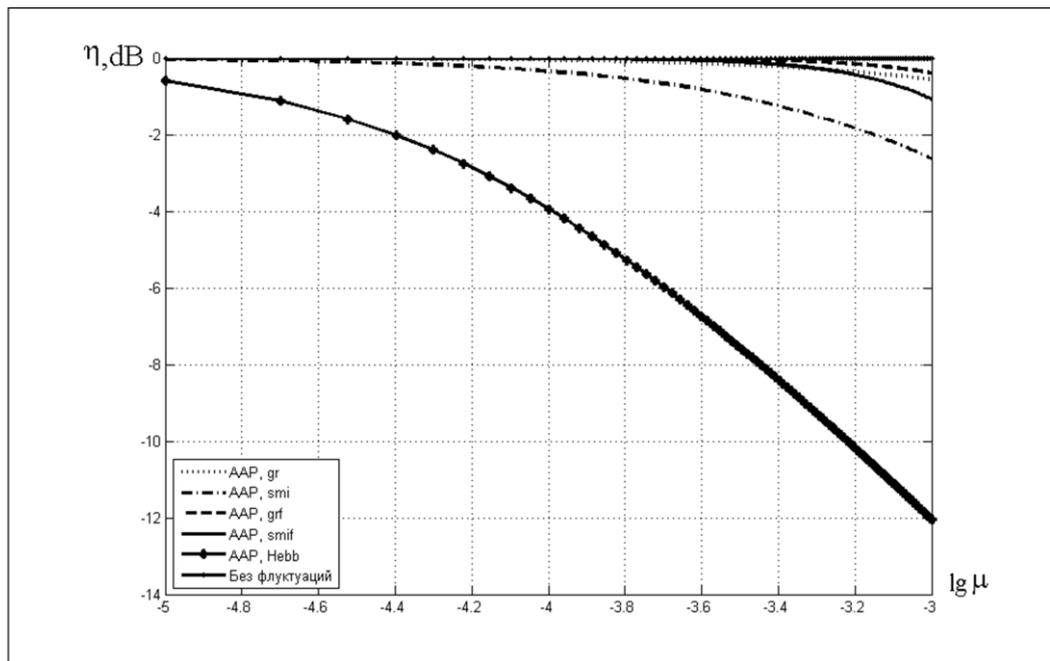


Рис. 5.5. Потери η в выходном отношении сигнал / шум при равных скоростях сходимости алгоритмов в зависимости от величины коэффициента адаптации дискретного градиентного алгоритма μ_{gr} .

5.5. ВЫВОДЫ.

Проведённое в пятой главе исследование статистических характеристик адаптивной антенной решетки, содержащей нелинейную функцию в цепи корреляционной обратной связи и настраивающуюся по быстрому рекуррентному алгоритму с многократными линейными ограничениями на диаграмму направленности, с учетом флуктуаций весового вектора позволяет сделать следующие выводы:

1. Статистический анализ влияния флуктуаций весовых коэффициентов на характеристики адаптивных антенных решёток с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи и быстрым рекуррентным алгоритмом настройки необходимо проводить методами теории возмущений. Данные методы позволяют учесть негауссовскую статистическую зависимость между весовым вектором и вектором входных сигналов.
2. Для успешного применения методов теории возмущений при статистическом анализе ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи и быстрым рекуррентным алгоритмом настройки необходимо, чтобы нелинейная функция была N раз дифференцируемая. Это позволяет применить при статистическом анализе разложение данной функции в ряд Вольтерра.
3. Флуктуации весового вектора антенной решётки с нелинейной функцией в цепи обратной связи, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму, неизотропны в пространстве весовых коэффициентов. Они равны нулю в направлении ограничений, минимальны в направлении помех, а во всех остальных направлениях имеют максимальную величину, пропорциональную значению $1/\text{мощность}$ собственного шума ААР.
4. Имеют место потери из-за флуктуаций весового вектора в выходном отношении сигнал / шум адаптивной антенной решетки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму. По мере увеличения коэффициента адаптации μ растут потери, вызванные наличием флуктуаций весового вектора. Потери имеют наибольшую величину в ААР без нелинейной функции в цепи корреляционной обратной связи с дискретным градиентным алгоритмом настройки и наименьшую величину в ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки. Адаптивная антенная решетка с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки без нелинейной функции в цепи корреляционной обратной связи, а также

ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи с дискретным градиентным алгоритмом настройки занимают промежуточное положение.

5. При равных скоростях сходимости алгоритмов наименьшие потери за счет флуктуаций весовых коэффициентов в выходном отношении сигнал/шум наблюдаются в ААР без нелинейной функции в цепи корреляционной обратной связи, настраиваемой по дискретному градиентному алгоритму, а наибольшие – в адаптивной антенне с алгоритмом Хэбба. Потери в «линейной» и «нелинейной» ААР с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки, а также в «нелинейной» адаптивной антенной решетке с дискретным градиентным алгоритмом занимают промежуточное положение.

Глава 6. Статистический анализ влияния флуктуаций весовых коэффициентов на характеристики искусственных нейронных сетей.

Скорость и точность настройки адаптивных систем во многом определяется флуктуациями настраиваемых весовых коэффициентов. Статистический анализ адаптивных антенных решёток с различными алгоритмами настройки с учётом флуктуаций весового вектора показал, что флуктуации приводят к искажениям выходного сигнала ААР и появлению в статистических характеристиках антенных решёток дополнительных слагаемых, обусловленных флуктуациями.

В настоящее время внимание исследователей все более начинают привлекать искусственные нейронные сети (ИНС), которые позволяют решать более широкий спектр задач, включая и анализ качественных данных [75,78,82].

Искусственные нейронные сети являются обобщением идеи отдельной адаптивной антенной решетки. Действительно, адаптивная антенная решётка представляет собой адаптивный линейный сумматор, на входные элементы которого в случае решения задачи пространственной фильтрации поступает волновой фронт полезного сигнала и помехи.

Искусственный нейрон (ИН), согласно его схеме, является обобщением «линейной» ААР и содержит в цепи корреляционной обратной связи нелинейную функцию. Появление нелинейной функции в цепи корреляционной обратной связи искусственного нейрона обеспечивает такой адаптивной системе устойчивое функционирование, если нелинейная функция ограничена сверху и снизу (пороговая функция, функция – сигмоид). Кроме того, у искусственного нейрона появляется возможность решения дополнительного класса задач за счет наличия данной нелинейной функции. Так, в частности, сигмоидальная функция обладает свойством усиливать слабые сигналы лучше, чем большие, и предотвращает насыщение от больших сигналов, т.к. они соответствуют областям аргументов, где сигмоид имеет пологий наклон [79].

Искусственные нейронные сети представляют собой объединенные в слои искусственные нейроны и тем самым являются своего рода обобщением искусственного нейрона (и адаптивной антенной решетки) с точки зрения схемы и ее математического описания. Искусственная нейронная сеть за счет объединения искусственных нейронов в слои приобретает не только дополнительные степени свободы за счет появления новых элементов, но также и новые возможности по решению большего класса задач – пространственной фильтрации, распознавания образов, задач прогнозирования и т.д. [75,79,82].

На рисунке 6.1 представлена наиболее общая схема многослойной полносвязной искусственной нейронной сети. Каждый квадрат и круг на схеме представляет собой искусственный нейрон - по сути адаптивную антенную решётку, а искусственная нейронная сеть в таком случае может рассматриваться как каскад, составленный из ААР. Входные сигналы поступают на искусственные нейроны входного слоя ИНС (слой, состоящий из искусственных нейронов, обозначаемых кругами). Далее происходит обработка входных сигналов во входном слое ИНС, и выходные сигналы первого слоя сети становятся входными сигналами для искусственных нейронов второго слоя ИНС (слой, состоящий из искусственных нейронов, обозначаемых квадратами). Затем процесс повторяется, и выделяемый искусственной нейронной сетью сигнал проходит от входного слоя сети к ее выходам (выходы ИНС обозначены стрелками в правой части рисунка 6.1). Наиболее общий вид искусственной нейронной сети, представленной на рисунке 6.1, является также классической схемой искусственной нейронной сети.

Представляет интерес разработка методов анализа характеристик искусственной нейронной сети с учётом флуктуаций весовых коэффициентов. Эти методы позволили бы оптимизировать работу ИНС по критерию скорость настройки – точность настройки, и выявить влияние числа слоев сети на качество выделения ИНС полезного сигнала на фоне помех. Использование наиболее общей схемы искусственной нейронной сети, приведенной на рисунке 6.1, позволяет обобщить полученные в предыдущих главах результаты наименее трудоемким образом.

В данной главе приводятся результаты статистического анализа характеристик искусственной нейронной сети с дискретным градиентным, быстрым рекуррентным алгоритмами настройки и алгоритмом Хэбба, полученные при учёте флуктуаций настраиваемых весовых коэффициентов.

6.1. ИСКУССТВЕННАЯ НЕЙРОННАЯ СЕТЬ С ДИСКРЕТНЫМ ГРАДИЕНТНЫМ АЛГОРИТМОМ НАСТРОЙКИ [130-132,164,168].

Рассмотрим работу искусственной нейронной сети, имеющей M слоёв и N нейронов в каждом слое. Настройка весовых коэффициентов \vec{W}_{jp} произвольного нейрона j , принадлежащего слою p данной ИНС, происходит по дискретному градиентному алгоритму с ограничениями (в Приложении 2 приведено обобщение дискретного градиентного алгоритма на искусственную нейронную сеть) [49,65]:

$$\vec{W}_{jp}(k+1) = \mathbf{P}\{\vec{W}_{jp}(k) - \mu \cdot \vec{Z}_{p-1}^*(k) \cdot Z_{jp}(k)\} + \vec{W}_q. \quad (6.1.1)$$

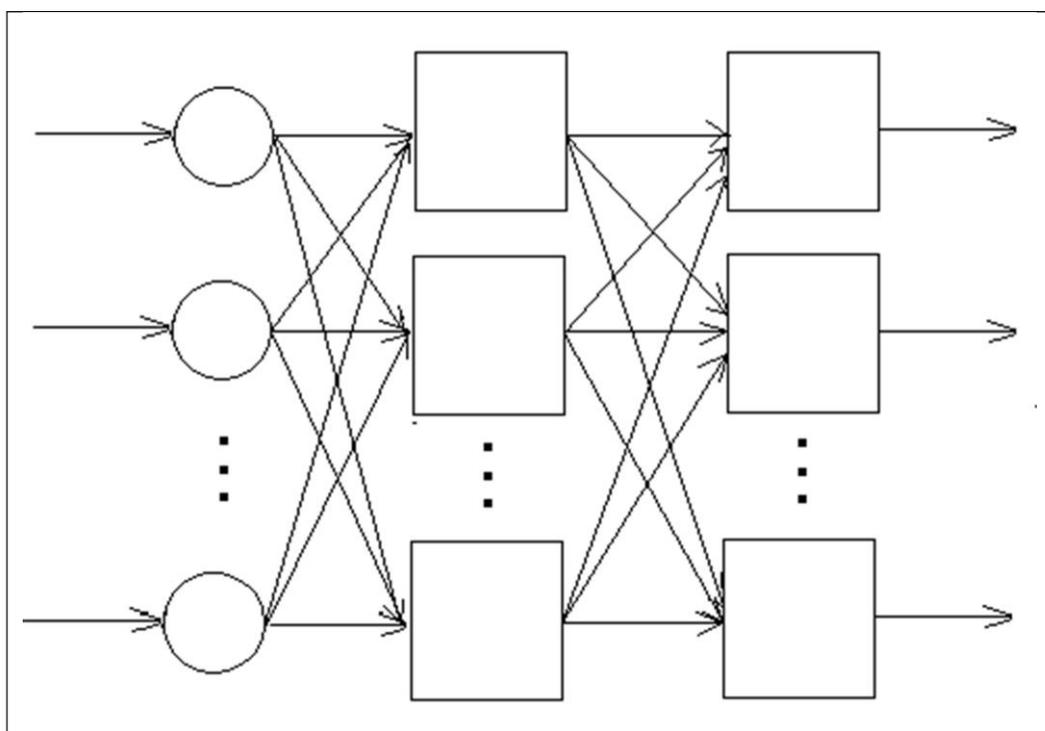


Рис. 6.1. Наиболее общая схема полносвязной прямого распространения искусственной нейронной сети.

Здесь \vec{W}_{jp} - весовой вектор j -ого нейрона слоя p , \mathbf{P} - проекционная матрица, обеспечивающая введение многократных линейных ограничений вида $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H$; $\mathbf{C} \equiv [\vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_L]$ - матрица ограничений размерности $N \times L$, столбцами которой являются линейно - независимые векторы ограничений \vec{C}_l , L - число вводимых ограничений; μ - коэффициент адаптации дискретного градиентного алгоритма; \vec{W}_q - вектор комплексных весовых коэффициентов, соответствующих диаграмме направленности покоя (при отсутствии внешних помех); \mathbf{H} и $*$ соответственно знаки эрмитовского и комплексного сопряжения [65].

В выражении (6.1.1) $\vec{Z}_{p-1}(k)$ - входной сигнал j -ого нейрона слоя p , являющийся также вектором выходного сигнала слоя $p-1$. Выходной сигнал j -ого нейрона слоя p $Z_{jp}(k)$ может быть записан в виде [177]:

$$Z_{jp}(k) = F \left[\sum_{q=1}^N Z_{qp-1}(k) W_{qip}(k) \right] = F [y_{jp}(k)] = \sum_{l=1}^{N_1} a_l \cdot y_{jp}^l(k) = \vec{A}^T \vec{Y}_{jp}(k),$$

где $F[\]$ - нелинейная активационная функция рассматриваемого искусственного нейрона, a_l - коэффициенты разложения нелинейности F в ряд Вольтерра [177], $y_{jp}(k)$ - выходной сигнал линейной части j -ого нейрона слоя p . $\vec{A} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{N_1}]^T$ - вектор коэффициентов разложения функции $F[\]$ в ряд Вольтерра, $\vec{Y}_{jp}(k) = [y_{jp}(k) \ y_{jp}^2(k) \ \dots \ y_{jp}^{N_1}(k)]^T$ - вектор степеней выходного сигнала линейной части искусственного нейрона j , принадлежащего слою p .

Будем рассматривать искусственную нейронную сеть, в которой все нейроны являются узкополосными. Тогда корреляционная матрица входных сигналов каждого из таких искусственных нейронов будет иметь вид [65]:

$$\mathbf{R}_p(k, k+n) \equiv \langle \vec{Z}_p^*(k) \vec{Z}_p^T(k+n) \rangle = \mathbf{R}_p r^{|n|},$$

где r - коэффициент корреляции между отсчётами входных сигналов, \mathbf{R}_p - пространственная часть корреляционной матрицы входных сигналов.

Необходимо отметить, что данная корреляционная матрица имеет различный вид в зависимости от номера слоя искусственной нейронной сети. Так для всех скрытых слоев в частном случае одинаковой помеховой обстановки, подаваемой на все нейроны входного слоя, который рассматривается в данной работе, корреляционная матрица будет иметь в качестве всех своих элементов единицы во всех скры-

тых слоях ИНС. Во входном слое эта матрица будет равна корреляционной матрице входных сигналов искусственной нейронной сети.

Подача на все нейроны входного слоя искусственной нейронной сети одной и той же помеховой обстановки является одним из возможных вариантов работы ИНС в задачах пространственной фильтрации. В этом случае искусственные нейроны входного слоя искусственной нейронной сети подобны многоэлементной антенной решетке с большим числом степеней свободы, чем в отдельной адаптивной антенне. Приемные элементы входного слоя ИНС в этом случае могут располагаться в одной плоскости или на одной линии. Входные сигналы будут приходить на приемные элементы входного слоя искусственной нейронной сети в виде волновых фронтов, как это и происходит в фазированной антенной решетке. Отличительной особенностью искусственной нейронной сети от адаптивной антенной решетки в этом случае является наличие адаптивного процессора для обработки сигналов в каждом искусственном нейроне. Это дает возможность искусственной нейронной сети эффективно работать в сложной помеховой обстановке, в том числе с большим количеством помех. Наличие параллельных вычислительных структур в ИНС обеспечивает высокую скорость адаптации и работу адаптивной системы в реальном времени, что особенно актуально в задачах радиолокации. В литературе показано, что фазированная антенная решетка для решения задач радиолокации эквивалентна и может быть представлена в виде трехслойной искусственной нейронной сети [81].

Алгоритм настройки (6.1.1) описывает в большей степени своего рода каскадное соединение искусственных нейронов, чем единую искусственную нейронную сеть, поскольку весовые коэффициенты каждого отдельного нейрона зависят только от собственных значений и не связаны непосредственными математическими отношениями с весовыми коэффициентами других искусственных нейронов. Тем не менее, косвенное влияние весовых коэффициентов различных искусственных нейронов друг на друга существует и осуществляется через выходные сигналы данных элементов сети, что также видно из формулы (6.1.1).

Данное представление является наиболее простым случаем для анализа влияния флуктуаций весовых коэффициентов на статистические характеристики искусственной нейронной сети. Тем не менее, оно позволяет проследить динамику влияния флуктуаций на статистические характеристики различных слоев сети, выявить вклад числа слоев сети и числа искусственных нейронов в каждом слое на искажения, вносимые флуктуациями в выделяемый ИНС полезный сигнал. Это также дает возможность проследить в многослойной адаптивной системе вклад в искажения по-

лезного сигнала тех переменных, которые определяли влияние флуктуаций весового вектора в адаптивной антенной решетке.

Будем искать статистические характеристики описанной нейронной сети с учётом флуктуаций настраиваемых весовых коэффициентов. С этой целью необходимо на первом этапе анализа найти статистические характеристики отдельного нейрона с учётом флуктуаций весового вектора, а затем обобщить полученные результаты на искусственную нейронную сеть и получить соответствующие рекуррентные формулы.

В главе 4 были найдены статистические характеристики искусственного нейрона, настраиваемого по дискретному градиентному алгоритму с ограничениями с учётом флуктуаций весового вектора. Для того, чтобы обобщить полученные результаты на искусственную нейронную сеть, для простоты будем предполагать, что на входные элементы каждого из нейронов входного слоя ИНС поступает один и тот же входной сигнал, т.е. имеет место одна и та же помеховая обстановка. В этом случае при старте с одних и тех же начальных условий выходные сигналы нейронов в каждом слое искусственной нейронной сети (и, следовательно, входные сигналы в каждом последующем слое сети) будут одинаковыми. Это существенно упрощает вид корреляционной матрицы входных сигналов скрытых слоёв сети без потери общности, а также соответствует одному из возможных способов использования искусственной нейронной сети в задачах пространственной фильтрации.

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ.

В главе 4 было показано, что для узкополосного искусственного нейрона с дискретным градиентным алгоритмом настройки корреляционная функция выходного сигнала с учетом флуктуаций весового вектора имеет вид:

$$K_z(m, m+n) = a_1^2 r^{|n|} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT} \times \left\{ \begin{aligned} & \left[1 - \frac{2\mu a_1}{1-r^2} Sp(\mathbf{PR}_{XX}) + \mu^2 a_1^2 \frac{1-r^2-r^{2n+2}}{(1-r^2)^2} Sp(\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{PR}_{XX}) + \right. \\ & \left. + \mu^2 a_1^2 \left[\frac{3-r^2(1+r^{2n})}{(1-r^2)^2} + \frac{1}{1-r^2} \right] \frac{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \mathbf{PR}_{XX} \mathbf{PR}_{XX} \vec{W}_{CT}}{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT}} + \right. \\ & \left. + \mu^2 a_1^2 \left[\frac{r^2}{(1-r^2)^2} + \frac{1}{1-r} \right] Sp^2(\mathbf{PR}_{XX}) \right\}. \end{aligned} \right. \quad (6.1.2)$$

Чтобы записать формулу (6.1.2) применительно к искусственному нейрону первого слоя искусственной нейронной сети, настраиваемой по дискретному градиентно-

му алгоритму, необходимо ввести новые обозначения. В случае записи данного выражения для ИНС необходимо учесть, что корреляционная функция и вектор весовых коэффициентов должны теперь иметь номер того слоя сети, к которому данные статистические характеристики относятся. После преобразований из выражения (6.1.2) получаем корреляционную функцию на выходе искусственного нейрона первого слоя искусственной нейронной сети:

$$K_1(m, m+n) = a_1^2 r^{|n|} \vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT1} \times \left\{ \begin{aligned} &1 - \frac{2\mu a_1}{1-r^2} Sp(\mathbf{PR}_{XX}) + \mu^2 a_1^2 \frac{1-r^2-r^{2n+2}}{(1-r^2)^2} Sp(\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{PR}_{XX}) + \\ &+ \mu^2 a_1^2 \frac{4-r^{2n+2}}{(1-r^2)^2} \cdot \frac{\vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{XX} \mathbf{PR}_{XX} \mathbf{PR}_{XX} \vec{W}_{CT1}}{\vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT1}} + \mu^2 a_1^2 \frac{1+r-r^3}{(1-r^2)^2} Sp^2(\mathbf{PR}_{XX}) \end{aligned} \right\}.$$

Учитывая, что все нейроны входного слоя сети будут иметь на выходе один и тот же сигнал (и, следовательно, одну и ту же корреляционную функцию) можно найти вид корреляционной матрицы входных сигналов второго слоя сети с учётом флуктуаций весовых коэффициентов. Согласно определению, корреляционная функция сигнала $Z(n)$ имеет вид [49]:

$$K(n) = \langle Z^H(m)Z(m+n) \rangle, \quad (6.1.3)$$

тогда, учитывая описанные выше свойства внутренних сигналов ИНС, можно видеть, что любые взаимные корреляционные функции между выходными сигналами любых нейронов первого слоя будут равны между собой:

$$\langle Z_{i1}^H(m)Z_{j1}(m+n) \rangle = K_1(n), \quad i, j = 1, N_1. \quad (6.1.4)$$

Учитывая выражение (6.1.4), запишем вид корреляционной матрицы выходных сигналов первого слоя искусственной нейронной сети (и, соответственно, входных сигналов второго слоя ИНС):

$$\mathbf{K}_1(n) = \begin{bmatrix} \langle Z_{11}^H(m)Z_{11}(m+n) \rangle & \cdots & \langle Z_{11}^H(m)Z_{N_1}(m+n) \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Z_{N_1}^H(m)Z_{11}(m+n) \rangle & \cdots & \langle Z_{N_1}^H(m)Z_{N_1}(m+n) \rangle \end{bmatrix} = K_1(n) \cdot \mathbf{E}, \quad (6.1.5)$$

$$\text{где } \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - \text{матрица, все элементы которой являются единицами.} \quad (6.1.6)$$

Запишем теперь вид корреляционной функции произвольного искусственного нейрона, принадлежащего второму слою нейронной сети. Для этого учтём, что требуемое выражение получается путём замены корреляционной матрицы входных

сигналов $\mathbf{R}_{xx}(m, m+n)$ на корреляционную матрицу $\mathbf{K}_1(n)$ (см. формулу (6.1.5)), описывающую корреляционную связь входных сигналов данного слоя. Тогда имеем:

$$K_2(m, m+n) = a_1^2 r^{|n|} \vec{W}_{CT2}^H \mathbf{K}_1 \vec{W}_{CT2} \times \left\{ \begin{aligned} &1 - \frac{2\mu a_1}{1-r^2} Sp(\mathbf{PK}_1) + \mu^2 a_1^2 \frac{1-r^2-r^{2n+2}}{(1-r^2)^2} Sp(\mathbf{PK}_1 \mathbf{PK}_1) + \\ &+ \mu^2 a_1^2 \frac{4-r^{2n+2}}{(1-r^2)^2} \cdot \frac{\vec{W}_{CT2}^H \mathbf{K}_1 \mathbf{PK}_1 \mathbf{PK}_1 \vec{W}_{CT2}}{\vec{W}_{CT2}^H \mathbf{K}_1 \vec{W}_{CT2}} + \mu^2 a_1^2 \frac{1+r-r^3}{(1-r^2)^2} Sp^2(\mathbf{PK}_1) \end{aligned} \right\}. \quad (6.1.7)$$

Преобразуя (6.1.7), получаем:

$$K_2(m, m+n) = a_1^2 r^{|n|} \vec{W}_{CT2}^H \mathbf{E} \vec{W}_{CT2} \cdot K_1[n] \times \left\{ \begin{aligned} &1 - \frac{2\mu a_1}{1-r^2} Sp(\mathbf{PE}) \cdot K_1[n] + \mu^2 a_1^2 \frac{1-r^2-r^{2n+2}}{(1-r^2)^2} Sp(\mathbf{PEPE}) \cdot K_1^2[n] + \\ &+ \mu^2 a_1^2 \frac{4-r^{2n+2}}{(1-r^2)^2} \cdot \frac{\vec{W}_{CT2}^H \mathbf{EPEPE} \vec{W}_{CT2}}{\vec{W}_{CT2}^H \mathbf{E} \vec{W}_{CT2}} \cdot K_1^2[n] + \mu^2 a_1^2 \frac{1+r-r^3}{(1-r^2)^2} Sp^2(\mathbf{PE}) \cdot K_1^2[n] \end{aligned} \right\}$$

Раскрывая скобки, можно видеть, что выражение для корреляционной функции выходного сигнала искусственного нейрона, принадлежащего второму слою ИНС, представляет собой полином по степеням корреляционной функции выходного сигнала искусственного нейрона первого слоя искусственной нейронной сети:

$$K_2(m, m+n) = \sum_{i=1}^3 B_{i2} \cdot K_1^i[n], \quad (6.1.8)$$

где $B_{12} = a_1^2 r^{|n|} \vec{W}_{CT2}^H \mathbf{E} \vec{W}_{CT2}$ - коэффициент при первой степени корреляционной функции выходного сигнала ИН, принадлежащего первому слою ИНС. Данный коэффициент, умноженный на корреляционную функцию первого слоя сети, представляет собой $K_{CT2}(n) = a_1^2 r^{|n|} \vec{W}_{CT2}^H \mathbf{K}_1 \vec{W}_{CT2}$ - корреляционную функцию произвольного искусственного нейрона, принадлежащего второму слою искусственной нейронной сети при постоянном стационарном весовом векторе,

$B_{22} = -a_1^2 \frac{2\mu a_1}{1-r^2} \cdot r^{|n|} \vec{W}_{CT2}^H \mathbf{E} \vec{W}_{CT2} \cdot Sp(\mathbf{PE})$ - коэффициент при второй степени корреляционной функции выходного сигнала ИН, принадлежащего первому слою ИНС.

$$B_{32} = a_1^2 r^{|n|} \vec{W}_{CT2}^H \mathbf{E} \vec{W}_{CT2} \times \left\{ \begin{array}{l} \mu^2 a_1^2 \frac{1-r^2-r^{2n+2}}{(1-r^2)^2} Sp(\mathbf{PEPE}) + \\ + \mu^2 a_1^2 \frac{4-r^{2n+2}}{(1-r^2)^2} \cdot \frac{\vec{W}_{CT2}^H \mathbf{EPEPE} \vec{W}_{CT2}}{\vec{W}_{CT2}^H \mathbf{E} \vec{W}_{CT2}} + \mu^2 a_1^2 \frac{1+r-r^3}{(1-r^2)^2} Sp^2(\mathbf{PE}) \end{array} \right\} - \text{коэффициент при тре-}$$

тьей степени корреляционной функции выходного сигнала ИН, принадлежащего первому слою ИНС.

Запишем по аналогии выражение для корреляционной функции искусственного нейрона, принадлежащего третьему слою искусственной нейронной сети. По аналогии со вторым слоем ИНС имеем:

$$K_3(m, m+n) = \sum_{j=1}^3 B_{j3} \cdot K_2^j[n] = \sum_{j=1}^3 B_{j3} \cdot \left(\sum_{i=1}^3 B_{i2} \cdot K_1^i[n] \right)^j, \quad (6.1.9)$$

где коэффициенты при корреляционной функции выходного сигнала искусственного нейрона, принадлежащего второму слою ИНС, имеющей первую, вторую или третью степень, те же, что и для предыдущего слоя искусственной нейронной сети. Отличия заключаются только в номере стационарного весового вектора, который отражает номер текущего слоя ИНС.

Обобщая данное выражение, можно записать итеративную формулу для корреляционной функции выходного сигнала искусственного нейрона, принадлежащего произвольному слою p ИНС:

$$K_p(m, m+n) = \sum_{i1=1}^3 B_{i1p} \cdot K_{p-1}^{i1}[n] = \sum_{i1=1}^3 B_{i1p} \cdot \left(\sum_{i2=1}^3 B_{i2p-1} \cdot K_{p-2}^{i2}[n] \right)^{i1} = \\ = \sum_{i1=1}^3 B_{i1p} \cdot \left(\sum_{i2=1}^3 B_{i2p-1} (\dots (\sum_{i(p-1)=1}^3 B_{i(p-1)2} \cdot K_1^{i(p-1)}[n])^{i(p-2)} \dots)^{i2} \right)^{i1}, \quad (6.1.10)$$

где коэффициенты при степенях корреляционных функций могут быть записаны в виде:

$$B_{1i} = a_1^2 r^{|n|} \vec{W}_{CTi}^H \mathbf{E} \vec{W}_{CTi}$$

$$B_{2i} = -a_1^2 \frac{2\mu a_1}{1-r^2} \cdot r^{|n|} \vec{W}_{CTi}^H \mathbf{E} \vec{W}_{CTi} \cdot Sp(\mathbf{PE})$$

$$B_{3i} = a_1^2 r^{|n|} \vec{W}_{CTi}^H \mathbf{E} \vec{W}_{CTi} \times \left\{ \begin{array}{l} \mu^2 a_1^2 \frac{1-r^2-r^{2n+2}}{(1-r^2)^2} Sp(\mathbf{PEPE}) + \\ + \mu^2 a_1^2 \frac{4-r^{2n+2}}{(1-r^2)^2} \cdot \frac{\vec{W}_{CTi}^H \mathbf{EPEPE} \vec{W}_{CTi}}{\vec{W}_{CTi}^H \mathbf{E} \vec{W}_{CTi}} + \mu^2 a_1^2 \frac{1+r-r^3}{(1-r^2)^2} Sp^2(\mathbf{PE}) \end{array} \right\}$$

Продолжая обобщение и используя выражение (6.1.10), можно записать корреляционную матрицу выходных сигналов слоя p искусственной нейронной сети в следующем виде:

$$\mathbf{K}_p(n) = K_p(n) \cdot \mathbf{E}. \quad (6.1.11)$$

Остановимся более подробно на выражении (6.1.10). Из данной формулы видно, что по мере увеличения номера слоя возрастает вклад быстро спадающих компонент в корреляционной функции выходного сигнала. Наличие быстро спадающих компонент $\sim r^{m|n|}$, (где m - некоторый коэффициент, увеличивающийся по мере продвижения от входа ИНС к выходу) свидетельствует о появлении в структуре выходных сигналов искусственных нейронов по мере возрастания номера слоя сети компонентов с меньшим временем автокорреляции, чем у исходного полезного сигнала, который подавался на вход сети одновременно с помехой. Для иллюстрации данного утверждения приведём формулу, полученную без учёта флуктуаций весового вектора, для корреляционной функции выходного сигнала произвольного нейрона, принадлежащего слою p искусственной нейронной сети:

$$K_p(n) = a_1^{2p} \cdot r^{n|p} \cdot \prod_{i=1}^p \vec{W}_{CTi}^H \mathbf{R}_i \vec{W}_{CTi}, \quad (6.1.12)$$

здесь $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_{XX}$, а $\mathbf{R}_{2,3,\dots} = \mathbf{E}$ - корреляционные матрицы входных сигналов соответственно входного и скрытого слоёв; \vec{W}_{CTi} - постоянный стационарный весовой вектор произвольного нейрона, принадлежащего текущему слою i .

Из сравнения формул (6.1.10) и (6.1.12) видно, что в случае отсутствия флуктуаций корреляционная функция на выходе искусственного нейрона, принадлежащего слою p ИНС, представляет собой произведение корреляционных функций предыдущих слоёв. Наличие флуктуаций приводит к появлению в структуре корреляционной функции выходного сигнала слоя p корреляционных функций предыдущих слоёв, взятых в различных степенях. Это искажает выделяемый сетью полезный сигнал, поскольку выражение для корреляционной функции содержит более быстро спадающие компоненты, чем $r^{p|n|}$, а также содержит слагаемые, пропорциональные различным степеням коэффициента адаптации – описывающие поправки к значению корреляционной функции, вызванные флуктуациями весовых коэффициентов.

МОЩНОСТЬ ВЫХОДНЫХ СИГНАЛОВ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ.

Выражение для мощности выходного сигнала произвольного слоя искусственной нейронной сети можно получить, положив $n = 0$ в формуле (6.1.10), описывающей вид корреляционной функции:

$$\begin{aligned} \langle |Z|^2 \rangle_p &= \sum_{i=1}^3 \tilde{B}_{i1p} \cdot \langle |Z|^2 \rangle_{p-1}^{i1} = \sum_{i=1}^3 \tilde{B}_{i1p} \cdot \left(\sum_{i2=1}^3 \tilde{B}_{i2p-1} \cdot \langle |Z|^2 \rangle_{p-2}^{i2} \right)^{i1} = \\ &= \sum_{i=1}^3 \tilde{B}_{i1p} \cdot \left(\sum_{i2=1}^3 \tilde{B}_{i2p-1} (\dots (\sum_{i(p-1)=1}^3 \tilde{B}_{i(p-1)2} \cdot \langle |Z|^2 \rangle_1^{i(p-1)})^{i(p-2)} \dots)^{i2} \right)^{i1} \end{aligned} \quad (6.1.13)$$

Здесь:

$$\tilde{B}_{1i} = a_1^2 \cdot \vec{W}_{CTi}^H \mathbf{E} \vec{W}_{CTi}$$

$$\tilde{B}_{2i} = -a_1^2 \frac{2\mu a_1}{1-r^2} \cdot \vec{W}_{CTi}^H \mathbf{E} \vec{W}_{CTi} \cdot Sp(\mathbf{PE})$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{3i} &= a_1^2 \cdot \vec{W}_{CTi}^H \mathbf{E} \vec{W}_{CTi} \times \\ &\times \left\{ \begin{aligned} &\mu^2 a_1^2 \frac{1-2r^2}{(1-r^2)^2} Sp(\mathbf{PEPE}) + \\ &+ \mu^2 a_1^2 \frac{4-r^2}{(1-r^2)^2} \cdot \frac{\vec{W}_{CTi}^H \mathbf{EPEPE} \vec{W}_{CTi}}{\vec{W}_{CTi}^H \mathbf{E} \vec{W}_{CTi}} + \mu^2 a_1^2 \frac{1+r-r^3}{(1-r^2)^2} Sp^2(\mathbf{PE}) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Из формулы (6.1.13) можно видеть, что при увеличении числа слоёв растёт добавок к величине выходной мощности, обусловленный наличием флуктуаций весовых коэффициентов в сети. Необходимо также отметить, что в искусственной нейронной сети, настраиваемой по дискретному градиентному алгоритму с ограничениями, может иметь место как эффект рассогласования, так и эффект «перекompенсации», поскольку коэффициент \tilde{B}_{2i} является отрицательным и первое слагаемое в коэффициенте \tilde{B}_{3i} также может быть отрицательным.

Сравним данное выражение с формулой, описывающей выходную мощность искусственного нейрона слоя p искусственной нейронной сети, найденной без учёта флуктуаций весовых коэффициентов:

$$\langle |Z|^2 \rangle_{CTp} = a_1^{2p} \cdot \prod_{i=1}^p \vec{W}_{CTi}^H \mathbf{R}_i \vec{W}_{CTi}, \quad (6.1.14)$$

где $\mathbf{R}_i = \begin{cases} \mathbf{R}_{XX}, i = 1; \\ \mathbf{E}, i > 1. \end{cases}$ - корреляционная матрица входных сигналов i -ого слоя ИНС.

Из выражения (6.1.14) можно видеть, что выходная мощность любого слоя сети представляет собой произведение выходных мощностей каждого из предыдущих слоёв ИНС.

Полученные результаты позволяют утверждать, что флуктуации весовых коэффициентов вносят искажения в статистические характеристики искусственной нейронной сети, настраиваемой по дискретному градиентному алгоритму. Однако это утверждение справедливо только для статистических характеристик первого слоя ИНС, во втором и последующих слоях искусственной нейронной сети появляются слагаемые, содержащие произведение проекционной матрицы \mathbf{P} и матрицы \mathbf{E} , элементами которой являются единицы. Теоретический анализ показал, что указанное произведение равно нулю, а потому все «флуктуационные» слагаемые в выражении, в частности, выходной мощности второго и последующих слоёв ИНС равны нулю. По этой причине увеличение номера слоя никак не сказывается на ухудшении качества выделения полезного сигнала на фоне помех искусственной нейронной сетью с дискретным градиентным алгоритмом настройки. Необходимо отметить, что указанный вывод справедлив только для той постановки задачи, что была использована в данном разделе – на искусственные нейроны ИНС подавался один и тот же вектор входных сигналов.

РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.

Моделировалась в программной среде Матлаб [173-176] искусственная нейронная сеть, настраиваемая по дискретному градиентному алгоритму с однократным линейным ограничением на направление прихода полезного сигнала – классическому алгоритму, используемому для пространственной фильтрации сигналов в адаптивных антенных решётках. Искусственная нейронная сеть содержала $M = 3$ слоя, в каждом из которых было по $N_1 = 7$ искусственных нейронов. Каждый искусственный нейрон представлял собой адаптивный линейный сумматор с $N = 7$ входными элементами и нелинейной функцией – сигмоидом на выходе.

На каждый искусственный нейрон входного слоя сети подавалась одна и та же помеховая обстановка – полезный сигнал и одна помеха, представленные в виде плоских волн. Полезный сигнал приходил с направления, нормального к плоскости каждого искусственного нейрона входного слоя ИНС (при моделировании предполагалось, что нейроны каждого и, в частности, первого слоя искусственной нейронной сети расположены так, что их приемные элементы размещены вдоль одной прямой, своей для каждого слоя сети). Помеха приходила с направления, равного 45° относительно нормали, проведенной к плоскости искусственных нейронов входного слоя сети. Мощность помехи была принята равной единице, мощность полезного сигнала составляла 0.1 от мощности помехи. В каждом искусственном нейроне присутство-

вал также собственный шум, мощность которого была 0.01 относительно мощности помехи.

При моделировании вычислялся коэффициент рассогласования между выходной мощностью, найденной при постоянном стационарном весовом векторе, и «флуктуационной» частью выходной мощности:

$$M = \frac{\langle |Z|^2 \rangle_{CT} - \langle |Z|^2 \rangle_0}{\langle |Z|^2 \rangle_0} \times 100\% .$$

В таблице 6.1 представлены значения коэффициента рассогласования M в зависимости от величины коэффициента адаптации μ в случае прихода на искусственную нейронную сеть входных сигналов с некоррелированными отсчетами $r = 0$.

Таблица 6.1

μ	10^{-4}	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}
$M_I^T, \%$	-0.0344	-0.1721	-0.3442	-1.7208	-3.4415
$M_I^{\mathcal{E}}, \%$	-0.1757	-0.08	-0.5898	-1.7469	-3.511
$M_{II}^T, \%$	0	0	0	0	0
$M_{II}^{\mathcal{E}}, \%$	0	0	0	0	0
$M_{III}^T, \%$	0	0	0	0	0
$M_{III}^{\mathcal{E}}, \%$	0	0	0	0	0

Здесь:

M_i^T - полученное на основе статистического анализа значение коэффициента рассогласования между выходной мощностью, найденной при постоянном стационарном весовом векторе, и «флуктуационной» частью выходной мощности для слоя искусственной нейронной сети с номером i ;

$M_i^{\mathcal{E}}$ - значение коэффициента рассогласования для слоя искусственной нейронной сети с номером i , полученное с помощью компьютерного моделирования функционирования искусственной нейронной сети.

В таблице 6.1 представлен коэффициент рассогласования, найденный для первых нейронов каждого слоя искусственной нейронной сети. Результаты для других искусственных нейронов того же слоя сети будут идентичными, поскольку по условию задачи, на каждый входной искусственный нейрон входного слоя ИНС подавался один и тот же входной сигнал.

Из таблицы 6.1 можно видеть, что второй и третий слои сети имеют коэффициент рассогласования, равный нулю, и это подтверждает компьютерное моделирование. Коэффициент рассогласования искусственного нейрона, принадлежащего

первому слою сети, нулю не равен и зависит от величины коэффициента адаптации дискретного градиентного алгоритма. Из таблицы видно, что в случае входных сигналов ИНС с некоррелированными отсчетами $r = 0$ имеет место достаточно хорошее согласие между теоретическими результатами и результатами компьютерного моделирования.

В таблице 6.2 представлены значения коэффициента рассогласования M в зависимости от величины коэффициента адаптации μ в случае прихода на искусственную нейронную сеть входных сигналов с высоко коррелированными отсчетами $r = 0.9$.

Таблица 6.2

μ	10^{-4}	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}
$M_I^T, \%$	-0.1811	-0.9057	-1.8114	-9.0572	-18.1151
$M_I^{\exists}, \%$	-0.1676	-0.7311	-1.9186	-12.4383	-20.158
$M_{II}^T, \%$	0	0	0	0	0
$M_{II}^{\exists}, \%$	0	0	0	0	0
$M_{III}^T, \%$	0	0	0	0	0
$M_{III}^{\exists}, \%$	0	0	0	0	0

Из таблицы 6.2 следует, что и в случае сигналов с высоко коррелированными отсчётами имеет место достаточно хорошее согласие между теоретическими значениями коэффициента рассогласования выходной мощности и соответствующими значениями, найденными в результате компьютерного моделирования. Кроме того, обращают на себя внимание нулевые значения коэффициента рассогласования выходной мощности второго и третьего слоев искусственной нейронной сети, что подтверждается и при компьютерном моделировании.

Таким образом, можно говорить о том, что дискретный градиентный алгоритм пригоден для использования в искусственных нейронных сетях для решения задач выделения полезного сигнала на фоне помех. Данный алгоритм является классическим алгоритмом настройки адаптивных антенных решёток. При использовании для настройки искусственных нейронных сетей он обладает преимуществом перед классическими нейросетевыми алгоритмами в том, что не дает флуктуаций весовых коэффициентов во втором и последующих слоях сети для частного случая одинаковой помеховой обстановки, принимаемой искусственными нейронами входного слоя ИНС.

6.2. ИСКУССТВЕННАЯ НЕЙРОННАЯ СЕТЬ С АЛГОРИТМОМ РЕКУРРЕНТНОГО ОБРАЩЕНИЯ ВЫБОРОЧНОЙ ОЦЕНКИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ [131,133].

Рассмотрим полностью связанную прямого распространения искусственную нейронную сеть, содержащую в себе M слоёв и по N нейронов в каждом слое. Пусть настройка весовых коэффициентов \vec{W}_{jp} произвольного нейрона j , принадлежащего слою p данной сети происходит по алгоритму рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов и описывается уравнением вида [18] (в Приложении 3 приведено обобщение быстрого рекуррентного алгоритма на искусственную нейронную сеть):

$$\vec{W}_{jp}(k+1) = \mathbf{P}\{\vec{W}_{jp}(k) - \mu \cdot (\mathbf{PR}_{XX}\mathbf{P})^+ \vec{Z}_{p-1}^*(k) \cdot Z_{jp}(k)\} + \vec{W}_q. \quad (6.2.1)$$

Здесь \vec{W}_{jp} - весовой вектор j -ого нейрона слоя p , \mathbf{P} - проекционная матрица, обеспечивающая введение многократных линейных ограничений вида $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H$; $\mathbf{C} \equiv [\vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_L]$ - матрица ограничений размерности $N \times L$, столбцами которой являются линейно - независимые векторы ограничений \vec{C}_l , L - число вводимых ограничений; μ - коэффициент адаптации; \vec{W}_q - вектор комплексных весовых коэффициентов, соответствующих диаграмме направленности покоя (при отсутствии внешних помех); \mathbf{H} и $*$ соответственно знаки эрмитовского и комплексного сопряжения [65]; $(\mathbf{PR}_{XX}\mathbf{P})^+$ - выборочная матрица входных сигналов в подпространстве ограничений, к которой применена операция псевдообращения.

В выражении (6.2.1) $\vec{Z}_{p-1}(k)$ - входной сигнал j -ого нейрона слоя p , являющийся также вектором выходного сигнала слоя $p-1$. Выходной сигнал j -ого нейрона слоя p $Z_{jp}(k)$ может быть записан в виде [177]:

$$Z_{jp}(k) = F\left[\sum_{q=1}^N Z_{qp-1}(k)W_{qip}(k)\right] = F[y_{jp}(k)] = \sum_{l=1}^{N_1} a_l \cdot y_{jp}^l(k) = \vec{A}^T \vec{Y}_{jp}(k), \quad (6.2.2)$$

где $F[\]$ - нелинейная активационная функция рассматриваемого искусственного нейрона, a_l - коэффициенты разложения нелинейности F в ряд Вольтерра [177], $y_{jp}(k)$ - выходной сигнал линейной части j -ого нейрона слоя p . $\vec{A} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{N_1}]^T$ - вектор коэффициентов разложения функции $F[\]$ в ряд Вольтерра, $\vec{Y}_{jp}(k) = [y_{jp}(k) \ y_{jp}^2(k) \ \dots \ y_{jp}^{N_1}(k)]^T$ - вектор степеней выходного сигнала линейной части искусственного нейрона j , принадлежащего слою p .

Будем рассматривать искусственную нейронную сеть, в которой все нейроны являются узкополосными. Тогда корреляционная матрица входных сигналов каждого из таких искусственных нейронов будет иметь вид [65]:

$$\mathbf{R}_p(k, k+n) \equiv \langle \vec{Z}_p^*(k) \vec{Z}_p^T(k+n) \rangle = \mathbf{R}_p r^{|n|},$$

где r - коэффициент корреляции между отсчётами входных сигналов, \mathbf{R}_p - пространственная часть корреляционной матрицы входных сигналов.

Как отмечалось в предыдущем разделе, данная корреляционная матрица имеет различный вид в зависимости от номера слоя искусственной нейронной сети. Для всех скрытых слоев сети корреляционная матрица будет иметь в качестве всех своих элементов единицы. Это становится возможным в частном случае одинаковой помеховой обстановки, подаваемой на все нейроны входного слоя. Во входном слое ИНС эта матрица будет равна корреляционной матрице входных сигналов искусственной нейронной сети.

Случай одной и той же помеховой обстановки, поступающей на каждый искусственный нейрон ИНС, соответствует реальной работе искусственной нейронной сети для решения задач пространственной фильтрации, когда приемные элементы ИНС могут быть размещены как единое полотно антенны, которая не имеет общего адаптивного процессора для всех приемных элементов. Адаптивные процессоры присутствуют в каждом искусственном нейроне, обеспечивая параллельную обработку сигналов.

Алгоритм настройки (6.2.1) предполагает, что весовые коэффициенты каждого из нейронов сети будут настраиваться самостоятельно и независимо от весовых векторов других искусственных нейронов. При таком подходе искусственная нейронная сеть представляет собой больше «ассоциацию независимых нейронов», чем единую систему. Тем не менее, связь между нейронами существует и осуществляется через входные и выходные сигналы, передаваемые от одного слоя сети к другому.

Нахождение статистических характеристик искусственной нейронной сети с учётом флуктуаций весовых коэффициентов предполагает проведение двух этапов статистического анализа. На первом этапе необходимо найти статистические характеристики некоторого искусственного нейрона при учёте флуктуаций весового вектора. На втором этапе проводится обобщение полученных результатов для случая искусственной нейронной сети.

При обобщении необходимо учесть, что структура искусственных нейронов, вид активационной функции, алгоритм настройки одинаковы у всех нейронов сети. Кроме того, для упрощения представленной задачи предполагается, что на все нейроны входного слоя ИНС подаётся один и тот же входной сигнал, состоящий из суммы полезного сигнала и помех. Перед нейронной сетью ставится задача выделения полезного сигнала на фоне помех. Подача на все нейроны входного слоя ИНС одной и той же помеховой обстановки приводит к появлению возможности решения поставленной задачи - нахождению статистических характеристик ИНС при учёте флуктуаций весов.

Перейдём к реализации этапов исследования. Статистический анализ характеристик искусственного нейрона, настраивающегося по алгоритму рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов при учёте флуктуаций весового вектора, проводился нами в главе 5. По этой причине ниже будет приведено только обобщение полученных результатов для случая искусственной нейронной сети.

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ.

Корреляционная функция выходного сигнала искусственного нейрона, настраивающегося по алгоритму рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов, имеет вид:

$$K_z(m, m+n) = a_1^2 r^{|n|} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT} \times \left\{ \begin{aligned} &1 - \frac{2\mu a_1}{1-r^2} Sp((\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}) + \\ &+ \mu^2 a_1^2 \frac{1-r^2-r^{2n+2}}{(1-r^2)^2} Sp((\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX} (\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}) + \\ &+ \mu^2 a_1^2 \frac{3-r^2(1+r^{2n})}{(1-r^2)^2} \cdot \frac{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} (\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX} (\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT}}{\vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT}} + \\ &+ \mu^2 a_1^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} \cdot Sp^2((\mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}\mathbf{P})^+ \mathbf{P}\mathbf{R}_{XX}) \end{aligned} \right\}. \quad (6.2.3)$$

Для получения формулы, адаптированной к использованию в искусственной нейронной сети, необходимо учесть, что в ИНС корреляционная функция и оптимальный весовой вектор различные в каждом слое искусственной нейронной сети. (А в наиболее общем случае в каждом искусственной нейроне могут быть свои статистические характеристики). По этой причине необходимо указывать номер слоя у данных статистических характеристик. После преобразований из выражения (6.2.3)

получаем корреляционную функцию на выходе искусственного нейрона первого слоя искусственной нейронной сети:

$$K_1(m, m+n) = a_1^2 r^{|n|} \vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT1} \times \left\{ \begin{aligned} &1 - \frac{2\mu a_1}{1-r^2} Sp((\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX}) + \\ &+ \mu^2 a_1^2 \frac{1-r^2-r^{2n+2}}{(1-r^2)^2} Sp((\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX} (\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX}) + \\ &+ \mu^2 a_1^2 \frac{3-r^2(1+r^{2n})}{(1-r^2)^2} \cdot \frac{\vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{XX} (\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX} (\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX} \vec{W}_{CT1}}{\vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT1}} + \\ &+ \mu^2 a_1^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} \cdot Sp^2((\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX}) \end{aligned} \right\}.$$

Получим итеративную формулу для корреляционной функции выходного сигнала искусственного нейрона, принадлежащего слою p , записанную через корреляционную матрицу входных сигналов. Для этого учтём, что корреляционная матрица входных сигналов i -ого слоя ИНС может быть записана через корреляционную функцию выходных сигналов предыдущего слоя $i-1$ следующим образом:

$$\mathbf{R}_{BXi} = K_{i-1}(n) \cdot \mathbf{E}, \text{ где } \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} - \text{ матрица, все элементы которой являются}$$

единицами. Учтём также, что $Sp^2((\mathbf{PR}_{BX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{BX}) = Sp^2((\mathbf{PEP})^+ \mathbf{PE})$ и $Sp((\mathbf{PR}_{BX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{BX}) = Sp((\mathbf{PEP})^+ \mathbf{PE})$.

Тогда корреляционная функция выходного сигнала второго слоя искусственной нейронной сети может быть записана в виде:

$$K_2(m, m+n) = a_1^2 r^{|n|} K_1[n] \cdot \vec{W}_{CT2}^H \mathbf{E} \vec{W}_{CT2} \times \left\{ \begin{aligned} &1 - \frac{2\mu a_1}{1-r^2} Sp((\mathbf{PEP})^+ \mathbf{PE}) + \\ &+ \mu^2 a_1^2 \frac{1-r^2-r^{2n+2}}{(1-r^2)^2} Sp((\mathbf{PEP})^+ \mathbf{PE} (\mathbf{PEP})^+ \mathbf{PE}) + \\ &+ \mu^2 a_1^2 \frac{3-r^2(1+r^{2n})}{(1-r^2)^2} \cdot \frac{\vec{W}_{CT2}^H \mathbf{E} (\mathbf{PEP})^+ \mathbf{PE} (\mathbf{PEP})^+ \mathbf{PE} \vec{W}_{CT2}}{\vec{W}_{CT2}^H \mathbf{E} \vec{W}_{CT2}} + \\ &+ \mu^2 a_1^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2((\mathbf{PEP})^+ \mathbf{PE}) \end{aligned} \right\}. \quad (6.2.4)$$

Из выражения (6.2.4) видно, что формулу для корреляционной функции выходного сигнала можно записать следующим образом:

$$K_2(m, m+n) = a_1^2 r^{|n|} B_2 K_1[n] \cdot \vec{W}_{CT2}^H \mathbf{E} \vec{W}_{CT2}, \text{ где}$$

$$\begin{aligned}
B_2 = & 1 - \frac{2\mu a_1}{1-r^2} Sp((\mathbf{PEP})^+ \mathbf{PE}) + \\
& + \mu^2 a_1^2 \frac{1-r^2-r^{2n+2}}{(1-r^2)^2} Sp((\mathbf{PEP})^+ \mathbf{PE}(\mathbf{PEP})^+ \mathbf{PE}) + \\
& + \mu^2 a_1^2 \frac{3-r^2(1+r^{2n})}{(1-r^2)^2} \cdot \frac{\vec{W}_{CT2}^H \mathbf{E}(\mathbf{PEP})^+ \mathbf{PE}(\mathbf{PEP})^+ \mathbf{PE} \vec{W}_{CT2}}{\vec{W}_{CT2}^H \mathbf{E} \vec{W}_{CT2}} + \\
& + \mu^2 a_1^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2((\mathbf{PEP})^+ \mathbf{PE})
\end{aligned}$$

- коэффициент, учитывающий влияние флуктуаций весовых коэффициентов. Без учета влияния флуктуаций данный коэффициент равен единице.

Поступая аналогичным образом, можно получить выражение для корреляционной функции выходного сигнала слоя p искусственной нейронной сети:

$$K_p(n) = a_1^{2p} \cdot r^{|n|p} \cdot \prod_{i=1}^p B_i \cdot (\vec{W}_{CTi}^H \mathbf{R}_i \vec{W}_{CTi}). \quad (6.2.5)$$

где

$$\mathbf{R}_i = \begin{cases} \mathbf{R}_{xx}, & i=1; \\ \mathbf{E}, & i>1. \end{cases} \quad \text{- корреляционная матрица входных сигналов слоёв искусственной}$$

нейронной сети, которая равна корреляционной матрице входных сигналов ИНС, если рассматривается входной слой искусственной нейронной сети, и равна матрице \mathbf{E} , если рассматриваются скрытые слои ИНС.

$$\begin{aligned}
B_i = & 1 - \frac{2\mu a_1}{1-r^2} Sp((\mathbf{PR}_i \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_i) + \\
& + \mu^2 a_1^2 \frac{1-r^2-r^{2n+2}}{(1-r^2)^2} Sp((\mathbf{PR}_i \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_i (\mathbf{PR}_i \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_i) + \\
& + \mu^2 a_1^2 \frac{3-r^2(1+r^{2n})}{(1-r^2)^2} \cdot \frac{\vec{W}_{CTi}^H \mathbf{R}_i (\mathbf{PR}_i \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_i (\mathbf{PR}_i \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_i \vec{W}_{CTi}}{\vec{W}_{CTi}^H \mathbf{R}_i \vec{W}_{CTi}} + \\
& + \mu^2 a_1^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2((\mathbf{PR}_i \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_i)
\end{aligned} \quad (6.2.6)$$

коэффициент, позволяющий записывать получаемые результаты в более компактном виде и необходимый для записи результатов, получаемых для скрытых слоёв ИНС.

Для обсуждения формулы (6.2.5) запишем вид корреляционной функции выходного сигнала искусственного нейрона, принадлежащего слою p искусственной нейронной сети и найденной без учёта флуктуаций весовых коэффициентов:

$$K_p(n) = a_1^{2p} \cdot r^{|n|p} \cdot (\vec{W}_{CTp}^H \mathbf{E} \vec{W}_{CTp}) (\vec{W}_{CTp-1}^H \mathbf{E} \vec{W}_{CTp-1}) \cdots (\vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{CT1}). \quad (6.2.7)$$

Сравнение формул (6.2.5) и (6.2.7), найденных соответственно при учёте и без учёта флуктуаций весовых коэффициентов, показывает, что учёт флуктуаций приводит к

появлению дополнительных сомножителей в выражении корреляционной функции выходного сигнала, а через них - к искажению корреляционных характеристик выделяемого ИНС сигнала, причём влияние искажений увеличивается с возрастанием номера слоя сети. Иными словами, увеличение числа слоев искусственной нейронной сети приводит к увеличению искажений, вносимых флуктуациями весовых коэффициентов в сигнал, выделяемый сетью из смеси полезного сигнала и помех. Необходимо также отметить, что по мере прохождения сигнала от слоя к слою, он становится всё более широкополосным, т.к. $K_p(n) \sim r^{p|n|}$.

МОЩНОСТЬ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА ИСКУССТВЕННОГО НЕЙРОНА, ПРИНАДЛЕЖАЩЕГО СЛОЮ p ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ.

Выражение для мощности выходного сигнала искусственного нейрона, настраивающегося по алгоритму рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов, было представлено в главе 5 и имеет вид:

$$\langle |Z|^2 \rangle_p = \langle |Z|^2 \rangle_{CTp} \times \left\{ \begin{aligned} &1 - \frac{2\mu a_1}{1-r^2} \cdot Sp((\mathbf{PR}_{BX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{BX}) + \\ &+ \mu^2 a_1^2 \frac{1-2r^2}{(1-r^2)^2} \cdot Sp((\mathbf{PR}_{BX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{BX} (\mathbf{PR}_{BX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{BX}) + \\ &+ \mu^2 a_1^2 \frac{3-2r^2}{(1-r^2)^2} \cdot \frac{\vec{W}_{CTp}^H \mathbf{R}_{BX} (\mathbf{PR}_{BX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{BX} (\mathbf{PR}_{BX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{BX} \vec{W}_{CTp}}{\vec{W}_{CTp}^H \mathbf{R}_{BX} \vec{W}_{CTp}} + \\ &+ \mu^2 a_1^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2((\mathbf{PR}_{BX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{BX}) \end{aligned} \right\}. \quad (6.2.8)$$

При записи формулы (6.2.8) корреляционная матрица входных сигналов \mathbf{R}_{XX} была заменена на \mathbf{R}_{BX} , а также, в качестве нижнего индекса при обозначении выходной мощности, был установлен индекс p , что делает возможным рассмотрение данного выражения в контексте искусственной нейронной сети - как выходной мощности искусственного нейрона, принадлежащего слою p данной сети.

Получение итеративной формулы выходной мощности, записанной через характеристики слоёв сети и характеристики входных сигналов, возможно, если положить $n = 0$ в соответствующем выражении для корреляционной функции (6.2.5). Тогда имеем:

$$\langle |Z|^2 \rangle_p = a_1^{2p} \cdot \prod_{i=1}^p \tilde{B}_i \cdot (\vec{W}_{CTi}^H \mathbf{R}_i \vec{W}_{CTi}). \quad (6.2.13)$$

где

$\mathbf{R}_i = \begin{cases} \mathbf{R}_{xx}, i = 1; \\ \mathbf{E}, i > 1. \end{cases}$ - корреляционная матрица входных сигналов слоёв искусственной

нейронной сети, которая равна корреляционной матрице входных сигналов ИНС, если рассматривается входной слой искусственной нейронной сети, и равна матрице \mathbf{E} , если рассматриваются скрытые слои ИНС.

$$\begin{aligned} \tilde{B}_i = & 1 - \frac{2\mu a_1}{1-r^2} Sp((\mathbf{PR}_i\mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_i) + \\ & + \mu^2 a_1^2 \frac{1-2r^2}{(1-r^2)^2} Sp((\mathbf{PR}_i\mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_i (\mathbf{PR}_i\mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_i) + \\ & + \mu^2 a_1^2 \frac{3-2r^2}{(1-r^2)^2} \cdot \frac{\vec{W}_{CTi}^H \mathbf{R}_i (\mathbf{PR}_i\mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_i (\mathbf{PR}_i\mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_i \vec{W}_{CTi}}{\vec{W}_{CTi}^H \mathbf{R}_i \vec{W}_{CTi}} + \\ & + \mu^2 a_1^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2((\mathbf{PR}_i\mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_i) \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

Из формул (6.2.13) – (6.2.14) видно, что флуктуации весовых коэффициентов приводят как к увеличению, так и к уменьшению мощности на выходе нейронов, т.е. в искусственной нейронной сети с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки может иметь место как эффект рассогласования, так и эффект «перекомпенсации». По мере увеличения номера слоя искажения выходной мощности под влиянием флуктуаций становятся всё больше.

Выражение для выходной мощности, найденной без учёта флуктуаций весовых коэффициентов, имеет вид:

$$\langle |Z|^2 \rangle_p = a_1^{2p} \cdot (\vec{W}_{CTp}^H \mathbf{E} \vec{W}_{CTp}) (\vec{W}_{CTp-1}^H \mathbf{E} \vec{W}_{CTp-1}) \cdots (\vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{CT1}). \quad (6.2.15)$$

Из формулы (6.2.15) можно видеть, что в отсутствии флуктуаций изменения мощности при увеличении номера слоя зависят от двух факторов - произведения мощностей предыдущих слоёв и коэффициента a_1 разложения нелинейной активационной функции в ряд Вольтерра [177]. От численных значений этих характеристик будет зависеть увеличение (или уменьшение) величины мощности по мере продвижения сигнала по слоям искусственной нейронной сети.

Таким образом, проведённый анализ корреляционной функции и мощности выходных сигналов искусственной нейронной сети показал, что флуктуации настраиваемых весовых коэффициентов приводят к искажениям сигнала, идущего от входного слоя к выходу ИНС во время решения сетью задачи выделения полезного сигнала на фоне помех. Искажения возрастают при увеличении числа слоёв сети. Однако при задании одинаковых входных сигналов на каждом из искусственных нейро-

нов входного слоя сети в выражениях для «флуктуационных» слагаемых появляется произведение проекционной матрицы и матрицы, состоящей из единиц. Это произведение равно нулю, что приводит к нулевым значениям «флуктуационных» слагаемых корреляционной функции и мощности выходных сигналов искусственных нейронов, принадлежащих второму и последующим слоям сети.

РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.

Моделировалась искусственная нейронная сеть, настраиваемая по алгоритму рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов – быстрому алгоритму, используемому для пространственной фильтрации сигналов в адаптивных антенных решётках. Искусственная нейронная сеть содержала $M = 3$ слоя, в каждом из которых было по $N_1 = 7$ искусственных нейронов. Каждый искусственный нейрон представлял собой адаптивный линейный сумматор с $N = 7$ входными элементами и нелинейной функцией – сигмоидом на выходе.

На каждый искусственный нейрон входного слоя сети подавалась одна и та же помеховая обстановка – полезный сигнал и одна помеха, представленные в виде плоских волн. Полезный сигнал приходил с направления, нормального к плоскости каждого искусственного нейрона входного слоя ИНС. Помеха приходила с направления, равного 45° относительно нормали, проведенной к плоскости искусственных нейронов входного слоя сети. Мощность помехи была принята равной единице, мощность полезного сигнала составляла 0.1 от мощности помехи. В каждом искусственном нейроне присутствовал также собственный шум, мощность которого была 0.01 относительно мощности помехи.

При моделировании вычислялся коэффициент рассогласования между выходной мощностью, найденной при постоянном стационарном весовом векторе, и «флуктуационной» частью выходной мощности. В таблице 6.3 представлены значения коэффициента рассогласования M в зависимости от величины коэффициента адаптации μ в случае прихода на искусственную нейронную сеть входных сигналов с некоррелированными отсчетами $r = 0$.

Таблица 6.3

μ	10^{-5}	$5 \cdot 10^{-5}$	10^{-4}	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}
$M_I^T, \%$	-0.003	-0.015	-0.03	-0.15	-0.3
$M_I^{\mathcal{E}}, \%$	-0.0051	-0.0294	-0.0698	-0.1236	-0.387
$M_{II}^T, \%$	0	0	0	0	0
$M_{II}^{\mathcal{E}}, \%$	0	0	0	0	0
$M_{III}^T, \%$	0	0	0	0	0
$M_{III}^{\mathcal{E}}, \%$	0	0	0	0	0

Из таблицы 6.3 можно видеть, что второй и третий слои сети имеют коэффициент рассогласования, равный нулю, и это подтверждает компьютерное моделирование. Коэффициент рассогласования искусственного нейрона, принадлежащего первому слою сети, зависит от величины коэффициента адаптации быстрого рекуррентного алгоритма. Из таблицы видно, что имеет место достаточно хорошее согласие между теоретическими результатами и результатами компьютерного моделирования при входных сигналах с некоррелированными отсчетами $r = 0$.

В таблице 6.4 представлены значения коэффициента рассогласования M в зависимости от величины коэффициента адаптации μ в случае прихода на искусственную нейронную сеть входных сигналов с высоко коррелированными отсчетами $r = 0.9$.

Таблица 6.4

μ	10^{-5}	$5 \cdot 10^{-5}$	10^{-4}	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}
$M_I^T, \%$	-0.0158	-0.0789	-0.1579	-0.7896	-1.5796
$M_I^{\mathcal{E}}, \%$	-0.0185	-0.0868	-0.1765	0.0433	0.0025
$M_{II}^T, \%$	0	0	0	0	0
$M_{II}^{\mathcal{E}}, \%$	0	0	0	0	0
$M_{III}^T, \%$	0	0	0	0	0
$M_{III}^{\mathcal{E}}, \%$	0	0	0	0	0

Из таблицы 6.4 следует, что и в случае сигналов с высоко коррелированными отсчетами имеет место достаточно хорошее согласие между теоретическими результатами и результатами компьютерного моделирования до значений коэффициента адаптации, равного 0.0005. Расхождение теоретических результатов и результатов компьютерного моделирования может быть связано с тем, что при высоких значениях коэффициента адаптации имеет место нарушение условия малости μ и применимости первого борновского приближения.

Таким образом, можно говорить о том, что алгоритм рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов пригоден для использования в искусственных нейронных сетях в целях решения задач выделения полезного сигнала на фоне помех. Данный алгоритм является классическим алгоритмом настройки адаптивных антенных решёток. Однако исследование показало, что при использовании этого алгоритма для настройки искусственных нейронных сетей он обладает преимуществом перед классическими нейросетевыми алгоритмами в том, что не дает флуктуаций весовых коэффициентов во втором и последующих слоях сети при задании одинаковой помеховой обстановки на каждом из нейронов входного слоя искусственной нейронной сети.

6.3. ИСКУССТВЕННАЯ НЕЙРОННАЯ СЕТЬ С АЛГОРИТМОМ ХЭББА [139,151,153].

Среди различных алгоритмов настройки искусственных нейронных сетей (ИНС) наиболее приспособленным для решения задач обработки радиосигналов является алгоритм Хэбба. Первоначально предназначенный для распознавания образов, данный алгоритм выделяет компоненты входного сигнала, которым соответствует максимальное собственное число в корреляционной матрице входных сигналов [75,77,82]. Способность алгоритма Хэбба выделять наиболее мощный сигнал на фоне шумов делает данный алгоритм полезным для решения задач радиолокации.

Представляет интерес проведение анализа влияния флуктуаций настраиваемых весовых коэффициентов ИНС на статистические характеристики нейронной сети с алгоритмом Хэбба для случая прихода на данную сеть узкополосных входных сигналов. Это позволило бы внести вклад в исследование точности настройки искусственных нейронных сетей с алгоритмом Хэбба.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Рассмотрим полносвязную прямого распространения искусственную нейронную сеть, содержащую M слоёв по N нейронов в каждом слое. Пусть настройка вектора весовых коэффициентов \vec{W}_{jp} произвольного нейрона j , принадлежащего слою p данной сети, происходит по алгоритму Хэбба и описывается уравнением вида [75,82]:

$$\vec{W}_{jp}(k+1) = \vec{W}_{jp}(k) + \mu \cdot Z_{jp}(k) [\vec{Z}_{p-1}^*(k) - Z_{jp}^*(k) \cdot \vec{W}_{jp}(k)], \quad (6.3.1)$$

где $\vec{W}_{jp}(k)$ - весовой вектор j -ого нейрона слоя p в момент времени k , μ - коэффициент адаптации; * - знак комплексного сопряжения.

В выражении (6.3.1) $\vec{Z}_{p-1}^*(k)$ - входной сигнал j -ого нейрона слоя p , являющийся также вектором выходного сигнала слоя $p-1$; $Z_{jp}(k)$ - выходной сигнал j -ого нейрона слоя p искусственной нейронной сети.

Будем рассматривать искусственную нейронную сеть, на которую поступают узкополосные входные сигналы вида [65]:

$$\mathbf{R}_p(k, k+n) \equiv \langle \vec{X}^*(k) \vec{X}^T(k+n) \rangle = \mathbf{R}_{xx} r^{|n|}. \quad (6.3.2)$$

Здесь $\vec{X}(k)$ - вектор входных сигналов в момент времени k ; \mathbf{R}_{xx} - пространственная часть корреляционной матрицы входных сигналов; r - коэффициент корреляции между отсчётами входных сигналов.

Для простоты всюду ниже предполагается, что на все нейроны входного слоя искусственной нейронной сети подается один и тот же вектор входного сигнала, состоящий из суммы векторов полезного сигнала и помех.

Необходимо отметить, что в этом случае пространственная часть корреляционной матрицы входных сигналов скрытых слоёв искусственной нейронной сети будет иметь в качестве всех своих элементов единицы для всех слоёв ИНС. Кроме того, для упрощения представленной задачи всюду ниже будем предполагать, что у всех нейронов сети отсутствует активационная функция, т.е. все нейроны искусственной нейронной сети являются линейными. Данное предположение не уменьшает общности поставленной задачи, поскольку алгоритм Хэбба, по которому настраивается рассматриваемая искусственная нейронная сеть, является нелинейным по весовому вектору - весовые коэффициенты входят в уравнение алгоритма (6.3.1) в первой, второй и третьей степенях.

Перед искусственной нейронной сетью ставится задача выделения полезного сигнала на фоне помех. Анализ статистических характеристик отдельного искусственного нейрона, настраивавшегося по алгоритму Хэбба, с учётом флуктуаций весового вектора проводился нами в работе [137]. В следующем разделе приводится обобщение полученных результатов для случая искусственной нейронной сети.

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ, НАСТРАИВАЮЩЕЙСЯ ПО АЛГОРИТМУ ХЭББА.

Корреляционная функция выходного сигнала искусственного нейрона, настраивающегося по алгоритму Хэбба, с учётом флуктуаций вектора весовых коэффициентов может быть записана в виде [137]:

$$\mathbf{K}_1[n] = A \cdot r^{|n|} + C \cdot r^{3|n|}, \quad (6.3.3)$$

где

$$\begin{aligned} A = & \langle |Z|^2 \rangle_{CT1} \times \left\{ 1 + \mu \frac{2}{1-r} Sp(\vec{W}_{CT1} \vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{xx}) + \right. \\ & + \mu^2 \frac{1+r^2}{1-r^2} Sp(\vec{W}_{CT1} \vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{xx}) \langle |Z|^2 \rangle_{CT1} + \\ & \left. + \mu^2 \frac{3r^2 - r^4}{(1-r^2)^2} (\langle |Z|^2 \rangle_{CT1})^2 + \mu^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2(\vec{W}_{CT1} \vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{xx}) \right\} \end{aligned}, \quad (6.3.4)$$

$$C = -\mu^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} (\langle |Z|^2 \rangle_{CT1})^2 \times \left\{ Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx}) r^{|n|} + \langle |Z|^2 \rangle_{CT1} \right\} - \quad (6.3.5)$$

Формулы (6.3.4) и (6.3.5) описывают коэффициенты, стоящие соответственно при первой и третьей степенях коэффициента автокорреляции между отсчётами входных сигналов в формуле корреляционной функции выходного сигнала искусственного нейрона, принадлежащего первому слою искусственной нейронной сети.

Из формул (6.3.3) – (6.3.5) можно видеть, что корреляционная функция выходного сигнала содержит в себе, помимо слагаемого, пропорционального $r^{|n|}$, которое имело место в корреляционной функции входных сигналов, также быстро спадающую компоненту, пропорциональную $r^{3|n|}$. По этой причине вид корреляционной функции входного сигнала второго слоя искусственной нейронной сети будет отличаться от выражения для корреляционной функции сигнала на входе ИНС наличием быстро спадающего слагаемого.

Для того, чтобы записать формулу для корреляционной матрицы входных сигналов второго слоя искусственной нейронной сети, учтем, что выходной сигнал каждого из нейронов первого слоя будет одним и тем же. При постановке задачи для упрощения анализа мы условились подавать одни и те же входные сигналы на каждый нейрон ИНС. Та же ситуация будет на выходах каждого из слоёв искусственной нейронной сети, поскольку сигналы, поступающие на входы нейронов одного слоя, также будут одинаковыми. Математически данное упрощение выразится в том, что пространственная часть корреляционной матрицы входных сигналов будет представлять собой матрицу, все элементы которой равны единице.

Запишем корреляционную матрицу входных сигналов i -ого слоя ИНС через корреляционную функцию входных сигналов предыдущего слоя $i-1$ следующим образом:

$$\mathbf{R}_{exi}[n] = K_{i-1}[n] \cdot \mathbf{E}, \quad (6.3.6)$$

где $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ - матрица, все элементы которой являются единицами.

Из выражения (6.3.6) видно, что корреляционные матрицы входных сигналов различных слоёв сети отличаются между собой только видом зависимости элементов матрицы от времени ($K_{i-1}[n]$), сохраняя при этом одинаковую пространственную часть (\mathbf{E}). Подставляя конкретный вид корреляционной функции сигнала на

выходе искусственного нейрона (6.3.3) в выражение (6.3.6), получаем формулу для корреляционной матрицы входных сигналов второго слоя ИНС:

$$\mathbf{R}_{ex2}[n] = A \cdot \mathbf{E} \cdot r^{|n|} + C \cdot \mathbf{E} \cdot r^{3|n|} \quad (6.3.7)$$

Зная конкретный вид корреляционной матрицы входных сигналов второго слоя искусственной нейронной сети, можно записать корреляционную функцию на выходе искусственного нейрона второго слоя ИНС:

$$K_2[n] = A_1[A] \cdot r^{|n|} + C_1[A; C] \cdot r^{3|n|} + D_1[C] \cdot r^{9|n|}, \quad (6.3.8)$$

где коэффициенты $A_1; C_1; D_1$ описываются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} A_1[A] = & A \times \langle |Z|^2 \rangle_{CT2} \times \left\{ 1 + (\mu A) \frac{2}{1-r} Sp(\vec{W}_{CT2} \vec{W}_{CT2}^H \mathbf{E}) + \right. \\ & + (\mu A)^2 \frac{1+r^2}{1-r^2} Sp(\vec{W}_{CT2} \vec{W}_{CT2}^H \mathbf{E}) \langle |Z|^2 \rangle_{CT2} + \\ & \left. + (\mu A)^2 \frac{3r^2 - r^4}{(1-r^2)^2} (\langle |Z|^2 \rangle_{CT2})^2 + (\mu A)^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2(\vec{W}_{CT2} \vec{W}_{CT2}^H \mathbf{E}) \right\} \end{aligned} \quad (6.3.9)$$

$$\begin{aligned} C_1[A; C] = & (\langle |Z|^2 \rangle_{CT2})^2 \times A^3 \times \left(-\mu^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} \right) \times \left\{ Sp(\vec{W}_{CT2} \vec{W}_{CT2}^H \mathbf{E}) + \langle |Z|^2 \rangle_{CT2} \right\} + \\ & + C \times \langle |Z|^2 \rangle_{CT2} \times \left\{ 1 + (\mu C) \frac{2}{1-r^3} Sp(\vec{W}_{CT2} \vec{W}_{CT2}^H \mathbf{E}) + \right. \\ & + (\mu C)^2 \frac{1+r^6}{1-r^6} Sp(\vec{W}_{CT2} \vec{W}_{CT2}^H \mathbf{E}) \langle |Z|^2 \rangle_{CT2} + \\ & \left. + (\mu C)^2 \frac{3r^6 - r^{12}}{(1-r^6)^2} (\langle |Z|^2 \rangle_{CT2})^2 + (\mu C)^2 \frac{r^6}{(1-r^6)^2} Sp^2(\vec{W}_{CT2} \vec{W}_{CT2}^H \mathbf{E}) \right\} \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

$$D_1[C] = (\langle |Z|^2 \rangle_{CT2})^2 \times C^3 \times \left(-\mu^2 \frac{r^6}{(1-r^6)^2} \right) \times \left\{ Sp(\vec{W}_{CT2} \vec{W}_{CT2}^H \mathbf{E}) + \langle |Z|^2 \rangle_{CT2} \right\}. \quad (6.3.11)$$

Из формул (6.3.8) – (6.3.11) следует, что в корреляционной функции выходного сигнала второго слоя ИНС появляются две быстро спадающие компоненты (пропорциональные $r^{3|n|}$ и $r^{9|n|}$) по сравнению с корреляционной функцией входного сигнала искусственной нейронной сети. Ещё одной особенностью полученных выражений является то, что коэффициенты $A_1; C_1; D_1$ становятся функциями коэффициентов предыдущего слоя (коэффициентов $A; C$). В таблице, приведённой ниже, показана связь коэффициентов корреляционной функции на выходе второго слоя с коэффициентами первого слоя искусственной нейронной сети.

A_1	A	
C_1	A	C
D_1		C

Из таблицы 6.5 можно видеть, что коэффициент A_1 корреляционной функции выходного сигнала второго слоя сети зависит только от коэффициента A корреляционной функции выходного сигнала первого слоя ИНС (первая строка таблицы 6.5), коэффициент C_1 - от коэффициентов A и C (вторая строка таблицы 6.5), а коэффициент D_1 - от коэффициента C (третья строка таблицы 6.5).

Поступая так же, как и для второго слоя, запишем формулу для корреляционной матрицы входных сигналов третьего слоя ИНС:

$$\mathbf{R}_{\text{вх}3}[n] = A_1 \cdot \mathbf{E} \cdot r^{|n|} + C_1 \cdot \mathbf{E} \cdot r^{3|n|} + D_1 \cdot \mathbf{E} \cdot r^{9|n|}, \quad (6.3.12)$$

а также выражение для корреляционной функции сигнала на выходе третьего слоя искусственной нейронной сети:

$$K_3[n] = A_2[A_1] \cdot r^{|n|} + C_2[A_1; C_1] \cdot r^{3|n|} + D_2[A_1; C_1; D_1] \cdot r^{9|n|} + E_2[C_1; D_1] \cdot r^{27|n|} + F_2[D_1] \cdot r^{81|n|}, \quad (6.3.13)$$

где коэффициенты $A_2; C_2$ описываются следующими формулами:

$$A_2[A_1] = (A_1 A A_0) \times \langle |Z|^2 \rangle_{CT3} \times \left\{ 1 + (\mu A_1 A A_0) \frac{2}{1-r} Sp(\vec{W}_{CT3} \vec{W}_{CT3}^H \mathbf{E}) + (\mu A_1 A A_0)^2 \frac{1+r^2}{1-r^2} Sp(\vec{W}_{CT3} \vec{W}_{CT3}^H \mathbf{E}) \langle |Z|^2 \rangle_{CT3} + (\mu A_1 A A_0)^2 \frac{3r^2 - r^4}{(1-r^2)^2} (\langle |Z|^2 \rangle_{CT3})^2 + (\mu A_1 A A_0)^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2(\vec{W}_{CT3} \vec{W}_{CT3}^H \mathbf{E}) \right\} \quad (6.3.14)$$

$$C_2[A_1; C_1] = (\langle |Z|^2 \rangle_{CT3})^2 \times (A_1 A A_0)^3 \times \left(-\mu^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} \right) \times \left\{ Sp(\vec{W}_{CT3} \vec{W}_{CT3}^H \mathbf{E}) + \langle |Z|^2 \rangle_{CT3} \right\} + \langle |Z|^2 \rangle_{CT3} \times \left\{ [(A_1 C A_0) + (C_1 A A_0)] + [(A_1 C A_0)^2 + (C_1 A A_0)^2] \mu \frac{2}{1-r^3} Sp(\vec{W}_{CT3} \vec{W}_{CT3}^H \mathbf{E}) + [(A_1 C A_0)^3 + (C_1 A A_0)^3] \mu^2 \frac{1+r^6}{1-r^6} Sp(\vec{W}_{CT3} \vec{W}_{CT3}^H \mathbf{E}) \langle |Z|^2 \rangle_{CT3} + [(A_1 C A_0)^3 + (C_1 A A_0)^3] \mu^2 \frac{3r^6 - r^{12}}{(1-r^6)^2} (\langle |Z|^2 \rangle_{CT3})^2 + [(A_1 C A_0)^3 + (C_1 A A_0)^3] \mu^2 \frac{r^6}{(1-r^6)^2} Sp^2(\vec{W}_{CT3} \vec{W}_{CT3}^H \mathbf{E}) \right\} \quad (6.3.15)$$

Коэффициент D_2 может быть представлен следующим выражением:

$$\begin{aligned}
D_2[A_1; C_1; D_1] = & \{(A_1CA_0)^3 + (C_1AA_0)^3\} \langle |Z|^2 \rangle_{CT3}^2 \times \\
& \times \left(-\mu^2 \frac{r^6}{(1-r^6)^2} \right) \times \left\{ Sp(\vec{W}_{CT3} \vec{W}_{CT3}^H \mathbf{E}) + \langle |Z|^2 \rangle_{CT3} \right\} + \\
& + \langle |Z|^2 \rangle_{CT3} \times \{[(C_1CA_0) + (D_1AA_0)] + \\
& + [(C_1CA_0)^2 + (D_1AA_0)^2] \mu \frac{2}{1-r^9} Sp(\vec{W}_{CT3} \vec{W}_{CT3}^H \mathbf{E}) + \\
& + [(C_1CA_0)^3 + (D_1AA_0)^3] \mu^2 \frac{1+r^{18}}{1-r^{18}} Sp(\vec{W}_{CT3} \vec{W}_{CT3}^H \mathbf{E}) \langle |Z|^2 \rangle_{CT3} + \\
& + [(C_1CA_0)^3 + (D_1AA_0)^3] \mu^2 \frac{3r^{18} - r^{36}}{(1-r^{18})^2} \langle |Z|^2 \rangle_{CT3}^2 + \\
& + [(C_1CA_0)^3 + (D_1AA_0)^3] \mu^2 \frac{r^{18}}{(1-r^{18})^2} Sp^2(\vec{W}_{CT3} \vec{W}_{CT3}^H \mathbf{E}) \}
\end{aligned} \tag{6.3.16}$$

Коэффициент E_2 имеет вид:

$$\begin{aligned}
E_2[C_1; D_1] = & \{(C_1CA_0)^3 + (D_1AA_0)^3\} \langle |Z|^2 \rangle_{CT3}^2 \times \\
& \times \left(-\mu^2 \frac{r^{18}}{(1-r^{18})^2} \right) \times \left\{ Sp(\vec{W}_{CT3} \vec{W}_{CT3}^H \mathbf{E}) + \langle |Z|^2 \rangle_{CT3} \right\} + \\
& + \langle |Z|^2 \rangle_{CT3} \times \{ (D_1CA_0) + (D_1CA_0)^2 \mu \frac{2}{1-r^{27}} Sp(\vec{W}_{CT3} \vec{W}_{CT3}^H \mathbf{E}) + \\
& + (D_1CA_0)^3 \mu^2 \frac{1+r^{54}}{1-r^{54}} Sp(\vec{W}_{CT3} \vec{W}_{CT3}^H \mathbf{E}) \langle |Z|^2 \rangle_{CT3} + \\
& + (D_1CA_0)^3 \mu^2 \frac{3r^{54} - r^{108}}{(1-r^{54})^2} \langle |Z|^2 \rangle_{CT3}^2 + \\
& + (D_1CA_0)^3 \mu^2 \frac{r^{54}}{(1-r^{54})^2} Sp^2(\vec{W}_{CT3} \vec{W}_{CT3}^H \mathbf{E}) \}
\end{aligned} \tag{6.3.17}$$

И, наконец, коэффициент F_2 можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
F_2[D_1] = & (D_1CA_0)^3 \times \langle |Z|^2 \rangle_{CT3}^2 \times \\
& \times \left(-\mu^2 \frac{r^{54}}{(1-r^{54})^2} \right) \times \left\{ Sp(\vec{W}_{CT3} \vec{W}_{CT3}^H \mathbf{E}) + \langle |Z|^2 \rangle_{CT3} \right\}
\end{aligned} \tag{6.3.18}$$

Из выражений (6.3.13) – (6.3.18) видно, что в выходном сигнале третьего слоя искусственной нейронной сети, настраивающейся по алгоритму Хэбба, имеют место составляющие сигнала, корреляционная функция которых быстро спадает во времени ($\square r^{3|n|}$, $\square r^{9|n|}$, $\square r^{27|n|}$, $\square r^{81|n|}$). Сравнение данных выражений с аналогичными формулами для корреляционной функции на выходе второго слоя ИНС (6.3.8) – (6.3.11) показывает, что прохождение сигналом третьего слоя искусственной нейронной сети приводит к добавлению в формуле корреляционной функции слагаемых с ещё более

высокой скоростью спадания во времени, чем та, что имела место на выходе второго слоя ИНС ($\square r^{27|n|}$, $\square r^{81|n|}$).

В таблице 6.6, которая приведена ниже, показана связь коэффициентов формулы для корреляционной функции на выходе третьего слоя искусственной нейронной сети с коэффициентами корреляционной функции выходного сигнала искусственного нейрона, принадлежащего второму слою сети.

Таблица 6.6

A_2	A_1		
C_2	A_1	C_1	
D_2	A_1	C_1	D_1
E_2		C_1	D_1
F_2			D_1

Из таблицы 6.6 можно видеть, что коэффициент A_2 корреляционной функции выходного сигнала третьего слоя искусственной нейронной сети зависит только от коэффициента A_1 корреляционной функции выходного сигнала предыдущего слоя сети (первая строка таблицы 6.6), коэффициент C_2 - от коэффициентов A_1 и C_1 (вторая строка), коэффициент D_2 - от коэффициентов A_1 , C_1 и D_1 (третья строка), коэффициент E_2 - от коэффициентов C_1 и D_1 (четвёртая строка), и коэффициент F_2 - только от коэффициента D_1 (нижняя строка таблицы).

Таким образом, выражение корреляционной функции из-за флуктуаций весовых коэффициентов по мере увеличения номера слоя искусственной нейронной сети начинает все более сложным образом зависеть от той же статистической характеристики предыдущего слоя сети. Это свидетельствует о том, что полезный сигнал по мере прохождения слоев искусственной нейронной сети с алгоритмом Хэбба все более искажается из-за флуктуаций весовых коэффициентов – и чем больше имеется слоев в ИНС, тем сильнее возникающие искажения.

Упростим выражение для корреляционной функции третьего слоя искусственной нейронной сети и её коэффициентов, учитывая, что коэффициент автокорреляции между отсчётами $r < 1$ и при возведении в степень стремится к нулю. Будем считать, что возведение данного коэффициента в шестую и более высокие степени делает его пренебрежимо малым ($r^{\text{бывшие}} \rightarrow 0$).

При данном предположении формулы (6.3.13) – (6.3.18) упрощаются и приобретают вид:

$$K_3[n] = \tilde{A}_2 \cdot r^{|n|} + \tilde{C}_2 \cdot r^{3|n|} + \tilde{D}_2 \cdot r^{9|n|} + \tilde{E}_2 \cdot r^{27|n|}, \quad (6.3.19)$$

где новые коэффициенты $\tilde{A}_2; \tilde{C}_2$ в выражении для корреляционной функции выходного сигнала ААР могут быть записаны следующим образом:

$$\tilde{A}_2 = A_2, \quad (6.3.20)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_2 = & \langle |Z|^2 \rangle_{CT3}^2 \times (A_1 A A_0)^3 \times \left(-\mu^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} \right) \times \left\{ Sp(\vec{W}_{CT3} \vec{W}_{CT3}^H \mathbf{E}) + \langle |Z|^2 \rangle_{CT3} \right\} + \\ & + \langle |Z|^2 \rangle_{CT3} \times \{ [(A_1 C A_0) + (C_1 A A_0)] + [(A_1 C A_0)^2 + (C_1 A A_0)^2] \mu \frac{2}{1-r^3} Sp(\vec{W}_{CT3} \vec{W}_{CT3}^H \mathbf{E}) + \\ & + [(A_1 C A_0)^3 + (C_1 A A_0)^3] \mu^2 Sp(\vec{W}_{CT3} \vec{W}_{CT3}^H \mathbf{E}) \langle |Z|^2 \rangle_{CT3} \} \end{aligned} \quad (6.3.21)$$

Коэффициенты \tilde{D}_2, \tilde{E}_2 имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_2 = & \langle |Z|^2 \rangle_{CT3} \times \{ [(C_1 C A_0) + (D_1 A A_0)] + [(C_1 C A_0)^2 + (D_1 A A_0)^2] (2\mu) Sp(\vec{W}_{CT3} \vec{W}_{CT3}^H \mathbf{E}) + \\ & + [(C_1 C A_0)^3 + (D_1 A A_0)^3] \mu^2 Sp(\vec{W}_{CT3} \vec{W}_{CT3}^H \mathbf{E}) \langle |Z|^2 \rangle_{CT3} \} \end{aligned} \quad (6.3.22)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_2 = & \langle |Z|^2 \rangle_{CT3} \times \{ (D_1 C A_0) + (D_1 C A_0)^2 (2\mu) Sp(\vec{W}_{CT3} \vec{W}_{CT3}^H \mathbf{E}) + \\ & + (D_1 C A_0)^3 \mu^2 Sp(\vec{W}_{CT3} \vec{W}_{CT3}^H \mathbf{E}) \langle |Z|^2 \rangle_{CT3} \} \end{aligned} \quad (6.3.23)$$

Последний коэффициент \tilde{F}_2 после упрощения выражений становится равным нулю:

$$\tilde{F}_2 = 0 \quad (6.3.24)$$

Из выражений (6.3.19) – (6.3.24) видно, что исключение из рассмотрения слагаемых, содержащих высокие степени коэффициента автокорреляции между отсчётами r приводит к исчезновению слагаемого в выходной корреляционной функции третьего слоя ИНС, скорость спадаения во времени которого максимальна ($\propto r^{81|n|}$).

Из представленных выше выражений для коэффициентов корреляционной функции выходного сигнала различных слоёв сети следует, что, вообще говоря, коэффициенты являются не числами, а функциями коэффициентов предыдущих слоёв сети. Учитывая это, можно записать формулы для корреляционных функций выходных сигналов искусственных нейронов, принадлежащих (соответственно) первому, второму и третьему слоям следующим образом:

$$\mathbf{K}_1[n] = A[A_0 \mathbf{E}] \cdot r^{|n|} + C[A_0 \mathbf{E}] \cdot r^{3|n|}, \quad (6.3.25)$$

$$K_2[n] = A_1[A[A_0\mathbf{E}]\mathbf{E}] \cdot r^{|n|} + C_1[A[A_0\mathbf{E}]\mathbf{E}; C[A_0\mathbf{E}]\mathbf{E}] \cdot r^{3|n|} + D_1[C[A_0\mathbf{E}]\mathbf{E}] \cdot r^{9|n|}, \quad (6.3.26)$$

$$\begin{aligned} K_3[n] = & A_2 \{ A_1[A[A_0\mathbf{E}]\mathbf{E}]\mathbf{E} \} \cdot r^{|n|} + \\ & + C_2 \{ A_1[A[A_0\mathbf{E}]\mathbf{E}]\mathbf{E}; C_1[A[A_0\mathbf{E}]\mathbf{E}; C[A_0\mathbf{E}]\mathbf{E}]\mathbf{E} \} \cdot r^{3|n|} + \\ & D_2 \{ A_1[A[A_0\mathbf{E}]\mathbf{E}]\mathbf{E}; C_1[A[A_0\mathbf{E}]\mathbf{E}; C[A_0\mathbf{E}]\mathbf{E}]\mathbf{E}; D_1[C[A_0\mathbf{E}]\mathbf{E}]\mathbf{E} \} \cdot r^{9|n|} +, \quad (6.3.27) \\ & + E_2 \{ C_1[A[A_0\mathbf{E}]\mathbf{E}; C[A_0\mathbf{E}]\mathbf{E}]\mathbf{E}; D_1[C[A_0\mathbf{E}]\mathbf{E}]\mathbf{E} \} \cdot r^{27|n|} + \\ & + F_2 \{ D_1[C[A_0\mathbf{E}]\mathbf{E}]\mathbf{E} \} \cdot r^{81|n|} \end{aligned}$$

Из выражений (6.3.25) – (6.3.27) видно, что коэффициенты приведённых выше корреляционных функций являются вложенными функциями коэффициентов предыдущих слоёв, и уровень вложенности определяется порядковым номером слоя искусственной нейронной сети, для которого была рассчитана рассматриваемая корреляционная функция.

Проведём анализ того, как изменяется число коэффициентов в выражении для корреляционной функции выходного сигнала в зависимости от номера слоя искусственной нейронной сети, а также вычислим максимальную степень при коэффициенте $r^{|n|}$, которая будет определять наибольшую скорость спада слагаемых корреляционной функции данного слоя ИНС. Для этого сначала вычислим, сколько слагаемых будет содержать корреляционная функция выходного сигнала искусственного нейрона, принадлежащего четвёртому слою искусственной нейронной сети. Обратимся к формуле (6.3.13), описывающей вид корреляционной функции третьего слоя ИНС. Каждое слагаемое данной функции, проходя через искусственный нейрон четвёртого слоя сети, будет порождать на выходе компоненты сигнала, корреляционная функция которых спадает с различной скоростью (таблица 6.7).

Таблица 6.7

Слагаемое $K_3[n]$	Компоненты $K_4[n]$
$A_2 \cdot r^{ n }$	$(\square r^{ n }) - (\square r^{3^4 n })$
$C_2 \cdot r^{3 n }$	$(\square r^{3 n }) - (\square r^{3^5 n })$
$D_2 \cdot r^{3^2 n }$	$(\square r^{3^2 n }) - (\square r^{3^6 n })$
$E_2 \cdot r^{3^3 n }$	$(\square r^{3^3 n }) - (\square r^{3^7 n })$
$F_2 \cdot r^{3^4 n }$	$(\square r^{3^4 n }) - (\square r^{3^8 n })$

Из таблицы 6.7 можно видеть, что число слагаемых в корреляционной функции выходного сигнала, принадлежащего четвёртому слою искусственной нейронной сети, будет определяться количеством различных степеней при коэффициенте $r^{|n|}$. Из таблицы 6.7, а также из результатов, приведённых выше в данной статье, следует, что коэффициент автокорреляции между отсчётами входных сигналов r имеет степени, кратные степеням числа 3.

Анализируя таблицу 6.7, получаем, что корреляционная функция выходного сигнала искусственного нейрона, принадлежащего четвёртому слою ИНС, будет содержать 9 слагаемых, каждое из которых пропорционально соответственно $r^{3^k|n|}$, где индекс k изменяется дискретно от нуля до восьми. Это означает, что максимальная скорость спадания слагаемых корреляционной функции на выходе четвёртого слоя искусственной нейронной сети пропорциональна коэффициенту $r^{3^8|n|}$.

В таблице 6.8 приведена зависимость коэффициентов корреляционных функций выходного сигнала четвертого и третьего слоев ИНС.

Таблица 6.8

A_3	A_2				
C_3	A_2	C_2			
D_3	A_2	C_2	D_2		
E_3	A_2	C_2	D_2	E_2	
F_3	A_2	C_2	D_2	E_2	F_2
J_3		C_2	D_2	E_2	F_2
H_3			D_2	E_2	F_2
K_3				E_2	F_2
L_3					F_2

Таблица 6.8 даёт возможность увидеть общую закономерность зависимости между коэффициентами соседних слоёв сети. Каждый коэффициент предыдущего слоя ИНС встречается как аргумент в функциях коэффициентов последующего слоя сети ровно столько раз, сколько коэффициентов было в корреляционной функции предыдущего слоя искусственной нейронной сети.

Для большего понимания обратимся к таблицам 6.5, 6.6 и 6.8. Из них видно, что коэффициент A в таблице 6.5 встречается 2 раза – именно столько (т.е. два) коэффициента было в корреляционной функции на выходе искусственного нейрона, принадлежавшего первому слою ИНС. В корреляционной функции выходного сиг-

нала искусственного нейрона второго слоя сети, как видно из этой же таблицы, было 3 коэффициента. Если мы посмотрим теперь на таблицу 6.6, описывающую зависимость второго и третьего слоёв искусственной нейронной сети, то увидим, что все коэффициенты в ней повторяются ровно три раза. И, наконец, если мы снова обратим внимание на таблицу 6.8, то заметим, что поскольку в корреляционной функции на выходе третьего слоя сети было 5 коэффициентов, то ровно 5 раз повторяется каждый из коэффициентов третьего слоя как аргумент в функциях коэффициентов четвёртого слоя ИНС.

Необходимо отметить, что каждый коэффициент в данных таблицах начинает появляться впервые как аргумент аналогичного коэффициента, т.е. стоящий при той же степени r , только последующего слоя сети. Например, в таблице 6.8 коэффициент D_2 впервые появляется как аргумент коэффициента D_3 и повторяется далее еще четыре раза как аргумент в коэффициентах, стоящих при более высоких степенях r в корреляционной функции, т.е. в коэффициентах E_3, F_3, J_3 и H_3 .

Выведем формулу для числа коэффициентов в корреляционной функции выходного сигнала произвольного слоя p искусственной нейронной сети. Для этого выпишем в таблицу для первых четырёх слоёв сети зависимость числа коэффициентов корреляционной функции выходного сигнала от номера слоя (таблица 6.9).

	Таблица 6.9				
Номер слоя	I	II	III	IV	V
Число коэффициентов в $K_i[n]$	2	3	5	9	17

Из таблицы можно видеть, что от слоя к слою число коэффициентов в корреляционной функции выходного сигнала прибывает по закону степеней числа 2. Действительно, разница между числом коэффициентов второго и первого слоёв составляет 1, т.е. 2^0 . Между третьим и вторым слоями эта разница равна двум коэффициентам, т.е. 2^1 . Аналогично рассуждая, можно видеть, что в четвёртом слое на 2^2 больше коэффициентов, чем в третьем, а в пятом – на 2^3 больше, чем в четвёртом. Обобщая последовательность увеличения числа коэффициентов для случая произвольного слоя искусственной нейронной сети, можно записать, что формула для числа слагаемых N_p' в корреляционной функции на выходе слоя p имеет вид:

$$N_p' = 2 + \sum_{i=2}^p 2^{i-2}. \quad (6.3.28)$$

Из формулы (6.3.28) следует, что количество коэффициентов в каждом последующем слое искусственной нейронной сети возрастает по закону геометрической прогрессии. Это означает, что в искусственном нейроне каждого следующего слоя корреляционная функция выходного сигнала и соответствующая ей корреляционная матрица входных сигналов будет иметь всё большее число быстро спадающих слагаемых, причём максимальная скорость спада пропорциональна $r^{3^{N_{p-1}}|n|}$.

Исходя из общей закономерности, запишем связь коэффициентов корреляционной функции выходного сигнала искусственного нейрона p -ого и $p-1$ -ого слоёв искусственной нейронной сети (таблица 6.10).

Таблица 6.10

M_{p1}	$M_{(p-1)1}$...		
⋮	⋮	...		
$M_{pN_{p-1}}$	$M_{(p-1)1}$...	$M_{(p-1)(N_{p-1}-1)}$	
$M_{p(N_{p-1}+1)}$...	⋮	$M_{(p-1)N_{p-1}}$
⋮		...	$M_{(p-1)(N_{p-1}-1)}$	⋮
M_{pN_p}		...		$M_{(p-1)N_{p-1}}$

Здесь M_{pi} - коэффициент при $r^{i|n|}$ в корреляционной функции выходного сигнала искусственного нейрона, принадлежащего p -ому слою искусственной нейронной сети.

Из таблицы можно видеть, что каждое слагаемое слоя $p-1$ искусственной нейронной сети повторяется N_{p-1}' раз, причём каждый коэффициент M следующего p -ого слоя является функцией от одного до N_{p-1}' коэффициентов предыдущего слоя. Надо отметить, что первой независимой переменной для данного коэффициента является соответствующий коэффициент предыдущего слоя сети.

Следуя правилу, приведённому в таблице 6.10, запишем итеративную формулу для корреляционной функции выходного сигнала искусственного нейрона, принадлежащего слою p искусственной нейронной сети, полученную через коэффициенты корреляционных функций всех слоёв ИНС, включая входной слой:

$$\begin{aligned}
K_p[n] = & \sum_{i=0}^{N_p} M_{pi} \left\{ \bigcup_{\substack{i_1=0 \\ i_1 \leq N_{p-1}}}^i M_{(p-1)i_1} \left[\bigcup_{\substack{i_2=0 \\ i_2 \leq N_{p-2}}}^{i_1} M_{(p-2)i_2} (\dots \bigcup_{i_p=0}^{i_{p-1}} M_{1i_p} [M_0]) \right]; \right. \\
& \bigcup_{i_2=i_1-N_{p-2}}^{N_{p-2}} M_{(p-2)i_2} (\dots \bigcup_{i_p=0}^{i_{p-1}} M_{1i_p} [M_0]); \bigcup_{\substack{i_1=i-N_{p-1} \\ i_1 > N_{p-1}}}^{N_{p-1}} M_{(p-1)i_1} \left[\bigcup_{\substack{i_2=0 \\ i_2 \leq N_{p-2}}}^{i_1} M_{(p-2)i_2} (\dots \bigcup_{i_p=0}^{i_{p-1}} M_{1i_p} [M_0]) \right]; \\
& \left. \bigcup_{\substack{i_2=i_1-N_{p-2} \\ i_1 > N_{p-2}}} M_{(p-2)i_2} (\dots \bigcup_{i_p=0}^{i_{p-1}} M_{1i_p} [M_0]) \right\} \times r^{3^i |n|}
\end{aligned} \tag{6.3.29}$$

Здесь:

$$N_p = 1 + \sum_{i=2}^p 2^{i-2}. \tag{6.3.30}$$

В формуле (6.3.29) символ \bigcup обозначает зависимость соответствующей функции от всех переменных, объединенных данным символом.

Посмотрим на выражения (6.3.29) – (6.3.30). Из данных формул можно видеть, что коэффициенты корреляционной функции выходного сигнала искусственного нейрона, принадлежащего слою p искусственной нейронной сети, являются вложенными функциями коэффициентов предыдущих слоёв, причём число уровней вложенности равно номеру слоя.

Еще один факт, который следует из формул (6.3.29) – (6.3.30), заключается в том, что с ростом номера слоя увеличивается количество степеней коэффициента $r^{3^k |n|}$, $k = \overline{0, N_p}$, а вместе с этим и число компонент сигнала, проходящего через искусственную нейронную сеть и обусловленных флуктуациями весовых векторов в искусственных нейронах каждого слоя сети.

Прохождение сигналом очередного слоя искусственных нейронов множит «флуктуационные» слагаемые в корреляционной функции выходного сигнала, а они в свою очередь после прохождения следующего слоя плодят новые «флуктуационные» слагаемые, и число новых компонент накапливается по закону, описанному формулой (6.3.30). Чем крупнее искусственная нейронная сеть, т.е. чем больше в ней слоев, тем большие искажения претерпевает проходящий через неё сигнал за счёт влияния флуктуаций настраиваемых весовых коэффициентов, статистически связанных с вектором входных сигналов.

Можно утверждать, что прохождение сигналом через искусственную нейронную сеть, настраивающуюся по алгоритму Хэбба, приводит к уширению спектра выделяемого сигнала.

Конкретный вид корреляционной функции выходного сигнала искусственного нейрона произвольного слоя p ИНС может быть получен путём p -кратного повторения коэффициентов соответствующей корреляционной функции, записанной с учётом флуктуаций весового вектора, первого слоя сети. Однако в силу своей громоздкости данные формулы не приводятся в данном разделе.

Для запросов практики очень часто важно знать вид не только корреляционной функции, но также и мощности выходных сигналов различных слоёв искусственной нейронной сети. Соответствующие результаты приведены в следующем разделе.

МОЩНОСТЬ ВЫХОДНЫХ СИГНАЛОВ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ, НАСТРАИВАЮЩЕЙСЯ ПО АЛГОРИТМУ ХЭББА.

Выражение для мощности выходного сигнала искусственного нейрона, настраивающегося по алгоритму Хэбба с учётом флуктуаций весовых коэффициентов имеет вид [137]:

$$\begin{aligned} \langle |Z|^2 \rangle_{CT} = & \langle |Z|^2 \rangle_0 \times \left\{ 1 + \mu \frac{2}{1-r} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx}) + \mu^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx}) \right\} + \\ & + (\langle |Z|^2 \rangle_0)^2 \mu^2 \frac{1-r^2-r^4}{(1-r^2)^2} Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx}) + (\langle |Z|^2 \rangle_0)^3 \mu^2 \frac{2r^2-r^4}{(1-r^2)^2} \end{aligned} \quad (6.3.31)$$

Здесь

$$\langle |Z|^2 \rangle_0 = \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{CT} \quad (6.3.32)$$

- мощность выходного сигнала искусственного нейрона при постоянном стационарном весовом векторе \vec{W}_{CT} .

Из выражения (6.3.31) можно видеть, что мощность на выходе искусственного нейрона, полученная при учёте флуктуаций весового вектора, зависит от мощности при постоянном стационарном весовом векторе, взятой в первой, второй и третьей степенях. Полученное выражение не противоречит балансу размерностей, поскольку размерность $Sp(\vec{W}_{CT} \vec{W}_{CT}^H \mathbf{R}_{xx})$ есть размерность мощности, а размерность коэффициента адаптации $[\mu] = 1/[\text{мощность}]$. Это приводит к тому, что и левая, и правая части формулы (6.3.31) имеют размерность мощности.

Выражение (6.3.31) может быть записано в ином виде, т.е. через коэффициенты A и C , которые использовались для представления корреляционной функции выходного сигнала искусственного нейрона. Таким образом, положив $n = 0$ в выра-

жении для корреляционной функции (6.3.3), получаем следующий вид выходной мощности искусственного нейрона, принадлежащего первому слою искусственной нейронной сети, с учётом флуктуаций весового вектора:

$$\langle |Z|^2 \rangle_{1CT} = A + C, \quad (6.3.33)$$

где коэффициенты A и C определены формулами (6.3.4) и (6.3.5).

Поступая аналогичным образом, т.е. приравняв нулю дискретное время n в формуле (6.3.8) получаем мощность на выходе искусственного нейрона, принадлежащего второму слою искусственной нейронной сети $\langle |Z|^2 \rangle_{2CT}$ при учёте флуктуаций весового вектора:

$$\langle |Z|^2 \rangle_{2CT} = A_1 + C_1 + D_1. \quad (6.3.34)$$

Мощность на выходе третьего слоя искусственной нейронной сети описывается выражением:

$$\langle |Z|^2 \rangle_{3CT} = A_2 + C_2 + D_2 + E_2 + F_2. \quad (6.3.35)$$

Коэффициенты A_{1-2} , C_{1-2} , D_{1-2} , E_2 и F_2 приведены в формулах (6.3.9), (6.3.14), (6.3.10), (6.3.15), (6.3.11), (6.3.16) – (6.3.18).

Из выражений (6.3.33) – (6.3.35) можно видеть, что выходная мощность искусственного нейрона того или иного слоя искусственной нейронной сети представляет собой сумму коэффициентов при степенях $r^{|n|}$ соответствующих корреляционных функций.

Таким образом, для произвольного слоя p можно записать следующее выражение для мощности выходного сигнала с учётом флуктуаций весового вектора:

$$\langle |Z|^2 \rangle_{pCT} = \sum_{i=1}^{N_p'} M_{pi}. \quad (6.3.36)$$

Из выражения (6.3.36) можно видеть, что по мере прохождения через искусственную нейронную сеть мощность на выходе произвольного слоя p определяется суммой коэффициентов, входящих в соответствующую корреляционную функцию выходного сигнала данного слоя.

Сравним формулу (6.3.36) с аналогичным выражением для мощности выходного сигнала искусственного нейрона, принадлежащего слою p ИНС, записанным без учёта флуктуаций весового вектора:

$$\langle |Z|^2 \rangle_{p0} = M_{p1}. \quad (6.3.37)$$

Сравнение выражений (6.3.36) и (6.3.37) показывает, что флуктуации весового вектора приводят к появлению $N_p - 1$ дополнительных слагаемых, искажающих вид выходного сигнала. По мере прохождения сигнала по искусственной нейронной сети число таких слагаемых возрастает, и искажения увеличиваются. Вновь возникающие «флуктуационные» слагаемые, как можно видеть из формул (6.3.3) – (6.3.5), (6.3.8) – (6.3.11), (6.3.13) – (6.3.18) приведённых выше в данной статье, имеют по μ как первый, так и второй порядок малости, причём слагаемые второго порядка малости из-за наличия в них разных знаков могут как увеличивать выходную мощность, так и уменьшать её.

Перепишем выражение (6.3.37) в виде, учитывающем характеристики всех предыдущих $p - 1$ слоёв искусственной нейронной сети:

$$\langle |Z|^2 \rangle_{p0} = \prod_{i=1}^p \langle |Z|^2 \rangle_{i0}, \quad (6.3.38)$$

где $\langle |Z|^2 \rangle_{i0} = \vec{W}_{iCT}^H \mathbf{R}_i \vec{W}_{iCT}$ - выходная мощность искусственного нейрона, принадлежащего i - ому слою ИНС, при постоянном стационарном весовом векторе \vec{W}_{iCT} и корреляционной матрице входных сигналов \mathbf{R}_i данного нейрона.

Из формулы (6.3.38) можно видеть, что в случае, когда флуктуации весовых коэффициентов не учитываются, выходная мощность произвольного слоя p искусственной нейронной сети представляет собой произведение мощностей выходных сигналов предыдущих $p - 1$ слоёв данной нейронной сети.

Учёт флуктуаций весовых коэффициентов приводит к тому, что выходная мощность искусственной нейронной сети в общем случае может быть как больше, так и меньше мощности, полученной при постоянном стационарном весовом векторе. Иными словами, в ИНС, настраиваемой по алгоритму Хэбба, из-за наличия флуктуаций весовых коэффициентов может иметь место как эффект рассогласования [17], так и эффект «перекомпенсации» [49,65,107,115].

Таким образом, в данном разделе были рассмотрены статистические характеристики искусственной нейронной сети, настраиваемой по алгоритму Хэбба, с учётом флуктуаций настраиваемых весовых коэффициентов. Полученные в работе результаты позволяют утверждать, что флуктуации вносят искажения в сигнал, проходящий через искусственную нейронную сеть, и с возрастанием номера слоя влияние флуктуаций весовых коэффициентов становится всё большим, что приводит к

снижению качества выделения полезного сигнала на фоне помех с помощью искусственной нейронной сети.

РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.

Моделировалась искусственная нейронная сеть, настраиваемая по алгоритму Хэбба – классическому алгоритму, используемому в искусственных нейронных сетях для решения задач распознавания образов. Искусственная нейронная сеть содержала $M = 3$ слоя, в каждом из которых было по $N_1 = 7$ искусственных нейронов. Каждый искусственный нейрон представлял собой адаптивный линейный сумматор с $N = 7$ входными элементами.

На каждый искусственный нейрон входного слоя сети подавалась одна и та же помеховая обстановка – полезный сигнал и две помехи, представленные в виде плоских волн. Наличие в помеховой обстановке двух помех обусловлено спецификой функционирования ИНС с алгоритмом Хэбба – каждый слой выделяет свой сигнал. Первый слой выделяет самый мощный сигнал, второй слой – средний по мощности сигнал и, наконец, третий слой выделяет самый слабый сигнал. Наличие в структуре сети трех слоев было необходимо, чтобы соответствовать структуре сетей с дискретным градиентным и быстрым рекуррентным алгоритмами и определило выбор трех сигналов для ИНС с алгоритмом Хэбба. Сигнал с самой низкой мощностью (0.01 относительно самого мощного сигнала) приходил с направления, нормального к плоскости каждого искусственного нейрона входного слоя ИНС. Средний по мощности сигнал (0.5 относительно самого мощного сигнала) приходил под углом 60° относительно нормали, проведенной к плоскости искусственных нейронов входного слоя сети. Самый мощный сигнал (его мощность была принята равной 1) приходил с направления, равного 45° относительно нормали, проведенной к плоскости искусственных нейронов входного слоя сети. В каждом искусственном нейроне присутствовал также собственный шум, мощность которого была 0.01 относительно мощности самого мощного сигнала.

При моделировании вычислялся коэффициент рассогласования между выходной мощностью, найденной при постоянном стационарном весовом векторе, и «флуктуационной» частью выходной мощности. В таблице 6.11 представлены значения коэффициента рассогласования M в зависимости от величины коэффициента адаптации μ в случае прихода на искусственную нейронную сеть входных сигналов с некоррелированными отсчетами $r = 0$.

Таблица 6.11

μ	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}
$M_I^T, \%$	0.1613	0.3234	1.6446	3.3583
$M_I^{\mathcal{E}}, \%$	0.1425	0.4163	1.5162	3.2816
$M_{II}^T, \%$	0.0161	0.0647	1.6475	6.7648
$M_{II}^{\mathcal{E}}, \%$	0.0541	0.0154	1.8337	6.162
$M_{III}^T, \%$	0.0002	0.0042	2.7094	45.4363
$M_{III}^{\mathcal{E}}, \%$	0.0039	0.0358	2.5981	0.06363

Из таблицы 6.11 можно видеть, что во всех трех слоях искусственной нейронной сети, настраиваемой по алгоритму Хэбба, имеют место флуктуации весовых коэффициентов. Согласие между теоретическими результатами и результатами компьютерного моделирования уменьшается по мере роста номера слоя и величины коэффициента адаптации. Алгоритм Хэбба имеет третью степень по весовому вектору, и вычисление флуктуаций для каждого последующего слоя приводит к добавлению новых «флуктуационных» слагаемых. В этих условиях первое борновское приближение от слоя к слою становится все менее корректным. Обращает на себя внимание также факт более быстрого роста коэффициента рассогласования в третьем слое ИНС по мере роста коэффициента адаптации μ . Это свидетельствует о том, что при увеличении размера сети (числа ее слоев) вклад флуктуаций в выделяемый сетью сигнал будет быстро нарастать и приводить к его искажению.

Таким образом, флуктуации весовых коэффициентов в искусственной нейронной сети, настраиваемой по алгоритму Хэбба – классическому алгоритму настройки искусственных нейронных сетей, приводят к искажениям выходного сигнала сети. Данные искажения тем больше, чем больше слоев в искусственной нейронной сети. Вклад каждого последующего слоя искусственной нейронной сети в искажения выделяемого сетью сигнала только увеличивается от каждого предыдущего слоя к последующему.

Кроме того, необходимо отметить, что в выражениях корреляционных функций выходных сигналов слоев искусственной нейронной сети возрастает вклад быстро спадающих по дискретному времени компонент. Это означает, что из-за флуктуаций настраиваемых весовых коэффициентов происходит уширение спектральной плотности мощности выходного сигнала произвольного искусственного нейрона каждого последующего слоя сети по сравнению с предыдущим слоем ИНС.

Нужно также подчеркнуть, что при высоких значениях коэффициента адаптации в алгоритме Хэбба, по которому настраивается рассмотренная в данном разделе искусственная нейронная сеть, имеет место высокий уровень флуктуаций весового вектора. Это может существенно ухудшать качество настройки искусственной нейронной сети, настраиваемой по алгоритму Хэбба, и искажать выделяемый искусственной нейронной сетью полезный сигнал.

6.4. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ С УЧЕТОМ ФЛУКТУАЦИЙ ВЕСОВОГО ВЕКТОРА - ПОТЕРИ В ВЫХОДНОМ ОТНОШЕНИИ СИГНАЛ / ШУМ.

Рассмотрим в качестве одного из возможных показателей эффективности работы искусственной нейронной сети потери в выходном отношении сигнал / шум i -ого слоя ИНС, вызванные флуктуациями весовых коэффициентов:

$$\tilde{\eta}_i = 10 \cdot \lg \left(\frac{SNR_{fl}^i}{SNR_{opt}^i} \right) \quad (6.4.1)$$

Здесь SNR_{fl}^i - выходное отношение сигнал / шум i -ого слоя ИНС, найденное с учетом флуктуаций весового вектора; SNR_{opt}^i - выходное отношение сигнал / шум i -ого слоя искусственной нейронной сети, найденное без учета флуктуаций весового вектора. Необходимо отметить, что в данных формулах i является не степенью, а обозначением номера слоя искусственной нейронной сети, для этого используются римские цифры.

ИНС с дискретным градиентным алгоритмом настройки.

Используя формулу выходной мощности ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по дискретному градиентному алгоритму с ограничениями из главы 4 (4.3.7), и учитывая, что этой же формулой описывается выходная мощность произвольного искусственного нейрона первого слоя искусственной нейронной сети, получаем следующее выражение потерь в выходном отношении сигнал / шум первого слоя ИНС, вызванное флуктуациями весовых коэффициентов:

$$\tilde{\eta}_{grl} = 10 \cdot \lg \left(\frac{a_1^2 \cdot \vec{W}_{CT1}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{с.ш.}) \vec{W}_{CT1}}{A_{grf}^I} \right) \quad (6.4.2)$$

Здесь выражение для остаточной мощности помехи A_{grf}^I на выходе произвольного искусственного нейрона первого слоя ИНС с дискретным градиентным алгоритмом настройки имеет вид:

$$A_{grf}^I = \langle |Z|^2 \rangle_{CT}^I - \langle |Z|^2 \rangle_S^I = a_1^2 \cdot \vec{W}_{CT1}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT1} + a_1^2 \cdot \vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT1} \times$$

$$\times \left\{ \left| -\frac{2\mu a_1}{1-r^2} Sp(\mathbf{PR}_{XX}) \right| + \left| \mu^2 a_1^2 \frac{1-2r^2}{(1-r^2)^2} Sp(\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{PR}_{XX}) \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \mu^2 a_1^2 \frac{3-2r^2}{(1-r^2)^2} \frac{\vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{XX} \mathbf{PR}_{XX} \mathbf{PR}_{XX} \vec{W}_{CT1}}{\vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT1}} \right| + \left| \mu^2 a_1^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2(\mathbf{PR}_{XX}) \right| \right\}. \quad (6.4.3)$$

Чтобы записать выражение потерь в выходном отношении сигнал / шум второго слоя искусственной нейронной сети, вызванное флуктуациями весовых коэффициентов, необходимо учесть, что корреляционная матрица входных сигналов второго слоя ИНС имеет вид:

$$\mathbf{R}_{XX}^H = \langle \vec{X}_H^* \vec{X}_H^T \rangle = \langle F^* [\vec{W}_{CT1}^T \vec{X}] \vec{1} \cdot F [\vec{W}_{CT1}^T \vec{X}] \vec{1}^T \rangle =$$

$$= \langle F^* [\vec{W}_{CT1}^T \vec{X}] \cdot F [\vec{W}_{CT1}^T \vec{X}] \rangle \vec{1} \cdot \vec{1}^T \cong a_1^2 \vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT1} \cdot \mathbf{E} =$$

$$= a_1^2 \vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{SS} \vec{W}_{CT1} \cdot \mathbf{E} + a_1^2 \vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{\xi\xi} \vec{W}_{CT1} \cdot \mathbf{E} + a_1^2 \vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{c.u.} \vec{W}_{CT1} \cdot \mathbf{E} =$$

$$= \mathbf{R}_{SS}^H + \mathbf{R}_{\xi\xi}^H + \mathbf{R}_{c.u.}^H. \quad (6.4.4)$$

Необходимо также учесть, что данное выражение записано для случая приема всеми искусственными нейронами первого слоя ИНС одних и тех же сигналов. Тогда выражение потерь в выходном отношении сигнал / шум второго слоя искусственной нейронной сети имеет вид:

$$\tilde{\eta}_{grH} = 10 \cdot \lg \left(\frac{a_1^4 \cdot \vec{W}_{CT1}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT1}}{A_{grf}^H} \right) \quad (6.4.5)$$

Здесь:

$$A_{grf}^H = \langle |Z|^2 \rangle_{CT}^H - \langle |Z|^2 \rangle_S^H = a_1^4 \cdot \vec{W}_{CT1}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT1} + a_1^4 \cdot \vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT1} \times$$

$$\times \left\{ \left| -\frac{2\mu a_1}{1-r^2} Sp(\mathbf{PE}) \right| + \left| \mu^2 a_1^2 \frac{1-2r^2}{(1-r^2)^2} Sp(\mathbf{PEPE}) \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \mu^2 \frac{3-2r^2}{(1-r^2)^2} \cdot \frac{\vec{W}_{CT2}^H \mathbf{EPEPE} \vec{W}_{CT2}}{\vec{W}_{CT2}^H \mathbf{E} \vec{W}_{CT2} \cdot \vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT1}} \right| + \left| \mu^2 a_1^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2(\mathbf{PE}) \right| \right\}. \quad (6.4.6)$$

Необходимо отметить, что произведение проекционной матрицы \mathbf{P} на матрицу \mathbf{E} , все элементы которой являются единицами, равно нулю $\mathbf{PE} = \mathbf{0}$. Тогда для случая приема всеми искусственными нейронами входного слоя искусственной нейронной сети одних и тех же сигналов:

$$A_{grf}^H = \langle |Z|^2 \rangle_{CT}^H - \langle |Z|^2 \rangle_S^H = a_1^4 \cdot \vec{W}_{CT1}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT1}. \quad (6.4.7)$$

Из формулы (6.4.7) следует, что потери в выходном отношении сигнал / шум второго слоя ИНС, настраиваемой по дискретному градиентному алгоритму, а также по-

следующих слоёв сети, вызванные флуктуациями весовых коэффициентов, $\tilde{\eta}_{grII} = 10 \cdot \lg 1 = 0$ - отсутствуют.

ИНС с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки.

Чтобы получить выражение потерь в выходном отношении сигнал / шум искусственной нейронной сети с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки, используем формулу выходной мощности ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраивающейся по данному алгоритму, из главы 5 (5.2.14). Учтём, что этой же формулой описывается выходная мощность произвольного искусственного нейрона первого слоя ИНС. Тогда получим следующее выражение потерь в выходном отношении сигнал / шум первого слоя ИНС, вызванное флуктуациями весовых коэффициентов:

$$\tilde{\eta}_{smif} = 10 \cdot \lg \left(\frac{a_1^2 \cdot \vec{W}_{CT1}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT1}}{A_{smif}^I} \right) \quad (6.4.8)$$

Здесь выражение для остаточной мощности помехи A_{smif}^I на выходе произвольного искусственного нейрона первого слоя ИНС с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки имеет вид:

$$\begin{aligned} A_{smif}^I = & \left\langle |Z|^2 \right\rangle_{CT}^I - \left\langle |Z|^2 \right\rangle_S^I = a_1^2 \cdot \vec{W}_{CT1}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT1} + \\ & + a_1^2 \cdot \vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT1} \times \\ & \left\{ \begin{aligned} & \left| -\frac{2\mu a_1}{1-r^2} Sp((\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX}) \right| + \\ & + \left| \mu^2 a_1^2 \frac{1-2r^2}{(1-r^2)^2} Sp((\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX} (\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX}) \right| + \\ & + \left| \mu^2 a_1^2 \frac{3-2r^2}{(1-r^2)^2} \frac{\vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{XX} (\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX} (\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX} \vec{W}_{CT1}}{\vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT1}} \right| + \\ & + \left| \mu^2 a_1^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2((\mathbf{PR}_{XX} \mathbf{P})^+ \mathbf{PR}_{XX}) \right| \end{aligned} \right\}. \quad (6.4.9) \end{aligned}$$

Чтобы записать выражение потерь в выходном отношении сигнал / шум второго слоя искусственной нейронной сети, вызванное флуктуациями весовых коэффициентов, необходимо учесть, что корреляционная матрица входных сигналов второго слоя ИНС имеет вид, описанный формулой (6.4.4). Тогда выражение потерь в выходном отношении сигнал / шум второго слоя искусственной нейронной сети, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму, в случае приема всеми искусственными нейронами первого слоя ИНС одних и тех же сигналов имеет вид:

$$\tilde{\eta}_{smiII} = 10 \cdot \lg \left(\frac{a_1^4 \cdot \vec{W}_{CT1}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT1}}{A_{smif}^H} \right) \quad (6.4.10)$$

Здесь:

$$A_{smif}^H = \left\langle |Z|^2 \right\rangle_{CT}^H - \left\langle |Z|^2 \right\rangle_S^H = a_1^4 \cdot \vec{W}_{CT1}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT1} + a_1^4 \cdot \vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT1} \times$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| -\frac{2\mu a_1}{1-r^2} Sp((\mathbf{PEP})^+ \mathbf{PE}) \right| + \\ + \left| \mu^2 a_1^2 \frac{1-2r^2}{(1-r^2)^2} Sp((\mathbf{PEP})^+ \mathbf{PE}(\mathbf{PEP})^+ \mathbf{PE}) \right| + \\ \times \left\{ \begin{array}{l} + \left| \mu^2 \frac{3-2r^2}{(1-r^2)^2} \cdot \frac{\vec{W}_{CT2}^H \mathbf{E}(\mathbf{PEP})^+ \mathbf{PE}(\mathbf{PEP})^+ \mathbf{PE} \vec{W}_{CT2}}{\vec{W}_{CT2}^H \mathbf{E} \vec{W}_{CT2} \cdot \vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT1}} \right| + \\ + \left| \mu^2 a_1^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2((\mathbf{PEP})^+ \mathbf{PE}) \right| \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (6.4.11)$$

Необходимо отметить, что для случая приема всеми искусственными нейронами входного слоя искусственной нейронной сети одних и тех же сигналов:

$$A_{smif}^H = \left\langle |Z|^2 \right\rangle_{CT}^H - \left\langle |Z|^2 \right\rangle_S^H = a_1^4 \cdot \vec{W}_{CT1}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT1} \quad (6.4.12)$$

Из формулы (6.4.12) следует, что потери в выходном отношении сигнал / шум второго слоя ИНС, настраивающейся по быстрому рекуррентному алгоритму, а также последующих слоёв сети, вызванные флуктуациями весовых коэффициентов, $\tilde{\eta}_{grII} = 10 \cdot \lg 1 = 0$ - отсутствуют.

ИНС, настраивающаяся по алгоритму Хэбба.

Чтобы получить выражение потерь в выходном отношении сигнал / шум искусственной нейронной сети с алгоритмом Хэбба, используем формулу выходной мощности ААР, настраивающейся по данному алгоритму, из главы 3 (3.3.5). Учтём, что этой же формулой описывается выходная мощность произвольного искусственного нейрона первого слоя ИНС. Тогда получим следующее выражение потерь в выходном отношении сигнал / шум первого слоя ИНС с алгоритмом Хэбба, вызванное флуктуациями весовых коэффициентов:

$$\tilde{\eta}_{HebbI} = 10 \cdot \lg \left(\frac{\vec{W}_{CT1}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT1}}{A_{Hebb}^I} \right) \quad (6.4.13)$$

Здесь выражение для остаточной мощности помехи A_{Hebb}^I на выходе произвольного искусственного нейрона первого слоя ИНС с алгоритмом Хэбба имеет вид:

$$\begin{aligned}
A_{HebbI} = & \langle |Z|^2 \rangle_{CT}^I - \langle |y|^2 \rangle_S^I = \vec{W}_{CT1}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT1} + \\
& \langle |Z|^2 \rangle_0^I \times \left\{ \frac{2\mu}{1-r} Sp(\vec{W}_{CT1}^* \vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{XX}) \right\} + \\
& + \left| \mu^2 \frac{1+r^2}{1-r^2} Sp(\vec{W}_{CT1}^* \vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{XX}) - \langle |Z|^2 \rangle_0^I \right| + \\
& + \left| \mu^2 \frac{3r^2 - r^4}{(1-r^2)^2} (\langle |Z|^2 \rangle_0^I)^2 \right| + \left| \mu^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} Sp^2(\vec{W}_{CT1}^* \vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{XX}) \right\} + \\
& + \left| -\mu^2 \frac{r^2}{(1-r^2)^2} (\langle |Z|^2 \rangle_0^I)^2 \times \{ Sp(\vec{W}_{CT1}^* \vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{XX}) + \langle |Z|^2 \rangle_0^I \} \right|
\end{aligned} \quad (6.4.14)$$

Чтобы записать выражение потерь в выходном отношении сигнал / шум второго слоя искусственной нейронной сети, вызванное флуктуациями весовых коэффициентов, необходимо учесть, что корреляционная матрица входных сигналов второго слоя ИНС имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{XX}^H = & \langle \vec{X}_{II}^* \vec{X}_{II}^T \rangle = \langle [\vec{W}_{CT1}^T \vec{X}]^* \vec{1} \cdot [\vec{W}_{CT1}^T \vec{X}] \vec{1}^T \rangle = \\
= & \langle [\vec{W}_{CT1}^T \vec{X}]^* \cdot [\vec{W}_{CT1}^T \vec{X}] \rangle \vec{1} \cdot \vec{1}^T = \vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W}_{CT1} \cdot \mathbf{E} = \\
= & \vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{SS} \vec{W}_{CT1} \cdot \mathbf{E} + \vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{\xi\xi} \vec{W}_{CT1} \cdot \mathbf{E} + \vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{c.u.} \vec{W}_{CT1} \cdot \mathbf{E} = \\
= & \mathbf{R}_{SS}^H + \mathbf{R}_{\xi\xi}^H + \mathbf{R}_{c.u.}^H
\end{aligned} \quad (6.4.15)$$

Тогда выражение потерь в выходном отношении сигнал / шум второго слоя искусственной нейронной сети, настраиваемой по алгоритму Хэбба, в случае приема всеми искусственными нейронами первого слоя ИНС одних и тех же сигналов имеет вид:

$$\tilde{\eta}_{HebbII} = 10 \cdot \lg \left(\frac{\vec{W}_{CT2}^H \mathbf{E} \vec{W}_{CT2} \cdot \vec{W}_{CT1}^H (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \mathbf{R}_{c.u.}) \vec{W}_{CT1}}{|A_1| + |C_1| + |D_1| - \vec{W}_{CT2}^H \mathbf{E} \vec{W}_{CT2} \cdot \vec{W}_{CT1}^H \mathbf{R}_{SS} \vec{W}_{CT1}} \right) \quad (6.4.16)$$

Здесь коэффициенты A_1 , C_1 , D_1 определяются формулами (6.3.9), (6.3.10) и (6.3.11).

Результаты численного моделирования.

Моделировалась двухслойная искусственная нейронная сеть, каждый искусственный нейрон которой имел 7 входных элементов ($N=7$). Расстояние между элементами было равно половине длины волны ($d = \lambda / 2$). Графики построены для ИНС, содержащих и не содержащих нелинейную функцию в цепи корреляционной обратной связи каждого искусственного нейрона. Эти искусственные нейронные сети настраивались по дискретному градиентному и быстрому рекуррентному алгоритму с однократными линейными ограничениями ($L=1$) на диаграмму направленно-

сти и алгоритму Хэбба. В качестве нелинейной функции была выбрана функция-

$$\text{сигмоид } F[y] = \frac{1}{1 + \exp\{-a \cdot y\}}, \quad a = 0.5.$$

Предполагалось, что на адаптивные антенные решетки поступают статистически независимые два сигнала $r_1 = r_2 = 0.5$. Комплексные амплитуды входных сигналов формировались из двух независимых источников гауссовского “белого” шума. Углы прихода сигналов были равны соответственно $\theta_1 = 45^\circ$, $\theta_2 = 0^\circ$, мощность первого сигнала была в 100 раз больше мощности второго сигнала. В каждом элементе ААР присутствовал также некоррелированный собственный шум, мощность которого составляла 0.1 мощности второго сигнала. Необходимо отметить, что ИНС, настраиваемая по алгоритму Хэбба, выделяет самый мощный сигнал и подавляет все остальные, имеющие меньшую мощность. Таким образом, искусственная нейронная сеть с алгоритмом Хэбба выделяла сигнал, приходящий с направления $\theta_1 = 45^\circ$.

На рисунке 6.2 представлены зависимости потерь из-за флуктуаций весовых коэффициентов в выходном отношении сигнал / шум двухслойных искусственных нейронных сетей, каждый искусственный нейрон которых содержал нелинейную функцию в цепи корреляционной обратной связи, от величины коэффициента адаптации μ . Искусственные нейронные сети настраивались по дискретному градиентному (gr) и быстрому рекуррентному алгоритмам (smi).

Из рисунка можно видеть, что имеют место потери из-за флуктуаций весового вектора в выходном отношении сигнал / шум первого слоя искусственных нейронных сетей с обоими алгоритмами настройки. Во втором слое обеих искусственных нейронных сетей потери отсутствуют. Из рисунка также следует, что по мере увеличения коэффициента адаптации μ растут потери в первом слое ИНС, вызванные наличием флуктуаций весового вектора. В искусственной нейронной сети с дискретным градиентным алгоритмом настройки эти потери больше, чем в ИНС, настраиваемой по быстрому рекуррентному алгоритму.

На рисунке 6.3 представлена зависимость потерь из-за флуктуаций весового вектора в выходном отношении сигнал / шум двухслойной искусственной нейронной сети, настраиваемой по алгоритму Хэбба, от величины коэффициента адаптации μ .

Из рисунка можно видеть, что по мере увеличения коэффициента адаптации μ растут потери в выходном отношении сигнал / шум как в первом, так и во втором

слое искусственной нейронной сети, настраиваемой по алгоритму Хэбба. Из рисунка также следует, что потери в выходном отношении сигнал / шум больше во втором слое сети. Таким образом, по мере продвижения выделяемого сетью сигнала по искусственной нейронной сети растут потери из-за флуктуаций весового вектора в выходном отношении сигнал / шум каждого последующего слоя сети. Иными словами с увеличением количества слоев в искусственной нейронной сети, настраиваемой по алгоритму Хэбба, падает качество выделения полезного сигнала на фоне помех.

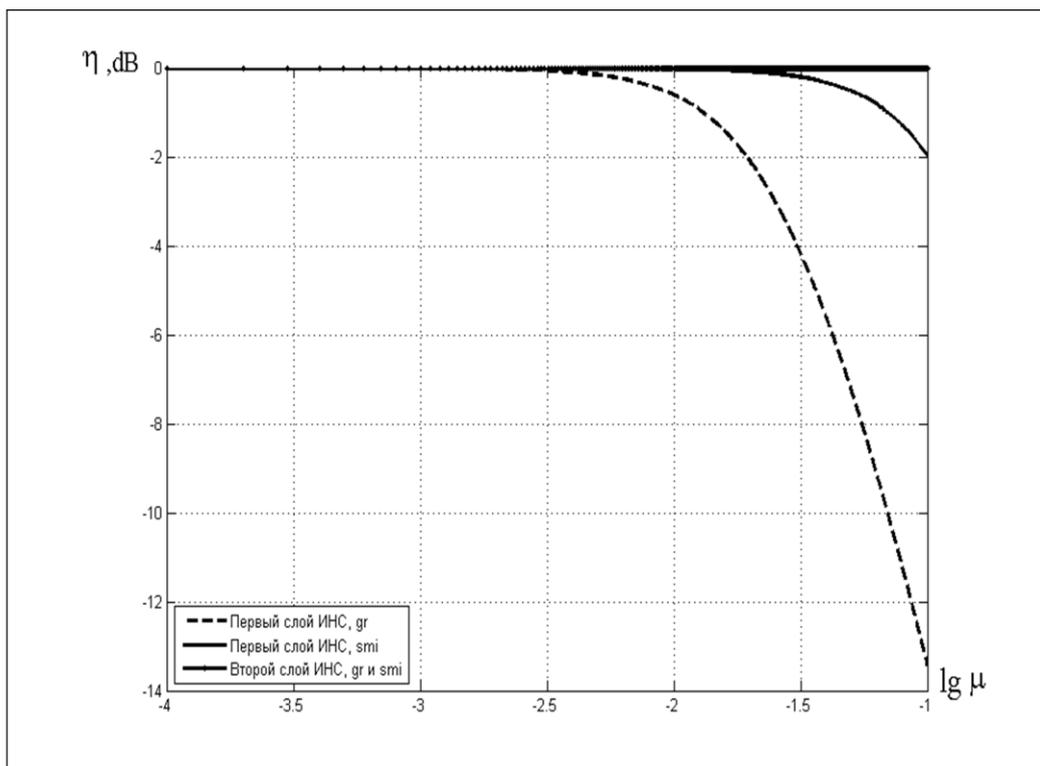


Рис. 6.2. Потери η в выходном отношении сигнал / шум в зависимости от величины коэффициента адаптации μ . Искусственная нейронная сеть, настраиваемая по дискретному градиентному (gr) и быстрому рекуррентному (smi) алгоритму.

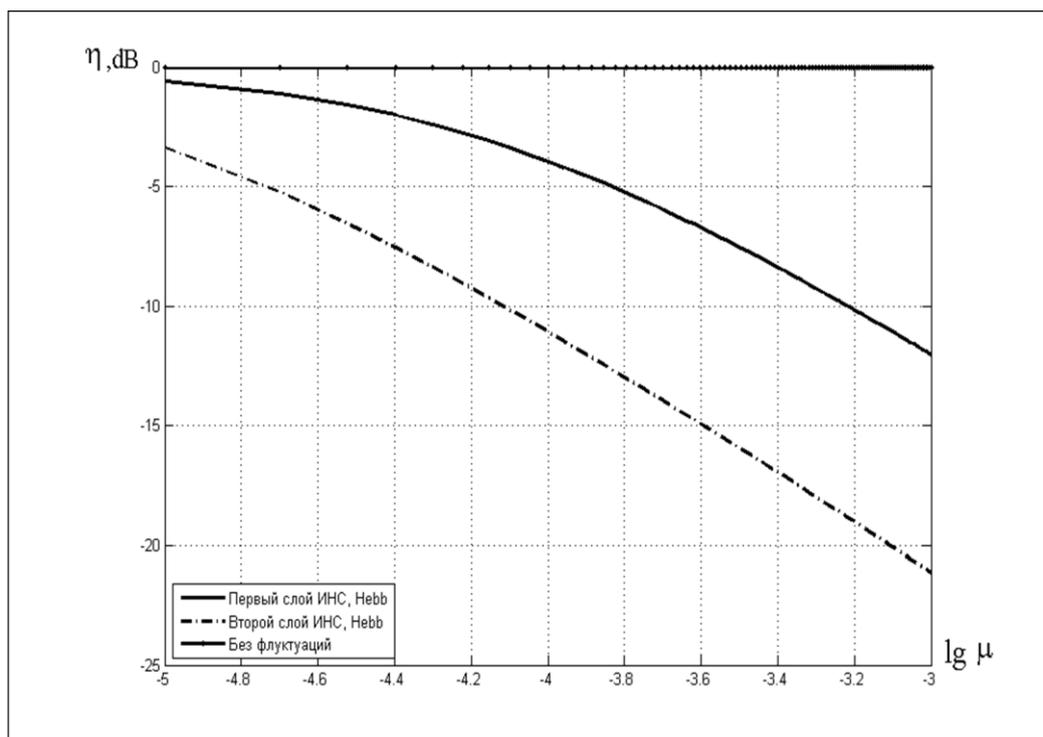


Рис. 6.3. Потери η в выходном отношении сигнал / шум в зависимости от величины коэффициента адаптации μ . Искусственная нейронная сеть, настраиваемая по алгоритму Хебба.

6.5. ВЫВОДЫ.

1. Статистический анализ влияния флуктуаций весовых коэффициентов на характеристики многослойных полносвязных искусственных нейронных сетей, настраивающихся по дискретному градиентному, быстрому рекуррентному алгоритмам и алгоритму Хэбба необходимо проводить методами теории возмущений. Данные методы позволяют учесть негауссовскую статистическую зависимость между весовым вектором и вектором входных сигналов.
2. Для успешного применения методов теории возмущений к анализу искусственных нейронных сетей необходимо на основе имеющихся статистических характеристик отдельного искусственного нейрона, найденных с учётом флуктуаций весового вектора, получить рекуррентные соотношения этих же характеристик для каждого слоя искусственной нейронной сети.
3. Дискретный градиентный алгоритм и алгоритм рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов – классические алгоритмы настройки адаптивных антенных решёток, обобщенные для использования при работе искусственных нейронных сетей, показали свою эффективность в компьютерном моделировании ИНС и могут быть применены как алгоритмы настройки искусственных нейронных сетей.
4. Флуктуации весовых коэффициентов вносят искажения в статистические характеристики искусственных нейронных сетей, настраивающихся по дискретному градиентному и быстрому рекуррентному алгоритмам. При увеличении числа слоёв ИНС растёт количество «флуктуационных» множителей в выражении выходной мощности каждого последующего слоя сети. При задании одинаковых входных сигналов на все нейроны входного слоя ИНС искажение флуктуациями весовых коэффициентов наблюдается только для выходного сигнала первого слоя искусственной нейронной сети. В последующих слоях флуктуации отсутствуют.
5. Учёт флуктуаций весовых коэффициентов в искусственной нейронной сети, настраиваемой по алгоритму Хэбба, приводит к тому, что выходная мощность искусственной нейронной сети, включающая полезный сигнал, остаточную мощность помехи и собственный шум, в общем случае может быть как больше, так и меньше мощности полезного сигнала, соответствующего стационарному весовому вектору. Искажения выходных сигналов слоев сети за счет флуктуаций весовых коэффициентов наблюдается от слоя к слою по

всем слоям ИНС, причем искажения, вносимые флуктуациями, растут по мере увеличения номера слоя сети.

6. Потери в выходном отношении сигнал / шум, связанные с флуктуациями весового вектора, в первом слое искусственной нейронной сети с дискретным градиентным алгоритмом настройки больше, чем в первом слое ИНС, настраиваемой по быстрому рекуррентному алгоритму. Во втором и последующих слоях данных искусственных нейронных сетей потери отсутствуют при условии поступления на все искусственные нейроны первого слоя одних и тех же входных сигналов.
7. В искусственной нейронной сети, настраиваемой по алгоритму Хэбба, потери в выходном отношении сигнал / шум, вызванные флуктуациями весового вектора, присутствуют во всех слоях ИНС. В каждом последующем слое потери только нарастают, что приводит к ухудшению качества выделения полезного сигнала на фоне помех искусственной нейронной сетью, настраиваемой по алгоритму Хэбба.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Разработана система методов анализа статистических характеристик узкополосных и широкополосных многоканальных адаптивных систем различной структуры:

- адаптивных антенных решеток без нелинейной функции в цепи корреляционной обратной связи,
- адаптивных антенных решеток с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи,
- и многослойных полносвязных искусственных нейронных сетей.

Разработанный в диссертации математический аппарат основан на методах теории возмущений и позволяет получать статистические характеристики адаптивных антенных решёток и искусственных нейронных сетей с учётом флуктуаций настраиваемых весовых коэффициентов.

2. Методы анализа разработаны для наиболее общего случая негауссовской статистической зависимости между вектором входных сигналов и весовым вектором.

3. Методы теории возмущений для статистического анализа адаптивных антенных решёток, предполагающих наличие нелинейной функциональной зависимости входного и выходного сигналов в цепи корреляционной обратной связи, содержат также предположение, что нелинейная функция является N раз дифференцируемой. По этой причине, помимо использования теории возмущений, при статистическом анализе таких систем также используется разложение в ряд Вольтерра нелинейной функции, содержащейся в цепи корреляционной обратной связи.

4. Для успешного применения методов теории возмущений к анализу искусственных нейронных сетей использован подход, позволяющий на основе имеющихся статистических характеристик отдельного искусственного нейрона, найденных с учётом флуктуаций весового вектора, получить рекуррентные соотношения этих же характеристик для каждого слоя искусственной нейронной сети.

5. Расчет статистических характеристик с учетом флуктуаций весового вектора был проведен в первом «борновском» приближении для адаптивных антенных решёток без нелинейной функции в цепи корреляционной обратной связи и искусственных нейронных сетей. В адаптивных антенных решётках с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи при статистическом анализе были рас-

считаны также слагаемые второго порядка малости по коэффициенту адаптации, взятые из второго приближения. Полученные результаты показали, что поправки в статистических характеристиках ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи из второго приближения имеют второй порядок малости и могут не учитываться при статистическом анализе.

6. Разработанный математический аппарат был успешно применен для анализа многоканальных адаптивных систем, настраивающихся по:

- классическим алгоритмам настройки адаптивных антенных решеток – дискретному градиентному алгоритму с многократными линейными ограничениями на диаграмму направленности и алгоритму рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов;
- классическому алгоритму настройки искусственных нейронных сетей – алгоритму Хэбба;
- новому адаптивному алгоритму - алгоритму минимизации среднего квадрата ошибки с квадратичным ограничением.

Все указанные алгоритмы были проанализированы и применены для настройки как адаптивных антенных решёток, так и искусственных нейронных сетей. Для этих целей классические антенные алгоритмы и алгоритм минимизации среднего квадрата ошибки с квадратичным ограничением были обобщены для работы в искусственной нейронной сети, а алгоритм Хэбба – для работы в адаптивной антенной решетке.

7. Мощность выходного сигнала узкополосных адаптивных антенных решёток и искусственных нейронных сетей, под влиянием флуктуаций весовых коэффициентов может изменяться, увеличиваясь при некоррелированных входных сигналах (эффект рассогласования), и, уменьшаясь при больших значениях коэффициентов автокорреляции между отсчётами входных сигналов (эффект «перекомпенсации»), по сравнению со значениями, полученными при постоянном стационарном весовом векторе.

Эффект рассогласования выходной мощности свидетельствует о том, что адаптивная система из-за флуктуаций весового вектора не может достигнуть теоретически найденного минимального значения выходной мощности. Появление эффекта «перекомпенсации» означает, что из-за наличия статистической зависимости между вектором входных сигналов и весовым вектором адаптивная система начинает, помимо помехи, подавлять полезный сигнал.

8. Сравнительный анализ показал, что флуктуации весового вектора в адаптивной антенной решётке с линейным дискретным градиентным алгоритмом

настройки изотропны во всех направлениях подпространства ограничений. В ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи и тем же алгоритмом настройки, флуктуации весового вектора неизотропны в пространстве ограничений: максимальны в угловых направлениях прихода помехи, а во всех остальных направлениях имеют, как правило, много меньшую величину (пропорциональную значению мощности собственного шума адаптивной антенной решётки).

Флуктуации весового вектора антенной решётки, предполагающей наличие нелинейной функциональной зависимости входного и выходного сигналов в цепи корреляционной обратной связи, и настраиваемой по быстрому рекуррентному алгоритму, неизотропны в пространстве весовых коэффициентов. Они равны нулю в направлении ограничений, минимальны в направлении помех, а во всех остальных направлениях имеют максимальную величину, обратно пропорциональную значению мощности собственного шума ААР.

Это означает, что поскольку в направлении ограничений флуктуации весовых коэффициентов отсутствуют, то в алгоритмах с ограничениями в направлениях ограничений сигнал принимается без искажений адаптивными антенными решётками. В направлениях, не защищённых ограничениями, характер искажений при приёме сигналов определяется флуктуационной диаграммой направленности. Максимум флуктуаций в направлении помехи означает, что помеха, приходящая с данного направления, не будет полностью компенсирована по причине наличия флуктуаций весового вектора. Конкретная величина флуктуаций в данном направлении определяет, как велика будет остаточная мощность помехи на выходе ААР, обусловленная флуктуациями весового вектора.

9. Минимальные потери за счет флуктуаций весового вектора в выходном отношении сигнал/шум адаптивных антенных решеток при равных скоростях сходимости алгоритмов наблюдаются в ААР с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, и настраиваемой по дискретному градиентному алгоритму, а максимальные - в адаптивной антенной решётке с алгоритмом Хэбба. При коэффициенте адаптации $\mu = 0.001$ они составляют соответственно -0.5 дБ и -12 дБ.

Остальные случаи занимают промежуточное положение. ААР без нелинейной функции в цепи корреляционной обратной связи и дискретным градиентным алгоритмом настройки -0.7 дБ, а также ААР с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки и нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи -1 дБ. ААР без нелинейной функции в цепи корреляционной обратной связи и быстрым рекуррентным алгоритмом настройки -2.6 дБ.

10. Учёт флуктуаций весовых коэффициентов в искусственной нейронной сети приводит к тому, что выходная мощность ИНС в общем случае может быть как больше, так и меньше мощности, полученной при постоянном стационарном весовом векторе, т.е. может иметь место как эффект рассогласования, так и эффект «перекompенсации». В искусственной нейронной сети, настраиваемой по алгоритму Хэбба, увеличение числа слоев сети увеличивает искажения, вносимые флуктуациями в работу ИНС.

Таким образом, в искусственной нейронной сети из-за флуктуаций весовых коэффициентов имеет место как остаточная (нескомпенсированная) мощность помехи на выходе, так и снижение мощности полезного сигнала на выходе (и его искажение) относительно значения его мощности, найденной при оптимальном весовом векторе. Какой именно эффект будет иметь место и его выраженность, определяется уровнем коррелированности отсчетов входных сигналов, числом слоев сети и алгоритмом настройки ИНС.

11. Потери за счет флуктуаций весовых коэффициентов в выходном отношении сигнал/шум искусственных нейронных сетей, настраиваемых по дискретному градиентному и быстрому рекуррентному алгоритмам, есть только в первых слоях ИНС, а в остальных слоях этих сетей потери отсутствуют. Это справедливо для частного случая одинаковых помеховых условий, воздействующих на каждый искусственный нейрон входного слоя искусственной нейронной сети. Для коэффициента адаптации $\mu = 5 \cdot 10^{-2}$ эти потери в первом слое сети составляют соответственно -0.5 дБ (ИНС с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки) и -7.3 дБ (ИНС с дискретным градиентным алгоритмом настройки).

В искусственной нейронной сети, настраиваемой по алгоритму Хэбба, потери за счет флуктуаций весовых коэффициентов возрастают с каждым последующим слоем ИНС. Для коэффициента адаптации $\mu = 5 \cdot 10^{-4}$ эти потери в первом слое сети составляют -9 дБ, а во втором -18 дБ.

Рекомендации по применению полученных в диссертационном исследовании результатов:

1. Радиолокация. Первичная обработка радиолокационных сигналов.

Адаптивное выделение сигнала цели на фоне помех позволяет получить за счет адаптивной пространственной фильтрации большее выходное отношение сигнал/шум, чем без использования адаптации. Это также позволяет более эффективно определять наличие цели в условиях работы радиолокатора. Учет флуктуаций весо-

вых коэффициентов позволяет оптимизировать работу адаптивной антенной решётки радиолокатора, добиваясь от нее максимальной скорости настройки при заданном уровне искажений сигнала цели на выходе антенны.

2. Радиолокация. Вторичная обработка радиолокационных сигналов.

Учет флуктуаций весовых коэффициентов при адаптивном оценивании параметров цели (координаты, скорости и ускорения) [178] позволяет минимизировать ошибки оценивания при максимально возможной для этого случая скорости работы адаптивного измерителя координаты и скорости цели.

3. Радиомониторинг [179].

В адаптивной антенной решетке радиомониторинга адаптивно оценивается частота доминирующего по мощности сигнала в первом луче антенны, а затем происходит адаптивная компенсация этого доминирующего сигнала. Далее определяется частота следующего по мощности сигнала и его компенсация и т.д. [179]. Учёт флуктуаций весового вектора в таких антеннах позволит увеличить точность нахождения частоты самого мощного сигнала при оптимальной скорости настройки адаптивной антенны.

4. Адаптивные антенные решётки, обеспечивающие спутниковую связь на движущемся транспорте – самолетах, поездах, кораблях [180].

Учет флуктуаций весовых коэффициентов в данном применении адаптивных антенных решёток улучшит качество спутниковой связи и обеспечит при этом возможную для данного качества связи скорость.

5. Адаптивные системы управления огнем.

Учет флуктуаций весовых коэффициентов в данных системах дает возможность оптимизировать скорость реагирования и уменьшить возможные ошибки систем управления огнем по обнаруженным целям.

6. Обработка зашумленных изображений искусственными нейронными сетями, в том числе данных аэрофотосъемки и медицинских изображений [82].

Учет флуктуаций весовых коэффициентов в искусственных нейронных сетях, решающих задачи фильтрации шума в изображениях, позволяет улучшить качество обработки изображений при оптимальной скорости работы искусственной нейронной сети.

7. Обработка негауссовских входных сигналов (с негауссовской плотностью вероятности) [20].

Обработку негауссовских сигналов можно проводить с помощью адаптивной антенной решётки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи

[20]. Учет флуктуаций весовых коэффициентов в таких нелинейных адаптивных системах позволяет находить оптимальный баланс между скоростью и точностью настройки при обработке негауссовских сигналов.

8. Пространственная фильтрация в условиях сложной помеховой обстановки – количества помех, превышающего число элементов адаптивной системы.

В литературе описано, что имеются перспективы использования искусственных нейронных сетей в задачах пространственной и спектральной фильтрации [81]. Выделение полезного сигнала на фоне количества помех, превышающего число степеней свободы адаптивной системы, можно проводить на основе искусственной нейронной сети, в которой компенсация дополнительных помех возможна за счет использования достаточного количества слоев искусственной нейронной сети. Если число нейронов первого слоя сети меньше числа входных помех, то следующий слой будет компенсировать оставшиеся помехи (и далее до компенсации всех помех).

Использование классических антенных алгоритмов (дискретного градиентного и быстрого рекуррентного) для настройки искусственной нейронной сети позволяет решать с помощью искусственных нейронных сетей задачи пространственной фильтрации, а учет флуктуаций весовых коэффициентов оптимизирует их работу.

Перспективы дальнейшей разработки темы:

Дальнейшее развитие разработки методов статистического анализа многоканальных адаптивных систем с учётом флуктуаций весового вектора целесообразно проводить для случая нестационарных входных сигналов, а также для различных типов искусственных нейронных сетей со связями не только между нейронами соседних слоев, но и со связями искусственных нейронов внутри одного и того же слоя.

Публикации по теме диссертации.

Публикации в рецензируемых научных журналах из перечня ВАК РФ, цитируемых в Web of Science и Scopus.

- A1. Мальцев А.А., Зими́на С.В. Спектрально-корреляционные характеристики выходного сигнала адаптивных антенных решёток с учётом флуктуаций весового вектора // Радиотехника и электроника, 2001. т.46. N11. с.1350– 1355.
- A2. Мальцев А.А., Зими́на С.В. Влияние флуктуаций весового вектора на статистические характеристики адаптивной антенной решётки с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки // Изв. ВУЗов. Радиофизика, 2002. т. 45. N8. с. 708 - 721.
- A3. Зими́на С.В. Анализ статистических характеристик адаптивной антенной решётки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи // Радиотехника и электроника, 2005. т. 50, N8. с. 952 - 960.
- A4. Зими́на С.В. Флуктуации весового вектора в адаптивных антенных решётках с нелинейной функцией в цепи обратной связи, настраивающихся по алгоритму рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов // Изв. ВУЗов. Радиофизика, 2006. т.49. N2. - с. 164 - 173.
- A5. Литвинов О.С., Зими́на С.В. Анализ влияния флуктуаций весовых коэффициентов на статистические характеристики адаптивной антенной решетки, настраиваемой по алгоритму Хэбба // Радиотехника и электроника, 2009. т.54. N4. с. 423 – 432.
- A6. Литвинов О.С., Зими́на С.В. Статистические характеристики адаптивных антенных решёток в условиях приема широкополосных сигналов // Известия вузов. Радиофизика, 2009. т.52. N5-6. с. 492 – 502.
- A7. Зими́на С.В. Спектрально – корреляционные характеристики адаптивной антенной решетки, настраиваемой по алгоритму Хэбба, с учётом флуктуаций весовых коэффициентов // Известия вузов. Радиофизика, 2009. т.52. N10. с. 822 - 832.
- A8. Зими́на С.В. Влияние флуктуаций весового вектора на мощность выходного сигнала адаптивных антенных решёток, принимающих широкополосные сигналы // Радиотехника и электроника, 2009. т. 54. N11. с. 1344 – 1352.
- A9. Зими́на С.В. Флуктуации весового вектора в адаптивных антенных решетках, настраиваемых по алгоритму минимизации среднего квадрата ошибки с квадратичным ограничением // Известия вузов. Радиофизика, 2015. т.58. N1. с. 77 – 84.

- A10. Мальцев А.А., Зими́на С.В. Анализ влияния флуктуаций весового вектора на статистические характеристики адаптивной антенной решётки с линейными ограничениями // Антенны, 2000. N2. с. 60 - 65.
- A11. Зими́на С.В. Флуктуации весового вектора в адаптивных антенных решётках // Антенны, 2004. N6. с. 27 -35.
- A12. Зими́на С.В. Статистические характеристики весового вектора и диаграмма направленности адаптивной антенной решётки с нелинейной функцией в цепи обратной связи при учёте флуктуаций весового вектора // Информационно – измерительные и управляющие системы, 2005. N3. с. 47 - 55.
- A13. Зими́на С.В. Статистические характеристики искусственной нейронной сети с дискретным градиентным алгоритмом настройки с учётом флуктуаций весовых коэффициентов // Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2006. N10. – с. 9 - 15.
- A14. Зими́на С.В. Влияние флуктуаций весовых коэффициентов на статистические характеристики искусственной нейронной сети с алгоритмом рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов // Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2007. N5. - с. 3 – 7.
- A15. Литвинов О.С., Зими́на С.В. Исследование характеристик алгоритма Хэбба в задачах обработки радиосигналов // Успехи современной радиоэлектроники, 2006. N6. - с. 23 - 27.
- A16. Литвинов О.С., Зими́на С.В. Статистический анализ адаптивных антенных решёток, настраивающихся по алгоритму Хэбба // Успехи современной радиоэлектроники, 2007. N8. - с. 57 – 66.
- A17. Литвинов О.С., Зими́на С.В. Статистический анализ флуктуаций весовых коэффициентов искусственной нейронной сети, настраивающейся по алгоритму Хэбба // Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2009. N3. с.33 – 43.
- A18. Литвинов О.С., Зими́на С.В. Влияние флуктуаций весового вектора на спектральные характеристики и диаграмму направленности адаптивной антенной решётки, настраивающейся по алгоритму Хэбба // Антенны, 2008. N4. - с. 27 - 33.
- A19. Зими́на С.В. Влияние флуктуаций весовых коэффициентов на статистические характеристики искусственной нейронной сети, настраивающейся по алгоритму Хэбба и принимающей широкополосные сигналы // Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2010. N4. с. 12 – 19.

- A20. Зими́на С.В. Статистические характеристики многослойных полносвязных искусственных нейронных сетей, принимающих широкополосные сигналы и настраивающихся по градиентным алгоритмам // *Нейрокомпьютеры: разработка и применение*, 2011. N5. с. 3 – 12.
- A21. Зими́на С.В. Влияние флуктуаций весового вектора на коэффициент направленного действия адаптивных антенных решёток // *Радиотехника*, 2011. N3. с. 52 – 61.
- A22. Зими́на С.В. Анализ влияния флуктуаций весового вектора на коэффициент направленного действия и коэффициент усиления адаптивной антенной решетки, настраиваемой по дискретному градиентному алгоритму // *Антенны*, 2009. N11. с. 13 – 18.
- A23. Зими́на С.В. Влияние флуктуаций весовых коэффициентов на коэффициент направленного действия и коэффициент усиления адаптивных антенных решеток, настраиваемых по быстрому рекуррентному алгоритму и алгоритму Хэбба // *Антенны*, 2010. N1. с. 15 – 21.
- A24. Зими́на С.В. Флуктуации весовых коэффициентов в искусственной нейронной сети с алгоритмом Хэбба // *Нейрокомпьютеры: разработка и применение*, 2013. N4. с. 3 – 8.
- A25. Зими́на С.В. Спектральные характеристики и диаграмма направленности адаптивной антенной решётки, настраиваемой по LMS алгоритму с квадратичным ограничением с учётом флуктуаций весового вектора // *Антенны*, 2014. N9. с. 64 –69.
- A26. Зими́на С.В. Влияние флуктуаций весового вектора на статистические характеристики адаптивной антенной решетки с нелинейной функцией в цепи обратной связи, настраиваемой по алгоритму LMS с квадратичным ограничением // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2014. т.17. N4. с. 26 – 33.
- A27. Зими́на С.В. Флуктуации весового вектора – от «линейной» адаптивной антенны к искусственной нейронной сети // *Успехи современной радиоэлектроники*. 2015. N8. с. 62 – 70.
- A28. Зими́на С.В. Статистический анализ выходной мощности искусственной нейронной сети, настраиваемой по алгоритму LMS с квадратичным ограничением, с учетом флуктуаций весовых коэффициентов // *Нейрокомпьютеры: разработка и применение*, 2015. N12. с. 12 – 18.
- A29. Зими́на С.В. Влияние флуктуаций весового вектора на характеристики нейронной сети с настройкой по критерию наименьшего среднего квадрата ошибки

// Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. 2015. т.2. с. 26 – 32.

A30. Зимина С.В. Флуктуации весового вектора в адаптивных системах // Инженерная физика. 2015. №9. с. 35 - 52.

A31. Зимина С.В. Определение потерь в выходном отношении сигнал/шум адаптивных антенных решёток, вызванных наличием флуктуаций весового вектора // Радиолокация. Результаты теоретических и экспериментальных исследований. Монография. В 2-х книгах. Кн.1. / Под ред. В.Д. Ястребова. – М.: Радиотехника, 2018. – 264с. – с. 112 – 118.

Литература.

1. Содин Л. Г., Могульский Е. З. Статистические характеристики флуктуаций поля дальней зоны антенны – решётки // Радиотехника и электроника, 1965. т. 10. N4. С. 603 - 609.
2. Шифрин Я. С. Вопросы статистической теории антенн. М.: Советское радио, 1970.
3. Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах. М.: Наука, 1968.
4. Цыпкин Я. З. Основы теории обучающихся систем. М.: Наука, 1970.
5. Фрост О. Алгоритм линейно – ограниченной обработки сигналов в адаптивной решётке // ТИИЭР, 1972. т. 60. N8. С. 5 – 16.
6. Appelbaum S. P., Chapman D. J. Adaptive arrays with main beam constraints // IEEE Trans., 1976. v. AP - 24. N5. P. 650 - 661.
7. Стратонович Р. Л. Принципы адаптивного приёма. М.: Советское радио, 1973.
8. Шахгильдян В. В., Лохвицкий М. С. Методы адаптивного приёма сигналов. М.: Связь, 1974.
9. Левин Б. О. Теоретические основы статистической радиотехники, кн. 3. М.: Советское радио, 1976.
10. Репин В. Г., Тартаковский Г. П. Статистический синтез при априорной неопределённости и адаптация информационных систем. М.: Советское радио, 1977.
11. Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1980.
12. Куропаткин П. В. Оптимальные и адаптивные системы. М.: Высшая школа, 1980.
13. Срагович В. Г. Адаптивное управление. М.: Наука, 1981.
14. Ширман Я. Д., Манжос В. Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. М.: Радио и связь, 1981.
15. Фомин В. Н. Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. М.: Наука, 1984.
16. Монзинго Р. А., Миллер Т. У. Адаптивные антенные решётки: Пер. с англ. - Под ред. В. А. Лексаченко. М.: Радио и связь, 1986.
17. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов. М.: Радио и связь, 1989.
18. Hudson J. E. Adaptive array principles. IEE, 1991.
19. Ганзий Д.Д., Трошин Г.И. Элементная база и узлы адаптивных антенных устройств. М.: Новые технологии, 2011. – 128с.
20. Карташевский В.Г., Шатилов С.В. Адаптивная фильтрация негауссовских сигналов в каналах связи. Методы, алгоритмы. М.: Радиотехника, 2013. – 176с.

21. Пистолькорс А. А., Литвинов О. С. Введение в теорию адаптивных антенн. Стационарный режим // Радиотехника, 1979. т.34. N5. С. 7 - 16.
22. Пистолькорс А. А. О расчёте мощности шумов в адаптивной приёмной антенной системе // Докл. АН СССР, 1980. т. 252. N4. С. 866 - 869.
23. Литвинов О. С. Об оптимальном законе управления весовыми коэффициентами адаптивных антенн // Радиотехника, 1980. т. 35. N5. С. 34 - 37.
24. Пистолькорс А. А. Метод линейных уравнений в расчёте статического режима адаптивной антенной решётки // Радиотехника, 1980. т. 35. N6. С. 3 - 9.
25. Пистолькорс А. А. Защита главного максимума в адаптивных антенных решётках // Радиотехника, 1980. т. 35. N12. С. 8 - 19.
26. Пистолькорс А. А., Литвинов О. С. Введение в теорию адаптивных антенн. Статический режим // «Сборник научно – методических статей» М., 1980. вып.4. С. 3 – 29.
27. Литвинов О. С. Аналитические свойства ковариационной матрицы помех в теории приёмных адаптивных решёток // В кн.: Антенны / Под ред. А. А. Пистолькорса, 1982. вып.30. С. 65 – 78.
28. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Часть 2. М.: Наука, 1978.
29. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980.
30. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М.: Наука, 1975.
31. Brennan L. E., Pugh E. L., Reed I. S. Control-loop noise in adaptive array antennas // IEEE Trans., 1971. v. AES-7. N2. P. 254 - 262.
32. Фединин В. В. Статистический анализ многоканальной адаптивной системы с корреляционными обратными связями // Радиотехника и электроника, 1982. т. 27. N8. С. 1548 - 1553.
33. Farina A. Single sidelobe canceller. Theory and evaluation // IEEE Trans., 1977. v. AES - 13. N6. P. 690 - 699.
34. Berni A. J. Weight jitter phenomena in adaptive array control loops // IEEE Trans., 1977. v. AES - 13. N4. P. 355 - 361.
35. Мальцев А. А., Музычук О. В., Позументов И. Е. О статистических характеристиках системы компенсации помех с корреляционной обратной связью // Радиотехника и электроника, 1978. т. 23. N7. С. 1401 - 1410.

36. Малахов А. Н., Музычук О. В., Позументов И. Е. О дифференциальном описании стохастических линейных систем с небелыми флуктуациями параметров // Известия вузов. Радиофизика, 1978. т. 21. N9. С. 1279 - 1289.
37. Мальцев А. А., Саичев А. И. Точное вычисление статистических характеристик одноканального автокомпенсатора помех с корреляционной обратной связью // Радиотехника и электроника, 1978. т. 23. N12. С. 2543 - 2552.
38. Мальцев А. А., Позументов И. Е. Статистические характеристики автокомпенсатора АРУ в цепи управления // Известия вузов. Радиофизика, 1979. т. 22. N2. С. 150 - 158.
39. Дубков А. А., Мальцев А. А. Об эффективности автокомпенсации помехи, модулированной по амплитуде случайным телеграфным процессом // Известия вузов. Радиофизика, 1979. т. 22. N3. С. 353 - 359.
40. Арзамасов С. Н., Малахов А. Н., Музычук О. В., Позументов И. Е. Спектрально – корреляционные характеристики одноканального автокомпенсатора помех // Радиотехника и электроника, 1979. т. 24. N3. С. 545 - 550.
41. Позументов И. Е. Статистические характеристики адаптивных антенных систем, максимизирующих отношение сигнал/шум // Известия вузов. Радиофизика, 1980. т. 23. N1. С. 56 - 60.
42. Позументов И. Е. О статистических характеристиках адаптивных антенных систем // Радиотехника и электроника, 1980. т. 25. N6. С. 1186 - 1191.
43. Мальцев А. А., Позументов И. Е. Статистические характеристики адаптивных антенных решёток с ограничениями // Известия вузов. Радиофизика, 1981. т. 24. N5. С. 577 - 585.
44. Бочков Г. Н., Дубков А. А., Мальцев А. А. Вероятностные характеристики некоторых стохастических систем с обратными связями // Известия вузов. Радиофизика, 1981. т. 24. N8. С. 976 - 985.
45. Малахов А. Н., Мальцев А. А. / Тезисы докладов Всесоюзной научно - технической конференции “Статистические методы в теории передачи и преобразования информационных сигналов”. Киев, 1988. С. 12 - 13.
46. Мальцев А. А. Анализ характеристик адаптивных антенных решёток с учётом быстрых флуктуаций параметров // Известия вузов. Радиофизика, 1987. т. 30. N8. С. 1013 - 1022.
47. Музычук О. В. Некоторые вопросы статистического анализа линейных систем с сильными флуктуациями параметров. Кандидатская диссертация. Горький: ГГУ, 1978.

48. Позументов И. Е. Анализ стохастического поведения аналоговых адаптивных систем. Кандидатская диссертация. Горький, 1982.
49. Мальцев А. А. Статистический анализ и синтез адаптивных радиоэлектронных систем // Диссертация на соискание учёной степени доктора физико - математических наук. Горький, 1989.
50. Музычук О. В. Статистический анализ динамических систем, подверженных интенсивным случайным воздействиям // Диссертация на соискание учёной степени доктора физико - математических наук. Нижний Новгород, 2001.
51. Уидроу Б. и др. Адаптивные компенсаторы помех. Принципы построения и применения // ТИИЭР, 1975. т. 63. N12. С. 69 - 98.
52. Уидроу Б. и др. Стационарные и нестационарные характеристики обучения адаптивных фильтров, использующих критерий минимума СКО // ТИИЭР, 1976. т. 64. N8. С. 37 - 51.
53. Widrow B., McCool J. M. A comparison of adaptive algorithms based on the methods of steepest descent and random search // IEEE Trans., 1976. v. AP - 24. N5. P. 615 - 637.
54. Rickard J. T., Zeidler J. R. Second - order output statistics of the adaptive line enhancer // IEEE Trans., 1979. v. ASSP - 27. N1. P. 31 - 39.
55. Anderson C. M., Satorius E. H., Zeidler J. R. Adaptive enhancement of finite bandwidth signals in white Gaussian noise // IEEE Trans., 1983. v. ASSP - 31. N1. P. 17 - 27.
56. Fisher B., Bershad N. J. The complex LMS adaptive algorithm - transient weight mean and covariance with applications to the ALE // IEEE Trans., 1983. v. ASSP - 31. N1. P. 34 - 44.
57. Horowitz L. L., Senne K. D. Performance advantage of complex LMS for controlling narrow - band adaptive arrays // IEEE Trans., 1983. v. CAS - 28. N6. P. 562 - 576.
58. Ko C. C., Francois Chin, Foo S.S. An adaptive algorithm for separating and tracking multiple directional sources in linear arrays // IEEE Trans., 1992. v. AP - 40. N3. P. 261 - 267.
59. Ivandich S., Cantoni A. Performance analysis of narrow - band adaptive arrays using projected perturbation sequences // IEEE Trans., 1993. v. AP - 41. N5. P. 625 - 634.
60. Shiunn-Jang C., Chih-Yuan S. The performance of hybrid adaptive beamforming algorithm for jammers suppression // IEEE Trans., 1994. v. AP - 42. N9. P. 1223 - 1231.
61. Kim J. K., Davisson L. D. Adaptive linear estimation for stationary M - dependent processes // IEEE Trans., 1975. v. IT - 21. N1. P. 23 - 31.

62. Widrow B. et al. Signal cancellation phenomena in adaptive antennas: causes and cures // *IEEE Trans.*, 1982. v. AP - 30. N3. P. 469 - 478.
63. Morgan D. R. Effect of gradient noise on the adaptive cancellation of a sinusoid in white noise // *IEEE Trans.*, 1983. v. ASSP - 31. N4. P. 1043 - 1045.
64. Su Y. L., Shan T. J., Widrow B. Parallel spatial processing: a cure for signal cancellation in adaptive arrays // *IEEE Trans.*, 1986. v. AP - 34. N3. P. 347 - 355.
65. Игнатенко С. В., Мальцев А. А. Статистические характеристики адаптивных антенных решёток при обработке дискретных сигналов с коррелированными отсчётами // *Известия вузов. Радиофизика*, 1994. т. 37. N12. С. 1532 - 1545.
66. Reed I. S., Mallet J. D., Brennan L. E. Rapid convergence rate in adaptive arrays // *IEEE Trans.*, 1974. v. AES - 10. N6. P. 853 - 863.
67. Van Veen B. D. Adaptive convergence of linearly constrained beamformers based on the sample covariance matrix // *IEEE Trans.*, 1991. v. 39. N6. P. 1470 - 1473.
68. Krolik J. L., Swingler D. N. On the mean - square error performance of adaptive minimum variance beamformers based on the sample covariance matrix // *IEEE Trans.*, 1994. v. SP - 42. N2. P. 445 - 448.
69. Шифрин Я. С., Лучанинов А. И., Щербина А. А. Нелинейные антенные эффекты // *Радиоэлектроника*, 1990. N2. С. 4 - 13.
70. Шифрин Я. С., Лучанинов А. И., Посохов А. С. Нелинейные эффекты в активных фазированных антенных решетках // *Радиотехника и электроника*. 1994. т. 39. N7. С. 1095 – 1106.
71. Справочник по антенной технике: Справ. В 5т. Т.1 / Под ред. Я. Н. Фельда, Е. Г. Зелкина. М.: ИПРЖР, 1997. – 256с.
72. Costa M. H., Bermudez J.-C. M., Bershada N. J. Stochastic analysis of the LMS algorithm with a saturation nonlinearity following the adaptive filter output // *IEEE Trans.*, 2001. v. SP - 49. N7. P. 1370 - 1387.
73. Lawrence J. *Introduction to Neural Networks. Design, Theory and Applications*. California Scientific Software, Nevada City, 1994.
74. Harvey R. L. *Neural Network Principles*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1994.
75. Haykin S. *Neural Networks: A comprehensive Foundation*. New York: Macmillan College Publishing Company, 1994.
76. Bose N. K., Liang P. *Neural Networks Fundamentals with Graphs, Algorithms and Applications*. New York: McGraw – Hill, 1996.
77. Diamantaras K. I., Kung S. Y. *Principal Component Neural Networks: Theory and Applications*. New York: John Wiley&Sons, 1996.

78. Галушкин А.И. Теория нейронных сетей. Кн.1: Учеб. пособие для вузов / Общая ред. А.И. Галушкина. М.: ИПРЖР, 2000. – 416с.
79. Круглов В. В., Борисов В. В. Искусственные нейронные сети. Теория и практика. – 2-е изд. - М.: Горячая линия – Телеком, 2002. – 382 с.
80. Комарцова Л. Г., Максимов А. В. Нейрокомпьютеры. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 400с.
81. Татузов А.Л. Нейронные сети в задачах радиолокации. Кн.28. М.: Радиотехника, 2009. – 432с.
82. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс, 2-е изд., испр.: Пер. с англ. – М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2006. - 1104с.
83. Xie Y., Jabri M. A. Analysis of the effects of quantization in multilayer neural networks using a statistical model // IEEE Trans., 1992. v. NN - 3. N2. P. 334 - 338.
84. Dundar G., Rose K. The effects of quantization on multilayer neural networks // IEEE Trans., 1995. v. NN - 6. N6. P. 1446 - 1451.
85. Zeng X., Yeung D. S. Sensitivity analysis of multilayer perceptron to input and weight perturbations // IEEE Trans., 2001. v. NN - 12. N6. P. 1358 - 1366.
86. Piche S. W. The selection of weight accuracies for Madalines // IEEE Trans., 1995. v. NN - 6. N2. P. 432 - 445.
87. Cilke J. T., Etter D. M. A new adaptive algorithm to reduce weight fluctuations caused by high variance data // IEEE Trans., 1992. v. SP - 40. N9. P. 2324 - 2327.
88. Adali T., Ardalan S. H. On the effect of input signal correlation on weight misadjustment in the RLS algorithm // IEEE Trans., 1995. v. SP - 43. N4. P. 988 - 991.
89. Raida Z. Steering an adaptive antenna array by the simplified Kalman filter // IEEE Trans., 1995. v. AP - 43. N6. P. 627 - 629.
90. Ho K. C. A minimum misadjustment adaptive FIR filter // IEEE Trans., 1996. v. SP - 44. N3. P. 577 - 585.
91. Bershad N. J., Bermudez J.- C. M., Tournieret J. – Y. Stochastic analysis of the LMS algorithm for system identification with subspace inputs // IEEE Trans., 2008. v. SP - 56. N3. P. 1018 - 1027.
92. Reuter M., Zeidler J.R. Nonlinear effects in LMS adaptive equalizers // IEEE Trans., 1999. v. SP - 47. N6. P. 1570 - 1579.
93. Maruo M. H., Bermudez J.- C. M., Resende L. S. Statistical analysis of a jointly optimized beamformer – assisted acoustic echo canceller // IEEE Trans., 2014. v. SP - 62. N1. P. 252 - 265.

94. Bershad N. J., Eweda Eweda, Bermudez J.- C. M. Stochastic analysis of the LMS and NLMS algorithms for cyclostationary white gaussian inputs // IEEE Trans., 2014. v. SP - 62. N9. P. 2238 - 2249.
95. Jie Chen, Richard C., Bermudez J.- C. M., Honeine P. Variants of non – negative Least – Mean – Square algorithm and convergence analysis // IEEE Trans., 2014. v. SP - 62. N15. P. 3990 - 4005.
96. Bershad N. J., Eweda Eweda, Bermudez J.- C. M. Stochastic analysis of an adaptive line enhancer / canceler with a cyclostationary input // IEEE Trans., 2016. v. SP - 64. N1. P. 104 - 119.
97. Jeong J. J., Kim S. H., Koo G., Kim S. W. Mean – square deviation analysis of multi-band – structured subband adaptive filter algorithm // IEEE Trans., 2016. v. SP - 64. N4. P. 985 - 994.
98. Eweda Eweda, Bershad N. J. Stochastic analysis of the signed LMS algorithms for cyclostationary white gaussian inputs // IEEE Trans., 2017. v. SP - 65. N7. P. 1673 - 1684.
99. Zhe Li, Yili Xia, Wenjiang Pei, Kai Wang, Danilo P. Mandic. An augmented nonlinear LMS for digital self – interference cancellation in full – duplex direct – conversion transceivers // IEEE Trans., 2017. v. SP - 66. N15. P. 4065 - 4078.
100. Мальцев А.А., Зими́на С.В. Некоторые точные результаты статистического анализа многоканальных адаптивных систем с непрерывными градиентными алгоритмами // Известия вузов. Радиофизика, 1999. т. 42. N9. С. 914 - 920.
101. Мальцев А.А., Зими́на С.В. Статистические характеристики адаптивных антенных решёток // Известия вузов. Радиофизика, 1999. т. 42. N10. С. 1013 - 1024.
102. Мальцев А.А., Зими́на С.В. Экспериментальное исследование статистических характеристик адаптивных антенных решёток с дискретными градиентными алгоритмами настройки // Четвёртая Нижегородская сессия молодых учёных. Нижний Новгород, ИПФРАН, 1999. С. 134-135.
103. Мальцев А.А., Зими́на С.В. Влияние флуктуаций весовых коэффициентов на характеристики адаптивных антенных решёток // Известия вузов. Радиофизика, 2000. т. 43. N1. С. 83 - 92.
104. Мальцев А.А., Зими́на С.В. Статистические характеристики адаптивных антенных систем с дискретными градиентными алгоритмами настройки // 6-й Санкт-Петербургский симпозиум по теории адаптивных систем. Сборник трудов. Санкт-Петербург, 1999. т. 2. С. 103 - 106.

105. Mal'tsev A.A., Zimina S.V. Statistical characteristics of adaptive antenna systems with discrete gradient algorithms // 6-th Saint Petersburg Symposium on Adaptive Systems Theory, Proceedings. Saint Petersburg, 1999. v. 1. P. 237.
106. Mal'tsev A.A., Zimina S.V. Experimental studying of influence of weight coefficients jitter on output signal of adaptive antenna array // Antenna theory and techniques, Proceedings of 3-rd International Conference. Sevastopil, Ukraine, 1999. P. 287 - 289.
107. Мальцев А.А., Зими́на С.В. Спектрально-корреляционные характеристики выходного сигнала адаптивных антенных решёток с учётом флуктуаций весового вектора // Радиотехника и электроника, 2001. т.46. N11. С.1350– 1355.
108. Мальцев А.А., Зими́на С.В. Анализ влияния флуктуаций весового вектора на статистические характеристики адаптивной антенной решётки с линейными ограничениями // Антенны, 2000. N2. С. 60 - 65.
109. Мальцев А.А., Зими́на С.В. Влияние флуктуаций весового вектора на диаграмму направленности адаптивной антенной решётки // Труды четвёртой научной конференции по радиофизике 5 мая 2000 года. Нижний Новгород, 2000. С. 260 - 261.
110. Мальцев А.А., Зими́на С.В. Флуктуации весовых коэффициентов адаптивной антенной решётки, работающей по быстрому рекуррентному алгоритму настройки // 3-я Международная конференция и выставка "Цифровая обработка сигналов и её применение", Москва, 2000. С. 21 -24.
111. Maltsev A.A., Zimina S.V. Weight vector jitter phenomenon in adaptive antenna array with recursive sample matrix inversion algorithm // The 3-st International Conference and Exhibition "Digital Signal Processing and its Applications", Moscow, 2000. P. 24 - 26.
112. Мальцев А.А., Зими́на С.В. Диаграмма направленности адаптивной антенной решётки, использующей алгоритм обращения выборочной оценки ковариационной матрицы // Шестая Нижегородская сессия молодых учёных. Нижний Новгород, 2001. С. 100 - 101.
113. Мальцев А.А., Зими́на С.В., Масленников Р.О. Анализ быстрого рекуррентного адаптивного алгоритма настройки антенных решёток с учётом ошибок округления // Труды пятой научной конференции по радиофизике 7 мая 2001 года. Нижний Новгород, 2001. С. 185 - 186.
114. Зими́на С.В. Сравнительный анализ флуктуаций весового вектора в антенных решётках, использующих градиентные и быстрые алгоритмы // Труды шестой

- научной конференции по радиофизике 7 мая 2002 года. Нижний Новгород, 2002. С. 259 - 260.
115. Мальцев А.А., Зими́на С.В. Влияние флуктуаций весового вектора на статистические характеристики адаптивной антенной решётки с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки // Известия вузов. Радиофизика, 2002. т. 45. N8. С. 708 - 721.
116. Зими́на С.В. Влияние флуктуаций весового вектора на статистические характеристики адаптивных антенных решеток // Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико - математических наук. Нижний Новгород, 2002. – 115с.
117. Зими́на С.В. Анализ статистических характеристик адаптивной антенной решётки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи // Радиотехника и электроника, 2005. т. 50. N8. С. 952 - 960.
118. Зими́на С.В. Статистические характеристики искусственного нейрона с ограничениями, настраивающегося по дискретному градиентному алгоритму // Интеллектуальные и информационные системы. Материалы межрегиональной научно-технической конференции. Тула, 2003. – С. 70 - 73.
119. Зими́на С.В. Анализ влияния флуктуаций весового вектора на статистические характеристики искусственного нейрона с ограничениями, настраивающегося по дискретному градиентному алгоритму // Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова. Серия “Цифровая обработка сигналов и её применение», 2004. - выпуск VI. т.2. С. 235 – 237.
120. Zimina S.V. Analysis of weight vector jitter influence on statistical characteristics of artificial neuron with constraints with discrete gradient algorithm tuning // Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова. Серия “Цифровая обработка сигналов и её применение», 2004. - выпуск VI. т.2. С. 237 – 238.
121. Зими́на С.В. Флуктуации весового вектора в адаптивных антенных решётках // Антенны, 2004. N6. С. 27 -35.
122. Зими́на С.В. Выходная мощность адаптивной антенной решётки с нелинейной функцией в цепи обратной связи, найденная при учёте флуктуаций весового вектора // Современные методы и средства обработки пространственно – временных сигналов. Сборник статей II Всероссийской научно-технической конференции. Пенза, 2004. – С. 9 – 11.

123. Зими́на С.В. Сравнительный анализ выражений для выходной мощности искусственного нейрона и адаптивной антенной решётки, найденных при учёте флуктуаций весового вектора // Восьмая научная конференция по радиофизике, г.Нижний Новгород, 2004. – С. 161 – 163.
124. Зими́на С.В. Статистические характеристики весового вектора и диаграмма направленности адаптивной антенной решётки с нелинейной функцией в цепи обратной связи при учёте флуктуаций весового вектора // Информационно – измерительные и управляющие системы, 2005. N3. С. 47 - 55.
125. Зими́на С.В. Диаграмма направленности адаптивной антенной решётки с нелинейной функцией в цепи обратной связи, настраиваемой по дискретному градиентному алгоритму, при учёте флуктуаций весового вектора // Интеллектуальные и информационные системы. Материалы межрегиональной научно-технической конференции. Тула: Изд-во ТулГУ, 2004. – С. 36 – 38.
126. Зими́на С.В. Флуктуации весового вектора в адаптивных антенных решётках с нелинейной функцией в цепи обратной связи, настраиваемых по алгоритму рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов // Известия вузов. Радиофизика, 2006. т.49. N2. С. 164 - 173.
127. Зими́на С.В. Корреляционная функция выходного сигнала адаптивной антенной решётки с быстрым рекуррентным алгоритмом настройки и нелинейной функцией в цепи обратной связи, найденная при учёте флуктуаций весового вектора // XLI Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии. Тезисы докладов. Физические секции. М.: Изд-во РУДН, 2005. – 139 с. – С. 120 – 121.
128. Зими́на С.В. Сравнительный анализ выходной мощности адаптивных антенных решёток с нелинейной функцией в цепи обратной связи, настраиваемых по дискретному градиентному и быстрому рекуррентному алгоритмам // Труды (девятой) Научной конференции по радиофизике «Факультет – ровесник Победы». 7 мая 2005 г. /Ред. А.В.Якимов. Нижний Новгород: ТАЛАМ, 2005. - 382 с. – С. 214 – 215.
129. Зими́на С.В. Статистические характеристики выходного сигнала искусственного нейрона с N-раз дифференцируемой нелинейной активационной функцией // Оптико-электронные приборы и устройства в системах распознавания образов, обработки изображений и символьной информации. Сборник материалов VII международной конференции 4-7 октября 2005г. Курск, 2005. - С. 79 - 80.

130. Зими́на С.В. Корреляционная функция выходного сигнала искусственной нейронной сети с учётом флуктуаций весовых коэффициентов // Интеллектуальные и информационные системы: Материалы межрегиональной научно-технической конференции / Тульский государственный университет. - Тула, 2005. – 61 с. - С. 12 – 15.
131. Зими́на С.В. Анализ влияния флуктуаций весовых коэффициентов на статистические характеристики искусственной нейронной сети // XLII Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии. Тезисы докладов. Секции физики. М.: Изд-во РУДН, 2006. - 100 с. - С. 37.
132. Зими́на С.В. Статистические характеристики искусственной нейронной сети с дискретным градиентным алгоритмом настройки с учётом флуктуаций весовых коэффициентов // Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2006. N10. С. 9 - 15.
133. Зими́на С.В. Влияние флуктуаций весовых коэффициентов на статистические характеристики искусственной нейронной сети с алгоритмом рекуррентного обращения выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов // Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2007. N5. С. 3 – 7.
134. Литви́нов О.С., Зими́на С.В. Исследование характеристик алгоритма Хэбба в задачах обработки радиосигналов // Успехи современной радиоэлектроники, 2006. N6. С. 23 - 27.
135. Литви́нов О.С., Зими́на С.В. Анализ алгоритма Хэбба при различной коррелированности входных сигналов // Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени А.С. Попова. М., 2007.-204с. – Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации, вып. 2. – С. 63 – 66.
136. Литви́нов О.С., Зими́на С.В. Статистический анализ адаптивных антенных решёток, настраивающихся по алгоритму Хэбба // Успехи современной радиоэлектроники, 2007. N8. С. 57 – 66.
137. Литви́нов О.С., Зими́на С.В. Корреляционная функция и мощность выходного сигнала адаптивной антенной решётки, настраивающейся по алгоритму Хэбба, с учетом флуктуаций весовых коэффициентов // Интеллектуальные и информационные системы: Материалы Всероссийской научно-технической конференции / Тульский государственный университет. Тула, 2007 – 134с. – С. 113 – 115.
138. Литви́нов О.С., Зими́на С.В. Анализ влияния флуктуаций весовых коэффициентов на статистические характеристики адаптивной антенной решетки, настраи-

- вающейся по алгоритму Хэбба // Радиотехника и электроника, 2009. т.54. N4. С. 423 – 432.
139. Литвинов О.С., Зими́на С.В. Статистический анализ флуктуаций весовых коэффициентов искусственной нейронной сети, настраиваемой по алгоритму Хэбба // Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2009. N3. С.33 – 43.
140. Литвинов О.С., Зими́на С.В. Влияние флуктуаций весового вектора на спектральные характеристики и диаграмму направленности адаптивной антенной решётки, настраиваемой по алгоритму Хэбба // Антенны, 2008. N4. С. 27 - 33.
141. Литвинов О.С., Зими́на С.В. Статистические характеристики адаптивных антенных решёток в условиях приема широкополосных сигналов // Известия вузов. Радиофизика, 2009. т.52. N5-6. С. 492 – 502.
142. Зими́на С.В. Спектрально – корреляционные характеристики адаптивной антенной решетки, настраиваемой по алгоритму Хэбба, с учётом флуктуаций весовых коэффициентов // Известия вузов. Радиофизика, 2009. т.52. N10. С. 822 - 832.
143. Зими́на С.В. Влияние флуктуаций весового вектора на мощность выходного сигнала адаптивных антенных решёток, принимающих широкополосные сигналы // Радиотехника и электроника, 2009. т. 54. N11. С. 1344 – 1352.
144. Зими́на С.В. Влияние флуктуаций весовых коэффициентов на статистические характеристики искусственной нейронной сети, настраиваемой по алгоритму Хэбба и принимающей широкополосные сигналы // Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2010. N4. С. 12 – 19.
145. Зими́на С.В. Статистические характеристики многослойных полносвязных искусственных нейронных сетей, принимающих широкополосные сигналы и настраиваемых по градиентным алгоритмам // Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2011. N5. С. 3 – 12.
146. Зими́на С.В. Анализ влияния флуктуаций весового вектора на коэффициент направленного действия и коэффициент усиления адаптивной антенной решетки, настраиваемой по дискретному градиентному алгоритму // Антенны, 2009. N11. С. 13 – 18.
147. Зими́на С.В. Влияние флуктуаций весового вектора на коэффициент направленного действия адаптивных антенных решёток // Радиотехника, 2011. N3. С. 52 – 61.
148. Литвинов О.С., Зими́на С.В. Статистические характеристики многослойной полносвязной искусственной нейронной сети, принимающей широкополосные

- сигналы и настраиваемой по дискретному градиентному алгоритму // Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени А.С. Попова. М., 2009.-280с. – Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации, вып. 3. – С. 44 – 48.
149. Зими́на С.В. Влияние флуктуаций весового вектора на коэффициент направленного действия адаптивной антенной решетки, настраиваемой по дискретному градиентному алгоритму и принимающей широкополосные сигналы // Интеллектуальные и информационные системы: Материалы Всероссийской научно-технической конференции / Тульский государственный университет. - Тула, 2009. – С. 163 – 166.
150. Зими́на С.В. Влияние флуктуаций весовых коэффициентов на коэффициент направленного действия и коэффициент усиления адаптивных антенных решеток, настраиваемых по быстрому рекуррентному алгоритму и алгоритму Хэбба // Антенны, 2010. N1. С. 15 – 21.
151. Литвинов О.С., Зими́на С.В. Флуктуации весового вектора в искусственной нейронной сети с алгоритмом Хэбба // XIV Всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика-2012»: Сборник научных трудов. В 3-х частях. Ч.1. М.: НИЯУ МИФИ, 2012. – 280с. – С. 95 – 97.
152. Зими́на С.В., Зими́н В.В. Корреляционная функция и мощность выходного сигнала адаптивной антенной решётки, настраиваемой по алгоритму LMS с квадратичным ограничением, с учётом флуктуаций весовых коэффициентов // Материалы XIX международной научно–технической конференции «Информационные системы и технологии» ИСТ-2013. Нижний Новгород, 2013. – 375с. – С.34 - 35.
153. Зими́на С.В. Флуктуации весовых коэффициентов в искусственной нейронной сети с алгоритмом Хэбба // Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2013. N4. С. 3 – 8.
154. Зими́на С.В. Влияние флуктуаций весовых коэффициентов на спектральную плотность мощности выходного сигнала адаптивной антенной решетки, настраиваемой по LMS – алгоритму с квадратичным ограничением // Перспективное развитие науки, техники и технологий. Материалы III Международной научно-практической конференции (18 октября 2013 года) / редкол. Горохов А.А. (отв. ред.): Юго-Зап. гос. ун-т. В 3 томах, том 2, Курск, 2013. – 435 с. – С. 43 – 47.
155. Зими́на С.В. Матрица ковариации вектора весовых коэффициентов адаптивной антенной решётки, настраиваемой по алгоритму LMS с квадратичным

- ограничением // Материалы XX Международной научно-технической конференции «Информационные системы и технологии» ИСТ-2014, посвящённой 100-летию профессора Г.В. Глебовича. Нижний Новгород, 2014. – 347с. – С. 26.
156. Зими́на С.В. Влияние флуктуаций весовых коэффициентов на мощность выходного сигнала адаптивной антенной решетки с нелинейной функцией в цепи корреляционной обратной связи, настраиваемой по алгоритму LMS с квадратичным ограничением // Физика и технические приложения волновых процессов: Тезисы докладов XII Международной научно-технической конференции: Приложение к журналу «Физика волновых процессов и радиотехнические системы» / Под ред. В.А. Неганова. - Самара: «Самарское книжное издательство», 2014. - 233с. – С. 67 – 69.
157. Зими́на С.В. Спектральные характеристики и диаграмма направленности адаптивной антенной решётки, настраиваемой по LMS алгоритму с квадратичным ограничением с учётом флуктуаций весового вектора // Антенны, 2014. №9. С. 64 –69.
158. Зими́на С.В. Влияние флуктуаций весового вектора на статистические характеристики адаптивной антенной решетки с нелинейной функцией в цепи обратной связи, настраиваемой по алгоритму LMS с квадратичным ограничением // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2014. т.17. №4. С. 26 – 33.
159. Зими́на С.В. Флуктуации весового вектора в адаптивных антенных решетках, настраиваемых по алгоритму минимизации среднего квадрата ошибки с квадратичным ограничением // Известия вузов. Радиофизика, 2015. т.58. №1. С. 77 – 84.
160. Зими́на С.В. Корреляционная функция выходного сигнала искусственной нейронной сети, настраиваемой по алгоритму LMS с квадратичным ограничением // Материалы XXI Международной научно-технической конференции «Информационные системы и технологии» ИСТ-2015, посвящённой 70-летию Победы в Великой Отечественной войне. Нижний Новгород, 2015. – 430с. – С. 113 - 114.
161. Зими́на С.В. Влияние флуктуаций весового вектора на характеристики нейронной сети с настройкой по критерию наименьшего среднего квадрата ошибки // Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. 2015. т.2. С. 26 – 32.
162. Зими́на С.В. Флуктуации весовых коэффициентов в искусственной нейронной сети, настраиваемой по алгоритму LMS с квадратичным ограничением //

- Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева. 2015. N2(109). С. 11 – 17.
163. Зими́на С.В. Мощность выходного сигнала искусственной нейронной сети, настраиваемой по алгоритму LMS с квадратичным ограничением // Физика и технические приложения волновых процессов: Материалы XIII Международной научно-технической конференции / Под общ. ред. В.А. Неганова и Г.А. Морозова. – Казань: ООО «Новое знание», 2015. - 392с. – С. 16 – 18.
164. Зими́на С.В. Флуктуации весового вектора – от «линейной» адаптивной антенны к искусственной нейронной сети // Успехи современной радиоэлектроники. 2015. N8. С. 62 – 70.
165. Зими́на С.В. Флуктуации весового вектора в адаптивных системах // Инженерная физика. 2015. N9. С. 35 - 52.
166. Зими́на С.В. Мощность выходного сигнала искусственной нейронной сети, настраиваемой по алгоритму LMS с квадратичным ограничением // Труды юбилейной 70-й Всероссийской научно-технической конференции, посвященной Дню радио. Санкт – Петербург, 2015. т.1. – 322 с. – С. 46 – 47.
167. Зими́на С.В. Статистический анализ выходной мощности искусственной нейронной сети, настраиваемой по алгоритму LMS с квадратичным ограничением, с учетом флуктуаций весовых коэффициентов // Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2015. N12. С. 12 – 18.
168. Зими́на С.В. Характеристики искусственных нейронных сетей с градиентными алгоритмами при учёте флуктуаций весовых коэффициентов // XXIII Международная научно-техническая конференция «Радиолокация, навигация и связь» 18-20 апреля 2017 года. т.2. С. 396 – 404.
169. Зими́на С.В. Определение потерь в выходном отношении сигнал/шум адаптивных антенных решёток, вызванных наличием флуктуаций весового вектора // Радиолокация. Результаты теоретических и экспериментальных исследований. Монография. В 2-х книгах. Кн.1. / Под ред. В.Д. Ястребова. М.: Радиотехника, 2018. – 264с. – С. 112 – 118.
170. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.
171. Корбанский И.Н. Антенны. М.: Энергия, 1973. – 336с.
172. Griffiths L. J., Jim C. W. An alternative approach to linearly constrained adaptive beamforming // IEEE Trans., 1982. v. AP - 30. N1. P. 27 - 34.
173. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2003. – 604с.

174. Солонина А.И., Арбузов С.М. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в MATLAB. СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – 816с.
175. Дьяконов В. П., Абраменкова И. В., Круглов В. В. MATLAB 5.3.1 с пакетами расширений. М.: Нолидж, 2001. – 880с.
176. Дьяконов В.П. MATLAB. Полный самоучитель. М.: ДМК Пресс, 2012. – 768с.
177. Пупков К. А., Капалин В. И., Ющенко А. С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем. М.: Наука, 1976.
178. Оценивание дальности и скорости в радиолокационных системах. Ч.2./ Под ред. В.И. Меркулова. М.: «Радиотехника», 2007. – 304с.
179. Гриб В.Н., Козлов С.В. Технические и алгоритмические решения по созданию адаптивных приёмных многолучевых антенных решёток средств радиомониторинга // Радиотехника, 2015. №12. С. 80-87.
180. Борисов С.Н., Денисенко В.В., Левитан Б.А., Шишлов А.В. Антенны для широкополосной спутниковой связи на движущемся транспорте. Аналитический обзор // Радиотехника, 2015. №10. С. 17-32.

Приложение 1. Алгоритм непосредственного обращения выборочной ковариационной матрицы для антенной решётки, работающей по критерию минимизации среднего адаптивной квадрата ошибки, для конечной и бесконечной выборки входных данных и различных величин параметра α .

(Таблица получена на основе алгоритма последовательной регрессии, приведённого в книге Уидроу Б., Стирнз С. “Адаптивная обработка сигналов”. - М.: Радио и связь, 1989).

Краткое описание алгоритма	Алгоритм последовательной регрессии, $\alpha \in (0;1)$, $n \in [0;p]$, Уидроу Б., Стирнз С., 1989	Алгоритм последовательной регрессии, $\alpha = 1$, $n \in [0;p]$,
Оценка корреляционной матрицы ($\hat{\mathbf{R}}_k$)	$\hat{\mathbf{R}}_k = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{k+1}} \sum_{n=0}^k \alpha^{k-n} \bar{\mathbf{X}}_n \bar{\mathbf{X}}_n^T,$ $\bar{\mathbf{X}}$ - вектор входных сигналов	$\hat{\mathbf{R}}_k = \frac{1}{k+1} \sum_{n=0}^k \alpha^{k-n} \bar{\mathbf{X}}_n \bar{\mathbf{X}}_n^T,$ $\bar{\mathbf{X}}$ - вектор входных сигналов
$\bar{\mathbf{S}}$	$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{Q}_{k-1}^{-1} \bar{\mathbf{X}}_k$	$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{Q}_{k-1}^{-1} \bar{\mathbf{X}}_k$
γ	$\gamma = \alpha + \bar{\mathbf{X}}_k^T \bar{\mathbf{S}}$	$\gamma = 1 + \bar{\mathbf{X}}_k^T \bar{\mathbf{S}}$
Оценка матрицы, обратной к корреляционной матрице (\mathbf{Q}_k^{-1})	$\mathbf{Q}_k^{-1} = \frac{1}{\alpha} (\mathbf{Q}_{k-1}^{-1} - \frac{1}{\gamma} \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{S}}^T)$	$\mathbf{Q}_k^{-1} = \mathbf{Q}_{k-1}^{-1} - \frac{1}{\gamma} \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{S}}^T$
Начальные условия для матрицы \mathbf{Q}_k^{-1} (\mathbf{Q}_0^{-1})	$\mathbf{Q}_0^{-1} = (big\ const) \times \mathbf{I},$ \mathbf{I} - единичная матрица	$\mathbf{Q}_0^{-1} = (big\ const) \times \mathbf{I}$ \mathbf{I} - единичная матрица
Весовой вектор $\bar{\mathbf{W}}_{k+1}$, рекурсивная формула	$\bar{\mathbf{W}}_{k+1} = \bar{\mathbf{W}}_k + \frac{2\mu\lambda_{cp}(1-\alpha^{k+1})}{1-\alpha} \mathbf{Q}_k^{-1} \varepsilon_k \bar{\mathbf{X}}_k,$ ε_k - сигнал ошибки, μ - коэффициент адаптации, $\mu\lambda_{cp} \ll 1$	$\bar{\mathbf{W}}_{k+1} = \bar{\mathbf{W}}_k + 2\mu\lambda_{cp} \mathbf{Q}_k^{-1} \varepsilon_k \bar{\mathbf{X}}_k,$ ε_k - сигнал ошибки, μ - коэффициент адаптации, $\mu\lambda_{cp} \ll 1$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ОБОБЩЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО ГРАДИЕНТНОГО АЛГОРИТМА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ, ПРИМЕНЯЕМОГО ДЛЯ НАСТРОЙКИ АДАПТИВНЫХ АНТЕННЫХ РЕШЁТОК, ДЛЯ СЛУЧАЯ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ.

Задача выделения полезного сигнала на фоне помех в адаптивной антенной решётке формулируется следующим образом:

минимизировать мощность на выходе ААР

$$\vec{W}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W} \rightarrow \min \quad (\text{П2.1})$$

при условии выполнения ограничений

$$\mathbf{C}^H \vec{W} = \vec{H}, \quad (\text{П2.2})$$

где \vec{W} - вектор весовых коэффициентов; $\mathbf{C} \equiv [\vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_L]$ - матрица ограничений размерности $N \times L$, столбцами которой являются линейно - независимые векторы ограничений \vec{C}_l , L - число вводимых ограничений; $\vec{H} = [H_1, H_2, \dots, H_L]^T$ - вектор размерности L , компоненты которого задают фиксированные коэффициенты усиления ААР в направлениях векторов \vec{C}_l^* [65].

Дискретный градиентный алгоритм, удовлетворяющий указанным условиям, имеет вид [16,65]:

$$\vec{W}(k+1) = \mathbf{P}\{\vec{W}(k) - \mu \vec{X}^*(k) \vec{X}^T(k) \vec{W}(k)\} + \vec{W}_q. \quad (\text{П2.3})$$

Один из возможных вариантов обобщения данного алгоритма на случай искусственной нейронной сети можно сформулировать в виде - минимизировать выходную мощность искусственного нейрона i , принадлежащего слою α искусственной нейронной сети:

$$E_{i\alpha} = |Z_{i\alpha}|^2 \rightarrow \min \quad (\text{П2.4})$$

при условии выполнения ограничений

$$\mathbf{C}^H \vec{W}_{i\alpha} = \vec{H}, \quad (\text{П2.5})$$

где $Z_{i\alpha}(k)$ - выходной сигнал искусственного нейрона i , принадлежащего слою α ; $\vec{W}_{i\alpha}$ - вектор весовых коэффициентов данного искусственного нейрона.

Алгоритм, удовлетворяющий двум данным условиям, в самом общем виде может быть записан следующим образом [16]:

$$\vec{W}_{i\alpha}(k+1) = \vec{W}_{i\alpha}(k) - \mu L(\vec{W}_{i\alpha}), \text{ где} \quad (\text{П2.6})$$

$$L(\vec{W}_{i\alpha}) = \nabla_{\vec{W}} E_{i\alpha} + \mathbf{C} \vec{\lambda}(k) - \quad (\text{П2.7})$$

функция Лагранжа, позволяющая алгоритму удовлетворять обоим поставленным условиям. Учитывая, что входным сигналом искусственного нейрона из слоя α служит вектор выходных сигналов нейронов предыдущего слоя сети $\vec{Z}_{\alpha-1}$, можно записать функцию Лагранжа в виде:

$$L(\vec{W}_{i\alpha}) = 2F[\vec{Z}_{\alpha-1}^T \vec{W}_{i\alpha}] \cdot F'[\vec{Z}_{\alpha-1}^T \vec{W}_{i\alpha}] \vec{Z}_{\alpha-1}^T + \mathbf{C}\vec{\lambda}(k). \quad (\text{П2.8})$$

Подставим формулу (П2.8), описывающую функцию Лагранжа, в уравнение алгоритма (П2.6). Тогда имеем:

$$\vec{W}_{i\alpha}(k+1) = \vec{W}_{i\alpha}(k) - \mu(2F[\vec{Z}_{\alpha-1}^T \vec{W}_{i\alpha}] \cdot F'[\vec{Z}_{\alpha-1}^T \vec{W}_{i\alpha}] \vec{Z}_{\alpha-1}^T + \mathbf{C}\vec{\lambda}(k)). \quad (\text{П2.9})$$

Найдём вид неопределённого множителя Лагранжа $\vec{\lambda}(k)$. Для этого учтём, что уравнение настройки весового вектора (П2.6, П2.9) должно удовлетворять уравнению ограничений (П2.5). Подставив (П2.9) в (П2.5), получим:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \mathbf{C}^H \vec{W}_{i\alpha}(k+1) = \\ &= \mathbf{C}^H \{ \vec{W}_{i\alpha}(k) - \mu(2F[\vec{Z}_{\alpha-1}^T \vec{W}_{i\alpha}] \cdot F'[\vec{Z}_{\alpha-1}^T \vec{W}_{i\alpha}] \vec{Z}_{\alpha-1}^T + \mathbf{C}\vec{\lambda}(k)) \}. \end{aligned} \quad (\text{П2.10})$$

Раскрывая скобки и выражая в (П2.10) неопределённый множитель Лагранжа $\vec{\lambda}(k)$, имеем:

$$\begin{aligned} \vec{\lambda}(k) &= \frac{1}{\mu} [\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{C}^H \vec{W}_{i\alpha} - \\ &- [\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{C}^H 2F[\vec{Z}_{\alpha-1}^T \vec{W}_{i\alpha}] F'[\vec{Z}_{\alpha-1}^T \vec{W}_{i\alpha}] \vec{Z}_{\alpha-1}^T - \frac{1}{\mu} [\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{C}^H \vec{H}. \end{aligned} \quad (\text{П2.11})$$

Заменяя в уравнении настройки весового вектора (П2.9) неопределённый множитель Лагранжа его конкретным видом, представленным формулой (П2.11), получим вид уравнения для \vec{W} :

$$\vec{W}_{i\alpha}(k+1) = \mathbf{P}\{ \vec{W}_{i\alpha}(k) - 2\mu \vec{Z}_{\alpha-1}^T F[\vec{Z}_{\alpha-1}^T \vec{W}_{i\alpha}] \cdot F'[\vec{Z}_{\alpha-1}^T \vec{W}_{i\alpha}] \} + \vec{W}_q, \quad (\text{П2.12})$$

где \mathbf{P} - проекционная матрица, обеспечивающая введение многократных линейных ограничений на диаграмму направленности ИН вида [49,65]:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H; \quad (\text{П2.13})$$

$$\vec{W}_q = \mathbf{C}[\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1} \vec{H}. \quad (\text{П2.14})$$

вектор комплексных весовых коэффициентов, соответствующих диаграмме направленности покоя (при отсутствии внешних помех) [49,65].

Полученные формулы (П2.5, П2.12-П2.14) представляют собой дискретный градиентный с ограничениями алгоритм настройки весового вектора нейрона i , принадлежа-

щего слою α искусственной нейронной сети, где в качестве критерия оптимизации выбрана минимизация выходной мощности данного нейрона.

Перепишем данный алгоритм в виде, применимом, для всей искусственной нейронной сети:

$$W_{ij}(k+1) = \mathbf{P}\{W_{ij}(k) - 2\mu \bar{Z}_{\alpha-1}^T F \left[\sum_{j=1}^{N_{\alpha-1}} Z_{j(\alpha-1)}(k) W_{ij}(k) \right] \cdot F' \left[\sum_{j=1}^{N_{\alpha-1}} Z_{j(\alpha-1)}(k) W_{ij}(k) \right]\} + \bar{W}_q, \quad (\text{П2.15})$$

где \mathbf{P} и \bar{W}_q заданы выражениями (П2.13) и (П2.14), $\alpha = 1, M$ (M - число слоёв сети); $i = 1, N_\alpha$ (N_α - число нейронов в слое α); $j = 1, N_{\alpha-1}$ ($N_{\alpha-1}$ - число нейронов в слое $\alpha - 1$); $W_{ij}(k)$ - весовой вектор, соединяющий нейрон i слоя α и нейрон j слоя $\alpha - 1$ в момент времени k .

При работе искусственной нейронной сети по данному алгоритму настройка весовых коэффициентов будет проводиться независимо и одновременно с настройкой весовых векторов других нейронов. Данный алгоритм настраивается «без учителя» и в качестве критерия оптимизации содержит минимизацию выходной мощности каждого нейрона при условии выполнения уравнения ограничений для соответствующего искусственного нейрона.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. ОБОБЩЕНИЕ АЛГОРИТМА РЕКУРРЕНТНОГО ОБРАЩЕНИЯ ВЫБОРОЧНОЙ ОЦЕНКИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ, ПРИМЕНЯЕМОГО ДЛЯ НАСТРОЙКИ АДАПТИВНЫХ АНТЕННЫХ РЕШЁТОК, ДЛЯ СЛУЧАЯ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ.

Задача выделения полезного сигнала на фоне помех в адаптивной антенной решётке формулируется следующим образом:

минимизировать мощность на выходе ААР

$$\vec{W}^H \mathbf{R}_{XX} \vec{W} \rightarrow \min \quad (\text{П3.1})$$

при условии выполнения ограничений

$$\mathbf{C}^H \vec{W} = \vec{H}, \quad (\text{П3.2})$$

где \vec{W} - вектор весовых коэффициентов; $\mathbf{C} \equiv [\vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_L]$ - матрица ограничений размерности $N \times L$, столбцами которой являются линейно - независимые векторы ограничений \vec{C}_l , L - число вводимых ограничений; $\vec{H} = [H_1, H_2, \dots, H_L]^T$ - вектор размерности L , компоненты которого задают фиксированные коэффициенты усиления ААР в направлениях векторов \vec{C}_l^* [65].

Быстрый рекуррентный алгоритм, удовлетворяющий указанным условиям, имеет вид [18]:

$$\vec{W}(k) = \vec{W}_q + \mathbf{P} \vec{V}(k) \quad (\text{П3.3})$$

$$\vec{V}(k) = \vec{V}(k-1) - \mu (\mathbf{P} \hat{\mathbf{R}}_k \mathbf{P})^+ \mathbf{P} \vec{X}^*(k) \vec{X}^T(k) \vec{W}(k-1) \quad (\text{П3.4})$$

$$(\mathbf{P} \hat{\mathbf{R}}_k \mathbf{P})^+ = \mathbf{Q} - \frac{\mu \mathbf{Q} \mathbf{P} \vec{X}^*(k) \vec{X}^T(k) \mathbf{P} \mathbf{Q}}{1 + \mu \vec{X}^T(k) \mathbf{P} \mathbf{Q} \mathbf{P} \vec{X}^*(k)}, \quad (\text{П3.5})$$

$$\text{где } \mathbf{Q} = \frac{1}{1 - \mu} (\mathbf{P} \hat{\mathbf{R}}_{k-1} \mathbf{P})^+. \quad (\text{П3.6})$$

Однако можно показать, что данный алгоритм может быть записан в следующем виде:

$$\vec{W}(k+1) = \mathbf{P} \{ \vec{W}(k) - \mu (\mathbf{P} \hat{\mathbf{R}}_k \mathbf{P})^+ \vec{X}^*(k) \vec{X}^T(k) \vec{W}(k) \} + \vec{W}_q. \quad (\text{П3.7})$$

Один из возможных вариантов обобщения данного алгоритма на случай искусственной нейронной сети можно сформулировать в виде - минимизировать выходную мощность искусственного нейрона i , принадлежащего слою α искусственной нейронной сети:

$$E_{i\alpha} = |Z_{i\alpha}|^2 \rightarrow \min \quad (\text{П3.8})$$

при условии выполнения ограничений

$$\mathbf{C}^H \vec{W}_{i\alpha} = \vec{H}, \quad (\text{П3.9})$$

где $Z_{i\alpha}(k)$ - выходной сигнал искусственного нейрона i , принадлежащего слою α ; $\vec{W}_{i\alpha}$ - вектор весовых коэффициентов данного искусственного нейрона.

Алгоритм, удовлетворяющий двум данным условиям, в самом общем виде может быть записан следующим образом [16]:

$$\vec{W}_{i\alpha}(k+1) = \vec{W}_{i\alpha}(k) - \mu L(\vec{W}_{i\alpha}), \text{ где} \quad (\text{ПЗ.10})$$

$$L(\vec{W}_{i\alpha}) = \nabla_{\vec{W}} E_{i\alpha} + \mathbf{C} \vec{\lambda}(k) - \quad (\text{ПЗ.11})$$

функция Лагранжа, позволяющая алгоритму удовлетворять обоим поставленным условиям. Учитывая, что входным сигналом искусственного нейрона из слоя α служит вектор выходных сигналов нейронов предыдущего слоя сети $\vec{Z}_{\alpha-1}$, можно записать функцию Лагранжа в виде:

$$L(\vec{W}_{i\alpha}) = 2(PR_k P)^+ F[\vec{Z}_{\alpha-1}^T \vec{W}_{i\alpha}] \cdot F'[\vec{Z}_{\alpha-1}^T \vec{W}_{i\alpha}] \vec{Z}_{\alpha-1}^T + \mathbf{C} \vec{\lambda}(k). \quad (\text{ПЗ.12})$$

Подставим формулу (ПЗ.12), описывающую функцию Лагранжа, в уравнение алгоритма (ПЗ.10). Тогда имеем:

$$\vec{W}_{i\alpha}(k+1) = \vec{W}_{i\alpha}(k) - \mu(2(PR_k P)^+ F[\vec{Z}_{\alpha-1}^T \vec{W}_{i\alpha}] \cdot F'[\vec{Z}_{\alpha-1}^T \vec{W}_{i\alpha}] \vec{Z}_{\alpha-1}^T + \mathbf{C} \vec{\lambda}(k)). \quad (\text{ПЗ.13})$$

Найдём вид неопределённого множителя Лагранжа $\vec{\lambda}(k)$. Для этого учтём, что уравнение настройки весового вектора (ПЗ.7, ПЗ.13) должно удовлетворять уравнению ограничений (ПЗ.9). Подставив (ПЗ.13) в (ПЗ.9), получим:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \mathbf{C}^H \vec{W}_{i\alpha}(k+1) = \\ &= \mathbf{C}^H \{ \vec{W}_{i\alpha}(k) - \mu(2(PR_k P)^+ F[\vec{Z}_{\alpha-1}^T \vec{W}_{i\alpha}] \cdot F'[\vec{Z}_{\alpha-1}^T \vec{W}_{i\alpha}] \vec{Z}_{\alpha-1}^T + \mathbf{C} \vec{\lambda}(k)) \} \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.14})$$

Раскрывая скобки и выражая в (ПЗ.14) неопределённый множитель Лагранжа $\vec{\lambda}(k)$, имеем:

$$\begin{aligned} \vec{\lambda}(k) &= \frac{1}{\mu} [\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{C}^H \vec{W}_{i\alpha} - \\ &- [\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{C}^H 2(PR_k P)^+ F[\vec{Z}_{\alpha-1}^T \vec{W}_{i\alpha}] F'[\vec{Z}_{\alpha-1}^T \vec{W}_{i\alpha}] \vec{Z}_{\alpha-1}^T - \frac{1}{\mu} [\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{C}^H \vec{H} \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.15})$$

Заменяя в уравнении настройки весового вектора (ПЗ.13) неопределённый множитель Лагранжа его конкретным видом, представленным формулой (ПЗ.15), получим вид уравнения для \vec{W} :

$$\vec{W}_{i\alpha}(k+1) = \mathbf{P} \{ \vec{W}_{i\alpha}(k) - 2\mu(PR_k P)^+ \vec{Z}_{\alpha-1}^T F[\vec{Z}_{\alpha-1}^T \vec{W}_{i\alpha}] \cdot F'[\vec{Z}_{\alpha-1}^T \vec{W}_{i\alpha}] \} + \vec{W}_q, \quad (\text{ПЗ.16})$$

где \mathbf{P} - проекционная матрица, обеспечивающая введение многократных линейных ограничений на диаграмму направленности ИН вида [49,65]:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H; \quad (\text{ПЗ.17})$$

$$\vec{W}_q = \mathbf{C}[\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1} \vec{H} - \quad (\text{ПЗ.18})$$

вектор комплексных весовых коэффициентов, соответствующих диаграмме направленности покоя (при отсутствии внешних помех) [49,65].

Полученные формулы (ПЗ.9, ПЗ.16-ПЗ.18) представляют собой быстрый рекуррентный алгоритм настройки весового вектора нейрона i , принадлежащего слою α искусственной нейронной сети, где в качестве критерия оптимизации выбрана минимизация выходной мощности данного нейрона.

Перепишем данный алгоритм в виде, применимом, для всей искусственной нейронной сети:

$$W_{ij}(k+1) = \mathbf{P}\{W_{ij}(k) - 2\mu \times \\ \times (P\hat{R}_k P)^+ \vec{Z}_{\alpha-1}^T F \left[\sum_{j=1}^{N_{\alpha-1}} Z_{j(\alpha-1)}(k) W_{ij}(k) \right] \cdot F' \left[\sum_{j=1}^{N_{\alpha-1}} Z_{j(\alpha-1)}(k) W_{ij}(k) \right] \} + \vec{W}_q, \quad (\text{ПЗ.19})$$

где \mathbf{P} и \vec{W}_q заданы выражениями (ПЗ.17) и (ПЗ.18), $\alpha = 1, M$ (M - число слоёв сети); $i = 1, N_\alpha$ (N_α - число нейронов в слое α); $j = 1, N_{\alpha-1}$ ($N_{\alpha-1}$ - число нейронов в слое $\alpha - 1$); $W_{ij}(k)$ - весовой вектор, соединяющий нейрон i слоя α и нейрон j слоя $\alpha - 1$ в момент времени k .

При работе искусственной нейронной сети по данному алгоритму настройка весовых коэффициентов будет проводиться независимо и одновременно с настройкой весовых векторов других нейронов. Данный алгоритм настраивается «без учителя» и в качестве критерия оптимизации содержит минимизацию выходной мощности каждого нейрона при условии выполнения уравнения ограничений для соответствующего искусственного нейрона.