

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова
Российской академии наук

На правах рукописи

ВЕСНИК Михаил Владимирович



ПОСТРОЕНИЕ НОВЫХ ЭВРИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ
ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ
ДЛЯ АНАЛИЗА РАССЕЯНИЯ НА ТЕЛАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

01.04.03 - Радиофизика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико – математических наук

Научный консультант
доктор физико – математических наук,
профессор Б. Г. КУТУЗА

МОСКВА 2018г.

ОГЛАВЛЕНИЕ		Стр.
ВВЕДЕНИЕ		4
В.1	Предисловие	4
В.2	Общая характеристика работы	12
ГЛАВА 1.	ОСНОВЫ МЕТОДА МЕТОД ОБОБЩЕННОГО ЭЙКОНАЛА	20
1.1	Математическая постановка задачи дифракции	20
1.2	Построение интегральных представлений решения	21
1.2.1	Построение «вспомогательной» области и обобщенной функции геометрической оптики	21
1.2.2.	Требования к замене переменной	24
1.2.3.	Построение интегрального представления в общем виде	24
1.2.4.	Удовлетворение граничным условиям	27
1.2.5.	Продолжение решения с базовой кривой	27
1.3	Асимптотическое вычисление контурных интегралов	27
1.3.1	Получение решения в общем виде	28
1.3.2	Особенности решения и эвристический подход	34
1.3.3	Решение задачи дифракции плоской и цилиндрической волны на клине при помощи метода обобщенного эйконала	35
ГЛАВА 2.	РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА ОБОБЩЕННОГО ЭЙКОНАЛА	43
2.1	Решения задач дифракции на идеально проводящих полупластине и усеченном клине при помощи метода обобщенного эйконала	44
2.1.1	Интеграл Шварца – Кристоффеля	46
2.2	Дифракция на полупластине	47
2.2.1	Получение решения на заданной базовой кривой и физическое обоснование эвристического подхода	52
2.2.2	Нормировка по мощности	54
2.2.3	Решение методом последовательных дифракций	60
2.2.4	Результаты расчета	62
2.2.5	Анализ особенностей решения на полупластине	70
2.3	Дифракция на усеченном клине	70
2.3.1	Принципы построения эвристического решения задачи дифракции на усеченном клине	72
2.3.2	Решение с обобщенным интегралом Френеля	73
2.3.3	Результаты численного расчета	75
2.3.4	Анализ полученных решений	77
2.4	Применение решений метода обобщенного эйконала	79
2.4.1	Сравнение подходов	79
2.4.2	Структура решения в методе обобщенного эйконала	80
2.4.3	Выделение дифракционных коэффициентов из решения	81
ГЛАВА 3.	ПРИМЕНЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ РЕШЕНИЙ МЕТОДА ОБОБЩЕННОГО ЭЙКОНАЛА В СЛУЧАЕ НАКЛОННОГО ПАДЕНИЯ НА КРОМКУ	82
3.1	Интегралы по элементарным полоскам	82
3.1.1	Физическая постановка задачи дифракции	82
3.1.2	Бесконечный цилиндр	84
3.1.3	Условие дальней зоны	85
3.1.4	Фрагмент цилиндрической поверхности	87
3.1.5	Образующая в виде ломаной линии	88
3.2	Решение трехмерных задач при помощи двумерных решений	91
3.2.1	Решение задачи дифракции на плоском рассеивателе в приближении физической оптики. Свойство контурного интеграла	91
ГЛАВА 4.	ПРИМЕНЕНИЕ РЕШЕНИЙ МЕТОДА ОБОБЩЕННОГО ЭЙКОНАЛА В ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ НА ПЛОСКОМ УГЛОВОМ СЕКТОРЕ	95
4.1	Решение в приближении физической оптики	97
4.1.1	Контурный интеграл с навязанным условием дальней зоны	99

4.1.2	Вклады кромок и вершин	100
4.2	Решение в приближении метода эквивалентных контурных токов	105
4.2.1	Строгое решение для наклонного падения	105
4.2.2	Замена поляризованных составляющих дифракционных коэффициентов	107
4.3	Модифицированный метод эквивалентных контурных токов	110
4.4.	Пределы применимости эвристических подходов при расчете дифракции электромагнитных волн на многогранниках и других рассеивателях	116
4.4.1	Алгоритм получения решения	116
4.4.2	Пределы применимости эвристических решений	118
ГЛАВА 5. ПРИМЕНЕНИЕ РЕШЕНИЙ МЕТОДА ОБОБЩЕННОГО ЭЙКОНАЛА ДЛЯ ТЕЛ С НЕИДЕАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ		120
5.1	Получение эвристического решения	120
5.1.1	Сводка известных формул	120
5.1.2	Геометрооптические коэффициенты отражения и прохождения	122
5.1.3	Построение эвристического решения	123
5.2	Верификация эвристического решения	125
5.3	Точность полученных формул и их применение в трехмерных задачах дифракции	126
ГЛАВА 6. МЕТОД БАЗОВЫХ КОМПОНЕНТОВ		131
6.1	Введение	133
6.2	Эвристические подходы. Геометрическая теория дифракции и метод краевых волн	134
6.3	Новый эвристический подход – метод базовых компонентов	135
6.4	Интегральное представление на основе метода обобщенного эйконала	136
6.5	Решение в приближении физической оптики	137
6.6	Анализ дифракционных коэффициентов	138
6.7	Базовые компоненты и приемы метода базовых компонентов	144
6.8	Последовательность действий в методе базовых компонентов	146
6.9	Верификация решения задачи дифракции на идеально проводящей полуплоскости	147
6.10	Точность и эффективность эвристических методов	150
6.11	Примеры применения метода базовых компонентов	152
6.12	Заключение к главе 6	153
7.	ПРИЛОЖЕНИЯ	155
	Приложение 1. Применение теоремы Стокса при решении задач дифракции.	155
	Приложение 2. Строгое аналитическое решение двумерной задачи дифракции на полуплоскости.	164
	Приложение 3. Применение условной кромки при решении задач дифракции.	171
	Приложение 4. Сводка формул, применяемых в задаче дифракции на плоском угловом секторе.	177
	Приложение 5. Интеграл Френеля и его свойства.	183
	Приложение 6. Обобщенный интеграл Френеля и его свойства.	185
	Приложение 7. Дифракция электромагнитной волны на полупрозрачной пластине в приближении физической оптики.	187
	Приложение 8. Распространение радиоволн в городских условиях	191
	Приложение 9. Аналитическое эвристическое решение задачи дифракции волнового поля на плоском рассеивателе многоугольной формы	208
	Приложение 10. Исследование задачи дифракции электромагнитной волны на трехмерном идеально проводящем рассеивателе	218
ЗАКЛЮЧЕНИЕ		237
ЛИТЕРАТУРА		242

ВВЕДЕНИЕ

В.1 Предисловие

При изучении задач дифракции особый интерес представляют рассеиватели в форме многоугольников и многогранников. Дифракция на многоугольниках и многогранниках изучалась ранее во многих работах. Есть монографии (см., например, [1]), сыгравшие в исследовании этого вопроса важную роль, признанную мировой наукой. Есть монографии (см., например, [2]), специально посвященные именно этой тематике. Тем не менее, научный интерес к получению аналитических решений задач дифракции на подобных объектах не пропадает, а исследования далеки от завершения. Помимо практических приложений, о которых пойдет речь ниже, существует ряд других причин, объясняющих продолжение этих работ. Одна из причин состоит в том, что на многоугольниках и многогранниках особенно четко видны характерные особенности дифракционных явлений. Другая причина состоит в том, что аналитические выражения для таких объектов получать очень долго и трудно.

Задачи дифракции можно решать при помощи различных подходов.

Численные подходы. Как известно, наибольшую точность дифракционных решений можно получить, применяя численные подходы. Однако их использование требует наличия соответствующих программных пакетов. Кроме того, для решения некоторых актуальных задач (например, вычисления эффективной поверхности рассеяния больших объектов или рассеяния электромагнитных волн объектами городской застройки) даже при современном уровне компьютерной техники может не хватить вычислительных ресурсов. Вдобавок, численные методы – это вид компьютерного эксперимента, они дают решение в целом, без разделения на вклад отдельных геометрических элементов, составляющих рассеиватель, что затрудняет интерпретацию результатов расчета.

Математическая постановка краевой задачи включает в себя пять элементов [3]: волновое уравнение (а), начальные (б) и граничные условия (в). Для обеспечения единственности решения к этим пунктам добавляют условие на бесконечности (г) и условие на ребре (д). При помощи численных методов находят на компьютере решение, удовлетворяющее всем условиям краевой задачи. Применение численных подходов требует наличия соответствующих программных пакетов.

В настоящее время бурно развиваются как численные методы, так и компьютерная техника. Получено много численных решений разнообразных задач. Это создает дополнительные возможности для построения верификационных решений, которые можно использовать при построении эвристических формул.

Строгие аналитические подходы. Строгие аналитические решения представляют собой предмет исключительной важности и ценности. Помимо прочего, они позволяют проверить как нестрогие аналитические формулы, так и численные решения, которые могут содержать неточности или ошибки. К сожалению, строгие аналитические формулы существуют лишь для небольшого числа рассеивателей с достаточно простой геометрией. Асимптотические решения зачастую представляют собой сложные наборы выражений, например, в виде бесконечных рядов спецфункций, и по затруднениям в ясной интерпре-

тации результата не уступают численным решениям. При необходимости повышения эффективности решения, например, обратной задачи, наличие надежного численного или асимптотического решения не отменяет необходимость построения эвристических формул.

Строгие аналитические методы обычно основаны на методе разделения переменных. Система координат, в которой применяется этот метод, определяется геометрией задачи. Под геометрией задачи понимаем форму рассеивателя, а также взаимное расположение источника и точки наблюдения по отношению к рассеивателю и друг к другу. Решение получается в квадратурах или в виде выражений явного вида, в том числе – в виде бесконечных рядов спецфункций.

Первые строгие аналитические решения были получены довольно давно [4 – 12] и относятся в основном к двумерным задачам дифракции на полуплоскости и клине. Дальнейшее развитие строгих аналитических решений связано с методом Винера-Хопфа [13 – 14] и с исследованием объектов, геометрия которых подобрана под специальные системы координат [15].

Как уже говорилось ранее, строгие аналитические решения, как правило, очень сложны. Это связано со сложностью описания систем координат для угловых и многогранных областей, а также со сложностью специальных функций, образующих ортогональную систему в данных координатах. Даже для простой ключевой задачи (плоского углового сектора) приходится использовать сфероконическую систему координат. Поэтому строгих аналитических решений получено намного меньше, чем приближенных, а работа над новыми решениями такого типа требует значительно больше времени. В качестве иллюстрации этого утверждения напомним, сколько времени прошло между получением двумерного решения для дифракции на идеально проводящей полуплоскости 1894г. и 1896г. [4, 5] и решением для дифракции на идеально проводящем плоском угловом секторе 2003г. [16]. Как видим, прошло более 100 (!) лет, несмотря на то, что в течение всего этого периода интерес к указанной задаче не пропадал (см., например, [17 – 21]), на данную тему было написано несколько диссертаций [22 – 24].

Такое усложнение произошло в результате добавления всего одного изгиба прямолинейной кромки в задаче дифракции на полуплоскости. После добавления этого изгиба двумерная задача переходит в разряд трехмерных. Может быть и другое усложнение: изгиб образующей двумерного клина преобразует его в пару клиньев. При этом задача остается двумерной, но к ней добавляется размерный параметр (расстояние между клиньями). В практике вполне возможно сочетание двух вышеуказанных изменений геометрии (трехмерность + размерный параметр). Добавление граничных условий приводит к еще большему усложнению задачи построения строгих аналитических выражений. На тему дифракции на двух клиньях также написано множество работ [25 – 33].

Строгие, численные и асимптотические методы исследовались также в [34 – 40].

Иногда для решения какой-либо научной или технической проблемы желательно применить аналитическую формулу, которой нет в наличии, поскольку ее получение связано со значительными трудностями. Или строгая аналитическая формула есть, но ее невозможно использовать для целей конкретного исследования. В данной диссертации предложены методы, позволяющие получать эвристические аналитические формулы теории ди-

фракции, в том числе – и для тех задач, строгое аналитическое решение для которых отсутствует. Для получения строгих решений требуется время (иногда – десятки лет) и значительные усилия. И даже если эти многолетние усилия заканчиваются положительным результатом (а бывает и по-другому), то выражения могут получиться очень сложными, громоздкими, плохо поддаваться необходимым аналитическим преобразованиям, обладать недостаточной физичностью. Поэтому для получения аналитических выражений часто применяют так называемые «эвристические» подходы.

Эвристические подходы. Данные решения представляют собой совокупность аналитических формул и алгоритмов их применения. Они используются в том случае, когда строгое аналитическое решение отсутствует, или применение его нецелесообразно, например, в связи с низким быстродействием или сложностью интерпретации результатов расчета. Как правило, строгое математическое обоснование эвристического подхода отсутствует, однако правомерность его применения подтверждается сравнением с численными результатами, предельными переходами к известным случаям или другими способами (например, сравнением с численными или экспериментальными результатами). С другой стороны, сравнение с известными результатами позволяет уточнить эвристическое решение.

Различные подходы имеют как достоинства, так и недостатки, на основе которых принимают решение о выборе того или иного подхода для расчета.

Главная характеристика решения – это его точность. Среди дополнительных характеристик можно выделить следующие: математическая строгость, простота получения решения (в том числе – необходимость использования специального программного обеспечения), аналитический вид решения, простой вид формул, быстродействие, физичность. Под физичностью подразумеваем возможность разобраться в том, какие именно параметры условия задачи влияют на те или иные характеристики решения. Наилучшей физичностью обладают простые выражения, в которые каждый из параметров условия задачи входит один или минимальное число раз.

Особенности численных подходов. Позволяют найти решения требуемой точности для любых задач. Если размерность решаемой задачи слишком большая, то вместо решения полной задачи в строгой постановке можно построить гибридное решение, совмещающее в себе численные и эвристические подходы. Недостатки – относительно низкое быстродействие, необходимость разработки или приобретения пакетов прикладных программ, необходимость в наличии сотрудников, способных разработать или эксплуатировать соответствующие программы и операционные системы на соответствующих компьютерах, а также – отсутствие физичности.

Особенности строгих аналитических подходов. Решения в явном виде или в квадратурах существуют лишь для ограниченного числа объектов с наиболее простой геометрией. При усложнении геометрии трудоемкость получения таких решений существенно возрастает, строгие выражения становятся громоздкими и могут содержать редко применяемые и малоизученные спецфункции. Кроме того, строгие аналитические решения имеют относительно простую форму лишь для считанного числа объектов с простой геометрией, или для объектов, геометрия которых подобрана под специальные системы координат, в кото-

рых удается получить решение [15]. Даже при незначительном изменении формы рассеивателя работу по разработке строгого аналитического решения приходится начинать заново.

Особенности эвристических подходов. Главный недостаток – отсутствие строгости. Этот недостаток приводит к необходимости верификации (проверки) эвристических формул при помощи более строгого и надежного решения. Таким верификационным решением может быть строгое аналитическое или численное решение.

Эвристические подходы, обладая такими важными для практического применения преимуществами, как простота, быстрое действие и физичность, ни в коем случае не отменяют строгие (и более точные) аналитические подходы. Решения, полученные на основе строгих подходов (разумеется, при их наличии) можно использовать в качестве эталонных задач, верификационных решений, а также класть в основу эвристических решений в случаях, когда отсутствуют более точные численные верификационные решения.

Характерные черты известных эвристических подходов.

Метод геометрической оптики (ГО) [41]. В приближении этого метода считаем, что в «освещенной» части пространства решение равно полю в отсутствие рассеивателя, а в теневой части решение равно нулю. Дает решение только в двух выделенных направлениях: зеркальном и «прострельном». Не учитывает дифракцию. По своей сути этот метод не подходит для решения задач дифракции, но зато он является основой для других методов – ФО и ФТД. Именно от границ «свет – тень», определяемых геометрооптическим решением, отсчитывается угловое расстояние, являющееся параметром итоговых решений ФО, ГТД и ФТД.

Метод физической оптики (ФО) [3, 42 – 44, 141, 142, 145]. В приближении этого метода рассеянное поле ищем в виде интеграла по поверхности. При этом поле, которое интегрируем, берем в приближении ГО, т.е. предполагаем, что возмущение поля вблизи краев отсутствует, хотя такое предположение никогда не выполняется в реальных задачах. Возмущение поля вблизи краев есть всегда, хотя оно не всегда дает вклад в интеграл по поверхности. Поэтому иногда приближение физической оптики дает достаточно точное решение в некоторых направлениях точки наблюдения, что позволяет использовать это свойство при решении практических задач. Если поле на поверхности брать строго, то после интегрирования получим строгое решение. Но проблема в том, что мы не знаем заранее, каким будет строгое значение поля на поверхности трехмерного рассеивателя.

ФО дает решение во всем пространстве, но правильное – в двух выделенных направлениях (зеркальном и «прострельном») и в их небольшой окрестности. Нуждается в наличии ГО решения для безграничной плоской поверхности. Данное решение интегрируется по поверхности рассеивателя. Этот интеграл лежит в основе метода ФО. Не учитывает возмущение поля вблизи кромок и вершин.

Привлекательность метода физической оптики состоит в том, что, будучи не очень сложным, он тем не менее гарантированно приводит к решению, соответствующему физическому смыслу задачи. Максимумы сигнала находятся там, где им и положено быть, а именно – на дифракционных конусах. В отношении амплитуды и поляризации рассеянного сигнала допускается определенная неточность. Считается общеизвестным, что строгие

решения для дифракции на трехмерных объектах сложной формы, как правило, отсутствуют или же их по разным причинам очень трудно получить.

В самом простом приближении ФО можно получить грубое решение для любого рассеивателя. В случае дифракции электромагнитной волны на полуплоскости приближение ФО дает решение, удовлетворяющее почти всем условиям краевой задачи, за исключением условия на ребре. Условие на ребре приводит решение в соответствие с заданной системой координат.

Фактор простоты может являться решающим при принятии решения о применении того или иного метода для решения конкретных физических задач. Поэтому приближение ФО является таким популярным. Тем не менее, в данной диссертации будет показано, что решение, полученное при помощи физической оптики, можно существенно уточнить без значительного усложнения методики и результирующих аналитических выражений. Уточнения, о которых идет речь, касаются учета влияния кромок, вершин и граничных условий.

Строгие решения наиболее точные, но и самые сложные. Поэтому можно считать, что вся столетняя история современной теории дифракции посвящена преодолению, казалось бы, небольшого, но, как выясняется, довольно трудоемкого шага от точности приближения ФО до точности строгого решения.

Метод геометрической теории дифракции (ГТД) [45 – 50]. В приближении этого метода дифракция на теле конечного размера происходит точно так же, как в ключевой задаче для безграничного рассеивателя. Нуждается в наличии строгого решения задачи дифракции на кромке. Дает решение только в точках наблюдения, соответствующих условию стационарной фазы, т.е. только на дифракционных конусах. При отсутствии на кромках точек стационарной фазы классическая формулировка этого метода нуждается в модификации.

Метод физической теории дифракции (ФТД), или метод краевых волн (МКВ) [1, 51, 52]. Существуют и модификации МКВ. Это метод дифференциальных дифракционных коэффициентов, метод эквивалентных контурных токов и другие [53 – 56]. В приближении МКВ поле на кромке многогранника конечного размера равно полю на кромке такой же формы, но имеющей бесконечную длину. Нуждается в наличии строгого решения задачи дифракции на кромке. Дает решение во всем пространстве, но правильное – на дифракционных конусах и в их небольшой окрестности. Учитывает возмущение поля вблизи кромок, но не учитывает возмущение поля вблизи вершин.

В основе ряда эвристических подходов лежат решения ключевых задач.

Эвристическое решение задачи дифракции на многоугольнике или многограннике можно четко разделить на составляющие (ключевые задачи), описывающие вклад отдельных компонентов рассеивателя – граней, ребер (кромок) и вершин.

Дифракция на кромках. Данная ключевая задача представляет собой двумерную задачу дифракции на кромке бесконечной длины. Если плоская волна падает на кромку не в нормальном направлении, а под наклоном, то рассеяние происходит лишь под определенным углом по отношению к кромке [4 – 12, 57].

Дифракция на вершинах. Здесь речь идет о рассеянии на плоском угловом секторе, пирамидальном угле или конусе [16, 58]. Эвристические подходы также дают «вершинные волны», но подобные решения, как правило, неточны и отличаются от строгого решения.

Учет неидеальных граничных условий на поверхности рассеивателя (см., например, [42, 58]). Подобный учет можно проводить как для двумерных кромок, так и для вершин. К настоящему моменту решение для дифракции электромагнитной волны на плоском угловом секторе получено лишь для идеальных граничных условий. Самое простое решение, учитывающее граничные условия, можно получить для случая взаимодействия волны с безграничной плоской поверхностью [42].

Классификация ключевых решений по сложности в зависимости от их размерности. Проще всего получать одномерные «1D» решения, описывающие взаимодействие плоской волны с безграничной плоской поверхностью. Решения для дифракции на кромках при нормальном падении можно классифицировать как имеющие размерность «2D». При наклонном падении решение усложняется, его размерность можно классифицировать как «2,5D». Самые сложные ключевые решения описывают дифракцию на вершинах, их размерность можно классифицировать как «3D».

Необходимость применения эвристических решений определяется рядом факторов:

1. Строгие решения в виде плохо сходящихся рядов спецфункций доступны в основном опытным специалистам. В инженерных применениях желательно работать с более простыми и надежными формулами.
2. Строгие аналитические и численные методы дают решения модельной задачи на объекте в целом и не дают понимания того, каким образом отдельные части этого объекта влияют на рассеянный сигнал.
3. Строгие аналитические решения становятся бесполезными при небольшом изменении геометрии или свойств поверхности объекта (например, при появлении толщинки у полуплоскости или плоского углового сектора, среза торца у клина или при необходимости расчета дифракции на объекте с неидеальными граничными условиями).

Существуют различные способы построения эвристических решений для задачи рассеяния на объектах сложной формы. Этому вопросу посвящено много статей и монографий. Геометрическая теория дифракции (ГТД) [48, 49], применяемая для нахождения решения задачи рассеяния во многих случаях, оказалась непригодна для расчета ЭПР объектов, построенных по технологии «Стелс», т.е. имеющих форму, состоящую из фрагментов многогранников. Для расчета этих объектов подошла физическая теория дифракции (ФТД) [1, 51, 52]. На основе ФТД были разработаны метод дифференциальных дифракционных коэффициентов (ДДК, в англоязычной литературе – метод ILDS, «incremental length diffraction coefficients») и метод эквивалентных контурных токов (метод ЭКТ, в англоязычной литературе – метод ЕЕС, «equivalent edge currents») [53 – 56]. Существуют и другие эвристические методы решения задач дифракции [25, 41, 59, 60, 150, 154, 162, 163].

Мы упомянули лишь некоторые источники, на которые есть ссылки в данной диссертации, однако история вопроса этими работами не ограничивается. Полный список может составить десятки книг и диссертаций, сотни статей и докладов. Тем не менее, на эту тему

появляются все новые работы, в том числе в связи с необходимостью получения более простых и точных решений.

Терминология, применяемая в диссертации

Скажем несколько слов о терминологии, применяемой в диссертации. Для упрощения изложения вместо комбинации слов «в приближении физической оптики» иногда будем говорить «физоптический». Говоря о применяемых в трехмерных решениях объектах, взятых из строгого двумерного решения, будем говорить «строгий», хотя на самом деле математической строгости нет, поскольку речь идет об эвристическом решении.

Для устранения возможного недопонимания приведем объяснение некоторых терминов, которые встречаются в диссертации.

- Дифракционный конус кромки – взаимное положение кромки и векторов падающего поля и точки наблюдения, при котором вектор точки наблюдения расположен под таким же углом к кромке, что и вектор падающего поля.

- Строгое решение – строгое решение двумерной или трехмерной задачи (численное или аналитическое), которое используется при построении приближенного решения. Как правило, строгое трехмерное решение – численное, поскольку строгих аналитических трехмерных решений очень мало.

- Строгое аналитическое решение – аналитическое решение, полученное строго с математической точки зрения. Обычно речь идет о двумерной задаче.

- Строгое решение ФО – решение, полученное в приближении ФО, но строгое с математической точки зрения.

- Условная кромка – линия на поверхности рассеивателя, имеющая одинаковые углы с направлением падающей волны и направлением на точку наблюдения. Если точка наблюдения лежит на дифракционном конусе, то условная кромка расположена параллельно реальной кромке.

- Физичность – физическая ясность и возможность разобраться в том, какие именно параметры условия задачи влияют на те или иные характеристики решения

- Физоптический – в приближении физической оптики.

- Эвристический метод – основанный на физических представлениях и не имеющий строгого математического обоснования.

- Элементарная полоска интегрирования – бесконечная полоска, по которой проводится интегрирование поверхностного поля на рассеивателе, направленная вдоль одной из локальных координат, связанных с кромкой (вторая координата отсчитывается вдоль кромки).

Система отсчета координат и расчетные формулы берутся из разных работ [1, 3, 16, 42, 57, 145]. Для возможности сравнения новых выражений с результатами из указанных оригинальных работ обозначения в данной диссертации сделаны похожими на старые. Тем не менее, в разных работах применяются разные обозначения и разные способы отсчета угла прихода волны относительно внутренней нормали к контуру, огибающему рассеиватель. При необходимости дается соответствие обозначений из разных работ.

Эвристические подходы базируются на физических представлениях о структуре решения [3, 59]. Вместо строгой математической постановки задачи эвристические методы ис-

пользуют такие свойства поля, как принцип локальности, принцип взаимности и т.п. Иногда в основе эвристических подходов лежат постулаты, которые заведомо приводят к снижению точности, но зато существенно упрощают способ нахождения решения и результирующие формулы.

При построении эвристических решений нужно учитывать ряд особенностей.

Функция фазы. Решения задач дифракции описываются при помощи быстроосциллирующих интегралов. В состав соответствующих подынтегральных выражений входит экспонента. В знаменателе этой экспоненты стоит функция фазы, зависящая от геометрии задачи. В свою очередь, от функции фазы в значительной степени зависит характер решения задачи дифракции. Если функция фазы постоянна, то этот случай соответствует группам точек стационарной фазы. Если функция фазы линейна, то этот случай соответствует условию дальней зоны. Кроме того, при помощи метода стационарной фазы можно провести асимптотическую оценку быстроосциллирующего интеграла [61].

Геометрия задачи, группы точек стационарной фазы и вклад вершин. Как уже было сказано, под геометрией задачи понимаем форму рассеивателя, а также взаимное расположение источника и точки наблюдения по отношению к рассеивателю и друг к другу. В случае многоугольника или многогранника рассеиватель состоит из плоских граней, поэтому его форму характеризуют координаты вершин, а также определяемые этими координатами нормали к граням и внутренние нормали к ребрам.

На плоском многоугольнике или многограннике можно выделить группы точек, дающие значительный вклад в рассеянный сигнал в связи с тем, что функция фазы сигнала на этих точках постоянна. Первая группа точек – это точки, расположенные на грани и соответствующие такой геометрии задачи, когда точка наблюдения находится в направлении зеркального отражения или в «прострельном» направлении, т.е. прямо вперед, в направлении геометрооптической тени. Эта группа точек дает максимум рассеянного сигнала только в этих двух выделенных направлениях. Вторая группа точек – это точки кромок, соответствующие дифракционным конусам. Дифракционный конус соответствует такой геометрии задачи, при которой направление на точку наблюдения составляет тот же угол с кромкой, что и направление на источник. Третья группа точек – это вершины. Они дают существенный вклад тогда, когда вклад первой и второй групп точек отсутствует. Если рассеиватель представляет собой многоугольник или многогранник, то качество решения определяется тем, насколько точно рассчитывается вклад третьей группы точек.

Условие дальней зоны. Важным моментом при исследовании задач дифракции является выполнение или невыполнение условия дальней зоны. Если рассеиватель находится достаточно далеко как от источника, так и от точки наблюдения, то он воспринимается как точечный излучатель, а его угловые размеры очень малы. Тогда можно пренебречь сферичностью волновых фронтов и приближенно считать их плоскими. При этом выражение для функции фазы сигнала на поверхности рассеивателя становится линейным. Такое приближение приводит к существенному упрощению итоговых выражений для эвристического решения задачи дифракции.

Мы не случайно говорим здесь именно об эвристических решениях, поскольку строгих решений для дифракции на многоугольниках и многогранниках конечного размера не су-

ществует. А в ключевых задачах подразумеваются решения именно на полубесконечных объектах. На этих рассеивателях условие дальней зоны не выполняется. Действительно, ни при каком расстоянии удаления от полубесконечного рассеивателя его угловые размеры не будут стремиться к нулю, а сам он не будет выглядеть как точка.

Это обстоятельство приводит к очень важному следствию. Хорошо известно, что спецфункцией, описывающей дифракцию на полуплоскости, является интеграл Френеля. Вдали от границы «свет – тень» можно применять более простое выражение – асимптотику интеграла Френеля, имеющую сингулярность на границе «свет – тень». Эта сингулярность иногда считается недостатком, но на самом деле это не так. Если рассматривать сигнал, рассеянный телом конечного размера в направлении зеркального отражения и «прострельном» направлении, то все сигналы, идущие от отдельных кромок, будут сингулярны. Однако после суммирования по всем кромкам получится правильный результат.

Интересно, что те же сингулярные выражения для дифракционных коэффициентов можно получить, если формально применить условие дальней зоны уже не к рассеивателю конечного размера, а к задаче дифракции на полуплоскости в приближении физической оптики или к строгому решению. Точно так же можно упростить выражения, если формально применить условие дальней зоны в задаче дифракции на плоском угловом секторе.

Асимптотики и многократные переотражения. Асимптотики, полученные для полубесконечных структур, как правило, не учитывают многократные переотражения. Учет переотражений играет особо важную роль, когда одна из отражающих кромок находится в тени и поэтому не облучается первичным полем (например, для случая двумерной задачи).

Соотношение «сложность/точность». Философское соотношение «сложность/точность», характеризующее привлекательность решения для исследователей, аналогично соотношению «цена/качество». Не всегда самые точные подходы являются наиболее рациональными при решении той или иной научной или технической проблемы. Иногда простота решения важнее его точности. Тем более, есть частные случаи, когда простые подходы дают не только точный, но и строгий результат. Тогда использовать сложные подходы вообще нерационально.

В.2 Общая характеристика работы

Актуальность исследования. Аналитические решения теории дифракции нужны для решения научных и прикладных задач. Аналитические формулы можно использовать при решении таких актуальных задач, как расчет ЭПР летательных аппаратов, наземных и морских объектов, распространение радиоволн в среде городской застройки и внутри помещений, расчете дифракции сейсмических волн на неоднородностях в среде распространения и т.п.

При этом не всегда можно пользоваться строгими аналитическими решениями. Строгие решения могут отсутствовать или быть слишком сложными. Кроме того, в отдельных случаях (например, при решении обратных задач) желательно пользоваться наиболее простыми и быстродействующими решениями, а строгие решения далеко не всегда удовлетворяют этим требованиям.

Существует еще проблема ограниченности ресурсов компьютеров, не позволяющая получить строгое решение задачи дифракции на рассеивателях больших размеров даже в тех случаях, когда постановка задачи для численного решения возможна, и такое решение могло бы удовлетворить исследователей.

В связи с этим, несмотря на развитие компьютерной техники и успехи в области численных методов, построение новых эвристических решений не теряет своей актуальности.

При решении научных и технических задач для интерпретации результатов экспериментов и расчетов при помощи строгих аналитических и численных методов весьма желательно иметь простые, но точные формулы. Приближение ФО обладает универсальностью и позволяет получать простые формулы, однако они не отличаются точностью. Поэтому стоит задача получения формул, таких же простых, как для ФО, но более точных.

Эвристические подходы позволяют найти решение задач с постановкой, некорректной с математической точки зрения. Например, применяемая физиками поверхность с «мягким входом» (когда от поверхности ничего не отражается) не может быть описана в терминах теории раздела двух сред из классической электродинамики. Тем не менее, применяемые в технике композитные материалы могут обеспечить свойства «мягкого входа» лучше, чем любая комбинация параметров на границе раздела двух плоских сред в классической теории. Строгими методами подобные решения найти нельзя из-за отсутствия строгой постановки задачи. Эвристические методы позволяют найти решение и при нестрогой постановке. Многообразие эвристических методов позволяет выбрать для решения задачи наиболее подходящий из них, причем не обязательно самый строгий с точки зрения математики.

Эвристические решения (основанные на физическом понимании задачи и на интуиции) не имеют строгого математического обоснования, зато позволяют провести интерпретацию результатов, поскольку решение изначально строится на основе физических предположений. Сравнение с более точными решениями (редко – с аналитическими, как правило – с численными) позволяет провести анализ точности («верификацию») эвристического подхода, а также его «настройку» с целью уточнения. Зная поведение решения на объекте одной формы, можно выдвинуть гипотезу о его поведении на объекте схожей формы, а затем проверить эту гипотезу при помощи более строгого решения.

Эвристические подходы позволяют получать аналитические решения и работать с формулами, которые невозможно получить при помощи строгих аналитических подходов. Точность эвристических формул может быть приближена к точности строгого решения.

Существуют инженерные подходы, которые имитируют строгое решение, например, при помощи феноменологических числовых коэффициентов и аппроксимирующих формул. В отличие от инженерных формул, эвристические формулы не просто имитируют решение, а соответствуют физике задачи. Если правильно понять суть происходящих процессов, то можно получить очень удачное эвристическое приближение решения, которое с минимальными изменениями можно будет применять при решении большого числа разнообразных задач, как в области электродинамики, так и в других областях физики.

Хотя результаты этой диссертации можно применять к изучению объектов разной формы, основные усилия были приложены к исследованию дифракции на многоугольниках и многогранниках.

В диссертации получены новые результаты, сформулированы и обоснованы положения, совокупность которых можно определить как решение крупной научной проблемы – построение эффективных аналитических формул теории дифракции.

Объект исследования – поля различной физической природы, возбуждаемые и рассеиваемые на пространственных объектах сложной формы.

Предмет исследования – математические и физические двумерные и трехмерные модели явления дифракции электромагнитных волн и волн других физических типов на кромках, а также на плоских многоугольниках и многогранниках.

Целью диссертационной работы является разработка методов построения относительно простых эвристических аналитических формул и непосредственное построение таких формул, обладающих достаточно высокой точностью и быстродействием и позволяющих эффективно решать прямые и обратные задачи дифракции.

В работе рассматриваются и решаются следующие **задачи**:

1. Построение новых эвристических решений двумерных задач дифракции электромагнитной волны на идеально проводящих кромках со сложным профилем.

2. Выявление особенностей двумерных и трехмерных решений в приближении физической оптики, способов применения двумерных решений в трехмерных задачах, связи дифракционных коэффициентов со строгими двумерными решениями на бесконечных кромках и возможности уточнения физоптических решений.

3. Разработка эвристического подхода, позволяющего учесть влияние вершин при дифракции на плоских многоугольных пластинах.

4. Разработка эвристического подхода, позволяющего учитывать влияние неидеальных граничных условий на поверхностях двумерных и трехмерных рассеивателей.

5. Разработка нового универсального эвристического подхода, позволяющего строить аналитические решения двумерных и трехмерных задач дифракции.

Диссертационная работа состоит из введения, 6 глав, 10 приложений, заключения и списка литературы. Работа содержит 252 страницы, включающие 360 формул, 46 рисунков и список литературы.

Во введении приведен обзор работ по тематике диссертации, обоснована актуальность работы и дано краткое содержание каждой главы диссертации с указанием новых полученных результатов.

В первой главе предложен метод обобщенного эйконала, позволяющий построить интегральное представление аналитического решения двумерной задачи дифракции на идеально проводящем полубесконечном рассеивателе. В разделе 1.2 описано построение интегральных представлений решения. Во вспомогательной области строится представление обобщенной функции геометрической оптики в виде интеграла по замкнутому контуру при помощи теоремы Коши о вычетах. В разделе 1.3 при помощи метода стационарной

фазы проводится в общем виде приближенное вычисление интегралов, составляющих описанное выше интегральное представление краевой задачи для уравнения Гельмгольца. Показано, что для задачи дифракции на клине вновь полученное интегральное представление совпадает с известным.

Во второй главе при помощи нового метода получено решение для задачи дифракции плоской волны на рассеивателях конкретного вида: полупластине с конечной толщиной и усеченном клине. В разделах 2.2 и 2.3 получены приближенные решения задач дифракции плоской волны на полупластине и усеченном клине. Сравнение с результатами, полученными при помощи метода последовательных дифракций и данными, известными из литературы, показало хорошее согласие результатов.

В третьей главе рассмотрены принципы применения при решении трехмерных задач двумерных решений для нормального (размерности 2D) и наклонного (размерности 2,5D) падения на полубесконечную кромку. Как правило, решения трехмерных задач записывают в виде интегралов по контуру рассеивателя, расположенному на границе «свет - тень». В свою очередь, решения двумерных задач записывают в виде интегралов по полубесконечным элементарным полоскам интегрирования. Эти полоски начинаются на границе «свет – тень» двумерного полубесконечного рассеивателя и уходят в бесконечность. В разделе 3.1 предложен способ применения двумерных решений в трехмерных задачах без интегрирования по элементарных полосках для случая, когда известно аналитическое решение на прямолинейных участках направляющей двумерного рассеивателя. При этом используются специальные угловые параметров – «комплексные углы». В разделе 3.2 проанализировано решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны на плоском многоугольном рассеивателе в приближении физической оптики. Элементы этого решения играют ключевую роль при построении эвристических решений трехмерных задач.

В четвертой главе предложено эвристическое решение задачи дифракции на плоском идеально проводящем угловом секторе (размерности 3D) при выполнении условия дальней зоны. Решение строится в несколько этапов. В разделе 4.1 на первом этапе находится решение задачи дифракции на идеально проводящем плоском угловом секторе в приближении физической оптики. Рассмотрены «контурные» и «вершинные» волны. В разделе 4.2 на втором этапе проводится замена поляризационной составляющей дифракционного коэффициента двумерной кромки, в результате чего получается решение в приближении метода эквивалентных контурных токов (МЭКТ). При этом используется «условная кромка» - специально выделенное направление на рассеивателе. Применение условной кромки позволяет избежать интегрирования по элементарной полоске. В разделе 4.3 на третьем этапе решение МЭКТ уточняется при помощи модифицирующего множителя, выбранного из физических соображений. В результате получается решение, близкое по точности к строгому, а по простоте – к физическому.

В разделе 4.4 проанализированы особенности различных эвристических подходов при решении трехмерных задач дифракции и показаны пределы применимости этих подходов.

В пятой главе предложен способ получения эвристических решений для тел с неидеальными граничными условиями. В разделе 5.1 на основе геометрикооптических коэффициентов отражения и прохождения, взятых из задачи дифракции на безграничной плоской поверхности, получены эвристические формулы для дифракционных коэффициентов дву-

мерной задачи дифракции. В разделе 5.2 проведено сравнение полученных выражений с известными из литературы формулами для решения задачи дифракции на импедансном клине, показавшими хорошее совпадение со строгими результатами и являющимися частным случаем нашего решения.

В шестой главе изложены основы нового метода физической теории дифракции - метода базовых компонентов. В разделах 6.1 – 6.5 изложены основы нового метода. В разделе 6.6 изложены основы работы с дифракционными коэффициентами. Введена функция полупрозрачности, позволяющая получать эвристическое решение для тел со сложными граничными условиями. В разделе 6.7 описаны базовые компоненты и приемы нового метода. В разделе 6.8 описана последовательность действий при использовании нового метода. В разделе 6.9 проведена верификация решения задачи дифракции на идеально проводящей полупластине. В разделах 6.10 – 6.12 проведен сравнительный анализ точности нового метода и описаны примеры его применения.

В приложениях собраны формулы, применяемые в различных главах. Это сделано для того, чтобы избежать перегрузки текста формулами и таким образом улучшить качество подачи материала. Также в приложениях на основе различных задач для частных случаев входных параметров продемонстрированы возможности подходов, предложенных в диссертации.

В заключении сформулированы основные научные результаты, полученные при проведении исследований.

Список литературы включает 182 наименования, в том числе 42 работы автора.

Методы исследования – аппарат математической физики и теории дифракции, включая известные эвристические методы, такие как метод геометрической оптики, метод физической оптики, геометрическая теория дифракции, метод краевых волн, метод эквивалентных контурных токов, метод последовательных дифракций, а также новые методы получения эвристических аналитических решений, такие как метод обобщенного эйконала, модифицированный метод эквивалентных контурных токов и метод базовых компонентов.

Научная новизна диссертационной работы состоит в следующем:

1. Разработан новый метод обобщенного эйконала (МОЭ) – метод интегрального представления поля, позволяющий получать приближенное аналитическое решение задач дифракции на двумерных полубесконечных рассеивателях с идеально проводящей линейно ломаной границей.
2. Получено в общем виде эвристическое аналитическое решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны на полупластине, справедливое при малых толщинах полупластины.
3. Получены при помощи МОЭ новые решения известных задач для полупластины и усеченного клина, справедливые при стремлении размерного параметра к нулю.
4. Предложена методика перехода от известного аналитического решения для двумерной структуры в виде интеграла по элементарной полоске к трехмерному решению при помощи подстановки специальных угловых параметров – «комплексных углов».

5. Предложены корректирующие коэффициенты, позволяющие повысить точность решения задач дифракции на многогранниках методом эквивалентных контурных токов.
6. Предложена методика «условной кромки», позволяющая строить аналитические решения трехмерных дифракционных задач без интегрирования по элементарным полоскам и с гарантированным выполнением принципа взаимности.
7. Предложены корректирующие амплитудные коэффициенты, описывающие «продольное» по отношению к кромке возмущение поля, позволяющие повысить точность аналитического эвристического решения задачи дифракции на плоском угловом секторе методом МЭКТ.
8. Предложен метод приближенного представления дифракционных волновых полей в задачах рассеяния на полупрозрачных полубесконечных структурах, основанный на новом определении функции прозрачности.
9. Предложен способ получения эффективных автономных аналитических эвристических решений практических трехмерных задач дифракции, обеспечивающий комплексный учет всех входных параметров.

Практическая значимость полученных результатов состоит в следующем:

1. Практическая значимость работы определяется тем, что предложенные аналитические решения задач дифракции, алгоритмы и программы, численно реализующие эти решения формируют элементную базу для построения интегрированных систем электродинамического моделирования, включающие подсистемы расчета полей рассеянных объектами сложной формы с большими электрическими размерами.
2. Предложенная в работе совокупность моделей, описывающих рассеяния полей на ключевых структурах отличается высокой эффективностью, недостижимой при использовании прямых численных решений электродинамических задач. Поэтому применение результатов работ позволит повысить эффективность систем электродинамического моделирования и снизить затраты компьютерных ресурсов, что также определяет практическую значимость диссертации.
3. С практической точки зрения важно, что качественный скачок эффективности электродинамических моделей, полученный за счет использования методов, развитых в работе потенциально позволяет перейти к решению задач синтеза рассеивающих объектов сложной формы, связанных с перебором большого числа вариантов.
4. Результаты диссертации могут быть использованы при решении следующих задач:
 - Расчет ЭПР воздушных, сухопутных и морских радиолокационных объектов.
 - Рассеяние радиоволн на объектах городской застройки.
 - Распространение радиосигналов внутри помещений.
 - Дифракция электромагнитных волн на кристаллах.
 - Дифракция на открытом конце прямоугольного волновода.
 - Дифракция света на матрицах фотоприемников.
 - Дифракция элементарных частиц на ловушках и других объектах.
 - Дифракция упругих волн на неоднородностях в среде распространения упругих волн (твердых телах, горных породах и т.п.).

Обоснованность и достоверность результатов обеспечиваются тем, что при построении новых эвристических решений применяются основополагающие физические принципы (такие, как принцип локальности поля, принцип дополнительности и т.п.), а также физические закономерности, известные из работ по физической теории дифракции (области стационарной фазы, дифракционные конуса и т.п.). Кроме того, проводится сравнение новых эвристических формул с частными случаями известных аналитических формул, а также сравнение результатов расчета по новым эвристическим формулам с результатами расчета по строгим аналитическим формулам, с численными результатами, с результатами расчета по другим эвристическим формулам и с известными из литературы результатами расчетов, проведенных строгими методами.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Метод обобщенного эйконала (МОЭ) позволяет получать аналитические представления рассеянного поля в задачах дифракции цилиндрической и плоской волн на классе двумерных полубесконечных рассеивателей с идеально проводящей линейно ломаной границей, с размерными параметрами, имеющие высокую точность для размерных параметров, не превышающих четверти длины волны.
2. При помощи МОЭ можно получить эвристические аналитические решения задач дифракции плоской электромагнитной волны на полупластине и усеченном клине, которые остаются справедливыми при стремлении к нулю параметра, характеризующего размер торца полупластины или усеченного клина.
3. Решения трехмерных задач дифракции можно получить при помощи подстановки специальных угловых параметров, так называемых «комплексных углов», в двумерные аналитические решения в виде интегралов по элементарным полоскам.
4. Новая методика «условной кромки» позволяет строить аналитические решения дифракционных задач в приближении метода эквивалентных контурных токов без непосредственного интегрирования по элементарным полоскам и с гарантированным выполнением принципа взаимности.
5. Точность решений методом эквивалентных контурных токов трехмерных задач дифракции на многогранниках можно повысить при помощи корректирующих множителей, связанных со строгими и физическими дифракционными коэффициентами из двумерной задачи нормального падения на кромку.
6. Комбинирование обобщенного дифракционного коэффициента, дифракционного коэффициента в приближении физической оптики, построенных при помощи решения «одномерной» задачи взаимодействия волны с безграничной плоской поверхностью и функции полупрозрачности позволяет строить эвристические решения задач дифракции волновых полей произвольной физической природы на полупрозрачных рассеивателях.

Апробация результатов исследования. Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на 7 отечественных конференциях и симпозиумах (работы соискателя [158, 164, 171, 174, 177 – 179]) и 9 международных конференциях и симпозиумах (работы соискателя [141, 144, 145, 159 – 161, 168 – 170]). Также результаты работы

докладывались на семинарах «Московский электродинамический семинар им. Я.Н. Фельда» (ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН), «Математическое моделирование волновых процессов» (РОСНОУ) и на семинаре А.Г. Свешникова (физический факультет МГУ).

Публикации. Результаты диссертационной работы отражены в 42 публикациях, включая 12 статей в отечественных журналах, входящих в перечень ВАК, 3 статьи в международных журналах, 8 статей и тезисов в трудах отечественных конференций и симпозиумов, 17 статей в трудах международных конференций и симпозиумов, 1 материал для книги на английском языке и 1 монографию на английском языке.

Личный вклад автора. Все результаты диссертации получены лично автором. По теме диссертации соискатель лично опубликовал 39 работ, включая 14 журнальных статей, 24 статьи в трудах конференций и симпозиумов и 1 монографию. В трех работах, опубликованных с соавторами (1 доклад 1991г., 1 статья 1992г., и 1 материал в книгу 2010г.), вклад соискателя является основным.

ГЛАВА 1. ОСНОВЫ МЕТОДА ОБОБЩЕННОГО ЭЙКОНАЛА

1.1 Математическая постановка задачи дифракции

Рассмотрим электромагнитную волну P вида

$$P = A \exp(iS), \quad (1)$$

распространяющуюся в двумерном безграничном пространстве. В формуле (1) P , A , и S зависят от координат, A - амплитуда волны, S - функция эйконала, i - мнимая единица.

Пусть P удовлетворяет волновому уравнению вида

$$\Delta_z P + k^2 P = 0, \quad \Delta_z = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (\text{или } \Delta_{kz} P + P = 0, \quad \Delta_{kz} = \frac{\partial^2}{\partial(kx)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(ky)^2}), \quad (2)$$

здесь $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число. Внесем в рассматриваемое пространство двумерный идеально проводящий полубесконечный рассеиватель, ограниченный поверхностью S_0 . С точки зрения геометрической оптики этот рассеиватель разделит падающее поле на две составляющие: падающую и отраженную, возникнут две границы «свет – тень». Требуется найти рассеянное поле (рис. 1).

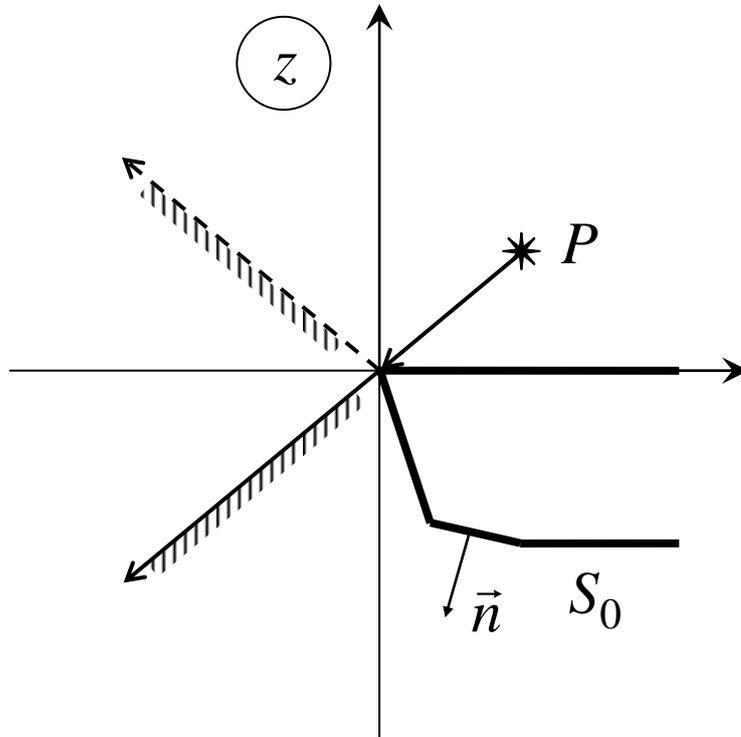


Рис. 1

Падение волны от источника, находящегося в точке P , на идеально проводящий рассеиватель с линейно ломаной границей. Штриховкой показаны зоны тени, связанные с геометрическими границами «свет – тень» падающей и отраженной волн.

На рис. 1 показан двумерный рассеиватель с линейно – ломаной границей, на который падает волна от источника, представляющего собой нить, параллельную кромке. Внесение рассеивателя в поле источника приводит к разделению первичного геометрооптического поля на зоны света, тени и отраженную часть.

Как известно, на языке математики сказанное выше означает, что мы ищем решение краевой задачи вида $U=u+P$, где U - полное поле, u - рассеянное поле, удовлетворяющие:

- 1) волновому уравнению (2);
- 2) граничным условиям $U=0$ или $dU/dn=0$ на поверхности S_0 ;
- 3) условиям регулярности $u = O(r^{-1/2})$ и излучения $\partial u/\partial r - iku = o(r^{-1/2})$ при $kr \rightarrow \infty$;
- 4) условию Мейкснера на ребре $\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cdot \text{grad } u = 0$, где ρ – радиус небольшой окружности, охватывающей ребро.

1.2 Построение интегральных представлений решения

В данном разделе рассматриваем двумерный полубесконечный рассеиватель с линейно ломаной границей. Тип поляризации при построении интегрального представления роли не играет, поскольку итоговое выражение позволяет выполнить оба вида граничных условий: $U=0$ или $dU/dn=0$. Падение плоской волны на рассеиватель, P_1 и P_2 - границы «свет – тень» для падающей и отраженной волн соответственно, z_0 - точка наблюдения изображено на рис. 2(а).

На рис. 2 показаны картины падающего и отраженного полей в трех областях: (а) – первичная область z , (б) – область w , полученная из области z при помощи конформного отображения, (в) – вспомогательная двулистная область w_{12} , наглядно иллюстрирующая процесс дифракции. Области z и w тоже состоят из двух листов, но они расположены один над другим, поэтому представление не такое наглядное. Падающее поле показано сплошными линиями, отраженное – пунктиром.

Метод обобщенного эйконала представляет собой способ построения интегральных представлений, на основе которых можно построить решение краевой задачи [3 – 7].

1.2.1 Построение «вспомогательной» области и обобщенной функции геометрической оптики

Рассмотрим конформное отображение $kZ(w)$ области w , представляющей собой верхнюю полуплоскость комплексного переменного, на область z , внешнюю по отношению к рассеивателю (рис. 2 (а), (б)):

$$kz = kZ(w), \quad r_z = r_z(w), \quad \varphi_z = \varphi_z(w), \quad (3)$$

где r_z и φ_z - полярные координаты точки в области z , являющиеся функциями комплексной переменной w .

Конформное отображение $kZ(w)$ выбираем таким, чтобы между точками областей z и w существовало взаимно однозначное соответствие. Действительная ось области w соответствует границе рассеивателя в области z .

В области w функция P удовлетворяет волновому уравнению с переменным волновым числом

$$\Delta_w P + k^2 |dz/dw|^2 P = 0, \quad (4)$$

однако можно выделить семейство кривых:

$$k |dz/dw| = |d| = r_d = \text{const}, \quad (5)$$

на которых переменное волновое число $k |dz/dw|$ постоянно.

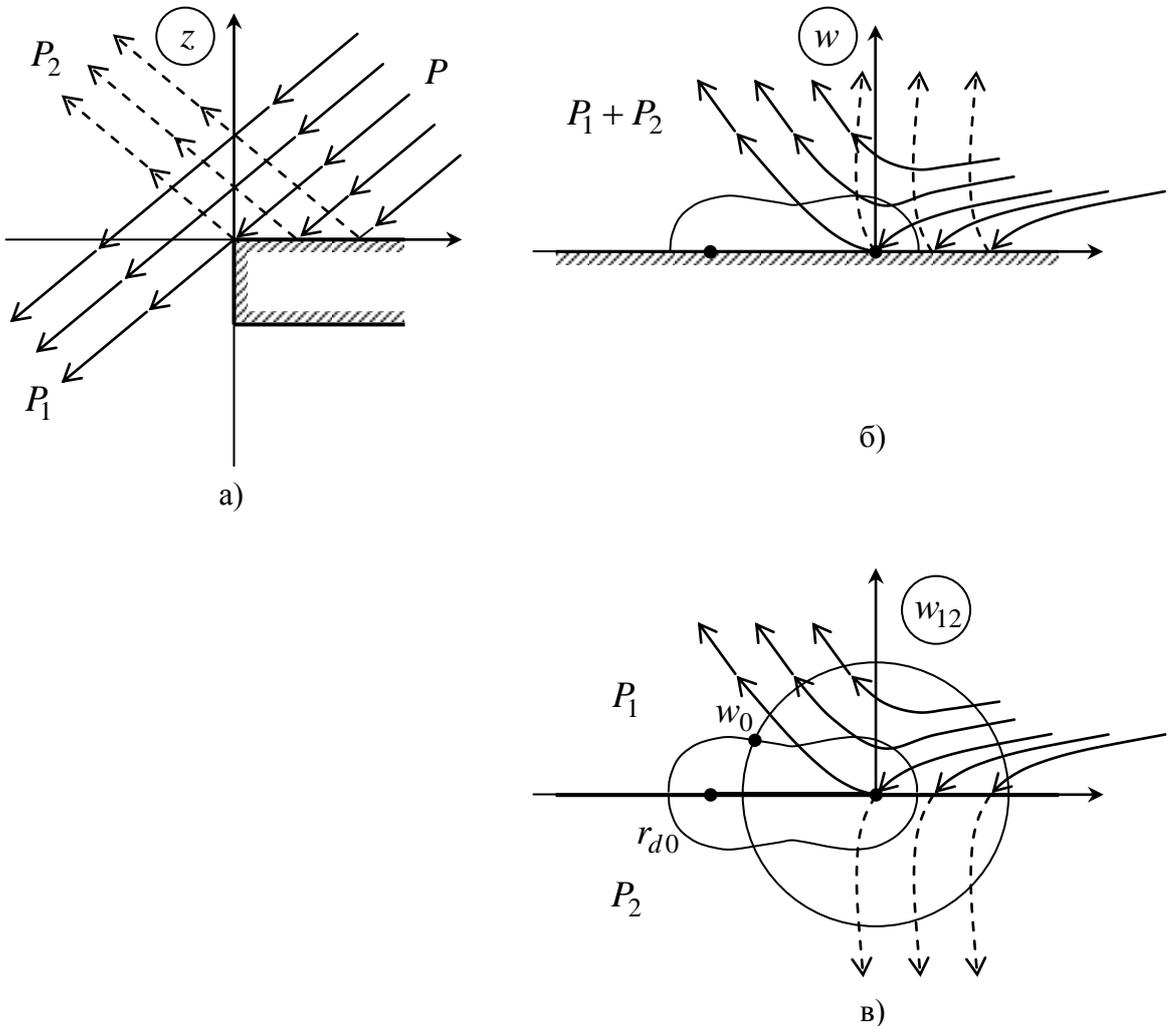


Рис. 2 (а) – (в)

Падение плоской волны на идеально проводящий рассеиватель с линейно ломаной границей: (а) – схема падения в области z ; (б) – схема падения в области w ; (в) – схема падения в области w_{12} .

Новая переменная d , введенная в (5), обозначает производную $d = d(kz)/dw$. На кривой $r_{d0}=1$ переменное волновое число равно первоначальному волновому числу. В дальнейшем мы будем называть эту кривую просто «кривая r_{d0} » или «базовая кривая». Если каким-либо образом найти в области w на кривой r_{d0} решение краевой задачи для уравнения Гельмгольца (4) с постоянным или переменным волновым числом, то после конформного отображения (3) оно останется прежним на этой кривой и в области z . Что касается решений на кривых $r_d = const \neq 1$, то при конформном отображении в область z волновое уравнение в этих точках изменяется.

В связи с записью уравнений (1), (2) и (4) следует уточнить, что именно подразумевается под понятием «функция P ». Эта функция зависит от координат (r_z, φ_z) точки наблюдения в области z . Они, в свою очередь, зависят от координат в области w (3). Во избежание усложнения обозначений мы будем здесь и в дальнейшем писать: P , $P(r_z, \varphi_z)$, или $P(w)$, имея в виду одну и ту же функцию, зависящую от координат точки наблюдения в области z , независимо от того, в какой именно области (z или w) мы эту точку рассматриваем.

С точки зрения геометрической оптики влияние идеально проводящего рассеивателя на падающее поле состоит в том, что он вырезает из падающей волны часть, падающую на свою «освещенную» поверхность, и поворачивает эту часть падающей волны в соответствии с законом зеркального отражения, создавая отраженное поле. С математической точки зрения можно считать, что отраженное поле - это часть падающего поля, прошедшая во второй лист физического пространства. Если найти в такой двухлистной области непрерывное поле, удовлетворяющее всем условиям краевой задачи, кроме граничных условий, то удовлетворить граничным условиям можно, сложив определенным образом значения поля в двух точках, расположенных симметрично относительно границы рассеивателя в разных листах.

Введем область w_{12} - полную плоскость комплексного переменного, состоящую из двух экземпляров w_1 и w_2 полуплоскости W , «склеенных» вдоль действительной оси. Каждой точке области z теперь соответствует пара точек, расположенных в w_1 и w_2 симметрично относительно горизонтальной оси. В полуплоскости w_1 зададим падающее геометрооптическое поле P_1 , в полуплоскости w_2 - отраженное P_2 (рис. 2(в)).

Несмотря на то, что в уравнение для конформного отображения (3) можно формально подставлять значения w как из верхней, так и из нижней полуплоскостей, при построении решения мы используем только верхнюю полуплоскость w (точнее, два экземпляра верхней полуплоскости). Граница рассеивателя совпадает с горизонтальной осью области w .

Как известно, при конформном отображении сохраняются углы между пересекающимися прямыми. Поэтому направление нормали к границе в области z будет соответствовать направлению нормали к границе в области w . Точно так же сохранится свойство равенства углов падения и отражения волны при ее взаимодействии с идеально проводящим рассеивателем. Если разместить отраженное поле в другом листе, то свойство равенства углов будет означать непрерывность перехода падающего геометрооптического поля P_1 в

отраженное P_2 на освещенной части границы рассеивателя (рис. 2 (в)). На теневой части границы рассеивателя геометрическое поле равно нулю, т.е. также непрерывно.

Для построения интегрального представления решения воспользуемся методикой, которую применил Зоммерфельд [6]. Решение краевой задачи для рассеянного поля представим в виде интеграла по отрезкам замкнутого контура в области комплексного переменного. В подынтегральное выражение включим функцию P^c , представляющую собой аналитическое продолжение функции падающего поля P с какой-либо из кривых r_{d0} в область комплексного переменного \hat{w} .

1.2.2. Требования к замене переменной

При подстановке координат переменной \hat{w} вместо координат w в функции P и S меняются как характер зависимости этих функций от координат $P(w) \rightarrow P^c(\hat{w})$, $S(w) \rightarrow S^c(\hat{w})$, так и их свойства. Функция эйконала $S(w)$ преобразуется в функцию обобщенного эйконала $S^c(\hat{w})$, это преобразование дает название всему методу.

Замена переменной $w \rightarrow \hat{w}$ должна проводиться таким образом, чтобы функции $P(w)$ и $P^c(\hat{w})$ удовлетворяли следующим условиям:

- а) на кривой r_{d0} должно выполняться $\hat{w}=w$, $P^c(\hat{w})=P(w)$;
- б) в области w функция $P(w)$ должна удовлетворять волновому уравнению (4);
- в) в области \hat{w} функция $P^c(\hat{w})$ должна быть аналитической.

1.2.3. Построение интегрального представления в общем виде

Саму замену переменной проведем позже, а сейчас будем считать, что уже существует явный вид выражения для комплексной переменной \hat{w} , удовлетворяющей условиям (б), и построим в общем виде интегральное представление решения аналогично тому, как это сделано у Зомерфельда [6].

Введем «вспомогательную» область \hat{w}_{12} , пересекающуюся с w_{12} вдоль окружности $r_{w0} = |w_0|$, где w_0 – точка наблюдения, лежащая на кривой r_{d0} (рис. 3).

На рис. 3 изображена вспомогательная область \hat{w}_{12} . Она условно показана в виде цилиндрической поверхности, пересекающейся с областью w_{12} вдоль кривой r_{d0} (жирная полуокружность). Точка наблюдения w_0 находится на кривой r_{d0} . Замкнутый контур интегрирования окружает точку наблюдения w_0 . Затем контур интегрирования деформируется таким образом, чтобы он проходил через седловую точку по области сходимости (заштрихованный участок).

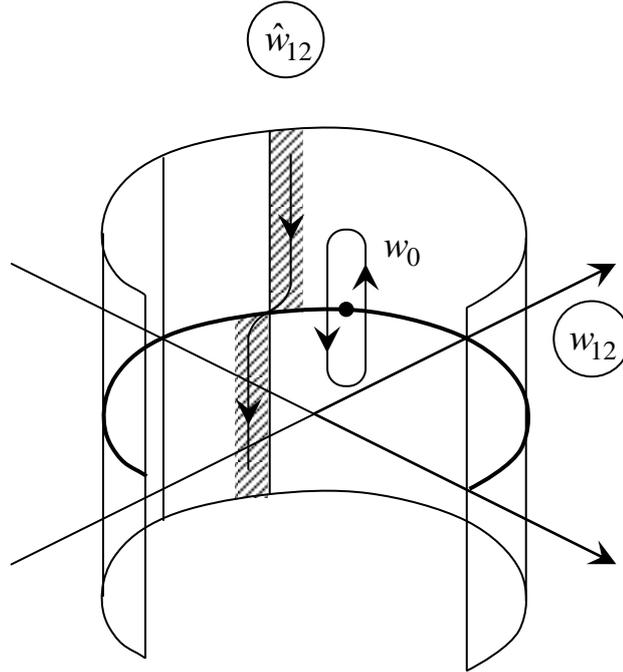


Рис. 3

Схема построения вспомогательной области \hat{w}_{12} .

Предположим, что существует функция $P^c(\hat{w})$, аналитическая в области \hat{w}_{12} (и поэтому удовлетворяющая в ней уравнению Лапласа) и равная $P(w)$ на кривой r_{d0} :

$$\text{на } r_{d0}: \hat{w}_{12} = w_{12}, P^c(\hat{w}) = P(w); \Delta_{\hat{w}} P^c = 0 \text{ в } \hat{w}_{12}. \quad (7)$$

Рассмотрим замкнутый контур, охватывающий освещенные участки области \hat{w}_{12} . Под освещенными участками понимаются области присутствия на r_{d0} (в смысле геометрической оптики) функции P^c , под теньевыми - области ее отсутствия. Тогда при помощи теоремы Коши о вычетах можно построить интегральное представление функции $P^c(\hat{w})$ в точке наблюдения w_0 на кривой r_{d0} , которая находится на пересечении областей \hat{w}_{12} и w_{12} (т.е. одновременно находится в областях \hat{w}_{12} и w_{12}):

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} = K \cdot P^c(w_0), \quad (8)$$

где $K = 1$, если w_0 находится внутри контура и $K = 0$, если - вне его.

Далее будет показано, что область \hat{w}_{12} можно построить на кривой r_{d0} при помощи аналитического продолжения угловой переменной φ_w в комплексную область, а функцию P^c можно построить, преобразовав определенным образом функцию P .

Пусть в области \hat{w}_{12} существуют участки, на которых $P^c(\hat{w})$ убывает при увеличении волнового числа k . Назовем эти участки «участки сходимости» (рис. 4).

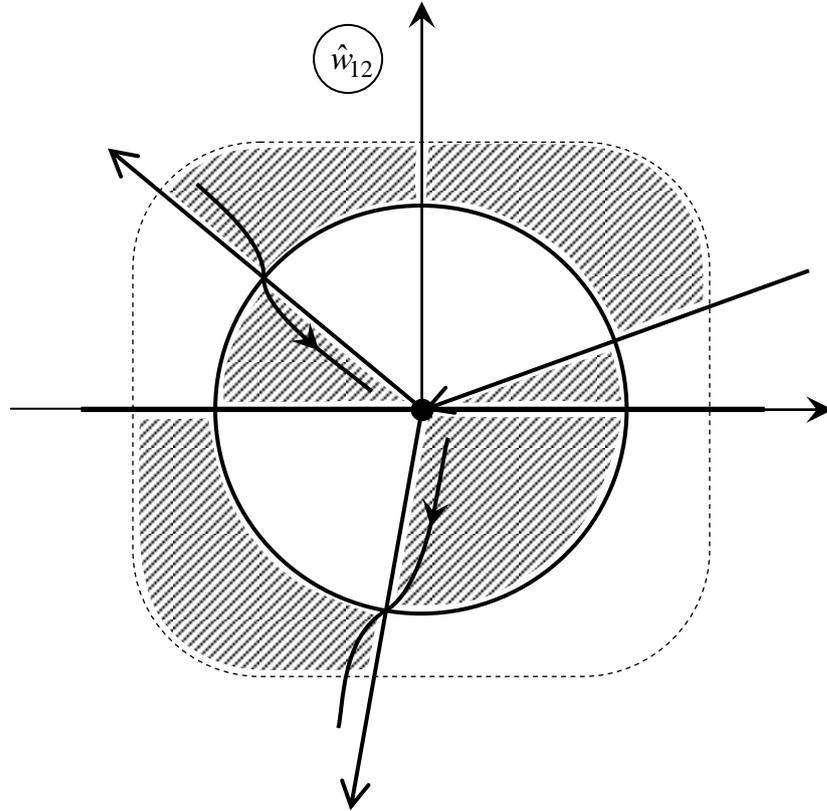


Рис. 4

Вспомогательная область \hat{w}_{12} .

На рис. 4 показана вспомогательная область \hat{w}_{12} . Фрагменты контура интегрирования проходят через седловые точки по заштрихованным участкам сходимости $s1$ и $s2$.

Для области с двумя участками сходимости $s1$ и $s2$ получим:

$$K \cdot P^c(w_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_C \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} - \int_{s1} \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} + \int_{s2} \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} \right], \quad (9)$$

где C - оставшаяся после выделения $s1$ и $s2$ часть замкнутого контура интегрирования.

Обозначив в (9) сумму интегралов по сходящимся участкам $s1$ и $s2$ как $v(w_0)$, а интеграл по оставшейся части C - как $V(w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w}$, получим выражение:

$$V(w_0) = K \cdot P^c(w_0) + v(w_0) = K \cdot P^c(w_0) + \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{s1} \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} - \int_{s2} \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} \right]. \quad (10)$$

Знаки интегралов по s_1 и s_2 отличаются в связи с противоположным по отношению к центру координат направлением прохода по этим участкам.

В решении Зоммерфельда [6] функция, аналогичная $V(w_0)$ (10) (которая представляет собой сумму ГО и рассеянного поля), характеризует полное поле. Мы тоже (пока без детального доказательства) будем считать $V(w_0)$ решением для полного поля, поскольку представление в виде суммы ГО и рассеянного поля является правильным описанием физики задачи. Решение Зоммерфельда тоже вначале было построено эвристически, а его строгость была доказана позже разными способами, в том числе – при помощи получения решения в виде разложения по ряду цилиндрических функций [1].

Далее будет показано, что кривые r_{d0} представляют собой семейство в областях w и \hat{w} , а функция $P^c(w_0)$ – аналитическое продолжение функции $P(w)$ с кривой r_{d0} (или, используя другое название, с базовой кривой) в область комплексной переменной \hat{w} .

1.2.4 Удовлетворение граничным условиям

Функция $V(w_0)$ из (10) непрерывна во всей области \hat{w}_{12} . А в этом случае можно удовлетворить условиям Дирихле $U=0$ или Неймана $dU/dn=0$ на границе кривой r_{d0} , если сложить или вычесть значения функции в точках w_0 , расположенных симметрично относительно горизонтальной оси (соответствующей границе рассеивателя):

$$U(k, r_{z0}, \varphi_{z0}, \varphi_0) = V(k, r_{w0}, \varphi_{w0}, \varphi_0) - V(k, r_{w0}, -\varphi_{w0}, \varphi_0) \quad (\text{Дирихле}), \quad (11)$$

$$U(k, r_{z0}, \varphi_{z0}, \varphi_0) = V(k, r_{w0}, \varphi_{w0}, \varphi_0) + V(k, r_{w0}, -\varphi_{w0}, \varphi_0) \quad (\text{Нейман}). \quad (12)$$

1.2.5. Продолжение решения с базовой кривой

Поскольку при помощи интегральных представлений в области \hat{w}_{12} мы находим решение лишь в точках выделенной кривой r_{d0} области w_{12} , следует продумать способ продолжения решения с этой кривой в остальные точки области w_{12} . Продолжение решения с заданной кривой в оставшуюся область пространства можно осуществлять различными способами. В качестве точного способа можно предложить решение этой проблемы при помощи метода интегральных уравнений для среды с неоднородной диэлектрической проницаемостью [62]. В качестве приближенного способа можно предложить метод геометрической оптики. Зная амплитуду, фазу и характер расходимости поля при распространении его с контура в оставшуюся область пространства, можно найти решение во всех точках. При этом (в силу свойств конформного отображения) сохраняется непрерывность решения во всех точках двулистной области w_{12} , в том числе – на границе рассеивателя.

К достоинствам интегральных представлений решения, получающихся при помощи метода обобщенного эйконала, можно отнести общность подхода для рассеивателей разной формы и относительную простоту получающихся конечных выражений.

1.3 Асимптотическое вычисление контурных интегралов

Сформулируем основные этапы получения аналитического решения краевой задачи уравнения Гельмгольца методом обобщенного эйконала.

1. Получение конформного отображения верхней полуплоскости комплексного переменного на внешность рассеивателя.
2. Построение вспомогательной области и введение комплексной угловой переменной.
3. Построение функции обобщенного эйконала при помощи подстановки комплексной угловой переменной в функцию эйконала.
4. Получение интегралов по отрезкам замкнутых контуров во вспомогательной области.
5. Применение полученных интегральных представлений в качестве решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца.

1.3.1 Получение решения в общем виде

Рассмотрим обобщенную функцию геометрической оптики, которая на кривой r_{d0} имеет вид (1), а в текущей точке интегрирования вспомогательной области \hat{w} равна:

$$P^c(\hat{w}) = A(\hat{w}) \exp[iS^c(\hat{w})]. \quad (13)$$

Вычислим интеграл вида (9) при помощи метода стационарной фазы. Пусть существует седловая точка \hat{w}_{sm} функции $S^c[\hat{w}(r_{w0})]$, в которой $[S^c(\hat{w}_{sm})]' = 0$, $[S^c(\hat{w}_{sm})]'' \neq 0$. Тогда для преобразования соответствующего интеграла можно совершить шаги в соответствии с методикой, примененной в [1]. При этом несингулярная часть подынтегральной функции разлагается в ряд по степеням переменной интегрирования, после чего первый член этого ряда удерживается и выносится за знак интеграла

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{sm} \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} &= \frac{\exp[iS^c(w_0)]}{2\pi i} \int_{sm} \frac{A(\hat{w})[S^c(\hat{w}) - S^c(w_0)] \exp[iS^c(\hat{w}) - iS^c(w_0)]}{\hat{w} - w_0 S^c(\hat{w}) - S^c(w_0)} d\hat{w} \approx \\ &\approx \frac{A(\hat{w}_{sm}) \exp[iS^c(w_0)] S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}{2\pi i \hat{w}_{sm} - w_0} \int_{sm} \frac{\exp[iS^c(\hat{w}) - iS^c(w_0)]}{S^c(\hat{w}) - S^c(w_0)} d\hat{w} \end{aligned} \quad (14)$$

Записав в окрестности седловой точки \hat{w}_{sm} разность эйконалов при помощи разложения в ряд Тейлора функции $S^c(\hat{w})$, где $[S^c(\hat{w}_{sm})]' = 0$, $[S^c(\hat{w}_{sm})]'' \neq 0$:

$$S^c(\hat{w}) - S^c(w_0) \approx S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0) + [S^c(\hat{w}_{sm})]'' \frac{(\hat{w} - w_{sm})^2}{2} + \dots, \quad (15)$$

можно, ограничившись в разложении (15) двумя первыми членами, вычислить интеграл из правой части выражения (14) при помощи метода стационарной фазы:

$$\begin{aligned}
& \int_{sm} \frac{\exp[iS^c(\hat{w}) - iS^c(w_0)]}{S^c(\hat{w}) - S^c(w_0)} d\hat{w} = \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{w} i \int_{\infty}^1 \exp[iS^c(\hat{w})t - iS^c(w_0)t] dt = \\
& = i \int_{\infty}^1 \exp[-iS^c(w_0)t] dt \int_{-\infty}^{\infty} \exp[iS^c(\hat{w})t] d\hat{w} = \\
& = i \int_{\infty}^1 \exp\{i[S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)]t\} dt \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{i}{2}[S^c(\hat{w}_{sm})]''(\hat{w} - w_{sm})^2 t\right] d\hat{w} = \\
& = 2i \int_{\infty}^1 \exp\{i[S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)]t\} \sqrt{2\pi i} \left\{ [S^c(\hat{w}_{sm})]'' \right\}^{-1/2} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \\
& = \frac{2i\sqrt{2\pi i}}{\sqrt{[S^c(\hat{w}_{sm})]''} [S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)]_{\infty\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}} \int_{\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}^{\infty} \exp(iq^2) dq
\end{aligned}$$

При выводе были использованы выражения $\frac{\exp iz^2}{z^2} = i \int_{\infty}^1 \exp(iz^2 t) dt$, а также

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{i}{2}[S^c(\hat{w}_{sm})]''(\hat{w} - \hat{w}_{sm})^2 t\right] d\hat{w} = \sqrt{2\pi i} \left\{ [S^c(\hat{w}_{sm})]'' t \right\}^{-1/2}.$$

Таким образом, доказана справедливость выражения

$$\int_{sm} \frac{\exp[iS^c(\hat{w}) - iS^c(w_0)]}{S^c(\hat{w}) - S^c(w_0)} d\hat{w} \approx \frac{2i\sqrt{2\pi i}}{\sqrt{[S^c(\hat{w}_{sm})]''} [S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)]_{\infty\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}} \int_{\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}^{\infty} \exp(iq^2) dq. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (14), получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{sm} \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} \approx \frac{2iA(\hat{w}_{sm}) \exp[iS^c(w_0)] \sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}{(\hat{w}_{sm} - w_0) \sqrt{2\pi i} [S^c(\hat{w}_{sm})]''} \int_{\infty\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}^{\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}} \exp(iq^2) dq, \quad (17)$$

где знак интеграла берется с учетом направления прохода по контуру в окрестности \hat{w}_{sm} .

С учетом известной асимптотики

$$\int_{\infty \cdot X}^X \exp(iq^2) dq \approx \frac{e^{ikX^2}}{2iX} \quad \text{при } |X| \gg 1 \quad (18)$$

можно показать, что если положить $X = \sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}$, то интеграл (17) по окрестности седловой точки перейдет в асимптотику

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{sm} \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi i [S^c(\hat{w}_{sm})]''}} \frac{P^c(\hat{w}_{sm})}{\hat{w}_{sm} - w_0}, \quad (19)$$

если $\left| \sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)} \right| \gg 1$. Знак корня берется отрицательным в освещенной области и положительным - в теневой. Выражение (19), являющееся частным случаем (17), представляет собой результат, хорошо известный в теории метода стационарной фазы (см., например, [61]).

Интеграл (17) можно переписать в более наглядном виде:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{sm} \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} \cong \frac{P(\hat{w}_{sm})}{(\hat{w}_{sm} - w_0) \sqrt{2\pi i [S^c(\hat{w}_{sm})]''}} \frac{2i \sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}{\exp[iS^c(\hat{w}_{sm}) - iS^c(w_0)]} \frac{\int_{\infty \sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}^{\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}} \exp(iq^2) dq}{\infty \sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}} \quad (20)$$

В случае двух седловых точек получаем:

$$v(w_0) \cong \sum_{m=1,2} \frac{P(\hat{w}_{sm})}{(\hat{w}_{sm} - w_0) \sqrt{2\pi i [S^c(\hat{w}_{sm})]''}} \frac{2i \sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}{\exp[iS^c(\hat{w}_{sm}) - iS^c(w_0)]} \frac{\int_{\infty \sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}^{\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}} \exp(iq^2) dq}{\infty \sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}} \quad (21)$$

Для получения окончательного выражения осталось лишь подставить в (21) значения для обобщенного эйконала $S^c(\hat{w})$ в точке наблюдения w_0 и его производной $[S^c(\hat{w})]''$ в седловых точках \hat{w}_{sm} .

В решении краевой задачи для уравнения Гельмгольца формула (21) представляет собой выражение в общем виде для рассеянной компоненты поля, полученное методом обобщенного эйконала. Далее будет показано, что применение этой формулы для случаев рассеяния на полуплоскости и клине приводит к правильным результатам.

Из (21) следует, что рассеянное поле представляется в виде произведения значения падающей волны в седловой точке и множителя, испытывающего разрыв на границе тени. Вдали от границы тени имеем в соответствии с (18):

$$v(w_0) \approx \sum_{m=1,2} \frac{P(\hat{w}_{sm})}{(\hat{w}_{sm} - w_0) \sqrt{2\pi i [S^c(\hat{w}_{sm})]''}}. \quad (22)$$

Каждое из двух слагаемых в выражении (22), как и следовало ожидать, совпадает с (19). Окончательные выражения для рассеянного поля могут быть получены после выбора формы рассеивателя и подстановки в (21) и (22) выражений для $P^c(\hat{w})$ и $S^c(\hat{w})$.

Для того, чтобы доказать соответствие решения волновому уравнению, выберем функцию (1) в виде плоской волны единичной амплитуды

$$P = P(r_z, \varphi_z) = \exp[-ikr_z \cos(\varphi_z - \varphi_0)], \quad (23)$$

где (r_z, φ_z) - текущие полярные координаты точки в области z , φ_0 - направление прихода плоской волны. В координатах (23) примет вид

$$P(w) = P(r_w, \varphi_w) = \exp\{-ikr_z(r_w, \varphi_w) \cos[\varphi_z(r_w, \varphi_w) - \varphi_0]\}. \quad (24)$$

Пусть (r_{z0}, φ_{z0}) и (r_{w0}, φ_{w0}) - координаты точки наблюдения в областях z и w соответственно. Выберем в соответствии с (7) функцию P^c следующим образом: зафиксируем радиальную координату $r_z = r_{z0}$, а угловую координату сделаем комплексной $\varphi_z \rightarrow \varphi_z^c$. Тогда получим $P^c = \exp[-ikr_{z0} \cos(\varphi_z^c - \varphi_0)]$. Для установления зависимости $P^c(\hat{w})$ следует установить связь между переменными \hat{w} и φ_z^c .

Рассмотрим сначала клиновидный рассеиватель с внешним углом раствора клина π . Для клиновидного рассеивателя $\varphi_z = n\varphi_w$. Проведем замену переменной $\varphi_w \rightarrow \varphi_w^c$. С этой целью в выражении $w = r_w \exp(i\varphi_w)$ зафиксируем радиальную переменную $r_w = r_{w0}$, а угловую переменную сделаем комплексной, введя дополнительную радиальную переменную \hat{r}_w в выражение для φ_w : $\varphi_w \rightarrow \varphi_w^c = \varphi_w - i \ln(\hat{r}_w/r_{w0})$. Заметим, что при $\hat{r}_w = r_{w0}$: $\varphi_w = \varphi_w^c$. Таким образом, для точки наблюдения w_0 , которая находится на окружности $r_w = r_{w0}$, получаем выражение для вспомогательной переменной \hat{w} , зависящей от параметра r_{w0} :

$\hat{w}(r_{w0}) = \hat{r}_w \exp(i\varphi_w) = r_{w0} \exp(i\varphi_w^c) = r_{w0} \exp\{i[\varphi_w - i \ln(\hat{r}_w/r_{w0})]\}$, откуда следует $P^c(\hat{w}) = \exp\{-ikr_{z0} \cos[n\varphi_w^c(\hat{w}) - \varphi_0]\} = \exp\{-ikr_{z0} \cos[in(\ln r_{w0} - \ln \hat{w}) - \varphi_0]\}$ с учетом $i\varphi_w^c = \ln \hat{w} - \ln r_{w0}$, $\varphi_z^c = \varphi_z^c(\hat{w}) = n\varphi_w^c(\hat{w})$. На рис. 3 поверхность вспомогательной переменной $\hat{w}(r_{w0})$ изображена в виде цилиндра, по высоте которого откладывается величина $\ln(\hat{r}_w/r_{w0})$, а на рис 4 \hat{w} изображена в полярных координатах (\hat{r}_w, φ_w) . Полученная формула представляет собой явный вид зависимости $P^c(\hat{w})$. Поскольку эта функция со-

ответствует условиям (7), для нее справедливы и дальнейшие рассуждения. В частности, интегральное представление для функции $V(w_0)$ будет таким:

$$V(w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w}. \quad (25)$$

Следует отметить два важных момента. Во - первых, разным радиусам точки наблюдения r_{w_0} соответствуют разные вспомогательные области $\hat{w} = \hat{w}(r_{w_0})$. Во - вторых, с точки зрения математики неважно, какая из величин, стоящих в аргументе косинуса (φ_z или φ_0) становится комплексной. Это обстоятельство позволяет допустить две интерпретации полученного интегрального представления. Для точки наблюдения (r_{z_0}, φ_{z_0}) и угла прихода первичной плоской волны выражение (23) примет вид $P(w_0) = \exp[-ikr_{z_0} \cos(\varphi_{z_0} - \varphi_0)]$. В соответствии с вышеописанной методикой интегральное представление (25) выглядит так:

$$V(w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\exp\{-ikr_{z_0} \cos[\varphi_z^c(\hat{w}) - \varphi_0]\}}{\hat{w} - w_0} d\hat{w}. \quad (26)$$

Таким образом, для получения интегрального представления (26) мы в выражении для $P(w_0)$ заменили в аргументе косинуса $\varphi_{z_0} \rightarrow \varphi_z^c$. Однако, с таким же успехом можно было бы заменить и $\varphi_0 \rightarrow \varphi_0^c$:

$$V(w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\exp\{-ikr_{z_0} \cos[\varphi_{z_0} - \varphi_0^c(\hat{w})]\}}{\hat{w} - w_0} d\hat{w}. \quad (27)$$

Считая аргументы косинуса в (26) и (27) равными $\varphi_z^c - \varphi_0 = \varphi_{z_0} - \varphi_0^c$, проведем в интеграле (27) ряд несложных преобразований с учетом соотношений

$$d(\ln \hat{w}) = id\varphi_w^c = \frac{i}{n} d\varphi_z^c = \frac{i}{n} d(\varphi_z^c - \varphi_0) = \frac{i}{n} d(\varphi_z - \varphi_0^c) = \frac{-i}{n} d\varphi_0^c:$$

$$\begin{aligned} V(w_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\hat{w}}{\hat{w} - w_0} \exp[-ikr_{z_0} \cos(\varphi_{z_0} - \varphi_0^c)] \frac{d\hat{w}}{\hat{w}} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{1 - \exp[i(\varphi_{z_0} - \varphi_z^c)/n]} \exp[-ikr_{z_0} \cos(\varphi_{z_0} - \varphi_0^c)] d\varphi_z^c = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{1 - \exp[i(\varphi_0 - \varphi_0^c)/n]} \exp[-ikr_{z_0} \cos(\varphi_{z_0} - \varphi_0^c)] d\varphi_0^c \end{aligned} \quad (28)$$

Если в (28) осуществить замену переменных $\varphi_0 = \alpha$, $\varphi_0^c = \beta$, то станет очевидно, что интегральное представление (27) эквивалентно известному интегральному представлению Зоммерфельда [6, 7]:

$$U = \int_C A(\beta) \exp[-ikr \cos(\varphi - \beta)] d\beta, \quad A(\beta) = \frac{1}{2\pi n} \frac{e^{i\beta/n}}{e^{i\beta/n} - e^{i\alpha/n}}, \quad (29)$$

которое обычно называют разложением по плоским волнам. Смысл этого выражения объясняют таким образом, что поле в точке пространства ищется в виде приходящих в эту точку совокупности плоских волн с различными амплитудами $A(\beta)$. Это доказывает удовлетворение решения тому же волновому уравнению, которому удовлетворяют первичные плоские волны.

Следовательно, интегральное представление (26), эквивалентное (27), также удовлетворяет первичному волновому уравнению. Однако, интерпретация (26) несколько иная. Она заключается в том, что поле первичной волны, взятое в точке наблюдения, записывается в виде интегрального представления по замкнутому контуру в некоторой комплексной области, а затем из этого интегрального представления выделяются участки, которые можно интерпретировать как рассеянное поле. Такая интерпретация позволяет задавать в более общем виде первичные поля возбуждения, а также более свободно оперировать с ними. Требуется лишь знать зависимость первичного поля от координат и осуществить замену координат таким образом, чтобы удовлетворялись условия (6) и (7).

Таким образом, мы показали, что решения (11) или (12) удовлетворяют волновому уравнению (2), поскольку функция P^c удовлетворяет в области \hat{W}_{12} тому же волновому уравнению, что и в точке наблюдения w_0 , а в этой точке она удовлетворяет первичному волновому уравнению (2), поскольку точка w_0 находится на кривой r_{d0} .

Решения (11) или (12) удовлетворяет условию излучения, поскольку интегрирование в формуле (10) проводится по участкам сходимости, где P^c убывает при увеличении волнового числа.

Осталось доказать, что решения (11) или (12) удовлетворяют условию Мейкснера на ребре.

На данном этапе мы не можем доказать условие Мейкснера для решений (11) или (12) в общем виде, т.е. для рассеивателя с кромкой произвольной формы. Но для клиновидного рассеивателя его можно считать доказанным, поскольку наше решение (27) совпадает с зоммерфельдовским (29).

Таким образом, мы нашли решения уравнения Гельмгольца при помощи подстановки переменной \hat{w} в известную функцию P и построения интегрального представления полученной функции в соответствии с теоремой Коши о вычетах.

Формулы (10), (11) и (12) представляют собой интегральные представления решения краевой задачи в общем виде. Для получения интегрального представления решения достаточно найти вид конформного отображения, определить границы тени во вспомогательной области и провести по ним интегрирование по участкам сходимости на контуре интегрирования в соответствии с формулой (10).

1.3.2 Особенности решения и эвристический подход

Рассмотрим функцию падающего поля в виде (24). Если искать для нее рассеянное поле в виде разложения по плоским волнам (29), то нужно заменить в (24) угол прихода плоской волны φ_0 на комплексную переменную β . Эта операция никак не отражается на координатах. Независимо от того, в какой области (z или w) мы ищем решение, волновое уравнение останется прежним, а удовлетворение решения граничным условиям будет определяться тем, насколько удачно подобрана или найдена подынтегральная функция амплитуды плоской волны $A(\beta)$. С другой стороны, если искать рассеянное поле в области w в виде (26), подставив в (24) \hat{w} вместо w , то подынтегральный множитель получается автоматически, поскольку представляет собой простой полюс. Кроме того, в области w автоматически удовлетворяются граничные условия. Рассмотрим получающуюся при этом функцию $P^c(\hat{w})$

$$P^c(\hat{w}) = \exp\left\{-ikr_z(r_{w0}, \varphi_w^c) \cos[\varphi_z(r_{w0}, \varphi_w^c) - \varphi_0]\right\}. \quad (30)$$

Изучение интеграла (25) с функцией $P^c(\hat{w})$ общего вида (30) (или более сложного) представляет собой математическое исследование, выходящее за рамки настоящей работы. Прежде всего, в рамках подобного исследования нужно выяснить условия соответствия функции $P^c(\hat{w})$ уравнению Лапласа в области \hat{w} . Для клиновидных рассеивателей уравнение Лапласа выполняется, поскольку $r_z(r_{w0}, \varphi_w^c) = \text{const}$. Можно было бы попытаться использовать известное решение для поля, рассеянного на клине в задаче дифракции на рассеивателе с размерным параметром. Однако, непосредственная подстановка решения для клина в область \hat{w} рассеивателя с размерным параметром и последующий перевод решения в область z при помощи конформного отображения приведет к неверному результату, поскольку будет соответствовать задаче дифракции на теле в неоднородной среде. Коэффициент преломления этой неоднородной среды будет равен отношению производных $|dz/dw|$ для клина и рассеивателя с размерным параметром. Однако если взять решение для клина не во всем пространстве, а на выделенной кривой, где отношение производных равно единице, а затем продолжить решение в оставшуюся область пространства, то можно получить правильное решение волнового уравнения для рассеянного поля. Такой подход согласуется с представлениями о квазистатическом приближении. Известно, что если размеры тела много меньше длины волны, то распределение поля в его окрестности такое же, как в статическом случае. В случае полубесконечного тела его раз-

меры всегда больше длины волны, однако размеры выделенной кривой, на которой ищется решение, могут соответствовать указанному условию. Данный подход будет уже не строгим, а эвристическим, поэтому для него требуется не математически строгое доказательство, а верификация.

1.3.3 Решение задачи дифракции плоской и цилиндрической волны на клине при помощи метода обобщенного эйконала

Рассмотрим функцию падающей волны (1) вида

$$P(r_z, \varphi_z) = A(r_z, \varphi_z) \exp[iS(r_z, \varphi_z)], \quad (31)$$

где в случае плоской волны:

$$A(r_z, \varphi_z) = 1, \quad S(r_z, \varphi_z) = -kr_z \cos(\varphi_z - \varphi_0), \quad (32)$$

а в случае цилиндрической волны

$$A(r_z, \varphi_z) = f(\varphi_z) / \sqrt{k\rho}, \quad S(r_z, \varphi_z) = k\rho = k\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi_z - \varphi_0)}. \quad (33)$$

Здесь ρ - расстояние от источника до точки наблюдения, r_0 и r - расстояния до кромки от источника и точки наблюдения соответственно, $k = 2\pi/\lambda$, $f(\varphi_z)$ - зависимость амплитуды от угла. Выражение для амплитуды в (33) является асимптотикой при $k\rho \gg 1$ строгого выражения, которое представляет собой функцию Ханкеля первого рода $H_0^{(1)}(k\rho)$, $H_0^{(1)}(k\rho) \approx \sqrt{2/(\pi k\rho)} \exp(ik\rho - i\pi/4)$ при $k\rho \gg 1$. Более точное выражение для амплитуды и для функции падающей волны в случае цилиндрической волны будут такими:

$$A(r_z, \varphi_z) = f(\varphi_z) \sqrt{\frac{\pi i}{2}} H_0^{(1)}(k\rho) \exp(-ik\rho), \quad P(r_z, \varphi_z) = f(\varphi_z) \sqrt{\frac{\pi i}{2}} H_0^{(1)}(k\rho). \quad (34)$$

Выражения (34) переходят в (33) при $k\rho \gg 1$.

Рассмотрим вначале дифракцию цилиндрической волны (33) на клиновидном рассеивателе, для которого конформное отображение (3) и производная (5) имеют вид:

$$kz(w) = A \cdot w^n, \quad \frac{d[kz(w)]}{dw} = A \cdot n \cdot w^{n-1} = d, \quad (35)$$

где A - коэффициент пропорциональности, постоянный во всех точках w и поэтому не зависящий от этой переменной.

В общем случае $|d| \neq 1$. В соответствии с методом обобщенного эйконала решение ищется в точке наблюдения w_0 , принадлежащей кривой r_{d0} , на которой должно выполняться $|d_0| = r_{d0} = 1$. Подставим в (35) произвольное значение w_0 :

$$\frac{d[kz(w_0)]}{dw} = d_0 = A \cdot n \cdot w_0^{n-1} = \frac{n \cdot kz(w_0)}{w_0}, \quad |kz(w_0)| = |A \cdot w_0^n| = \frac{|w_0|}{n}, \quad A = \frac{|w_0^{1-n}|}{n}. \quad (36)$$

Из (36) следует, что при $|d_0| = 1$ $|kz(w)|$ не зависит от коэффициента A , который, в свою очередь, зависит от $|w_0|$ и таким образом меняет вид конформного отображения. Выполнить условие независимости коэффициента A от переменной w можно, зафиксировав значение $|w_0|$ на какой-то определенной величине, например, положив $|w_0| = 1$.

С другой стороны, можно провести нормировку переменной $w_N = w/|w_0|$, $|w_N| = 1$. Тогда:

$$kz(w) = \frac{|w_0|}{n} \left(\frac{w}{|w_0|} \right)^n = \frac{|w_0|}{n} (w_N)^n, \quad \frac{d[kz(w)]}{dw_N} = d_N = |w_0| (w_N)^{n-1}. \quad (37)$$

Из (37) также следует, что условие $|d_N| = 1$ выполняется лишь при $|w_0| = 1$.

Если теперь перейти к нормированной переменной w_N , то конформное отображение следует брать в виде $kz(w_N) = w_N^n/n$, при этом для нормированной производной будет выполняться $|d_N| = 1$. То же самое выражение получится, если в (36) устранить зависимость коэффициента A от переменной w , положив $|w_0| = 1$. Отсюда получим $A = 1/n$.

Таким образом, нормированные выражения для конформного отображения и производной в случае дифракции цилиндрической волны на клиновидном рассеивателе будут такими:

$$kz(w) = \frac{1}{n} w^n, \quad \frac{d}{dw} [kz(w)] = w^{n-1} = d. \quad (38)$$

Кривая r_{d0} в случае клиновидного рассеивателя представляет собой фрагмент окружности $|w| = 1$. Поскольку точка наблюдения w_0 находится на окружности r_{d0} , то $r_{w0} = |w_0| = 1$. В области z на этой окружности выполняется $kr_{z0} = 1/n$.

Осуществим замену переменной $w \rightarrow \hat{w}(r_{w0})$ (или $\varphi_w \rightarrow \varphi_w^c$):

$$w = r_w \exp(i\varphi_w), \quad \hat{w}(r_{w0}) = r_{w0} \exp(i\varphi_w^c) = \hat{r}_w \exp(i\varphi_w),$$

$$\varphi_w^c = i \ln r_{w0} - i \ln \hat{w}(r_{w0}) = i \ln r_{w0} - i \ln \hat{r}_w + \varphi_w = -i \ln \frac{\hat{r}_w}{r_{w0}} + \varphi_w, \quad (39)$$

где $r_{w0} = |w_0|$, w_0 - точка наблюдения, которая всегда находится на кривой r_{d0} .

Преобразование вида (39) вводит дополнительную радиальную переменную \hat{r}_w , при этом первичная радиальная переменная фиксируется $r_w = r_{w0}$, а φ_w остается неизменной. В системе полярных координат (\hat{r}_w, φ_w) образуется вспомогательная область $\hat{w}(r_{w0})$, в которой комплексная переменная φ_w^c действительна и равна φ_w на окружности $\hat{r}_w = r_{w0}$. Функция обобщенного эйконала: $P^c(\hat{w}) = P(w)$ во всех точках окружностей $r_{w0} = const$, поскольку в этих точках $r_w = \hat{r}_w = r_{w0}$, $\varphi_w = \varphi_w^c$ и $w = \hat{w}(r_{w0})$.

Таким образом, для утверждения о том, что преобразование (39) соответствует условиям (7), осталось доказать, что $\Delta_{\hat{w}} P^c = 0$ в \hat{w}_{12} . Последнее следует из того, что P^c является аналитической функцией от $\hat{w}(r_{w0})$, в отличие от функции P , которая не является аналитической функцией от w или z . Функция P зависит от переменных (r_z, φ_z) , причем $r_z = |z|$, $\varphi_z = \arg(z)$. Преобразования такого рода не являются аналитическими, поэтому функция P удовлетворяет волновому уравнению Гельмгольца (2), а не уравнению Лапласа. Однако, если в соответствии с (38) зафиксировать $r_z = r_{z0} = r_{w0}^n / (kn)$, положив $r_w = r_{w0}$, то на этой окружности получим с учетом (39)

$$\varphi_z^c = -i \ln(z) + i \ln(r_{z0}) = -i \ln\left(\frac{w^n}{kn}\right) + i \ln\left(\frac{r_{w0}^n}{kn}\right) = n\varphi_w^c, \quad (40)$$

а это уже аналитическая функция, поэтому функция $P^c(\hat{w})$ удовлетворяет уравнению Лапласа (7).

Поэтому для функции $P^c(\hat{w})$ справедливы и дальнейшие рассуждения, относящиеся к интегральным преобразованиям.

Вид вспомогательной области $\hat{w}(r_{w0})$ зависит от значения r_{w0} , но не зависит от вида рассеивателя. Следовательно, найденное при помощи интегральных преобразований в области $\hat{w}(r_{w0})$ полное поле $U(w_0)$ также не зависит от вида кривой r_{d0} . С другой стороны, формула для производной (5) и вид кривой r_{d0} зависят от формы рассеивателя. Поэтому одно и то же значение $U(w_0)$ в точке w_0 области w переносится в область z с разными значениями z_0 и $|d(kz)/dw|$, которые зависят от вида рассеивателя, причем, как

уже было сказано ранее, при переносе решения в область z оно сохранится неизменным лишь в точках $|d(kz)/dw| = 1$.

Комплексная угловая переменная φ_w^c является действительным числом в точке наблюдения w_0 , которая всегда находится на кривой r_{d0} . Поэтому на r_{d0} : $\hat{w} = w_0$ и $\hat{r}_w = r_{w0}$.

Если зафиксировать $r_{w0} = const$, то будет верно также и $r_{z0} = const$ во всей области \hat{w} . Кроме того, из (38) следует линейная связь между угловыми переменными $\varphi_z = n\varphi_w$. Поэтому на r_{d0} (где в соответствии с (39) $\hat{r}_w = r_w = r_{w0}$) подстановка \hat{w} вместо w в выражение для эйконала сводится к замене действительных угловых переменных φ_w и φ_z на комплексные φ_w^c и φ_z^c соответственно, причем $\varphi_z^c = n\varphi_w^c$.

Выражение для \hat{w} можно получить с помощью формальной подстановки в выражение для w вместо старых координат (r_w, φ_w) новых: (r_{w0}, φ_w^c) , где r_{w0} - постоянная, а φ_w^c - комплексная, выражающаяся с помощью φ_w и \hat{r}_w . Можно условно считать, что дополнительная ортогональная координата \hat{r}_w направлена перпендикулярно как φ_w , так и r_w (т.е. перпендикулярно плоскости (r_w, φ_w)). Таким образом, вместо пары действительных координат (r_w, φ_w) получаем тройку $(r_w, \hat{r}_w, \varphi_w)$. Фиксируя $(r_w, \hat{r}_w = r_{w0}, \varphi_w)$, получаем область w , фиксируя $(r_w = r_{w0}, \hat{r}_w, \varphi_w)$, получаем область \hat{w} .

Подставив φ_w^c вместо φ_w в $P(r_z, \varphi_z)$ из (31), получим обобщенную функцию геометрической оптики $P^g(r_w, \hat{r}_w, \varphi_w)$, зависящую уже от трех действительных переменных:

$$P[r_z(r_w, \varphi_w^c), \varphi_z(r_w, \varphi_w^c)] = \exp\{-ikr_z(r_w, \varphi_w^c) \cos[\varphi_z(r_w, \varphi_w^c) - \varphi_0]\} = P^g(r_w, \hat{r}_w, \varphi_w^c). \quad (41)$$

По аналогии с обобщенной функцией геометрической оптики в соответствии с (31) можно написать выражение и для обобщенного эйконала:

$$S[r_z(r_w, \varphi_w^c), \varphi_z(r_w, \varphi_w^c)] = -kr_z(r_w, \varphi_w^c) \cos[\varphi_z(r_w, \varphi_w^c) - \varphi_0] = S^g(r_w, \hat{r}_w, \varphi_w^c). \quad (42)$$

Как будет показано ниже, свойства функции (42) определяют особенности нового метода, поэтому целесообразно назвать его «метод обобщенного эйконала».

Фиксируя в тройке координат $(r_w, \hat{r}_w, \varphi_w)$ значение одной из радиальных переменных (приравнивая $\hat{r}_w = r_{w0}$ или $r_w = r_{w0}$), можно придавать желаемые свойства обобщенной функции геометрической оптики (41). При $\hat{r}_w = r_{w0}$ получаем $\varphi_w^c = \varphi_w$ и $P^g(r_w, r_{w0}, \varphi_w) = P[r_z(r_w, \varphi_w), \varphi_z(r_w, \varphi_w)]$, а при $r_w = r_{w0}$ получаем новую функцию $P^c(\varphi_w^c)$ комплексной переменной φ_w^c :

$$P[r_z(r_{w0}, \varphi_d^c), \varphi_z(r_{w0}, \varphi_w^c)] = \exp\left\{-ikr_z(r_{w0}, \varphi_w^c) \cos[\varphi_z(r_{w0}, \varphi_w^c) - \varphi_0]\right\} = \quad (43)$$

$$= P^g(r_{w0}, \hat{r}_w, \varphi_w) = P^c(\varphi_w^c)$$

Старая функция $P(r_z, \varphi_z)$ удовлетворяет в области z уравнению Гельмгольца, а в w - уравнению Гельмгольца с переменным волновым числом. В то же время новая функция плоской волны $P^c(\varphi_w^c)$ в соответствии со свойствами аналитической функции удовлетворяет в \hat{w} уравнению Лапласа: $\Delta_{\hat{w}} P^c(\varphi_w^c) = 0$. Это происходит потому, что $P(r_z, \varphi_z)$ зависит не в целом от комплексной переменной z (или от d , или от w), а по отдельности от координат r_z и φ_z (которые можно выделить из z лишь с применением операции комплексного сопряжения). Напротив, $P^c(\varphi_w^c)$ зависит от одной комплексной переменной φ_w^c в целом.

Таким образом, мы получили свойства обобщенной функции геометрической оптики $P^g(r_w, \hat{r}_w, \varphi_w)$ для фиксированного значения одной из радиальных координат. Зафиксировав оба значения радиальных координат: $r_w = \hat{r}_w = const = r_{w0}$, мы окажемся на общей для областей w и \hat{w} кривой r_{w0} , на которой $P = P^c$ и $S = S^c$.

Например, для плоской волны вида (32) получаем с учетом (38):

$$S^c[\hat{w}(r_{w0})] = -kr_{z0} \cos(\varphi_z^c - \varphi_0) = -n^{-1} r_{w0}^n \cos(n\varphi_w^c - \varphi_0). \quad (44)$$

Области сходимости функции (на которых функция убывает при увеличении волнового числа) $P^c = \exp(iS^c)$ определяются условием $\text{Im} S^c > 0$, которое с учетом выражения

$$-\cos(\varphi_z^c - \varphi_0) = -\cos(\text{Re } \varphi_z^c - \varphi_0) \cosh(\text{Im } \varphi_z^c) + i \sin(\text{Re } \varphi_z^c - \varphi_0) \sinh(\text{Im } \varphi_z^c), \quad (45)$$

а также (39) приводит к неравенству

$$\sin(\text{Re } \varphi_z^c - \varphi_0) \sinh(\text{Im } \varphi_z^c) > 0, \text{ или } \sin(\varphi_z - \varphi_0) \left[\left(\frac{r_{w0}}{\hat{r}_w} \right)^n - \left(\frac{\hat{r}_w}{r_{w0}} \right)^n \right] > 0. \quad (46)$$

Участки сходимости изображены на (рис. 4) при помощи штриховки.

Для цилиндрической волны вида (33) получаем:

$$S^c[\hat{w}(r_{w0})] = k \sqrt{r_{z0}^2 + r_0^2 - 2r_{z0}r_0} \cos(n\varphi_w^c - \varphi_0), \quad (47)$$

аналогичное выражение получается и для плоской волны вида (32). На кривой r_{d0} функция $S^c(w_0)$ является действительным числом, поскольку в ней $\varphi_w^c = \varphi_{w0}$.

С другой стороны, из (39) следует:

$$\frac{d}{d\hat{w}} = \frac{d}{d\varphi_w^c} \frac{d\varphi_w^c}{d\hat{w}} = \frac{d}{d\varphi_w^c} \frac{1}{i\hat{w}}. \quad (48)$$

С учетом (47) и (48) нетрудно получить выражение для первой производной

$$\frac{dS^c[\hat{w}(r_{w0})]}{d\hat{w}} = \frac{kr_{z0}r_0 \sin(n\varphi_w^c - \varphi_0)}{\sqrt{r_{z0}^2 + r_0^2 - 2r_{z0}r_0 \cos(n\varphi_w^c - \varphi_0)}} \frac{n}{i\hat{w}}. \quad (49)$$

На участках контурных интегралов (9), проходящих вдоль границы тени, первая производная равна нулю на пересечении границ тени с кривой r_{d0} , а именно - в точках, где переменная φ_w^c действительна и удовлетворяет соотношению $n\varphi_w^c - \varphi_0 = \pm\pi$. При этом выполняется $\sin(n\varphi_w^c - \varphi_0) = 0$, $\cos(n\varphi_w^c - \varphi_0) = -1$.

Вычислим теперь вторую производную по \hat{w} функции $S^c[\hat{w}(r_{w0})]$ в указанных точках:

$$\frac{d^2 S^c[\hat{w}(r_{w0})]}{d\hat{w}^2} = \frac{kr_{z0}r_0}{r_{z0} + r_0} \left(\frac{n}{\hat{w}} \right)^2 \text{ при } n\varphi_w^c - \varphi_0 = \pm\pi. \quad (50)$$

Поскольку, в отличие от первой производной, вторая производная нулю не равна, точки $n\varphi_w^c - \varphi_0 = \pm\pi$ являются по определению седловыми точками функции $S^c[\hat{w}(r_{w0})]$ в области \hat{w} . Обозначим их \hat{w}_{sm} , где m - номер седловой точки. С учетом этого перепишем (50) в виде:

$$\left[S^c(\hat{w}_{sm}) \right]'' = \frac{kr_{z0}r_0}{r_{z0} + r_0} \left(\frac{n}{\hat{w}_{sm}} \right)^2. \quad (51)$$

Подставив значения \hat{w}_{sm} в функцию $S^c[\hat{w}(r_{w0})]$, получим

$$S^c(\hat{w}_{sm}) = k(r_{z0} + r_0). \quad (52)$$

Выражения (51) и (52) понадобятся нам в дальнейшем для вычисления интеграла в окрестности седловой точки методом стационарной фазы.

Для получения решения краевой задачи осталось найти координаты точек наблюдения w_0 , которые находятся на кривой r_{d0} исследуемого рассеивателя.

Заметим, что в (51) при $r_{z0} \gg r_0$ или при $r_{z0} \ll r_0$ выражение $r_{z0}r_0/(r_{z0} + r_0)$ приближенно равно меньшему из r_0 и r_{z0} . Случай $kr_0 \gg 1$ соответствует плоской волне

(32), а при $r_{z0} \gg r_0$ (цилиндрическая волна (33)) точка наблюдения находится в дальней зоне по отношению к источнику.

Подставив в (20) значения из (47), (51) и (52), получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{sm} \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} \cong \frac{P(\hat{w}_{sm})}{\sqrt{2\pi i \frac{kr_{z0}r_0}{r_{z0} + r_0}}} \frac{\hat{w}_{sm}/n}{\hat{w}_{sm} - w_0} \frac{2i\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}{\exp[iS^c(\hat{w}_{sm}) - iS^c(w_0)]} \frac{\int_{\infty\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}^{\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}} \exp(iq^2) dq. \quad (53)$$

При выполнении условия $(r_{z0} + r_0)^2 \gg |2r_{z0}r_0[1 + \cos(\varphi - \varphi_0)]|$ (а именно - вблизи границ тени ($\varphi - \varphi_0 = \pm\pi$), где $\cos(\varphi - \varphi_0) \cong -1$) или при $r_{z0}^2 + r_0^2 \gg 1$, в том числе при $r_{z0} \gg 1$ или $r_0 \gg 1$ к эйконалу (33) можно применить формулу биномиального разложения

$$\rho = \sqrt{(r_{z0} + r_0)^2 - 2r_{z0}r_0[1 + \cos(\varphi - \varphi_0)]} = (r_{z0} + r_0) \left[1 - \frac{2r_{z0}r_0}{(r_{z0} + r_0)^2} 2\cos^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right]^{1/2} \cong, \quad (54)$$

$$\cong (r_{z0} + r_0) \left[1 - \frac{r_{z0}r_0}{(r_{z0} + r_0)^2} 2\cos^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right] = r_{z0} + r_0 - \frac{r_{z0}r_0}{r_{z0} + r_0} 2\cos^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{2}$$

при этом с учетом (51) получаем:

$$S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0) = \frac{kr_{z0}r_0}{r_{z0} + r_0} 2\cos^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{2} = [S^c(\hat{w}_{sm})]'' \left(\frac{\hat{w}_{sm}}{n} \right)^2 \cos^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{2}. \quad (55)$$

Подставив в (21) значения для $[S^c(\hat{w}_{sm})]''$ из (55) и $S^c(w_0)$ из (32), получим

$$v(r, \psi) = \frac{2i}{n} \left(\frac{\hat{w}_{s1}}{\hat{w}_{s1} - w_0} - \frac{\hat{w}_{s2}}{\hat{w}_{s2} - w_0} \right) \cos \frac{\psi}{2} \frac{e^{-ikr_{z0} \cos \psi}}{\sqrt{\pi i}} \frac{\int_{\infty \cos(\psi/2)}^{\sqrt{2kr_{z0} \cos(\psi/2)}} \exp(iq^2) dq. \quad (56)$$

Общее выражение (56) для рассеянного поля в случае возбуждения плоской волной (32) полностью согласуется с известными формулами теории дифракции. Как уже говорилось, в случае дифракции на клине кривая r_{d0} является окружностью, при этом $r_{wsm} = r_{w0}$. Если подставить в (56) выражения для координат точек \hat{w}_{sm} и w_0 : $\hat{w}_{sm} = r_{wsm} \exp[i(\varphi_0 \pm \pi)/n]$, $w_0 = r_{w0} \exp(i\varphi_z/n)$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{w}_{s1}}{\hat{w}_{s1} - w_0} - \frac{\hat{w}_{s2}}{\hat{w}_{s2} - w_0} &= \frac{\exp\left(i \frac{\varphi_0 + \pi}{n}\right)}{\exp\left(i \frac{\varphi_0 + \pi}{n}\right) - \exp\left(i \frac{\varphi_z}{n}\right)} - \frac{\exp\left(i \frac{\varphi_0 - \pi}{n}\right)}{\exp\left(i \frac{\varphi_0 - \pi}{n}\right) - \exp\left(i \frac{\varphi_z}{n}\right)} = \\ &= \frac{\exp\left(i \frac{\pi}{n}\right)}{\exp\left(i \frac{\pi}{n}\right) - \exp\left(i \frac{\varphi_z - \varphi_0}{n}\right)} - \frac{\exp\left(-i \frac{\pi}{n}\right)}{\exp\left(-i \frac{\pi}{n}\right) - \exp\left(i \frac{\varphi_z - \varphi_0}{n}\right)} = \frac{i \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi_z - \varphi_0}{n}}, \end{aligned} \quad (57)$$

то из (21) и (53) получится при $r_{z0} \ll r_0$ хорошо известное выражение для задачи рассеяния плоской волны на клине [1]:

$$v(r_z, \psi) = \frac{-2}{n} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi}{n}} \cos \frac{\psi}{2} \frac{e^{-ikr_{z0} \cos \psi}}{\sqrt{\pi i}} \int_{\infty \cos(\psi/2)}^{\sqrt{2kr_{z0}} \cos(\psi/2)} \exp(iq^2) dq, \quad (58)$$

где $\psi = \varphi_z - \varphi_0$, $S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0) = kr_{z0}(1 + \cos \psi) = 2kr_{z0} \cos^2(\psi/2)$.

В интегральных представлениях (14) и (17), построенных при помощи метода обобщенного эйконала и вычисленных приближенно при помощи метода стационарной фазы, присутствует разность значений функции обобщенного эйконала в седловой точке и точке наблюдения $S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)$. В теории дифракции это выражение интерпретируется как разность эйконалов краевой и падающей (или отраженной) волн. Из (52), (54) и (58) следует, что как для случая плоской волны, так и для случая рассеяния цилиндрической волны на клине это выражение согласуется с известными формулами (см., например, [3, 50, 57, 63]).

$$S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0) = S_{\text{кр}} - S_{\text{пад}}^{\text{отр}} = k(r_{z0} + r_0 - \rho), \quad (59)$$

где $\rho = \sqrt{r_{z0}^2 + r_0^2 - 2r_{z0}r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}$ и соответствует эйконалу вида (33).

Выражение для дифракции цилиндрической волны на клине можно получить при помощи подстановки в общее выражение (21) разности эйконалов (59) вместе со второй производной (51).

Таким образом, подстановка в полученную при помощи метода обобщенного эйконала общую форму решения для рассеянного поля (21), выражений для падающей волны (32) и (47), с целью получения аналитического решения задачи дифракции плоской и цилиндрической волны на клине приводит к правильным результатам. Применяя метод обобщенного эйконала для рассеивателей другой формы, можно получать аналитические решения новых задач теории дифракции.

ГЛАВА 2. РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА ОБОБЩЕННОГО ЭЙКОНАЛА

В предыдущей главе изложены основные принципы метода обобщенного эйконала (МОЭ), который позволяет получать в явном виде аналитические решения двумерных задач теории дифракции. В основе этого метода лежит получение интегрального представления решения во вспомогательной области, получаемой при помощи теории конформных отображений. Во второй главе получены в общем виде асимптотики интегральных представлений дифракционных коэффициентов для идеально проводящих полубесконечных рассеивателей, в том числе для рассеивателей, имеющих размерный параметр. Применение этих выражений в случае дифракции на полуплоскости и клине приводит к известным результатам, что подтверждает справедливость разработанного метода. В настоящей главе получено аналитическое решение для полупластины с конечной толщиной. Проведено сравнение полученных результатов с асимптотическим решением той же задачи, представляющим собой расчет двукратного переотражения рассеянного сигнала на вершинах полупластины, а также с данными из литературы. Сравнение показало хорошее совпадение результатов.

Для клиновидных рассеивателей, не имеющих размерного параметра, интегральное представление (10) можно применять во всех точках области w , а не только на кривой r_{d0} (являющейся для клиновидного рассеивателя окружностью $r_{w0} = const$). Этот факт подтверждается тем, что для клиновидных рассеивателей интегральное представление решения полностью совпадает с известным интегральным представлением, которое может быть получено разными способами. Напротив, для случая рассеивателей с размерным параметром перенос решения для рассеянного поля из области $\hat{w}(r_{w0})$ в область w приводит к правильному результату не во всех точках области w , а лишь на кривой r_{d0} , в точках w_0 которой выполняется условие $|d(kz)/dw| = 1$ (или $k = |dw/dz|$). При этом в точках w_0 области w волновое уравнение (4) для поля $U(w_0)$ совпадает с первоначальным волновым уравнением (2). Если же $|d(kz)/dw| \neq 1$ (или $k \neq |dw/dz|$), то в этих точках области w волновое уравнение (4) не совпадает с первоначальным волновым уравнением. Поэтому решение, перенесенное из $\hat{w}(r_{w0})$ в w , будет соответствовать исходной задаче с другим волновым числом k_1 , удовлетворяющим условию: $k_1 = |dw/dz|$ (или $|d(k_1z)/dw| = 1$). Таким образом, для случая рассеивателей с размерным параметром корректный перенос решения для рассеянного поля из области $\hat{w}(r_{w0})$ в область w может осуществляться лишь в точках w_0 кривой r_{d0} .

В соответствии с (39) вид вспомогательной области $\hat{w}(r_{w0})$, а также зависимость функции обобщенного эйконала от комплексной угловой переменной в интегральном представлении решения для рассеивателя с размерным параметром будут такими же, как

соответствующие зависимости для клиновидного рассеивателя. Таким образом, решение для рассеивателя с размерным параметром можно найти, разместив его кривую r_{d0} в области w , где уже существует решение для клиновидного рассеивателя, удовлетворяющее первичному волновому уравнению во всей области z . Однако, как будет показано далее, размещение кривой r_{d0} должно сопровождаться ее предварительной нормировкой.

2.1 Решения задач дифракции на идеально проводящих полупластине и усеченном клине при помощи метода обобщенного эйконала

Несмотря на достижение значительных успехов в области теории дифракции, не теряет актуальности вопрос о получении аналитических решений задач дифракции на полупластине и усеченном клине, доступных для использования широким кругом исследователей и инженеров.

В качестве дополнительных бонусов тем, кто решился освоить новый метод расчета, может появляться возможность интерпретации с физической точки зрения отдельных составляющих математических формул, их наглядного представления на иллюстрациях и изучения их поведения отдельно друг от друга. Особый интерес представляет собой возможность исследовать поведение решения в области равномерного стремления к нулю величины размерного параметра (расстояния между вершинами). Такие бонусы дает недавно разработанный [147, 148, 150, 154, 156, 157, 162, 163] метод обобщенного эйконала (МОЭ). Излагая краткие основы этого метода, мы будем в данном разделе в основном использовать результаты работы [167].

Основа метода обобщенного эйконала

В соответствии с МОЭ интегральное представление поля, непрерывного в области w_{12} , строится в области комплексной переменной \hat{w} , представляющей собой аналитическое продолжение с кривой r_{d0} в область комплексных значений.

На основе теоремы Коши о вычетах можно в области \hat{w} построить интегральное представление решения для рассеянного поля в точке наблюдения w_0 (8). В случае двух границ тени (для падающей и отраженной волны) и двух участков сходимости s_1 и s_2 получается формула общего вида (10).

Вычислив интегралы типа (10) при помощи метода стационарной фазы, получим (21).

При условии нахождения замены переменной $w \rightarrow \hat{w}$, обеспечивающей удовлетворение условий (6), рассеянное поле в форме (21) описывает решение задачи дифракции для широкого класса рассеивателей.

Дифракция на клине

При помощи метода обобщенного эйконала можно получить известное решение задачи рассеяния на клине с внешним углом π . Конформное отображение и производная (5) равны (по аналогии с (35)):

$$kz = w^n/n, \quad d(kz)/dw = w^{n-1}, \quad r_{d0} = |w^{n-1}| = r_w^{n-1} = (nkr_z)^{\frac{n-1}{n}}, \quad (60)$$

а семейство кривых r_{d0} превращается в семейство окружностей $r_{w0} = \text{const}$.

Переменная φ_w является угловой координатой точки окружности $r_{w0} = \text{const}$ в области w_{12} . Хотя для построения интегрального представления мы используем комплексную переменную φ_w^c , в итоговые формулы входят только координаты точек, которые находятся на кривой r_{d0} , общей для областей w и \hat{w} . Координаты этих точек являются действительными числами.

Для клина с его конформным отображением (60) удастся найти вид зависимости (39) между переменными \hat{w} и w , обеспечивающий удовлетворение условий (6) и получить решение для рассеянного поля. Преобразуя выражение общего вида (21), получим рассеянное поле на кривой r_{d0} в случае двух седловых точек w_{s1} и w_{s2} (соответствующих границам тени падающей и отраженной волны) (в соответствии с (21)):

$$v(w_0) \cong \sum_{m=1,2} \frac{P(w_{sm})}{\sqrt{2\pi i k r_{z0} r_0 / (r_{z0} + r_0)}} \frac{\hat{w}_{sm}/n}{\hat{w}_{sm} - w_0} \frac{2i \sqrt{S(w_{sm}) - S(w_0)}}{\exp[iS(w_{sm}) - iS(w_0)]} \frac{\int_{\infty \sqrt{S(w_{sm}) - S(w_0)}}^{\sqrt{S(w_{sm}) - S(w_0)}} \exp(iq^2) dq}{\sqrt{S(w_{sm}) - S(w_0)}} \quad (61)$$

В этом выражении обе седловые точки $w_{sm} = r_{w0} \exp[i(\varphi_0 \pm \pi)/n]$ и точка наблюдения $w_0 = r_{w0} \exp(i\varphi_{w0}) = (nkr_{z0})^{1/n} \exp(i\varphi_z/n)$ расположены на кривой r_{d0} . Полярные координаты источника в области z : (r_0, φ_0) . Полярные координаты точки наблюдения в области z : $z_0 = (r_{z0}, \varphi_{z0})$, а в области w : $w_0 = (r_{w0}, \varphi_{w0})$. Безразмерные (т.е. умноженные на k) эйконалы в седловых точках $S(w_{sm})$ и точке наблюдения $S(w_0)$ равны:

$$S(w_{sm}) = k(r_{z0} + r_0), \quad S(w_0) = k\rho = k\sqrt{(r_{z0} + r_0)^2 - 2r_{z0}r_0[1 + \cos(\varphi_{z0} - \varphi_0)]}, \quad (62)$$

входящие в формулу величины показаны на рис. 5.

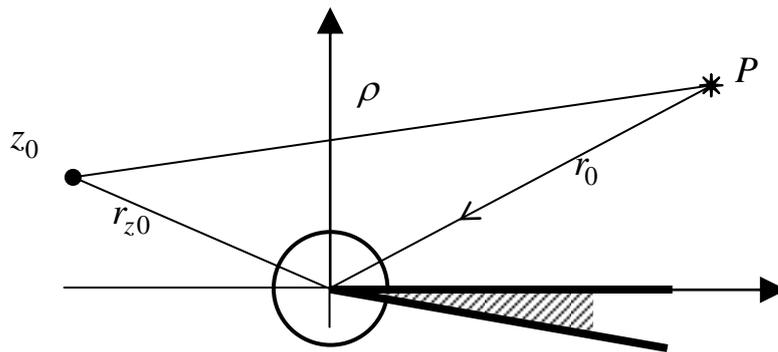


Рис. 5

Схема падения волны точечного источника на клин.

На рис. 5 показана схема падения волны точечного источника на клин. Жирная окружность соответствует кривой r_{d0} для клина.

Симметризация решения.

Выражение (61) для поля, рассеянного клином, рассматриваем в безграничной двулистной области w_{12} с переменным волновым числом. Данное выражение справедливо почти во всей области z (и почти везде в w_{12}) за исключением небольшой окрестности вокруг освещенной вершины. Эта окрестность находится внутри кривой r_{d0} .

Если не принимать специальных мер, то в общем случае решение (61) будет иметь разрывы. В двулистной области w_{12} значения угловой координаты точки наблюдения φ_{w0} изменяются в пределах интервала 2π . Назначив определенным образом начальные и конечные точки этого интервала, можно сделать решение (61) непрерывным. Для этого будем отсчитывать угловую координату точки наблюдения φ_{w0} от направления падающего поля, при этом φ_{w0} будет меняться в пределах $\varphi_0/n - \pi < \varphi_{w0} < \varphi_0/n + \pi$. Соответствующие значения углов φ_z будут меняться по формуле $\varphi_z = n\varphi_w$. Эти значения φ_z подставим в формулу (62). Тогда решение (61) станет непрерывным в области w_{12} и будет иметь лишь разрыв производной в направлениях $\varphi_0/n + \pi$ и $\varphi_0/n - \pi$. Оба эти направления соответствуют одному и тому же пространственному лучу в нижней полуплоскости w_2 области w_{12} . Назовем это назначение начальных и конечных точек φ_{w0} «симметризацией» решения.

Эвристический подход для случая рассеивателей с размерным параметром.

Как уже было показано ранее, замена переменной $w \rightarrow \hat{w}$ для клина (40) удовлетворяет условиям (6). Для рассеивателей более сложной формы, в том числе – для тех, которые имеют размерный параметр, нахождение явного вида формул замены переменной представляет собой сложную математическую задачу. Поэтому для рассеивателей с размерным параметром мы вместо поиска строгого выражения для замены переменной применим эвристический подход. Смысл его состоит в том, что для получения решения на рассеивателе с размерным параметром мы берем на кривой r_{d0} уже известное решение для клиновидного рассеивателя (который не имеет размерного параметра). Соответствующие действия описаны далее (в комментариях к рис. 10 и 11). После получения эвристического решения оно, как всегда, должно быть верифицировано, т.е. подвергнуто проверке и при необходимости – «настройке», т.е. уточнению.

2.1.1 Интеграл Шварца – Кристоффеля

Из теории комплексного переменного известен интеграл Шварца – Кристоффеля, который реализует конформное отображение $z(w)$ верхней полуплоскости w на область z , внешнюю по отношению к двумерному полубесконечному рассеивателю с углами при вершинах $\pi\alpha$ и $\pi\beta$ (рис. 6). Конформное отображение и производная:

$$kz(w) = C \int_{w_0}^w w^{\alpha-1} (w+2)^{\beta-1} dw + C_1, \quad \frac{dkz(w)}{dw} = C w^{\alpha-1} (w+2)^{\beta-1}. \quad (63)$$

Здесь C и C_1 - постоянные, определяемые геометрией системы.

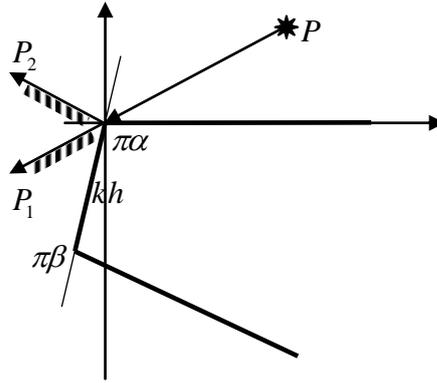


Рис. 6

Постановка задачи дифракции на усеченном клине.

На рис. 6 показана геометрия усеченного клина с величиной внешних углов при вершинах $\pi\alpha$ и $\pi\beta$. Длина торца равна kh . Границы «свет – тень» падающего и отраженного полей показаны штриховкой. Дополнительные границы «свет – тень» направлены вдоль продолжений торца.

2.2 Дифракция на полупластине

Рассмотрим рассеиватель конкретного вида, а именно - полупластину с конечной безразмерной толщиной kh ($k = 2\pi/\lambda$ - волновое число, h - размерная толщина полупластины), конформное отображение $kz(w)$ для которой имеет вид

$$\frac{\pi kz(w)}{kh} = (w+1)\sqrt{w(w+2)} - \ln[w+1 + \sqrt{w(w+2)}], \quad (64)$$

откуда получаем производную по w функции $kz(w)$:

$$\frac{d}{dw} \left[\frac{\pi kz(w)}{kh} \right] = 2\sqrt{w(w+2)} = 2D(w) = 2d = 2r_d \exp(i\varphi_d). \quad (65)$$

Задавая различные значения $|d| = r_d$, можно получить семейство кривых в областях w и z . Семейство этих кривых изображено на рис. 7.

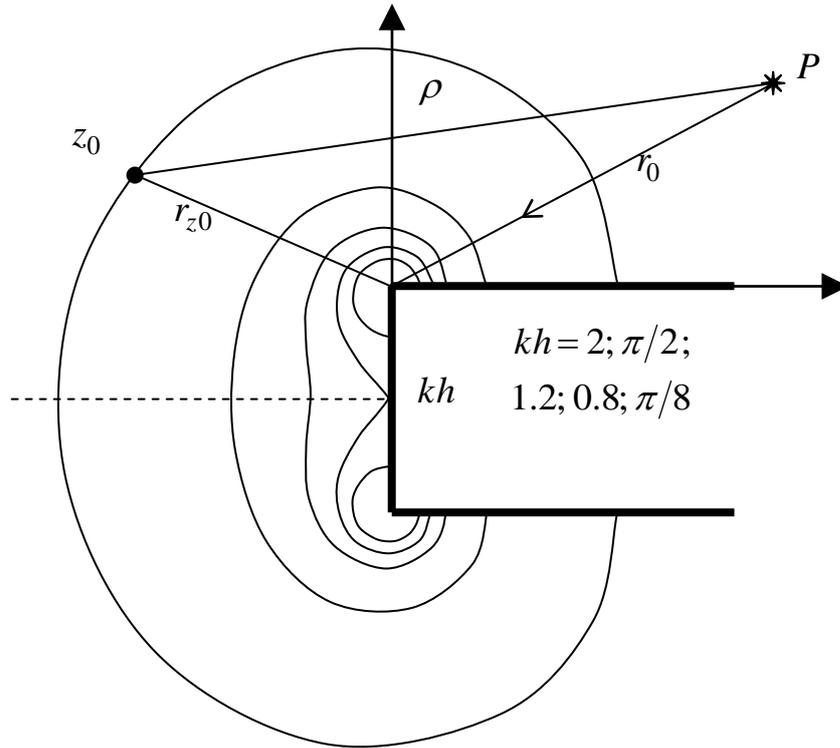


Рис. 7

Семейство кривых r_{d0} при падении волны точечного источника на идеально проводящую полупластину. При $kh=\pi/2$ и выше кривая r_{d0} состоит из двух отдельных частей. Чем меньше значение kh , тем точнее форма кривой r_{d0} соответствует окружности.

На рис. 7 показано семейство кривых r_{d0} для идеально проводящей полупластины (показана жирной линией). Точка наблюдения z_0 находится на кривой r_{d0} . При больших значениях kh ($\pi/2$ и выше) кривая r_{d0} разделяется на две части. Чем меньше значение kh , тем больше форма кривой r_{d0} приближается к окружности.

Переменная w является безразмерной. Независимо от величины kh верхней вершине полупластины соответствует точка $w=0$, середине торца - $w=-1$, нижней вершине - $w=-2$. Кривая $r_d = const$ может быть односвязной или двусвязной. Большим значениям $r_d \gg 1$ соответствуют односвязные кривые $r_d = const$, для которых $|w| \gg 1$, а малым $r_d \ll 1$ - двусвязные кривые $r_d = const$, для которых $|w| \ll 1$. В последнем случае имеются в виду точки w , расположенные на той части двусвязной кривой $r_d = const$, которая окружает начало координат $w=0$. Для другой части двусвязной кривой $r_d = const$, окружающей точку $w=-2$, при $r_d \ll 1$ будет выполняться $|w+2| \ll 1$.

В соответствии с принципом единственности решения очевидно, что каждому значению kh должна соответствовать своя кривая $r_d = const$, которую при изложении общей теории метода обобщенного эйконала мы называли «кривая r_{d0} ». Для установления взаимно однозначного соответствия $kh \leftrightarrow r_d$ представим полупластину с изменяющейся величиной kh как промежуточную фазу перехода от клина к полуплоскости. Как известно, клиновидные рассеиватели не имеют размерного параметра, а кривые r_{d0} для них при любых значениях внешнего угла раствора клина πn являются окружностями $kr_{z0} = 1/n$ в

области z или $|w_0| = r_{w0} = 1$ в области w . При переходе к предельным случаям задач рассеяния на полуплоскости ($kh \ll 1$, $r_d \gg 1$, $|w| \gg 1$) или клине ($kh \gg 1$, $r_d \ll 1$, $|w| \ll 1$), кривая r_{d0} в области w для толстой полупластины также должна стабилизироваться в окрестности окружности $r_{w0} = 1$ и перестать зависеть от kh . Следуя сказанному, осуществим нормировку области w :

$$w_N = C(kh) \cdot w, \quad (66)$$

где $C(kh)$ - функция, зависящая от размерного параметра, такая, что в предельных случаях $kh \ll 1$ и $kh \gg 1$ выполняется $|w_N| \cong 1$. Поскольку мы рассматриваем задачу рассеяния на фиксированной частоте, нормировка (66) является линейной, т.е. не зависит от w .

Для определения явного вида функции $C(kh)$ запишем в области w_N конформное отображение для клиновидного рассеивателя $kz(w_N)$, соответствующее бесконечно тонкой полуплоскости при $n=2$ и клину при $n = 3/2$, а также его производную:

$$kz(w_N) = \frac{1}{n} w_N^n, \quad \frac{d}{dw_N} [kz(w_N)] = w_N^{n-1} = d_N. \quad (67)$$

На кривой r_{d0} клиновидного рассеивателя $|w_N| = 1$. Поскольку при этом $|d_N| = 1$, d_N - нормированная производная. Очевидно, что в результате нормировки (66) конформное отображение (64) и производная (65) при $r_d \gg 1$ и $r_d \ll 1$ должны переходить в (67) для $n=2$ ($kh \ll 1$) и $n=3/2$ ($kh \gg 1$) соответственно.

Приравняем функции конформных отображений из (64) и (67):

$$kz(w) = kz(w_N), \quad (68)$$

а также возьмем производную по w_N от обеих частей равенства:

$$\frac{d[kz(w)]}{dw_N} = 2 \frac{kh}{\pi} d \frac{dw}{dw_N} = d_N. \quad (69)$$

Приравнивание формул для двух конформных отображений (68) является дополнительно наложенным условием, сформулированным исходя из физических предпосылок. Как уже говорилось ранее, если представить полупластину с изменяющейся величиной kh как промежуточную фазу перехода от клина к полуплоскости, кривые r_{d0} полупластины с изменяющейся величиной kh должны в предельных случаях $kh \ll 1$ и $kh \gg 1$ переходить в окружность $|w_N| = 1$, которая является кривой r_{d0} для клиновидного рассеивателя при

любых значениях внешнего угла раствора клина πn . Поскольку кривые r_{d0} рассеивателя с размерным параметром и клиновидного рассеивателя имеют разную форму, равенство (68) будет выполняться не во всех точках кривых r_{d0} , а в точке их пересечения, хотя в предельных случаях $kh \ll 1$ и $kh \gg 1$ кривые r_{d0} для двух типов рассеивателей будут практически совпадать.

Так как связь (66) между w и w_N линейная, то в (69) $dw/dw_N = w/w_N$, откуда

$$\frac{d \cdot w}{d_N \cdot w_N} = \frac{\pi}{2kh}, \quad \left| w \sqrt{w(w+2)} \right| = \frac{\pi}{2kh}. \quad (70)$$

Поскольку для всех сомножителей, в которые входит переменная w , линейная нормировка происходит в соответствии со степенями, с которыми они входят в левую часть (70), можно установить связь между нормированными и ненормированными величинами

$$\left| w \sqrt{\frac{2kh}{\pi}} \sqrt{w \sqrt{\frac{2kh}{\pi}} \left(w \sqrt{\frac{2kh}{\pi}} + 2 \sqrt{\frac{2kh}{\pi}} \right)} \right| = 1 = |d_N|, \quad w \sqrt{\frac{2kh}{\pi}} = w_N. \quad (71)$$

Таким образом, установив вид нормировочной функции из (66): $C(kh) = \sqrt{2kh/\pi}$, мы получили связь между w и w_N . Кроме того, из (71) можно установить и точку пересечения кривой $r_d = const$ с окружностью $|w_N| = 1$. Точка пересечения находится в средней точке кривой $r_d = const$, т.е. на перпендикуляре к торцу, поскольку лишь в ней выполняется условие равенства расстояний до вершин полупластины: $|w_N + 2\sqrt{2kh/\pi}| = |w_N| = 1 = r_{w0}$. Области w и w_N с кривыми r_{d0} показаны на рис. 8 и 9 соответственно.

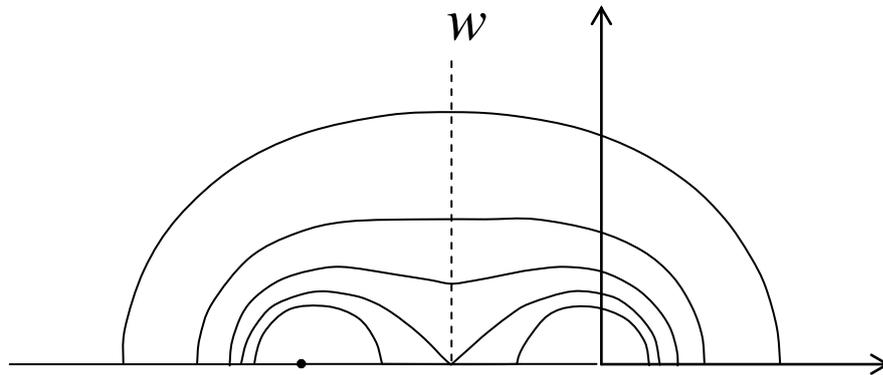


Рис. 8

Семейство кривых r_{d0} в области w .

На рис. 8 показано семейство кривых r_{d0} в области w . Это семейство тех же кривых, которые изображены на рис. 7. Кривые изменили форму в результате конформного отображения.

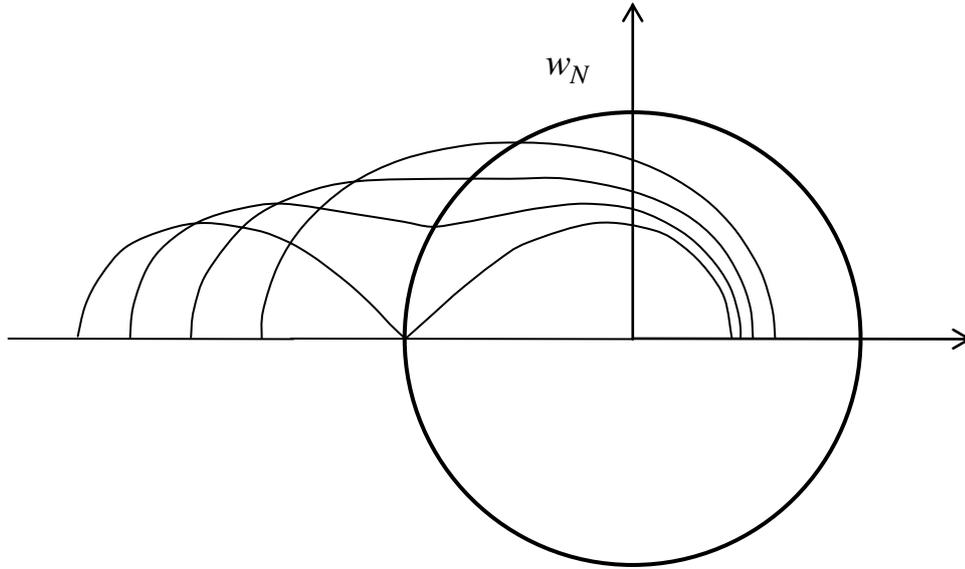


Рис. 9
Семейство кривых r_{d0} в области w_N .

На рис. 9 показано семейство кривых r_{d0} в области w_N . Нормировка размеров кривых проведена в соответствии с видом нормировочной функции $C(kh)$. Центральная точка каждой из кривых r_{d0} находится на окружности $|w_N| = 1$ (которая выделена жирной линией).

В случае многосвязной кривой $r_d = const$ процессы взаимодействия поля с рассеивателем локализуются в окрестности кромок, поэтому их следует рассматривать по отдельности. При переходе от многосвязной кривой к односвязной происходит объединение участков кривой $r_d = const$, которая теперь охватывает обе кромки сразу. В этом случае процесс дифракции на обеих кромках можно рассматривать как единое целое. Форма кривой $r_d = const$ зависит от значения kh . Из (71) следует, что для односвязной кривой $r_d = const$ при $kh \ll 1$, $|w| \gg 1$ выполняется $|w| \cong |d| \cong [\pi/(2kh)]^{1/2} = r_d$. Отсюда очевидно, что после перехода к нормированным величинам условие (5) $r_d = 1$ нужно переписать следующим образом: $r_{dN} = 1$, или

$$|d(kz)/dw_N| = |d_N| = 1, \quad d_N = d\sqrt{2kh/\pi}, \quad (72)$$

при этом условие равенства модуля производной единице выполняется на удовлетворяющих условию $r_d = \sqrt{\pi/(2kh)}$ кривых, которые мы и будем называть в дальнейшем «кривые r_{d0} ». Последнее соотношение устанавливает связь между размерным параметром kh и величиной r_d , определяющей форму кривой r_{d0} .

Нормировка переменной w позволяет провести корректное размещение кривой r_{d0} для рассеивателя с размерным параметром в области w_{12} , во всех точках которой уже существует решение задачи рассеяния на клиновидном рассеивателе (формулы (21), (31), (33), (53), рис. 5).

2.2.1 Получение решения на заданной базовой кривой и физическое обоснование эвристического подхода

Предположим, что мы нашли каким – либо образом (например, при помощи численных методов) решение $u(r_z, \varphi_z)$ задачи рассеяния на полупластине толщиной kh плоской волны с единичной амплитудой вида

$$P(r_z, \varphi_z) = 1 \cdot \exp[-ikr_z \cos(\varphi_z - \varphi_0)], \quad (73)$$

падающей таким образом, что торец полупластины остается в тени. При этом на поверхности полупластины оказывается лишь одна точка (освещенная вершина), лежащая на границе тени. Разместим полное поле $u + P$ в области w_{12} . Также разместим в рассматриваемой области кривую r_{d0} , соответствующую указанному виду рассеивателя.

Далее, найдем еще одно решение $u1(r_z, \varphi_z)$, соответствующее задаче рассеяния на клине с внешним углом раствора πn_e плоской волны вида

$$P1(r_z, \varphi_z) = A_e \cdot \exp[-ikr_z \cos(\varphi_z - \varphi_{0e})], \quad (74)$$

и также разместим полное поле $u1 + P1$ в области w_{12} (рис. 10). Выбор параметров n_e , A_e и φ_{0e} будет объяснен позже.

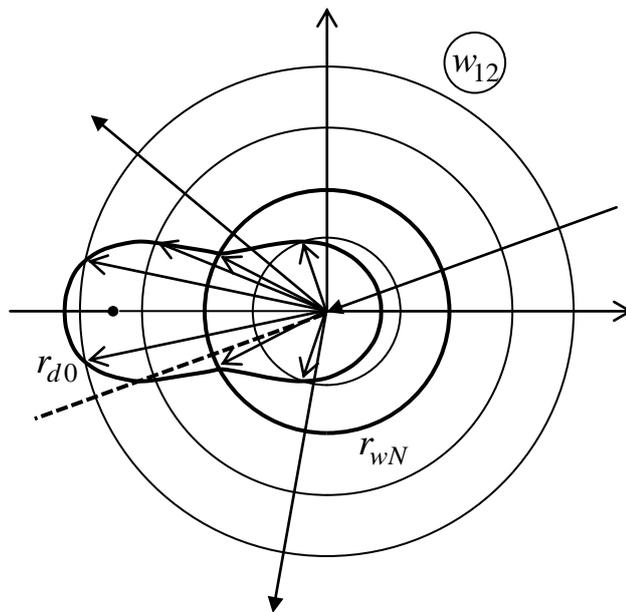


Рис. 10

Область w_{12} , кривые r_{d0} и r_{wN} , лучевая структура падающего и рассеянного поля.

На рис. 10 показана лучевая структура рассеянного поля в задаче дифракции на «эквивалентном» клине (которому соответствует окружность r_{wN}). Взяв это решение на кривой r_{d0} для полупластины, получаем эвристическое решение. Геометрические параметры «эквивалентного клина» подобраны таким образом, что границы «свет – тень» в задачах рассеяния на эквивалентном клине и полупластине совпадают.

Взяв решение $u1 + P1$ в точках кривой r_{d0} , найдем полное волновое поле $u2 + P$ в области, соответствующей полупластине и сравним его с первоначальным решением. Пусть параметры n_e , A_e и φ_{0e} выбраны таким образом, что вдали от кромки границы тени $u2$ совпадают с границами тени u , и на этих границах полное поле непрерывно. Тогда, решение для рассеянного поля $u2$ будет наилучшим образом совпадать с решением для рассеянного поля u .

Проверка точности получившегося эвристического решения и его «настройка» (т.е. дальнейшее уточнение до заданных величин) может быть сделана (как и для любого эвристического решения) при помощи дальнейшей верификации, т.е. при помощи сравнения с решением, точность которого уже доказана (например, с численным решением). Верификация любого эвристического решения (которое само по себе не обладает математической строгостью) всегда является неотъемлемым этапом его получения.

Физическое обоснование выбранного эвристического подхода заключается в том, что если бы мы задали решение на кривой r_{d0} точно, то в силу единственности решения это означало бы, что мы нашли решение во всей области w_{12} , поскольку продолжение поля с кривой r_{d0} во внешнюю или во внутреннюю области осуществляется единственным образом. Проблема заключается в том, что поле на кривой r_{d0} мы находим неточно. Условия краевой задачи для искомого решения тоже выполняются неточно. Но предлагаемое решение – эвристическое, поэтому мы имеем полное право его применять при условии проведения дальнейшей верификации. При этом не следует забывать, что чем точнее эвристическое решение, тем легче провести его уточнение. Поэтому наша задача – применить на кривой r_{d0} решение для «эквивалентного клина» таким образом, чтобы его отличие от строгого было минимальным. С этой целью мы выбираем то решение для «эквивалентного клина», которое расположено по отношению к кривой r_{d0} в области w_{12} ближе других.

Таким образом, мы показали, что решение для полупластины может быть выбрано из семейства решений для клиновидных рассеивателей. Под термином «семейство решений» понимается совокупность решений для различных углов раствора клина πn и различных углов падения φ_0 .

Процесс поиска волнового поля по его значениям на кривой r_{d0} может быть сформулирован с помощью интегрального уравнения. Однако, в первом приближении можно провести оценку решения методом геометрической оптики. Будем считать, что в среде с постоянным коэффициентом преломления волна, уходя с кривой r_{d0} , распространяется внутри постоянного углового сектора, причем амплитуда и фаза рассеянного поля $u(r_z, \varphi_z)$ меняются по закону

$$u(r_z, \varphi_z) = A(r_z, \varphi_z) \frac{\sqrt{kr2_z}}{\exp[ik(\rho - r2_z)]} = f(\varphi_z) \frac{\sqrt{kr2_z/k\rho}}{\exp[ik(\rho - r2_z)]}, \quad (75)$$

где $A(r_z, \varphi_z)$ - комплексная амплитуда поля на участке кривой r_{d0} , $1/r_{d0}$ - кривизна соответствующего участка, $1/\rho$ - кривизна участка волнового фронта в точке наблюдения, $f(\varphi_z)$ - функция, пропорциональная амплитуде поля, но не зависящая от расстояния при распространении волны, т.е. сохраняющаяся в угловом секторе. Назовем функцию $f(\varphi_z)$ диаграммой направленности волнового поля.

Нашей задачей является определение поля рассеяния полупластины при помощи поля рассеяния эквивалентного клина, которое определяется формой клина (т.е. параметром n_e) и параметрами падающей волны (74) (A_e и φ_{0e}). Если решать задачу определения волнового поля при помощи метода геометрической оптики, то очевидно, что после конформного отображения направления выхода границ тени эквивалентного клина из кривой r_{d0} должны совпадать с направлениями границы тени для полупластины:

$$\frac{\varphi_{0e} + \pi}{n_e} = \varphi_w(\varphi_0 + \pi), \quad \frac{\varphi_{0e} - \pi}{n_e} = \varphi_w(\varphi_0 - \pi), \quad (76)$$

где $\varphi_w(\varphi_0 + \pi)$ и $\varphi_w(\varphi_0 - \pi)$ - направления выхода границ тени из кривой r_{d0} в области w_{12} (Рис. 10). Поскольку при конформном отображении (64) все фрагменты области w поворачиваются на угол φ_d , условие (76) сводится к поиску точек на кривой r_{d0} , в которых выполняется условие:

$$\varphi_w + \varphi_d = \varphi_0 + \pi, \quad \varphi_w + \varphi_d = -(\varphi_0 - \pi). \quad (77)$$

Потребовав выполнение условия (77), можно определить параметры n_e и φ_{0e} эквивалентного клина. Параметр A_e будет определен позже.

2.2.2 Нормировка по мощности

В ходе преобразования при помощи конформного отображения перехода решения из области w в область z может происходить изменение длины и кривизны участка Δl кривой r_{d0} в областях z и w . При этом на участке Δl происходит изменение амплитуды поля, которое необходимо учесть. Рассмотрим распространение волны в области z внутри лучевой трубки с участками волновых фронтов Δl_1 и Δl_2 , расположенных поперек направления распространения волны. Тогда для полей A_1 и A_2 на соответствующих участках справедливо соотношение:

$$A_2^2 \Delta l_2 = A_1^2 \Delta l_1. \quad (78)$$

Пользуясь соотношениями (33) для цилиндрической волны, запишем

$$A^2 kr = f(\varphi), \quad (79)$$

где A - комплексная амплитуда волнового поля, $f(\varphi)$ - диаграмма направленности волнового поля. Наложим на решение условие сохранения мощности в угловом секторе, аналогичное закону сохранения мощности в лучевой трубке:

$$f_2 \Delta \varphi_2 = f_1 \Delta \varphi_1, \quad (80)$$

где f_1 и f_2 - диаграммы направленности волновых полей в областях 1 и 2, $\Delta \varphi_1$ и $\Delta \varphi_2$ - соответствующие угловые секторы. Заметим, что соотношения (78) и (79) справедливы лишь для областей с постоянным волновым числом, в то время как соотношение (80) справедливо и для областей с переменным k .

Рассмотрим изменение амплитуд полей при переходе решения из области z_0 для эквивалентного клина в область w с кривыми w_1 и w_2 , а затем - в область z_2 полупластины. Схема переходов решений между различными областями изображена на рис. 11.

На рис. 11 показана схема переходов решений между областями z_0 , w и z_2 . Решение для эквивалентного клина находим на окружности w_1 в области z_0 , затем в области w переносим решение с кривой w_1 на кривую w_2 , после чего отображаем область w на область z_2 , соответствующую полупластине. Значения поля на кривой w_2 в области z считаем эвристическим решением задачи дифракции на полупластине.

Окружность $kz = 1/n_e$ в области z_0 соответствует условию $|d| = 1$ для конформного отображения $kz = w^{n_e}/n_e$. В области w этой кривой соответствует окружность w_1 : $r_w = 1$. Кривая w_2 - это кривая r_{d0} для конформного отображения (64) в областях w и z .

Тогда для переходов в случае полупластины получим:

$$\begin{aligned} f_{z_2} \Delta \varphi_{z_2} &= f_{w_2} \Delta \varphi_{w_2} = f_{w_1} \Delta \varphi_{w_1} = f_{z_0} \Delta \varphi_{z_0} = f_{z_0} \Delta \varphi_{w_1} n_e, \\ \text{или } f_{z_2} \frac{\Delta l_{z_2}}{kr_{z_2}} &= f_{z_0} n_e \frac{\Delta l_{w_1}}{kr_{w_1}}, \end{aligned} \quad (81)$$

где f_{z_1} - диаграмма направленности поля в области z в угловом секторе $\Delta \varphi_{z_1}$ для эквивалентного клина, f_{z_2} - диаграмма направленности поля в области z в угловом секторе $\Delta \varphi_{z_2}$ для полупластины с конечной толщиной, f_{w_1} - диаграмма направленности поля в области z в угловом секторе $\Delta \varphi_{w_1}$ для полупластины с конечной толщиной, $\Delta \varphi_{w_1} = \Delta \varphi_{z_1}/n_e$ - соответствующий угловой сектор в области w . В результате для диаграмм направленности полей f_{z_2} и f_{z_0} получим с учетом $\Delta l_{z_2} = \Delta l_{w_1}$:

$$f_{z_2} = f_{z_0} \frac{n_e r_{z_2}}{r_{w_1}}, \quad (82)$$

где $1/r_{w_1}$ и $1/r_{z_2}$ - локальная кривизна соответствующих участков кривой r_{d0} .

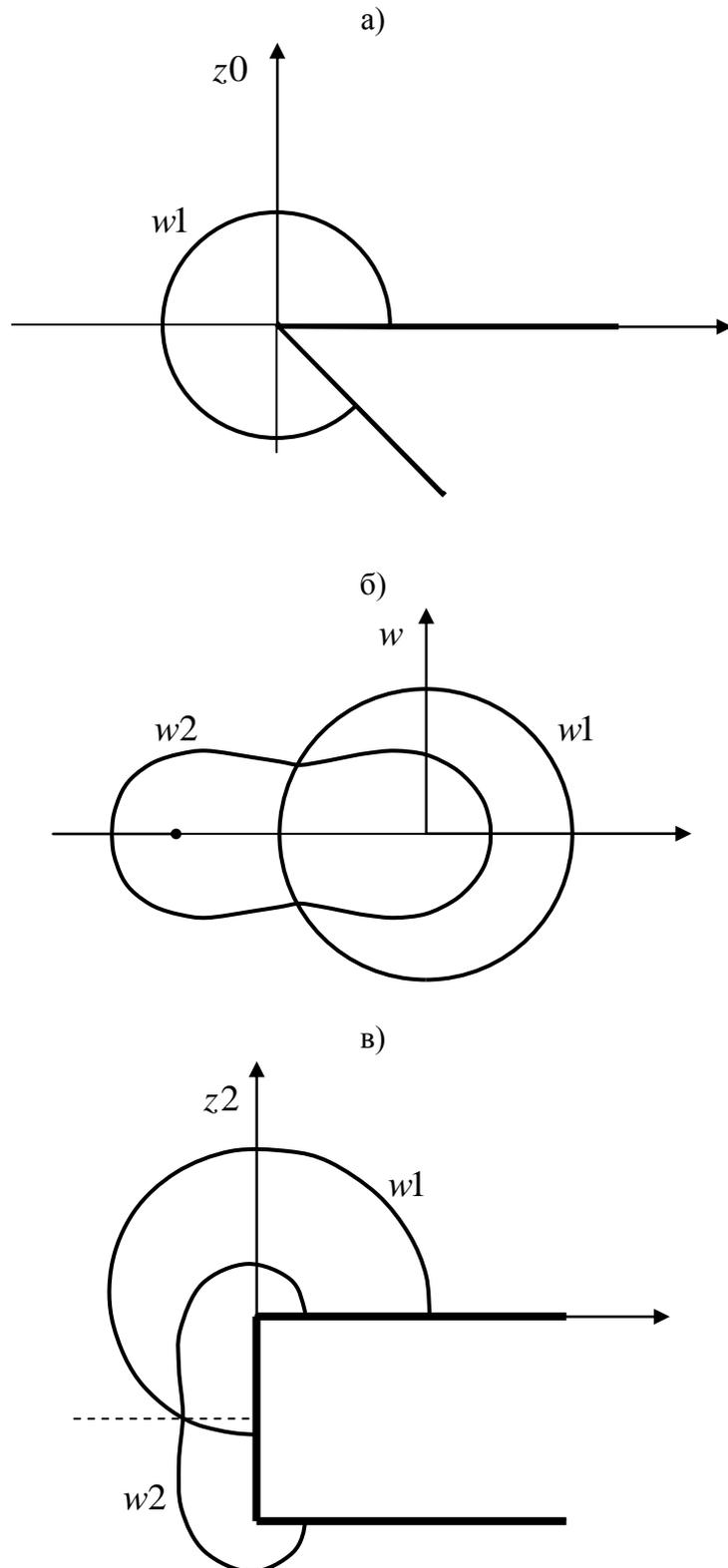


Рис. 11 (а) – (в)

Схема переходов решений между областями z_0 , w и z_2 .

Для определения r_{z_2} рассмотрим элемент Δl , кривой r_{d0} в областях d , w и z , обозначив его соответственно Δl_d , Δl_w и Δl_z . В области d $\Delta l_d = r_{d0} \Delta \varphi_d$, а Δl_w и $|\Delta l_z|$:

$$\Delta l_w = \left| \frac{dw}{dd} \Delta l_d \right| = r_{d0} \left| \frac{dw}{dd} \right| \Delta \varphi_d, \quad \Delta l_z = \left| \frac{dz}{dw} \right| \Delta l_w = r_{d0} \left| \frac{dz}{dw} \right| \left| \frac{dw}{dd} \right| \Delta \varphi_d. \quad (83)$$

Длины элементов Δl_w и Δl_z равны, поскольку на кривой r_{d0} $|dz/dw| = 1$.

Рассмотрим теперь элемент Δl_{wN} окружности w_N (фазового фронта сигнала, рассеянного эквивалентным клином), пересекающий Δl_w в середине под углом $(\varphi_{wN} - \varphi_{nw})$, где φ_{wN} и φ_{nw} - углы направлений нормалей к этим элементам (рис. 12).

На рис. 12 показан сектор, расположенный между лучами, уходящими из центра под углами φ_{wN2} и φ_{wN1} . Разность значений этих углов представляет собой угол расходимости лучей. Амплитуда поля, соответствующего этим углам, соответствует решению задачи дифракции на эталонном клине (рис. 10), а фазовый фронт соответствует окружности r_{wN} . Мы берем эти амплитуды на кривой r_{d0} , соответствующей полупластине, и считаем, что фазовый фронт также соответствует кривой r_{d0} . Поэтому считаем, что теперь лучи уходят с кривой r_{d0} под углами φ_{n2} и φ_{n1} . В соответствии с законом сохранения энергии изменение угла расходимости приводит к изменению амплитуды поля.

Длины элементов Δl_{wN} и Δl_w в области w связаны соотношением $\Delta l_{wN} = \Delta l_w \cos(\varphi_{wN} - \varphi_{nw})$. Найдем изменение кривизны элемента Δl_{wN} при конформном отображении $Z(w)$.

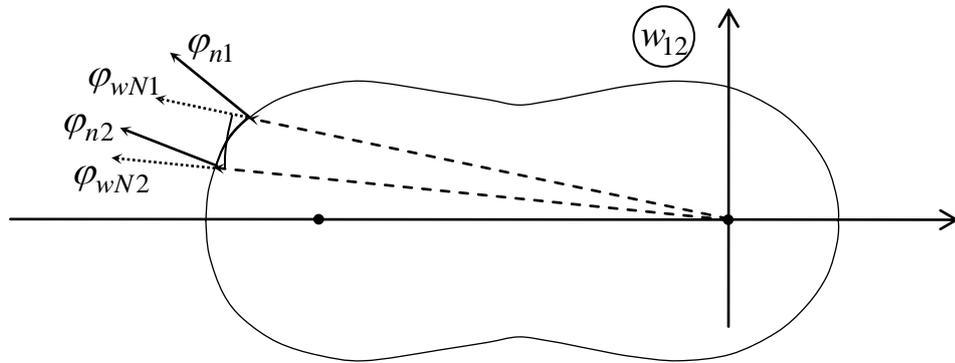


Рис. 12

Изменение угла расходимости и направления ухода лучей рассеянного поля на кривой r_{d0} .

При конформном отображении $Z(w)$ все векторы поворачиваются на угол φ_d , поэтому угол поворота нормали к r_{d0} равен $\varphi_z = \varphi_w + \varphi_d$, а разность между направлениями векторов на краях элемента Δl подчиняется соотношению $\Delta \varphi_z = \Delta \varphi_w + \Delta \varphi_d$. Соответственно: $\Delta \varphi_{nz} = \Delta \varphi_{nw} + \Delta \varphi_d$. Вследствие свойства сохранения углов при конформном отображении векторы на концах элемента Δl_{wN} поворачиваются на угол

$$\Delta\varphi_{zN} = \Delta\varphi_{wN} + \Delta\varphi_d \frac{\Delta l_{wN}}{\Delta l_w} = \Delta\varphi_{wN} + \Delta\varphi_d \cos(\varphi_{wN} - \varphi_{nw}), \quad (84)$$

поскольку разность углов между нормальными к кривой r_{d0} на концах элемента Δl_{wN} пропорциональна проекции элемента Δl_{wN} на кривую r_{d0} . В свою очередь, проекция элемента Δl_{wN} на кривую r_{d0} так же, как и проекция Δl_{wN} элемента Δl_w на окружность w_N пропорциональна косинусу угла между нормальными $\cos(\varphi_{wN} - \varphi_{nw})$. Радиус кривизны элемента Δl_{zN} окружности w_N на кривой r_{d0} в области z равен: $r_{zN} = \Delta l_{zN} / \Delta\varphi_{zN} = \Delta l_{wN} / \Delta\varphi_{zN}$. Величина углового элемента $\Delta\varphi_{wN}$, опирающегося на элемент Δl_{wN} , связана с радиусом r_{wN} соотношением: $\Delta\varphi_{wN} = \Delta l_{wN} / r_{wN}$. Отсюда:

$$\Delta\varphi_{zN} = \frac{\Delta l_{wN}}{r_{wN}} + \Delta\varphi_d \cos(\varphi_{wN} - \varphi_{nw}) = \left(\left| \frac{dw}{dd} \right| \frac{r_{d0}}{r_{wN}} + 1 \right) \Delta\varphi_d \cos(\varphi_{wN} - \varphi_{nw}). \quad (85)$$

С учетом свойства сохранения разности углов $(\varphi_{wN} - \varphi_{nw})$ при конформном отображении получаем

$$\Delta l_{zN} = \Delta l_z \cos(\varphi_{wN} - \varphi_{nw}) = \left| \frac{dz}{dw} \right| \left| \frac{dw}{dd} \right| r_{d0} \Delta\varphi_d \cos(\varphi_{wN} - \varphi_{nw}), \text{ откуда:}$$

$$r_{zN} = \frac{\Delta l_{zN}}{\Delta\varphi_{zN}} = \frac{\left| \frac{dz}{dw} \right| \left| \frac{dw}{dd} \right| r_{d0} \cos(\varphi_{wN} - \varphi_{nw})}{\left(\left| \frac{dw}{dd} \right| \frac{r_{d0}}{r_{wN}} + 1 \right) \cos(\varphi_{wN} - \varphi_{nw})} = \frac{\Delta l_z}{\Delta\varphi_{nz}}, \quad \frac{\left| \frac{dz}{dw} \right|}{r_{zN}} = \frac{1}{r_{wN}} + \frac{1}{\left| \frac{dw}{dd} \right| r_{d0}}. \quad (86)$$

Подставляя r_{zN} в качестве r_{z2} в (82), получим требуемый коэффициент для диаграммы направленности поля при преобразовании решения для эквивалентного клина в решение для полупластины с конечной толщиной.

Теперь следует перейти от выражений для диаграмм направленности к выражениям для полей. Как следует из (79), $A^2 \Delta l = f(\varphi) \Delta\varphi$. При интегрировании полной энергии, распространяющейся через рассматриваемый контур, должно выполняться:

$$\int_0^L |A(l)|^2 dl = \int_0^\Phi |f(\varphi)| d\varphi, \quad (87)$$

где L - полная длина контура, Φ - полный угол диаграммы направленности поля.

Установим связь между $A(l)$ и $f(\varphi)$ вида

$$A^2(l) = A_n f(\varphi), \quad (88)$$

где A_n - постоянный нормировочный множитель. То же самое соотношение должно выполняться и для средних значений:

$$\overline{|A(l)|^2} = A_n \overline{|f(\varphi)|}. \quad (89)$$

Запишем формулу (87) для средних значений квадрата амплитуды и диаграммы направленности:

$$L \cdot \overline{|A(l)|^2} = \int_0^L \overline{|A(l)|^2} dl = \int_0^\Phi \overline{|f(\varphi)|} d\varphi = \Phi \cdot \overline{f(\varphi)}, \quad (90)$$

С учетом (88) и (89) получаем из (90):

$$A^2(l) = A_n f(\varphi) = \frac{\Phi}{L} f(\varphi). \quad (91)$$

Рассмотрим формулу (91) в случае перехода из области z в область w кривой r_{d0} для клиновидного рассеивателя. В этом случае на окружности $kr_z = 1/n_e$ с учетом $dl_z = kr_z d\varphi_z$, где $d\varphi_z = n_e d\varphi_w$ получим независимо от величины n_e :

$$dl_z = d\varphi_w, \quad L_z = \pi n_e kr_z = \pi = \Phi_w, \quad A_z^2 = f_w(\varphi_w). \quad (92)$$

Как указывалось ранее, для клиновидных рассеивателей можно брать решение во всех точках области w , а не только на кривой r_{d0} . При этом всегда $\Phi_w = \pi$, а величина $f_w(\varphi_w)$ остается постоянной (по крайней мере, вдали от границы тени), в то время как амплитуда A_z уменьшается при увеличении длины кривой L_z в соответствии с соотношением (91).

Для других видов рассеивателей соотношение (91) также приведет к правильным соотношениям между амплитудой и диаграммой направленности поля.

В процессе применения метода обобщенного эйконала к нахождению решения для задачи рассеяния на полупластине перенос значений поля между областями w и z осуществляется дважды. Первый раз происходит перенос значений поля решения для эквивалентного клина в область w . Второй раз происходит перенос из w в z значений поля, расположенных на кривой r_{d0} . При этом получают два нормировочных множителя типа (91), каждый из которых связан со своим преобразованием поля. При этом в каждом преобразовании фигурирует кривая, длину L которой нужно вычислить.

Длина окружности $w1$ в области $z0$ равна π . Вычислим теперь длину кривой $w1$ в области z при конформном отображении, соответствующем полупластине, для определенного значения kh . Она равна интегралу

$$L = \int_{z_1}^{z_2} dz(\varphi_w) = \int_0^\pi \left| \frac{dz}{d\varphi_w} \right| d\varphi_w = \int_0^\pi \left| \frac{dz}{dw} \left| \frac{dw}{d\varphi_w} \right| \right| d\varphi_w = \int_0^\pi |d \cdot w| d\varphi_w = \int_0^\pi |2w\sqrt{w(w+2)}| d\varphi_w. \quad (93)$$

Теперь вычислим длину кривой r_{d0} . При интегрировании по параметру φ_d в области d получаем:

$$Ld = \int_{z_1}^{z_2} dz(\varphi_d) = \int_0^\pi \left| \frac{dz}{d\varphi_d} \right| d\varphi_d = \int_0^\pi \left| \frac{dz}{dw} \left| \frac{dw}{dd} \right| \frac{dd}{d\varphi_d} \right| d\varphi_d = \int_0^\pi \left| d^2 \frac{dw}{dd} \right| d\varphi_d = \int_0^\pi \left| \frac{d^3}{\sqrt{1+d^2}} \right| d\varphi_d. \quad (94)$$

Интегралы (93) и (94) берутся численно. С учетом (82) и (91) получим:

$$A_{z2}^2 \frac{L_d}{\pi} = f_{z2} = f_{z0} \frac{n_e r_{z2}}{r_{w1}} = A_{z0}^2 \frac{L}{\pi} \frac{n_e r_{z2}}{r_{w1}}. \quad (95)$$

В итоге из (95) получаем соотношение для комплексных амплитуд поля на кривой r_{d0} :

$$A_{z2} = A_{z0} \sqrt{\frac{L}{L_d}} \sqrt{\frac{n_e r_{z2}}{r_{w2}}}. \quad (96)$$

Поскольку длина кривой L в общем случае отличается от π , это означает, что для получения заданных значений поля в этих точках следует изменить амплитуду поля возбуждения для эквивалентного клина. В свою очередь, это означает, что мы нашли параметр A_e из (74):

$$A_e = \sqrt{L/\pi}. \quad (97)$$

Этот множитель уже учтен в (96), однако в (97) мы вычислили его отдельно, поскольку позже нам потребуется подставить в выражение (74) параметры A_e и φ_{0e} .

2.2.3 Решение методом последовательных дифракций

По изложенной методике был проведен расчет рассеяния на полупластине с конечной толщиной плоской волны, падающей под углом 40° . Решение, полученное при помощи МОЭ, сравнивалось с приближенным решением, построенным методом последовательных дифракций (МПД) при помощи учета переотражения волны, рассеянной освещенной кромкой, на границах торца. Сначала находили цилиндрическую волну $A1$, получающуюся в результате дифракции первичной плоской волны на клине с $n = 3/2$, совпадающим с освещенной вершиной. Затем рассчитывали цилиндрическую волну $A2$, получающуюся в результате дифракции цилиндрической волны $A1$ на клине с $n = 3/2$, совпадающим с теневой вершиной. И, наконец, рассчитывали цилиндрическую волну $A3$, получающуюся в результате дифракции цилиндрической волны $A2$ на клине с $n = 3/2$, совпадающим с освещенной вершиной. Цилиндрические волны $A1$, $A2$ и $A3$ рассчитывали при помощи формулы (53).

Для вычисления $A1$ подставим r_z и r_0 для плоской волны в (53). Эта подстановка приводит к хорошо известной формуле (58), полученной при разработке метода краевых волн [1].

Для вычисления $A2$ и $A3$ подставим в (53) r_z и r_0 для цилиндрической волны. Для определения $S^c(\hat{w}_{sm})$ и $S^c(w_0)$ воспользуемся формулами (47) и (52). При этом

$$S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0) = k \left[r_z + r_0 - \sqrt{r_z^2 + r_0^2 - 2r_z r_0 \cos(\varphi_z - \varphi_0)} \right]. \quad (98)$$

Если источник расположен в одной из вершин, а дифракция происходит на другой, то в (98) следует подставлять $r_0 = h$, $\varphi_0 = \pm \pi/2$. Для случая плоской волны разность эйконалов (98) сводится к выражению (55). Координаты седловых точек \hat{w}_{sm} , лежащих на кривых r_{d0} освещенной и теневой вершин (клиньев с $n = 3/2$), представляющих собой окружности радиуса $kr_z = 1/n = 2/3$ с центрами в соответствующих вершинах, рассчитывались в соответствии с формулой (50).

Итак, в соответствии с (10) с целью получения $\nu(w_0)$ в виде выражения (21) нам нужно найти два интеграла типа (53). Для поля возбуждения в виде единичной плоской волны (31), (32) получаем:

$$A1(r_z, \varphi_w) = \frac{-2}{n} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi}{n}} \cos \frac{\psi}{2} \frac{e^{-ikr_z \cos \psi}}{\sqrt{\pi i}} \int_{\infty \cos(\psi/2)}^{\sqrt{2kr_z} \cos(\psi/2)} \exp(iq^2) dq, \quad (99)$$

где $\psi = 3\varphi_w/2 - \varphi_0$. Как видим, аргумент ψ зависит от значений φ_w в области w_{12} . Этот угол меняется в пределах $-\pi < \varphi_w < \pi$. Поле $A1(r_z, \varphi_w) = A1(\hat{w}_{sm})$ - это полное поле после рассеяния первичной плоской волны на освещенной кромке. Оно существует лишь в области вне клина, связанного с освещенной кромкой.

Далее, ищем дифракцию поля $A1(\hat{w}_{sm})$ на теневой кромке:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{sm} \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} \cong \frac{P(\hat{w}_{sm})}{\sqrt{\frac{2\pi i k r_z h}{r_z + h}}} \frac{\hat{w}_{sm}/n}{\hat{w}_{sm} - w_0} \frac{2i \sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}{\exp[iS^c(\hat{w}_{sm}) - iS^c(w_0)]} \int_{\infty \sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}^{\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}} \exp(iq^2) dq. \quad (100)$$

Подставляя в эту формулу дважды (для верхней и нижней полуплоскостей области w_{12}) значение поля возбуждения в виде: $P(\hat{w}_{sm}) = A1(\hat{w}_{sm})$, а затем, подставив результаты в (21) и затем - в (10), получим полное поле $A2(\hat{w}_{sm})$ после рассеяния теневой кромкой: $A2(\hat{w}_{sm}) = U(\hat{w}_{sm})$. Это поле существует лишь в области вне клина, связанного с теневой кромкой. И, наконец, подставив дважды в (100) $P(\hat{w}_{sm}) = A2(\hat{w}_{sm})$ и подставив результаты в (21) и (10), получаем $A3(\hat{w}_{sm}) = U(\hat{w}_{sm})$. Это результат также существует лишь в области вне клина, связанного с освещенной кромкой, но мы берем его в еще более узкой области углов $|\varphi_z| < \pi/2$. При этом «зашивается» граница тени, связанная с освещенной кромкой.

Седловые точки \hat{w}_{sm} находятся на пересечении границы тени, связанной с затеняющей вершиной, и окружности с центром в этой вершине, проходящей через точку наблюдения. Так, если точка наблюдения находится на расстоянии r_z от освещенной вершины, а расстояние до нее от теневой вершины равно $r2_z$, то при дифракции на теневой вершине источника, находящегося в освещенной вершине, седловая точка находится на расстоянии $r2_z + h$ от теневой вершины, т.е. ее угловые координаты - $(r2_z + h, 3\pi/2)$, а при дифракции на освещенной вершине источника, находящегося в теневой вершине, угловые координаты седловой точки - $(r_z, \pi/2)$. При использовании формул (99) и (100) учитывалось, в верхней или нижней полуплоскости плоскости w_{12} (или, что то же самое – на каком из двух экземпляров области z) находится точка наблюдения.

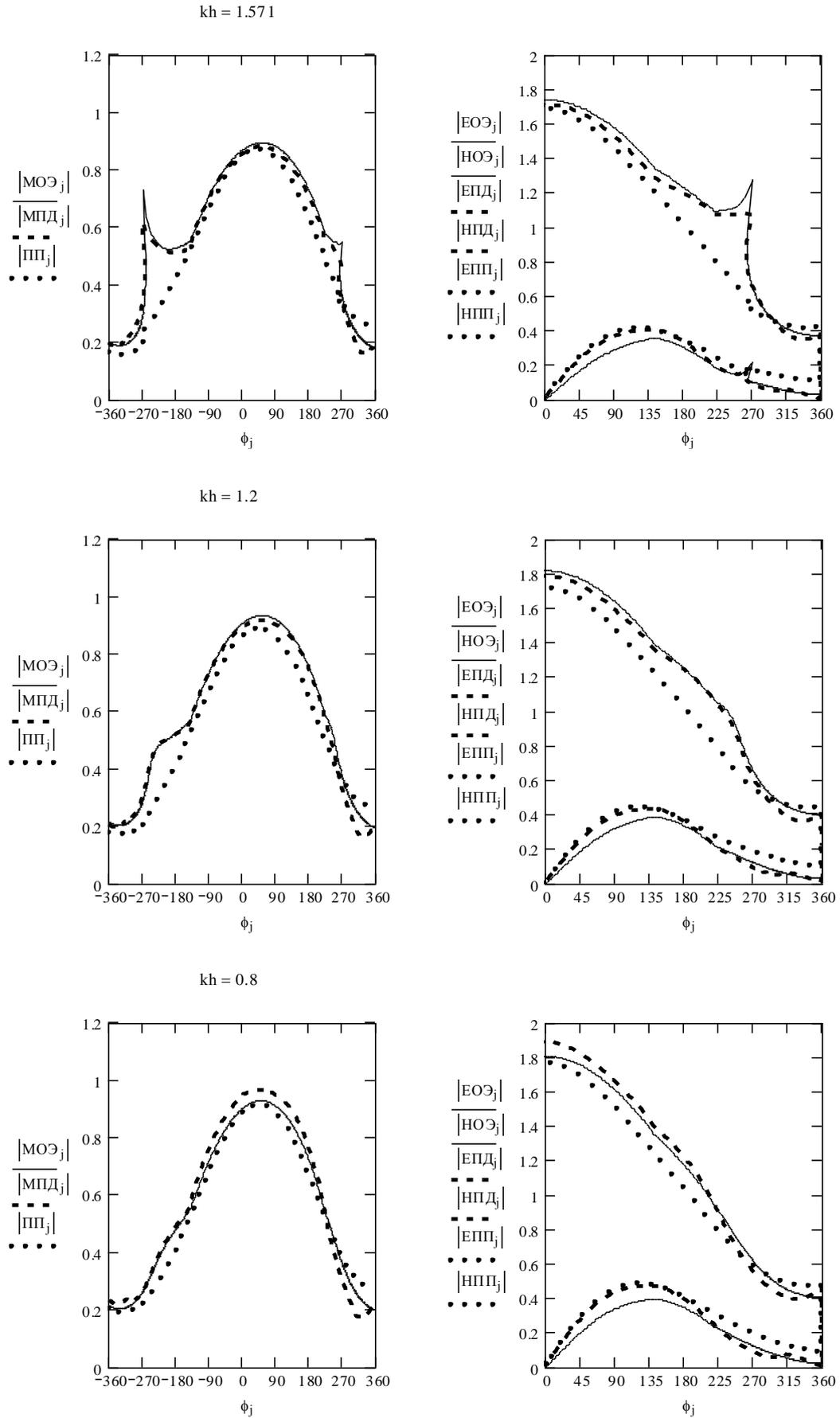
2.2.4 Результаты расчета

На рис. 13 а) - е) показано сравнение амплитуд полного поля на кривой r_{d0} для решений, полученных при помощи метода обобщенного эйконала (МОЭ) и метода последовательных дифракций (МПД).

На рис. 13 показаны результаты расчета поля на кривой r_{d0} для различных величин kh .

Сравнение решений проводилось для волны, падающей на толстую полупластину под углом $\varphi_0 = 40^\circ$ по отношению к горизонтальной оси. На левых графиках показаны амплитуды решений задачи дифракции на полупластине, полученные при помощи метода обобщенного эйконала (обозначение МОЭ, на графике показаны сплошной тонкой линией), при помощи метода последовательных дифракций (обозначение МПД, на графике показаны пунктиром) и для сравнения приведено решение задачи рассеяния на полуплоскости (обозначение ПП, на графике показаны точками). Значение угла наблюдения φ_z меняется в области z от -360° до 360° (т.е. – в двухлистной области). На правых графиках показаны соответствующие решения для двух видов поляризации ($U=0$ - нижняя группа кривых), ($dU/dn = 0$ - верхняя группа кривых). Значение размерного параметра kh выбирали равным $\pi/2$ ($h = \lambda/4$), 1.2, 0.8, 0.4, 0.04 и 0.004. Видно, что на начальном этапе при уменьшении размерного параметра решения МОЭ и МПД совпадают. Затем при уменьшении значений размерного параметра решение МПД стабилизируется на диаграмме направленности, форма которой отличается от правильной, в то время как решение МОЭ все лучше приближается к решению для полуплоскости.

На рис. 14 показаны десятичные логарифмы коэффициентов отражения плоской ТЕ – волны (вектор напряженности электрического поля перпендикулярен кромке), падающей под углом $\varphi_0 = 0^\circ$, от затененного торца идеально проводящей полупластины.



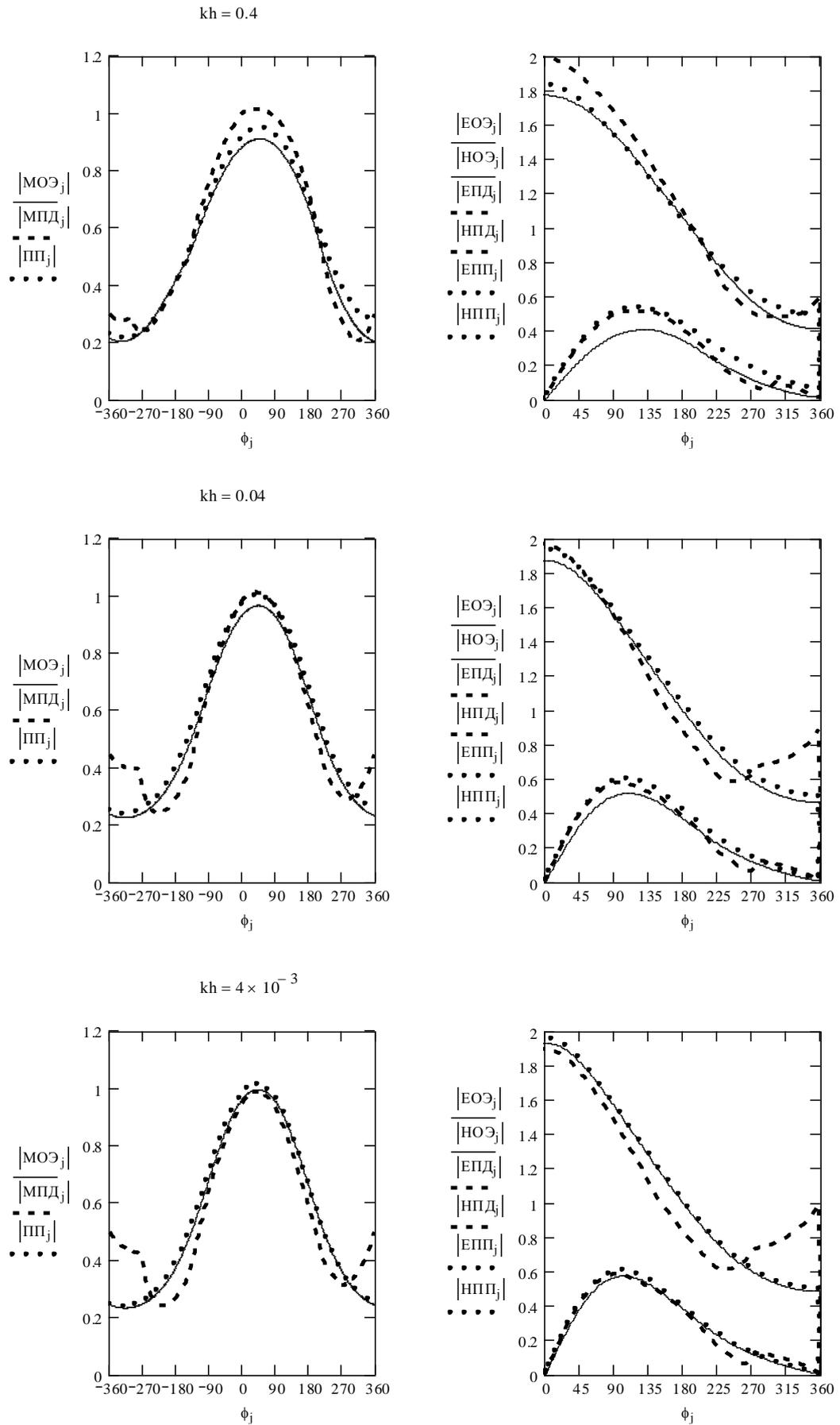


Рис. 13 (г) – (е)

Сравнение амплитуд полного поля для различных значений kh .

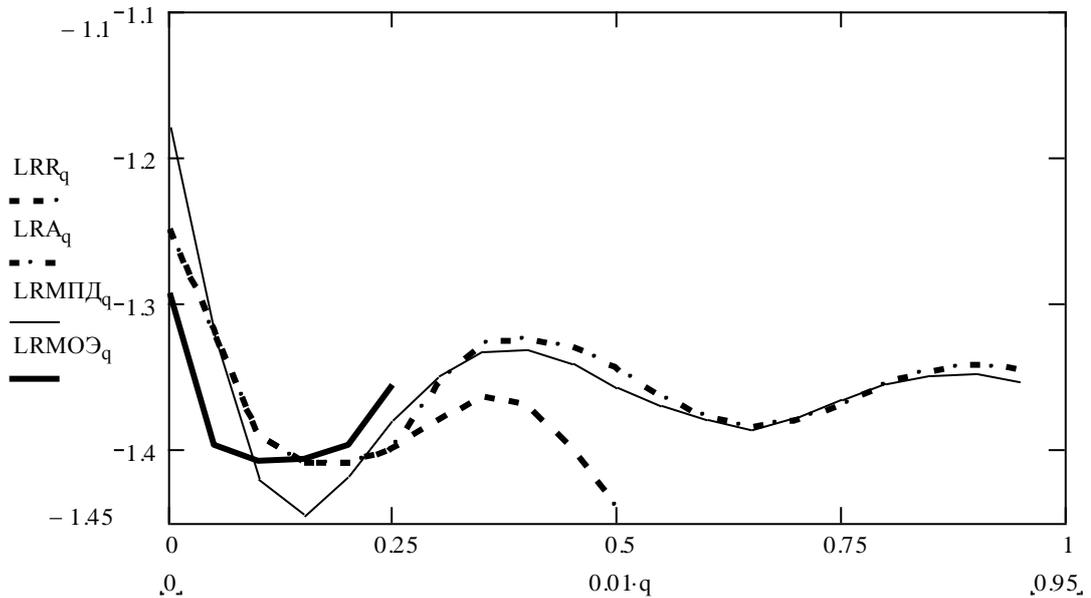


Рис. 14

Отражение плоской волны от затененного торца полупластины.

На рис. 14 приведено сравнение расчета по нашим эвристическим формулам с данными, взятыми из литературы.

Результаты расчета при помощи МОЭ и МПД ($LRMOЭ$ и $LRMПД$) сравнивались с данными, приведенными в [64]. В этой работе значения десятичного логарифма коэффициента отражения рассчитаны при помощи разложений решения по прямым (LRR) и обратным (LRA) степеням величины $q = h/\lambda$ ($kh = 2\pi q$). Эти разложения перекрываются в области $q \cong 0.25$. Сравнение результатов проводилось в дальней зоне, т.е. вне кривой r_{d0} . При этом формулы МПД использовались непосредственно, а для нахождения решения МОЭ вдали от кромки применялась формула (75).

Сравнение показало, что асимптотика, полученная методом МПД при помощи разложений, следующих из МОЭ, работает при всех значениях q . Хотя, как указывалось ранее, она дает правильные значения амплитуды поля на кривой r_{d0} лишь при $kh > 0.8$. Но это соответствует $q = 0.127$, что все же значительно меньше 0.25. Следовательно, МОЭ позволяет не только получать решения новых задач теории дифракции, но и строить асимптотические представления известных задач, пригодные для использования в более широком диапазоне параметров.

В то же время, решение, полученное непосредственно при помощи МОЭ, дает удовлетворительное совпадение с разложением по прямым степеням q при $q < 0.25$ ($kh < \pi/2$). При значениях размерного параметра $kh > \pi/2$ рассматриваемое решение, полученное при помощи МОЭ, перестает работать, поскольку кривая r_{d0} становится двухсвязной. С другой стороны, раздвоение кривой r_{d0} играет и положительную роль, поскольку дает ясную физическую интерпретацию дифракционных явлений. Процесс дифракции зарождается на линии границы «свет - тень», которая находится на поверхности рассеивателя.

Энергия соответствующего линейного источника соответствует энергии, рассеиваемой эквивалентным клином. Когда кривая r_{d0} , окружающая линейный источник, является односвязной, дифракционный процесс можно рассматривать как «распределение вытекания» энергии линейного источника, находящегося внутри кривой r_{d0} , через эту кривую. Внутри кривой r_{d0} трубки лучей, вдоль которой распространяется энергия, можно считать криволинейными, а вне кривой – прямолинейными. Когда кривая r_{d0} становится многосвязной, дифракционные процессы следует рассматривать по отдельности. Изучая линии равного значения производной конформного отображения в окрестности различных рассеивателей, можно задать оптимальный способ исследования дифракционных процессов на этих структурах.

Таким образом, при $kh < \pi/2$ можно пользоваться решением МОЭ, а при $kh > \pi/2$ удовлетворительно работает решение МПД. Эти решения перекрываются при $0.8 < kh < \pi/2$. При всех значениях размерного параметра одно из этих решений совпадает с известными данными. Следовательно, решения, полученные при помощи МОЭ, пригодны для решения и других дифракционных задач.

На рис. 15 (а) - (г) приведены десятичные логарифмы амплитуды рассеянного поля в однолистной и двулистной областях для решения МОЭ, продолженного с кривой r_{d0} в дальнюю зону при помощи формул, аналогичных (75), в которых кривизна участка $1/r^2_z$ рассчитывалась с учетом его удаления от границы тени (диаграммы для Е - и Н - поляризации обозначены ЛЕОЭ и ЛНОЭ), а также для решения, полученного методом последовательных дифракций (ЛЕПД и ЛНПД), решения для полуплоскости (ЛЕПП и ЛНПП) и решения для полуплоскости, полученного методом Кирхгофа (ЛЕПК и ЛНПК). Диаграммы рассчитывались на расстоянии $kr_z = 200$ от кромки при значениях kh равных 1.2, 0.8, 0.4 и 0.04 (см. обозначения на рисунках).

Из анализа диаграмм рассеяния на рис. 15 можно сделать вывод, что МОЭ правильно описывает процесс рассеяния. Расхождение результатов расчета в окрестности границ тени можно устранить, применив в процессе получения решения специальные подходы (например, аналогичные методу краевых волн).

Сходство между методами (МОЭ и МПД) состоит в том, что в обоих случаях решение получается путем обработки первичного приближения, представляющего собой решение задачи дифракции на клине, вершина которого совпадает с освещенной кромкой. Однако, как сами первичные приближения, так и способы их обработки отличаются.

МОЭ использует в качестве первичного приближения решение на эквивалентном клине с $3/2 < n_e < 2$, которое определено во всех точках кривой r_{d0} . Обработку первичного приближения МОЭ осуществляет путем интегрирования поля в дальней зоне. Приближенно эту операцию можно осуществить, продолжая поле в дальнюю зону в соответствии с законом, аналогичном тому, по которому поле уходит в дальнюю зону в случае дифракции на клине, когда кривые r_{d0} представляют собой окружности (формула (75)).

МПД использует в качестве первичного приближения клин с внешним углом. $\pi n = 3\pi/2$. Сигнал, рассеянный этим клином, испытывает последовательные дифракции на теневой и освещенной вершинах.

Для описания дифракции на клине в обоих случаях (МОЭ и МПД) используется первый член асимптотики, получающийся в результате применения метода стационарной фазы. Последующие члены уменьшаются пропорционально обратным степеням величины kR ,

где R - расстояние от кромки до точки наблюдения в области z . Кривая r_{d0} находится вблизи от кромки, поэтому описание поля на ней будет неточным в обоих случаях (МОЭ и МПД). Однако, в большинстве практически важных задач интерес вызывает поведение поля на значительных расстояниях от рассеивателя. Поскольку при удалении от кромки поле будет все в большей степени соответствовать первому члену асимптотики, точность решения будет возрастать для обоих случаев (МОЭ и МПД).

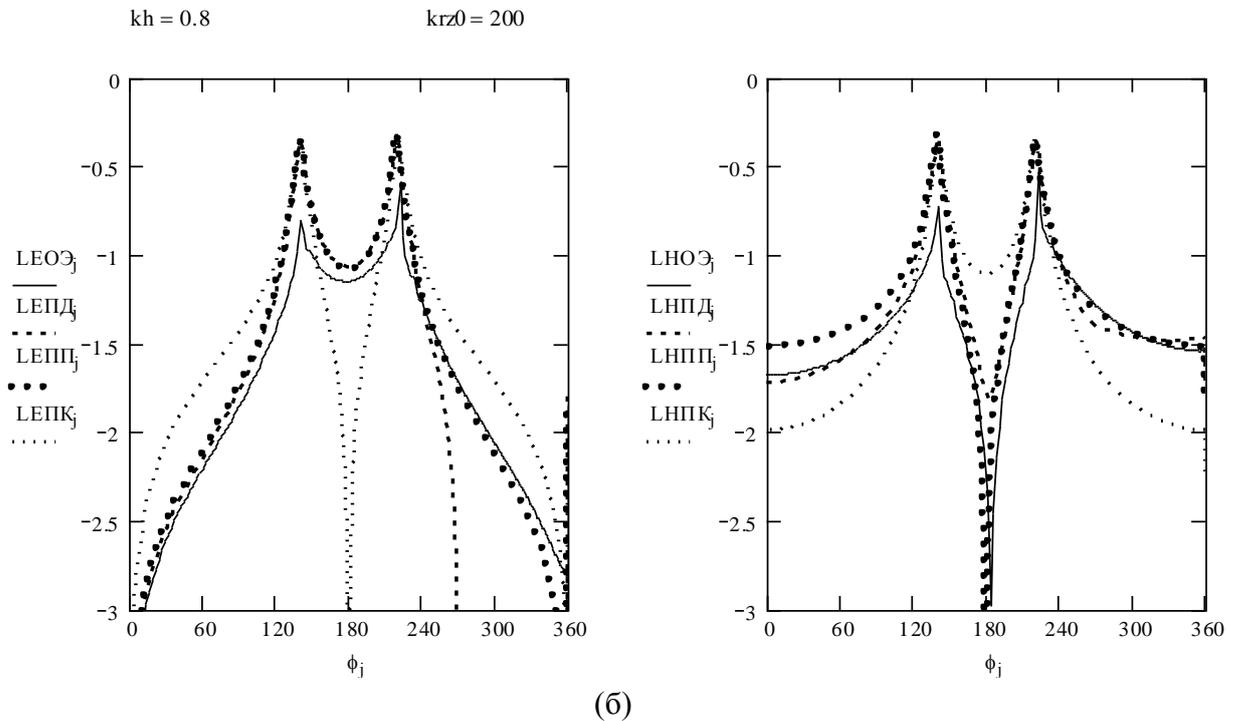
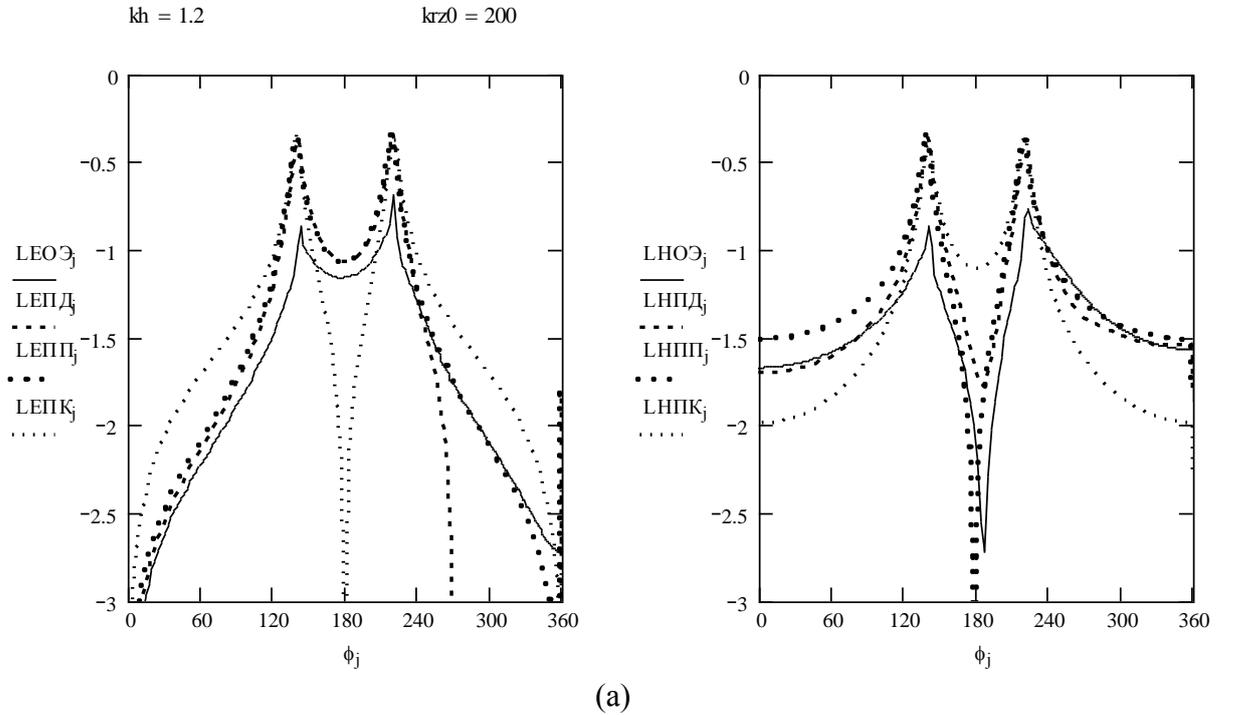
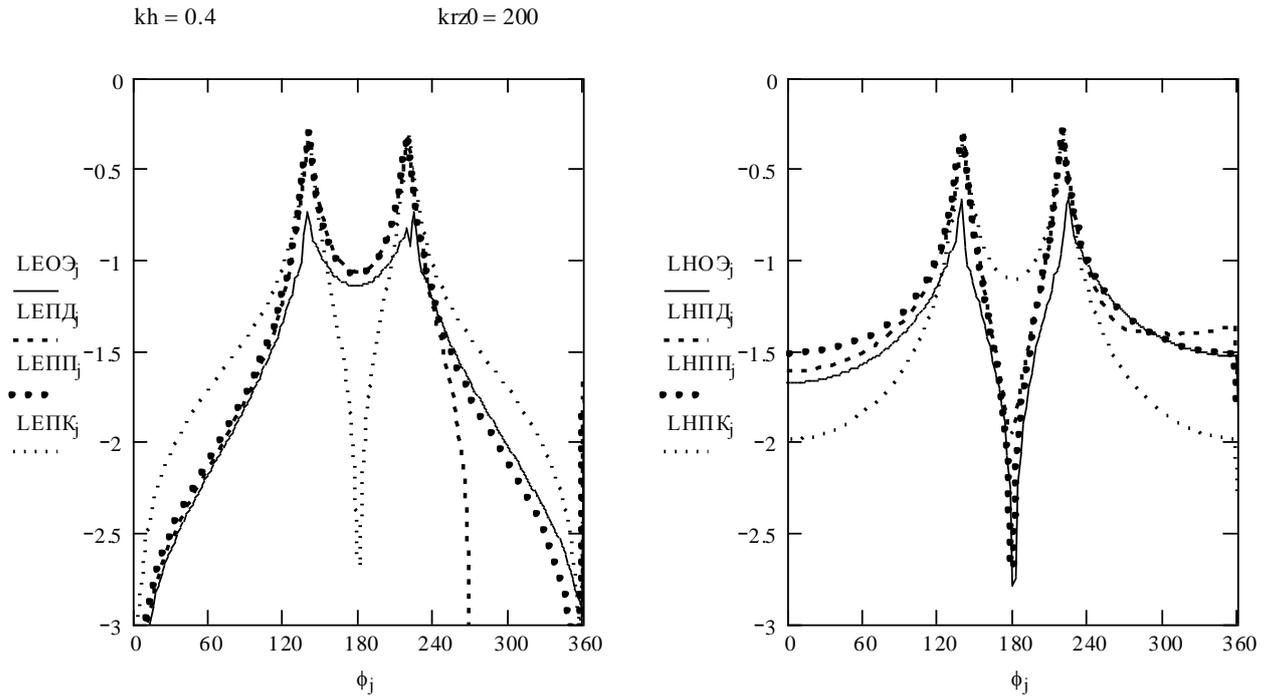
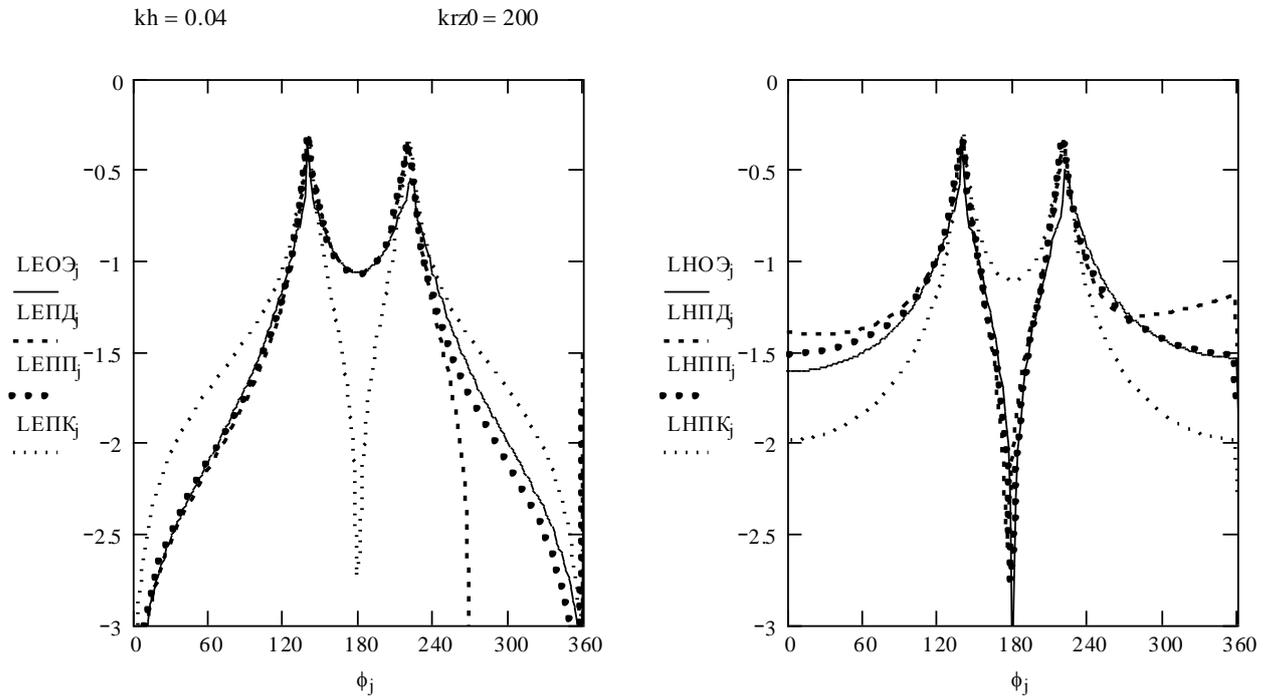


Рис. 15 (а), (б)
Амплитуды рассеянного поля в дальней зоне для разных значений kh .



(B)



(Г)

Рис. 15 (B), (Г)

Амплитуды рассеянного поля в дальней зоне для разных значений kh .

Можно показать, что интегральное представление, использованное в МОЭ, является обобщением классического интегрального представления, использованного Зоммерфельдом для построения решений задачи рассеяния электромагнитных волн на полуплоскости

и клине. Рассмотрим сходства и различия между двумя решениями задачи дифракции на полубесконечных рассеивателях: решением Зоммерфельда и решением, полученным методом обобщенного эйконала.

К сходству между двумя рассматриваемыми решениями можно отнести то обстоятельство, что оба они построены при помощи интегрального представления на многолистной поверхности. В случае клиновидного рассеивателя интегральные представления совпадают.

Решение Зоммерфельда является эвристическим. Оно справедливо для клиновидного рассеивателя с внешним углом раствора клина π/m на многолистной Римановой поверхности, причем n является рациональным числом $n = l/m$, где l - число листов этой поверхности, а m - целое число. Например, для внешнего пространства прямоугольного клина $l = 3$, $m = 4$. Периодичность эвристического множителя подынтегральной функции равна $2\pi l$. Дальнейшее развитие решения Зоммерфельда позволило распространить его на произвольное число l (также и не целое). Решение Зоммерфельда получило методическое обоснование, будучи воспроизведено при помощи метода разделения переменных. Тем не менее, оно может применяться лишь для рассеивателей клиновидной формы.

Решение МОЭ представляет собой сумму интегралов по отрезкам контура в плоскости комплексного переменного. Его интегральное представление строится с помощью самых простых математических и физических принципов. Оно естественно вытекает из самой простой формы теоремы Коши о вычетах (полюс первого порядка), выбор замкнутого контура обхода вокруг освещенной области понятен с физической точки зрения. Интегральное представление МОЭ для полубесконечных рассеивателей любой формы строят в двулистной вспомогательной области (полной плоскости комплексного переменного), связанной с формой рассеивателя при помощи конформного отображения. Граничные условия для полубесконечных рассеивателей после продолжения с кривой построения решения во всю область строго удовлетворяются на всей границе (горизонтальной оси) и только на ней.

Таким образом, это решение обладает гораздо большей общностью, чем решение Зоммерфельда, оставаясь таким же простым по виду. Платой за общность и простоту является то обстоятельство, что решение МОЭ справедливо лишь на определенной кривой, в то время как решение Зоммерфельда справедливо во всем пространстве. Тем не менее, проведя несложные математические операции, решение МОЭ также можно использовать во всем пространстве (хотя и приближенно).

Кроме того, решение МОЭ имеет лучшее обоснование, чем решение Зоммерфельда. Более того, решение МОЭ может использоваться наряду с другими методами для методического обоснования указанного решения. При этом обоснование касается не итогового результата, а аспектов, предложенных Зоммерфельдом из эвристических соображений. В частности, можно обосновать вид подынтегральной функции.

МОЭ рассматривает с новой точки зрения физику процесса дифракции, вводя понятие кривой r_{d0} , которая разделяет области «искривленного» и «прямолинейного» эйконала. Тот факт, что критическая окружность r_{d0} действительно существует и имеет в области z малый радиус (для полуплоскости $kz = 1/2$, $z = \lambda/(4\pi)$), косвенно подтверждается ре-

зультатами, приведенными в [65]. Основное искривление линий плотности потока мощности в окрестности кромки происходит внутри круга, радиус которого приблизительно равен указанной величине.

Представляют интерес вопросы, касающиеся установления класса рассеивателей, решение задачи рассеяния на которых может быть получено предложенным методом, а также математического обоснования строгости полученного решения. Однако, подобные исследования выходят за рамки настоящей работы.

2.2.5 Анализ особенностей решения на полупластине

Проверка эвристического решения задачи дифракции на полупластине проводится при помощи метода последовательных дифракций (МПД). Решение МПД представляет собой результат двукратного переотражения рассеянного поля (61) от вершин рассеивателя. Сначала описываем дифракцию падающего поля на освещенной вершине. Затем описываем дифракцию вторичного источника, расположенного в освещенной вершине, на теневой вершине. И, наконец, описываем дифракцию вторичного источника, расположенного в теневой вершине, на освещенной вершине. Можно считать, что МПД – это еще один способ заполнения области w_{12} непрерывным полем. В решении МПД появляются дополнительные границы тени на линиях, продолжающих торец в обе стороны. Заметим, что в решении МПД лучи не изгибаются.

Сравнивая решение МОЭ с ИФ и решение МПД, отметим, что они имеют достоинства и недостатки. К достоинствам решения МОЭ с ИФ можно отнести следующие особенности: оно использует решение на эквивалентном клине всего с двумя границами тени; хорошо работает при стремлении величины размерного параметра к нулю и позволяет получить решение при объединении двух вершин в одну. Недостатки решения МОЭ с ИФ: оно использует решение с изгибом лучей, что говорит о нарушении волнового уравнения и об отсутствии математической строгости, что может привести к неточности этого эвристического решения. Преодолеть этот недостаток можно, сравнив решение с более строгим. Достоинство решения МПД: оно обладает большей математической строгостью. Недостаток решения МПД: плохо работает при стремлении величины размерного параметра к нулю.

Для случая дифракции на полупластине решения МПД и МОЭ с интегралом Френеля показывают хорошее совпадение между собой.

2.3 Дифракция на усеченном клине

В данном разделе несколькими эвристическими способами получено аналитическое решение для дифракции на двумерной канонической структуре – усеченном клине, представляющей собой полубесконечный клин с отрезанным краем (рис. 6).

Эту структуру можно также рассматривать как пересечение областей, занимаемых двумя расположенными в вершинах полубесконечными клиньями со сторонами, параллельными образующим каждую из этих вершин сторонам усеченного клина, и с образованием общего отрезка, соответствующему торцу усеченного клина. В литературе встречаются также другие названия этой структуры: «толстый экран», «пара объединенных клиньев». Смежными задачами являются дифракция на паре полуплоскостей [25] или на паре

клиньев [26 – 28]. В работах [25 – 28] для описания дифракции на двух вершинах используется специальная функция – обобщенный интеграл Френеля, подробное математическое описание которой дано в [66]. В указанной работе обобщенный интеграл Френеля исследуется не как элемент решения задачи дифракции на двух вершинах, а как функция, которая появляется в теории распространения радиоволн над точкой скачкообразного изменения электрических свойств земли.

Частным случаем усеченного клина является полуплоскость, называемая также «полуплоскость с конечной толщиной», или «толстая полубесконечная пластина». Исследование этой структуры началось довольно давно и проводилось как отдельными авторами, так и группами авторов [14, 29, 64]. По мере усложнения геометрии задачи усложняется и ее решение. Задача дифракции на паре полуплоскостей значительно сложнее задачи дифракции на одиночной полуплоскости, затем по сложности идет пара необъединенных клиньев. Есть еще задача о дифракции на паре непараллельных клиньев, но в данной диссертации мы ее не рассматриваем. Далее по сложности следует задача о дифракции на полуплоскостях.

Двумерный усеченный клин является одной из важных канонических задач дифракции. Эта структура является распространенной составной частью объектов со сложной геометрией. Исследование усеченного клина также имеет свою историю [30 – 33]. Как будет показано позже, решение этой задачи сложнее решения задачи дифракции на полуплоскостях.

Напомним, как при помощи (МОЭ) строится решение для полуплоскостей. Если рассматривать структуру с двумя вершинами и зафиксировать точки вершин в области w_{12} в точках 0 и -1 , а размерный параметр (расстояние между вершинами) положить в области z равным kh , то должно выполняться $kh=|kz(-1)|$.

Для полуплоскостей выполняется $\alpha=\beta=3/2$, при этом можно взять интеграл (63), получив явное выражение для конформного отображения и производной. Конформное отображение и производная для полуплоскостей толщиной kh (64), (65).

Система кривых r_{d0} для полуплоскостей в области z изображена на рис. 7. С целью размещения в одной области w_{12} окружности r_{w0} для клина и кривых r_{d0} для полуплоскостей вводится линейная нормировка (по аналогии с (66)):

$$w\sqrt{2kh/\pi} = w_N, \quad r_d = \sqrt{\pi/(2kh)}. \quad (101)$$

Область w_N с окружностью $r_{wN}=1$ и нормированными кривыми r_{d0} показана на рис. 9. При этом, как мы уже говорили, окружность r_{wN} пересекает кривые r_{d0} в средней точке. На рис. 10 изображена кривая r_{d0} и система окружностей r_{w0} в области w . Жирной линией выделена окружность $r_{d0}=r_{wN}=1$. Пунктиром показана прямая, вдоль которой проводится симметризация решения. Кривые r_{d0} сконцентрированы в области z вокруг вершин, а в области w - вокруг точек 0 и -1 , расположенных на горизонтальной оси.

Решение для дифракции на полуплоскостях строим при помощи известного решения на клине. В нормированной области w_{12} на кривой r_{d0} для полуплоскостей разместим значения полного поля решения краевой задачи для эквивалентного клина (рис. 10). Амплитуда полного поля переносится с корректирующим коэффициентом sN , который компенсирует изменение кривизны соответствующего участка кривой r_{d0} при конформном отображении. Корректирующий коэффициент определяется формулой :

$$V_{z2} = V_{ze} sN, \quad sN = \sqrt{n_e r_{z2} / r_{w2}}, \quad (102)$$

здесь V_{z2} и V_{ze} – амплитуда функций V (10) полупластины и эквивалентного клина с внешним углом πn_e соответственно. Функция sN характеризует влияние на диаграмму направленности (ДН) кривизны кривой r_{d0} . $1/r_{w1}$ и $1/r_{z2}$ – локальная кривизна соответствующих участков кривой r_{d0} при ее переносе из области w в область z при помощи конформного отображения.

В случае дифракции на усеченном клине процесс получения решения усложняется по сравнению со случаем дифракции на полупластине. Интеграл Шварца – Кристоффеля (63) не выражается явно как в случае полупластины (64), (65).

При построении решения для усеченного клина способом, аналогичным построению решения для полупластины, совпадения с проверочным решением по методу МПД происходит не для всех значений α и β . Из этого следует, что в случае усеченного клина дифракция на теневой вершине описывается неверно. Исправить это несовпадение можно при помощи двух феноменологических коэффициентов ksn и ka , изменяющих функцию sN . В результате выражение (102) принимает вид

$$V_{z2} = V_{ze} sN^{ksn} ka. \quad (103)$$

Один из этих феноменологических коэффициентов (ksn) представляет собой постоянный степенной коэффициент, другой (ka) – постоянный числовой множитель. Феноменологические коэффициенты ksn и ka подбираются так, чтобы решения МПД и МОЭ с ИФ совпадали при относительно больших значениях размерного параметра kh ($kh=\pi/2$). Интересно, что для полупластины изменения решения при помощи феноменологических коэффициентов не требуется. Как выяснилось при исследовании феноменологических коэффициентов ksn и ka для усеченного клина, они остаются постоянными при уменьшении размерного параметра от $kh=\pi/2$ до $kh=\pi/4$. Затем решение МПД становится неверным. Сохраняя те же значения феноменологических коэффициентов, получаем решение МОЭ с ИФ при уменьшении значения размерного параметра kh вплоть до нуля.

2.3.1 Принципы построения эвристического решения задачи дифракции на усеченном клине

На данном примере можно продемонстрировать подход, применяемый нами для получения эвристических решений. Главные принципы этого подхода: распространение решения, полученного для одного типа рассеивателей, к более широкому классу рассеивателей. Затем – сравнение нового решения со строгим. Затем – уточнение решения. Затем шаги повторяются. В данном случае мы использовали решение для клина с целью получения решения на полупластине. Затем сравнили это решение с решением МПД и уточнили решение на полупластине при помощи функции sN . Затем применили это решение к задаче дифракции на усеченном клине. Сравнили новое решение с решением МПД и уточнили его при помощи феноменологических коэффициентов ksn и ka .

Несмотря на то, что феноменологические коэффициенты не имеют математического обоснования, только решение МОЭ с ОИФ позволяет описать поведение решения при приближении вершин друг к другу и слиянии вершин в одну. Причина введения феноменологических коэффициентов заключается в том, что применяемый нами эвристический подход не позволяет получить правильное решение для дифракции на теневой вершине. Методическое оправдание введения феноменологических коэффициентов заключается в том, что в данном эвристическом подходе это самый быстрый и достаточно точный способ достижения совпадения решения с проверочным решением. Не исключено, что от феноменологических коэффициентов удастся избавиться, подобрав более подходящий, чем в (66) и (101), вид зависимости $r_{a0}(kh)$. Исследование поведения феноменологических коэффициентов для дифракции на усеченном клине при разных условиях задачи позволяет надеяться на выявление неизвестных ранее закономерностей явления дифракции, которые можно будет позже использовать при построении других эвристических подходов.

Таким образом, подход МОЭ с ИФ позволяет получить решение для дифракции на усеченном клине, равномерно справедливое при стремлении к нулю величины размерного параметра kh .

2.3.2 Решение с обобщенным интегралом Френеля

Существует еще один способ получить решение задачи дифракции на усеченном клине. При этом в дополнение к интегралу Френеля при построении решения используется и другая специальная функция – обобщенный интеграл Френеля [66].

В отличие от интеграла Френеля, обобщенный интеграл Френеля зависит не от одного, а от двух аргументов. В работе [25] рассматривалась задача дифракции на двух полуплоскостях. При этом в качестве источника, облучающего одну из полуплоскостей, рассматривалось поле, представляющее собой результат дифракции первичного поля на другой полуплоскости. Как известно, данное поле записывается в виде интегрального представления. В [25] это интегральное представление подставлялось в качестве источника в другое интегральное представление, в результате чего получался двукратный интеграл по комплексной плоскости. В результате математических преобразований этот двукратный интеграл был преобразован в однократный интеграл, зависящий от двух аргументов - обобщенный интеграл Френеля.

При облучении лишь одной из полуплоскостей волной единичной амплитуды решение будет таким [25]:

$$V(w_0) = F[SMSO(\varphi_0, r_z, \varphi_z)] - G[SMNSM(r_z, \varphi_z), SMSO(\varphi_0, r_z, \varphi_z)],$$

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \int_{-\infty}^y \exp(i\xi^2) d\xi, \quad G(x, y) = \frac{y}{2\pi} \int_x^{\infty} \frac{\exp[i(\xi^2 + y^2)] d\xi}{\xi^2 + y^2}, \quad (104)$$

где $SMSO(\varphi_0, r_z, \varphi_z) = S_M(P) - S_0(P)$, $SMNSM(r_z, \varphi_z) = S_{MN}(P) - S_M(P)$, точки для определения входящих в эти выражения величин $S_0(P) = QP$, $S_M(P) = QM + MP$, $S_{MN}(P) = QM + MN + NP$ показаны на рис. 16.

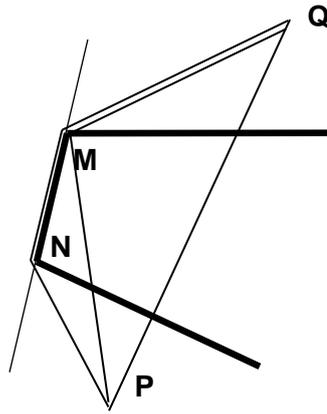


Рис. 16

Точки Q, M, N, P для определения значений эйконалов, входящих в формулу с обобщенным интегралом Френеля.

На рис. 16 показаны точки для определения эйконалов обобщенного интеграла Френеля, входящего в один из вариантов выражения для поля, рассеянного усеченным клином.

Решение для дифракции на двух полуплоскостях можно использовать при построении эвристического решения задачи дифракции на усеченном клине. Данное решение строим по аналогии с тем, как было построено решение МОЭ с ИФ для усеченного клина. Отличие заключается в том, что лучи в области z теперь не «изгибаются». Поэтому функция sN в решении отсутствует. Что касается функции pN , то она по-прежнему присутствует в решении и воздействует на поле, рассеянное освещенной вершиной.

Сравнивая решения задач дифракции на полуплоскости и клине, можно интерпретировать умножение на функцию pN как преобразование решения задачи дифракции на «тонкой» структуре в решение задачи дифракции на структуре «с толщиной». В связи с этим можно выдвинуть гипотезу о том, что и в задаче дифракции на двух полуплоскостях умножение на функцию pN преобразует это решение в решение задачи дифракции на «толстой» структуре, поверхность которой огибает вершины, расположенные в тех же точках, что и концы полуплоскостей.

Отличие от подхода МОЭ с ИФ, примененного в задаче дифракции на полуплоскости, весьма существенное. В подходе МОЭ с ИФ мы брали на кривой r_{d0} все решение для эквивалентного клина, т.е. как «лучевую», так и амплитудную часть. При этом решение изменялось таким образом, что лучи как бы изгибались. Для учета этого эффекта мы применяли функцию sN . В подходе МОЭ с ОИФ из решения для эквивалентного клина мы берем лишь амплитудную часть, т.е. функцию pN . Лучевую часть решения берем из решения (104) задачи дифракции на двух полуплоскостях.

Вычитая из полного поля первичное поле в освещенной области, получим поле, рассеянное освещенной вершиной. Затем умножим это поле на pN и вновь добавим первичное поле. Прибавив обобщенный интеграл Френеля, получим искомое решение:

$$V(w_0) = [F(SMS0) - P01]pN1 + P01 - G(SMNSM, SMS0). \quad (105)$$

Здесь $P01$ - первичное поле по (1), взятое «на свету», $pN1 = pN \cos[(\varphi_{z0} - \varphi_0)/2]$. Умножение функции pN на косинус полуразности углов, взятый из разности эйконалов (см.,

например, асимптотику (54)) приводит к тому, что сингулярная на границе тени функция pN из (106) превращается в функцию $pN1$, равную на границе тени 1. Само собой разумеется, что если использовать функцию $pN1$ в выражении (61) и присоединить косинус полуразности углов к «амплитудному» множителю pN , получив, таким образом, функцию $pN1$, то в «лучевой» часть этот множитель входит уже не будет.

Решение (105) построено по упрощенной схеме. Обобщенный интеграл Френеля, в отличие от обычного интеграла Френеля, описывает дифракцию также и на теневой вершине. Вместо $pN1$ можно построить функцию, которая, будет равна единице сразу на всех границах тени, т.е. как на границах тени падающей и отраженной волны, связанных с дифракцией первичной волны на освещенной вершине, так и на границах тени, связанных с дифракцией вторичных волн на вершинах. Однако «настраивать» такое решение следует при помощи более точного численного решения, а не при помощи решения МПД.

Таким образом, функция pN по-разному входит в решения МОЭ с ИФ и МОЭ с ОИФ. Общим для этих подходов является то, что функцию pN берем на кривой r_{d0} , а значения этой функции берем в области w_{12} такими же, как для функции pN эквивалентного клина. Отличие заключается в том, что мы по-разному определяем направления границ тени в области z . В подходе МОЭ с ИФ границы тени берем в той точке кривой r_{d0} , где направления выхода лучей параллельны границам тени, определяемым геометрической оптикой, но не совпадают с ними. Границы тени, направленные вдоль торца, в решении специально не выделяем, а получаем автоматически в результате конформного отображения и связанного с ним действия на решение функции sN . В подходе МОЭ с ОИФ лучевая картина получается автоматически из решения для двух полуплоскостей, а границы тени совпадают с теми, которые определяются геометрической оптикой.

В решении (105) также применяется симметризация значений углового аргумента φ_w относительно направления прихода падающей волны. Соответствующие тривиальные выражения не приводим, чтобы избежать загромождения текста формулами.

Обобщенный интеграл Френеля имеет неопределенность при одновременном стремлении обоих аргументов к нулю [27, 66]. В этом случае асимптотика ОИФ представляет собой арктангенс от частного от деления аргументов. В зависимости от соотношения между величинами этих малых (стремящихся к нулю) аргументов величина арктангенса может скачкообразно меняться от 0 до π . Это свойство ОИФ нужно учитывать при проведении расчетов и принимать специальные меры. Например, в [27] внутри малой окрестности точки, в которой оба аргумента ОИФ равны нулю, проводится табуляция данных с последующей линейной интерполяцией.

Такое поведение функции ОИФ можно объяснить неопределенностью постановки задачи с физической точки зрения. Так, при уменьшении расстояния между полуплоскостями до нуля они в предельном случае могут сливаться в одну полуплоскость или оставаться разделенными. Приняв решение по данному вопросу, можно при стремлении обоих аргументов к нулю назначить пропорцию между аргументами обобщенного интеграла Френеля и тем самым избежать возникновения скачков ОИФ.

2.3.3 Результаты численного расчета

По аналитическим формулам, полученным на основе подходов МПД, МОЭ с ИФ и МОЭ с ОИФ были проведены численные расчеты. Решение задачи дифракции плоской волны на усеченном клине проводилось тремя указанными методами для различных зна-

чений углов α и β при уменьшении величины размерного параметра kh от π до $\pi/20$. Примеры численных расчетов для усеченного клина с величиной размерного параметра $kh=\pi/2$ при различных углах α и β приведены на рис. 17.

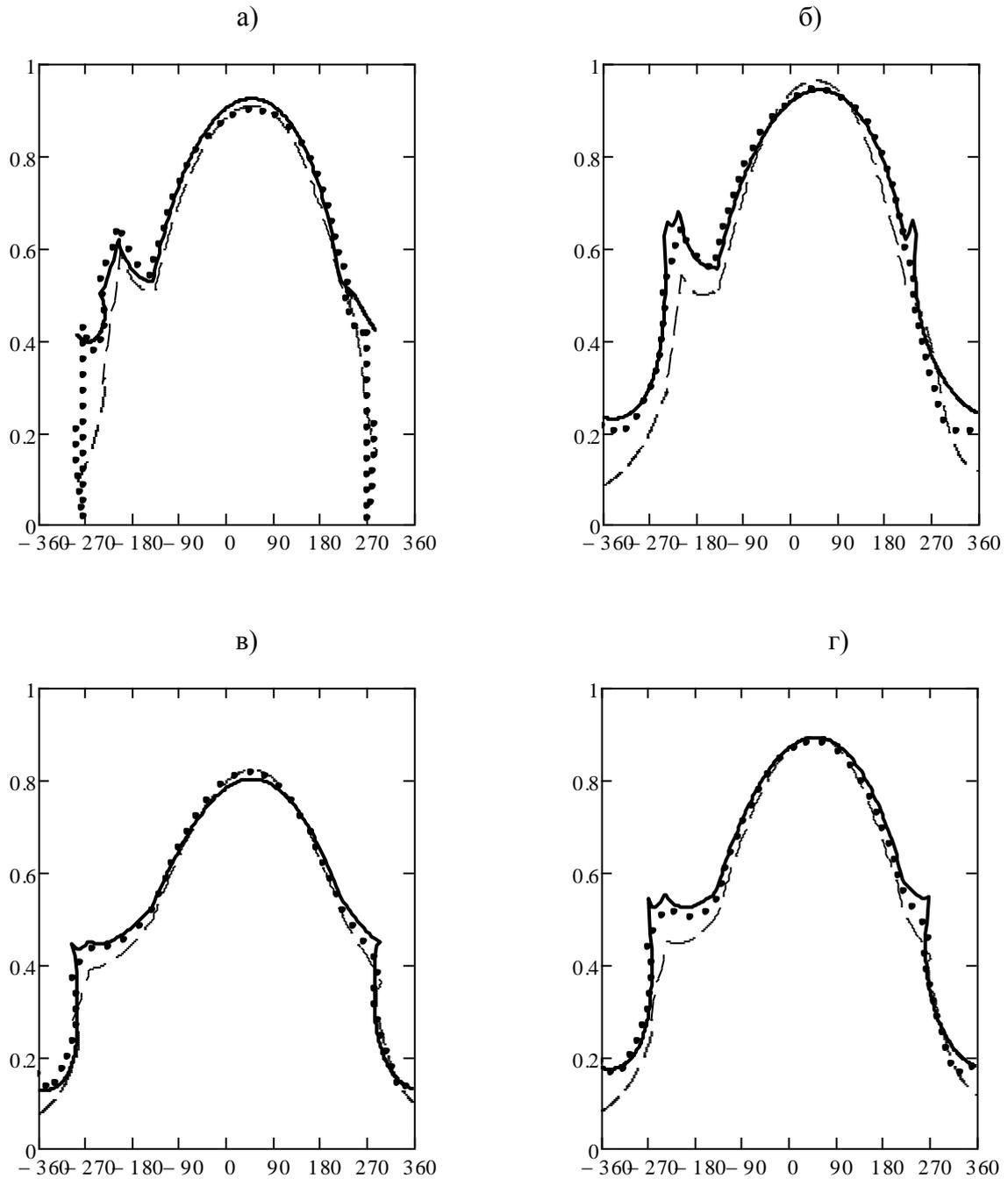


Рис. 17

Примеры численных расчетов для усеченного клина с величиной размерного параметра $kh=\pi/2$ при различных углах α и β . По горизонтальной оси откладывается угол направления выхода луча с кривой r_{d0} в решении МОЭ с ИФ в двулистной области z , по вертикальной оси – величина полного поля V на кривой r_{d0} .

- а) $\alpha=1.35$ и $\beta=1.25$, $ksn=0$, $ka=1.05$; б) $\alpha=1.35$ и $\beta=1.65$, $ksn=1$, $ka=1.15$.
 в) $\alpha=1.65$ и $\beta=1.35$, $ksn=1$, $ka=1$; г) $\alpha=1.5$ и $\beta=1.5$, $ksn=1$, $ka=1.1$.

На рис. 17 показаны результаты расчетов поля усеченного клина. Угол падения плоской волны в области z : $\varphi_0=40^\circ$. Пунктирная линия – решение МПД (61), сплошная линия – решение МОЭ с ИФ (103), штриховая линия – решение МОЭ с ОИФ (105). Сравнивая решения, полученные разными методами, видим, что они удовлетворительно совпадают между собой.

2.3.4 Анализ полученных решений

1. МПД описывает первичную дифракцию на освещенной вершине, вторичную дифракцию на теневой вершине и последующую дифракцию на освещенной вершине. Это проверенный способ, который работает при относительно больших значениях размерного параметра kh , но неверно описывает решение при стремлении значений размерного параметра к нулю. Данное свойство заложено в самом подходе МПД.

Кроме того, промежуточные решения для дифракции на вспомогательных клиньях, связанных с освещенной и теневой вершинами, имеют сингулярности в областях значений углов, расположенных внутри клиньев. Это обстоятельство не играет роли при рассмотрении дифракции на каждом отдельном клине, но может создавать проблемы в эвристических подходах при рассмотрении дифракции на полупластине или усеченном клине, где области с особенностями уже являются рабочими.

2. МОЭ с интегралом Френеля, спецфункцией, описывающей дифракцию на одной (освещенной) вершине. Единственный из трех описанных в данном разделе способ, не имеющий проблем при стремлении к нулю значения малого параметра, когда вершины сливаются в одну, а дополнительные границы тени исчезают.

Недостаток МОЭ с интегралом Френеля – неточное описание особенности на теневой вершине. Проявляется при исследовании дифракции на усеченном клине, но не проявляется в задаче дифракции на полупластине. Этот недостаток можно исправить при помощи феноменологического подхода, корректируя решение при помощи двух феноменологических коэффициентов ksn и ka – соответственно показателя степени у функции sN и постоянного множителя. Коэффициенты вычисляются для заданных значений углов при вершинах (освещенной и теневой) и остаются постоянными при изменении значения размерного параметра.

3. МОЭ с обобщенным интегралом Френеля, спецфункцией, описывающей дифракцию сразу на обеих вершинах (первичную дифракцию на освещенной вершине и однократную вторичную дифракцию на теневой вершине). Наиболее обоснованный способ из трех с точки зрения математики, поскольку спецфункция выделена из задачи в достаточно строгой постановке.

Недостаток решения МОЭ с ОИФ – относительная сложность новой спецфункции и неопределенность ее поведения при стремлении обоих аргументов к нулю. Впрочем, такая неопределенность, по-видимому, содержится уже в постановке задачи и означает неопределенность того обстоятельства, остается ли или исчезает щель между полуплоскостями при стремлении расстояния между ними к нулю.

Другой недостаток решения МОЭ с ОИФ заключается в том, что как сам ОИФ, так и соответствующий коэффициент pN описывает лишь однократную дифракцию [25]. Для

описания переотражения требуется дальнейшая работа, начинать которую имеет смысл лишь при наличии численного решения.

Решение с ОИФ правильно описывает основные особенности решения и не требует феноменологических коэффициентов. Однако специальная функция ОИФ имеет неопределенность при стремлении обоих аргументов к нулю, что приводит к неопределенности решения при стремлении к нулю размерного параметра.

Смысл применяемого подхода состоит в следующем. В соответствии с МОЭ решение задачи дифракции переносится из первоначальной области z , внешней по отношению к рассеивателю, в область w_{12} , представляющую собой полную плоскость (рис. 2 (в)). Верхняя полуплоскость w_1 области w_{12} может быть отображена на область z при помощи конформного отображения $Z(w)$. Мы пользуемся формой записи комплексного числа в полярных координатах: $z=r_z \exp(i\varphi_z)$, $w=r_w \exp(i\varphi_w)$.

Нужно заметить, что все координаты r_z , φ_z , r_w и φ_w областей z и w_{12} являются действительными числами. На данном этапе мы привлекаем теорию конформных отображений лишь для того, чтобы осуществить ортогональное преобразование координат. Нижняя полуплоскость w_2 области w_{12} также может быть отображена на область z при помощи того же конформного отображения $Z(w)$, ее закон отображения является зеркальным отображением закона отображения полуплоскости w_1 относительно горизонтальной оси. Горизонтальная ось соответствует границе рассеивателя z .

Все эти геометрические преобразования делаются для того, чтобы обеспечить выполнение граничных условий так же, как это происходит в методе зеркальных отображений. Решение краевой задачи рассеяния для волнового уравнения с постоянным волновым числом в области z со сложной границей эквивалентно нахождению непрерывного поля в двулистной безграницной области w_{12} с переменным волновым числом. Это непрерывное поле должно удовлетворять трем условиям первоначальной краевой задачи: начальным условиям, условию на бесконечности и условию Мейкснера. Кроме этого оно должно удовлетворять волновому уравнению с переменным волновым числом. Граничным условиям первого или второго рода на границе рассеивателя автоматически удовлетворяем после осуществления двух шагов. Сначала складываем или вычитаем в верхней полуплоскости w_1 значения поле из w_1 и w_2 в точках, симметричных относительно горизонтальной оси (обе точки соответствуют одной и той же точке реального пространства – области z). Затем проводим обратный переход из области w_1 в область z .

На первый взгляд, переход в безграницную область w_{12} с переменным волновым числом может лишь усложнить решение краевой задачи. Однако все упрощается, если искать решение не во всей области сразу, а на одной из кривых r_{d0} .

В отличие от решения для клина, в случае рассеивателя с размерным параметром поиск для интегрального представления (8) соответствующей замены переменной $w \rightarrow \hat{w}$, удовлетворяющей условиям (6), может существенно усложниться. Поэтому применяем эвристический подход. Вместо нахождения интегрального представления (8), удовлетворяющего условиям (6), в строгой форме, берем в области w_{12} интегральное представление непрерывного поля (21) для так называемого «эквивалентного клина», но рассматриваем это решение на кривой r_{d0} для рассеивателя с размерным параметром. Эквивалентный клин – это рассеиватель клиновидной формы, освещенная кромка которого совпадает с освещен-

ной кромкой исследуемого рассеивателя. Угол φ_{z0e} падения и внешний угол клина m_e подбираем таким образом, чтобы после обратного отображения картины поля из области w_{12} в область z углы выхода лучей с кривой r_{d0} совпадали с углами направлений геометро-оптических границ тени, которые определяются начальными условиями задачи.

Амплитуда поля на кривой r_{d0} берется равной амплитуде поля эквивалентного клина в области w_{12} с учетом изменения кривизны r_{d0} при обратном отображении картины поля из области w_{12} в область z . Амплитуда корректируется таким образом, чтобы оставалась постоянной энергия, распространяющаяся в выделенной трубке лучей.

В строгом решении, удовлетворяющем условиям (б), можно брать кривые r_{d0} не только с $r_{d0}=1$, но и с другими значениями. При обратном отображении в область z волновое число будет равно первоначальному значению для кривой с любым r_{d0} . В эвристическом решении ситуация кардинально меняется. Мы находим решение для эквивалентного клина на его окружности r_{w0} , а затем переносим их на кривую r_{d0} для полупластины. В эвристическом подходе, использующим решение на эквивалентном клине, поведение решения в зависимости от величины размерного параметра kh определяется исключительно выбором определенной формы кривой r_{d0} . В свою очередь, эта форма определяется выбором определенной величины параметра r_{d0} , жестко связанной с величиной размерного параметра kh . Применяя этот подход, можно в качестве первого приближения выбрать для полупластины такую рабочую кривую r_{d0} , чтобы ее точки были не слишком сильно отдалены от окружности r_{w0} для эквивалентного клина. Можно применить подход, в котором единичная окружность r_{w0} пересекает любую из кривых r_{d0} в средней точке (рис. 9).

2.4 Применение решений метода обобщенного эйконала

2.4.1 Сравнение подходов

В данном разделе решения для дифракции на усеченном клине получены тремя способами: МПД, МОЭ с ИФ, МОЭ с ОИФ.

Решение МПД самое простое. Его можно построить, применяя лишь готовые решения на клиньях, стороны которых совпадают с вершинами, без использования кривой r_{d0} для усеченного клина. Следует отметить, что применение этой кривой улучшает решение МПД. Данное решение плохо работает при малых значениях размерного параметра. Эту проблему можно снять, выделив из исходного интеграла не интеграл Френеля, а спецфункцию, более правильно описывающую поле вблизи от рассеивающей кромки. В результате может получиться самое точное решение МПД и, возможно, наиболее точное решение из всех рассматриваемых в данном разделе.

Решение МОЭ с ИФ нуждается в использовании функции pN на кривой r_{d0} , а также функции sN , в общем случае – с феноменологическими корректирующими коэффициентами k_{sn} и ka (как в (103)). Это решение в наименьшей степени обосновано с математической точки зрения, однако оно лучше других работает при стремлении к нулю величины размерного параметра kh .

Решение МОЭ с ОИФ описывает однократную вторичную дифракцию на теневой вершине. Оно не нуждается в применении функции sN . Однако обобщенный интеграл Френеля имеет проблемы при стремлении обоих аргументов к нулю.

Для дальнейшего исследования разработанных эвристических подходов необходимо наличие надежного проверочного численного решения. Тогда можно развивать все три предложенные подхода с целью увеличения их точности.

Перспективы применения данных подходов в трехмерных задачах связаны с применением результатов, приведенных, например, в следующих главах этой диссертации.

2.4.2 Структура решения в методе обобщенного эйконала

Каждое из двух слагаемых в правой части выражения (61) состоит из четырех сомножителей. Первый множитель представляет собой произведение значения поля в седловой точке (т.е. на границе тени) на фактор, определяющий зависимость решения от расстояний до источника и точки наблюдения. Вторым множителем – половина дифракционного коэффициента, имеющая период 2π в области w_{12} . Полный дифракционный коэффициент для определенного вида поляризации получится, если сложить или вычесть значения этого сомножителя в точках w_0 , симметричных относительно горизонтальной оси в области w_{12} . Третий и четвертый множитель представляют собой произведение интеграла Френеля на свою асимптотику и характеризуют зависимость поля от углового расстояния до границы тени. Для поля, рассеянного полупластиной, (в отличие от поля, рассеянного клином) есть еще пятый множитель – sN в выражении (102), характеризующее изменение амплитуды поля, вызванное изменением кривизны кривой r_{d0} при конформном отображении.

Сравнивая между собой решения для двух клиньев, видим, что они отличаются только вторым сомножителем. Остальные множители не изменяются в области z для всех видов клиньев и не зависят от конформного отображения. Напротив, второй множитель с точностью до постоянного множителя $1/n$ остается неизменным в области w_{12} для всех видов клиньев. Назовем этот множитель «амплитудным». Множители, неизменные в области z , назовем «лучевыми». Лучевые множители связаны с пространственными конгруэнциями прямолинейных лучей (расходящихся от вершин), а амплитудный множитель дает дополнительную амплитуду.

Итак, решение для полупластины в области z мы получаем, взяв в области w_{12} решение для эквивалентного клина на кривой r_{d0} , умножив его на функцию sN и осуществив конформное отображение области w_{12} на область. Для удовлетворения граничным условиям применяем формулы (11), (12).

Если взять решение (102) для полупластины и проследить трассы лучей, соответствующих эквивалентному клину, то можно видеть, что в области z они «изгибаются». С одной стороны, в области с постоянным волновым числом лучи должны идти по прямой. С другой стороны, при дифракции поток мощности действительно будет огибать рассеиватель в результате при суперпозиции полей. Изгиб лучей происходит также в области с неравномерностью волнового числа. Лучи поворачивают в сторону областей с большими значениями волнового числа и отворачивают от областей с малыми значениями волнового числа. Таким образом, применяя эвристическое решение, при помощи конформного отображения и следующих из этого отображения неравномерностей волнового числа мы моделируем обтекание рассеивателя потоком мощности. Это обтекание имеет место и в строгом решении, оно определяется суперпозицией на границе «свет – тень» рассеянного поля и части первичного геометрического поля (а именно – части поля, прошедшей мимо

рассеивателя или отраженной от него). При этом суперпозиция полей происходит в области z с постоянным волновым числом.

Моделирование одного физического процесса при помощи другого не является строгим с математической точки зрения и не гарантирует точность. Однако, как будет показано позже, данный подход, во-первых, дает вполне удовлетворительную точность, а во-вторых, позволяет описать особенность решения, недоступную для описания в других рассматриваемых в данной диссертации подходах, а именно – поведение решения при стремлении к нулю величины размерного параметра kh .

2.4.3 Выделение дифракционных коэффициентов из решения

В выражении (61) фигурируют два слагаемых для двух седловых точек s_1 и s_2 . В этих двух слагаемых отличаются только амплитудные множители. Назовем сумму этих множителей по двум седловым точкам pN (с точностью до постоянного множителя i). Тогда явное выражение для функции pN (как в (57)):

$$pN = \frac{w_{s1}}{w_{s1} - w_0} - \frac{w_{s2}}{w_{s2} - w_0} = \frac{i \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi_{z0} - \varphi_0}{n}}. \quad (106)$$

Это выражение имеет период 2π в области w_{12} и период $2\pi n$ в области z . Здесь $2\pi n$ – внешний угол усеченного клина. Сингулярности при $\varphi_{z0} = \varphi_0 \pm \pi$, т.е. на границах тени в выражении (61) для поля, рассеянного клином, компенсируются равенством нулю выражения для разности эйконолов $S(w_{sm}) - S(w_0)$. Разность эйконолов равна нулю только на границах тени и больше нигде в области z . Функцию pN определяем для эквивалентного клина. Для других видов рассеивателей формальная подстановка pN из (106) может дать нескомпенсированные сингулярности в области z . Для того чтобы избежать этого, нужно применить к функции pN симметризацию и зафиксировать значения этой функции на кривой r_{d0} в области w_{12} . Тогда после применения конформного отображения для переноса кривой r_{d0} с зафиксированными на ней значениями pN из области w_{12} в область z нескомпенсированные сингулярности не возникнут.

Функция sN (102) характеризует влияние на диаграмму направленности (ДН) кривизны «изгибающихся» лучей. В свою очередь, кривизна «изгибающихся» лучей является следствием изменения кривизны кривой r_{d0} , вызванного конформным отображением. Именно изменение кривизны кривой r_{d0} описывает дифракцию на дополнительных границах тени, которые отсутствуют у эквивалентного клина, но появляются у усеченного клина (линии, идущие в обе стороны вдоль торца, см. рис 1). Дополнительные границы тени для решения с применением эквивалентного клина не вводим, однако в связи со сказанным выше получается, что дифракция на них учитывается автоматически. Описанное выше решение с изгибом лучей, полученное методом обобщенного эйконола при помощи интеграла Френеля (входящего в решение для эквивалентного клина), назовем так: «решение МОЭ с ИФ».

ГЛАВА 3. ПРИМЕНЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ РЕШЕНИЙ МЕТОДА ОБОБЩЕННОГО ЭЙКОНАЛА В СЛУЧАЕ НАКЛОННОГО ПАДЕНИЯ НА КРОМКУ

3.1 Интегралы по элементарным полоскам

В данном разделе рассмотрено рассеяние электромагнитных волн на бесконечных и конечных цилиндрических кромках. Проведено сравнение выражений для соответствующих векторных потенциалов. Показано, что в случае, когда направляющая контура интегрирования, огибающего цилиндрическую кромку, представляет собой ломаную линию, можно использовать найденные ранее аналитические выражения для рассеяния электромагнитных волн на бесконечных цилиндрических кромках с целью определения рассеяния на фрагментах аналогичных кромок конечной длины. Сделан вывод о возможности применения данной методики для кромок произвольной формы и с произвольными граничными условиями.

В ряде задач, связанных с построением приближенного решения по методу краевых волн или методу эквивалентных контурных токов [1, 67], требуется найти рассеяние электромагнитных волн на фрагменте цилиндрической кромки, конечном по координате, направленной вдоль образующей. При этом имеется множество аналитических и численных решений для цилиндрических тел разной формы и с разными граничными условиями, бесконечных по указанной координате. В подобных задачах в силу специфической геометрии объекта волны рассеиваются только вдоль дифракционных конусов, т.е. направления рассеяния волн составляют такой же угол с образующей рассеивающей кромки, как и направляющий вектор падающей волны. В то же время от конечного фрагмента цилиндрической кромки волны расходятся во всех направлениях, причем в направлениях дифракционных конусов можно использовать решение для бесконечной цилиндрической кромки, а в других направлениях – нельзя. Однако именно в этих направлениях чаще всего находится сигнал, например в задачах, изучающих рассеяние на телах конечных размеров с большим числом прямолинейных кромок. В данной диссертации показано, в каких случаях и каким образом можно использовать имеющиеся "двумерные" решения для бесконечных цилиндрических кромок для нахождения "трехмерных" решений на конечных цилиндрических кромках.

3.1.1 Физическая постановка задачи дифракции

В соответствии с известным подходом [42, 68] физическая постановка задачи дифракции заключается в следующем.

Пусть на поверхность рассеивателя падает электромагнитное поле \vec{E}^0 , \vec{H}^0 . Тогда на поверхности рассеивателя существуют поверхностные электрические и магнитные токи с плотностями \vec{j}^e и \vec{j}^m .

При рассеянии электромагнитной волны на теле конечных размеров решение для комплексных векторных амплитуд электрического и магнитного полей (выбрана зависимость от времени в $\exp(-i\omega t)$) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{1}{ik} \left(\text{grad div} \vec{A}^e + k^2 \vec{A}^e \right) - \text{rot} \vec{A}^m, \\ \vec{H} &= -\frac{1}{ik} \left(\text{grad div} \vec{A}^m + k^2 \vec{A}^m \right) + \text{rot} \vec{A}^e,\end{aligned}\tag{107}$$

где векторные потенциалы \vec{A}^e и \vec{A}^m можно выразить через поверхностные токи:

$$\begin{aligned}\vec{A}^e(\vec{R}) &= \frac{1}{c} \iint_S \frac{\exp(ikr)}{r} \vec{j}^e ds, \\ \vec{A}^m(\vec{R}) &= \frac{1}{c} \iint_S \frac{\exp(ikr)}{r} \vec{j}^m ds.\end{aligned}\tag{108}$$

Здесь \vec{A}^e и \vec{A}^m - электрический и магнитный векторные потенциалы; \vec{j}^e и \vec{j}^m - и электрический и магнитный поверхностные токи; S - поверхность рассеивателя; $r = |\vec{R} - \vec{\rho}|$ - расстояние от точки рассеивающей поверхности с радиус-вектором $\vec{\rho} = (\xi, \eta, \zeta)$ до точки наблюдения с радиус-вектором $\vec{R} = \vec{n}'' R = (n_x'' R, n_y'' R, n_z'' R)$; \vec{n}'' - единичный вектор направления на приемник; R - расстояние от центра координат до приемника; $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число; c - скорость света; i - мнимая единица.

Для поля на произвольной поверхности, охватывающей рассеиватель, электрический и магнитный поверхностные токи \vec{j}^e и \vec{j}^m выражаются через значения \vec{E}^0 и \vec{H}^0 полей на поверхности рассеивателя:

$$\vec{j}^e = \frac{c}{4\pi} [\vec{n} \times \vec{H}^0], \quad \vec{j}^m = -\frac{c}{4\pi} [\vec{n} \times \vec{E}^0],\tag{109}$$

здесь нормаль \vec{n} к поверхности S направлена в сторону области, занятой полем.

Формулы (107) сводятся в дальней зоне ($kR \rightarrow \infty$) в сферических координатах к известным соотношениям [42]

$$\begin{aligned}E_g &= H_\varphi = ik(A_g^e + A_\varphi^m), \\ E_\varphi &= -H_g = ik(A_\varphi^e - A_g^m), \\ E_r &= H_r = 0,\end{aligned}\tag{110}$$

где A_r , A_g и A_φ связаны с A_x , A_y и A_z через линейные преобразования физических координат вектора (см. формулу (327) из Приложения 7). Компоненты A_x , A_y и A_z в свою очередь определяем путем интегрирования соответствующих компонент токов по рассеивающей поверхности.

Если в формулы (109) вместо \vec{E}^0 и \vec{H}^0 подставить точные значения \vec{E} и \vec{H} , то выражения (110) дадут точные значения поля в дальней зоне. К сожалению, мы заранее не знаем точные значения \vec{E} и \vec{H} на поверхности рассеивателя, и поэтому приходится брать значения \vec{E}^0 и \vec{H}^0 , внося таким образом в результат методическую погрешность, характерную для приближения ФО.

Поиск точных значений токов j на поверхности S или прямой поиск точного решения представляет собой сложную задачу, решение которой численными методами требует значительных затрат ЭВМ, возрастающих при увеличении размера рассеивателя. При очень больших размерах рассеивателя найти строгое решение невозможно. В то же время точность асимптотических методов для тел с кромками [1, 67] растет при увеличении размеров рассеивателя, а изначально существенно меньший расход машинных ресурсов остается неизменным. В данном разделе предложен способ использования имеющихся двумерных решений, позволяющий легко строить трехмерные асимптотики и существенно повышающий эффективность вычислительных алгоритмов.

3.1.2 Бесконечный цилиндр

Рассмотрим интегралы (108) для бесконечной цилиндрической кромки произвольной формы, образующая которой совпадает с осью X . Пусть возбуждение осуществляется плоской электромагнитной волной:

$$\vec{E}^{(i)} = \vec{E}_0 \exp\{ik(\vec{n}', \vec{r})\}. \quad (111)$$

Здесь \vec{E}_0 – комплексная амплитуда; \vec{n}' – направляющий вектор падающей волны; $\vec{r} = (x, y, z)$ – радиус-вектор произвольной точки пространства. Выражения (108) можно расписать в виде ряда скалярных соотношений вида:

$$A'' = \frac{1}{c} \iint_S \vec{j}(\vec{\rho}) \frac{\exp\left\{ik \left[\sqrt{(\xi - n_x'' R)^2 + (\eta - n_y'' R)^2 + (\zeta - n_z'' R)^2} \right]\right\}}{\sqrt{(\xi - n_x'' R)^2 + (\eta - n_y'' R)^2 + (\zeta - n_z'' R)^2}} ds. \quad (112)$$

Разобьем $\vec{\rho}$ на две части:

$$\vec{\rho} = \vec{e}_x \xi + \vec{\rho}_0, \quad (113)$$

где $\vec{\rho}_0$ – составляющая вектора $\vec{\rho}$ в плоскости YOZ направляющей цилиндрической поверхности S ; \vec{e}_x – единичный орт.

Как известно, токи на бесконечной вдоль оси x цилиндрической поверхности меняются вдоль этой оси по такому же закону, как и падающее поле (111):

$$\vec{j}(\vec{\rho}) = \vec{j}(\vec{\rho}_0) \exp(ik\xi n_x'). \quad (114)$$

Обозначив через $r_{yz} = \sqrt{(\eta - n''_y R)^2 + (\zeta - n''_z R)^2}$ расстояние между точками интегрирования и наблюдения в плоскости YOZ , запишем (112) с учетом (114) в виде

$$\begin{aligned} A'' &= \frac{1}{c} \iint_S \vec{j}(\vec{\rho}_0) \frac{\exp\left\{ik \left[\sqrt{(\xi - n''_x R)^2 + r_{yz}^2} + \xi n'_x \right]\right\}}{\sqrt{(\xi - n''_x R)^2 + r_{yz}^2}} ds = \\ &= \frac{1}{c} \int_C \vec{j}(\vec{\rho}_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left\{ik \left[\sqrt{\xi^2 + r_{yz}^2} + (\xi + n''_x R) n'_x \right]\right\}}{\sqrt{\xi^2 + r_{yz}^2}} d\xi dl \end{aligned} \quad (115)$$

Здесь для удобства проведена замена переменной: вместо имеющейся в интеграле по S комбинации $(\xi - n''_x R)$ в интеграле по $d\xi$ стоит просто ξ . Контур интегрирования C , расположенный в плоскости YOZ , является направляющей кривой цилиндрической поверхности; dl – элемент C .

Далее воспользуемся полезным соотношением [15] (см. также [1]):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left\{ik \left[\sqrt{\xi^2 + r_{yz}^2} + \xi n'_x \right]\right\}}{\sqrt{\xi^2 + r_{yz}^2}} d\xi = i\pi H_0^{(1)}\left(kr_{yz} \sqrt{1 - (n'_x)^2}\right). \quad (116)$$

Введя обозначение $k_1 = k\sqrt{1 - (n'_x)^2}$, воспользуемся асимптотикой функции Ганкеля для больших значений аргумента:

$$H_0^{(1)}(k_1 r_{yz}) \cong \sqrt{\frac{2}{i\pi k_1 r_{yz}}} \exp(ik_1 r_{yz}). \quad (117)$$

С учетом (116) и (117) запишем (115) в виде

$$A'' = \frac{\exp(ikn''_x R n'_x)}{c} \sqrt{\frac{2\pi i}{k_1}} \int_C \vec{j}(\vec{\rho}_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ik_1 r_{yz})}{\sqrt{r_{yz}}} dl. \quad (118)$$

3.1.3 Условие дальней зоны

Для тела конечных размеров в случае удовлетворения условию дальней зоны (242) (Приложение 1)

$$r \geq 2D^2/\lambda, \quad (119)$$

где D – характерный размер объекта (например, максимальный поперечный размер), выполняется равенство

$$r \cong R - (\vec{n}'', \vec{\rho}), \quad (120)$$

и интегралы (108) для векторного потенциала A в точке наблюдения могут быть сведены к ряду скалярных соотношений типа

$$A \cong \frac{1}{c} \frac{\exp(ikR)}{R} \iint_S j \exp\{-ik(\vec{n}'', \vec{\rho})\} ds, \quad (121)$$

Однако соотношения (120) и (121) не являются справедливыми для формулы (118), поскольку рассматриваемая в ней цилиндрическая поверхность бесконечна по оси x и условие (119) не выполняется ни для каких r . В общем случае она может быть также полубесконечной по контуру C , однако это обстоятельство не является препятствием к применению соотношений (120) и (121).

В соответствии с методом краевых волн [1] разделим токи j на "равномерную" (физико-оптическую) и "неравномерную" (обусловленную отклонением формы поверхности от бесконечной плоскости) части. Равномерная часть тока распределена по всей поверхности рассеивателя, в то время как неравномерная часть сосредоточена вблизи кромок. Можно строго доказать [43, 142], что интегрирование физико-оптической составляющей плоской волны по плоской пластине в дальней зоне допустимо заменить интегрированием по контуру этой пластины. В формуле (118) это будет соответствовать учету лишь одной точки контура C , расположенной на пересечении ребра полуплоскости и плоскости YOZ . Кроме того (как можно показать, например, для полуплоскости [1]), как равномерная, так и неравномерная составляющая тока после интегрирования дает вдали от кромки вклад в A'' порядка $1/\sqrt{r}$, характерный для волн цилиндрического типа, расходящихся от линейной кромки. Все сказанное дает возможность утверждать, что условие дальней зоны (119) можно применять в плоскости YOZ даже для полубесконечных контуров C , причем в качестве D будет фигурировать размер зоны распространения неравномерной части тока. Соотношение (120) при этом примет вид

$$r_{yz} \cong R_{yz} - \left(\vec{n}''_{yz} / |\vec{n}''_{yz}|, \vec{\rho}_0 \right), \quad (122)$$

Индекс yz , как и прежде, означает проекцию того же объекта (но без индекса) на плоскость YOZ . Отсюда видно, что $\vec{\rho}_0 = \vec{\rho}_{yz}$. Вектор $\vec{n}''_{yz} / |\vec{n}''_{yz}|$ — единичный вектор в плоскости YOZ , направленный так же, как \vec{n}''_{yz} . С учетом (122) представим (118) в виде

$$\begin{aligned} A'' &= \frac{\exp(ikn''_x R n'_x + ik_1 R_{yz})}{c} \sqrt{\frac{2\pi i}{k_1 R_{yz}}} \int_C \vec{j}(\vec{\rho}_0) \exp\{-ik_1(\vec{n}''_{yz} / |\vec{n}''_{yz}|, \vec{\rho}_0)\} dl = \\ &= \frac{\exp(ikn''_x R n'_x + ik_1 R_{yz})}{c} \sqrt{\frac{2\pi i}{k_1 R_{yz}}} I'' \end{aligned}, \quad (123)$$

здесь введено обозначение

$$I'' = \int_C \vec{j}(\vec{\rho}_0) \exp\{-ik_1(\vec{n}''_{yz} / |\vec{n}''_{yz}|, \vec{\rho}_0)\} dl. \quad (124)$$

Формула (123) справедлива как для наклонного ($n'_x \neq 0$), так и для прямого ($n'_x = 0$) падения на бесконечную кромку. Последний случай является чисто двумерной задачей, а

наклонное падение на кромку под разными углами сводится, как известно, к двумерным задачам с различными k_1 . Отметим следующую особенность: волны, рассеянные на бесконечной цилиндрической кромке, распространяются только в направлениях дифракционных конусов, в то время как волны, рассеянные на ограниченном фрагменте цилиндрической поверхности, распространяются во всех направлениях. Этот факт отражается и в решении (124), поскольку проекция \vec{n}''_{yz} вектора \vec{n}'' на плоскость YOZ используется таким образом, что во всех случаях учитывается лишь ее направление, а не модуль. Поэтому, не ограничивая общности, для определенности можно считать, что вектор \vec{n}'' расположен на дифракционном конусе. Тогда $n''_x = n'_x$ и, следовательно, $|\vec{n}''_{yz}| = |\vec{n}'_{yz}| = \sqrt{1 - (n'_x)^2}$. При этом $k_1/|\vec{n}''_{yz}| = k$, а направление рассеяния волн будет совпадать с вектором \vec{n}'' .

3.1.4 Фрагмент цилиндрической поверхности

Рассмотрим теперь векторный потенциал конечного по оси x фрагмента цилиндрической поверхности, возбуждаемого волной (111), для которого справедливо соотношение (120). Следуя методу краевых волн [1], будем считать, что токи на фрагменте такие же, как и на соответствующем бесконечном по оси x цилиндре и, следовательно, такие же, как в формуле (123). С учетом соотношений (114) и (121) векторный потенциал конечного фрагмента цилиндрической поверхности запишем в виде

$$\begin{aligned} A^a &\cong \frac{1}{c} \frac{\exp(ikR)}{R} \sqrt{\frac{2\pi i}{k_1 R_{yz}}} \int_a^b \exp\{ikx(n'_x - n_x^a)\} dx \int_C \vec{j}(\vec{\rho}_0) \exp\{-ik(\vec{n}^a, \vec{\rho}_0)\} dl = \\ &= \frac{1}{c} \frac{\exp(ikR)}{R} \frac{\exp\{ikb(n'_x - n_x^a)\} - \exp\{ika(n'_x - n_x^a)\}}{ik(n'_x - n_x^a)} I^a \end{aligned} \quad (125)$$

где

$$I^a = \int_C \vec{j}(\vec{\rho}_0) \exp\{-ik(\vec{n}^a, \vec{\rho}_0)\} dl. \quad (126)$$

Здесь a и b – границы кромки по оси x ; \vec{n}^a – произвольное направление на приемник, в общем случае не расположенное на дифракционном конусе (в отличие от \vec{n}''). Поэтому решения интеграла (126) в общем случае не содержатся в классе значений интеграла (124).

Пусть $a = -b$. Тогда (125) можно записать в следующем виде:

$$A^a = \frac{1}{c} \frac{\exp(ikR)}{R} \frac{2b \sin\left[kb(n'_x - n_x^a)\right]}{kb(n'_x - n_x^a)} I^a. \quad (127)$$

Из выражения (127) видно, что если $n_x^a = n'_x$, т.е. направляющий вектор приемника расположен на дифракционном конусе рассеянного сигнала, то

$$A^a \cong \frac{1}{c} \frac{\exp(ikR)}{R} 2bI^a, \quad (128)$$

а если $n_x^a \neq n'_x$, то

$$A^a \cong \frac{1}{c} \frac{\exp(ikR)}{R} \frac{2I^a}{k(n'_x - n_x^a)}. \quad (129)$$

Поскольку вне узкой окрестности около дифракционных конусов $kb(n'_x - n_x^a)$ – достаточно большое число, из (128) и (129) следует, что рассеянный сигнал в основном определяется компонентами, расположенными на дифракционных конусах. Этот факт широко используется при построении асимптотических решений по методу геометрической теории дифракции (ГТД) [67]. Для нахождения дифракционных коэффициентов сигналов, расположенных на дифракционных конусах, используются решения двумерных задач, а остальными компонентами сигнала пренебрегают ввиду их малости. Так можно поступать лишь тогда, когда в любой точке пространства существует сигнал, находящийся на каком-либо дифракционном конусе. Однако существуют классы рассеивателей, для которых это условие не выполняется, например многогранники или плоские многоугольники. Сигнал, рассеянный от таких тел, в основном расположен вне дифракционных конусов, поэтому для этих тел целесообразно применять другие асимптотические методы, такие, как метод краевых волн или метод эквивалентных контурных токов [1, 67].

Вернемся теперь к решению (125). Вся трудность его получения заключается в интеграле (126). Если известны токи j , то остается лишь подставить их в (126) и проинтегрировать, например, численно. Можно, однако, поступить по-другому, используя уже готовые аналитические или численные двумерные решения, которые, как известно, найти значительно проще, чем трехмерные.

Предположим, что мы располагаем аналитическими выражениями для определения значений \vec{E} и \vec{H} , а с учетом (108) и (110) – и A'' из левой части формулы (123). Не имеет значения, есть ли готовое аналитическое решение (как, например, для идеально проводящего клина) или же аналитическая формула получена эмпирически с помощью аппроксимации или интерполяции численных решений, найденных строгими методами. Тогда с учетом (123) можно легко найти аналитическое выражение и для I'' , не прибегая к непосредственному интегрированию по (124). Более того, если контур C имеет определенные свойства (а именно, является ломаной линией), то можно найти и значение интеграла (126), решения которого в общем случае не содержатся в классе решений интеграла (124).

3.1.5 Образующая в виде ломаной линии

Пусть контур C состоит из N прямолинейных отрезков C_k . Тогда в силу линейности преобразований для A'' и A^a справедливо соотношение

$$A = \sum_{\kappa=1}^N A_{\kappa}. \quad (130)$$

Введем обозначение

$$\vec{\rho}_0 = \vec{\rho}_{\kappa 1} + \vec{\rho}_{\kappa \tau}, \quad (131)$$

где $\vec{\rho}_{\kappa 1}$ – начальное значение $\vec{\rho}_0$ на отрезке C_{κ} ; $\vec{\rho}_{\kappa \tau}$ – вектор, направленный вдоль прямолинейного участка C_{κ} . С учетом (130) и (131) формулы (123) и (124) представим в виде

$$A_{\kappa}'' = \frac{\exp(ikn_x'' R n_x' + ik_1 R_{yz})}{c} \sqrt{\frac{2\pi i}{k_1 R_{yz}}} I_{\kappa}'', \quad (132)$$

$$I_{\kappa}'' = \exp\left\{-ik_1 \left(\frac{\vec{n}_{yz}''}{|\vec{n}_{yz}''|}, \vec{\rho}_{\kappa \tau}\right)\right\} \int_{C_{\kappa}} \vec{j}(\vec{\rho}_0) \exp\left\{-ik_1 \left(\frac{\vec{n}_{yz}''}{|\vec{n}_{yz}''|}, \vec{\rho}_{\kappa \tau}\right)\right\} dl, \quad (133)$$

а формулы (125) и (126) – как

$$A_{\kappa}^a = \frac{1}{c} \frac{\exp(ikR) \exp\{ikb(n_x' - n_x^a)\} - \exp\{ika(n_x' - n_x^a)\}}{R \quad ik(n_x' - n_x^a)} I_{\kappa}^a, \quad (134)$$

$$I_{\kappa}^a = \exp\left\{-ik \left(\frac{\vec{n}^a}{|\vec{n}^a|}, \vec{\rho}_{\kappa 1}\right)\right\} \int_C \vec{j}(\vec{\rho}_0) \exp\left\{-ik \left(\frac{\vec{n}^a}{|\vec{n}^a|}, \vec{\rho}_{\kappa \tau}\right)\right\} dl. \quad (135)$$

Пусть известны аналитические выражения для всех A_{κ}'' , а с учетом (132) – и I_{κ}'' по отдельности. Как уже отмечено выше, это обстоятельство означает, что известно аналитическое выражение интеграла из (133). Распишем скалярные произведения из показателей подынтегральных экспонент в (133):

$$k_1 \left(\frac{\vec{n}_{yz}''}{|\vec{n}_{yz}''|}, \vec{\rho}_{\kappa \tau}\right) = k \sqrt{1 - (n_x')^2} \rho_{\kappa \tau} \cos \varphi_{\kappa}'' \quad (136)$$

и в (135):

$$k_1 \left(\frac{\vec{n}^a}{|\vec{n}^a|}, \vec{\rho}_{\kappa \tau}\right) = k \sqrt{1 - (n_x^a)^2} \rho_{\kappa \tau} \cos \varphi_{\kappa}^a. \quad (137)$$

Здесь φ_{κ}'' и φ_{κ}^a – углы между вектором $\vec{\rho}_{\kappa \tau}$ и векторами \vec{n}_{yz}'' и \vec{n}_{yz}^a соответственно. Если угол φ_{κ}'' фигурирует как параметр в аналитических выражениях для I_{κ}'' из левой части (133), то формальная подстановка в них такого φ_{κ}'' , для которого справедливо равенство

$$\cos \varphi_{\kappa}'' = \frac{(\vec{n}^a, \vec{\rho}_{\kappa\tau})}{\rho_{\kappa\tau} \sqrt{1 - (n'_x)^2}} = \frac{\sqrt{1 - (n_x^a)^2}}{\sqrt{1 - (n'_x)^2}} = \cos \varphi_{\kappa}^a, \quad (138)$$

как видно из сравнения (133) и (135), а также (136) и (137), приведет к тому, что для показателей экспонент в (133) и (135) получим

$$k_1(\vec{n}''_{yz} / |\vec{n}''_{yz}|, \vec{\rho}_{\kappa\tau}) = k(\vec{n}^a, \vec{\rho}_{\kappa\tau}), \quad (139)$$

на всем прямолинейном отрезке C_{κ} контура C . И, следовательно, поскольку токи $\vec{j}(\vec{\rho}_0)$ в (133) и (135) одни и те же,

$$I_{\kappa}'' \exp\{ik_1(\vec{n}''_{yz} / |\vec{n}''_{yz}|, \vec{\rho}_{\kappa 1})\} = I_{\kappa}^a \exp\{ik(\vec{n}^a, \vec{\rho}_{\kappa 1})\}. \quad (140)$$

Зная I_{κ}'' из (132), не прибегая к непосредственным вычислениям по (135), с помощью (140) можно получить аналитическое выражение для I_{κ}^a со всеми вытекающими отсюда преимуществами, например возможностью включения его в более сложные выражения и вычисления производных.

Поскольку вектор \vec{n}^a выбираем произвольно, угол φ_{κ}'' , определяемый соотношением (138), может быть комплексным. Подстановка комплексных параметров в аналитическое выражение для I_{κ}'' из левой части формулы (133) даст аналитическое продолжение функции действительных значений на комплексную плоскость, однако это, как известно, не отражается на справедливости всех полученных соотношений.

Выражения для рассеяния в произвольном направлении на идеально проводящем клине получены в [54, 69] прямым аналитическим интегрированием токов строгого решения по обеим сторонам клина. При этом получен интеграл, похожий на (135); в решении фигурировали комплексные углы, как в (138). Дифференциальные дифракционные коэффициенты для идеально проводящих трехмерных рассеивателей подробно проанализированы в [56], где поставлена также задача для дальнейшего исследования: выяснить, может ли быть распространен "метод прямых подстановок", разработанный для идеально проводящих рассеивателей, на случай других граничных условий и искривленных поверхностей. При использовании формул (108) данной работы этот вопрос автоматически снимается, поскольку в принципе Гюйгенса – Кирхгофа [42], из которого следуют эти формулы, можно использовать любую поверхность S , охватывающую рассеиватель, в том числе и не совпадающую с его границей. При этом не налагается никаких требований и на вид граничных условий. Для применения методики, изложенной в данном разделе, необходимо лишь, чтобы поверхность S представляла собой совокупность фрагментов цилиндрических контуров, направляющие которых представляют собой комбинацию из замкнутых или разомкнутых ломаных линий. Избежав повторного интегрирования по прямолинейным участкам направляющих, можно увеличить быстродействие вычислительных алгоритмов. Для случая дифрак-

ции на полуплоскости, когда контур C представляет собой прямую линию, ситуация предельно упрощается, поскольку получаются всего два угла φ_k^a , равные с точностью до π . Из двумерного решения для полуплоскости с любыми граничными условиями решение трехмерной задачи может быть получено путем простой подстановки соответствующего φ_k'' .

3.2 Решение трехмерных задач при помощи двумерных решений

3.2.1 Решение задачи дифракции на плоском рассеивателе в приближении физической оптики. Свойство контурного интеграла

В данном разделе проведено сравнение соотношений для трехмерного (3D) случая дифракции плоской волны на плоском рассеивателе, строгих в приближении физической оптики (ФО), с соответствующими двумерными (2D) дифракционными коэффициентами. Показано, что стремление ФО дифракционных коэффициентов (ФОДК) к бесконечности в направлении дифракционных конусов компенсируется стремлением к нулю интеграла по замкнутому «теневого контуру» в тех же направлениях.

В последнее время активно развиваются дифракционные методы, связанные с изучением рассеяния электромагнитных волн сложными объектами. К этим методам относятся: метод краевых волн в физической теории дифракции (ФТД) (новая формулировка) ([69] и [70]), метод эквивалентных контурных токов (МЭКТ) [67], улучшенный МЭКТ [54] и запись рассеянного поля при помощи дифференциальных дифракционных коэффициентов (ДДК) [53, 56]. Все эти методы основаны на концепции ФТД [1]. Одна из проблем МЭКТ и ДДК заключается в том, что дифракционные коэффициенты компонентов токов ФО становятся бесконечными в наиболее важных направлениях, таких, как дифракционные конуса, и в особенности – в направлениях «прямо вперед» и «зеркального отражения». Есть несколько работ, в которых предпринята попытка решить эту проблему (см., например, [55]).

В данном разделе показано, что стремление к нулю дифракционных коэффициентов компоненты токов ФО является очень важным неотъемлемым свойством данной задачи. Более того, попытки обойти это стремление к нулю может привести к неверным результатам. Показано, что стремление к бесконечности отдельных «квази - двумерных» дифракционных коэффициентов компонентов физической оптики компенсируется стремлением к нулю интеграла по замкнутому контуру для случая трехмерного рассеивателя [142].

Строгие трехмерные формулы

Рассмотрим идеально проводящий плоский (с вектором нормали \vec{n}) рассеиватель, возбужденный плоской волной (временная зависимость $\exp\{ik(\vec{n}', \vec{r})\}$):

$$\vec{H}^{(i)} = \vec{H}_0 \exp\{ik(\vec{n}', \vec{R})\} = (H_{0x}, H_{0y}, H_{0z}) \exp\{ik(\vec{n}', \vec{R})\}, \quad (141)$$

где $\vec{H}^{(i)}$ и \vec{H}_0 – зависящий от расстояния и независящий от расстояния вектор магнитного поля, \vec{n}' – направляющий вектор падающей волны, $\vec{R} = \vec{n}''R$ – радиус-вектор точки наблюдения, \vec{n}'' – направляющий вектор точки наблюдения, i – мнимая единица, $k=2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны. В приближении ФО вектор-потенциал определяется аналогично (108) и равен

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\exp\{ikr\}}{r} [\vec{n} \times \vec{H}^{(i)}] ds, \quad (142)$$

где $r = |\vec{n}''R - \vec{\rho}|$ – расстояние между точкой на рассеивателе и точкой наблюдения, $\vec{\rho}$ – радиус-вектор точки на поверхности рассеивателя, R – расстояние от центра координат до точки наблюдения, S – площадь рассеивателя. Без ограничения общности будем считать, что плоский рассеиватель расположен в плоскости XOY . Кроме того, пусть выполняется условие дальней зоны $r \cong R - (\vec{n}'', \vec{\rho})$, и тогда

$$\vec{A} \cong \frac{1}{2\pi} \frac{\exp\{ikr\}}{R} (-H_{0y}, H_{0x}, 0) I, \quad I = \iint_S \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho})\} ds, \quad (143)$$

где $\vec{\Delta} = (\vec{n}' - \vec{n}'') - \vec{n}[(\vec{n}' - \vec{n}''), \vec{n}]$ – проекция на поверхность рассеивателя (в нашем случае – на плоскость XOY) разности $(\vec{n}' - \vec{n}'')$ между направляющими векторами падающей волны и точки наблюдения.

Применяя теорему Стокса, можно получить (см. П1, формула (223)):

$$I = \iint_S \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho})\} ds = \frac{i}{k|\vec{\Delta}|^2} \oint_C (\vec{\Delta}, \vec{n}^i) \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho})\} dt, \quad (144)$$

где \vec{n}^i – единичная внутренняя нормаль к контуру C , окружающему рассеиватель, $\vec{\rho}'$ – единичный вектор, касательный к контуру, t – координата, отсчитываемая вдоль контура. Обозначим стоящую в показателе экспоненты фазу точки интегрирования:

$$\Phi = k(\vec{\Delta}, \vec{\rho}). \quad (145)$$

Если контур представляет собой многоугольник с N вершинами, тогда:

$$I_j = \frac{i}{k|\vec{\Delta}|^2} \int_0^{a_j} (\vec{\Delta}, \vec{n}^j) \exp\{ik(\vec{\Delta}, t\vec{\rho}'_j)\} dt = \frac{ia_j(\vec{\Delta}, \vec{n}^j) \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}'_j)\} - \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}'_{j-1})\}}{k|\vec{\Delta}|^2 ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}'_j - \vec{\rho}'_{j-1})},$$

или $I = \sum_{j=1}^N I_j$, $I_j = \frac{ia_j(\vec{\Delta}, \vec{n}^j) \sin[(\Phi_j - \Phi_{j-1})/2]}{k|\vec{\Delta}|^2 (\Phi_j - \Phi_{j-1})/2} \exp\{i(\Phi_j + \Phi_{j-1})/2\}, \quad (146)$

где $\Phi_j = k(\vec{\Delta}, \vec{\rho}'_j)$ – фаза сигнала j -ой вершины с направляющим вектором $\vec{\rho}'_j$, a_j – длина j -ой стороны многоугольника (расположенной между $j-1$ ой и j -ой вершинами).

Если точка наблюдения расположена на дифракционном конусе, когда $(\vec{\Delta}, \vec{\rho}') = 0$, тогда:

$$\vec{\Delta} \|\vec{n}^j, |\vec{\Delta}| = |(\vec{\Delta}, \vec{n}^i), (\vec{\Delta}, \vec{n}^i) = (\vec{n}', \vec{n}^i) - (\vec{n}'', \vec{n}^i) = \sin \beta (-\cos \varphi_0 - \cos \varphi), \quad (147)$$

где $(\varphi_0 + \pi)$ и φ - углы между проекциями направляющих векторов \vec{n}' и \vec{n}'' на плоскость, перпендикулярную $\vec{\rho}'$, и внутренней нормалью \vec{n}^j к контуру C , β - угол между \vec{n}' (или \vec{n}'') и $\vec{\rho}'$ (эти вектора составляют одинаковый угол с кромкой, поскольку на дифракционном конусе не только \vec{n}' , но и \vec{n}'' направлен вдоль образующей конуса, которая задается вектором \vec{n}'). И, наконец, получаем

$$I_j = \frac{ia_j \exp\{i\Phi_j\}}{k(\vec{\Delta}, \vec{n}^j)} = \frac{-ia_j \exp\{i\Phi_j\}}{k \sin \beta (\cos \varphi_0 + \cos \varphi)}, \quad (148)$$

при этом $\Phi_{j-1} = \Phi_j$.

Теперь, выделяя 3D ФОДК из уравнения вектора - потенциала A_j для отдельной j -ой стороны плоского многоугольного рассеивателя, нетрудно показать, что строгое выражение для 3D случая точно совпадает с приближенным 2D ФОДК [1] для волны с наклонным падением. Углы φ и φ_0 (как и в [1]) отсчитываются от внутренней нормали к контуру пластины, β_1 - угол между направлениями \vec{n}' и \vec{n}'' и плоскостью, перпендикулярной кромке.

Сравнение с двумерным случаем

2D ФОДК [1] справедливы только вдали от границы «свет-тень». Вблизи этих границ правильные 2D ФОДК будут включать в себя интегралы Френеля (см., например, [55]). Но строгие 2D ФОДК справедливы лишь для полуплоскости, в то время как наши 3D ФОДК справедливы для рассеивателей конечного размера, которые (и только они) представляют практический интерес.

Для случая $|\vec{\Delta}| = 0$ (направления «прямо вперед» и «зеркальное отражение») ФОДК становятся сингулярными. Это обстоятельство создает проблему в практических расчетах. Для того, чтобы устранить эту сингулярность, в [55] построено «равномерное асимптотическое решение» с использованием интеграла Френеля. Но из материала данного раздела следует, что строгий ФОДК обязан иметь сингулярность, иначе замкнутый интеграл по контуру C будет равен нулю, как было показано в работе [142]. А точный интеграл по контуру C равен:

$$I = \frac{i}{k|\vec{\Delta}|^2} \oint_C (\vec{\Delta}, \vec{n}^i) \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho})\} dt = \iint_S \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho})\} ds \Big|_{|\vec{\Delta}|=0} = S, \quad (149)$$

что можно строго получить как из контурного, так и из поверхностного интеграла, и представляет собой строгий результат.

Дифракционные коэффициенты полного тока

Результаты, относящиеся к ФОДК, можно распространить на дифракционные коэффициенты полного тока (ПТДК). Асимптотические 2D ПТДК [1], так же, как ФОДК, справедливы лишь вдали от границ «свет-тень». Сингулярности 2D ПТДК - такие же, как и у 2D ФОДК, и как только что было показано – такие же, как и у 3D ФОДК. В направлениях границ «свет-тень» ПТДК и ФОДК должны быть равны. Поэтому, если применить 2D ПТДК в трехмерном случае, то правильный результат должен получиться не только вдали от границ «свет-тень», но во всех направлениях.

Между прочим, из всего вышесказанного следует, что исправления [55] к более ранней работе [54], устраняющие сингулярности 2D ПТДК, не имеют смысла применительно к трехмерному случаю, поскольку его эквивалентные краевые токи из [54], называемые в данной работе ПТДК, справедливы в трехмерном случае для всех направлений наблюдения, включая окрестность границ «свет-тень».

Более подробно свойства интегралов I рассмотрены в (Приложении 1).

ГЛАВА 4. ПРИМЕНЕНИЕ РЕШЕНИЙ МЕТОДА ОБОБЩЕННОГО ЭЙКОНАЛА В ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ НА ПЛОСКОМ УГЛОВОМ СЕКТОРЕ

Задача дифракции электромагнитной волны на плоском угловом секторе давно привлекала интересы исследователей. Несмотря на это, аналитическое решение задачи дифракции на четверть – плоскости появилось лишь несколько лет назад [16].

В данном разделе для задачи дифракции электромагнитной волны на плоском угловом секторе показана возможность уточнения аналитического решения при помощи модифицированного эвристического метода эквивалентных контурных токов (МЭКТ). Модификация МЭКТ заключается в том, что вместо интегрирования по элементарной полоске при получении решения использовалось готовое двумерное решение на виртуальной условной кромке, расположенной под углом к реальной кромке. Уточнение решение МЭКТ проводилось при помощи эвристического учета влияния конца кромки на рассеянный сигнал. Приведены результаты расчета, которые показали хорошее совпадение с известными результатами.

Важность проблемы объясняется развитием в последнее время технологии построения невидимых для радаров объектов, выполненных по технологии «Стелс». Эта технология предусматривает как разработку поглощающих покрытий, так и придание объектам специальной формы, образованной многогранниками и многоугольниками. Также результаты работы могут быть использованы при расчете дифракции на открытом конце волновода, при построении теории распространения радиоволн в городе, при расчете рассеяния на поверхности кристаллического материала и в других задачах.

Актуальность вопроса подтверждается тем, что в 2003 г. комиссия В URSI объявила, а в 2004 г. присудила премию за аналитическое решение задачи рассеяния на четверть-плоскости. Решение было получено в виде рядов спецфункций, для суммирования которых применялась специальная техника [16]. Поскольку появилась возможность проверки, наличие такого решения стимулирует работы по разработке эвристических формул для расчета подобных объектов. Применяемая методика относится к эвристическим подходам в решении задач дифракции (подробнее см. во введении к данной диссертации).

Постановка задачи

Геометрия задачи из [16] приведена на рис.18.

На рис.19 приведены результаты расчета коэффициентов передачи по поляризациям D , которые определяются выражениями [16]:

$$\begin{pmatrix} E_g^\infty \\ E_\varphi^\infty \end{pmatrix} = \frac{\exp(ikR)}{kR} \begin{pmatrix} D_{gg} & D_{g\varphi} \\ D_{\varphi g} & D_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_g^{inc} \\ E_\varphi^{inc} \end{pmatrix}. \quad (150)$$

Здесь E - компоненты векторов падающего и рассеянного полей. Нижние индексы соответствуют обозначениям ортов соответствующих углов, верхние обозначают падающее (inc) поле и рассеянное (∞) в точке наблюдения на большом расстоянии R от рассеивателя.

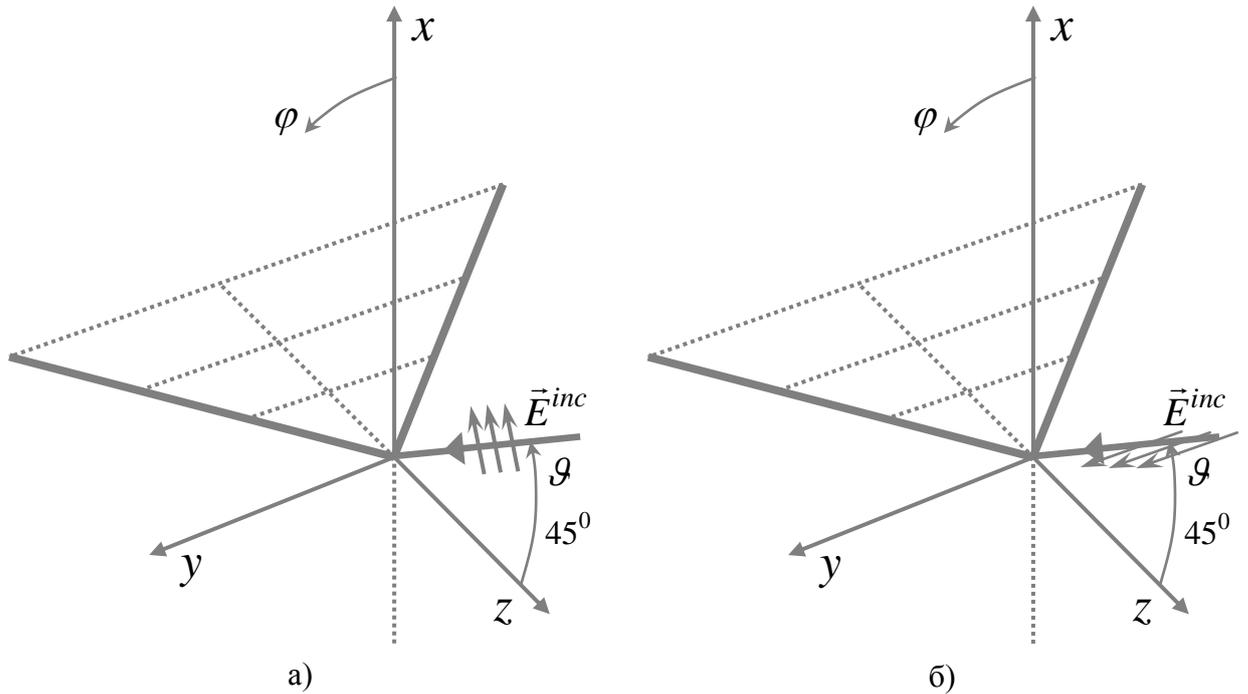


Рис. 18

Геометрия задачи из [16].

На рис. 18 показана геометрия, взятая из работы [16], в которой приводится строгое решение задачи дифракции электромагнитной волны на плоском угловом секторе.

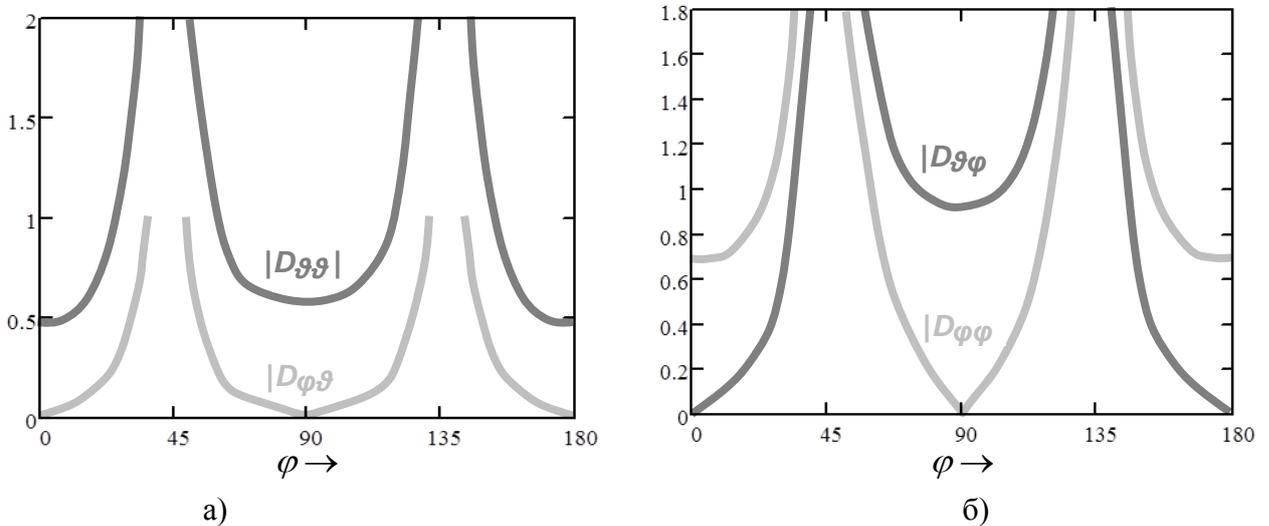


Рис. 19

Результаты расчета коэффициентов D из [16].

На рис. 19 показаны результаты строгого расчета задачи дифракции электромагнитной волны на плоском угловом секторе, взятые из работы [16]. Коэффициенты D описывают связь между поляризациями падающей и рассеянной волны.

Наша задача – получить те же зависимости эвристическим способом. Эвристическое решение задачи дифракции на плоском угловом секторе построим в несколько этапов.

1. В приближении дальней зоны получим строгое физоптическое решение для рассеяния на плоской многоугольной пластине.

2. В полученном физоптическом решении разделим вклад скалярного интеграла по поверхности и векторную составляющую, постоянную на всей поверхности пластины.
3. В скалярном интеграле по поверхности разделим интегралы вдоль кромки и по элементарной полоске, расположенной перпендикулярно виртуальной «условной кромке».
4. Для случая наклонного падения на двумерную кромку найдем связь между векторными дифракционными коэффициентами строгого и физоптического решения.
5. В физоптическом решении заменим векторный дифракционный вклад физоптики на векторный дифракционный вклад строгого решения.

4.1 Решение в приближении физической оптики

Для вычисления рассеянного поля будем, как и ранее (см. п. 3.1.1), пользоваться формулами, хорошо известными из учебников электродинамики (см., например, [42]). В соответствии с электродинамическим принципом Гюйгенса поле в точке наблюдения, расположенной вне поверхности S , окружающей источники, может быть выражено как результат сложения волн вторичных источников, расположенных на поверхности S . Внутри поверхности S поле определяется первичными источниками, а результат сложения там вторичных источников равен нулю. Это обстоятельство иногда называют «отсутствием обратной волны» [1, 51, 52]. Постановка задачи соответствует формулам (107) – (110).

Рассмотрим падение плоской электромагнитной волны на идеально проводящий рассеиватель, имеющий форму плоского многоугольника. Векторы \vec{E} и \vec{H} рассеянного поля определяются выражениями (107) [1, 42].

Входящие в (107) электрический и магнитный векторные потенциалы \vec{A}^e и \vec{A}^m (108) зависят от поверхностных токов \vec{j}^e и \vec{j}^m (109), $k=2\pi/\lambda$ - волновое число, i – мнимая единица, r – расстояние от точки на рассеивателе до точки наблюдения, R – расстояние от центра координат до точки наблюдения, $R\vec{n}''$ и $\vec{\rho}$ – радиус-векторы соответственно точки наблюдения и точки, лежащей на рассеивателе, $r = |R\vec{n}'' - \vec{\rho}|$.

Формулы (107), (108) являются не единственной формой записи решения для рассеянного поля. Мы применяем эту форму, поскольку после публикации в хорошо зарекомендовавших себя книгах [1, 42] (вышедших сначала на русском языке) она давно и многократно проверена. В других книгах [3, 57] (вышедших за рубежом, но затем переведенных на русский язык), также хорошо себя зарекомендовавших, используется другая форма записи решения, которая получается непосредственно из формулы Грина. В книге [52] (вышедшей сначала на английском, а затем на русском языках), представляющей собой современный вариант [1], вместо прежней формы решения применяется другая, подобная используемой в [3, 57], что, впрочем, не отражается на конечных результатах.

Если первичные источники расположены вне поверхности S , а внутри поверхности S находятся не источники, а рассеивающее тело, то задачу рассеяния можно свести к появлению дополнительных источников на поверхности S . Добавив поле дополнительных источников к первичному полю, можно получить решение задачи дифракции. В частности, для дифракции на идеально проводящей пластине (т.е. с граничными условиями на по-

верхности $[\vec{n} \times \vec{E}] = 0$) можно, «стягивая» поверхность S к поверхности пластины, получить выражение для поверхностных токов в приближении физической оптики [42]:

$$\vec{i}^e = \frac{c}{2\pi} [\vec{n} \times \vec{H}^{inc}], \quad (151)$$

здесь нормаль к поверхности \vec{n} направлена от теневой стороны пластины к освещенной. При расположении точки наблюдения вдали от рассеивателя конечных размеров выполняется условие дальней зоны (120).

Если падающая волна – не плоская, то это условие зависит и от положения источника. Условие дальней зоны можно объяснить при помощи угла зрения, под которым рассеиватель виден из точки наблюдения. При удалении точки наблюдения от реального рассеивателя конечных размеров (т.е. когда $kr \rightarrow \infty$) этот угол зрения уменьшается до нуля. А при удалении от модельного рассеивателя (полуплоскость, клин, четверть - плоскость) этот угол зрения никогда до нуля не уменьшается. Решения модельных задач также отличаются от решения реальных задач. В частности, сигнал, рассеянный модельной структурой, на границе тени принимает постоянную величину независимо от величины фактора $(kr)^{-1}$, в то время как для реальной структуры поле рассеянного сигнала при удалении от рассеивателя уменьшается пропорционально фактору $(kr)^{-1}$ во всей области наблюдения, в том числе и в окрестности границы тени. Если искать решение в виде контурного интеграла, то в направлениях границы тени, а именно – «прямо вперед» и зеркального отражения вклад каждого элемента кромки будет сингулярен, хотя полный интеграл по замкнутому контуру даст правильное решение, пропорциональное площади рассеивателя [142].

В дальней зоне формулы (107) и (108) существенно упрощаются. При выполнении соотношения (120) потенциалы \vec{A} зависят от r по закону $\exp(ikR)/R$, а выражения для полей (107) приходят к виду (110) [42].

Формулы (108) можно с учетом (120) и (141) записать по аналогии с (143). Для идеально проводящей пластины векторный магнитный потенциал равен нулю $\vec{A}^m = 0$, $A_\varphi^m = 0$, $A_g^m = 0$, а электрический потенциал \vec{A}^e равен:

$$\vec{A}^e = \frac{1}{2\pi} \frac{\exp(ikR)}{R} [\vec{n} \times \vec{H}^0] I, \quad I = \iint_S \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho})\} ds. \quad (152)$$

Здесь токи взяты из выражения (151), нормаль \vec{n} направлена от теневой стороны рассеивающей поверхности к освещенной. Вспомогательный вектор $\vec{\Delta}$ определяется так же, как и в (143).

Важной особенностью формул (152) является то, что интеграл I по поверхности рассеивателя является отдельным множителем в выражении для потенциала. Эта особенность характерна для решений в приближении физической оптики, которые в большей степени зависят от площади рассеивателя и в меньшей степени зависят от его формы. Решения в приближении ГТД и МКВ в большей степени зависят от формы рассеивателя. Как будет показано позже, решения ГТД и МКВ зависят от Т- поляризации вектора, падающего на кромку (т.е. от взаимной ориентации вектора поляризации падающей волны и вектора,

касательного к кромке). Физоптические решения зависят от взаимной ориентации вектора поляризации падающей волны и вектора нормали к рассеивателю. В случае нормального падения на кромку вектор, касательный к кромке и вектор нормали к рассеивателю перпендикулярны, поэтому можно установить связь между поляризациями строгого и физоптического решения. В случае наклонного падения разделение поляризаций в случае строгого и физоптического решения происходит по-разному. Это нужно учитывать при построении эвристических решений.

Дифракция на многоугольной пластине в приближении физоптики.

При оценке пригодности электродинамической модели для инженерного расчета какого – либо объекта простота формулировки принципа построения решения и простота применяемых формул играет существенную роль. В том числе и по этой причине, несмотря на существенное продвижение теории дифракции за последние сто лет, приближение физической оптики остается очень популярным при решении самых разных задач.

Приближение физоптики в теории дифракции строится на основе поверхностных токов геометрической оптики. Сначала из невозмущенной волны геометрической оптики «вырезается» часть, затененная рассеивателем и «поворачивается» в сторону отраженной волны. Иногда отсутствие «вырезанной» части в первичной волне называется «теньвым столбиком» [1, 51, 52]. После построения геометрооптической картины решения применяют приближение физической оптики.

4.1.1 Контурный интеграл с навязанным условием дальней зоны

В приближении физической оптики решение дифракционной задачи представляется в виде интеграла от полей или функций полей, заданных на поверхности рассеивателя. При вычислении интеграла по поверхности S поля на поверхности рассеивателя \vec{E}^0 и \vec{H}^0 в формулах (109) выбираются как в падающем поле геометрической оптики $\vec{E}^0 = \vec{E}^{inc}$ и $\vec{H}^0 = \vec{H}^{inc}$. При необходимости учитывается и отраженное поле. Поскольку невозмущенная волна не может отражаться от свободного пространства, физоптическое решение также не должно иметь «обратной волны». Проверка физоптических интегралов по поверхности рассеивателя на отсутствие «обратных волн» является хорошим тестом на корректность решения.

На плоском угловом секторе условие дальней зоны не выполняется, однако мы «навязываем» это условие (см. Приложение 2, текст между формулами (257) и (258)).

При выполнении условия дальней зоны (119) и равенства (120) решение задачи рассеяния определяется формулами (110) и (152). Основным интерес в этих выражениях представляет интеграл I . Характер рассеянного сигнала определяется пространственной зависимостью от геометрии рассеивателя амплитуды и фазы этого интеграла.

В соответствии с теоремой Стокса можно свести интеграл по площади S к интегралу по контуру C , окружающему эту площадь (144). Пусть рассеиватель представляет собой мно-

гоугольник. Тогда для j -ой стороны длиной a_j , идущей от вершины $j-1$ к вершине j , получим выражение (146). На дифракционном конусе $(\vec{\Delta}, \vec{\rho}') = 0$, и получаем (см. также (148))

$$I_j = \frac{a_j \exp\{i\Phi_j\}}{ik \cos \beta_1 (\cos \varphi + \cos \varphi_0)}. \quad (153)$$

4.1.2 Вклады кромок и вершин

В формулах (146) I_j представляет собой вклад j -ой стороны. В этом выражении фигурируют две фазы прилегающих к стороне вершин. Сумму из (146) можно преобразовать таким образом (см. также Приложение 1):

$$I = \sum_{j=1}^N I_j = \sum_{j=1}^N I^j, \text{ где } I^j = \frac{\exp\{i\Phi_j\}}{k^2 |\vec{\Delta}|^2} \left[\frac{(\vec{\Delta}, \vec{n}^j)}{(\vec{\Delta}, \vec{\rho}'_j)} - \frac{(\vec{\Delta}, \vec{n}^{j+1})}{(\vec{\Delta}, \vec{\rho}'_{j+1})} \right]. \quad (154)$$

Слагаемые I^j иногда называют «вершинными волнами», поскольку каждому слагаемому соответствует фаза одной из вершин. Однако на самом деле вклад вершин в физоптическом интеграле никак не учитывается, поскольку контурный интеграл I характеризует лишь вклад сторон. Вклад элемента стороны никак не зависит от того, на каком расстоянии этот элемент находится от вершины. Представляется более правильным называть вершинной волной ту составляющую решения, которая не зависит от вклада стороны. Влияние вершины должно выражаться в появлении дополнительного слагаемого или множителя.

Выделение дифракционных коэффициентов из физоптики.

Покажем, что в полученном трехмерном решении для поля в приближении дальней зоны, рассеянного стороной многоугольника, фигурируют те же дифракционные коэффициенты, что и в классическом двумерном решении.

Рассмотрим выражение для поля (110), подставив в него потенциал (152) на стороне (153), соответствующей условию дифракционного конуса, в случае положения плоскости падения и наблюдения перпендикулярно кромке (т.е. при $\beta=0$):

$$\begin{aligned} E_{\varphi}^e &= ikA_{\varphi}^e = \frac{ik}{2\pi} \frac{\exp(ikR)}{R} I_j \left[\vec{n} \times \vec{H}^0 \right]_{\varphi}^e = \frac{1}{2\pi} \frac{a_j \exp(ikR)}{R} \frac{\left[\vec{n} \times \vec{H}^0 \right]_{\varphi}^e}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{a_j \exp(ikR)}{R} \begin{pmatrix} f^0 \\ g^0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (155)$$

Это выражение соответствует случаю трехмерной дифракции на стороне ограниченной длины a_j .

Выражение (155) допускает довольно простую физическую интерпретацию. Рассеянное поле j -ой стороны представляет собой произведение множителя, описывающего сфериче-

скую расходимость поля, на дифракционный коэффициент f^0 или g^0 в приближении физической оптики.

Для перехода к двумерному случаю следует провести интегрирование по всей стороне от $-\infty$ до ∞ . С учетом выражения для функции Ханкеля и его асимптотики:

$$\frac{a_j \exp(ikR)}{R} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{ik\sqrt{r_1^2 + z^2}\}}{\sqrt{r_1^2 + z^2}} dz = i\pi H_0^{(1)}(kr_1) \cong \sqrt{2\pi i} \frac{\exp(ikr_1)}{\sqrt{kr_1}}. \quad (156)$$

Здесь r_1 – это расстояние от кромки до точки наблюдения в плоскости, перпендикулярной кромке. Переменная r_1 – аналог r из двумерного пространства, рассматриваемого в [1]. В координатах, использованных в [1] (см. комментарий к формуле (153)), векторные произведения будут для ТН- и ТЕ- поляризации (когда Н- или Е- вектор перпендикулярен кромке) соответственно равны $\sin\varphi_0$ и $-\sin\varphi$. В результате получаем

$$\begin{pmatrix} E_\varphi \\ E_g \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2\pi i} \exp(ikr_1)}{2\pi \sqrt{kr_1}} \frac{[\vec{n} \times \vec{H}^0]_\varphi}{\cos\varphi + \cos\varphi_0} = \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \frac{\exp(ikr_1)}{\sqrt{kr_1}} \begin{pmatrix} f^0 \\ g^0 \end{pmatrix}. \quad (157)$$

Здесь f^0 и g^0 – дифракционные коэффициенты в приближении физоптики, введенные в [1]. Полученные выражения (157) в точности совпадают с результатом из [1]. Это означает, что физоптические дифракционные коэффициенты из двумерной задачи остаются такими же и в трехмерном случае. В дальнейшем мы будем использовать этот результат при построении эвристического решения трехмерной задачи.

Отметим, что при получении результата (157) было принято, что вектор падающего поля ориентирован относительно точки наблюдения одинаково для всех точек плоскости рассеивателя. Это верно не всегда, а лишь для двумерной задачи. В приближении дальней зоны это верно и для трехмерной задачи.

Сравним между собой выражения для физоптических (f^0 , g^0) и строгих (f и g) дифракционных коэффициентов из [1].

$$f = \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi_0}{2}}{\cos \varphi + \cos \varphi_0}, \quad g = \frac{-2 \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi_0}{2}}{\cos \varphi + \cos \varphi_0}, \quad f^0 = \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi + \cos \varphi_0}, \quad g^0 = \frac{-\sin \varphi}{\cos \varphi + \cos \varphi_0}. \quad (158)$$

Заметим, что справедливы выражения

$$\begin{aligned} f(\varphi, \varphi_0) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} - \frac{1}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right), \quad g(\varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} + \frac{1}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right), \\ f^0(\varphi, \varphi_0) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} - \frac{\sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2}}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right), \quad g^0(\varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} + \frac{\sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2}}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right). \end{aligned} \quad (159)$$

Выражения (159) согласуются с формулой из [3], где показано, что физоптическое решение отличается от строгого лишь множителем, представляющим косинус половины разности углов между направлениями падающей и рассеянной волны. С учетом выбора в (159) способа отсчета угла φ_0 падающей волны (этот способ отсчета выбран, как в [1]) получаем множители $\sin[(\varphi - \varphi_0)/2]$ и $\sin[(\varphi + \varphi_0)/2]$. Помимо прочего, эти множители харак-

теризуют отсутствие так называемых «обратных волн», т.е. волн «прямо назад» в приближении физоптики. О важности проверки этого свойства физоптики говорилось раньше.

Сравнивая выражения (153) для скалярного интеграла I_j по j -ой стороне на дифракционном конусе и выражения для физоптических дифракционных коэффициентов f^0 и g^0 (158) в двумерном случае (т.е. при $\beta=0$), видим, что они имеют одинаковый знаменатель. С учетом того, что числители физоптических дифракционных коэффициентов $\sin\varphi_0$ и $-\sin\varphi$ следуют из векторных произведений, входящих в выражение для \vec{A}^e (152), и только эти числители характеризуют поляризацию падающей и отраженной волны, делаем вывод, что знаменатель дифракционных коэффициентов с поляризацией не связан. В выражении для скалярного интеграла I_j знаменатели определяются лишь положением рассеивающей кромки относительно направляющих векторов падающего и рассеянного поля \vec{n}' и \vec{n}'' , а не поляризацией. Будем считать, что и у дифракционных коэффициентов строгого решения f и g знаменатель не связан с поляризацией, хотя их поляризация определяется не при помощи векторных произведений из (152), как это происходит в выражениях для дифракционных коэффициентов f^0 и g^0 .

Все эти рассуждения нужны нам для того, чтобы осуществить разделение векторной и скалярной составляющей в выражениях для дифракционных коэффициентов.

Элементарные полосы интегрирования.

В приближении физоптики интеграл (144) по многоугольной пластине берется строго и превращается в аналитические выражения. При помощи преобразования (155) в (157) мы показали, что физоптические дифракционные коэффициенты, фигурирующие в результате интегрирования по кромке, в точности совпадают с теми, которые получаются в модельной двумерной задаче [1] (158), (159) или [3], когда физоптические интегралы получены при помощи интегрирования по плоской полубесконечной пластине.

Интегрирование (144) ведется в двух направлениях: вдоль кромки и в поперечном направлении. Интеграл вдоль бесконечной кромки дает функцию Ханкеля. Интеграл в поперечном направлении от кромки до бесконечности по бесконечно тонкой полоске («элементарной полоске интегрирования») представляет собой нетривиальную математическую задачу и рассматривается во многих работах (см., например, [1, 51 – 56] и др.). Речь здесь, конечно, идет уже не о физоптике, а об интеграле по полоске от строгого решения для клина и рассеивателей более сложной формы. Важность этого интеграла объясняется тем, что именно на его основе строятся эвристические решения задач дифракции. Интеграл по элементарной полоске интегрирования в двумерной задаче приписывается элементу кромки и интерпретируется как диаграмма направленности (ДН) «дифференциального дифракционного коэффициента», «элементарной краевой волны» или «элементарного краевого тока». Затем, проведя интегрирование (обычно – численное) по кромке трехмерного рассеивателя, можно получить эвристическое решение трехмерной задачи.

Ориентация полосок интегрирования относительно кромки может меняться в зависимости от выбранного подхода. Иногда считают, что элементарная полоска интегрирования направлена перпендикулярно кромке (в методе дифференциальных дифракционных коэффициентов [54 – 56]), иногда – что вдоль дифракционного конуса падающей волны (в авторском варианте метода краевых волн [51 – 52]).

Физоптика отличается от строгого решения множителями [3] (см. комментарии после формул (158) и (159)). Поэтому для модельной задачи дифракции на полуплоскости ДН элементарной краевой волны выражается при помощи одного и того же интеграла Френеля как для строгого решения, так и для физоптики. Интеграл Френеля на границе тени принимает значение $\frac{1}{2}$. Напротив, в приближении дальней зоны ДН элементарной краевой волны на границе тени сингулярна.

Интегрирование строгого решения для клина отдельно по каждой стороне было проделано в работе [54] и также дало сингулярность в направлении тени. Для двумерной задачи эта сингулярность иногда кажется недостатком, и автор [54] пытается ее исправить, заменяя на интеграл Френеля [55], но в трехмерной задаче от сингулярностей избавляться не нужно [142, 145]. При этих способах выбора полоски интегрирования ее положение не зависит от положения точки наблюдения. Предполагается, что падающее поле – первично, а рассеянное – вторично. На самом деле вследствие принципа взаимности положения точки источника и точки наблюдения равноценны и в аналитические формулы должны входить симметрично. Это, кстати, еще один способ проверки решения.

В данном разделе мы предлагаем другой способ использования двумерных решений в трехмерных задачах. Вместо того, чтобы считать падающую волну первичной, а затем интегрировать ее в точке наблюдения, поступим так, как делают математики при исследовании рассеянного сигнала в приближения физоптики [71]. В этой работе решение для рассеянного поля строится в зависимости от поведения функции фазы (145) на поверхности рассеивателя. Функция фазы, входящая в подынтегральное выражение интеграла I (144), зависит сразу от двух направлений – падающей волны и рассеянной. Правда, в [71] рассматриваются рассеиватели относительно большого размера, для которых не выполняется условие дальней зоны (120). При выполнении условия дальней зоны в [71] рекомендуется применять численные методы интегрирования.

Тем не менее, использование в качестве элементарной полоски интегрирования полоски, совпадающие с вектором градиента функции фазы (145) (в нашем случае это вектор $\vec{\Delta}$), оказывается весьма эффективным. Такой подход позволит вместо интегрирования поверхностных токов по рассеивателю использовать готовую ДН элементарной краевой волны из двумерной задачи.

Особенности строгого и физоптического двумерных решений.

При наклонном падении плоской электромагнитной волны на цилиндрическую кромку с образующей бесконечной длины (например, вдоль координаты z) поле (как физоптическое, так и строгое) рассеивается только одним способом – вдоль дифракционных конусов. Это свойство определяется уравнениями Максвелла и не зависит от формы направляющей цилиндра. Других решений данная структура не содержит. В то же время, если выделить фрагмент такой структуры ограниченной по оси z длины, то рассеянное этим фрагментом поле будет распространяться во всех направлениях. Тем не менее, готовую ДН элементарной краевой волны двумерного решения можно будет использовать лишь в направлении дифракционного конуса способом, подобным тому, как мы превратили трехмерное решение (155) в двумерное решение (157). При этом потребуются совершить те же шаги, но в обратном порядке. В других направлениях такая процедура даст неверный результат. По-видимому, именно невозможность непосредственного использования дву-

мерных решений способом, рекомендованным геометрической теорией дифракции, привела к тому, что при расчете объектов типа «Стелс» стали применять [53] метод краевых волн [1].

Для получения ДН рассеянного сигнала в направлении вне дифракционного конуса можно провести интегрирование по элементарной краевой волне, но, как уже было сказано раньше, это сопряжено с математическими сложностями. Нужно знать токи на всей полоске интегрирования, в том числе вблизи от кромки. Поэтому знания лишь ДН элементарной краевой волны в данном случае будет явно недостаточно. Способ использования двумерных решений в трехмерных задачах с применением «комплексных углов» был рассмотрен в разделе 3.1, но он относится к случаю, когда аналитическое двумерное решение уже получено.

В данном разделе предлагается способ использования решения двумерной задачи без интегрирования по элементарной краевой волне, когда известна лишь ДН двумерного решения, но не токи на всей поверхности рассеивателя.

«Условная кромка».

Рассмотрим дифракцию на кромке для случая, когда направляющие вектора падающей и рассеянной волны \vec{n}' и \vec{n}'' не находятся на дифракционном конусе. При этом вектор $\vec{\Delta}$ направлен не под прямым углом к кромке. Введем понятие «условной кромки». Это перпендикулярное вектору $\vec{\Delta}$ направление в пространстве, по отношению к которому вектора \vec{n}' и \vec{n}'' как бы находятся на дифракционном конусе. Такой выбор направления полоски интегрирования дает возможность использовать готовое решение двумерной задачи рассеяния на «условной кромке» и тем самым избежать непосредственного интегрирования по элементарной полоске. Подробно решение на условной кромке рассмотрено в Приложении 3.

На рис. 20 приведен вид сверху на плоский угловой сектор.

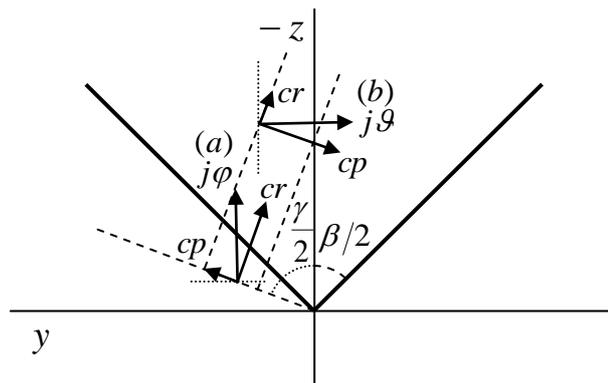


Рис. 20

Реальная и «условная» кромки.

На рис. 20 изображен плоский угловой сектор, реальные кромки которого (показаны жирными линиями) расположены под углами $\beta/2$ по отношению к направлению $(-z)$. Штриховыми линиями показаны условная кромка, расположенная под углом $\gamma/2$ по отношению к направлению $(-z)$ и элементарная полоска интегрирования. Векторами показаны поверхностные токи \vec{j}_φ , \vec{j}_θ для разных типов поляризации падающего поля и разложе-

ния этих проекций \overline{cp} и \overline{cr} по направлениям, параллельному и перпендикулярному условной кромке. Геометрия задачи соответствует рис. 18.

На элементарной полоске интегрирования показано разделение двух поляризаций токов, возбужденных падающей волной физоптики на составляющие, направленные параллельно (cp) и перпендикулярно (cr) условной кромке. Вектора токов возбуждаются векторами магнитного поля, направленными вдоль ортов с соответствующими индексами. Е-вектора падающей волны при этом направлены так, как показано на рис. 18.

Если бы реальная и условная кромка совпадали, то точка наблюдения находилась бы на дифракционном конусе. В свою очередь, это означало бы, что для нахождения решения на фрагменте кромки можно брать дифракционные коэффициенты соответствующей двумерной задачи для условной кромки.

Поскольку в общем случае реальная и условная кромка не совпадают, использование дифракционных коэффициентов условной кромки даст неверный результат. Однако, если разделить дифракционные коэффициенты на числитель и знаменатель, то можно составить новый дифракционный коэффициент, имеющий числитель условной кромки и знаменатель реальной кромки. Для физоптики это заведомо верно, поскольку ее результат не зависит от того, каким образом делить вектор падающего поля на компоненты.

Следующий шаг – применение того же подхода к строгому решению. Взяв двумерное решение на условной кромке, применяем его так же, как и в случае физоптики. Таким образом, удастся избежать интегрирования по элементарным полоскам, поскольку мы работаем с уже готовыми дифракционными коэффициентами.

Итак, мы сформулировали эвристический подход для нахождения дифракции на плоской идеально проводящей многоугольной пластине. В случае плоского рассеивателя к данной методике возникает меньше всего вопросов. Вопросы могут возникать для рассеивателей более сложной формы и с более сложными граничными условиями. Ясно, что форма виртуального двумерного рассеивателя, связанного с условной кромкой, будет отличаться от формы реального рассеивателя. Можно предположить, что изменение формы произойдет в соответствии с тем, как пройдет сечение реального рассеивателя плоскостью, перпендикулярной условной кромке. Вопрос изменения граничных условий требует более тщательного анализа.

Теперь осталось только реализовать разработанный алгоритм.

4.2 Решение в приближении метода эквивалентных контурных токов

4.2.1 Строгое решение для наклонного падения

Эвристическое решение для многоугольной пластины.

Построим эвристическое решение для дифракции на плоском угловом секторе. Для этого в соответствующем физоптическом решении заменим векторную составляющую физоптического решения на векторную составляющую строгого решения.

Для получения векторной составляющей строгого решения рассмотрим двумерную дифракцию электромагнитной волны на бесконечной кромке в случае наклонного падения [57, §11.6]. Геометрия задачи из [57] показана на рис. 21.

На рис. 21 показана геометрия задачи из [57]. Параметры, указанные на рисунке, мы подставляем в формулы дифракции на бесконечной кромке, на которые накладываем условие дальней зоны. Впоследствии из этих формул мы выделяем поляризационную составляющую, которую подставляем в физоптические формулы для плоского углового сектора. В результате физоптические формулы преобразуются в приближение МЭКТ.

Выражения для компонент векторов из [57] приведены в (252) (Приложение 2). Рассмотрев поля при выполнении условия дальней зоны (120), которое выполняется на больших расстояниях от кромки (т.е. когда $kr \rightarrow \infty$), получим выражения, намного более простые, чем (252).

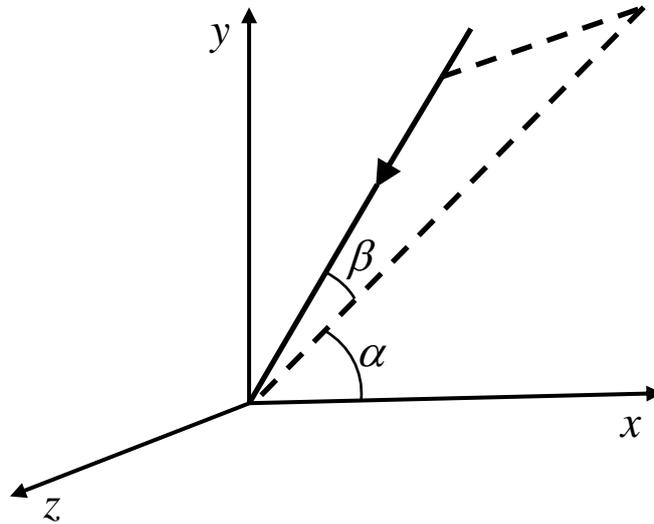


Рис. 21
Геометрия задачи из [57].

Пусть на полуплоскость, кромка которой расположена вдоль оси z , падает плоская волна:

$$U_1 = \exp(-ikS_1) = \exp[-ik(x \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + y \sin \alpha_1 \cos \beta_1 + z \sin \beta_1)]. \quad (160)$$

Выделим вектора Т- поляризаций: вектора \vec{t} , перпендикулярные кромке и направляющим векторам падающего и рассеянного поля \vec{n}' или \vec{n}'' и вектора \vec{p} , перпендикулярные как векторам \vec{t} , так и направляющим векторам \vec{n}' или \vec{n}'' . Для этих векторов в случае падающего (индекс i) и рассеянного (индекс s) поля имеет смысл ввести новые обозначения: \vec{t}_i , \vec{p}_i , \vec{t}_s и \vec{p}_s . В координатах из [57] эти вектора равны:

$$\begin{aligned} \vec{t}_i &= (\sin \alpha_1, -\cos \alpha_1, 0), \quad \vec{p}_i = (-\cos \alpha_1 \sin \beta_1, -\sin \alpha_1 \sin \beta_1, \cos \beta_1) \\ \vec{t}_s &= (-\sin \theta_1, \cos \theta_1, 0), \quad \vec{p}_s = (\sin \beta_1 \cos \theta_1, \sin \beta_1 \sin \theta_1, \cos \beta_1). \end{aligned} \quad (161)$$

Углы α_1 , β_1 и θ_1 связаны уже не с глобальными, а с локальными координатами кромки. Итак, в случае двух поляризаций получаем соответственно две плоские волны

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{p}_i \cos \beta_1 U_1 \\ \vec{H} &= -\vec{t}_i \cos \beta_1 U_1 \end{aligned} \right\} \text{(ТН- поляризация)}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{t}_i \cos \beta_1 U_1 \\ \vec{H} &= \vec{p}_i \cos \beta_1 U_1 \end{aligned} \right\} \text{(ТЕ- поляризация).}$$
(162)

Решение задачи дифракции определяется выражениями из [57]) (см. (252) из Приложения 2). Для наклонного падения (упрощая решение (252)) получим в дальней зоне (см. Приложение 2, формулы (253) – (266)):

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{p}_s \cos \beta_1 U_{ТН\beta} \\ \vec{H} &= -\vec{t}_s \cos \beta_1 U_{ТН\beta} \end{aligned} \right\} \text{(ТН- поляризация)}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{t}_s \cos \beta_1 U_{ТЕ\beta} \\ \vec{H} &= \vec{p}_s \cos \beta_1 U_{ТЕ\beta} \end{aligned} \right\} \text{(ТЕ- поляризация).}$$
(163)

Строгие f , g и физоптические f^0 , g^0 двумерные векторные коэффициенты для полуплоскости определяются выражениями (158), (159) [1] (соответствие углов между [1] и [57]: $\varphi_0 \leftrightarrow \alpha_1$, $\varphi \leftrightarrow \theta_1$).

4.2.2 Замена поляризационных составляющих дифракционных коэффициентов

Сравнивая между собой формулы (162) и (163), нельзя не обратить внимание на их симметрию и на ясность, с которой они описывают явление дифракции. Все компоненты рассеянного поля для случая наклонного падения на кромку (163) можно получить, просто заменив в выражениях (162) для падающего поля угол падения α_1 на угол рассеяния θ_1 , а функцию U_1 на функцию $U_{ТН\beta}$ или $U_{ТЕ\beta}$ в зависимости от того, какая именно составляющая падающего поля является Т- поляризованной.

Из формул (161), (163) следует, что в строгом двумерном решении Т-поляризации падающей волны (162) сохраняются для всех углов наклонного падения. Иными словами, если на кромку падает волна, не имеющая векторной составляющей, направленной вдоль кромки, то такая же ситуация будет иметь место и для рассеянной волны. Для физоптики это не так, происходит «подмес» поляризаций. В этом заключается принципиальное отличие между строгим и физоптическим решениями.

Строгие выражения для трехмерного случая будут отличаться от физоптики лишь векторными компонентами, которые мы возьмем из формул (163) на «условной кромке» и на которые заменим векторную составляющую физоптики. Угол положения условной кромки $\gamma/2$ (рис. 20) войдет во все формулы для векторной составляющей решения.

Компоненты поля берутся аналогично формуле (155) с заменой вклада кромки I_j на вклад вершины I^j из (154):

$$E_{\varphi}^e = ikA_{\varphi}^e = \frac{ik}{2\pi} \frac{\exp(ikR)}{R} I^j \left[\vec{n} \times \vec{H}^0 \right]_{\varphi} = \frac{1}{2\pi} \frac{a_j \exp(ikR)}{R} \frac{\left[\vec{n} \times \vec{H}^0 \right]_{\varphi}}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} \quad (164)$$

и с заменой векторной составляющей физоптического дифракционного коэффициента $\left[\vec{n} \times \vec{H}^0 \right]_{\varphi}$ на условной кромке соответствующим вкладом, взятым из строгого решения.

Для случая наклонного падения поляризации строгого и физоптического решения складываются по-разному. Т-поляризация строгого решения остается неизменной для всех углов наклонного падения и точек наблюдения расположенных на дифракционном конусе. В то же время, Т-поляризация физоптического решения «подмешивается» в другую поляризацию. Поэтому для получения эвристического решения мы на полоске интегрирования заменяем обе поляризации сразу, а не по отдельности (т.е. заменяем всю векторную составляющую решения, которая характеризуется дифракционными коэффициентами).

Итак, вместо векторной составляющей физоптики на условной кромке берем числители дифракционных коэффициентов (158) двумерного решения $U_{TH\beta}''$ и $U_{TE\beta}''$ с учетом коэффициентов разложения ТЕ- и ТН-поляризаций, связанных с ориентацией кромки, по поляризациям падающего и рассеянного поля. В координатах φ и φ_0 (аналогичных φ и φ_0 из [1]), представляющих собой углы между проекциями направляющих векторов $-\vec{n}'$ и \vec{n}'' на плоскость, перпендикулярную условной кромке, и внутренней нормалью к условной кромке числители дифракционных коэффициентов принимают вид:

$$U_{TH\beta}'' = f(\varphi, \varphi_0) (\cos \varphi + \cos \varphi_0) = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi_0}{2}, \quad (165)$$

$$U_{TE\beta}'' = g(\varphi, \varphi_0) (\cos \varphi + \cos \varphi_0) = -2 \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi_0}{2}.$$

Обозначив векторы координат φ и ϑ падающего (*inc*) и рассеянного (*s*) поля из [16] как \vec{e}_{φ}^{inc} , $\vec{e}_{\vartheta}^{inc}$, \vec{e}_{φ}^s и \vec{e}_{ϑ}^s , получим эвристические выражения для коэффициентов D :

$$D_{\vartheta\vartheta} = \frac{kR}{\exp(ikR)} \frac{E_{\vartheta}^{\infty}}{E_{\vartheta}^{inc}} = \frac{kR}{\exp(ikR)} \frac{H_{\vartheta}^{\infty}}{H_{\vartheta}^{inc}} = \frac{ik^2}{2\pi} I^j \left[(\vec{e}_{\vartheta}^s, \vec{p}_s) (\vec{e}_{\vartheta}^{inc}, \vec{p}_i) U_{TH\beta}'' + (\vec{e}_{\vartheta}^s, \vec{t}_s) (\vec{e}_{\vartheta}^{inc}, \vec{t}_i) U_{TE\beta}'' \right]$$

$$D_{\varphi\varphi} = \frac{kR}{\exp(ikR)} \frac{E_{\varphi}^{\infty}}{E_{\varphi}^{inc}} = \frac{kR}{\exp(ikR)} \frac{-H_{\varphi}^{\infty}}{H_{\varphi}^{inc}} = \frac{ik^2}{2\pi} I^j \left[(\vec{e}_{\varphi}^s, \vec{p}_s) (\vec{e}_{\varphi}^{inc}, \vec{p}_i) U_{TH\beta}'' + (\vec{e}_{\varphi}^s, \vec{t}_s) (\vec{e}_{\varphi}^{inc}, \vec{t}_i) U_{TE\beta}'' \right] \quad (166)$$

$$D_{\vartheta\varphi} = \frac{kR}{\exp(ikR)} \frac{E_{\vartheta}^{\infty}}{E_{\vartheta}^{inc}} = \frac{kR}{\exp(ikR)} \frac{H_{\vartheta}^{\infty}}{H_{\vartheta}^{inc}} = \frac{ik^2}{2\pi} I^j \left[(\vec{e}_{\vartheta}^s, \vec{p}_s) (\vec{e}_{\varphi}^{inc}, \vec{p}_i) U_{TH\beta}'' + (\vec{e}_{\vartheta}^s, \vec{t}_s) (\vec{e}_{\varphi}^{inc}, \vec{t}_i) U_{TE\beta}'' \right]$$

$$D_{\varphi\vartheta} = \frac{kR}{\exp(ikR)} \frac{E_{\varphi}^{\infty}}{E_{\varphi}^{inc}} = \frac{kR}{\exp(ikR)} \frac{-H_{\varphi}^{\infty}}{H_{\varphi}^{inc}} = \frac{ik^2}{2\pi} I^j \left[(\vec{e}_{\varphi}^s, \vec{p}_s) (\vec{e}_{\vartheta}^{inc}, \vec{p}_i) U_{TH\beta}'' + (\vec{e}_{\varphi}^s, \vec{t}_s) (\vec{e}_{\vartheta}^{inc}, \vec{t}_i) U_{TE\beta}'' \right]$$

Эти формулы дают решение в приближении метода эквивалентных контурных токов, а коэффициенты D связаны с полями так же, как и в формулах (150).

Более подробно получение решения (166) описано в Приложении 4.

В выражениях (166) значения скалярного интеграла I^j из (154) определяется в координатах, связанных с реальными кромками, образующими вершину, а значения дифракционных коэффициентов $U''_{тн\beta}$ и $U''_{те\beta}$ определяются по формулам (163) через углы φ и φ_0 , связанные с условной кромкой, с учетом соответствия $\varphi_0 \leftrightarrow \alpha_1$, $\varphi \leftrightarrow \theta_1$. Векторы поляризации падающей и рассеянной волн \vec{t}_i , \vec{p}_i , \vec{t}_s и \vec{p}_s также определяются в локальных координатах, связанных с условной кромкой (рис. 20). Единичные орты падающей и рассеянной волн \vec{e}_φ^{inc} , \vec{e}_g^{inc} , \vec{e}_φ^s и \vec{e}_g^s задаются в координатах из [16] (рис. 18).

В выражениях (166) подразумевается, что луч, направленный вдоль вектора $\vec{\Delta}$, начинается на одной из кромок, образующих угловой сектор, и уходит по этому сектору в бесконечность. Может быть другая ситуация, когда луч начинается на одной кромке и заканчивается на другой. При этом формулы (166) немного усложняются (на разных гранях углового сектора дифракционные коэффициенты отличаются, поскольку векторы внутренней нормали реальных кромок, будучи расположенные на условной кромке, направлены в разные стороны от нее). Положение торцевой кромки определяется направляющими векторами \vec{n}' и \vec{n}'' падающей и рассеянной волн и от положения реальных кромок не зависит.

На рис. 19 из [16], где уже сплошными линиями показаны графики функций D (150), мы точками и штрихами нанесли функции, рассчитанные по формулам (292) и (166). Результаты расчета приведены на рис. 22.

На рис. 22 (а), (б) показаны результаты расчета физоптических коэффициентов D по формулам (281) в сравнении с результатами из [16] (см. рис.18, 19). Можно видеть, как физоптические коэффициенты D обнуляются на перекрестных поляризациях, что представляет собой существенную ошибку. На рис. 22 (в), (г) показаны результаты расчета коэффициентов D по формулам (166) (приближение МЭКТ) в сравнении с результатами из [16] (см. рис. 18, 19). В этом случае совпадение между результатами намного лучше.

Как видим из рис. 22, приближение МЭКТ (рис. 22 (в), (г)) правильно отражает характер решения. В сравнении с приближением физоптики (рис. 22 (а), (б)) МЭКТ значительно выигрывает, поскольку в приближении физоптики графики имеют тот же характер, однако два из четырех коэффициентов D (а именно – коэффициенты перекрестных поляризаций $D_{\varphi g}$ и $D_{g\varphi}$) равны нулю во всей области значений углов φ .

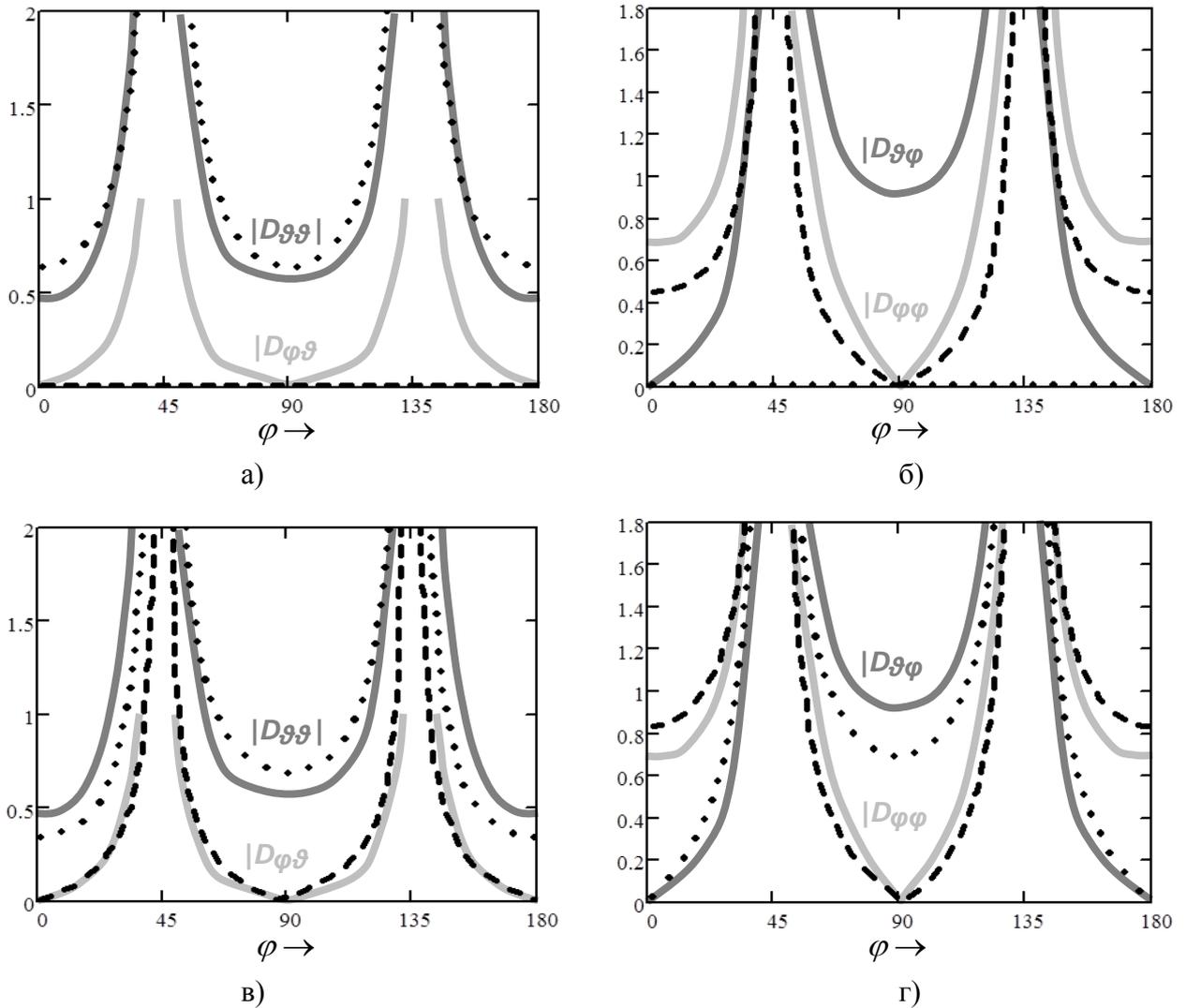


Рис. 22

Результаты расчета коэффициентов D по эвристическим формулам и их сравнение с результатами из [16] (см. рис.18, 19). Приближение метода физической оптики (а), (б) дает большие ошибки, поскольку перекрестные поляризации $D_{\varphi\vartheta}$ и $D_{\vartheta\varphi}$ в системе координат (рис.18) получаются равными нулю. Кривые, характеризующие приближение метода эквивалентных контурных токов (в), (г), лучше соответствуют результатам строгого расчета.

4.3 Модифицированный метод эквивалентных контурных токов

Коррекция решения на конце кромки.

Решение в приближении метода эквивалентных контурных токов (МЭКТ) довольно близко подходит к решению [16]. Если не требуется большая точность, его вполне можно использовать при решении задач дифракции. Однако, решение МЭКТ можно существенно улучшить, если учесть влияние ограниченности кромки по длине. Это влияние МЭКТ не учитывает, поскольку считает эквивалентный ток постоянным по всей длине кромки. Приблизненно влияние ограниченности кромки по длине можно найти, считая саму кромку элементарной полоской в приближении физоптики. Количественно это влияние можно

оценить, сравнивая между собой физоптические и строгие коэффициенты на элементарной полоске.

Схема получения решения показана на рис. 23.

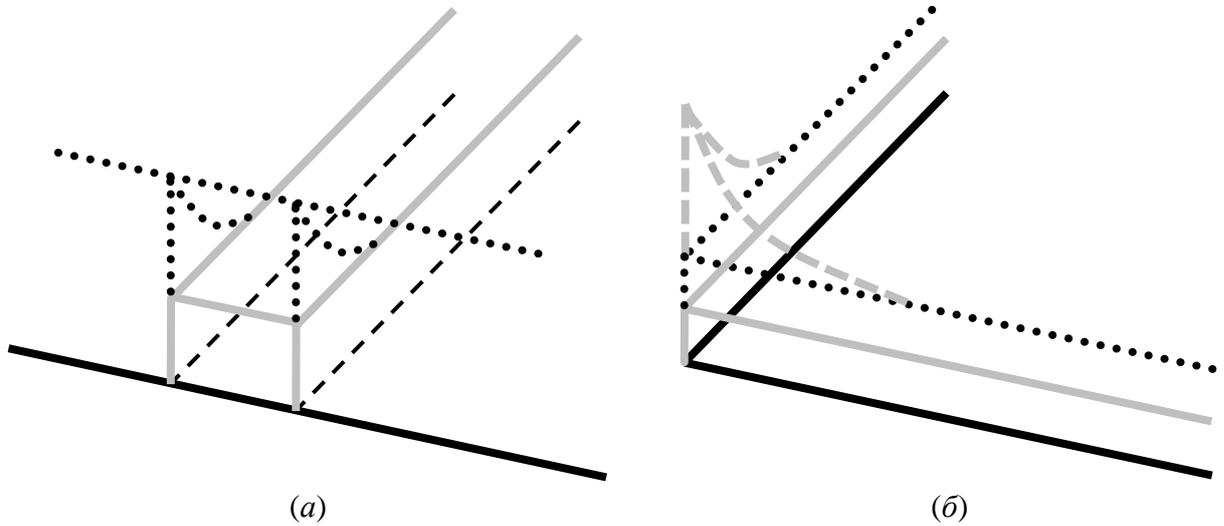


Рис. 23

Возмущение поля вблизи кромки полуплоскости и дополнительное возмущение поля вблизи вершины плоского углового сектора.

На рис. 23 (а) показана кромка полуплоскости (черная сплошная линия), поле элементарной полоски в приближении ФО (серая сплошная линия), возмущение поля вблизи края («поперечное» по отношению к кромке – черный пунктир). На рис. 23 (б) показан плоский угловой сектор (черная сплошная линия), поле углового сектора в приближении ФО (серая сплошная линия), возмущение поля вблизи края кромки (черный пунктир) и дополнительное возмущение поля вблизи вершины («продольное» по отношению к кромке – серая штриховая линия).

Наша задача – получить эвристическую оценку дополнительного «продольного» возмущения поля на основе выражения для «поперечного» возмущения.

Как уже было сказано, числители физоптических коэффициентов f^0 и g^0 характеризуют векторный потенциал \vec{A}^e при различных типах поляризации. Введем корректирующие коэффициенты как частное от деления строгих коэффициентов на физоптические. Умножая эти коэффициенты на физоптику, можно получить строгое аналитическое решение для дифракции на многоугольной пластине в приближении метода эквивалентных контурных токов в случае нормального падения.

В координатах $\varphi\gamma$ и $\varphi\gamma_0$, сравнивая между собой выражения для дифракционных коэффициентов (158), получаем корректирующие коэффициенты $cp\gamma$ и $cr\gamma$ для ТН и ТЕ поляризаций при нормальном падении на кромку:

$$\frac{f(\varphi\gamma, \varphi\gamma_0)}{f^0(\varphi\gamma, \varphi\gamma_0)} \rightarrow cp\gamma = \frac{\sin \frac{\varphi\gamma}{2}}{\cos \frac{\varphi\gamma_0}{2}} \text{ и } \frac{g(\varphi\gamma, \varphi\gamma_0)}{g^0(\varphi\gamma, \varphi\gamma_0)} \rightarrow cr\gamma = \frac{\cos \frac{\varphi\gamma_0}{2}}{\sin \frac{\varphi\gamma}{2}}. \quad (167)$$

Эти коэффициенты характеризуют отличие строгого интеграла по элементарной полоске интегрирования от физоптического интеграла. Однако, говоря о замене физоптического дифракционного коэффициента на строгий, мы не имеем в виду применение корректирующего коэффициента (167). Такая операция может быть сделана, но лишь в случае нормального падения, когда в решении присутствует лишь одна поляризация.

Иногда говорят, что физоптика тем лучше совпадает со строгим решением, чем больше размер рассеивателя. Из формул (167) следует, что это не так. Отличие физоптики от строгого решения зависит не от размера рассеивателя, а от того, насколько близко точка наблюдения находится от границы тени. В направлениях «прямо вперед» и зеркального отражения физоптика совпадает со строгим решением. Этот факт хорошо известен и используется, например, в теории зеркальных антенн при расчете коэффициента усиления в главном луче и ближайших боковых лепестках. При удалении от границы тени различие между физоптикой и строгим решением возрастает независимо от размера рассеивателя.

Корректирующие коэффициенты (167) характеризуют изменение поля вблизи края полуплоскости на элементарной полоске интегрирования при переходе от физоптики к строгому решению. Как следует из выражений (155) – (157), соотношения между дифракционными коэффициентами не меняются при переходе от трехмерной дифракции к двумерной. Поэтому можно предположить, что и в одномерном случае можно использовать те же коэффициенты. Под словами «одномерный случай» здесь имеется в виду, что в МЭКТ амплитуда эквивалентного контурного тока считается постоянной на всей длине прямолинейной кромки. Из физических соображений ясно, что на краю кромки амплитуда должна меняться, причем можно предположить, что это изменение будет похоже на то, как меняется амплитуда поля на элементарной полоске в случае строгого решения по сравнению с постоянной амплитуды физоптического поля. Поэтому корректирующие коэффициенты (167) можно также интерпретировать как характеристику изменения амплитуды эквивалентного контурного тока на конце ребра, вызванную ограниченностью ребра по длине.

С другой стороны, понятно, что это изменение амплитуды должно зависеть от величины угла плоского сектора. Кроме этого, оно может зависеть от положения сектора по отношению к падающей и рассеянной волнам. В работе [16] приведены данные лишь для четверть - плоскости и одного угла падения в биссекторной плоскости. Этих данных явно недостаточно для того, чтобы всесторонне исследовать решение. Но можно попробовать найти эвристический корректирующий коэффициент для частного случая, рассмотренного в [16].

Пронормируем функцию $сру$ таким образом, чтобы она была равна 1 на границе тени (при этом получим функцию $сруп$) и подберем степень, в которую возведем функцию $сруп$. Результаты приведены на рис. 24.

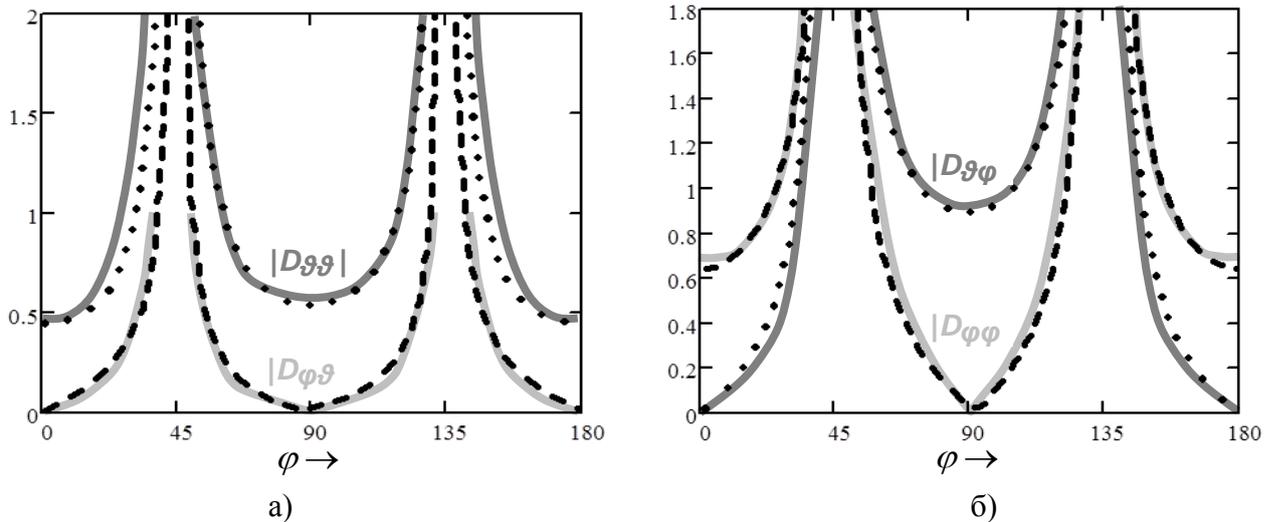


Рис. 24

Решение в приближении МЭКТ с коррекцией путем умножения коэффициентов D на функцию $(c\rho\eta)^{\pm 0.7}$ с нормировкой существенно улучшает совпадение с результатами из [16].

На рис. 24 (а), (б) показаны результаты расчета коэффициентов D по модифицированным формулам (166) (приближение МЭКТ) с коррекцией при помощи нормированных и возведенных в степень формул (167), а именно: $(c\rho\eta)^{\pm 0.7}$.

Выясняется, что умножение коэффициентов D на одну и ту же функцию $(c\rho\eta)^{0.7}$ в прямой (левый график) или обратной (правый график) степени существенно улучшает совпадение всех четырех графиков по сравнению с МЭКТ (рис. 22). Можно предположить зависимость этой функции от угла раствора β плоского углового сектора, поскольку при его увеличении до угла π амплитудная коррекция должна исчезать. Например, весьма разумной представляется проверка зависимости от функции $(c\rho\eta)^{\cos(\beta/2)}$ каждого из коэффициентов D в целом или вкладов сторон по отдельности. С другой стороны, коэффициент коррекции может зависеть и от положения углового сектора относительно направляющих векторов падающего и рассеянного поля. Однако, для выявления этих зависимостей нужно применить надежный способ проверки (имеется в виду достоверное аналитическое или численное решение) и провести дополнительные исследования. Тем не менее, тот факт, что одна и та же функция так сильно улучшает совпадение всех четырех кривых, косвенно свидетельствует о правильности выбора способа коррекции решения и о правильности физических предпосылок, которые привели к этому способу.

Выводы.

Показана возможность применения корректирующего коэффициента для уточнения решения МЭКТ в случае дифракции на плоском угловом секторе. Решение МЭКТ получено без непосредственного интегрирования по элементарной полоске при помощи виртуального решения задачи дифракции на «условной кромке». Корректирующий коэффициент получен при помощи сравнения ДН элементарной полоски в случае строгого и физического решения.

Предпосылками к получению решения на «условной кромке» является анализ поведения поля физоптики на пластине. Поскольку поле физоптики не зависит от формы контура, его решение можно записать для условной кромки и разделить на сомножители. Один сомножитель связан с формой и положением кромки, другой – с векторной составляющей решения. Затем в строгом двумерном решении для условной кромки выделяется вклад кромки и заменяется на вклад кромки из трехмерной физоптики.

На первый взгляд может показаться, что подход с использованием условной кромки не обладает достаточной математической строгостью. Форма сечения цилиндрической кромки меняется в зависимости от того, под каким углом происходит это сечение. В выбранном сечении может меняться и величина волнового числа. Однако, мы и не утверждаем, что проводим интегрирование по элементарной полоске с выполнением всех математических формальностей. Напротив, в данном разделе предлагается способ получения решения, позволяющий избежать математических сложностей. При этом мы используем то обстоятельство, что рассматриваемый нами рассеиватель имеет простейшее сечение.

В случае дифракции на на клине или на рассеивателе с размерным параметром следует провести анализ решения на условной кромке с учетом результатов работы [54] и раздела 3.1. Однако мы рассматриваем дифракцию на полуплоскости, поэтому результаты анализа не окажут влияния на решение. Таким образом, поскольку в данном случае упомянутое выше исследование представляет лишь академический интерес, мы его не проводили.

Иногда при построении эвристического решения для дифракции на плоском угловом секторе рассматривают многократное переотражение лучей от сторон углового сектора. Гарантий точности этот подход все равно не дает, зато прибавляет сложности. Введение эвристического торцевого коэффициента позволяет добиться упрощения решения. Простой вид итоговых формул позволяет расширить круг применения решений, полученных с применением данного подхода.

Критерием правильности предлагается считать лишь сравнение конечного результата с проверочным решением. Более того, по результатам такой проверки решение может быть дополнительно подправлено эвристическим способом, т.е. опять-таки без соблюдения математических формальностей.

Сравнив решение МЭКТУК со строгим решением, проанализировав решение и введя корректирующие коэффициенты, получим модифицированное решение МЭКТУК (ММЭКТ). Это решение наилучшим образом описывает вершинную волну.

Сигнал, рассеянный на многограннике, в основном представляет собой вершинные волны. Они не являются вершинными волнами ни в приближении физоптики, ни в приближении МЭКТ. В выражениях (167) мы вновь обратились к эвристическому подходу, применив коррекцию на торце кромки. Более строгим решением могло бы стать интегрирование по четверть – плоскости поверхностных токов, амплитуда которых меняется в зависимости от расстояния до кромки. Однако, например, в двумерной задаче такое интегрирование не приводит к правильному результату. Соответствующий физоптический интеграл отличается от строгого решения корректирующими коэффициентами (167). Поэтому мы сочли возможным избежать непосредственного интегрирования (которое также вряд ли привело бы к правильному результату) и вместо этого просто ввели корректиру-

ющий коэффициент на торце кромки. Окончательным критерием правильности эвристического решения может быть лишь его сравнение с более строгим результатом, а такое сравнение данное решение выдерживает.

Главное отличие строгого решения от физоптического состоит в том, что в строгом решении сохраняется Т-компонента поля (перпендикулярная кромке). Не имеющее такого свойства физоптическое решение может давать в определенных направлениях ложные нули, что приводит к существенным ошибкам.

Приближение физической оптики строится при помощи «назначения» токов на поверхности рассеивателя в соответствии с геометрической оптикой падающей волны. Направления дифракционных конусов для решения МЭКТ и физоптического решения совпадают. При нормальном падении на кромку поляризации разделены. Для каждой из двух поляризаций можно выделить коэффициент связи cr или cp между решением в приближении физоптики и решением МЭКТ. При наклонном падении поляризации составляющих решения МЭКТ и физоптики разделяются по – разному. В решении МЭКТ Т-поляризации сохраняются. Если в падающей волне строгого решения Е- или Н-вектор Т-поляризован, то и в рассеянной волне он будет Т-поляризован. В физоптическом решении Т-поляризации «подмешиваются» друг в друга. Если в падающей волне физоптического решения Е- или Н-вектор Т-поляризован, то вектор рассеянной волны будет Т-поляризован лишь в случае нормального падения. В случае наклонного падения Т-поляризация не сохраняется. С другой стороны, физоптика может давать ноль на перекрестных поляризациях независимо от положения рассеивающей кромки. Когда токи падающей волны лежат в плоскости углов наблюдения или перпендикулярны ей, в перекрестную поляризацию ничего не попадает.

На дифракционном конусе решение МЭКТ работает хорошо, а физоптика может приводить к существенным ошибкам (например, к обнулению перекрестных поляризаций).

При нормальном падении на вершину решение МЭКТ отличается от решения [16] коэффициентом, зависящим от поляризации волны, падающей в биссекторной плоскости, и воздействующим одинаково на обе компоненты вектора. Физический смысл этого коэффициента – учет ограниченности кромки и связанного с ней изменения амплитуды краевого тока вблизи конца кромки. Что будет при падении волны не в биссекторной плоскости, сказать пока нельзя. Этот вопрос нуждается в детальной проработке. Не исключено, что поляризационная зависимость будет иметь более сложный характер. Точно так же, при наклонном падении на двумерную кромку зависимость решения от поляризации намного сложнее, чем при нормальном падении на кромку, когда амплитудные коэффициенты воздействуют независимо на каждую из двух (Е- и Н-) Т-компонент решения.

Возможно, важным моментом является то обстоятельство, что для координат [16] проекции всех ортов падающего и рассеянного поля на плоскость углового сектора имеют геометрическую симметрию относительно этого сектора. Хотя относительно условной кромки симметрия уже другая.

Каждый способ построения эвристического решения имеет свои недостатки. Иногда требуется сложное интегрирование по элементарной полоске. В другом случае возникают вопросы, связанные с формой виртуального рассеивателя и граничными условиями для него. Тем не менее, главным критерием приемлемости эвристического решения является

сравнение с более точными результатами. Поскольку в самой основе эвристического решения заложены математические погрешности, имеет смысл добиваться точности лишь для всего решения в целом, а не для его отдельных компонентов.

Применив умножение на нормированный корректирующий коэффициент, возведенный в степень, мы показали простейший способ коррекции эвристического решения на основе физических предположений о характере его поведения вблизи конца кромки. Усложнив способ коррекции, можно было бы добиться и лучшего совпадения эвристического решения с решением [16]. Однако на данном этапе совершенствовать способ коррекции нецелесообразно. Имеющиеся данные позволяют проверить эвристическое решение лишь для одного угла раствора плоского сектора, одного направления падения и одной плоскости углов рассеяния. Исследовать поведение решения при изменении этих параметров можно лишь при наличии большего объема достоверных расчетных данных.

4.4. Пределы применимости эвристических подходов при расчете дифракции электромагнитных волн на многогранниках и других рассеивателях

В данном разделе проанализирована возможность применения различных методов для получения эвристических аналитических решений задач дифракции. На примере рассеяния электромагнитной волны плоским угловым сектором исследованы различные эвристические подходы (метод физической оптики, метод эквивалентных контурных токов и модифицированный метод эквивалентных контурных токов). При помощи сравнения результатов со строгим решением [16] показано, что в задачах дифракции на многогранниках метод физической оптики может приводить к грубым ошибкам, метод эквивалентных контурных токов дает качественно правильное решение, а модифицированный метод эквивалентных краевых токов дает решение, максимально близкое к строгому.

4.4.1 Алгоритм получения решения

Метод физической оптики широко применяется для приближенного решения задач дифракции. В некоторых источниках можно встретить утверждение о том, что приближение физоптики дает тем более точное решение, чем больше размеры рассеивателя по сравнению с длиной волны. На самом деле это не так, поскольку точность приближения физоптики тем больше, чем ближе положение точки наблюдения по отношению к направлению геометрооптической границы «свет – тень». Таких направлений во всем пространстве всего два – в направлении «прямо вперед» и в направлении отраженной волны. Приближение физоптики будет хорошо работать в угловых окрестностях этих направлений, соответствующих главному лучу и одному – двум боковым лепесткам. Чем больше размеры тела в сравнении с длиной волны, тем меньше угловой размер этой окрестности. При выходе из этих окрестностей решение будет отклоняться от приближения физоптики.

В частности, метод физической оптики дает хорошие результаты при определении параметров уголкового отражателя (поскольку геометрооптический сигнал от уголкового отражателя всегда отражается «прямо назад») и для определения коэффициента усиления

апертурных антенн (а также диаграммы направленности вблизи главного лепества антенны). Кроме того, метод физической оптики может давать хорошие результаты при расчете сигнала, рассеянного выпуклыми объектами, имеющими много зеркальных точек.

В связи с этим иногда возникает соблазн применить данный метод для решения других задач, например, к расчету дифракции на многогранниках. Однако в этом случае данный метод может приводить к существенным ошибкам, поскольку при удалении от границы тени точность решения снижается. Максимумы излучения, которые дает физоптическое решение, справедливы также и для строгого решения, хотя амплитуда и поляризация совпадают со строгим решением лишь вблизи границ «свет – тень».

Напомним шаги получения эвристического решения задачи рассеяния на плоском угловом секторе. Основой для построения эвристического решения является решение, полученное методом физической оптики строго. Постановка задачи соответствует формулам (107) – (110), п.3.1.1. Затем из формул (108) выделяется записывается интеграл по поверхности I (209) (Приложение 1). Затем интеграл по поверхности строго сводится к интегралу по кромке (223).

Затем вклад отдельной кромки (155) разбивается на множители: дифракционный коэффициент (состоящий в свою очередь из числителя, описывающего поляризационный вклад, и знаменателя, связанного с ориентацией кромки) и фактор, зависящий от расстояния до кромки.

Затем в два этапа проводится уточнение физоптического решения. На первом этапе поляризационный вклад физоптики заменяется на вклад строгого решения, в результате чего получается решение методом эквивалентных контурных токов (МЭКТ) (166). При этом используется решение на условной кромке (Приложение 3), что является особенностью решения МЭКТУК. Такой подход дает возможность избежать интегрирования по элементарным полоскам и сразу использовать готовый дифракционный коэффициент на условной кромке. Поляризационный вклад строгого решения берем из книги [57]. Эти выражения преобразуем (163), предполагая выполнение условия дальней зоны.

Затем решение МЭКТУК сравнивается со строгим и выясняется, что оно отличается от строгого лишь множителями – функциями, которые можно выразить через двумерные физоптическое и строгое решения на бесконечной кромке. На втором этапе, дополняя решение МЭКТУК этими модифицирующими множителями – функции, получаем решение ММЭКТ. Сравнивая решение ММЭКТ со строгим решением [16], делаем вывод о том, что решение ММЭКТ превосходит по точности другие исследуемые эвристических решения: ФО и МЭКТ (МЭКТУК).

В двумерном случае умножение на множители-функции приводит к уточнению физоптического решения до строгого решения на бесконечной кромке. В трехмерном случае умножение на множители-функции (похожие на двумерные, но немного измененные) приводит к уточнению решения МЭКТ до ММЭКТ, близкое к строгому. Без умножения на множители-функции мы получаем решение для менее точного эвристического приближения. Множители-функции равны единице в направлениях, в которых выполняется условие стационарной фазы. Поэтому мы и делаем вывод о том, что менее точные эвристические приближения могут давать точное решение в некоторых направлениях (а именно – в тех, в которых множители-функции равны единице). Получается довольно стройная

картина поведения дифракционных решений, но увидеть ее стало возможным лишь сейчас, когда появилось строгое решение [16], с которым можно сравнить трехмерные решения, построенные при помощи различных эвристических подходов.

Таким образом, эвристический способ ММЭКТ получения решения задачи дифракции дает новую возможность получать сравнительно простые аналитические формулы для решения задачи дифракции на многоугольниках. Как любой эвристический метод, данный подход требует наличия строгого решения для проверки и настройки. Сначала строится решение в приближении метода эквивалентных контурных токов. Затем в результате сравнения этого решения со строгим находятся корректирующие множители. В этом заключается основное отличие предложенного метода от подхода [72], аналогичному методу краевых волн, в котором вводятся не множители, а аддитивная добавка к приближенному физоптическому решению. Аддитивная добавка по своей сложности не уступает строгому решению, в то время как корректирующие множители лишь немного усложняют окончательные выражения. Аддитивная добавка дает «одноразовое» решение, для другой задачи всю процедуру приходится применять сначала. Напротив, множители позволяют описать тенденцию, которую можно попытаться применить в других решениях.

4.4.2 Пределы применимости эвристических решений

Как уже было сказано в п. 4.4.1, существуют ситуации, когда приближенные эвристические решения дают очень точный результат и вполне достаточны для решения научных и технических задач. Тем не менее, это не означает, что то же самое имеет место для задачи дифракции в произвольной постановке. Применяя эвристические подходы, следует четко осознавать, в каких случаях они работают, а в каких – нет. При ведем несколько примеров.

1. ОБЩЕИЗВЕСТНО, что геометрическая оптика может найти поля только в ближней зоне и в двух выделенных направлениях.

ОДНАКО при помощи ГО можно:

- а) найти сигнал, отраженный от зеркальных точек рассеивателя сложной формы.
- б) рассчитать поле в апертуре зеркальных антенн, решив сложную задачу взаимодействия поля с криволинейной поверхностью.

2. ОБЩЕИЗВЕСТНО, что физическая оптика может находить решение во всем пространстве для любых рассеивателей с любыми граничными условиями.

ОДНАКО это решение – неточное из-за того, что поляризационная составляющая вычисляется неверно.

3. ОБЩЕИЗВЕСТНО, что геометрическая теория дифракции может находить точное поле только на лучах, соответствующих принципу Ферма (т.е. на дифракционных конусах).

ОДНАКО при помощи ГТД полный рассеянный сигнал можно построить при помощи отражения от криволинейных кромок, если они есть в исследуемом рассеивателе. Это аналогично методу зеркальных точек, с той разницей, что кромок стационарной фазы в

пространстве гораздо больше. Зеркальная точка на поверхности рассеивателя (точка стационарной фазы) соответствует одному направлению в пространстве (т.е. одной точке на бесконечно удаленной сфере). А кромка стационарной фазы (или точка на криволинейной кромке) соответствует уже не отдельному направлению, а дифракционному конусу (т.е. не одной точке на бесконечно удаленной сфере, а целой линии).

4. ОБЩЕИЗВЕСТНО, что физическая теория дифракции подходит для любых трехмерных рассеивателей, имеющих двумерное решение на кромке, т.е. при помощи ФТД можно находить решение во всем пространстве. Правда, достаточно точное решение получается лишь в направлении дифракционных конусов, а в остальных направлениях (где существуют только вершинные волны) решение получается неточным.

ОДНАКО вершинные волны можно исправить при помощи модифицирующих амплитудных коэффициентов, таким образом приблизив точность эвристического решения к точности строгого верификационного решения.

ГЛАВА 5. ПРИМЕНЕНИЕ РЕШЕНИЙ МЕТОДА ОБОБЩЕННОГО ЭЙКОНАЛА ДЛЯ ТЕЛ С НЕИДЕАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В данной главе мы построим обобщенные дифракционные коэффициенты для дифракции поля произвольной физической природы на рассеивателе с плоскими или клиновидными кромками.

5.1 Получение эвристического решения

5.1.1 Сводка известных формул

Строгое решение для рассеянного поля при дифракции плоской электромагнитной волны единичной амплитуды на двумерном идеально проводящем клине с внешним углом раствора клина πn хорошо известно (см., например, [1]).

$$v(r, \psi) = \frac{-2}{n} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi}{n}} \cos \frac{\psi}{2} \frac{e^{-ikr \cos \psi}}{\sqrt{\pi i}} \int_{\infty \cos(\psi/2)}^{\sqrt{2kr} \cos(\psi/2)} \exp(iq^2) dq, \text{ где } \psi = \varphi \mp \varphi_0. \quad (168)$$

Здесь i – мнимая единица, $k=2\pi/\lambda$ – волновое число, r – расстояние от кромки до точки наблюдения, φ_0 – угол источника, φ – угол точки наблюдения.

Функция $v(r, \psi)$ непрерывна и периодична в двулистной области. Рассеянное поле E в зависимости от вида граничных условий строится при помощи разности или суммы:

$$E = v(r, \varphi - \varphi_0) - v(r, \varphi + \varphi_0) \text{ или } E = v(r, \varphi - \varphi_0) + v(r, \varphi + \varphi_0) \quad (169)$$

для ТН- и ТЕ- волны соответственно. Под ТН- и ТЕ- волнами понимаются решения, у которых соответствующий вектор (Н или Е) перпендикулярен кромке.

С учетом асимптотики

$$\int_{-\infty}^{-p} e^{iq^2} dq = \int_p^{\infty} e^{iq^2} dq \approx -e^{ip^2} / (2ip) \quad (170)$$

получим вдали от границы «свет – тень»

$$\cos \frac{\psi}{2} \frac{e^{-ikr \cos \psi}}{\sqrt{\pi i}} \int_{\infty}^{\sqrt{2kr} \cos(\psi/2)} e^{iq^2} dq \approx \frac{e^{ikr}}{2i\sqrt{2\pi ikr}}, \quad (171)$$

откуда

$$v(r, \psi) \approx \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{kr}} \frac{1}{n} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi}{n}}. \quad (172)$$

Следовательно, из (169) и (172) получаем компоненты поля:

$$\begin{pmatrix} E_z \\ E_\varphi \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{kr}} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad (173)$$

где f и g - дифракционные коэффициенты строгого решения в случае ТН- и ТЕ- волны соответственно:

$$f(\varphi, \varphi_0) = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n}} - \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{n}} \right) \text{ (ТН)},$$

$$g(\varphi, \varphi_0) = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n}} + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{n}} \right) \text{ (ТЕ)}.$$
(174)

Для полуплоскости $n=2$, и тогда:

$$f(\varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} - \frac{1}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right) \text{ (ТН)},$$

$$g(\varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} + \frac{1}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right) \text{ (ТЕ)}.$$
(175)

Решение двумерной задачи дифракции на идеально проводящей полуплоскости в приближении физической оптики вдали от границы тени ($kr \gg 1$), где k – волновое число, имеет вид, похожий на строгое решение:

$$\begin{pmatrix} E_z \\ E_\varphi \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{kr}} \begin{pmatrix} f^0 \\ g^0 \end{pmatrix},$$
(176)

здесь E_z и E_φ – ТН- и ТЕ- поле, f^0 и g^0 – дифракционные коэффициенты физоптического решения для ТН- и ТЕ- волны:

$$f^0(\varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} - \frac{\sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2}}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right) \text{ (ТН)},$$

$$g^0(\varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} + \frac{\sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2}}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right) \text{ (ТЕ)}.$$
(177)

Соотношение между строгим решением двумерной задачи (173) и физоптическим соответствует формуле из [3], устанавливающей, что двумерное решение в приближении физической оптики $v^0(r, \psi)$ для рассеянного поля, непрерывного на двулистной римановой поверхности, имеет вид, очень похожий на строгое решение $v(r, \psi)$:

$$v^0(r, \psi) = \sin \frac{\psi}{2} v(r, \psi), \text{ где } \psi = \varphi \mp \varphi_0.$$
(178)

Выражение (178) отражает соотношение между дифракционными коэффициентами (175) строгого двумерного решения и физоптическими дифракционными коэффициентами в случае дифракции на полуплоскости, в том числе – соотношение между асимптотиками физоптического и строгого решений при удалении от границы «свет-тень». Что касается трехмерного случая, то для него строгого решения не существует, поэтому непосредственно проверить соотношение (178) невозможно. Однако можно предположить, что и в трехмерном случае соотношение (178) сохранится, и именно это предположение мы будем использовать при построении эвристического решения.

5.1.2 Геометрооптические коэффициенты отражения и прохождения

Как было сказано в п.2.2.2, выражение (61) для поля, рассеянного идеально проводящим клином, можно разбить на ряд сомножителей. Один из этих сомножителей – дифракционный коэффициент, характеризующий один из двух типов граничных условий при падении на поверхность идеально проводящего рассеивателя электромагнитной волны одного из двух видов поляризации. Направление вектора поляризации можно рассматривать по отношению к нормали рассеивателя или по отношению к направлению кромки. Если волна падает нормально по отношению к кромке, то поляризации разделяются одинаково, если – наклонно по отношению к кромке, то поляризации разделяются по-разному.

Сравним между собой дифракционные коэффициенты строгой (175) и физоптической (177) поляризации при нормальном падении на кромку. Каждый дифракционный коэффициент состоит из двух слагаемых. Знаменатели у этих слагаемых одинаковые и равны нулю на границе «свет – тень». Поэтому эту часть дифракционного коэффициента можно условно считать связанной с геометрией задачи, т.е. «геометрической». Числители у этих слагаемых отличаются. Поскольку поляризации строгого и физоптического решения разделяются по-разному, числители можно условно назвать «поляризационной» частью дифракционного коэффициента. Кроме того, что числители влияют на амплитуду поля, они еще отвечают за характер взаимодействия падающей волны с поверхностью рассеивателя. Первые слагаемые дифракционных коэффициентов одинаковы и связаны с границей тени падающего поля, вторые слагаемые – отличаются и связаны с границей тени отраженного поля. Вполне естественно предположить, что эти слагаемые включают в себя дополнительные единичные множители, связанные со свойствами поверхности. В первых главах этой диссертации, связанными с методом обобщенного эйконала, мы рассматривали поле рассеяния идеально проводящего клина и полуплоскости на двулистной римановой поверхности. Получив при помощи МОЭ известное решение задачи дифракции на клине (58), мы можем сопоставить поведение этого решения в двулистной области с выражениями (174) для дифракционных коэффициентов. При этом становится очевидным, что первое слагаемое дифракционного коэффициента связано с верхней полуплоскостью, т.е. с листом, связанным с падающей волной, а второе – с нижней полуплоскостью, т.е. с листом, связанным с отраженной волной.

Эти рассуждения позволяют построить эвристическую формулу для обобщенного дифракционного коэффициента, позволяющего учесть граничные условия на рассеивателе с

неидеальным типом граничных условий. При этом мы используем коэффициент отражения R и коэффициент прохождения T , описывающие взаимодействие волны с безграничной плоской поверхностью. Коэффициенты R и T могут быть постоянными величинами или функциями, но в любом случае получить их гораздо легче, чем решить для случая неидеальных граничных условий трехмерную (3D) задачу рассеяния, или двумерную (2D) задачу дифракции на бесконечной кромке при нормальном падении, или «2,5 – мерную» (2.5D) задачу дифракции на бесконечной кромке при наклонном падении. Задачу нахождения R и T можно по сравнению с вышеупомянутыми задачами считать одномерной (1D).

Выражения (175), справедливые вдали от границы «свет – тень», соответствуют случаю дифракции на идеально проводящей полуплоскости. Рассмотрим теперь случай неидеальных граничных условий. Пусть при взаимодействии поля с безграничной плоской поверхностью граничные условия на ней приводят к тому, что падающая плоская волна отражается от этой поверхности с коэффициентом отражения R и, пройдя через поверхность, выходит с теневой стороны с коэффициентом прохождения T . Наша цель – задать такие же граничные условия на рассматриваемой полуплоскости и построить решение, учитывающее форму рассеивателя. При помощи такого подхода формулы получить намного проще, чем находить двумерное решение задачи дифракции на полуплоскости с неидеальными граничными условиями.

Способ учета граничных условий, предлагаемый в данном разделе, основан на методе обобщенного эйконала (МОЭ) и является эвристическим. Использование МОЭ позволяет находить решения не только для клина или полуплоскости, а для двумерных рассеивателей, имеющих образующую сложной формы. Правда, мы ограничимся рассмотрением рассеивателей простой формы.

В соответствии с МОЭ решение задачи дифракции на двумерном идеально проводящем рассеивателе с кромкой сложной формы можно представить во вспомогательной области. Эта область состоит из верхней и нижней полуплоскости, граница между полуплоскостями соответствует границе рассеивателя. Такое представление позволяет дать решению физическую интерпретацию. Считаем, что верхняя полуплоскость соответствует листу, связанному с падающим полем, нижняя – с отраженным. Решение для рассеянного поля непрерывно и периодически в двулистной области. Формула для дифракционного коэффициента также состоит из двух частей, которые можно условно разместить в двух листах вспомогательной области. Первые слагаемые в дифракционных коэффициентах (175) свяжем с листом падающей волны, вторые – с листом отраженной волны.

5.1.3 Построение эвристического решения

Умножая часть решения, связанную с отраженным полем и расположенную в нижней полуплоскости, на коэффициент отражения R , получаем вклад, описывающий рассеянную часть, связанную с отраженным полем. Умножая часть решения, связанную с прошедшим полем и расположенную в верхней полуплоскости, на $(1 - T)$, получаем вклад, описывающий рассеянную часть, связанную с прошедшим полем. Множитель $(1 - T)$ получается таким потому, что из единичной амплитуды «теневого» поля вычитается поле амплитудой T , прошедшее через рассеиватель и таким образом изменяющее амплитуду рассеянного

поля.

Применяя описанную выше методику, получим из (175) формулу обобщенного дифракционного коэффициента для полупрозрачной полуплоскости:

$$fg(R, T, \varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{1-T}{-\cos \frac{\varphi-\varphi_0}{2}} + \frac{R}{-\cos \frac{\varphi+\varphi_0}{2}} \right). \quad (179)$$

При $T=0$, $R=\pm 1$ выражение (179) совпадает с одним из выражений (175). Таким образом, в зависимости от значения R (179) описывает обе поляризации электромагнитной волны.

Построим эвристическую формулу для решения трехмерной задачи дифракции при нормальном падении волны на кромку плоского многоугольного рассеивателя при выполнении условия дальней зоны. Для рассеянного поля вдали от кромки получим:

$$E = \frac{1}{2\pi} \frac{ka_j \exp(ikR_0)}{kR_0} \exp\{i\Phi_j\} fg(R, T, \varphi, \varphi_0). \quad (180)$$

Здесь E – рассеянное поле, $fg(R, T, \varphi, \varphi_0)$ – обобщенный дифракционный коэффициент, a_j – длина j -ой стороны рассеивателя, i – мнимая единица, R_0 – расстояние от центра рассеивателя до точки наблюдения, Φ_j – фаза в точке на конце кромки. На дифракционном конусе (и в том числе – в случае нормального падения) фаза одинакова во всех точках j -ой стороны. Поляризация рассеянного поля определяется с учетом специфики конкретной физической задачи.

Как уже было сказано, выражение (173), в которое входит (179), справедливо лишь вдали от границы «свет-тень». По аналогии с (179) можно построить и выражение более общего вида для рассеивателя клиновидной формы с неидеальными граничными условиями, справедливое в том числе в окрестности границы «свет-тень»:

$$E = \nu K[(1-T), r, \varphi - \varphi_0] + \nu K[R, r, \varphi + \varphi_0], \quad (181)$$

где

$$\nu K(K, r, \psi) = K \frac{-2}{n} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi}{n}} \cos \frac{\psi}{2} \frac{e^{-ikr \cos \psi}}{\sqrt{\pi i}} \int_{\infty \cos(\psi/2)}^{\sqrt{2kr} \cos(\psi/2)} \exp(iq^2) dq, \quad (182)$$

где $\psi = \varphi \mp \varphi_0$.

Вдали от границы «свет-тень» нетрудно получить из (181) и (182) выражение (173) с дифракционными коэффициентами (179):

$$fg(R, T, n, \varphi, \varphi_0) = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \left(\frac{1-T}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi-\varphi_0}{n}} + \frac{R}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi+\varphi_0}{n}} \right). \quad (183)$$

В случае полуплоскости $n=2$, и (183) переходит в (179).

Отметим справедливость формулы:

$$fg(R, T, n, \varphi, \varphi_0) = (1 - T)fg(R_1, 0, n, \varphi, \varphi_0), \text{ где } R_1 = R/(1 - T). \quad (184)$$

Выражение (184) означает, что с формальной точки зрения при построении эвристических формул модели полупрозрачного рассеивателя можно использовать модель непрозрачного рассеивателя, т.е. для которого $T = 0$.

5.2 Верификация эвристического решения

Важной составляющей построения любого эвристического решения является верификация полученных формул. Она может быть проведена как численными, так и аналитическими методами. Можно даже сказать, что наличие хорошего верификационного решения является необходимым условием начала работы по построению эвристического решения.

Как уже говорилось выше, получать аналитические решения для полубесконечных рассеивателей с неидеальными граничными условиями довольно сложно. Кроме того, вид полученного аналитического решения не всегда позволяет использовать его для верификации эвристических формул. Поэтому подходящее аналитическое решение для верификации можно найти лишь для некоторых видов граничных условий. Для других видов граничных условий можно применять численную верификацию.

Можно сказать, что сначала мы «угадываем» формулы, затем проверяем их. На основании результатов проверки либо утверждаем, что данные формулы являются решением, либо модифицируем формулы, либо ищем другое решение. Верификация может быть аналитической, численной или экспериментальной. Проверять можно двумерные или трехмерные формулы, в зависимости от целей и возможностей.

Если эвристическое решение, построенное при помощи ОДК, совпадет с верификационным решением, то это будет означать, что мы достигли своей цели и построили достаточно простое и быстродействующее аналитическое решение. Если же эвристическое решение не совпадет с верификационным, такое сравнение все равно будет очень полезным, поскольку будет означать присутствие дополнительных физических факторов и таким образом позволит лучше понять физику процесса.

Для верификации выражения (179) в электромагнитном случае параметры задачи пришлось выбрать с учетом того, какое именно аналитическое решение удалось найти в литературе. В работе [73] проведена детальная верификация решения, аналогичного выражению (181) с функциями νK (182), в которые подставлены коэффициент отражения R для импедансного клина и $T = 0$. Показано, что результаты расчета по формуле (181) хорошо соответствуют строгому решению [74]. Исследуемые в [73] формулы по внешнему виду немного сложнее, чем (181), поскольку позволяют избежать возникновения некомпенсированных сингулярностей, которые могут возникать в случае дифракции на клине для некоторых значений углов. В книге [1], на основе которой построена формула (181), сингулярности формулы (168) устраняются при помощи усложнения формулы (169). Способ устранения некомпенсированных сингулярностей представляет собой технический вопрос и не оказывает влияния на смысл решения. Если считать, что сингулярности уже устранены, то можно показать, что выражения из [73] в точности совпадают с формулой (181), и таким образом верификация, проведенная в [73], справедлива и для (181).

Из формулы (184) следует, что дифракционный коэффициент полупрозрачной полуплоскости можно выразить через дифракционный коэффициент импедансного клина.

Справедливости ради нужно признать, что в реальности эти модели могут отличаться сильнее. Тем не менее, как будет показано ниже, описание граничных условий при помощи коэффициентов R и T для безграничной плоской поверхности имеет полное право на существование и пригодно для описания процесса дифракции не только в электродинамике, но и в других областях физики.

5.3 Точность полученных формул и их применение в трехмерных задачах дифракции

В общем случае предложенный подход не является строгим и имеет методические погрешности. Решение будет непрерывным и периодичным в двулистной области только в случае, если R и T – постоянные величины, равные 1, т.е. для рассеивателя с идеальными граничными условиями. Импедансные граничные условия могут обуславливать разрыв постоянной величины на освещенной границе рассеивателя, но на теневой стороне этот разрыв не будет постоянным. Поэтому, хотя на свету и на границе «свет-тень» решение получается довольно точным, на теневой стороне рассеивателя эвристическое решение может немного отклоняться от заданных граничных условий. Однако это отклонение компенсируется важным достоинством – простотой аналитических формул.

Новый подход можно применять при решении трехмерных задач. В задаче дифракции на плоском угловом секторе с идеальными граничными условиями (Глава 4) предложен способ улучшения решения в приближении метода эквивалентных контурных токов (МЭКТ). В МЭКТ заложена методическая погрешность, связанная с тем, что не учитывается возмущение поля на концах кромок. Эта погрешность аналогична погрешности метода физической оптики (ФО), когда не учитывается возмущение поля на краю полуплоскости. В этой диссертации показано (Глава 4), что решение МЭКТ можно существенно улучшить при помощи эвристических корректирующих множителей, в которые входит частное от деления физоптических и строгих дифракционных коэффициентов.

Строгих решений трехмерных задач существует очень мало, значительно меньше, чем двумерных, которых, в свою очередь, тоже немного. Поэтому ценность предлагаемого эвристического подхода (как и других эвристических подходов) заключается в возможности работать с двумерными и даже трехмерными аналитическими формулами, описывающими решения задач, для которых еще не существует строгих решений. Метод обладает такой же универсальностью, что и ФО. При помощи МОЭ можно дополнительно усложнить форму кромки, изменив вид дифракционных коэффициентов (179), (183), (184).

Конечно, не следует забывать о необходимости верификации эвристических формул, которую при отсутствии строгих аналитических решений можно провести при помощи численных методов.

Если в формуле (179) менять не только величины R и T , но и угол φ_0 , то можно построить эвристические формулы для волны, которая имеет другие геометрооптические границы «свет – тень», а именно – отражается в направлении, отличном от зеркального, и, проходя через рассеиватель, выходит из его теневой стороны в направлении, не совпадающим с направлением падения возбуждающей волны. Такие решения актуальны для типов волн, отличных от электромагнитных, например, для упругих волн.

Теперь по аналогии с формулами (181) для рассеянного поля получим выражения для полного поля. Пусть на рассеиватель падает плоская волна, характеризующаяся фазовым множителем

$$U = \exp(-ikS) = \exp[-ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)], \quad (185)$$

где идеально проводящий экран занимает полуплоскость $y=0, x>0$. Решение для полного поля приведено в [57], см. также Приложение 2:

$$\begin{aligned} U_{TH0} = E_z &= (\pi i)^{-1/2} \exp(ikr) \{G(u) - G(v)\}, \\ U_{TE0} = H_z &= (\pi i)^{-1/2} \exp(ikr) \{G(u) + G(v)\}, \end{aligned} \quad (186)$$

где

$$u = -\sqrt{2kr} \cos \frac{\theta - \alpha}{2}, \quad v = -\sqrt{2kr} \cos \frac{\theta + \alpha}{2}. \quad (187)$$

В этих выражениях

$$G(x) = \exp(-ix^2) F(x), \quad (188)$$

$$F(x) = \int_x^\infty \exp(iq^2) dq = \int_0^\infty \exp(iq^2) dq - \int_0^x \exp(iq^2) dq = \frac{\sqrt{\pi i}}{2} - \int_0^x \exp(iq^2) dq. \quad (189)$$

Направлению «прямо вперед» соответствуют углы: $\theta = \pi + \alpha, \theta - \alpha = \pi; u = 0$.

Направлению «зеркальное отражение» соответствуют углы: $\theta = \pi - \alpha, \theta + \alpha = \pi; v = 0$.

Радиус – вектор нити тока в декартовых координатах $\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = r_0(\cos \alpha, \sin \alpha)$, радиус – вектор точки наблюдения в декартовых координатах $\vec{r} = (x, y) = r(\cos \theta, \sin \theta)$.

Формулы (186) описывают полное поле. Если $\theta \pm \alpha < \pi$, то $u < 0, v < 0$ (точка наблюдения расположена «на свету» для прошедшей или отраженной волны).

Следуя методу обобщенного эйконала, рассмотрим поле в двулистной области, каждый из листов которой представляет собой полуплоскость. Верхняя полуплоскость, в которой расположен источник, соответствует листу падающего поля, нижняя полуплоскость соответствует листу отраженного поля. Поведение поля на границе рассеивателя определяется видом конкретных граничных условий. Если граничные условия – идеальные, как в случае идеально проводящей полуплоскости, то поле на границе рассеивателя непрерывно. При этом $T=0, R=\pm 1$. Если граничные условия – неидеальные, то они характеризуются значениями T и R , отличающимися от приведенных выше. Например, если $T=0$, но $|R| \neq 1$, то приближенно учесть граничные условия можно, умножив часть поля, связанную с отраженным полем, на множитель R . При этом получим

$$U_R = (\pi i)^{-1/2} \exp(ikr) \{G(u) + RG(v)\}. \quad (190)$$

Если в (190) подставить значения коэффициента отражения $R = \pm 1$, то выражение (190) совпадет с одним из выражений (186), а скалярная функция U_R будет описывать амплитуду полного поля, рассеянного полуплоскостью с идеальными граничными условиями при нормальном падении на нее электромагнитной волны с ТН- или ТЕ- поляризацией.

Первое слагаемое в фигурных скобках выражения (190) описывает вклад падающего

поля, второе – вклад отраженного поля. Если еще и $T \neq 0$, то к двум слагаемым в фигурных скобках добавится третье, описывающее вклад поля прошедшей волны. Этот вклад имеет границу тени там же, что и падающее поле, но отличается от него противоположным расположением областей света и тени. Поэтому аргумент функции G берем с противоположным знаком

$$U_{TR} = (\pi i)^{-1/2} \exp(ikr) \{G(u) + TG(-u) + RG(v)\}. \quad (191)$$

Если вместо полного поля рассматривать рассеянное, то в случае дифракции на полупрозрачной полуплоскости из формулы (191) после удаления вклада геометрической оптики можно будет для дифракционных коэффициентов выделить выражения (179), справедливые для рассеянного поля вдали от границ «свет – тень».

Для того чтобы формулы (187) работали не для плоской волны, а для нити тока, расположенной на расстоянии r_0 от кромки, нужно в выражения для u и v вместо r подставить выражение $\frac{rr_0}{r+r_0}$. Тогда вместо (187) получим

$$u = -\sqrt{2k \frac{rr_0}{r+r_0}} \cos \frac{\theta-\alpha}{2}, \quad v = -\sqrt{2k \frac{rr_0}{r+r_0}} \cos \frac{\theta+\alpha}{2}. \quad (192)$$

В случае плоской волны $r_0 \rightarrow \infty$, и тогда $\frac{rr_0}{r+r_0} \rightarrow r$. Задавая большое значение r_0 ,

можно получить формулы для плоской волны.

Сравним теперь наши обобщенные дифракционные коэффициенты с решением в приближении физической оптики (Приложение 7), которое определяется формулами (326) совместно с (110). Характерной особенностью формулы (326) является то, что коэффициенты отражения r и прохождения t объединяются между собой и умножаются на интеграл по поверхности I . Особенности решения на границах «свет – тень» содержатся в интеграле I , и поскольку этот интеграл должен обеспечивать границы «свет – тень» по обе стороны от плоскости рассеивателя, они должны быть расположены симметрично относительно плоскости рассеивателя, и кроме того должно выполняться соотношение $r=1-t$. Только в этом случае формулы (326) дадут правильное решение.

Формулы (181) – (184), (191) обладают большей универсальностью, чем (326), поскольку коэффициенты R и T в них могут принимать произвольные значения, а сами формулы построены в двулистной области и могут обеспечить несимметричное расположение под заданными углами границ «свет – тень» у отраженной и прошедшей волн. Это важно при построении эвристических формул для сложных задач дифракции, например, для дифракции упругих волн. Если граничные условия таковы, что геометрооптические «вырезки поля» (рис. 25 (б)), соответствующие отраженной и прошедшей волнам, направлены в произвольных направлениях, то наш подход и в этом случае позволяет уточнить приближение физической оптики и получить независимые решения для каждой из вышеупомянутых пространственных «вырезов».

На рис. 25 (а) изображена схема взаимодействия падающей волны с кромкой плоского полубесконечного рассеивателя («двумерный» случай). Отличие между «одномерной» и «двумерной» картинами рассеяния заключается в том, что в одномерном случае волны рассеиваются только в выделенных направлениях пространства. В двумерном случае этим

направлениям соответствуют границы «свет – тень», но рассеяние происходит во всех направлениях. Предложенный в этой диссертации подход ОДК позволяет использовать более простое (одномерное) решение для решения более сложных (двумерных) задач.

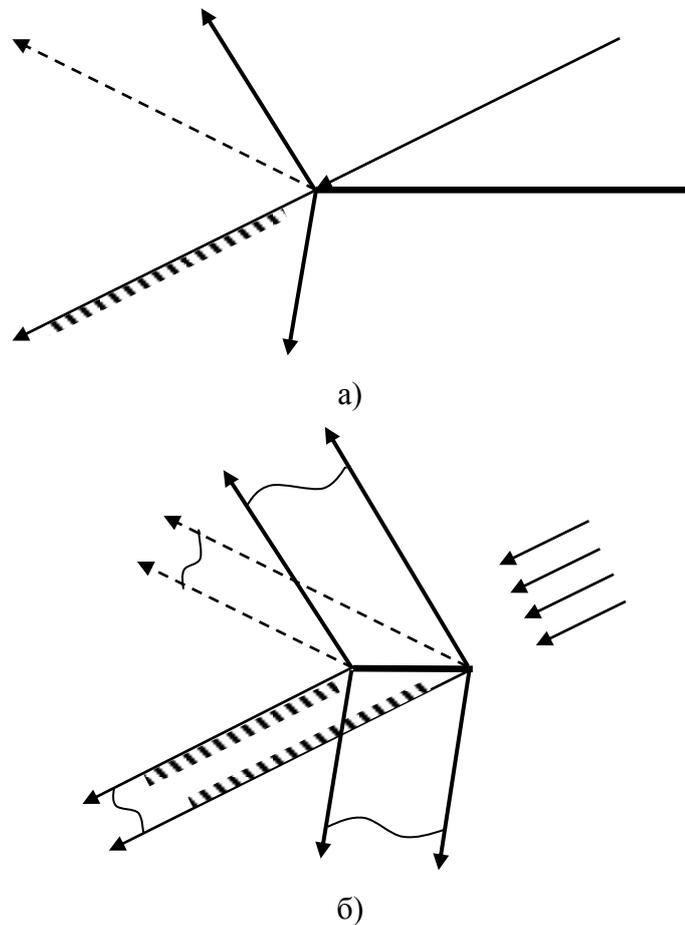


Рис. 25

К задаче о нахождении обобщенного дифракционного коэффициента. Рассеяние на полуплоскости с неидеальными граничными условиями (а) и пространственные «вырезки» при дифракции на рассеивателе конечных размеров (б).

На рис. 25 (б) изображена схема взаимодействия падающей волны с двумерным рассеивателем конечного размера (полосой). При отражении плоской волны от полосы и прохождении через нее можно в приближении геометрической оптики выделить несколько «вырезок» из плоской волны. Аналогичные «вырезки» можно выделить и в трехмерном случае. Каждую «вырезку» можно рассматривать отдельно от остальных, что дает гибкость для построения эвристических решений при заданных граничных условиях. Подходы, описанные в данной диссертации, позволяют строить в трехмерном пространстве эвристические формулы для сигнала, создаваемого каждой из отдельно взятых «вырезок». Точность эвристических решений приближается к точности строгих решений, а простота формул соответствует простоте формул в приближении физической оптики.

Скажем несколько слов о предполагаемой точности решений, полученных при помощи обобщенного дифракционного коэффициента. Все будет зависеть от того, насколько точно выполняются условия краевой задачи (см. также п.1.1.1). Математическая постановка краевой задачи включает в себя волновое уравнение (а), начальные (б) и граничные условия (в). Для обеспечения единственности решения к этим пунктам добавляют условие на

бесконечности (γ) и условие на ребре (δ).

Многие подходы, изложенные в этой диссертации, состоят в том, чтобы уточнить приближение физической оптики. Если говорить о дифракции на идеально проводящей полуплоскости, то можно убедиться в том, что приближение ФО удовлетворяет всем условиям краевой задачи, за исключением условия Мейкснера на ребре. В случае дифракции на идеально проводящем клине приближение ФО не удовлетворяет уже двум условиям краевой задачи: условию на ребре и граничным условиям на теневой поверхности клина.

Решение с обобщенными дифракционными коэффициентами для полупрозрачной полуплоскости основано на строгом решении для идеально проводящей полуплоскости. Поэтому условия на ребре будут выполняться. Что касается граничных условий, то их выполнение зависит от того, насколько точно соответствуют заданные нами коэффициенты отражения и прохождения R и T реальной ситуации на поверхности рассеивателя. В формулах для ОДК мы берем R и T из задачи взаимодействия волны с плоской безграничной поверхностью и считаем, что они зависят от угла φ_0 , но не зависят от угла φ . Таким образом R и T определяют значения геометрооптического поля на границах «свет – тень», а поведение поля при удалении от этих границ происходит в эвристическом решении так же, как в задаче дифракции на идеально проводящем рассеивателе. В этом случае можно утверждать, что граничные условия будут лучше выполняться на освещенной стороне рассеивателя и хуже – на теневой, поскольку на освещенную сторону поверхности волна падает от источника, расположенного под углом φ_0 по отношению к кромке, а на теневую – уже от кромки, которая на плоской безграничной поверхности вообще отсутствует. Можно сказать, что недостаточно точный учет граничных условий на теневой стороне рассеивателя является заложенной методической погрешностью нашего подхода.

В принципе, ничто не мешает нам учесть факт наличия кромки и рассчитать переотражение волны между освещенной и теневой частями поверхности. Так было сделано в книге [51] для переотражений сигнала в приближении физической оптики, и в результате данный процесс привел к получению сходящегося ряда, соответствующего строгому решению. Но учет переотражения приведет к усложнению эвристического решения, одним из главных достоинств которого мы считаем простоту формул. К тому же верификация простых формул вполне может показать их хорошее совпадение со строгим решением.

Подход ОДК предназначен не только для исследователей, желающих простыми способами получить достаточно точные решения. Автор хотел бы рекомендовать профессионалам в области численных расчетов при получении двумерных или трехмерных решений дополнительно находить «одномерные» коэффициенты отражения и прохождения R и T . Тогда на основе этих данных можно было бы построить эвристические формулы и сравнить их с численным решением. Это позволило бы лучше разобраться в физике исследуемого явления.

Для полноценного исследования дифракционных свойств рассеивателя с неидеальными граничными условиями следует решить ряд ключевых задач. В дополнение к использованию известного практически важного случая дифракции на плоском многоугольнике в приближении физической оптики нужно также получить двумерное решение для кромки, а также набор решений для плоского углового сектора в случае различных положений источника и точек наблюдения. Этот набор позволит проверить и настроить эвристическое аналитическое решение соответствующей ключевой задачи.

ГЛАВА 6. МЕТОД БАЗОВЫХ КОМПОНЕНТОВ

Аналитические решения в теории дифракции – предмет исключительной важности и ценности. Они позволяют разобраться в сути происходящих дифракционных явлений, интерпретировать экспериментальные результаты, решать сложные задачи, для которых требуются эффективные быстродействующие решения и т.п. Аналитические решения получают при помощи строгих математических подходов или при помощи таких эвристических методов, как ГТД и МКВ, а также в виде инженерных формул.

По отношению к подходам, которые не основаны на математически строгих методах, применяется термин физическая теория дифракции (ФТД). В узком смысле этот термин иногда применяется к МКВ. Мы применяем термин ФТД в широком смысле.

Следует отличать друг от друга математическую и физическую теорию дифракции и не оценивать преимущества и недостатки ФТД с точки зрения математики. Отсутствие математической строгости не означает автоматического отсутствия научной ценности. Несмотря на свою нестрогость, ФТД занимает важное место в теории дифракции.

Как правило, новые аналитические решения теории дифракции получают на основе строгих математических методов, в основном при помощи метода разделения переменных. Решения обычно имеют вид рядов спецфункций в системах координат, связанных с исследуемой геометрией задачи. Проще всего получать такие решения для идеально проводящих рассеивателей, неидеальные граничные условия значительно усложняют решение. С этими особенностями связаны недостатки, затрудняющие применение строгих аналитических формул, а именно – сложность самих этих формул и сложность их получения. Поэтому эвристические формулы часто становятся предпочтительнее при решении практических задач.

Таким образом, возможности получения новых строгих аналитических решений ограничены, в то время как возможности получения новых численных решений намного шире. Поэтому возможность получения аналитических формул на основе численных решений привлекательна с точки зрения решения практических задач.

Метод физической оптики (ФО) – универсальный подход, дающий гарантированный результат. Однако его точность, как правило, невысокая. Поэтому для повышения точности применяют эвристические методы, в том числе ГТД и МКВ. В этих методах приближенные решения трехмерных задач получают при помощи строгих решений двумерных задач, учитывающих возмущение поля, поперечное по отношению к кромке.

В некоторых случаях (например, в направлении главного и первого бокового лепестков зеркальных антенн, для уголкового отражателя, рассеивающих главным образом в направлении «прямо назад») приближение ФО дает достаточно точный результат. При отклонении от границы «свет – тень» точность уменьшается. Причину этого можно объяснить, если понимать особенности процесса дифракции и разбираться в эвристических методах, в частности – в МКВ и ГТД.

Если не углубляться в выявление особенностей дифракционных процессов, то на примере отдельных частных случаев (в том числе – тех, о которых говорится в предыдущем абзаце) можно сделать ошибочное предположение, что ФО всегда дает точный результат.

На самом деле точность приближения ФО зависит как от особенности геометрии, так и от граничных условий, что будет далее показано в процессе анализа дифракции на полупрозрачной полуплоскости.

Для автономизации формул и повышения быстродействия применяют инженерные формулы, основанные на интерполяции строгих решений теории дифракции. Но они не универсальны (ни в плане единообразия способов получения, ни в плане гибкости при замене составляющих) и не предназначены для проведения физической интерпретации.

В предыдущих главах данной диссертации предложен ряд подходов, позволяющих сформулировать новый метод, относящийся к ФТД – метод базовых компонентов (МБК). В отличие от инженерных методов, имеющих лишь практическую пользу, МБК является физическим методом и имеет научную ценность, поскольку позволяет провести физическую интерпретацию.

МБК представляет собой новый подход, объясняющий строгое аналитическое или численное решение, которое считаем компьютерным экспериментом при помощи набора базовых компонентов. Набор базовых компонентов получаем при помощи простейших аналитических решений задач дифракции и дополняем по мере обнаружения новых свойств процесса дифракции. Такой подход позволяет получать аналитические формулы нового качества и предоставляет новые возможности для исследования процесса дифракции.

МБК имеет принципиальное отличие от ГТД и МКВ. Подходы ГТД и МКВ при построении первичных решений не выделяют поперечное возмущение в отдельную проблему, это является заложенной методической погрешностью. При необходимости учета дифракции на вершинах ГТД и МКВ находят влияние продольного возмущения поля теми же средствами (переотражением лучей и соответствующими краевыми полями, но уже не двумерными, а трехмерными) [72, 75, 76]. А в МБК уже при построении первичных решений применяют дополнительные множители, описывающие новое явление (возмущение, продольное по отношению к кромке).

ГТД и МКВ работают со строгими двумерными решениями. Для других видов граничных условий нужно получать новое двумерное решение. МБК определяет тенденцию поведения решения при изменении входных параметров. Не исключено, что при исследовании определенного числа решений с разными значениями R и T и подтверждении найденной закономерности можно будет найти решение МБК, общее для всех видов граничных условий, и менять в нем только «одномерные» зависимости R и T .

К преимуществам МБК перед ГТД и МКВ следует отнести более высокую точность и формулы, имеющие автономию от строгого двумерного решения. Кроме того, МБК предоставляет возможность физической интерпретации результатов строгого расчета (численного эксперимента). Последовательный учет всех факторов, влияющих на решение (граничные условия R и T , геометрия системы, ФО, поперечное возмущение (ОДК), функция полупрозрачности, продольное возмущение) позволяет провести углубленное изучение всех особенностей процесса дифракции.

Получение аналитических решений на основе строгих придает строгим решениям те преимущества, которых у них нет: быстродействие, автономность, физичность. Задачи по-

вышения быстродействия численных решений уже стоят. Конечно, получение аналитических формул только для повышения быстродействия – недешевое удовольствие, но приобретение дополнительных преимуществ (см. выше) может создать новые возможности для всего проекта. Тем более, что формулы МБК можно получать по заранее намеченному плану, гарантированно и в обозримые сроки.

В качестве альтернативы МБК можно рассматривать инженерные подходы. Они тоже позволяют получать автономные аналитические формулы. Но эти формулы предназначены лишь для имитации поведения строгого решения в зависимости от входных параметров. Они не основаны на физических закономерностях, что не позволяет использовать их для проведения физической интерпретации. При изменении условий задачи приходится строить новую инженерную формулу.

МБК обладает тем преимуществом, что формулы построены на основе базовых компонентов, имеющих физический смысл. Поэтому на основе этих формул можно, во-первых, проводить физическое исследование строгого решения, а, во-вторых, проводя замену отдельных компонентов, получать новые формулы.

Численное решение можно считать компьютерным экспериментом. А результаты эксперимента (в нашем случае – как физического, так и компьютерного) всегда важно уметь объяснять при помощи теории (в качестве которой мы берем МБК).

6.1 Введение

Теория дифракции – междисциплинарная наука, находящаяся между физикой и математикой. Исторически теория дифракции имела сменяющие друг друга периоды, в течение которых развивалась либо как раздел физики, либо как раздел математики. В середине 20 века появились две эвристические теории: геометрическая теория дифракции (ГТД) [48, 49] и метод краевых волн (МКВ) [1, 51, 52], сыгравшие важную роль при решении ряда практических задач дифракции на объектах большого размера, для которых было невозможно получить математически строгие решения. Недавно отмечали 50-летний юбилей этих теорий [77].

В настоящее время также есть ряд практических проблем, которые представляют значительный интерес и связаны с решениями задач дифракции. Это дифракция на объектах с пониженной радиолокационной заметностью, распространение радиоволн в городских условиях, дифракция на кристаллах, локация сейсмическими волнами и т.п..

При решении практической проблемы, связанной, например, с маскировкой или распознаванием объекта радиолокации, важно иметь эффективный (точный и быстродействующий) способ получения решения задачи дифракции на таком объекте. При этом строгие аналитические или численные решения не всегда являются лучшим вариантом, поскольку могут быть громоздкими или недостаточно быстродействующими.

Данная статья посвящена описанию нового подхода (метода базовых компонентов – МБК) в физической теории дифракции (ФТД). Иногда под ФТД понимают то же, что и под МКВ. Но термин ФТД имеет и более широкое толкование. Его можно применять к любому подходу теории дифракции, основанному не на строгих математических, а на физических принципах. Это метод физической оптики (ФО), уже упомянутые ГТД и МКВ, а

также другие методы.

6.2 Эвристические подходы. Геометрическая теория дифракции и метод краевых волн

Математически строгое решение в целом отражает комплексное воздействие на решение всех параметров постановки задачи. Вид строгих аналитических формул зависит от способа получения решения и может, например, представлять собой ряд из специальных функций, каждая из которых зависит от всех параметров задачи [15]. Разобраться во влиянии отдельных факторов сложно. Численные решения вообще не имеют аналитических выражений.

В отличие от математически строгих подходов, эвристические формулы основаны на физических принципах [3, 59, 175]. Применение эвристических формул позволяет выразить зависимость от физических характеристик в наиболее компактной и понятной форме. Поэтому наличие математически строгого решения не снимает необходимости получать аналитические эвристические формулы. Они помогают разобраться в физике решения.

Зависимость от условий задачи в эвристические формулы компактно входит в явном виде. В число условий задачи входят: геометрия задачи, форма рассеивателя, граничные условия. С физической точки зрения граничные условия удобно описывать коэффициентами отражения и прохождения R и T , наглядно описывающими взаимодействие плоской волны с безграничной плоской поверхностью. К задаче физической интерпретации результатов относится выявление факторов влияния условий задачи на те или иные характеристики решения.

Эвристические решения строятся на основе математически строгих решений простейших задач, на основе базовых физических принципов электродинамики и теории волн (таких как принцип локальности поля, принцип дополнительности и т.п. [42, 78, 79]), а также на основе интуиции и опыта. Точность эвристических решений проверяется верификацией, т.е. сравнением со строгим решением. Если размеры исследуемого рассеивателя не позволяют получить строгое решение, эвристическую методику можно отработать на рассеивателе меньшего размера, а затем применить для рассеивателя большего размера.

Иногда эвристические формулы получают строгое математическое доказательство, как это произошло с классическим решением Зоммерфельда для дифракции на клине. Вначале интегральное представление для этого решения было получено эвристическим способом, а позже было доказано при помощи разложения по цилиндрическим функциям [1].

Современная тенденция развития теории дифракции заключается в том, что решения аналитических задач усложняются, в то время как возможность получения всевозможных численных решений увеличивается (см., например, [80, 81]).

При построении эвристических формул большую роль играют строгие эталонные решения для полубесконечных рассеивателей. На таких решениях основаны ГТД и МКВ.

Подходы ГТД и МКВ берут за основу строгое двумерное решение для полубесконечного рассеивателя. В ГТД постулируют, что поле вдали от трехмерного рассеивателя определяется полем области стационарной фазы на кромке. Под областью стационарной фазы понимается область точек на кромке, которые дают в рассеянное поле вклад с постоянной

фазой. В качестве решения берут эталонную задачу рассеяния на полубесконечном двумерном рассеивателе. В МКВ постулируют, что поле на поверхности трехмерного рассеивателя равно полю в окрестности кромки для соответствующей двумерной эталонной задачи. В приближении ГТД трехмерное решение равно сумме вкладов от точек стационарной фазы, а в приближении МКВ трехмерное решение равно интегралу от эвристически найденного поля на поверхности рассеивателя.

Для применения МКВ требуется наличие строгих двумерных решений, а при необходимости расчета дифракции на вершине – строгих трехмерных решений для краевых токов [72]. В качестве решений, применяемых в МКВ, обычно берут имеющиеся в наличии строгие аналитические формулы (см., например, [82, 83]).

Как в ГТД, так и в МКВ в течение всего процесса решения практической задачи используют эталонное решение для двумерного рассеивателя. Если это решение численное, то должны быть постоянно задействованы необходимая вычислительная техника и соответствующие программное обеспечение.

6.3 Новый эвристический подход – метод базовых компонентов

В данной диссертации предложен ряд подходов, позволяющих получать эвристические формулы задач дифракции на рассеивателях в форме многоугольников и многогранников. Отличия этих подходов от известных ГТД и МКВ дают основание выделить совокупность новых подходов в отдельный метод – метод базовых компонентов (МБК).

Предлагаемый новый подход МБК отличается от ГТД и МКВ. В МБК при построении трехмерного решения за основу берут базовые компоненты из заранее подготовленного набора. Базовые компоненты – это фрагменты формул, найденные из анализа математически строгих аналитических решений простейших задач. Точность решений МБК проверяется при помощи верификации, т.е. сравнения формул со строгим решением. При этом может осуществляться и «настройка» решения, т.е. его видоизменение с целью повышения точности. В дальнейшем формулы МБК используют автономно от верификационного решения.

Базовые компоненты, характеризующие зависимость от геометрии задачи, можно выделить из математически строгих аналитических формул для наиболее простых постановок задачи. Строгое трехмерное решение получено в приближении физической оптики для плоского идеально проводящего рассеивателя при выполнении условия дальней зоны. Строгое двумерное решение получено для идеально проводящего клина. Дифракционные коэффициенты также получены для идеально проводящего клина и в приближении физической оптики. Решения более сложных задач строятся на основе комбинирования базовых компонентов из подготовленного набора.

С целью учета влияния граничных условий на поверхности рассеивателя в МБК применяют «одномерные» решения для коэффициентов отражения и прохождения R и T , которые описывают взаимодействие плоской волны с безграничной плоской поверхностью. Поэтому МБК объясняет поведение двумерного решения для бесконечной кромки, в отличие от ГТД и МКВ, которые принимают это решение в качестве условия задачи. В связи

с этим можно утверждать, что для интерпретации строгих результатов при помощи эвристических формул МБК подходит лучше, чем ГТД и МКВ.

В основе МБК лежат два решения.

3.1. Интегральное представление. Интегральное представление (21), полученное на основе МОЭ (см. Глава 1). Оно является обобщением для рассеивателей произвольной формы интегрального представления Зоммерфельда [7], (29).

3.2. Решение ФО. Решение задачи рассеяния плоской электромагнитной волны на идеально проводящей плоской пластине в приближении физической оптики при выполнении условия дальней зоны (146). Без ограничения общности мы рассматриваем пластину многоугольной формы, поскольку на ней можно лучше выявить все особенности решения.

6.4 Интегральное представление на основе метода обобщенного эйконала

В качестве основы для получения базовых компонентов берем интегральное представление (21), характеризующее рассеянное поле для случая дифракции электромагнитной волны на двумерном рассеивателе с профилем сложной формы и его частный случай для дифракции на клине (61). С учетом (57) выражение (61) можно переписать в виде

$$v(\psi) \cong \frac{P(w_{sm})}{\sqrt{2\pi ik \frac{rr_0}{r+r_0}}} \frac{\frac{i}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi}{n}} \frac{2i \sqrt{S(w_{sm}) - S(\psi)}}{\exp[iS(w_{sm}) - iS(\psi)]} \frac{\int_{\infty \sqrt{S(w_{sm}) - S(\psi)}}^{\sqrt{S(w_{sm}) - S(\psi)}} \exp(iq^2) dq}{\infty \sqrt{S(w_{sm}) - S(\psi)}}. \quad (193)$$

Для определения рассеянного поля в случае ТН- или ТЕ- поляризованной электромагнитной волны применяем выражения:

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= v(\varphi - \varphi_0) - v(\varphi + \varphi_0) \quad (\text{ТН}), \\ V(\varphi) &= v(\varphi - \varphi_0) + v(\varphi + \varphi_0) \quad (\text{ТЕ}). \end{aligned} \quad (194)$$

Рассмотрим интегральное представление для рассеянного поля в случае двух седловых точек (21) и его частный случай для дифракции на клине (193).

Каждое из двух слагаемых в правой части выражения (193) состоит из четырех сомножителей.

Первый множитель

$$\frac{\sqrt{iP(w_{sm})}}{\sqrt{2\pi k \frac{rr_0}{r+r_0}}} \quad (195)$$

не зависит от угловой переменной и представляет собой произведение значения поля в седловой точке (т.е. на границе тени) на фактор, определяющий зависимость решения от расстояний до источника и точки наблюдения.

Второй множитель

$$\frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi}{n}} \quad (196)$$

представляет собой – половину дифракционного коэффициента. Полный дифракционный коэффициент для определенного вида поляризации получится, если сложить или вычесть значения этого сомножителя в точке наблюдения:

$$\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n}} \pm \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{n}} \right). \quad (197)$$

Произведение третьего и четвертого множителей

$$\frac{2i \sqrt{S(w_{sm}) - S(\psi)}}{\exp[iS(w_{sm}) - iS(\psi)]} \frac{\int_{\infty \sqrt{S(w_{sm}) - S(\psi)}}^{\sqrt{S(w_{sm}) - S(\psi)}} \exp(iq^2) dq}{\int_{\infty \sqrt{S(w_{sm}) - S(\psi)}}^{\sqrt{S(w_{sm}) - S(\psi)}} \exp(iq^2) dq} \quad (198)$$

представляет собой частное от деления интеграла Френеля на свою асимптотику и характеризует зависимость поля от углового расстояния до границы тени. Вдали от границы «свет – тень» это произведение равно 1. На границе «свет – тень» этот множитель равен нулю и компенсирует сингулярность половины дифракционного коэффициента (196). Эта компенсация приводит к тому, что на границе «свет – тень» у полубесконечного рассеивателя поле равно $\frac{1}{2}$ от поля геометрической оптики.

Некоторые исследователи стремятся привести решение именно к такому виду, когда сингулярность дифракционного коэффициента скомпенсирована, а решение с нескомпенсированной сингулярностью считают неполноценным. Однако в [141, 142, 145] было показано, что для трехмерных рассеивателей компенсировать сингулярность неверно. Интегрирование сингулярных дифракционных коэффициентов по замкнутому контуру автоматически компенсирует все сингулярности, приводя к правильному результату.

Изменяя вид сомножителей (195), (196), (197), (198) или входящих в них параметров, можно построить множество эвристических решений: для рассеивателей двумерных или трехмерных, конечного или бесконечного размера, с выполнением или без выполнения условия дальней зоны, для разных видов граничных условий и профиля кромок.

Для более общей формулы (21) разделение на слагаемые можно провести аналогично. Соотношением (21) следует пользоваться в случае, когда рассеиватель имеет сложную форму.

6.5 Решение в приближении физической оптики

Другое решение, на основе которого строят компоненты МБК, это решение дифракции электромагнитного поля на плоском трехмерном рассеивателе в приближении физической оптики при выполнении условия дальней зоны (146).

Меняя в (146) порядок суммирования слагаемых, можно записать решение задачи дифракции как в виде вкладов сторон, так и в виде вершинных волн (154). Выделяя в реше-

нии (146) дифракционные коэффициенты, можно установить связь между двумерными и трехмерными решениями. Заменяя в (146) дифракционные коэффициенты (о чем будет сказано далее), можно получать решение в приближении МКВ для трехмерного рассеивателя, а затем уточнить это решение при помощи функционального множителя.

В физическом решении можно выделить важные особенности:

- решение для многоугольной пластины представляет собой сумму вкладов отдельных кромок;
- из вклада отдельной кромки в случае дифракционного конуса можно выделить сингулярный дифракционный коэффициент, совпадающий с дифракционным коэффициентом двумерной задачи;
- в направлении зеркального отражения вклады всех кромок сингулярны, но в сумме дают правильный результат [142, 145];
- изменив порядок суммирования, можно представить решение в виде вкладов вершин.

6.6 Анализ дифракционных коэффициентов

В МБК широко применяют сингулярные дифракционные коэффициенты (СДК), конкретно – поляризационную часть СДК. Это обусловлено рядом причин:

- СДК можно выделить из сомножителей интегрального представления МОЭ общего вида;
- из всех сомножителей интегрального представления только СДК характеризует профиль кромки и граничные условия, остальные характеризуют геометрию;
- СДК для полупрозрачной полуплоскости можно составить из ФО и ОДК, ни один из которых по отдельности не дает правильное решение (в отличие от того, что написано в [84]);
- при помощи СДК ФО и ОДК строят функцию полупрозрачности;
- при помощи замены СДК ФО на ОДК получают приближение МЭКТ (или МКВ);
- при помощи СДК ФО и ОДК строят модифицирующий множитель для ММЭКТ;
- сумма СДК по замкнутому трехмерному контуру дает верный результат (площадь).

Работа с дифракционными коэффициентами – самое новое достижение МБК. Больше никто этого не делает, хотя в некоторых работах есть элементы, похожие на другие компоненты МБК.

В имеющихся аналитических решениях нет разделения на поперечное и продольное возмущение поля, нет разделения ДК на ФО, ОДК и полупрозрачность. А это важные физические характеристики.

Поперечное возмущение описывает отличие решения от приближения ФО внутри дифракционного конуса в зависимости от углового расстояния точки наблюдения до границы тени. (Возможно, на самом деле это угловое расстояние – некая комбинация между углами, характеризующими положение источника и приемника). Продольное возмущение характеризует зависимость решения от углового расстояния точки наблюдения до дифракционного конуса. (Возможно, это также будет комбинация расстояний).

Часто встречается утверждение, что сингулярные дифракционные коэффициенты – вчерашний день, в то время как несингулярная теория UTD [85] – более прогрессивный подход. Это поверхностное мнение. Диаграммы рассеяния как целых кромок, так и их элементов в зависимости от условий задачи могут иметь разный вид.

Рассмотрим выражения для физоптических дифракционных коэффициентов (177) и соответствующих им дифракционных коэффициентов строгого решения (175). Перегруппировав соответствующие им выражения (158) и (159), получим для физической оптики:

$$f^0(\varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} - \frac{\sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2}}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right) = \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} \quad (\text{TH}),$$

$$g^0(\varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} + \frac{\sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2}}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right) = \frac{-\sin \varphi}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} \quad (\text{TE}),$$
(199)

и для строгого решения:

$$f(\varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} - \frac{1}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right) = \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi_0}{2}}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} \quad (\text{TH}),$$

$$g(\varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} + \frac{1}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right) = \frac{-2 \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi_0}{2}}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} \quad (\text{TE}).$$
(200)

Сравним (199) и (200) между собой. Каждый дифракционный коэффициент (199) или (200) состоит из двух слагаемых, которые получаются в результате применения операции сложения или вычитания (194) к выражению типа (193). В выражении (193) для полубесконечного рассеивателя (клина) фигурируют интегралы Френеля, но вдали от границы «свет – тень» частное от деления интеграла Френеля на свою асимптотику равно 1. Поэтому выражения (199) или (200) имеют место лишь вдали от границы «свет – тень». В окрестности границы «свет – тень» частные от деления интегралов Френеля на свои асимптотики, будучи умноженные на сингулярные дифракционные коэффициенты, компенсируют эти сингулярности и обеспечивают непрерывность решения. Для рассеивателя конечного размера можно пользоваться сингулярными дифракционными коэффициентами для каждого элемента кромки, поскольку в данном случае непрерывность всего решения в целом будет обеспечена интегралом по замкнутому теневому контуру [141 – 143, 145]. Поэтому мы будем говорить о сингулярных дифракционных коэффициентах, имея в виду, что решение в целом является непрерывным.

Сравним между собой выражения (199) и (200). Знаменатели, как половинок дифракционных коэффициентов, так и выражений в целом, одинаковы, в то время как числители отличаются. Этому обстоятельству можно дать физическую интерпретацию. Назовем знаменатели «геометрической» частью дифракционного коэффициента, а числители – «поля-

ризационной» частью. Геометрическая часть зависит от геометрии задачи, а поляризационная часть – от профиля кромки и от граничных условий.

Заменяя поляризационные составляющие дифракционных коэффициентов в выражениях для интегралов по кромке, можно получить эвристические решения множества задач. Так, при помощи замены поляризационной составляющей дифракционных коэффициентов в физоптических формулах были получены эвристические решения задач дифракции на идеально проводящем плоском угловом секторе (см. Приложение 4), на неоднородности в среде распространения упругой волны (см. Приложение 9) и на полупрозрачной полуплоскости [172, 177].

6.6.1 Применение МБК для получения дифракционных коэффициентов полупрозрачной полуплоскости. Построим эвристическое решение для полупрозрачной полуплоскости с граничными условиями [177]. Сравним эвристическое решение с численным решением для случая дифракции электромагнитной волны ТН- поляризации на полуплоскости с граничными условиями типа тонкого слоя [86]:

$$\begin{cases} H_{x+} - H_{x-} = -Z^{-1}E_z, \\ E_{z+} = E_{z-} = E_z \end{cases}, \quad (201)$$

где импеданс $Z=iX$, X – параметр, i – мнимая единица. Здесь знаки «+» и «-» соответствуют областям $y>0$ и $y<0$ соответственно (см. рис. 26).

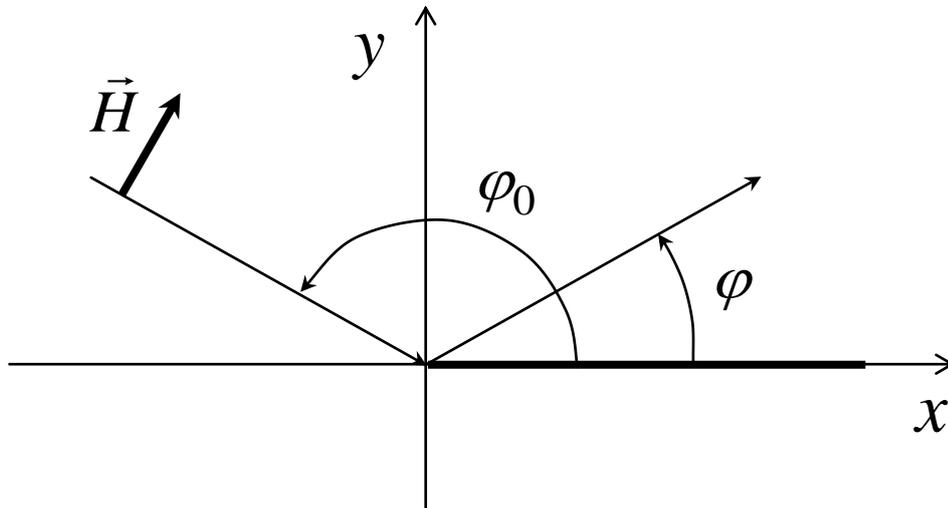


Рис. 26

Геометрия задачи дифракции на полупрозрачной полуплоскости.

На рис. 26 показана геометрия двумерной задачи дифракции для нормального падения электромагнитной волны на полупрозрачную кромку.

Рассмотрим плоский трехмерный рассеиватель, представляющий собой фрагмент плоской поверхности, граничные условия на которой характеризуются коэффициентами отражения и прохождения R и T для задачи взаимодействия волны с плоской безграничной поверхностью с рассматриваемыми граничными условиями типа тонкого слоя:

$$R = \frac{W_0}{-2i \sin(\varphi_0)X - W_0}, \quad W_0 = 120\pi, \quad (202)$$

$$T = 1 + R. \quad (203)$$

Здесь X – изменяемый параметр, от которого зависит коэффициент отражения.

Заметим, что при $X=0$ выполняется $R = -1$, $T = 0$, что соответствует параметрам идеально проводящей полуплоскости при ТЕ- поляризации падающей волны.

Как уже было сказано, МБК позволяет получать эвристические формулы на основе любого строгого решения. Подставим значения параметров R и T (202) и (203) в обобщенный дифракционный коэффициент (179) и аналогичный физоптический дифракционный коэффициент

$$fg^0(R, T, \varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} \left[(1-T) \frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} + R \frac{\sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2}}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right]. \quad (204)$$

При $T=0$, $R = -1$ получим выражения для сингулярных дифракционных коэффициентов идеально проводящей полуплоскости в случае падения ТН- поляризованной электромагнитной волны [1]. В частности, для физоптических дифракционных коэффициентов связь между (199) и (204) можно описать так: $fg^0(-1, 0, \varphi, \varphi_0) = f^0(\varphi, \varphi_0)$, $fg^0(1, 0, \varphi, \varphi_0) = g^0(\varphi, \varphi_0)$. Аналогичные выражения можно получить и для дифракционных коэффициентов строгого решения (179) и (200): $fg(-1, 0, \varphi, \varphi_0) = f(\varphi, \varphi_0)$, $fg(1, 0, \varphi, \varphi_0) = g(\varphi, \varphi_0)$.

Сравним эвристические зависимости (179) и (204) с численным решением. Аналитические выражения (202) для коэффициентов R и T , соответствующие граничным условиям (201), и результаты численного расчета строгого решения (обозначим его $fr(R, T, \varphi, \varphi_0)$) были предоставлены С.Е. Банковым. Численное решение основано на методе Винера – Хопфа [13, 87].

По мере изменения параметра X от 0 до бесконечности коэффициент отражения R меняется от -1 до 0. Поэтому можно считать, что параметр X характеризует прозрачность рассеивателя. Чем больше X , тем больше прозрачность. Исследуя поведение строгого решения, можно убедиться, что по мере увеличения прозрачности строгое решение смещается от решения ОДК к физоптике.

Это смещение можно описать при помощи переходной функции [177]:

$$cx(X, \varphi) = 1 - x(X) \left\{ 1 - \cos \left[\frac{\pi - \varphi}{1 + x(X)} \right] \right\}, \quad x(X) = 1 - \exp(-0.003|X|). \quad (205)$$

При $X \rightarrow 0$ выполняется $x \rightarrow 0$, $cx(X, \varphi) \rightarrow 1$. При $X \rightarrow \infty$ имеем: $x \rightarrow 1$, $cx(X, \varphi) \rightarrow \sin(\varphi/2)$.

В результате можно построить эвристическую формулу

$$fg(R, T, \varphi, \varphi_0) \frac{cx(X, \varphi_s)}{cx(X, \varphi)} \cong fr(\varphi, \varphi_0, R, T), \quad (206)$$

которая при всех значениях входных параметров с высокой точностью совпадает с численным решением [177]. Здесь $cx(X, \varphi_s)$ – значение функции $cx(X, \varphi)$ в точке сингулярности $\varphi_s = \pi - \varphi_0$, т.е. на границе «свет – тень». Нормировка переходной функции $cx(X, \varphi)$ на свое значение в точке сингулярности сделана потому, что значение функции $fg(R, T, \varphi, \varphi_0)$ в точке сингулярности является правильным и совпадает с $fg^0(R, T, \varphi, \varphi_0)$.

Результаты расчета показаны на рис. 27.

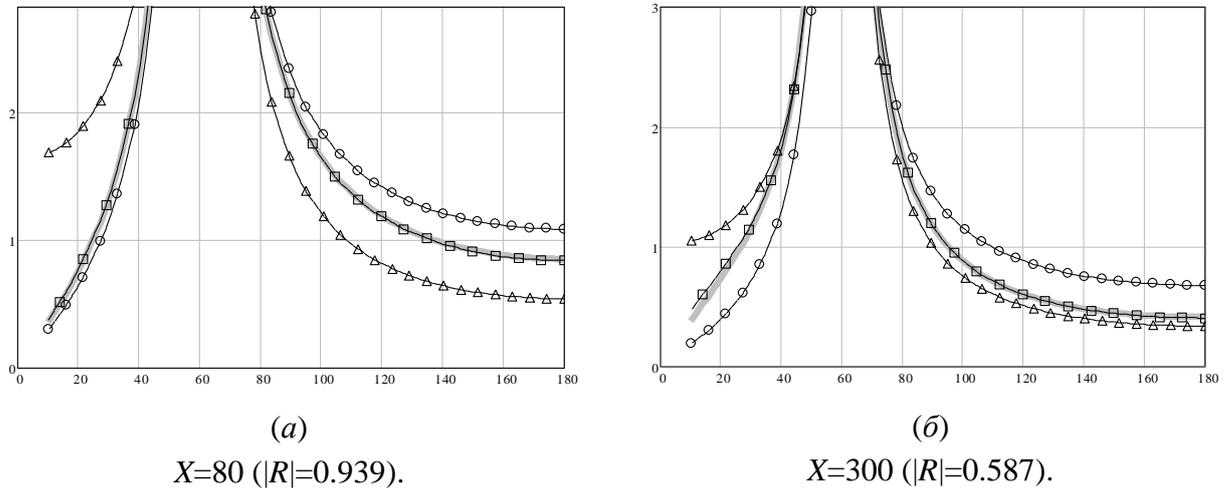


Рис. 27

Сравнение дифракционного коэффициента строгого решения для полупрозрачной полуплоскости (сплошная серая линия) с эвристическими решениями ОДК (179) (кружки), физоптикой (204) (треугольники) и решением (206) (квадратики). Угол падения $\varphi_0=120^\circ$.

На рис. 27 показаны графики расчетов по эвристическим формулам ОДК (179), ФО (204), формулы, учитывающей полупрозрачность (206) и строгого решения $fr(R, T, \varphi, \varphi_0)$. Из рисунков видно, что формула (206) с высокой точностью совпадает со строгим решением $fr(R, T, \varphi, \varphi_0)$ при разных значениях параметра X .

Таким образом, применяя принципы МБК, мы на основе двух типов дифракционных коэффициентов (199) и (200), а также выражений для R и T (202) и (203) построили дифракционный коэффициент, с высокой точностью совпадающий с численным решением задачи со сложными граничными условиями (201) при всех значениях входных параметров.

Следует отметить, что формулы, аналогичные ОДК (179), встречались и ранее. Первые работы на эту тему появились на заре теории дифракции. Так, в [88] рассмотрена дифракция на непрозрачном металлическом экране. В [84] рассмотрена дифракция на неидеально проводящей полуплоскости. Получены формулы, аналогичные ОДК. В [89] рассмотрена дифракция на тонкой диэлектрической пластине в высокочастотном приближении равномерной ГТД (UTD). Результаты сравнивались со строгим расчетом и показали хорошее совпадение при условии ряда ограничений, наложенных на геометрию задачи. Было использовано формулы, аналогичные ОДК. В [90] рассмотрена полуплоскость с импедансными граничными условиями в приближении UTD. Эвристическое решение показало хо-

рошее совпадение с численными результатами для нормального падения, для случая наклонного падения точность уменьшалась. В [91] рассмотрена при помощи метода Винера-Хопфа дифракция на диэлектрической полуплоскости. Формулы типа ОДК не применялись. В [92] рассмотрена при помощи UTD дифракция на клине с конечной проводимостью. Применялись формулы типа ОДК для случая $T=0$. В [93] рассмотрена в приближении UTD дифракция на диэлектрических экранах. Приближение, аналогичное физоптической формуле (204), применялось в работе [68]. В работе [94] исследовались формулы, аналогичные ФО и ОДК. Показано, что ОДК лучше подходит для идеально проводящего рассеивателя. В работе [95] исследовалась дифракция на полупрозрачном экране методом отражений и при помощи численных методов. Подтверждены результаты работ [177, 179]. В [73] рассмотрена дифракция на неидеально проводящем клине. Проведено сравнение результатов разных методов расчета. Показано, что наилучшее совпадение со строгими результатами достигнуто для формулы ОДК. Это не противоречит нашему утверждению о том, что в случае полупрозрачных рассеивателей наилучшее совпадение достигается не для ОДК (179), а для (206), причем сами по себе ОДК и ФО не дают наилучшего совпадения во всем диапазоне значений показателя прозрачности.

Отличие подхода МБК от этих работ состоит в том, что дифракционные коэффициенты строятся при помощи объединения ОДК (179), ФО (204) и формулы полупрозрачности. Такой подход позволяет значительно улучшить совпадение эвристической формулы со строгим решением $fr(R, T, \varphi, \varphi_0)$ (206).

Аналогичным образом можно строить дифракционные коэффициенты и для других задач. Суть предлагаемой методики (находить баланс между решением с возмущением вблизи кромки и без него) останется той же при изменении граничных условий, типов возбуждения и физической природы волн.

Сравнивая МБК с известными работами, мы видим существенные отличия в стратегии получения решения. В известных работах либо получают строгое двумерное решение, либо получают эвристическое решение по схеме ОДК и проводят верификацию, сравнивая его с решением, полученным строгими методами. Затем определяют область, где эвристическое решение дает хорошее совпадение.

В МБК для построения дифракционных коэффициентов берут несколько базовых компонентов: не только эвристическое решение по схеме ОДК, но также по схеме ФО и функцию полупрозрачности, существенно увеличивающую точность совпадения со строгим решением. Затем (при необходимости) при помощи инженерных добавок улучшают совпадение до заданной величины. Таким образом можно для любого численного решения при помощи R и T гарантированно получить эвристическую аналитическую формулу во всем диапазоне параметров и с заданной точностью. Это дает новые возможности при решении практических задач.

6.6.2 Коррекция дифракционных коэффициентов на вершинах.

Задача дифракции на плоском идеально проводящем угловом секторе является одной из важных ключевых задач. Существуют эвристические решения данной задачи в приближении ГТД и МКВ [72, 75, 76]. Подробнее об этом см. Приложение 4.

По поводу ее сложности достаточно сказать, что между получениями строгих аналитических решений для идеально проводящей полуплоскости и плоского углового сектора прошло более 100 лет. Рост сложности можно объяснить ростом размерности задачи: дифракция на полуплоскости является двумерной задачей, а дифракция на плоском угловом секторе – трехмерной задачей. По аналогии можно прогнозировать уменьшение сложности при переходе от двумерной задачи к одномерной. Напомним, что МБК строится на основе одномерных задач для R и T , а ГТД и МКВ – на основе двумерных.

Как известно, МКВ и аналогичные подходы, такие, как метод эквивалентных контурных токов (МЭКТ), дают достаточно точное решение только на дифракционных конусах, а вне этих направлений решение неточное. МБК дает возможность скорректировать решение МЭКТ при помощи функциональных множителей типа [165, 166] (см. также (167)):

$$c(\varphi, \varphi_0) = \frac{f(\varphi, \varphi_0)}{f^0(\varphi, \varphi_0)} = \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \varphi_0} = \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi_0}{2}}. \quad (207)$$

Здесь f и f^0 – дифракционные коэффициенты двумерных физоптического и строгого решений для идеально проводящей полуплоскости (199) и (200) соответственно.

Физический смысл применения формулы (207) состоит в том, что она корректирует поле физической оптики, имеющее равномерную амплитуду, таким образом, чтобы учесть возмущение вблизи кромки, т.е. неравномерность амплитуды. В приближении МЭКТ ток на кромке имеет постоянную амплитуду. Поэтому применение множителей типа (207) приводит к уточнению решения, поскольку позволяет учесть возмущение поля вблизи вершины, т.е. вблизи конца кромки.

Поскольку решение (206) соответствует приближению физической оптики при больших значениях параметра прозрачности X , можно предположить, что в данном случае коррекция (207) для полупрозрачных рассеивателей не потребуется.

6.7 Базовые компоненты и приемы метода базовых компонентов

Базовые решения – это самые простые формулы, описывающие основные особенности дифракционного процесса: возмущенное и невозмущенное поле, свойства поверхности, наличие и отсутствие условия дальней зоны, и т.п. Из элементов базовых решений можно «как из кубиков» сложить эвристическую формулу. На последнем этапе можно на основе сравнения со строгим решением провести «настройку», т.е. дополнительно подправить формулу с целью улучшения точности. Но и у этих настроечных параметров и функций может быть физический смысл, который прояснится позже. (У меня это было несколько

раз: функция кривизны r_{d0} в МОЭ, изменение знаков в ОДК для упругой волны, функция прозрачности).

К числу базовых решений относится трехмерное решение ФО, двумерное решение V и его четыре составляющие, коэффициенты R и T , функциональные коэффициенты f/f^0 .

Работоспособность каждого из базовых решений доказана на примерах. Конкретные эвристические формулы имеет смысл получать только под конкретную задачу. То же самое относится и к другим эвристическим методам: ФО, ГТД, МКВ.

Точность самих базовых формул обсуждать некорректно, поскольку они не являются решениями как таковыми. Для того чтобы стать решениями, базовые решения должны пройти верификацию и настройку. Однако при некоторых геометриях задачи и приближенные решения могут давать точный результат. Это касается приближения ФО в задаче рассеяния на угольном отражателе или ДН зеркальных антенн.

Как уже было сказано, в соответствии с МБК эвристическая формула строится при помощи сочетания базовых компонентов, которые выбираются из имеющегося набора в зависимости от условий задачи. Точность эвристического решения проверяется при помощи верификации.

6.7.1 Базовые компоненты МБК.

В состав набора базовых компонентов к настоящему моменту предлагаем включить следующие формулы:

- 6.7.1.1. линейный физоптический интеграл с выделением вкладов кромок (146);
- 6.7.1.2. компоненты двумерной формулы для рассеянного поля $v(\psi)$ (21), (193): зависимость от расстояний от источника и точки наблюдения до кромки, зависимость от угла до границы «свет – тень», дифракционные коэффициенты;
- 6.7.1.3. коэффициенты R и T для безграничной плоской поверхности. В данной статье мы применяли выражения (202), (203), но могут быть и другие;
- 6.7.1.4. дифракционные коэффициенты ОДК (179) и ФО (204) с R и T . Конкретные значения R и T определяются заданным видом граничных условий. Эти формулы характеризуют рассеянное поле с учетом возмущения на краю полуплоскости и без учета такого возмущения;
- 6.7.1.5. поляризационная составляющая дифракционного коэффициента (числитель): зависимость от формы профиля (МОЭ) (21), поляризации падающего поля (194), (193), типа решения (физоптическое/строгое (199)/(200)), граничных условий (179), (204) и
- 6.7.1.6. геометрическая составляющая (знаменатель): зеркальный/незеркальный угол отражения дифракционного коэффициента (см. Приложение 9);
- 6.7.1.7. модифицирующая функция $s(\varphi, \varphi_0)$ (207) для МЭКТ. Результирующие выражения получаются проще, чем строгое аналитическое решение (см. Приложение 4);
- 6.7.1.8. переходная формула $sx(X, \varphi)$ (205) для дифракционного коэффициента полупрозрачного рассеивателя на основе формул ОДК и ФО. Для другого вида граничных условий переходная формула может измениться или остаться той же.

По мере проведения дальнейших исследований набор базовых компонентов может пополняться. Также базовые компоненты можно комбинировать между собой, что расширяет область их применения.

6.7.2 Приемы МБК.

К приемам МБК относится ряд действий, позволяющих получить аналитические формулы и уточнить ГТД и МКВ. Эти действия не обладают математической строгостью, но имеют физическое обоснование.

6.7.2.1. Разделение ДК на «геометрическую» и «поляризационную» части (см. разделы 4.1.2, 6.6). Заменяя поляризационные составляющие дифракционных коэффициентов в выражениях для интегралов по кромке, можно получить эвристические решения множества задач.

6.7.2.2. Комплексные углы – подстановка в известные выражения комплексных значений углов с целью получить решение на элементарной полоске без проведения непосредственного интегрирования (подробнее см. в разделе 3.1).

6.7.2.3. Получение решения на условной кромке (см. раздел 4.1.2, Приложение 3).

Решение на условной кромке можно интерпретировать как объединение подходов ГТД и МКВ. Используется строгое двумерное решение, как в ГТД, но точка наблюдения может находиться вне дифракционного конуса, как в МКВ.

6.7.2.4. Применение навязанного условия дальней зоны (см. п. 4.1.1).

При интегрировании поля по поверхности полубесконечных структур условие дальней зоны не может выполняться в принципе, поскольку угловые размеры полубесконечного рассеивателя при удалении от него точки наблюдения не уменьшаются, а сигналы с поверхности рассеивателя приходят в точку наблюдения с разных углов. Соответственно, и результат интегрирования не может представлять собой сингулярную функцию. Навязывая условие дальней зоны, считаем, что в точку наблюдения все сигналы с поверхности рассеивателя приходят с одного угла. При этом аналитические выражения существенно упрощаются, но становятся сингулярными. Тем не менее, использование их в практических задачах для рассеивателей конечного размера корректно (см. п.4.1.).

6.7.2.5. Воздействие на дифракционный коэффициент интегралом Френеля, деленным на свою асимптотику (198). Применяется для перевода сингулярных дифракционных коэффициентов в несингулярные и обратно.

6.7.2.6. Учет влияния полупрозрачности. (см. п. 6.6.1)

6.7.2.7. Учет влияния ограниченности кромки по длине (вершин) и модифицированный метод эквивалентных контурных токов – ММЭКТ (см. пп. 4.4.1, 6.7.1.7, Приложение 4).

6.7.2.8. Применение основной формулы радиолокации и понятия зоны, существенной для распространения радиоволн для сокращения объема вычислений и перехода от двумерных решений теории дифракции к трехмерным решениям (Приложение).

6.8 Последовательность действий в методе базовых компонентов

При получении решения МБК можно выделить следующую последовательность действий:

6.8.1 Анализ практической задачи, требующей наличия аналитических формул. Составление списка эталонных задач.

6.8.2 Получение строгих 1D, 2D и 3D решений эталонных задач. Предполагается, что эти решения будут получены численными методами, но возможно применение также строгих аналитических или экспериментальных подходов.

6.8.3 Построение эвристических формул МБК на основе набора базовых компонентов.

6.8.4 Сравнение результатов строгого расчета с формулами МБК.

6.8.5 Настройка эвристических формул. Внесение мультипликативных и аддитивных поправок к отдельным базовым компонентам из набора. На основе анализа поправок с физической точки зрения возможно пополнение набора базовых компонентов.

Такой подход позволяет на основе любых строгих решений получать аналитические формулы, эффективные (простые, быстродействующие и точные), с гарантией успешного результата и в обозримые сроки.

Не существует проблем, которые не дали бы построить аналитическое решение в соответствии с этим алгоритмом. Последовательно учитывая все физические явления, которые описаны базовыми компонентами из имеющегося набора, можно свести необходимость применения эвристических поправок к минимуму. Если же найти этим поправкам физическое объяснение, то набор базовых компонентов пополнится.

Приведем для сравнения последовательность действий в ГТД и МКВ. В ГТД мы находим на кромке точку стационарной фазы, затем вычисляем амплитуду луча. В МКВ мы находим поле вблизи кромки и интегрируем. Верификация решения в рамках данных подходов также может проводиться, но она не предполагает дальнейшего уточнения. Таким образом, в рамках МБК можно получить более точное решение.

6.9 Верификация решения задачи дифракции на идеально проводящей полупластине

В качестве иллюстрации последовательности действий в МБК рассмотрим задачу дифракции на идеально проводящей пластине.

В диссертации было получено решение этой задачи при помощи МОЭ и проведена верификация при помощи решения, полученного методом последовательных дифракций. В этом разделе для верификации используем строгое решение данной задачи для ТЕ- поляризации, предоставленное С.Е. Банковым. Решение было получено при помощи модифицированного метода Винера – Хопфа [14], представляющего собой сочетание метода Винера - Хопфа и метода обобщенной матрицы рассеяния. Строгое решение $F(\psi)$ представляет собой сингулярный дифракционный коэффициент. Поэтому для сравнения строгого решения $F(\psi)$ с решением для дифракции на полупластине из Главы 2 нужно компенсировать сингулярность на границах «свет – тень». Для этого умножим функцию $F(\psi)$ на выражение (198). Это выражение, представляющее собой частное от деления интеграла Френеля на свою асимптотику, в окрестности границы тени стремится к нулю, компенсируя сингулярность, а вдали от границы тени равно 1. Получившееся произведение сравним с решением для полупластины из Главы 2, п.2.2.4 (рис. 15).

Сравнение показало, что решение МОЭ совпало с произведением $F(\psi)/2\pi$ на функцию (198), т.е. с точностью до постоянной нормировки 2π . Результаты сравнения для ТЕ- поляризации показаны на рис. 28.

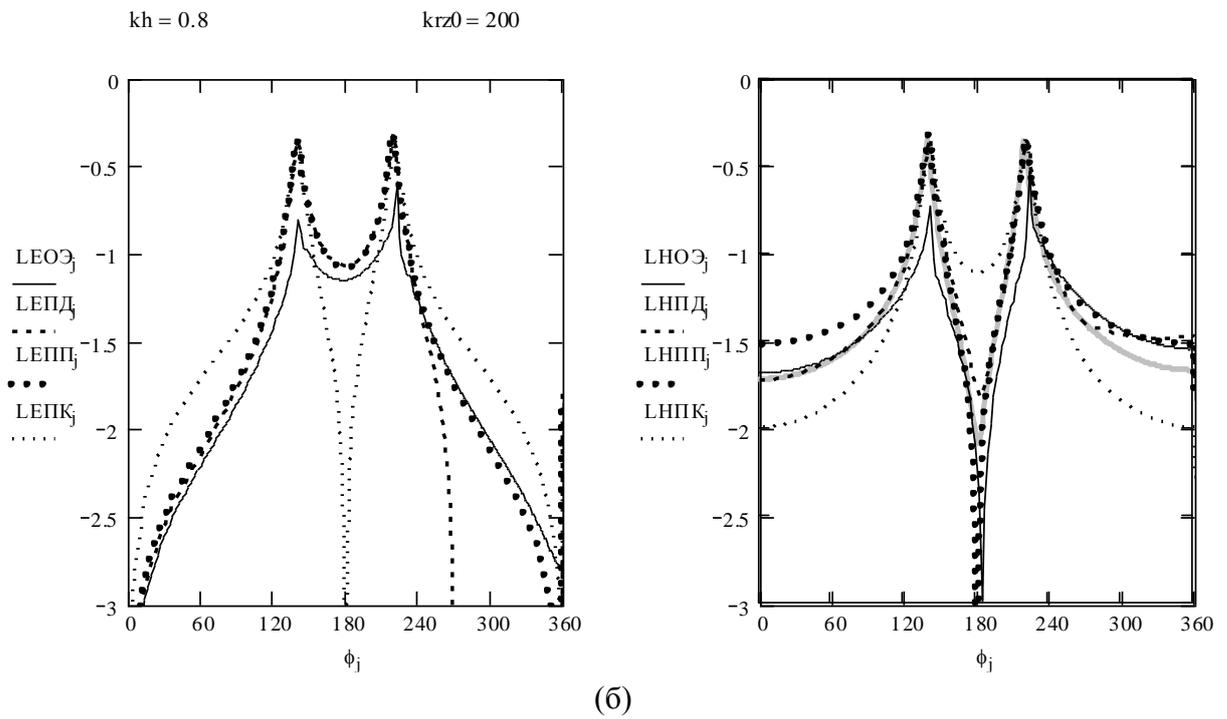
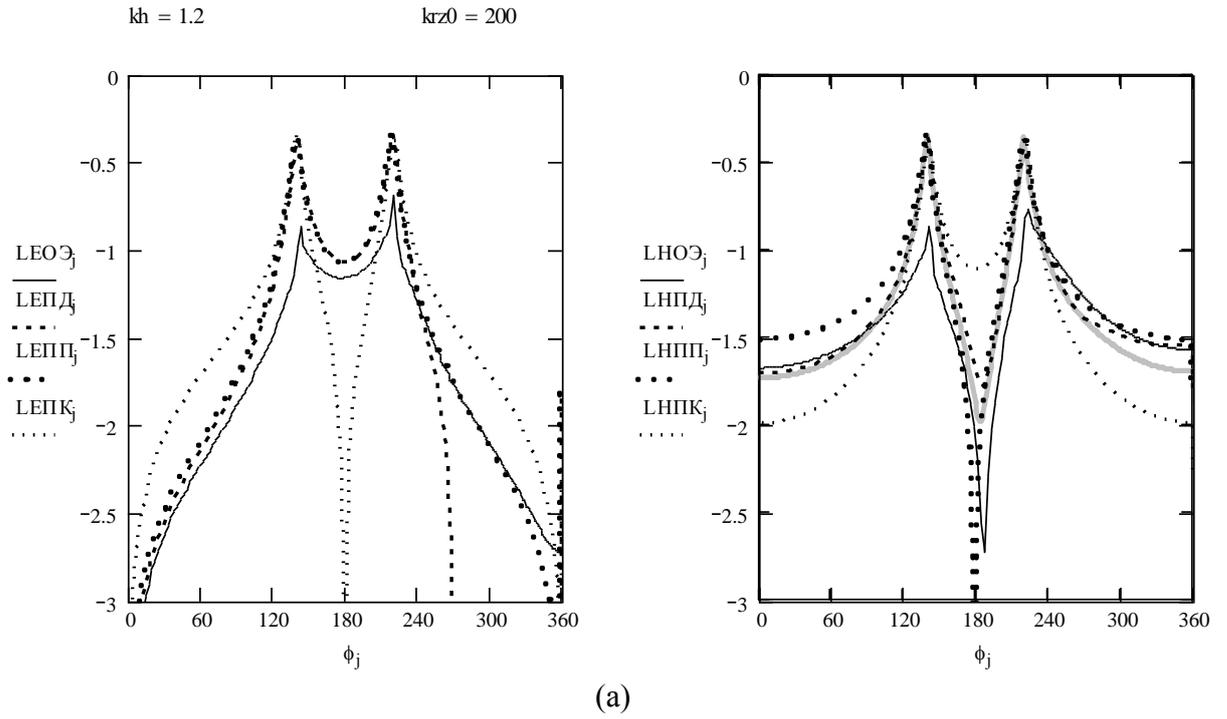


Рис. 28 (а), (б)

Амплитуды рассеянного поля в дальней зоне для разных значений kh : $kh=1.2, 0.8$;
 Диаграммы рассчитаны на расстоянии $kr_z = 200$ от кромки.

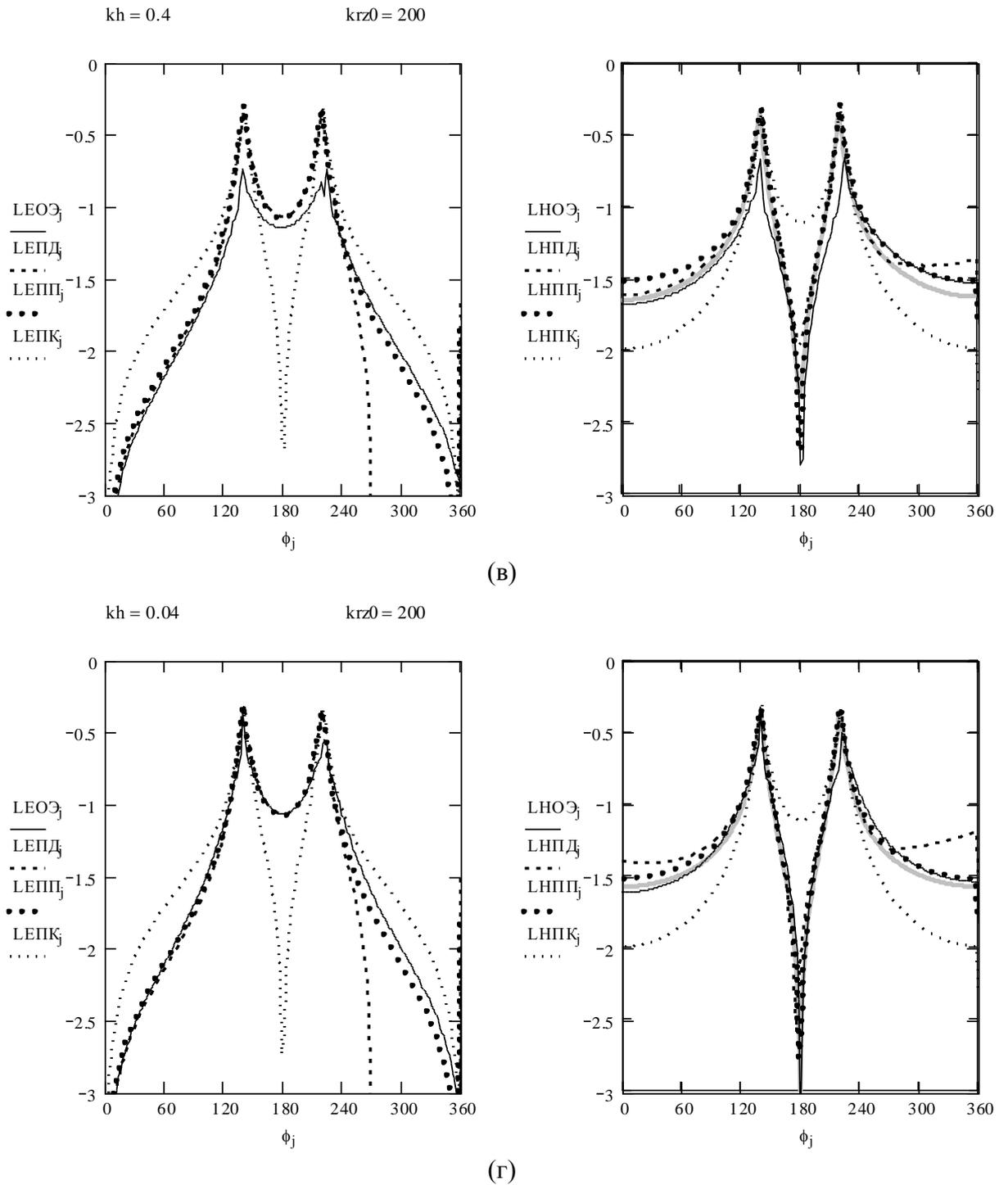


Рис. 28 (в), (г)

Амплитуды рассеянного поля в дальней зоне для разных значений kh : $kh=0.4, 0.04$;
 Диаграммы рассчитаны на расстоянии $kr_z = 200$ от кромки.

На рис. 28 показаны амплитуды рассеянного поля для различных значений параметра kh : $kh=1.2, 0.8, 0.4, 0.04$ в дальней зоне по отношению к кромке полупластины (расстояние точки наблюдения от кромки составляет $kr_z=200$). Строгое решение для ТЕ- поляризации

показано сплошной серой линией на правых графиках. Обозначения: ЛНОЭ – решение, рассчитанное при помощи метода обобщенного эйконала (сплошная черная линия), ЛНПД – решение, рассчитанное при помощи метода последовательных дифракций (штриховая линия), ЛНПП – строгое решение для идеально проводящей полуплоскости (жирные точки), ЛНПК – решение, рассчитанное при помощи приближения Кирхгофа (метода ФО) (мелкие точки).

Интересно, что решение для полупластины также лежит между ФО и решением для идеально проводящей полуплоскости, аналогично тому, как решение для полупрозрачной полуплоскости (20б) лежит между ФО и ОДК.

6.10 Точность и эффективность эвристических методов

ГТД и МКВ предназначены для решения трехмерных задач при помощи какого-либо строгого двумерного решения на кромке. Считают, что в трехмерной задаче поле в окрестности кромки соответствует полю двумерной задачи. Рассеянное поле находят в этих эвристических подходах по-разному. ГТД постулирует, что лучевая картина поля в случае трехмерной задачи соответствует лучевой картине двумерного рассеивателя с таким же профилем кромки, как профиль в области стационарной фазы. МКВ постулирует, что поле на трехмерном рассеивателе в области кромки – такое же, как на соответствующем двумерном рассеивателе. ГТД и МКВ дают правильное решение только на дифракционном конусе. Вне дифракционного конуса ГТД не дает никакого решения, а МКВ – дает, но неточное. ГТД и МКВ имеют заложенную методическую погрешность – отсутствие учета продольного возмущения поля. МКВ может исправить этот недостаток, уточнив приближение МКВ.

Целью МКВ также является получение трехмерных задач. Но в качестве основы эвристических формул МКВ применяют не готовые двумерные решения, а набор базовых компонентов. Базовые компоненты берут из строгих аналитических решений задач дифракции или получают при помощи численных решений на основе физических представлений о поведении рассеянного поля.

Поскольку целью МКВ является уточнение решений ГТД и МКВ для известного класса практических задач или получение новых эвристических решений, при построении формул МКВ (впрочем, как и любой другой эвристический подход) требует проведения верификации при помощи численных решений. Мы применяем ГТД и МКВ без верификации, поскольку она была проведена кем-то раньше и уже подтвердила возможность применения этих методов для определенного класса практических задач. В отличие от МКВ, ГТД и МКВ не предполагают настройки. МКВ тоже можно применять без настройки, просто зафиксировав точность получающегося решения. Проведение настройки требует дополнительных усилий, но может помочь обнаружить новые свойства рассеянного поля.

ГТД и МКВ используют строгое двумерное решение на кромке, а МКВ использует одномерное решение для R и T . Для отдельных видов граничных условий существуют соответствующие аналитические выражения.

Альтернатива аналитическим формулам – счет строгими методами с последующим занесением результатов в базу данных.

Главный вопрос: в чем преимущество приближенных аналитических формул перед базами данных? Ответ: физические явления, заранее выделенные в формулах (т.е. базовые компоненты), получают свои аналитические выражения. В нашем случае это процессы, которые ранее не рассматривались: «продольное» возмущение поля на кромке и влияние полупрозрачности (комбинирование решения с возмущением поля на кромке и без него).

Мы строим новые решения на основе набора базовых компонентов, включающего коэффициентов R и T , приближений ОДК, ФО и функции полупрозрачности. В дальнейшем могут быть найдены и другие базовые компоненты.

Формулу, описывающую продольное (по отношению к кромке) возмущение поля, ищем в классе функций, описывающих переход от решения для невозмущенного поля к решению для возмущенного поля. Для этого применяем отношение fg/fg^0 .

Формулу, описывающую дифракционный коэффициент полупрозрачной полуплоскости, ищем в виде перехода от дифракционного коэффициента fg к fg^0 по мере постепенного изменения параметра X , описывающего степень прозрачности.

Математической строгостью эвристические решения не обладают. Точность (т.е. согласие со строгим решением той же задачи) проверяется верификацией, т.е. непосредственным сравнением с этим строгим решением. Обычно поправки в эвристические решения не вносят, но априори (на основе предварительных исследований задач со сходными условиями) знают точность этих решений. Точность эвристических решений зависит не только от свойств рассеивателя (формы и граничных условий), но и от геометрии задачи (т.е. от взаимного расположения рассеивателя, источника и точки наблюдения). Иногда эта точность бывает очень велика, иногда – достаточна, иногда – невысокая [173].

Тем не менее, при необходимости увеличить точность и довести ее до заданных величин МБК предусматривает проведение процедуры настройки при помощи добавления к решению феноменологических корректирующих функций. Эти зависимости можно выявить при помощи сравнения строгого и эвристического решения для всех значений входных параметров. Чем лучше изначально построено решение на основе базовых компонентов, тем меньше потребуется изменять его для достижения заданной точности.

Отличие МБК от ГТД и МКВ состоит в том, что ГТД и МКВ используют строгие двумерные решения, в то время как МБК использует строгие одномерные решения (R и T). Одномерные решения получать проще, чем двумерные, для одномерных функций чаще существуют аналитические выражения. Поэтому МБК позволяет получить аналитические выражения, в то время как ГТД и МКВ используют готовые двумерные решения. Таким образом, МБК дает возможность получать аналитические формулы, обладающие большей эффективностью (простотой и точностью), чем решения в приближениях ГТД и МКВ. Формулы МБК для дифракции на многоугольниках и многогранниках получают дополнительную эффективность, связанную с особенностями поведения поля на таких объ-

ектах. Здесь имеется в виду линейность фазы на плоскостях и кромках. В случае постоянства фазы происходит наибольшее упрощение.

При помощи МБК можно получить более точное решение путем использования строгого решения исходной задачи в качестве исходных данных (сравнивая с эвристическими формулами и применяя инженерные формулы-поправки), в то время как ГТД и МКВ если и используют строгое решение, то в основном для проверки. Это связано с тем, что при разработке ГТД и МКВ компьютерная техника была не столь развита, и эти приближения предполагалось использовать в случае, когда не было надежды получить строгие трехмерные решения. В настоящее время численные решения получить проще, чем аналитические, поэтому численное решение можно использовать в качестве исходных данных для получения аналитического решения.

МБК определяет тенденции поведения решения при помощи мультипликативных «многоцветных» множителей (в отличие от аддитивных «одноразовых» добавок, как в МКВ). Эти тенденции можно использовать для получения других решений. В отличие от МБК, ГТД и МКВ дают «одноразовые» формулы, для получения других решений нужно заново повторить всю последовательность действий. При этом заложенные методические погрешности все равно остаются.

Со временем набор базовых «многоцветных» компонентов (а вместе с ним – и набор объясненных процессов дифракции) увеличивается. Это увеличивает возможности воздействия на эвристические формулы, придавая методу большую гибкость.

Если точность полученного решения недостаточна, можно применить для его настройки инженерные формулы. При объяснении физического смысла инженерных формул их можно будет включать в набор базовых компонентов. Чем шире набор базовых компонентов, тем меньше изменений в решение будут вносить инженерные формулы.

Заметим, что на основе имеющихся строгих трехмерных решений можно сразу получить инженерные формулы. Но они (обладая простотой и точностью) будут лишь имитировать строгое решение, в то время как применение базовых компонентов наполняет решение физическим содержанием.

6.11 Примеры применения метода базовых компонентов

Описанные принципы применения МБК уже были использованы при построении решений ряда задач, перечисленных ниже.

6.11.1. Дифракция на плоском угловом секторе (Глава 4, Приложение 4) с учетом влияния продольного по отношению к кромке возмущения поля, в том числе:

- навязанное условие дальней зоны (для полубесконечного рассеивателя)
- условная кромка
- замена поляризационной составляющей дифракционного коэффициента

6.11.2. Исследование влияния полупрозрачности, в том числе:

- получение функции, учитывающей влияние полупрозрачности (205)

6.11.3. Дифракция упругой волны (приложение – сейсмические волны) (Приложение 9), в том числе:

- переход из частотной области во временную

6.11.4. Распространение радиоволн в условиях городской застройки (Приложение 8), в том числе:

- построение теории на основе сочетания элементов теории антенн, теории распространения радиоволн и теории дифракции

6.12 Заключение к главе 6

Предложен метод построения эвристических формул (МБК), позволяющий проводить физическую интерпретацию результатов математически строгого решения задачи дифракции. К преимуществам МБК перед другими эвристическими методами, такими как ГТД и МКВ относится возможность применять аналитические эвристические формулы автономно, без постоянного использования двумерных решений. Метод универсален и позволяет получать эффективные (простые, но точные) аналитические эвристические решения задач дифракции на основе любых решений: строгих аналитических, численных и экспериментальных.

Главные преимущества формул МБК.

- **Точность** – самое важное свойство. Формулы МБК более точны, чем формулы ГТД и МКВ. Тем не менее, нужно отметить, что для эффективного решения практических задач важно выбирать метод, дающий не максимальную, а оптимальную точность, при этом иногда бывает достаточно точности ГО и ФО.

- **Простота** – простота применяемых формул. Важна при проведении аналитических преобразований, в том числе, например, при взятии производной или при переходе из частотной области во временную «time domain – frequency domain».

- **Быстродействие** – свойство, связанное с простотой формул. Быстродействие эвристических формул практически не зависит от размера рассеивателя. Это дает новую возможность при решении задач дифракции. Если для рассеивателя большого размера не существует строгих решений (ни аналитического, ни численного), можно сначала при помощи численного решения верифицировать эвристические формулы на рассеивателе меньшего размера, а затем применить их на большом рассеивателе. Точность при этом только увеличится.

- **Физичность** (в отличие от инженерных формул) – физическая ясность. Эвристические подходы основаны на физических понятиях (в отличие от краевой задачи математики). Применяя эвристические формулы, можно провести физическую интерпретацию численных результатов.

Все базовые компоненты имеют четкий физический смысл. Настройка решения проводится адресно – для конкретного компонента. Например, настройка продольного и поперечного возмущения поля проводится отдельно. При этом можно обнаружить важные физические характеристики процесса дифракции. Так произошло для функции, описывающей полупрозрачность, которая была обнаружена при отдельном рассмотрении приближений ОДК и ФО.

- **Автономность** от вычислителя – возможность работы автономно от вычислителя 2D решения (в отличие от обычной формы ГТД и МКВ, предусматривающей интегрирование по элементарной полоске и вдоль кромки). Формулы, обладающие свойством автономно-

сти, можно верифицировать один раз для всех значений входных параметров, а потом уже применять без верификации. Этап настройки, применяемый в МКВ, усложняет процесс получения решения, но придает ему новые качества, которые дают новые возможности при решении практических задач.

- **Гибкость** – широкие возможности комбинирования базовых компонентов при перестройке геометрии задачи (например, при выполнении или невыполнении условия ДЗ).
- **Универсальность** – единая форма решения для сходных постановок задач (в том числе – для выдвижения удачной гипотезы поведения исследуемого решения).

Разумеется, МБК возник не на пустом месте. Отдельные компоненты МБК можно встретить и в других решениях, но следует отметить и существенные отличия. От строгих методов МБК отличается простотой формул и универсальностью подхода. От ГТД и МКВ МБК отличается точностью и универсальностью подхода. От инженерных подходов МБК отличается физичностью (ясный смысл всех компонентов эвристических формул позволяет проводить физическую интерпретацию строгого решения и осуществлять углубленное изучение процесса дифракции).

Удачный выбор эвристического подхода может дать новые возможности при решении практической задачи.

Наличие численных решений не является причиной для отказа от эвристических формул. Для перевода математически строгих решений в сферу их практического использования важно иметь возможность интерпретировать полученные результаты. Такая интерпретация является еще одной причиной применения эвристических формул. (Другой причиной является упомянутая ранее необходимость повышения эффективности вычислителей при решении практических задач). Эвристические формулы дают наилучшую возможность дать решению физическую интерпретацию. В этом они превосходят даже строгие аналитические формулы.

Существует мнение, что эвристическими решениями пытаются заменить строгие. Это совершенно не так. Ничто не может заменить строгие решения, полученные любыми методами. Но при решении практических задач строгие решения не всегда являются самым эффективным подходом. Эвристические формулы с успехом дополняют набор средств решения практической задачи.

Преимущества МКВ перед ФО стали критически важными при разработке технологии «Стелс». Вполне возможно, что аналогичные преимущества МБК перед МКВ также станут критически важными в каких-либо проектах.

В связи с тем, что новые эвристические формулы обладают высокими быстродействием и точностью, их также можно использовать совместно с любыми строгими подходами или с результатами эксперимента для существенного повышения эффективности решения практических задач, связанных с применением теории дифракции. Новые подходы являются универсальными и подходят для любых типов граничных условий и любых типов волн.

7. ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Применение теоремы Стокса при решении задач дифракции.

Рассмотрим постановку задачи дифракции, соответствующую формулам (107) – (110). В формулы для потенциалов входит интеграл по поверхности рассеивателя (108). В этом разделе мы займемся вычислением данного интеграла и исследованием его свойств.

Теорема Стокса. Связь между интегралом по площади и по поверхности.

Рассмотрим площадь S и охватывающую эту площадь контур C , расположенные в плоскости XOY . Пусть нормаль \vec{n} к площади S направлена вдоль оси z , а контур C обходит площадь S в направлении против часовой стрелки. Таким образом нормаль \vec{n} согласована с ориентацией контура C по правилу правого винта. Обозначим единичный вектор, направленный вдоль контура, как $\vec{\rho}'$.

Введем единичный вектор внутренней нормали \vec{n}^j к контуру, C расположенный так, что вектора $(\vec{n}, \vec{\rho}', \vec{n}^j)$ образуют правую тройку.

$$[\vec{n} \times \vec{\rho}'] = \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ \rho'_x & \rho'_y & 0 \end{pmatrix} = -\vec{e}_x \rho'_y + \vec{e}_y \rho'_x = \vec{n}^j. \quad (208)$$

Вычислим интеграл

$$I = \iint_S \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho})\} ds. \quad (209)$$

Здесь вспомогательный вектор $\vec{\Delta}$:

$$\vec{\Delta} = (\vec{n}' - \vec{n}'') - \vec{n}[(\vec{n}' - \vec{n}''), \vec{n}] \quad (210)$$

представляет собой проекцию на поверхность рассеивателя (в нашем случае – на плоскость XOY) разности $(\vec{n}' - \vec{n}'')$ между направляющими векторами падающей волны и точки наблюдения.

Для этого используем теорему Стокса [96]

$$\iint_S (d\vec{S}, \text{rot}\vec{F}(\vec{r})) = \oint_C (d\vec{r}, \vec{F}(\vec{r})). \quad (211)$$

Здесь $d\vec{S}$ – векторный элемент площади. Его нормаль согласована с ориентацией контура C по правилу правого винта. Пусть $d\vec{S} = \vec{e}_z ds$. Векторный элемент линии $d\vec{r}$ (дифференциал радиуса-вектора) направлен вдоль контура C в каждой регулярной точке,

$\vec{\rho}'$ – единичный вектор касательной к контуру: $\vec{\rho}' = \vec{e}_x \rho'_x + \vec{e}_y \rho'_y$. Введем t – координату, меняющуюся вдоль контура и запишем с ее помощью дифференциал радиуса-вектора:

$$d\vec{r} = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy = \vec{\rho}' dt = (\vec{e}_x \rho'_x + \vec{e}_y \rho'_y) dt. \quad (212)$$

Введем вспомогательную функцию

$$\vec{F} = \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho})\} (\Delta_y \vec{e}_x - \Delta_x \vec{e}_y) = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y \quad (213)$$

и применим теорему Стокса (211). Компоненты ротора равны

$$\text{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) - \vec{e}_y \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \quad (214)$$

Обозначения \vec{r} [96] и $\vec{\rho}$ из (213) соответствуют одной и той же величине: радиус-вектору точки пространства.

Заметим, что функция \vec{F} (213) не зависит от координаты z . Это означает, что $F_z=0$, $\partial/\partial z=0$. Тогда вместо (214) получим:

$$\text{rot} \vec{F} = \vec{e}_z \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right). \quad (215)$$

Распишем подынтегральное выражение из левой части теоремы Стокса (211) для функции \vec{F} (213)

$$(d\vec{S}, \text{rot} \vec{F}) = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) ds. \quad (216)$$

Распишем производные из (216) от функции (213) с учетом $(\vec{\Delta}, \vec{\rho}) = \Delta_x x + \Delta_y y$:

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = -\Delta_x ik \Delta_x \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho})\}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = \Delta_y ik \Delta_y \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho})\}. \quad (217)$$

С учетом (215), и (217) получим:

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = -ik |\vec{\Delta}|^2 \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho})\}, \quad (218)$$

а с учетом (216) имеем:

$$(d\vec{S}, \text{rot} \vec{F}) = -ik |\vec{\Delta}|^2 \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho})\} ds. \quad (219)$$

С другой стороны, с учетом (212) и (213):

$$(d\vec{r}, \vec{F}(\vec{r})) = \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho})\} (\Delta_y dx - \Delta_x dy) = \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho})\} (\Delta_y \rho'_x - \Delta_x \rho'_y) dt. \quad (220)$$

Но из (208) следует $(\Delta_y \rho'_x - \Delta_x \rho'_y) = (\vec{\Delta}, \vec{n}^j)$. Поэтому

$$(d\vec{r}, \vec{F}(\vec{r})) = \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho})\} (\vec{\Delta}, \vec{n}^j) dt. \quad (221)$$

В результате с учетом (211), (219) и (221) имеем:

$$-ik|\vec{\Delta}|^2 \iint_S \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho})\} ds = \oint_C \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho})\} (\vec{\Delta}, \vec{n}^j) dt. \quad (222)$$

И, наконец, получаем окончательное выражение

$$I = \iint_S \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho})\} ds = \frac{i}{k|\vec{\Delta}|^2} \oint_C (\vec{\Delta}, \vec{n}^j) \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho})\} dt. \quad (223)$$

где $\vec{n}^i = [\vec{n} \times \vec{\rho}'] / |\vec{\rho}'|$ - единичная внутренняя нормаль к контуру C , окружающему рассеивателю, $\vec{\rho}' = \frac{d\vec{\rho}/dt}{|d\vec{\rho}/dt|}$ - единичный вектор, касательный к контуру, t - координата, отсчитываемая вдоль контура.

Интеграл (223) представляют другую форму соотношений, полученных в [142] независимо от более ранней работы на эту тему [43].

Ключевую роль в интеграле из (223) играет стоящая в показателе экспоненты фаза точки интегрирования:

$$\Phi = k(\vec{\Delta}, \vec{\rho}). \quad (224)$$

С точки зрения математики формула (223), выражающая интеграл по площади через интеграл по контуру в случае линейной фазы, не представляет собой ничего нового и является вполне очевидным фактом. Но для теории дифракции она имеет большое значение, поэтому мы уделяем ей столько внимания.

Интеграл по поверхности многоугольника конечных размеров.

Рассмотрим плоский многоугольный рассеиватель конечных размеров, на который падает плоская электромагнитная волна (рис. 29).

На рис. 29 использованы следующие обозначения: \vec{n}' - направляющий вектор падающей волны, \vec{n}'' - направляющий вектор точки наблюдения, \vec{n} - вектор нормали к рассеивателю, \vec{n}^j - вектор единичной внутренней нормали к контуру C , окружающему рассеивателю, $\vec{\rho}'$ - единичный вектор, касательный к контуру, N - количество сторон и вершин многоугольника.

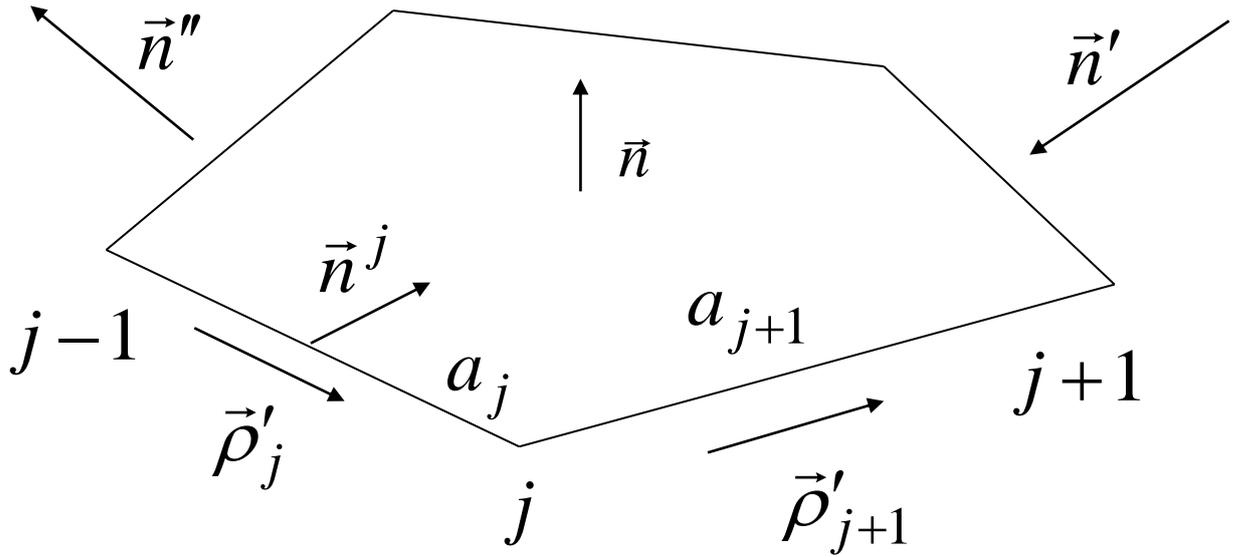


Рис. 29

Падение электромагнитной волны на плоский многоугольник.

На прямолинейной j -ой стороне, идущей от вершины $j-1$ к вершине j , вектор \vec{n}^j не меняется, а вектор $\vec{\rho}$ текущей координаты точки контура связан с радиус – вектором исходной вершины $\vec{\rho}_{j-1}$, координатой вдоль контура t и постоянным касательным вектором $\vec{\rho}'_j$ соотношением $\vec{\rho} = \vec{\rho}_{j-1} + t\vec{\rho}'_j$. Тогда для j -ой стороны длиной a_j получим:

$$\begin{aligned}
 I_j &= \frac{i}{k|\vec{\Delta}|^2} \int_0^{a_j} (\vec{\Delta}, \vec{n}^j) \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho})\} dt = \frac{i(\vec{\Delta}, \vec{n}^j)}{k|\vec{\Delta}|^2} \int_0^{a_j} \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_{j-1} + t\vec{\rho}'_j)\} dt = \\
 &= \frac{i(\vec{\Delta}, \vec{n}^j)}{k|\vec{\Delta}|^2} \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_{j-1})\} \int_0^{a_j} \exp\{ik(\vec{\Delta}, t\vec{\rho}'_j)\} dt = \\
 &= \frac{i(\vec{\Delta}, \vec{n}^j) \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_{j-1})\}}{k|\vec{\Delta}|^2 ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}'_j)} \exp\{ik(\vec{\Delta}, t\vec{\rho}'_j)\} \Big|_{t=0}^{t=a_j} .
 \end{aligned} \tag{225}$$

Отсюда, с учетом $\vec{\rho}_j = \vec{\rho}_{j-1} + a_j\vec{\rho}'_j$:

$$\begin{aligned}
 I_j &= \frac{i(\vec{\Delta}, \vec{n}^j) \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_{j-1})\}}{k|\vec{\Delta}|^2 ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}'_j)} [\exp\{ik(\vec{\Delta}, a_j\vec{\rho}'_j)\} - 1] = \\
 &= \frac{ia_j(\vec{\Delta}, \vec{n}^j) \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_j)\} - \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_{j-1})\}}{k|\vec{\Delta}|^2 ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_j - \vec{\rho}_{j-1})} .
 \end{aligned} \tag{226}$$

Обозначим разность фаз на концах отрезка: $\Phi_j - \Phi_{j-1} = k(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_j - \vec{\rho}_{j-1})$. Тогда, вынося за скобки среднюю фазу (фазу в середине отрезка) $\frac{\Phi_j + \Phi_{j-1}}{2} = \frac{k(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_j + \vec{\rho}_{j-1})}{2}$

и используя формулы $\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$, а также

$$\frac{\exp(i\Phi_j) - \exp(i\Phi_{j-1})}{i(\Phi_j - \Phi_{j-1})} = \frac{\exp\left(i\frac{\Phi_j - \Phi_{j-1}}{2}\right) - \exp\left(-i\frac{\Phi_j - \Phi_{j-1}}{2}\right)}{2i\frac{\Phi_j - \Phi_{j-1}}{2}} \times$$

$$\times \exp\left(i\frac{\Phi_j + \Phi_{j-1}}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\Phi_j - \Phi_{j-1}}{2}\right)}{\frac{\Phi_j - \Phi_{j-1}}{2}} \exp\left(i\frac{\Phi_j + \Phi_{j-1}}{2}\right) \quad (227)$$

получим, просуммировав по всем сторонам многоугольника:

$$I = \sum_{j=1}^N I_j, \quad I_j = \frac{ia_j(\vec{\Delta}, \vec{n}^j) \sin\left[(\Phi_j - \Phi_{j-1})/2\right]}{k|\vec{\Delta}|^2 (\Phi_j - \Phi_{j-1})/2} \exp\left\{i(\Phi_j + \Phi_{j-1})/2\right\}. \quad (228)$$

где $\Phi_j = k(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_j)$ – фаза сигнала j -ой вершины с направляющим вектором $\vec{\rho}_j$, a_j – длина j -ой стороны многоугольника (расположенной между $j-1$ ой и j -ой вершинами).

Выражение (228) описывает рассеянное поле при помощи суммы вкладов, каждый из которых связан с определенной стороной плоского многоугольника и имеет фазу точки, находящейся в середине этой стороны.

Если выполняется условие дифракционного конуса $(\vec{\Delta}, \vec{\rho}') = 0$, то из (228) можно выделить выражение (148), из которого можно выделить 3D дифракционный коэффициент в приближении физической оптики, в точности совпадающий с классическим выражением для 2D физоптического дифракционного коэффициента из [1] (158).

Теперь рассмотрим вершинную волну в приближении физической оптики.

Интеграл по поверхности плоского углового сектора.

Рассмотрим плоский угловой сектор, на который падает плоская электромагнитная волна (рис. 18). Для вычисления рассеянного поля воспользуемся формулой (225) для интеграла по контуру многоугольника (рис. 29) для стороны конечного размера:

$$I_j = \frac{i}{k|\vec{\Delta}|^2} \int_0^{a_j} (\vec{\Delta}, \vec{n}^j) \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho})\} dt = \frac{i(\vec{\Delta}, \vec{n}^j)}{k|\vec{\Delta}|^2} \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_{j-1})\} \int_0^{a_j} \exp\{ik(\vec{\Delta}, t\vec{\rho}'_j)\} dt. \quad (229)$$

Теперь устремим длину стороны к бесконечности $a_j \rightarrow \infty$ и применим формулу [97]:

$$\int_0^{\infty} \exp(-px) dx = \frac{1}{p}, \quad [\operatorname{Re}(p) > 0].$$

С учетом этого из (20) получим:

$$I_j = \frac{i(\vec{\Delta}, \vec{n}^j)}{k|\vec{\Delta}|^2} \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_j)\} \int_0^{a_j} \exp\{ik(\vec{\Delta}, -t\vec{\rho}'_j)\} dt \xrightarrow{a_j \rightarrow \infty} \frac{i(\vec{\Delta}, \vec{n}^j)}{k|\vec{\Delta}|^2} \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_j)\} \frac{1}{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}'_j)} = \frac{\exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_j)\}}{k^2|\vec{\Delta}|^2} \frac{(\vec{\Delta}, \vec{n}^j)}{(\vec{\Delta}, \vec{\rho}'_j)} = I_j^\infty \quad (230)$$

Здесь интегрирование вдоль j -ой кромки ведется от вершины j по направлению к бесконечности (т.е. вдоль вектора $-\vec{\rho}'_j$).

Проинтегрируем теперь по другому лучу (т.е. от вершины j вдоль вектора $\vec{\rho}'_{j+1}$).

$$I_{j+1} = \frac{i(\vec{\Delta}, \vec{n}^{j+1})}{k|\vec{\Delta}|^2} \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_j)\} \int_0^{a_j} \exp\{ik(\vec{\Delta}, t\vec{\rho}'_{j+1})\} dt \xrightarrow{a_j \rightarrow \infty} \frac{i(\vec{\Delta}, \vec{n}^{j+1})}{k|\vec{\Delta}|^2} \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_j)\} \frac{-1}{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}'_{j+1})} = \frac{\exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_j)\}}{-k^2|\vec{\Delta}|^2} \frac{(\vec{\Delta}, \vec{n}^{j+1})}{(\vec{\Delta}, \vec{\rho}'_{j+1})} = I_{j+1}^\infty \quad (231)$$

В результате для вершинной волны I_∞^j получим сумму вкладов двух полубесконечных сторон плоского углового сектора:

$$I_\infty^j = I_j^\infty + I_{j+1}^\infty = \frac{\exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_j)\}}{k^2|\vec{\Delta}|^2} \left[\frac{(\vec{\Delta}, \vec{n}^j)}{(\vec{\Delta}, \vec{\rho}'_j)} - \frac{(\vec{\Delta}, \vec{n}^{j+1})}{(\vec{\Delta}, \vec{\rho}'_{j+1})} \right]. \quad (232)$$

Вершинные волны для многоугольника конечных размеров.

Формула (232) описывает поле, рассеянное плоским угловым сектором. Это выражение состоит из произведения фазы вершины на скалярную функцию, зависящую от геометрии задачи (т.е. формы плоского углового сектора и положения источника и приемника). Интеграл по контуру плоского многоугольника можно записать при помощи суммы вкладов, имеющих фазы середин сторон многоугольника (228), но можно записать и при помощи вкладов вершин. Это можно сделать, изменив способ суммирования вкладов в рассеянное поле. В качестве исходной формулы можно взять выражение (226).

Заметим, что справедливы соотношения $\vec{\rho}_j = \vec{\rho}_{j-1} + a_j \vec{\rho}'_j$, $\vec{\rho}_{j-1} = \vec{\rho}_j - a_j \vec{\rho}'_j$, $\vec{\rho}_{j+1} = \vec{\rho}_j + a_{j+1} \vec{\rho}'_{j+1}$.

Для j -ой стороны имеем (226):

$$\begin{aligned}
I_j &= \frac{\exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_{j-1})\} (\bar{\Delta}, \bar{n}^j)}{k^2 |\bar{\Delta}|^2 (\bar{\Delta}, \bar{\rho}'_j)} [\exp\{ik(\bar{\Delta}, a_j \bar{\rho}'_j)\} - 1] = \\
&= \frac{1}{k^2 |\bar{\Delta}|^2} \frac{(\bar{\Delta}, \bar{n}^j)}{(\bar{\Delta}, \bar{\rho}'_j)} [\exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_j)\} - \exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_{j-1})\}]
\end{aligned} \tag{233}$$

Для $j+1$ -ой стороны имеем (226):

$$\begin{aligned}
I_{j+1} &= \frac{\exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_j)\} (\bar{\Delta}, \bar{n}^{j+1})}{k^2 |\bar{\Delta}|^2 (\bar{\Delta}, \bar{\rho}'_{j+1})} [\exp\{ik(\bar{\Delta}, a_{j+1} \bar{\rho}'_{j+1})\} - 1] = \\
&= \frac{1}{k^2 |\bar{\Delta}|^2} \frac{(\bar{\Delta}, \bar{n}^{j+1})}{(\bar{\Delta}, \bar{\rho}'_{j+1})} [\exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_{j+1})\} - \exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_j)\}]
\end{aligned} \tag{234}$$

Получим теперь для многоугольника конечных размеров выражения для вершинных волн, аналогичные формулам (226). Для этого изменим порядок суммирования интегралов по отрезкам контура C . Вместо вкладов сторон полной длины (233) и (234) разобьем их пополам и просуммируем их на вершинах, к которым они прилегают.

Введем обозначения $\bar{\rho}_{j-1/2}$ для радиус-вектора точки на середине j -ой стороны, $\bar{\rho}_{j+1/2}$ для радиус-вектора точки на середине $j+1$ -ой стороны, $I_{j-1/2}$ и $I_{j+1/2}$ – для интегралов по половинам сторон, прилегающих к j -ой вершине. Тогда можно записать:

$$\begin{aligned}
I_{j-1/2} &= \frac{\exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_{j-1/2})\} (\bar{\Delta}, \bar{n}^j)}{k^2 |\bar{\Delta}|^2 (\bar{\Delta}, \bar{\rho}'_j)} \left[\exp\left\{ik\left(\bar{\Delta}, \frac{a_j}{2} \bar{\rho}'_j\right)\right\} - 1 \right] = \\
&= \frac{1}{k^2 |\bar{\Delta}|^2} \frac{(\bar{\Delta}, \bar{n}^j)}{(\bar{\Delta}, \bar{\rho}'_j)} [\exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_j)\} - \exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_{j-1/2})\}]
\end{aligned} \tag{235}$$

$$\begin{aligned}
I_{j+1/2} &= \frac{\exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_j)\} (\bar{\Delta}, \bar{n}^{j+1})}{k^2 |\bar{\Delta}|^2 (\bar{\Delta}, \bar{\rho}'_{j+1})} \left[\exp\left\{ik\left(\bar{\Delta}, \frac{a_{j+1}}{2} \bar{\rho}'_{j+1}\right)\right\} - 1 \right] = \\
&= \frac{1}{k^2 |\bar{\Delta}|^2} \frac{(\bar{\Delta}, \bar{n}^{j+1})}{(\bar{\Delta}, \bar{\rho}'_{j+1})} [\exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_{j+1/2})\} - \exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_j)\}]
\end{aligned} \tag{236}$$

Просуммировав интегралы по половинам сторон, получаем вершинную волну:

$$\begin{aligned}
I_{j-1/2} + I_{j+1/2} &= \frac{1}{k^2 |\bar{\Delta}|^2} \frac{(\bar{\Delta}, \bar{n}^j)}{(\bar{\Delta}, \bar{\rho}'_j)} \left[\exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_j)\} - \exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_{j-1/2})\} \right] + \\
&+ \frac{1}{k^2 |\bar{\Delta}|^2} \frac{(\bar{\Delta}, \bar{n}^{j+1})}{(\bar{\Delta}, \bar{\rho}'_{j+1})} \left[\exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_{j+1/2})\} - \exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_j)\} \right] = \\
&= \frac{\exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_j)\}}{k^2 |\bar{\Delta}|^2} \left[\frac{(\bar{\Delta}, \bar{n}^j)}{(\bar{\Delta}, \bar{\rho}'_j)} - \frac{(\bar{\Delta}, \bar{n}^{j+1})}{(\bar{\Delta}, \bar{\rho}'_{j+1})} \right] - \frac{\exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_{j-1/2})\}}{k^2 |\bar{\Delta}|^2} \frac{(\bar{\Delta}, \bar{n}^j)}{(\bar{\Delta}, \bar{\rho}'_j)} + \\
&+ \frac{\exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_{j+1/2})\}}{k^2 |\bar{\Delta}|^2} \frac{(\bar{\Delta}, \bar{n}^{j+1})}{(\bar{\Delta}, \bar{\rho}'_{j+1})}. \quad (237)
\end{aligned}$$

Мы видим, что в выражение (237) входит вершинная волна I_∞^j (232) по полубесконечным сторонам углового сектора.

Через «половинные» фазы выражаются вклады отдельных сторон. Каждая из «половинных» фаз будет входить в два интеграла.

Выделим вершинную волну I_∞^j (232) из суммы $I_{j-1/2} + I_{j+1/2}$ и сравним результат с тем, что получится, если выделить вершинную волну из суммы $I_{j-1} + I_{j+1}$.

Если не проводить деление сторон пополам и взять прилегающие к j -ой вершине стороны целиком, то остаток будет таким:

$$I_{j-1} + I_{j+1} - I_\infty^j = - \frac{\exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_{j-1})\}}{k^2 |\bar{\Delta}|^2} \frac{(\bar{\Delta}, \bar{n}^j)}{(\bar{\Delta}, \bar{\rho}'_j)} + \frac{\exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_{j+1})\}}{k^2 |\bar{\Delta}|^2} \frac{(\bar{\Delta}, \bar{n}^{j+1})}{(\bar{\Delta}, \bar{\rho}'_{j+1})}. \quad (238)$$

Если провести деление сторон пополам, то остаток будет таким:

$$I_{j-1/2} + I_{j+1/2} - I_\infty^j = - \frac{\exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_{j-1/2})\}}{k^2 |\bar{\Delta}|^2} \frac{(\bar{\Delta}, \bar{n}^j)}{(\bar{\Delta}, \bar{\rho}'_j)} + \frac{\exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_{j+1/2})\}}{k^2 |\bar{\Delta}|^2} \frac{(\bar{\Delta}, \bar{n}^{j+1})}{(\bar{\Delta}, \bar{\rho}'_{j+1})}. \quad (239)$$

Сравним выражение (239) с вершинными волнами для $j-1$ -ой и $j+1$ -ой вершин.

Остаток для волны $j-1$ -ой вершины $I_{j-3/2} + I_{j-1/2}$ будет таким:

$$I_{j-3/2} + I_{j-1/2} - I_\infty^j = - \frac{\exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_{j-3/2})\}}{k^2 |\bar{\Delta}|^2} \frac{(\bar{\Delta}, \bar{n}^{j-1})}{(\bar{\Delta}, \bar{\rho}'_{j-1})} + \frac{\exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_{j-1/2})\}}{k^2 |\bar{\Delta}|^2} \frac{(\bar{\Delta}, \bar{n}^j)}{(\bar{\Delta}, \bar{\rho}'_j)}. \quad (240)$$

Второе слагаемое из (240) равно первому слагаемому из (239), взятому с противоположным знаком.

Остаток для вершинной волны $I_{j+1/2} + I_{j+3/2}$ будет таким:

$$I_{j+1/2} + I_{j+3/2} - I_\infty^j = - \frac{\exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_{j+1/2})\}}{k^2 |\bar{\Delta}|^2} \frac{(\bar{\Delta}, \bar{n}^{j+1})}{(\bar{\Delta}, \bar{\rho}'_{j+1})} + \frac{\exp\{ik(\bar{\Delta}, \bar{\rho}_{j+3/2})\}}{k^2 |\bar{\Delta}|^2} \frac{(\bar{\Delta}, \bar{n}^{j+2})}{(\bar{\Delta}, \bar{\rho}'_{j+2})}. \quad (241)$$

Первое слагаемое из (241) равно второму слагаемому из (239), взятому с противоположным знаком.

Таким образом мы доказали, что при интегрировании остатков (239) по замкнутому контуру C получится ноль. Поэтому выражение (232) можно условно считать вершинной волной как для полубесконечной, так и для конечной структуры и применять его в эвристических формулах. Но точное значение вершинной волны будет отличаться от того, что мы считали ранее и определяется выражением не (232), а выражением (237).

Функция фазы и условие дальней зоны.

Как показано в Главе 3 (см. формулу (121) и текст, относящийся к ней), интеграл (209) можно выделить из выражений (108) при выполнении условия дальней зоны

$$r \geq 2D^2/\lambda, \quad (242)$$

где D – характерный размер объекта (например, максимальный поперечный размер). Это условие упрощает выражения. Например, из-под знака интеграла выходят все расстояния, кроме тех, которые связаны с положением точки на поверхности рассеивателя. Более общие формулы в общем случае намного сложнее. Условие дальней зоны приводит к выполнению соотношения (120), из которого следует, что при удалении точки наблюдения от объекта угловые размеры этого объекта стремятся к нулю.

Функцию фазы (224) можно записать следующим образом.

$$\Phi = k(\vec{\Delta}, \vec{\rho}) = k(\Delta_x x + \Delta_y y). \quad (243)$$

Эта функция зависит от положения источника и точки наблюдения. Данные параметры входят в функцию фазы симметрично, поэтому принцип взаимности соблюдается.

Найдем градиент функции фазы.

$$\text{grad}\Phi = \vec{e}_x \frac{d\Phi}{dx} + \vec{e}_y \frac{d\Phi}{dy} = k(\vec{e}_x \Delta_x + \vec{e}_y \Delta_y) = k\vec{\Delta}. \quad (244)$$

Таким образом, вектор $\vec{\Delta}$ имеет физический смысл градиента фазы. В случае выполнения условия дальней зоны (242) фаза линейна, поэтому градиент является постоянной функцией. Это свойство связано с выполнением условия дальней зоны. Если условие дальней зоны не выполняется, фаза имеет более сложный вид. В статье математиков Каратыгина и Розова [71] интеграл Кирхгофа для плоского углового сектора берется при помощи двумерного метода стационарной фазы. В работе [71] введена функция φ , с нашей фазой Φ (243) функция φ соотносится как $\Phi = k\varphi$, поэтому $\vec{\Delta} = \text{grad}\varphi$.

Интересно, что в статье [71, §2] говорится, что если фаза на контуре интегрирования постоянна, то метод стационарной фазы неприменим и поэтому в данном случае следует прибегать к численным методам интегрирования. В нашем подходе такая ситуация, наоборот, приводит к наиболее простым выражениям и соответствует направлениям «прямо вперед» и зеркальному. Вместо численного интегрирования по поверхности рассеивателя применяем теорему Стокса и сводим решение к линейному интегралу по теневой кромке, что существенно упрощает итоговые формулы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Строгое аналитическое решение двумерной задачи дифракции на полуплоскости.

С целью построения решения для наклонного падения на идеально проводящую полуплоскость воспользуемся формулами из [57, §11.6]. Заменяем углы α и β из [57] (рис. 21) на углы α_1 и β_1 , связанные уже не с глобальными, а с локальными координатами кромки. Таким же индексом пометим и другие переменные. Пусть на рассеиватель падает плоская волна, характеризующаяся фазовым множителем

$$U_1 = \exp(-ikS_1) = \exp[-ik(x \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + y \sin \alpha_1 \cos \beta_1 + z \sin \beta_1)], \quad (245)$$

где идеально проводящий экран занимает полуплоскость $y=0, x>0$. Этот фазовый множитель получается из двумерной формы, соответствующей $\beta_1=0$, при замене k на $k \cos \beta_1$ и умножении на $\exp(-ikz \sin \beta_1)$. Этот метод, применимый к любому двумерному решению волнового уравнения, очевидно, позволяет получить решение и трехмерного волнового уравнения, где z входит только через множитель $\exp(-ikz \sin \beta_1)$. Кроме того, если U_1 - такое решение трехмерного волнового уравнения, то легко показать, что два электромагнитных поля, удовлетворяющих уравнениям Максвелла, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \left(-\frac{i \sin \beta_1}{k} \frac{\partial U_1}{\partial x}, -\frac{i \sin \beta_1}{k} \frac{\partial U_1}{\partial y}, \cos^2 \beta_1 U_1 \right) \\ \vec{H} &= \left(-\frac{i}{k} \frac{\partial U_1}{\partial y}, \frac{i}{k} \frac{\partial U_1}{\partial x}, 0 \right) \end{aligned} \right\}, \quad (246)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \left(\frac{i}{k} \frac{\partial U_1}{\partial y}, -\frac{i}{k} \frac{\partial U_1}{\partial x}, 0 \right) \\ \vec{H} &= \left(-\frac{i \sin \beta_1}{k} \frac{\partial U_1}{\partial x}, -\frac{i \sin \beta_1}{k} \frac{\partial U_1}{\partial y}, \cos^2 \beta_1 U_1 \right) \end{aligned} \right\}. \quad (247)$$

При $\beta_1=0$ (246) соответствует двумерному полю с ТН- поляризацией, (247) – полю с ТЕ- поляризацией. Если U_1 имеет вид (245), то (246) и (247) дадут соответственно две плоские волны

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= (-\cos \alpha_1 \sin \beta_1, -\sin \alpha_1 \sin \beta_1, \cos \beta_1) \exp(-ikS_1) \\ \vec{H} &= (-\sin \alpha_1, \cos \alpha_1, 0) \exp(-ikS_1) \end{aligned} \right\}, \quad (248)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= (\sin \alpha_1, -\cos \alpha_1, 0) \exp(-ikS_1) \\ \vec{H} &= (-\cos \alpha_1 \sin \beta_1, -\sin \alpha_1 \sin \beta_1, \cos \beta_1) \exp(-ikS_1) \end{aligned} \right\}. \quad (249)$$

Здесь множитель $\cos \beta_1$ везде опущен.

Решение дифракционной задачи определяется (246), если падающая волна определяется (248) и (247), если падающая волна определяется (249); при этом U_1 получается из

$E_z \sec \beta_1$ в двумерном случае заменой k на $k \cos \beta_1$ и умножением на $\exp(-ikz \sin \beta_1)$. В явном виде функция рассеянного поля при падении волны (246) равна

$$U_1 = \frac{\sec \beta_1}{\sqrt{\pi i}} \exp[ik(r \cos \beta_1 - z \sin \beta_1)] \{G(p_1) - G(q_1)\}, \quad (250)$$

где

$$p_1 = -\sqrt{2kr \cos \beta_1} \cos \frac{\theta_1 - \alpha_1}{2}, \quad q_1 = -\sqrt{2kr \cos \beta_1} \cos \frac{\theta_1 + \alpha_1}{2}. \quad (251)$$

Запись компонентов векторов рассеянного поля в декартовых координатах приводит к выражениям

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \frac{\exp[ik(r \cos \beta_1 - z \sin \beta_1)]}{\sqrt{\pi i}} \cos \beta_1 \{G(p_1) - G(q_1)\} \\ H_x &= -\frac{\exp[ik(r \cos \beta_1 - z \sin \beta_1)]}{\sqrt{\pi i}} \left\{ \sin \alpha_1 [G(p_1) + G(q_1)] + i\sqrt{2/(kr \cos \beta_1)} \sin \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\theta_1}{2} \right\} \\ H_y &= \frac{\exp[ik(r \cos \beta_1 - z \sin \beta_1)]}{\sqrt{\pi i}} \left\{ \cos \alpha_1 [G(p_1) - G(q_1)] - i\sqrt{2/(kr \cos \beta_1)} \sin \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\theta_1}{2} \right\} \\ E_x &= -H_y \sin \beta_1, \quad E_y = H_x \sin \beta_1, \quad H_z = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (252)$$

Аналогичный результат можно получить и в том случае, когда падающая волна определяется (249).

Функция $G(a)$ определяется следующим образом

$$G(a) = \exp(-ia^2) F(a), \quad F(a) = \int_a^\infty \exp(i\mu^2) d\mu. \quad (253)$$

Выражения для рассеянного поля можно существенно упростить, если вместо интеграла Френеля подставить его асимптотику

$$\int_{-\infty}^{-x} e^{iq^2} dq = \int_x^\infty e^{iq^2} dq \approx -\frac{e^{ix^2}}{2ix} \quad \text{при } x \gg 1 \quad (254)$$

или асимптотическое разложение, известное из справочников (см. также Приложение 5)

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{e^{ix^2}}{2ix} + \frac{e^{ix^2}}{2ix} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n (2n)!}{(2x)^{2n} (n)!} = \\ &= -\frac{e^{ix^2}}{2ix} + \frac{e^{ix^2}}{2ix} \frac{2i}{(2x)^2} + \frac{e^{ix^2}}{2ix} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n (2n)!}{(2x)^{2n} (n)!} \cong e^{ix^2} \left(\frac{-1}{2ix} + \frac{1}{4x^3} \right) \end{aligned} \quad (255)$$

Отсюда

$$G(a) \cong -(2ia)^{-1} + (4a^3)^{-1}. \quad (256)$$

Кроме того, справедливо

$$\frac{dG(a)}{da} = -1 - 2iaG(a) \cong -1 - 2ia \left(\frac{-1}{2ia} + \frac{1}{4a^3} \right) = \frac{-i}{2a^2} = \frac{1}{2ia^2}. \quad (257)$$

Заметим, что величина производной по модулю меньше, чем $G(a) \cong -(2ia)^{-1}$ при больших значениях аргумента a .

Подстановка асимптотик (256) и (257) вместо строгих формул (253) в выражения (252) с физической точки зрения соответствует навязыванию условия дальней зоны (119) в задаче дифракции на плоском угловом секторе. В случае рассеивателей конечного размера условие дальней зоны выполняется тогда, когда при удалении точки наблюдения от рассеивателя его угловые размеры стремятся к нулю и стягиваются в точку. А при удалении точки наблюдения от любого полубесконечного рассеивателя его угловые размеры никогда не стягиваются в точку. Поэтому, например, решение задачи дифракции на трехмерном многоугольнике конечного размера описывается в дальней зоне суммой вкладов от каждой из сторон многоугольника, причем каждый из вкладов – сингулярен (223), (228), (148), (153), [142]. В то же время, решение задачи дифракции на полуплоскости записывается при помощи интеграла Френеля (см., например, (58), (61), (252), (168), [1]). На границе «свет – тень» дифракционные коэффициенты сингулярны, но интеграл Френеля компенсирует эту сингулярность, в результате решение на границе равно $\frac{1}{2}$ (307).

Мы навязываем условие дальней зоны в задаче дифракции на плоском угловом секторе и вместо спецфункции, подобной интегралу Френеля, получаем в направлении границ «свет – тень» сингулярные вклады от кромок. По-видимому, нечто подобное было сделано и в [16], поскольку верификационное решение также имеет сингулярности в направлениях границы «свет – тень», а коэффициенты D оперируют с полями, взятыми «на бесконечности». В строгом решении задачи дифракции на плоском угловом секторе геометрикооптическое значение поля на границе «свет – тень» должно быть равно $A(1 - S_{\perp})$ и находится в пределах от $A/2$ до A . Здесь A – геометрикооптическое значение поля при отсутствии углового сектора, S_{\perp} – площадь сектора, вырезанного из круга единичной площади. Угол раскрытия вырезанного сектора S_{\perp} равен проекции угла раскрытия плоского сектора на плоскость, перпендикулярную направлению распространения падающей волны.

Навязав условие дальней зоны, мы получаем два положительных эффекта в отношении эталонного решения. Во-первых, эталонное решение упрощается. Во-вторых, оно не нуждается в дальнейшей адаптации для применения к решению трехмерных задач, в которых условие дальней зоны выполняется.

Теперь вернемся к решению для наклонного падения на кромку полуплоскости.

Выделим вектора Т- поляризации: вектора \vec{t} , перпендикулярные кромке и направляющим векторам падающего и рассеянного поля \vec{n}' или \vec{n}'' . Введем вектора \vec{p} , перпендикулярные как векторам \vec{t} , так и направляющим векторам \vec{n}' или \vec{n}'' . Для этих векторов в случае падающего (индекс i) и рассеянного (индекс s) поля имеет смысл ввести новые обозначения: \vec{t}_i , \vec{p}_i , \vec{t}_s и \vec{p}_s . В угловых координатах [57] эти вектора равны:

$$\begin{aligned}\vec{t}_i &= (\sin \alpha_1, -\cos \alpha_1, 0), \quad \vec{p}_i = (-\cos \alpha_1 \sin \beta_1, -\sin \alpha_1 \sin \beta_1, \cos \beta_1) \\ \vec{t}_s &= (-\sin \theta_1, \cos \theta_1, 0), \quad \vec{p}_s = (\sin \beta_1 \cos \theta_1, \sin \beta_1 \sin \theta_1, \cos \beta_1).\end{aligned}\quad (258)$$

Углы θ_1 и α_1 – те же, что в [57], но уже не в глобальных, а в локальных координатах, связанных с кромкой. Угол θ_1 отсчитывается в ту же сторону, что и α_1 . В случае рассеяния «прямо вперед» направления на источник и точку наблюдения противоположны (в отличие от направляющих векторов \vec{n}' или \vec{n}'' , которые совпадают), а соответствующие углы отличаются на π . Поэтому и знаки тригонометрических функций от θ_1 и α_1 в выражениях для векторов \vec{t}_i и \vec{t}_s , а также \vec{p}_i и \vec{p}_s противоположны.

Итак, в случае двух поляризаций две наклонно падающие плоские волны можно выразить через вектора \vec{t}_i и \vec{p}_i :

$$\left. \begin{aligned}\vec{E} &= \vec{p}_i \cos \beta_1 U_1 \\ \vec{H} &= -\vec{t}_i \cos \beta_1 U_1\end{aligned} \right\} \text{(ТН- поляризация)} \quad (259)$$

$$\left. \begin{aligned}\vec{E} &= \vec{t}_i \cos \beta_1 U_1 \\ \vec{H} &= \vec{p}_i \cos \beta_1 U_1\end{aligned} \right\} \text{(ТЕ- поляризация)}.$$

Для наклонного падения (упрощая решение [57]) получим в дальней зоне:

$$\begin{aligned}U_{ТН\beta} &= (\cos \beta_1)^{-1} U_{ТН0} (k \cos \beta_1) \exp(-ikz \sin \beta_1) \\ U_{ТЕ\beta} &= (\cos \beta_1)^{-1} U_{ТЕ0} (k \cos \beta_1) \exp(-ikz \sin \beta_1).\end{aligned}\quad (260)$$

Здесь $U_{ТН\beta}$ и $U_{ТЕ\beta}$ – решения для наклонного падения, $U_{ТН0}$ и $U_{ТЕ0}$ – решения для нормального падения (при $\beta_1=0$) [57]:

$$\begin{aligned}U_{ТН0} &= E_z = (\pi i)^{-1/2} \exp(ikr) \{G(u_1) - G(v_1)\}, \\ U_{ТЕ0} &= H_z = (\pi i)^{-1/2} \exp(ikr) \{G(u_1) + G(v_1)\},\end{aligned}\quad (261)$$

где $u_1 = -\sqrt{2kr} \cos \frac{\theta_1 - \alpha_1}{2}$, $v_1 = -\sqrt{2kr} \cos \frac{\theta_1 + \alpha_1}{2}$.

Выражения (258), (259) представляют собой форму записи формул для падающего поля из [57]. Однако выражения для рассеянного поля из [57] мы существенно упростим, используя то обстоятельство, что нас интересует поле лишь в дальней зоне. При больших расстояниях от кромки справедливо $a \rightarrow \infty$, и можно применять асимптотики (256) и (257).

Применим формулы (254) или (256) для нахождения асимптотик сумм $G(u_1) \pm G(v_1)$.

$$\begin{aligned}G(u) - G(v) &\cong \frac{-1}{2iu} - \frac{-1}{2iv} = \frac{i}{-2\sqrt{2kr} \cos \frac{\theta - \alpha}{2}} - \frac{i}{-2\sqrt{2kr} \cos \frac{\theta + \alpha}{2}} = \\ &= \frac{i(\cos \frac{\theta + \alpha}{2} - \cos \frac{\theta - \alpha}{2})}{-2\sqrt{2kr} \cos \frac{\theta - \alpha}{2} \cos \frac{\theta + \alpha}{2}} = \frac{i(-2 \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\alpha}{2})}{-\sqrt{2kr}(\cos \theta + \cos \alpha)} = i \sqrt{\frac{2}{kr}} \frac{\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \theta + \cos \alpha},\end{aligned}\quad (262)$$

$$\begin{aligned}
G(u) + G(v) &\cong \frac{-1}{2iu} + \frac{-1}{2iv} = \frac{i}{-2\sqrt{2kr}\cos\frac{\theta-\alpha}{2}} + \frac{i}{-2\sqrt{2kr}\cos\frac{\theta+\alpha}{2}} = \\
&= \frac{i\left(\cos\frac{\theta+\alpha}{2} + \cos\frac{\theta-\alpha}{2}\right)}{-2\sqrt{2kr}\cos\frac{\theta-\alpha}{2}\cos\frac{\theta+\alpha}{2}} = \frac{i\left(2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{-\sqrt{2kr}(\cos\theta + \cos\alpha)} = -i\sqrt{\frac{2}{kr}} \frac{\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\theta + \cos\alpha}. \quad (263)
\end{aligned}$$

В асимптотических формулах (263) происходит разделение радиальной и угловой переменных (r и φ соответственно), в результате чего каждую из двух сумм $G(u_1) \pm G(v_1)$ можно объединить в единое выражение. Таким образом, суммы $G(u_1) \pm G(v_1)$ сводятся к выражениям для известных дифракционных коэффициентов f и g [1]:

$$G(u_1) \mp G(v_1) \cong \frac{i}{\sqrt{2kr}} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}. \quad (264)$$

В суммах $G(u_1) \pm G(v_1)$ f , g – строгие дифракционные коэффициенты для полуплоскости, совпадающие с известными выражениями из [1]:

$$f = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\cos\varphi + \cos\varphi_0}, \quad g = \frac{-2\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi_0}{2}}{\cos\varphi + \cos\varphi_0}. \quad (265)$$

Соответствие углов между выражениями из [1] и выражениями из [57]: $\varphi_0 \leftrightarrow \alpha_1$, $\varphi \leftrightarrow \theta_1$.

Можно показать, что функции $G(u_1)$ и $G(v_1)$ в форме (253) корректно применять лишь для полубесконечных рассеивателей, а для трехмерных рассеивателей конечного размера при выполнении условия дальней зоны правильнее применять их асимптотики (264).

Кроме того, в случае применения асимптотик (254) или (256) выражения для U_{TH0} и U_{TE0} (261) существенно упрощаются, поскольку количество слагаемых уменьшится, а сами выражения уже не содержат интегралы Френеля, поскольку состоят лишь из элементарных функций. Для полуплоскости упрощенные выражения для U_{TH0} и U_{TE0} (261) справедливы лишь вдали от границы «свет – тень», а для трехмерных плоских рассеивателей конечного размера они справедливы во всем пространстве.

Если подставить значения из асимптотик (256) и (257) в формулы (252) из [57], то выражения для рассеянного поля примут простую форму, очень похожую на выражения для падающего поля (259):

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{p}_s \cos\beta_1 U_{TH\beta} \\ \vec{H} &= -\vec{t}_s \cos\beta_1 U_{TH\beta} \end{aligned} \right\} \text{(ТН- поляризация)}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{t}_s \cos\beta_1 U_{TE\beta} \\ \vec{H} &= \vec{p}_s \cos\beta_1 U_{TE\beta} \end{aligned} \right\} \text{(ТЕ- поляризация)}. \quad (266)$$

В формулах (259) и (266) присутствует множитель $\cos\beta_1$, опущенный в формулах (248) и (249).

Из формул (258), (259) следует, что в строгом двумерном решении Т-поляризации падающей волны (266) сохраняются для всех углов наклонного падения. Для физоптики это

не так, происходит «подмес» поляризаций. В этом заключается принципиальное отличие между строгим и физоптическим решениями.

Приведем ряд полезных формул, определяющих геометрические соотношения между векторами. Запишем перпендикулярные кромке Т- вектора, определяемые векторными произведениями в глобальной системой координат из [57]. Вектора в координатах из [57] отмечены индексом BW .

$$[\vec{n}'_{BW} \times \vec{e}_z] = \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -\cos\beta \cos\alpha & -\cos\beta \sin\alpha & -\sin\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \cos\beta(-\sin\alpha, \cos\alpha, 0), \quad (267)$$

$$[\vec{n}''_{BW} \times \vec{e}_z] = \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \cos\beta \cos\theta & \cos\beta \sin\theta & -\sin\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \cos\beta(\sin\theta, -\cos\theta, 0). \quad (268)$$

Скалярное произведение векторов Т- поляризаций падающей и рассеянной волн:

$$([\vec{n}'_{BW} \times \vec{e}_z], [\vec{n}''_{BW} \times \vec{e}_z]) = \cos^2\beta(-\sin\alpha \sin\theta - \cos\alpha \cos\theta) = -\cos^2\beta \cos(\theta - \alpha). \quad (269)$$

В локальной системе координат мы работаем с условной кромкой.

Найдем вектора, перпендикулярные как «условной кромке», так и направляющему вектору падающей волны в координатах [16].

Для плоского углового сектора в координатах [16] имеем

$$\vec{n}' = (-\sin\vartheta_0, 0, -\cos\vartheta_0), \quad \vec{n}'' = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \quad \vec{\rho}'_\gamma = (0, -\sin\gamma/2, \cos\gamma/2). \quad (270)$$

Вектор Т- поляризации волны источника равен

$$\begin{aligned} [\vec{n}' \times \vec{\rho}'_\gamma] &= \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -\sin\vartheta_0 & 0 & -\cos\vartheta_0 \\ 0 & -\sin\gamma/2 & \cos\gamma/2 \end{pmatrix} = \\ &= (-\cos\vartheta_0 \sin\gamma/2, \sin\vartheta_0 \cos\gamma/2, \sin\vartheta_0 \sin\gamma/2) \end{aligned} \quad (271)$$

Изменим знак вектора, касательного к кромке, чтобы Т- вектор был направлен в верхнее полупространство ($x > 0$).

$$[\vec{n}' \times -\vec{\rho}'_\gamma] = (\cos\vartheta_0 \sin\gamma/2, -\sin\vartheta_0 \cos\gamma/2, -\sin\vartheta_0 \sin\gamma/2) = \vec{t}_i. \quad (272)$$

Вектор \vec{p}_i поляризации волны источника, перпендикулярный \vec{t}_i , равен

$$\begin{aligned} [\vec{n}' \times \vec{t}_i] &= \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -\sin\vartheta_0 & 0 & -\cos\vartheta_0 \\ \cos\vartheta_0 \sin\gamma/2 & -\sin\vartheta_0 \cos\gamma/2 & -\sin\vartheta_0 \sin\gamma/2 \end{pmatrix} = \\ &= (-\sin\vartheta_0 \cos\vartheta_0 \cos\gamma/2, -\sin\gamma/2, \sin^2\vartheta_0 \cos\gamma/2) = \vec{p}_i \end{aligned} \quad (273)$$

Вектор T- поляризации волны приемника равен

$$\begin{aligned} [\vec{n}'' \times -\vec{p}'_\gamma] &= \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\gamma/2 & -\cos\gamma/2 \end{pmatrix} = \\ &= (-\sin\varphi\cos\gamma/2, \cos\varphi\cos\gamma/2, \cos\varphi\sin\gamma/2) = \vec{t}_s \end{aligned} \quad (274)$$

Вектор \vec{p}_s поляризации волны приемника, перпендикулярный \vec{t}_s , равен

$$\begin{aligned} [\vec{n}'' \times \vec{t}_s] &= \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi\cos\gamma/2 & \cos\varphi\cos\gamma/2 & \cos\varphi\sin\gamma/2 \end{pmatrix} = \\ &= (\sin\varphi\cos\varphi\sin\gamma/2, -\cos^2\varphi\sin\gamma/2, \cos\gamma/2) = \vec{p}_s \end{aligned} \quad (275)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Применение условной кромки при решении задач дифракции.

Во многих эвристических методах теории дифракции (таких, как ФО, МКВ, МДДК, МЭКВ) рассеянное поле находится в виде линейного интеграла по кромке. При этом сначала нужно найти входящее в этот интеграл подынтегральное выражение, связанное с элементом кромки. Это выражение может иметь разные названия в разных методах: «интеграл по элементарной полоске интегрирования» в методах ФО или МКВ, «дифференциальный дифракционный коэффициент» в методе МДДК или «эквивалентный контурный ток» МЭКВ. Помимо различия в названиях могут быть некоторые различия и в сути подходов, а именно – в длине (конечной или полубесконечной) элементарной полоски интегрирования и ее направлении, которое может совпадать с перпендикуляром к кромке или располагаться под углом к ней.

Не останавливаясь на анализе существующих подходов (которые, впрочем, могут давать одинаковые результаты несмотря на отличия в постановке задачи), мы предложим еще один и объясним причину своего выбора.

Все указанные подходы, основанные на строгих решениях (МКВ, МДДК, МЭКВ) используют готовые двумерные решения задачи дифракции на полубесконечной структуре с идеальными или неидеальными граничными условиями. При нормальном или наклонном падении на кромку элементарная полоска интегрирования расположена перпендикулярно кромке, а точка наблюдения при любом расположении в пространстве всегда находится на дифракционном конусе, это свойство двумерного решения и кромки бесконечного размера. В двумерной задаче при любом взаимном расположении источника и точки наблюдения всегда найдется дифракционный конус, соответствующий этим точкам, поскольку на кромке бесконечного размера всегда найдется точка стационарной фазы, находящаяся в вершине дифракционного конуса. При наличии на кромке точки стационарной фазы можно пользоваться готовыми двумерными решениями. Тогда диаграмма рассеяния каждого элемента кромки будет соответствовать диаграмме рассеяния, взятой из решения двумерной задачи для случая нормального падения на кромку.

В эвристических методах двумерные решения используются для решения трехмерных задач. При этом кромка берется конечного размера. Если на ней есть точка стационарной фазы, то эвристическое решение задачи дифракции на кромке можно найти, проведя интегрирование вдоль кромки. Если выполняется условие дальней зоны, то фаза сигнала на кромке будет постоянна.

Однако может быть ситуация, когда точка стационарной фазы на кромке отсутствует. В этом случае эвристическое решение можно построить, проведя на поверхности рассеивателя «условную» кромку (линию на поверхности рассеивателя), которая является образующей дифракционного конуса для заданных положений источника и точки наблюдения (см. рис. 30).

На рис. 30 показана схема построения решения на условной кромке. На рис. 30 (а) показан дифракционный конус, соответствующий двумерной задаче падения плоской волны на бесконечную кромку. Поле рассеивается только в направлении дифракционных конусов. Такое решение соответствует и ГТД, и МКВ в случае, когда точка наблюдения распо-

ложена на дифракционном конусе. Если в трехмерной задаче точка наблюдения расположена вне дифракционного конуса, то ГТД не дает никакого решения, а МКВ дает решение, но его точность тем меньше, чем дальше точка наблюдения расположена от дифракционного конуса. На рис. 30 (б) показан случай, когда точка наблюдения расположена вне дифракционного конуса. Если менять местами источник и точку наблюдения, то каждому положению источника соответствует свой дифракционный конус. Это может приводить к нарушению принципа взаимности в эвристическом решении. Для того, чтобы избежать этой ситуации, вводим так называемую «условную кромку». Это прямая, лежащая в плоскости рассеивателя и идущая под углом к реальной кромке. Направление условной кромки выбираем таким образом, чтобы точка наблюдения находилась по отношению к источнику на дифракционном конусе. Если бы условная кромка соответствовала реальной кромке, то в решении соответствующей задачи дифракции фигурировал бы дифракционный коэффициент двумерного решения. Выделив из этого дифракционного коэффициента «поляризационную» составляющую (числитель), можно построить эвристическое решение в приближении МЭКТ. Таким образом, условная кромка объединяет в себе концепции ГТД и МКВ.

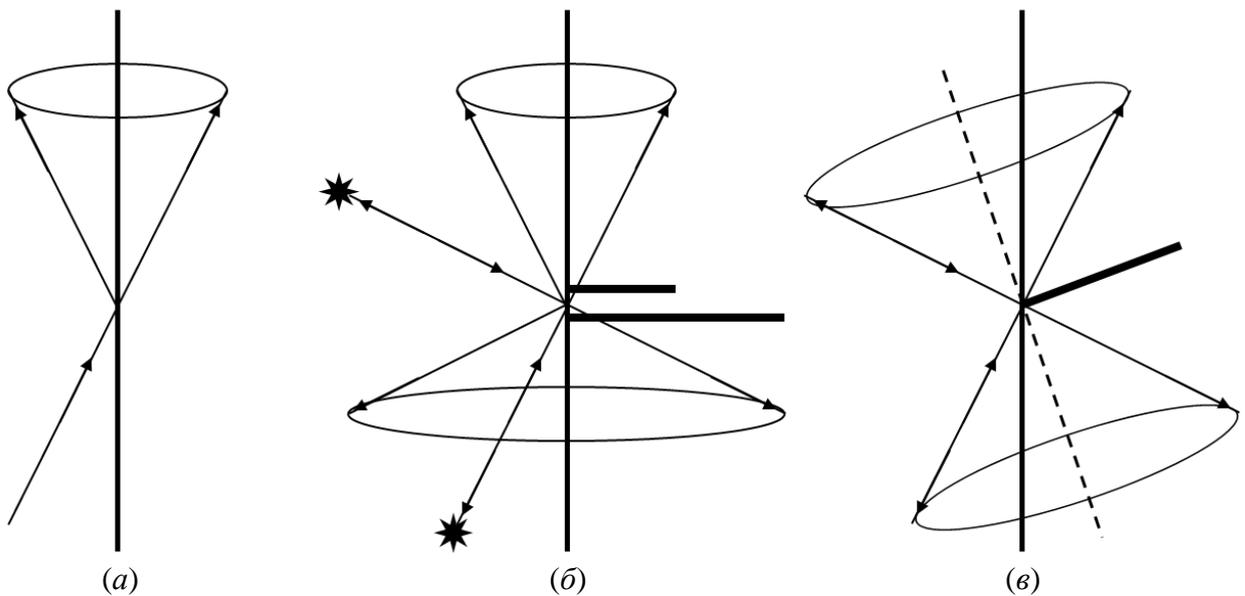


Рис. 30

Применение решения на условной кромке.

На условной кромке появится точка стационарной фазы, находящаяся в вершине дифракционного конуса. При выполнении условия дальней зоны фаза рассеянного сигнала на «условной» кромке будет постоянна. В трехмерном эвристическом решении можно использовать известное двумерное решение на дифракционном конусе условной кромки, проинтегрировав это решение вдоль реальной кромки с соответствующей фазой. На реальной кромке фаза уже не будет постоянна, а будет линейно меняться вдоль кромки.

Рассмотрим в приближении физической оптики идеально проводящий плоский угловой сектор, на который падает плоская электромагнитная волна. Не ограничивая общности подхода, используем координаты, введенные в работе [16].

Рассмотрим падение волны на реальную кромку, расположенную под углом $\beta/2$ к оси z .

Для заданного направления на точку наблюдения построим условную кромку под углом $\gamma/2$ к оси z (рис. 20). Реальная кромка показана сплошной линией, а условная кромка – штриховой.

Для получения ФО решения условная кромка не нужна. Однако для получения формул, основанных на решении [57] и последующего сравнения с ФО решением нам понадобится условная кромка. Поэтому некоторые формулы не содержат угол γ , заменяющий во всех формулах угол β , а некоторые – содержат. На ход рассуждений угол, входящий в формулы, влияния не оказывает.

Пусть на кромку плоского углового сектора падает волна (а) или (b) (см. рис. 31).

На рис. 31 показана схема падения волны на плоский угловой сектор в координатах из [16] (см. также рис. 18). Сплошной жирной стрелкой показан вектор падающего магнитного поля, пунктирной жирной стрелкой – вектор поверхностного тока.

Сначала мы найдем поверхностный ток, возбуждаемый этой волной. Затем разложим этот ток на составляющие, параллельные или перпендикулярные кромке. Затем умножим эти составляющие на коэффициенты $cp1$ или $cr1$, характеризующие изменение строгого решения по сравнению с физоптическим. Для физоптического решения $cp1 = cr1 = 1$. Затем просуммируем вклады всех компонентов в точке наблюдения.

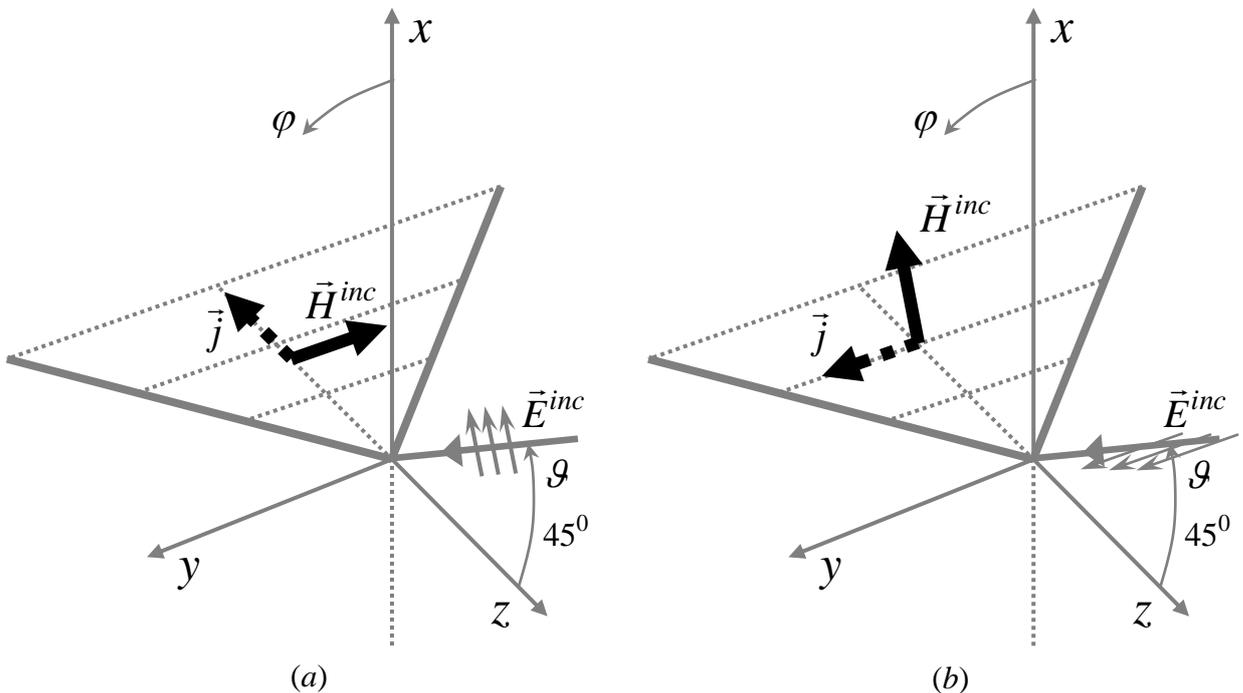


Рис. 31

Падение волны на плоский угловой сектор: поляризации вектора магнитного поля падающих волн и наводимые поверхностные токи.

Рассмотрим возбуждение волной (а), когда вектор магнитного поля имеет только y -компоненту в декартовых координатах, или φ -компоненту в угловых координатах:

$$\begin{aligned}\vec{H}^{(i)} &= \vec{H}_0 \exp\{ik(\vec{n}', \vec{r})\} = H_0(0, -1, 0) \exp\{ik(\vec{n}', \vec{r})\}, \\ \text{или } \vec{H}^{(i)} &= \vec{H}_0 \exp\{ik(\vec{n}', \vec{r})\} = -\vec{e}_\varphi H_{0\varphi} \exp\{ik(\vec{n}', \vec{r})\}.\end{aligned}\quad (276)$$

При возбуждении волной (a) на поверхности рассеивателя возникает ток

$$j\varphi_1 = -\vec{e}_z H_{0\varphi}. \quad (277)$$

Разложение тока по компонентам, параллельным и перпендикулярным кромке, при возбуждении типа (a):

$$\begin{aligned}j\varphi_{1r} &= |j\varphi_1| \sin \beta/2 (0, -\cos \beta/2, -\sin \beta/2), \\ j\varphi_{1p} &= |j\varphi_1| \cos \beta/2 (0, \sin \beta/2, -\cos \beta/2).\end{aligned}\quad (278)$$

Компоненты векторного потенциала $\vec{A}\varphi$ в точке наблюдения равны

$$\begin{aligned}A\varphi_\varphi &= j\varphi_1 \cdot \cos \varphi \cdot (\cos \beta/2 \sin \beta/2 cp_1 - \sin \beta/2 \cos \beta/2 cr_1) \quad (\text{проекция на ось } y), \\ A\varphi_g &= j\varphi_1 \cdot (\cos^2 \beta/2 cp_1 + \sin^2 \beta/2 cr_1) \quad (\text{проекция на ось } -z).\end{aligned}\quad (279)$$

Теперь рассмотрим возбуждение волной (b):

$$\begin{aligned}\vec{H}^{(i)} &= H_0(\cos \vartheta, 0, -\sin \vartheta) \exp\{ik(\vec{n}', \vec{r})\}, \\ \text{или } \vec{H}^{(i)} &= \vec{e}_g H_{0g} \exp\{ik(\vec{n}', \vec{r})\}.\end{aligned}\quad (280)$$

При возбуждении волной (b) на поверхности рассеивателя возникает ток

$$j\mathcal{G}_1 = \vec{e}_y H_{0g} \sin \vartheta. \quad (281)$$

Разложение тока по компонентам, параллельным и перпендикулярным кромке, при возбуждении типа (b):

$$\begin{aligned}j\mathcal{G}_{1r} &= |j\mathcal{G}_1| \cos \beta/2 (0, -\cos \beta/2, -\sin \beta/2), \\ j\mathcal{G}_{1p} &= |j\mathcal{G}_1| \sin \beta/2 (0, -\sin \beta/2, \cos \beta/2).\end{aligned}\quad (282)$$

Компоненты векторного потенциала $\vec{A}\mathcal{G}$ в точке наблюдения равны

$$\begin{aligned}A\mathcal{G}_\varphi &= j\mathcal{G}_1 \cdot \cos \varphi \cdot (\sin^2 \beta/2 cp_1 + \cos^2 \beta/2 cr_1) \quad (\text{проекция на ось } -y), \\ A\mathcal{G}_g &= j\mathcal{G}_1 \cdot (\sin \beta/2 \cos \beta/2 cp_1 - \cos \beta/2 \sin \beta/2 cr_1) \quad (\text{проекция на ось } z).\end{aligned}\quad (283)$$

Разложение векторных потенциалов по компонентам

$$\vec{A}\varphi = \vec{e}_\varphi A\varphi_\varphi + \vec{e}_g A\varphi_g, \quad \vec{A}\mathcal{G} = \vec{e}_\varphi A\mathcal{G}_\varphi + \vec{e}_g A\mathcal{G}_g. \quad (284)$$

С учетом соотношений

$$\vec{e}_\varphi = \vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi, \quad \vec{e}_g = \vec{e}_x \cos \vartheta - \vec{e}_z \sin \vartheta \quad (285)$$

получим

$$\begin{aligned}\vec{A}\varphi &= (\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi) A \varphi_\varphi + (\vec{e}_x \cos \vartheta - \vec{e}_z \sin \vartheta) A \varphi_\vartheta, \\ \vec{A}\vartheta &= (\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi) A \vartheta_\varphi + (\vec{e}_x \cos \vartheta - \vec{e}_z \sin \vartheta) A \vartheta_\vartheta.\end{aligned}\quad (286)$$

С учетом равенства нулю x – компонентом на поверхности рассеивателя имеем:

$$\vec{A}\varphi = \vec{e}_y \cos \varphi A \varphi_\varphi - \vec{e}_z \sin \vartheta A \varphi_\vartheta, \quad \vec{A}\vartheta = \vec{e}_y \cos \varphi A \vartheta_\varphi - \vec{e}_z \sin \vartheta A \vartheta_\vartheta. \quad (287)$$

Вектора компонентом, соответствующие видам возбуждения (а) или (б), параллельные или перпендикулярные кромке:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{cap} &= \cos \beta/2 (\vec{e}_y \sin \beta/2 - \vec{e}_z \cos \beta/2), \quad \overrightarrow{car} = \sin \beta/2 (-\vec{e}_y \cos \beta/2 - \vec{e}_z \sin \beta/2), \\ \overrightarrow{cbp} &= \sin \beta/2 (-\vec{e}_y \sin \beta/2 + \vec{e}_z \cos \beta/2), \quad \overrightarrow{cbr} = \cos \beta/2 (-\vec{e}_y \cos \beta/2 - \vec{e}_z \sin \beta/2).\end{aligned}\quad (288)$$

На рис. 20 с целью избежать загромождения лишними подписями вместо векторов \overrightarrow{cap} и \overrightarrow{cbp} показаны вектора \overrightarrow{cp} и \overrightarrow{cr} , соответствующие видам возбуждения (а) или (б).

Угловые аргументы $\varphi\gamma$ и $\varphi\gamma_0$ (с учетом того, что вектор внутренней нормали к условной кромке равен $\vec{n}^\gamma = (0, -\cos \gamma/2, -\sin \gamma/2)$) определяются соотношениями.

$$\begin{aligned}\varphi\gamma_0 &= \arccos \left(\frac{\vec{n}'_\gamma}{|\vec{n}'_\gamma|}, \vec{n}^\gamma \right) = \arccos \left(\frac{\sin \gamma \cos \gamma/2 + \sin \gamma/2 (1 - \cos \gamma)}{2|\vec{n}'_\gamma| \cos^{-1} \vartheta_0} \right) = \\ &= \arccos \left(\frac{\sin \gamma/2 \cos \vartheta_0}{\sqrt{1 - \cos^2 \gamma/2 \cos^2 \vartheta_0}} \right), \\ \varphi\gamma &= \arccos \left(\frac{\vec{n}''_\gamma}{|\vec{n}''_\gamma|}, \vec{n}^\gamma \right) = \arccos \left(\frac{-2 \cos^3 \gamma/2 - 2 \sin^2 \gamma/2 \cos \gamma/2}{2|\vec{n}''_\gamma| \sin^{-1} \varphi} \right) = \\ &= \arccos \left(\frac{-\cos \gamma/2 \sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \gamma/2 \sin^2 \varphi}} \right).\end{aligned}\quad (289)$$

Отсюда следует

$$\sin \varphi\gamma_0 = \frac{\sin \vartheta_0}{\sqrt{1 - \cos^2 \gamma/2 \cos^2 \vartheta_0}}, \quad \sin \varphi\gamma = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \gamma/2 \sin^2 \varphi}}. \quad (290)$$

Коэффициенты $cp\gamma_1$ или $cr\gamma_1$ при $y > 0$ (т.е. на стороне (1) плоского углового сектора) равны

$$\frac{f(\varphi\gamma, \varphi\gamma_0)}{f^0(\varphi\gamma, \varphi\gamma_0)} \rightarrow cp\gamma_1 = \frac{\sin \frac{\varphi\gamma}{2}}{\cos \frac{\varphi\gamma_0}{2}} \text{ (ТН)} \quad \text{и} \quad \frac{g(\varphi\gamma, \varphi\gamma_0)}{g^0(\varphi\gamma, \varphi\gamma_0)} \rightarrow cr\gamma_1 = \frac{\cos \frac{\varphi\gamma_0}{2}}{\sin \frac{\varphi\gamma}{2}} \text{ (ТЕ)}. \quad (291)$$

Таким образом, коэффициенты D в приближении физической оптики (с коррекцией при помощи коэффициентов $cp\gamma$ и $cr\gamma$) равны:

$$\begin{aligned}
 D_{g\varphi} &= \frac{kR}{e^{-ikR}} \frac{E_g^\infty}{E_g^{inc}} = \frac{kR}{e^{-ikR}} \frac{H_\varphi^\infty}{H_\varphi^{inc}} = \frac{kR}{e^{-ikR}} \frac{ikA\varphi_g^e}{H_\varphi^{inc}} = \\
 &= \frac{ik^2 I}{2\pi} \left[-H_{0\varphi} \cdot \left(\cos^2 \beta/2 cp\gamma + \sin^2 \beta/2 cr\gamma \right) \right] \\
 D_{\varphi\varphi} &= \frac{kR}{e^{-ikR}} \frac{E_\varphi^\infty}{E_\varphi^{inc}} = \frac{kR}{e^{-ikR}} \frac{-H_g^\infty}{H_g^{inc}} = \frac{kR}{e^{-ikR}} \frac{ikA\varphi_\varphi^e}{H_g^{inc}} = \\
 &= \frac{ik^2 I}{2\pi} \left[H_{0g} \sin \vartheta_0 \cdot \cos \varphi \cdot \left(\sin^2 \beta/2 cp\gamma + \cos^2 \beta/2 cr\gamma \right) \right] \\
 D_{g\varphi} &= \frac{kR}{e^{-ikR}} \frac{E_g^\infty}{E_\varphi^{inc}} = \frac{kR}{e^{-ikR}} \frac{H_\varphi^\infty}{H_g^{inc}} = \frac{kR}{e^{-ikR}} \frac{ikA\varphi_g^e}{H_g^{inc}} = \\
 &= \frac{ik^2 I}{2\pi} \left[H_{0g} \sin \vartheta_0 \left(\sin \beta/2 \cos \beta/2 cp\gamma - \cos \beta/2 \sin \beta/2 cr\gamma \right) \right] \\
 D_{\varphi g} &= \frac{kR}{e^{-ikR}} \frac{E_\varphi^\infty}{E_g^{inc}} = \frac{kR}{e^{-ikR}} \frac{-H_g^\infty}{H_\varphi^{inc}} = \frac{kR}{e^{-ikR}} \frac{ikA\varphi_\varphi^e}{H_\varphi^{inc}} = \\
 &= \frac{ik^2 I}{2\pi} \left[-H_{0\varphi} \cos \varphi \cdot \left(\cos \beta/2 \sin \beta/2 cp\gamma - \sin \beta/2 \cos \beta/2 cr\gamma \right) \right]
 \end{aligned} \tag{292}$$

Если в формулах (292) положить $cp\gamma=1$, $cr\gamma=1$, то получим коэффициенты D в приближении физической оптики (без коррекции).

ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Сводка формул, применяемых в задаче дифракции на плоском угловом секторе.

В Приложении 1 был рассмотрен интеграл по плоскому угловому сектору в приближении физической оптики. В Приложении 3 на основе этого интеграла было построено решение для дифракции плоской электромагнитной волны на идеально проводящем плоском угловом секторе. Это решение не обладает высокой точностью даже при введении уточняющих поправок.

В данном приложении мы рассмотрим решение для плоского углового сектора, полученное другим способом. Решение строится в несколько этапов.

1. Интеграл по плоскому угловому сектору в приближении физической оптики.
2. Разделение ФО интеграла на вклады кромок, причем вклад каждой кромки дополнительно разделяется на два сомножителя: интеграл по кромке и интеграл по элементарной полоске интегрирования (поляризационный вклад).
3. Выделение поляризационной составляющей из строгого двумерного решения [57] с навязанным условием дальней зоны. Это решение было рассмотрено в Приложении 2.
4. Замена в каждом вкладе кромки, выделенном из ФО интеграла, поляризационной составляющей физоптики на поляризационную составляющую строгого решения.
5. Можно показать, что полученное решение соответствует приближению МЭКТ (или, что то же самое, приближениям МКВ и МДДК). Дальнейшее уточнение решения связано с применением модифицированного МЭКТ (ММЭКТ).

Поле, рассеянное кромкой длины a_j , в приближении физической оптики можно записать (Приложение 1)

$$E_{\varphi}^e = ikA_{\varphi}^e = \frac{ik}{2\pi} \frac{\exp(ikR)}{R} I_j [\vec{n} \times \vec{H}^0]_{\varphi} = \frac{1}{2\pi} \frac{a_j \exp(ikR)}{R} \frac{[\vec{n} \times \vec{H}^0]_{\varphi}}{\cos\varphi + \cos\varphi_0}. \quad (293)$$

Здесь было использовано выражение для I_j в случае нормального падения на кромку

$$I_j = \frac{ia_j \exp\{i\Phi_j\}}{k(\vec{\Delta}, \vec{n}^j)} = \frac{a_j \exp\{i\Phi_j\}}{ik(\cos\varphi + \cos\varphi_0)}. \quad (294)$$

Вершинная волна (т.е. рассеяние плоским угловым сектором) в приближении физической оптики (Приложение 1) получается при помощи изменения порядка суммирования вкладов кромок

$$I = \sum_{j=1}^N I_j = \sum_{j=1}^N I^j, \text{ где } I^j = \frac{\exp\{i\Phi_j\}}{k^2 |\vec{\Delta}|^2} \left[\frac{(\vec{\Delta}, \vec{n}^j)}{(\vec{\Delta}, \vec{\rho}'_j)} - \frac{(\vec{\Delta}, \vec{n}^{j+1})}{(\vec{\Delta}, \vec{\rho}'_{j+1})} \right]. \quad (295)$$

Эвристическое решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны, основанное на строгом решении [57], (Приложение 2) на идеально проводящей кромке отличается от эвристического решения той же задачи, основанного на физоптике (Приложение 3), но

строится по тому же принципу, т.е. при помощи замены поляризационной составляющей дифракционного коэффициента в физоптическом интеграле (Приложение 1).

$$\begin{aligned}
D_{\vartheta\vartheta} &= \frac{kR}{e^{ikR}} \frac{E_g^\infty}{E_g^{inc}} = \frac{kR}{e^{ikR}} \frac{H_\varphi^\infty}{H_\varphi^{inc}} = \frac{ik^2}{2\pi} I^j \left[(\vec{e}_g^s, \vec{p}_s) (\vec{e}_g^{inc}, \vec{p}_i) U_{TH\beta}'' + (\vec{e}_g^s, \vec{t}_s) (\vec{e}_g^{inc}, \vec{t}_i) U_{TE\beta}'' \right], \\
D_{\varphi\varphi} &= \frac{kR}{e^{ikR}} \frac{E_\varphi^\infty}{E_\varphi^{inc}} = \frac{kR}{e^{ikR}} \frac{-H_g^\infty}{H_g^{inc}} = \frac{ik^2}{2\pi} I^j \left[(\vec{e}_\varphi^s, \vec{p}_s) (\vec{e}_\varphi^{inc}, \vec{p}_i) U_{TH\beta}'' + (\vec{e}_\varphi^s, \vec{t}_s) (\vec{e}_\varphi^{inc}, \vec{t}_i) U_{TE\beta}'' \right], \\
D_{\vartheta\varphi} &= \frac{kR}{e^{ikR}} \frac{E_g^\infty}{E_\varphi^{inc}} = \frac{kR}{e^{ikR}} \frac{H_\varphi^\infty}{H_g^{inc}} = \frac{ik^2}{2\pi} I^j \left[(\vec{e}_g^s, \vec{p}_s) (\vec{e}_\varphi^{inc}, \vec{p}_i) U_{TH\beta}'' + (\vec{e}_g^s, \vec{t}_s) (\vec{e}_\varphi^{inc}, \vec{t}_i) U_{TE\beta}'' \right], \\
D_{\varphi\vartheta} &= \frac{kR}{e^{ikR}} \frac{E_\varphi^\infty}{E_g^{inc}} = \frac{kR}{e^{ikR}} \frac{-H_g^\infty}{H_\varphi^{inc}} = \frac{ik^2}{2\pi} I^j \left[(\vec{e}_\varphi^s, \vec{p}_s) (\vec{e}_g^{inc}, \vec{p}_i) U_{TH\beta}'' + (\vec{e}_\varphi^s, \vec{t}_s) (\vec{e}_g^{inc}, \vec{t}_i) U_{TE\beta}'' \right].
\end{aligned} \tag{296}$$

Приведем выражения для покомпонентной записи векторов, использованных в формулах (296). В формулах применяются единичные орты падающего и рассеянного полей

$\vec{e}_\varphi^{inc} = (0,1,0)$	$\vec{e}_g^{inc} = (\cos \vartheta_0, 0, -\sin \vartheta_0)$	$\vec{e}_g^s = (0,0,-1)$	$\vec{e}_\varphi^s = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$
$\vec{t}_i = (\cos \vartheta_0 \sin \gamma/2, -\sin \vartheta_0 \cos \gamma/2, -\sin \vartheta_0 \sin \gamma/2)$	$\vec{t}_s = (-\sin \varphi \cos \gamma/2, \cos \varphi \cos \gamma/2, \cos \varphi \sin \gamma/2)$		
$\vec{p}_i = (-\sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 \cos \gamma/2, -\sin \gamma/2, \sin^2 \vartheta_0 \cos \gamma/2)$	$\vec{p}_s = (\sin \varphi \cos \varphi \sin \gamma/2, -\cos^2 \varphi \sin \gamma/2, \cos \gamma/2)$		
$(\vec{e}_g^{inc}, \vec{p}_i) = -\sin \vartheta_0 \cos \gamma/2$	$(\vec{e}_g^{inc}, \vec{t}_i) = \sin \gamma/2$		
$(\vec{e}_\varphi^{inc}, \vec{p}_i) = -\sin \gamma/2$	$(\vec{e}_\varphi^{inc}, \vec{t}_i) = -\sin \vartheta_0 \cos \gamma/2$		
$(\vec{e}_g^s, \vec{p}_s) = -\cos \gamma/2$	$(\vec{e}_g^s, \vec{t}_s) = -\cos \varphi \sin \gamma/2$		
$(\vec{e}_\varphi^s, \vec{p}_s) = -\cos \varphi \sin \gamma/2$	$(\vec{e}_\varphi^s, \vec{t}_s) = \cos \gamma/2$		

В формулы (296) также входят следующие выражения:

$$\begin{aligned}
U_{TH\beta}'' &= f(\varphi\gamma, \varphi\gamma_0) (\cos \varphi\gamma + \cos \varphi\gamma_0) = 2 \sin \frac{\varphi\gamma}{2} \sin \frac{\varphi\gamma_0}{2}, \\
U_{TE\beta}'' &= g(\varphi\gamma, \varphi\gamma_0) (\cos \varphi\gamma + \cos \varphi\gamma_0) = -2 \cos \frac{\varphi\gamma}{2} \cos \frac{\varphi\gamma_0}{2}.
\end{aligned} \tag{297}$$

Выражения (297) описывают числители дифракционных коэффициентов, т.е. их поляризационную составляющую на условной кромке. Множители, соответствующие знаменателям дифракционных коэффициентов, определяются на реальной кромке и входят в формулы в составе вершинных волн I^j .

Проведя необходимые преобразования, можно получить более компактные выражения.

$$\begin{aligned}
D_{g\varphi} &= \frac{kR}{e^{ikR}} \frac{E_g^\infty}{E_g^{inc}} = \frac{kR}{e^{ikR}} \frac{H_\varphi^\infty}{H_\varphi^{inc}} = \frac{ik^2}{2\pi} I^j \left[ep \mathcal{G}\mathcal{G}(\mathcal{G}_0, \varphi) U''_{TH\beta} + et \mathcal{G}\mathcal{G}(\mathcal{G}_0, \varphi) U''_{TE\beta} \right], \\
D_{\varphi\varphi} &= \frac{kR}{e^{ikR}} \frac{E_\varphi^\infty}{E_\varphi^{inc}} = \frac{kR}{e^{ikR}} \frac{-H_g^\infty}{H_g^{inc}} = \frac{ik^2}{2\pi} I^j \left[ep \varphi\varphi(\mathcal{G}_0, \varphi) U''_{TH\beta} + et \varphi\varphi(\mathcal{G}_0, \varphi) U''_{TE\beta} \right], \\
D_{g\varphi} &= \frac{kR}{e^{ikR}} \frac{E_g^\infty}{E_g^{inc}} = \frac{kR}{e^{ikR}} \frac{H_\varphi^\infty}{H_\varphi^{inc}} = \frac{ik^2}{2\pi} I^j \left[ep \mathcal{G}\varphi(\mathcal{G}_0, \varphi) U''_{TH\beta} + et \mathcal{G}\varphi(\mathcal{G}_0, \varphi) U''_{TE\beta} \right], \\
D_{\varphi\varphi} &= \frac{kR}{e^{ikR}} \frac{E_\varphi^\infty}{E_\varphi^{inc}} = \frac{kR}{e^{ikR}} \frac{-H_g^\infty}{H_g^{inc}} = \frac{ik^2}{2\pi} I^j \left[ep \varphi\mathcal{G}(\mathcal{G}_0, \varphi) U''_{TH\beta} + et \varphi\mathcal{G}(\mathcal{G}_0, \varphi) U''_{TE\beta} \right].
\end{aligned} \tag{298}$$

Выражения, входящие в формулы (298):

$ep \mathcal{G}\mathcal{G}(\mathcal{G}_0, \varphi) = -\cos \gamma/2 \times -\sin \mathcal{G}_0 \cos \gamma/2$	$et \mathcal{G}\mathcal{G}(\mathcal{G}_0, \varphi) = -\cos \varphi \sin \gamma/2 \times \sin \gamma/2$
$ep \varphi\varphi(\mathcal{G}_0, \varphi) = -\cos \varphi \sin \gamma/2 \times -\sin \gamma/2$	$et \varphi\varphi(\mathcal{G}_0, \varphi) = \cos \gamma/2 \times -\sin \mathcal{G}_0 \cos \gamma/2$
$ep \mathcal{G}\varphi(\mathcal{G}_0, \varphi) = (\vec{e}_g^s, \vec{p}_s) (\vec{e}_\varphi^{inc}, \vec{p}_i) = -\cos \gamma/2 \times -\sin \gamma/2$	$et \mathcal{G}\varphi(\mathcal{G}_0, \varphi) = -\cos \varphi \sin \gamma/2 \times -\sin \mathcal{G}_0 \cos \gamma/2$
$ep \varphi\mathcal{G}(\mathcal{G}_0, \varphi) = -\cos \varphi \sin \gamma/2 \times -\sin \mathcal{G}_0 \cos \gamma/2$	$et \varphi\mathcal{G}(\mathcal{G}_0, \varphi) = (\vec{e}_\varphi^s, \vec{t}_s) (\vec{e}_g^{inc}, \vec{t}_i) = \cos \gamma/2 \times \sin \gamma/2$

В этих выражениях присутствуют функции, связанные с углом условной кромки $\gamma/2$.

$$\cos \gamma/2 = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \mathcal{G}_0}}, \quad \sin \gamma/2 = \frac{\cos \mathcal{G}_0}{\sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \mathcal{G}_0}}. \tag{299}$$

Приведем еще одну форму записи коэффициентов D .

Строгие выражения. Обозначения $(\vec{H}^{inc}, \vec{e}_\infty)$ и $(D_{\infty inc}$ по полю E). $E_g = H_\varphi$, $E_\varphi = -H_g$ (уходящая волна) и $E_g = -H_\varphi$, $E_\varphi = H_g$ (приходящая волна).

$$\begin{aligned}
DH_{g\varphi} &= \frac{kR}{e^{ikR}} \frac{E_g^\infty}{E_g^{inc}} = \frac{kR}{e^{ikR}} \frac{H_\varphi^\infty}{H_\varphi^{inc}} = \frac{ik^2}{2\pi} I^j (\vec{H}^a, \vec{e}_\varphi), \\
DH_{\varphi\varphi} &= \frac{kR}{e^{ikR}} \frac{E_\varphi^\infty}{E_\varphi^{inc}} = \frac{kR}{e^{ikR}} \frac{-H_g^\infty}{H_g^{inc}} = -\frac{ik^2}{2\pi} I^j (\vec{H}^b, \vec{e}_g), \\
DH_{g\varphi} &= \frac{kR}{e^{ikR}} \frac{E_g^\infty}{E_g^{inc}} = \frac{kR}{e^{ikR}} \frac{H_\varphi^\infty}{H_\varphi^{inc}} = \frac{ik^2}{2\pi} I^j (\vec{H}^b, \vec{e}_\varphi), \\
DH_{\varphi\varphi} &= \frac{kR}{e^{ikR}} \frac{E_\varphi^\infty}{E_\varphi^{inc}} = \frac{kR}{e^{ikR}} \frac{-H_g^\infty}{H_g^{inc}} = -\frac{ik^2}{2\pi} I^j (\vec{H}^a, \vec{e}_g).
\end{aligned} \tag{300}$$

В выражениях для коэффициентов D фигурируют скалярные произведения:

$$\begin{aligned}
(\vec{H}^a, \vec{e}_g) &= -\cos\beta \frac{-U_{TE\beta}(-\sin\gamma/2)}{\sqrt{1-\cos^2\vartheta_0 \cos^2\gamma/2}} (D\varphi\vartheta), \\
(\vec{H}^b, \vec{e}_g) &= -\cos\beta \frac{-U_{TE\beta} \sin\vartheta_0 \cos\gamma/2}{\sqrt{1-\cos^2\vartheta_0 \cos^2\gamma/2}} (D\varphi\varphi), \\
(\vec{H}^a, \vec{e}_\varphi) &= \sin(\theta-\varphi) \frac{U_{TH\beta}(-\sin\vartheta_0 \cos\gamma/2)}{\sqrt{1-\cos^2\vartheta_0 \cos^2\gamma/2}} + \sin\beta \cos(\theta-\varphi) \frac{-U_{TE\beta}(-\sin\gamma/2)}{\sqrt{1-\cos^2\vartheta_0 \cos^2\gamma/2}} \\
&\quad (D\vartheta\vartheta), \\
(\vec{H}^b, \vec{e}_\varphi) &= \sin(\theta-\varphi) \frac{U_{TH\beta}(-\sin\gamma/2)}{\sqrt{1-\cos^2\vartheta_0 \cos^2\gamma/2}} + \sin\beta \cos(\theta-\varphi) \frac{-U_{TE\beta} \sin\vartheta_0 \cos\gamma/2}{\sqrt{1-\cos^2\vartheta_0 \cos^2\gamma/2}} \\
&\quad (D\vartheta\varphi).
\end{aligned} \tag{301}$$

В этих формулах использованы выражения для векторов магнитного поля \vec{H}^a и \vec{H}^b , соответствующие типам возбуждения (a) и (b) (Приложение 3)

$$\begin{aligned}
\vec{H}^a &= (\sin\theta, -\cos\theta, 0) \frac{U_{TH\beta}(-\sin\vartheta_0 \cos\gamma/2)}{\sqrt{1-\cos^2\vartheta_0 \cos^2\gamma/2}} + \\
&\quad + (\sin\beta \cos\theta, \sin\beta \sin\theta, \cos\beta) \frac{-U_{TE\beta}(-\sin\gamma/2)}{\sqrt{1-\cos^2\vartheta_0 \cos^2\gamma/2}} = (H_x^a, H_y^a, H_z^a) \\
&\quad (a), \\
\vec{H}^b &= (\sin\theta, -\cos\theta, 0) \frac{U_{TH\beta}(-\sin\gamma/2)}{\sqrt{1-\cos^2\vartheta_0 \cos^2\gamma/2}} + \\
&\quad + (\sin\beta \cos\theta, \sin\beta \sin\theta, \cos\beta) \frac{-U_{TE\beta} \sin\vartheta_0 \cos\gamma/2}{\sqrt{1-\cos^2\vartheta_0 \cos^2\gamma/2}} = (H_x^b, H_y^b, H_z^b) \\
&\quad (b).
\end{aligned} \tag{302}$$

Формулы (296) описывают принцип, по которому строится решение задачи рассеяния на плоском угловом секторе, а формулы (298) и (300) представляют собой другую форму записи решения (296).

Дополнительные соотношения для векторов.

1. Направляющие вектора (как в [16]): $\vec{n}' = (-\sin\vartheta_0, 0, -\cos\vartheta_0)$, $\vec{n}'' = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$.
2. Вспомогательный вектор $\vec{\Delta} = (0, -\sin\varphi, -\cos\vartheta_0)$.
3. Вектор внутренней нормали $\vec{n}^\gamma = (0, -\cos\gamma/2, -\sin\gamma/2)$ и касательной к «условной кромке» $\vec{\rho}' = (0, -\sin\gamma/2, \cos\gamma/2)$.
4. Условие дифракционного конуса для отдельной стороны: $(\vec{\Delta}, \vec{\rho}') = 0$.

Обозначим через β внутренний угол при вершине. Тогда: $\vec{\rho}'_1 = (0, -\sin \beta/2, \cos \beta/2)$,
 $\vec{\rho}'_2 = (0, -\sin \beta/2, -\cos \beta/2)$, $\vec{n}^1 = \vec{\rho}'_2$, $\vec{n}^2 = -\vec{\rho}'_1$.

Последние две формулы справедливы только для четверть-плоскости, когда $\beta = \pi/2$. А в общем случае: $\vec{n}^1 = (0, -\cos \beta/2, -\sin \beta/2)$, $\vec{n}^2 = (0, \cos \beta/2, -\sin \beta/2)$.

$$|\vec{\Delta}|^2 = \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varrho_0), \quad (\vec{\Delta}, \vec{n}^1) = \sin(\varphi)\cos \beta/2 + \cos(\varrho_0)\sin \beta/2,$$

$$(\vec{\Delta}, \vec{n}^2) = -\sin(\varphi)\cos \beta/2 + \cos(\varrho_0)\sin \beta/2, \quad (\vec{\Delta}, \vec{\rho}'_1) = \sin(\varphi)\sin \beta/2 - \cos(\varrho_0)\cos \beta/2,$$

$$(\vec{\Delta}, \vec{\rho}'_2) = \sin(\varphi)\sin \beta/2 + \cos(\varrho_0)\cos \beta/2.$$

В формулах из данной таблицы фигурируют два угла: β и γ . Как мы говорили ранее, угол γ заменяет угол β , когда речь идет об условной кромке. В пп. 1 – 3 применяется угол γ , а в п. 4 (где говорится о реальном дифракционном конусе) применяется угол β . Этим мы хотим сказать, что если речь идет о геометрических параметрах построения решения, то можно применять угол γ . Но если речь идет о дифракционном конусе (который реально существует в пространстве, проводились даже эксперименты по установлению его местоположения), то следует говорить только о реальном угле β . Кстати, то же самое следует из формул (297). Из решения на условной кромке мы извлекаем только «поляризационную составляющую» дифракционного коэффициента и подставляем ее в формулы (296), а знаменатель, определяющий сингулярность («геометрическая составляющая»), оставляем таким, каким его определяет реальная кромка, см. (294) и (295).

Ранее мы говорили том, что в физоптическом решении задачи дифракции на плоском угловом секторе (Приложение 3) применялась замена поляризационной составляющей дифракционного коэффициента в интеграле (Приложение 1), полученном также в приближении физической оптики. В этом нет противоречия. Действительно, решение модифицировалось при помощи множителей c_{py} и c_{ry} , явные выражения (291) для которых можно получить, сравнивая дифракционные коэффициенты строгого и физоптического решения для случая нормального падения на кромку. Но такую модификацию мы смогли сделать только потому, что заранее знали соотношение между строгими и физоптическими коэффициентами для нормального падения.

Что касается решений этого раздела (296), (298) и (300), то они получены не при помощи модификации отдельных составляющих физоптического решения, а при помощи одновременной замены обеих физоптических поляризационных составляющих, выделенных из физоптического интеграла по кромке, на поляризационные составляющие строгого решения. В выражениях (297) поляризационные составляющие для разных видов поляризаций разделяются, но это только потому, что данные компоненты решения, входящие в выражения (296) и (298) для коэффициентов D , соответствуют случаю нормального падения на кромку.

Сравнение решения, основанного на строгих формулах [57] и физоптического решения (Приложение 3) со строгим решением [16] показывает, что между этими решениями есть различия, несмотря на то, что в физоптическом решении применялась коррекция отдельных компонентов физоптического решения при помощи коэффициентов c_{py} и c_{ry} , учиты-

вающих возмущение поля вблизи кромки. В решении, построенном только на основе принципа физической оптики, возмущение поля вблизи кромки не учитывается.

Тем не менее, мы все же не отказываемся от физоптического решения по ряду причин.

Во – первых, физоптическое решение помогает понять причину отличия между строгим решением и решением в приближении физической оптики.

Во – вторых, не исключено, что при каком – то виде граничных условий физоптическое решение лучше подойдет для описания рассеянного сигнала.

Отношения дифракционных коэффициентов c_{py} и c_{ry} можно использовать для уточнения как двумерного дифракционного коэффициента на кромке, так и трехмерного решения на плоском угловом секторе.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Интеграл Френеля и его свойства.

1. Определение интеграла Френеля.

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \int_{-\infty}^y \exp(i\xi^2) d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \left[\int_{-\infty}^0 \exp(i\xi^2) d\xi + \int_0^y \exp(i\xi^2) d\xi \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \left[\frac{\sqrt{\pi i}}{2} + \int_0^y \exp(i\xi^2) d\xi \right]. \quad (303)$$

2. Асимптотику интеграла Френеля можно получить при помощи формулы интегрирования по частям. Обозначим $u = \exp(i\xi^2)$, $v = (2i\xi)^{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} [\exp(i\xi^2)] &= 2i\xi \exp(i\xi^2); \quad \exp(i\xi^2) = \frac{d}{d\xi} [\exp(i\xi^2)] \frac{1}{2i\xi} = u'v; \quad \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{2i\xi} \right) = \frac{1}{2i} \frac{-d\xi}{\xi^2}; \\ \int \exp(i\xi^2) d\xi &= \int \frac{d}{d\xi} [\exp(i\xi^2)] \frac{1}{2i\xi} = \int u'v = uv - \int uv' = \frac{\exp(i\xi^2)}{2i\xi} + \frac{1}{2i} \int \exp(i\xi^2) \frac{d\xi}{\xi^2}. \\ \frac{1}{2i} \int \exp(i\xi^2) \frac{1}{\xi^2} &= \frac{1}{2i} \int \frac{d}{d\xi} [\exp(i\xi^2)] \frac{1}{2i\xi^3} = \frac{1}{2i} \int u'v = \frac{1}{2i} (uv - \int uv') = \frac{\exp(i\xi^2)}{(2i)^2 \xi^3} + \frac{1}{(2i)^2} \int \exp(i\xi^2) \frac{2d\xi}{\xi^3}. \\ \int \exp(i\xi^2) d\xi &= \frac{\exp(i\xi^2)}{2i\xi} + \frac{1}{2i} \int \exp(i\xi^2) \frac{d\xi}{\xi^2} = \frac{\exp(i\xi^2)}{2i\xi} + \frac{\exp(i\xi^2)}{(2i)^2 \xi^3} + \frac{1}{(2i)^2} \int \exp(i\xi^2) \frac{2d\xi}{\xi^3} = \dots \end{aligned}$$

В итоге получим асимптотический ряд, справедливый при больших значениях аргумента

$$\int \exp(i\xi^2) d\xi = \exp(i\xi^2) \left[\frac{1}{2i\xi} + \frac{1}{(2i)^2 \xi^3} + \dots \right] = \exp(i\xi^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2i)^{n+1} \xi^{2n+1}}. \quad (304)$$

Для получения степенного ряда нужно разложить в ряд Тейлора экспоненту в подынтегральном выражении и провести интегрирование.

3. Предельный переход на границе «свет – тень».

3.1. Исходные формулы для получения предельного перехода.

Рассмотрим выражение для поле, рассеянного идеально проводящим клином

$$v(w_0) \cong \sum_{m=1,2} \frac{\hat{w}_{sm}/n}{\hat{w}_{sm} - w_0} \frac{2iP(\hat{w}_{sm})}{\sqrt{2\pi i k r_{z0} r_0 / (r_{z0} + r_0)}} \frac{\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}{\exp[iS^c(\hat{w}_{sm}) - iS^c(w_0)]} \frac{\int_{\infty, \sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}^{\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}} \exp(iq^2) dq. \quad (305)$$

В выражении (305) в зависимости от геометрии задачи подставляем (см. также (47) и (52))

$$\begin{aligned} S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0) &= k(r_{z0} + r_0) - k\sqrt{(r_{z0} + r_0)^2 - 2r_{z0}r_0[1 + \cos(\varphi_{z0} - \varphi_0)]}, \\ S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0) &= k(r_{z2} + h - r_{z1}) \quad \text{или} \quad S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0) = k(r_{z1} + h - r_{z2}) \end{aligned} \quad (306)$$

$$\frac{w_{s1}}{w_{s1} - w_0} - \frac{w_{s2}}{w_{s2} - w_0} = \frac{\exp(i\frac{\varphi_0 + \pi}{n})}{\exp(i\frac{\varphi_0 + \pi}{n}) - \exp(i\frac{\varphi_z}{n})} - \frac{\exp(i\frac{\varphi_0 - \pi}{n})}{\exp(i\frac{\varphi_0 - \pi}{n}) - \exp(i\frac{\varphi_z}{n})} = \frac{i \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi_z - \varphi_0}{n}}.$$

3.2. Поведение рассеянного поля вблизи границ тени.

В окрестности седловых точек $n\varphi_w^c - \varphi_0 = \pm\pi$ $S^c(w_{sm}) - S^c(w_0) \rightarrow \frac{kr_{z_0}r_0}{r_{z_0} + r_0} 2 \cos^2 \frac{\varphi_{z_0} - \varphi_0}{2}$.

Если $\varphi_{z_0} \rightarrow \varphi_0 \pm(\pi - x)$, где x – малая величина, то $\cos \frac{\varphi_{z_0} - \varphi_0}{2} \rightarrow \sin \frac{x}{2} \approx \frac{x}{2}$,

$$\cos \frac{\varphi_{z_0} - \varphi_0}{n} = \cos \frac{\mp \pi \pm x}{n} = \cos \frac{\mp \pi}{n} \cos \frac{\mp x}{n} + \sin \frac{\mp \pi}{n} \sin \frac{\mp x}{n} \cong \cos \frac{\pi}{n} + \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{x}{n}.$$

$$\text{Поэтому } \frac{i \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi_{z_0} - \varphi_0}{n}} \cong \frac{i \sin \frac{\pi}{n}}{-\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{x}{n}} = \frac{1}{i \sin \frac{x}{n}} \cong \frac{n}{ix}$$

Поскольку $\int_{\infty, y}^y \exp(iq^2) dq \xrightarrow{y \rightarrow 0} \frac{\pm \sqrt{\pi i}}{2}$, для рассеянного поля на границе тени получим

$$v(w_0) \cong \frac{1}{ix} \frac{2iP(\hat{w}_{sm})}{\sqrt{2\pi i kr_{z_0}r_0/(r_{z_0} + r_0)}} \sqrt{2 \frac{kr_{z_0}r_0}{(r_{z_0} + r_0)} \frac{x \pm \sqrt{\pi i}}{2}} = \frac{\pm P(\hat{w}_{sm})}{2}. \quad (307)$$

Выражение (307) означает, что на границе «свет – тень» рассеянное поле равно половине геометрооптического падающего поля не только в случае падения плоской волны на полуплоскость, но и в случае падения сферической волны на клин. Этот факт можно использовать при построении эвристических решений.

ПРИЛОЖЕНИЕ 6. Обобщенный интеграл Френеля и его свойства.

Обобщенный интеграл Френеля (ОИФ) возникает при решении различных задач математической физики. ОИФ представляет собой специальную функцию, в которую, в отличие от обычного интеграла Френеля, можно подставлять не один, а два аргумента. ОИФ встречается в разных видах, причем каждой форме записи ОИФ соответствует своя форма записи обычного интеграла Френеля.

В этом приложении приведена сводка данных относительно обобщенного интеграла Френеля из различных источников, причем в данном приложении введены обозначения этих источников: Каратыгин-Розов [71] (КР), Клеммов-Сеньор [66] (СЗ), Тищенко-Хестанов [25] (ТХ) и Боровиков-Кинбер [50] (БК).

Сведем в таблицу информацию из четырех источников: (КР), (СЗ), (ТХ), (БК).

1. Интеграл Френеля

$K_1(z) = \int_z^\infty e^{i\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} \text{ (КР)}$	$F(a) = e^{ia^2} \int_a^\infty e^{-i\lambda^2} d\lambda \text{ (СЗ)}$
$F(p) = e^{-ip^2} \int_p^\infty e^{i\xi^2} d\xi \text{ (ТХ) – пересчет из (СЗ)}$	$F(y) = \frac{1}{\sqrt{i\pi}} \int_{-\infty}^y e^{i\xi^2} d\xi \text{ (БК)}$

Связь между интегралами Френеля по (КР) и (БК):

$$K_1(z) = 2\sqrt{\pi}iF[-\text{sign}(z)\sqrt{|z|}], \quad K_1(\alpha^2) = 2\sqrt{\pi}i[F(-|\alpha|)], \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-i\pi/4}K_1(\alpha^2) = \pi[F(-|\alpha|)],$$

$$G_1 = 2\pi G.$$

2. Обобщенный интеграл Френеля

$G_1(z, \alpha) = \alpha \int_z^\infty \exp[i(t^2 + \alpha^2)] \frac{dt}{t^2 + \alpha^2} \text{ (КР)}$	$G(a, b) = be^{ia^2} \int_a^\infty \frac{e^{-i\lambda^2}}{\lambda^2 + b^2} d\lambda \text{ (СЗ)}$
$G(p, q) = qe^{-ip^2} \int_p^\infty \frac{e^{i\xi^2} d\xi}{\xi^2 + q^2} \text{ (ТХ)}$	$G(x, y) = \frac{y}{2\pi} \int_x^\infty \frac{\exp[i(\xi^2 + y^2)] d\xi}{\xi^2 + y^2} \text{ (БК)}$

3. Сумма с противоположным знаком аргумента

$G_1(-z, \alpha) = 2G_1(0, \alpha) - G_1(z, \alpha) \text{ (КР)}$	$G(-a, b) = 2\sqrt{\pi}e^{\frac{1}{2}i\pi}e^{ia^2}F(b) - G(a, b) + \delta \text{ (СЗ)}$
	$G(x, y) + G(-x, y) = \text{sign } yF(- y) \text{ (БК)}$

4. Следствие – формула с нулем

$G_1(0, \alpha) = \sqrt{\pi}/2e^{-i\pi/4}K_1(\alpha^2) \text{ (КР)}$	$G(0, b) = \pm\sqrt{\pi}e^{\frac{1}{2}i\pi}F(\pm b), \text{ Re } b \geq 0 \text{ (СЗ)}$
	$G(0, y) = 1/2 \text{sign } yF(- y) \text{ (БК)}$

5. Сумма с перестановкой аргументов

$G_1(z, \alpha) + G_1(\alpha, z) = (-i/2)K_1(z^2)K_1(\alpha^2)$ (КР)	$G(a, b) + G(b, a) = 2iF(a)F(b) + \delta$ (CS)
	$G(x, y) + G(y, x) = F(-x)F(-y)$ (БК)

6. Предельный переход в окрестности нуля

$\lim_{z \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0} G_1(z, \alpha) = \pi/2 - \operatorname{arctg} z/\alpha$ (КР)	
	$G(x, y) \rightarrow -\frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \frac{1}{4} \operatorname{sign} y$ (БК)

7. Асимптотики

Для используемого нами интеграла Френеля: $\int_{\infty \cdot X}^X \exp(iq^2) dq \approx \frac{e^{ikX^2}}{2iX}$ при $|X| \gg 1$

$$F(-|x|) = \frac{1}{\sqrt{i\pi}} \int_{-\infty}^{-|x|} e^{i\xi^2} d\xi \cong \frac{1}{\sqrt{i\pi}} \frac{-e^{ikx^2}}{2i|x|} = \sqrt{\frac{i}{\pi}} \frac{e^{ikx^2}}{2|x|} \text{ при } x \gg 1 \text{ – интеграл Френеля взят из (БК)}$$

$$G(a, b) \cong \frac{b}{a^2 + b^2} F(a) \text{ для больших } |a^2 + b^2| \text{ и при } -\frac{3}{4}\pi < \arg a < \frac{1}{4}\pi \text{ (CS)}$$

$$G(x, y) \cong \frac{e^{iy^2}}{2y} \sqrt{\frac{i}{\pi}} F(-x) \text{ при } x, y \rightarrow \infty \text{ (БК)}$$

$$G(x, y) \cong \frac{iy}{4\pi x(x^2 + y^2)} e^{i(x^2 + y^2)} \text{ – это выражение из (БК) лучше согласуется не с предыдущей}$$

формулой, а с выражением из (CS)

ПРИЛОЖЕНИЕ 7. Дифракция электромагнитной волны на полупрозрачной пластине в приближении физической оптики.

В Приложении 7 приведена теория построения решения для дифракции на полупрозрачных пластинах в приближении физической оптики при помощи коэффициентов отражения и прохождения для плоских рассеивателей. При этом используется интеграл по поверхности плоского рассеивателя, строгое выражение для которого получено в предыдущем разделе. Данные формулы основаны на методике, предложенной в [68].

Рассмотрим решение в приближении физической оптики задачи дифракции на плоском полупрозрачном рассеивателе [42, 68]. Постановка задачи соответствует формулам (107) – (110).

Вычисленное по формулам (107) поле будет удовлетворять однородным уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{E} = ik\vec{H}, \quad \operatorname{rot}\vec{H} = -ik\vec{E}. \quad (308)$$

Покомпонентная запись уравнений Максвелла (308):

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= ikH_x, & \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= -ikE_x, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= ikH_y, & \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -ikE_y, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= ikH_z, & \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= -ikE_z. \end{aligned} \quad (309)$$

Пусть поляризация плоской волны, падающей на полупрозрачную пластину, такова, что ее вектор $\vec{E}^{(i)}$ параллелен плоскости пластины ($\vec{E}^{(i)} \perp YOZ$) (рис. 32).

На рис. 32 показана схема падения упругой волны на плоский многоугольный рассеиватель из [68].

Направляющий вектор падающей волны и радиус-вектор равны соответственно $\vec{n}' = (0, \sin \gamma, \cos \gamma)$, $\vec{r} = (0, y, z)$. При этом имеет место:

$$E_x^{(i)} = E_{0x} \exp\{ik(\vec{n}', \vec{r})\} = E_{0x} \exp\{ik(z \cos \gamma + y \sin \gamma)\}, \quad H_x^{(i)} = 0. \quad (310)$$

Бесконечный полупрозрачный экран расположен в плоскости XOY , нормаль к пластине \vec{n} противоположна оси OZ , \vec{n}' - направляющий вектор плоской волны (вектор, перпендикулярный фронту), \vec{r} - радиус-вектор точки наблюдения, i - мнимая единица, $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число. Напряженность падающей волны E_{0x} связана с мощностью

источника с помощью соотношения $E_{0x} \sim \sqrt{P_0 G} / r_0$, где P_0 - мощность источника, G - диаграмма направленности антенны источника, r_0 - расстояние от экрана до источника.

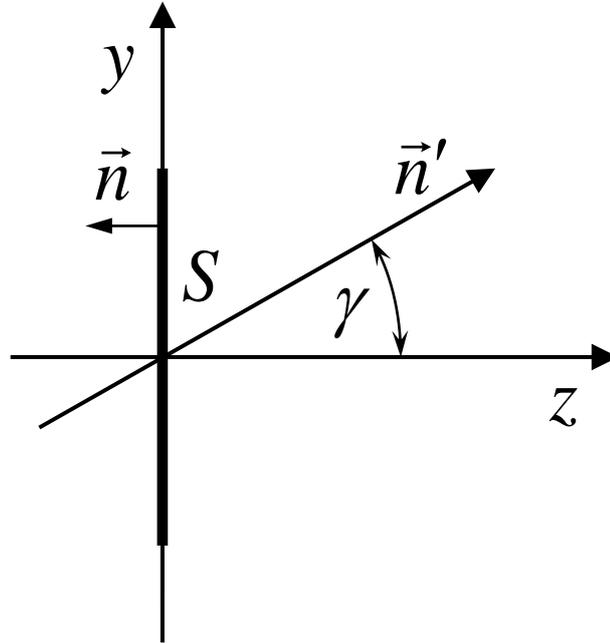


Рис. 32

К задаче дифракции электромагнитной волны в приближении физической оптики.

Компоненты отраженной и прошедшей волн можно описать при помощи коэффициентов отражения (r_e) и прохождения (t_e) соответственно:

$$E_x^{(r)} = r_e E_{0x} \exp\{ik(-z \cos \gamma + y \sin \gamma)\}, \quad (311)$$

$$E_x^{(t)} = t_e E_{0x} \exp\{ik(z \cos \gamma + y \sin \gamma)\}. \quad (312)$$

Компоненты вектора магнитного поля определяются при помощи уравнений Максвелла (308), (309) при выполнении $\partial/\partial x=0$ следующим образом:

$$H_x = 0, \quad H_y = \frac{1}{ik} \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad H_z = -\frac{1}{ik} \frac{\partial E_x}{\partial y}. \quad (313)$$

Тогда из (310) - (312) и (313) для падающей, отраженной и прошедшей волн следует

$$\begin{aligned} H_y^{(i)} &= E_{0x} \cos \gamma \exp\{ik(z \cos \gamma + y \sin \gamma)\}, \\ H_y^{(r)} &= -r_e E_{0x} \cos \gamma \exp\{ik(-z \cos \gamma + y \sin \gamma)\}, \\ H_y^{(t)} &= t_e E_{0x} \cos \gamma \exp\{ik(z \cos \gamma + y \sin \gamma)\}. \end{aligned} \quad (314)$$

В результате поле на освещенной ($z = -0$) и на теневой ($z = +0$) сторонах плоскости равно

$$E_x^{(-)} = E_{0x} (1 + r_e) \exp\{iky \sin \gamma\}, \quad H_y^{(-)} = E_{0x} (1 - r_e) \cos \gamma \exp\{iky \sin \gamma\},$$

$$E_y^{(-)} = H_x^{(-)} = 0, \quad (315)$$

и

$$\begin{aligned} E_x^{(+)} &= t_e E_{0x} \exp\{iky \sin \gamma\}, \quad H_y^{(+)} = t_e E_{0x} \cos \gamma \exp\{iky \sin \gamma\}, \\ E_y^{(+)} &= H_x^{(+)} = 0 \end{aligned} \quad (316)$$

В приближении физической оптики поле, рассеянное пластиной конечных размеров, можно найти, проинтегрировав падающее поле по поверхности пластины:

$$\begin{aligned} \vec{A}^e &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\exp\{ikr\}}{r} [\vec{n}, \vec{H}^{(-)} - \vec{H}^{(+)}] ds, \\ \vec{A}^m &= -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\exp\{ikr\}}{r} [\vec{n}, \vec{E}^{(-)} - \vec{E}^{(+)}] ds, \\ r &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (317)$$

В формулах (317) интегрирование осуществляется по одной стороне поверхности пластины, направление нормали \vec{n} показано на рисунке. С учетом (315), (316) имеем:

$$\begin{aligned} A_x^e &= \frac{1}{4\pi} E_{0x} (1 - r_e - t_e) \cos \gamma \iint_S \frac{\exp\{ikr\}}{r} \exp\{ik\eta \sin \gamma\} ds, \\ A_y^m &= \frac{1}{4\pi} E_{0x} (1 + r_e - t_e) \iint_S \frac{\exp\{ikr\}}{r} \exp\{ik\eta \sin \gamma\} ds, \\ A_z^{e,m} &= A_y^e = A_x^m = 0. \end{aligned} \quad (318)$$

Теперь рассмотрим случай падения H - поляризованной волны:

$$H_x^{(i)} = H_{0x} \exp\{ik(\vec{n}', \vec{r})\} = H_{0x} \exp\{ik(z \cos \gamma + y \sin \gamma)\}, \quad E_x^{(i)} = 0. \quad (319)$$

на бесконечную полупрозрачную плоскость ($z = 0$).

Отраженную и прошедшую плоские волны можно представить в виде:

$$\begin{aligned} H_x^{(r)} &= r_h H_{0x} \exp\{ik(-z \cos \gamma + y \sin \gamma)\}, \\ H_x^{(t)} &= t_h H_{0x} \exp\{ik(z \cos \gamma + y \sin \gamma)\}. \end{aligned} \quad (320)$$

Компоненты вектора электрического поля определяются при помощи уравнений Максвелла следующим образом:

$$E_x = 0, \quad E_y = -\frac{1}{ik} \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad E_z = \frac{1}{ik} \frac{\partial H_x}{\partial y}. \quad (321)$$

Компоненты вектора электрического поля в падающей, отраженной и прошедшей волнах определяются при помощи уравнений Максвелла аналогично (314):

$$\begin{aligned}
E_y^{(i)} &= -H_{0x} \cos \gamma \exp\{ik(z \cos \gamma + y \sin \gamma)\}, \\
E_y^{(r)} &= r_h H_{0x} \cos \gamma \exp\{ik(-z \cos \gamma + y \sin \gamma)\}, \\
E_y^{(t)} &= -t_h H_{0x} \cos \gamma \exp\{ik(z \cos \gamma + y \sin \gamma)\}.
\end{aligned} \tag{322}$$

Поле на освещенной ($z = -0$) и теневой ($z = +0$) сторонах плоскости равно:

$$\begin{aligned}
H_x^{(-)} &= H_{0x}(1+r_h) \exp\{ik y \sin \gamma\}, \quad E_y^{(-)} = -H_{0x}(1-r_h) \cos \gamma \exp\{ik y \sin \gamma\}, \\
H_y^{(-)} &= E_x^{(-)} = 0,
\end{aligned} \tag{323}$$

и

$$\begin{aligned}
H_x^{(+)} &= t_h H_{0x} \exp\{ik y \sin \gamma\}, \quad E_y^{(+)} = -t_h H_{0x} \cos \gamma \exp\{ik y \sin \gamma\}, \\
H_y^{(+)} &= E_x^{(+)} = 0
\end{aligned} \tag{324}$$

Проинтегрировав падающее поле по поверхности пластины конечных размеров, получим в приближении физической оптики поле, рассеянное пластиной:

$$\begin{aligned}
A_y^e &= -\frac{1}{4\pi} H_{0x}(1+r_h-t_h) \iint_S \frac{\exp\{ikr\}}{r} \exp\{ik\eta \sin \gamma\} ds, \\
A_x^m &= \frac{1}{4\pi} H_{0x}(1-r_h-t_h) \cos \gamma \iint_S \frac{\exp\{ikr\}}{r} \exp\{ik\eta \sin \gamma\} ds, \\
A_z^{e,m} &= A_x^e = A_y^m = 0
\end{aligned} \tag{325}$$

Отметим, что коэффициенты $r_{e,h}$, $t_{e,h}$ могут быть как действительными, так и комплексными, а также зависеть от материала экрана, и от направления падающей волны.

Можно показать, что в дальней зоне ($R \gg ka^2$, где a - максимальный размер пластины) выполняется $r \approx R - (\vec{n}'', \vec{\rho})$ и тогда формулы (318) и (325) примут вид (с учетом выражения для I из (152) и $\eta \sin \gamma = (\vec{n}', \vec{\rho})$):

$$\begin{aligned}
A_x^e &= \frac{1}{4\pi} \frac{\exp\{ikR\}}{R} E_{0x}(1-r_e-t_e) \cos \gamma \cdot I, \quad A_y^m = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp\{ikR\}}{R} E_{0x}(1+r_e-t_e) I, \\
A_y^e &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp\{ikR\}}{R} H_{0x}(1+r_h-t_h) I, \quad A_x^m = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp\{ikR\}}{R} H_{0x}(1-r_h-t_h) \cos \gamma \cdot I
\end{aligned} \tag{326}$$

Для получения окончательных выражений осталось лишь применить известные формулы для преобразования физических координат вектора – потенциала

$$A_\vartheta = A_x \cos \vartheta \cos \varphi + A_y \cos \vartheta \sin \varphi, \quad A_\varphi = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi \tag{327}$$

и формулы для полей в дальней зоне можно записать в соответствии с (110).

ПРИЛОЖЕНИЕ 8. Распространение радиоволн в городских условиях

Актуальность задачи

Задача предварительного расчета уровня сигнала с целью оптимального выполнения поставленной цели (например, установления связи, обнаружения объекта и т.п.) возникла с самого начала применения электромагнитных волн. Однако выполнение подобной задачи часто связано с большими трудностями. В особенности это касается расчета сигнала, рассеянного объектами большого размера и сложной формы, каким является, в том числе, городская застройка.

При разработке математических моделей для расчета траекторий и напряженности УКВ поля в точке приема в городской среде возникают определенные проблемы, связанные с особенностями условий распространения радиоволн в городе. Условия существенно отличаются от тех, которые наблюдаются на открытых приземных трассах. Городская среда обуславливает сложность механизмов распространения и их комплексное влияние на результаты расчетов.

Существуют различные методы приближенного расчета распространения УКВ сигнала в городских условиях. Эмпирические модели основаны на большом количестве экспериментов в районах с различным типом городской застройки. Статистические модели основаны на приближенных представлениях о характере сигнала в городе. Частично детерминистский подход применяется для расчета затенения вблизи крупных объектов (кварталов городской застройки). Существуют модели, основанные на комбинации эмпирического, статистического и частично детерминистского подходов.

Описанные модели подходят для приближенного расчета уровня поля, однако ни одна из них не позволяет рассчитать направления углов прихода при заданных положениях приемника и передатчика, что весьма важно при решении задачи пеленгации объекта. Поэтому приходится обращаться к полностью детерминистским методам (численным или аналитическим). В связи с описанными выше обстоятельствами даже эти, наиболее точные, методы не смогут обеспечить высокую точность расчета уровня мощности, но зато они позволят достаточно точно рассчитывать углы прихода, что очень важно для решения задач пеленгации.

Гибридные численные методы позволяют находить достаточно точное решение для больших объектов. Однако в связи с невозможностью точно ввести геометрические и материальные параметры объекта городской застройки в модель будет изначально заложена существенная погрешность, поэтому вычисления с применением гибридных численных методов не представляются целесообразными в связи с требуемым высоким уровнем ресурсов ЭВМ и программного обеспечения.

Таким образом, для детерминированного расчета уровня УКВ сигнала в городе представляется наиболее рациональным применять приближенные аналитические методы, а именно – метод физической оптики. При расчете поля, рассеянного объектом сложной формы, вначале рассчитывается возмущение, вносимое этим объектом в падающее поле, а затем проводится интегрирование возмущенного поля по поверхности объекта. Метод физической оптики заключается в том, что поле, рассеянное объектом ограниченного разме-

ра, берется на его поверхности (и в том числе – в окрестности кромок) таким, каким бы оно было в отсутствии кромок, т.е. на объекте бесконечно большого размера. Таким образом, мы пренебрегаем изменением падающего поля, вызванного краевыми эффектами, однако учитываем ограниченные геометрические размеры рассеивателей, а также их форму и материальные свойства.

Приближение физической оптики не дает точных количественных значений, однако позволяет правильно определить местоположение точек стационарной фазы и направления максимального сигнала. Эти параметры рассеянного сигнала совпадают для случаев как точного, так и приближенного расчетов. К преимуществам решения в приближении физической оптики относится и то обстоятельство, что существуют формулы, сводящие интеграл плоской волны на поверхности к интегралу по контуру, огибающую эту поверхность. Для плоских многоугольников (из которых в основном и состоят объекты городской застройки) эти формулы приобретают особенно простой вид.

Кроме того, даже если использовать более точные аналитические или численные подходы, в качестве начального приближения будет все равно использоваться приближение физической оптики. В дальнейшем его можно уточнить, добавляя краевые волны (разумеется, если они известны). Правда, вопрос о целесообразности уточнения решения, полученного в приближении физической оптики, нуждается в дополнительном изучении, поскольку уточненное решение может сильнее отличаться от истинного, чем приближенное – в связи с отличием формы истинных кромок от применяющихся в модели.

Как известно, сигнал УКВ, распространяющийся в городских условиях, искажается по сравнению с сигналом, распространяющимся в свободном пространстве, под влиянием следующих явлений:

1. Рассеяние на стенах и крышах зданий, в том числе – на окнах, карнизах архитектурных элементах, водосточных трубах, перилах ограждения крыш, трубах и др.
2. Рассеяние на других неподвижных элементах городской среды, в том числе – на дорожном покрытии, осветительных столбах, проводах и др.
3. Рассеяние на подвижных объектах.
4. Рассеяние и затухание при прохождении через растительность, дымы и т.д.

Наибольшую точность расчета обеспечивают численные методы. Однако строгая численная постановка в данном случае невозможна из – за большого размера городских рассеивающих объектов, а также отсутствия точной информации по их геометрическим параметрам и электродинамическим свойствам составляющих их материалов. В данном разделе предложен детерминированный метод расчета распространения радиоволн в условиях городской застройки.

Под детерминированным мы будем понимать такой метод расчета, в котором принимаются во внимание лишь детерминированные механизмы распространения радиоволн (рассеяние на определенных объектах и затухание при прохождении через различные среды). При этом не делается никаких априорных предположений относительно статистического усреднения структуры сигнала при его распространении между приемной и передающей антеннами.

Обширные теневые зоны, многократно отражаемые и рассеиваемые волны формируют многолучевые поля со сложной интерференционной структурой и быстрыми и глубокими пространственными и временными изменениями уровня сигналов.

Эти особенности определили в основном статистический подход при разработке моделей распространения УКВ в городе [98 – 100]. Эмпирические модели расчета напряженности поля [101, 102] основаны на большом количестве экспериментов в районах с различным типом городской застройки. В этих моделях главное внимание уделялось изучению статистики пространственных и временных изменений напряженности поля. Статистические модели (например, [103]) основаны на статистическом описании параметров городской среды и использовании для приближенного расчета интенсивности формулы Кирхгофа с последующим усреднением.

В связи с тем, что статистические модели не отличаются достаточной точностью, удовлетворяющей практическим потребностям, получили развитие детерминистские методы расчета напряженности УКВ поля в городе [104 – 110]. Наибольшую точность расчета могли бы обеспечить численные, а также гибридные методы, позволяющие находить достаточно точное решение. Однако точная численная постановка задачи в условиях городской среды распространения практически невозможна из – за сложности, больших размеров и многочисленности городских рассеивающих объектов, а также из – за трудности учета их истинных геометрических параметров и электродинамических свойств составляющих их материалов. Поэтому применение численных методов нецелесообразно, учитывая при этом, что потребовался бы высокий уровень ресурсов ЭВМ и программного обеспечения.

Частично детерминистский подход развит в [104] для расчета затенения вблизи крупных объектов (кварталов городской застройки). В [105] предложена модель, основанная на комбинации эмпирического, статистического и частично детерминистского подходов.

Описанные модели подходят для приближенного расчета уровня поля, однако ни одна из них не позволяет рассчитать направления углов прихода при заданных положениях приемника и передатчика. Поэтому предпочтительнее полностью детерминистские методы, которые наряду со сравнительно высокой точностью расчета напряженности поля обеспечивают высокую точность траекторий и углов прихода.

В [106, 107] разработан детерминированный трехмерный метод расчета с помощью ПЭВМ траекторий углов прихода и напряженности поля для миллиметрового диапазона волн. В основе метода лежит топографический план города, учитывающий форму и размеры зданий. Отражение от поверхности зданий с периодически неоднородной структурой описывается эффективным коэффициентом отражения, определяемым на основе метода физической оптики, а рассеяние от шероховатой поверхности – рэлеевской теорией рассеяния.

В данном разделе предложен унифицированный детерминированный подход, позволяющий с помощью метода физической оптики учитывать такие механизмы распространения, как отражение, рассеяние и дифракцию на поверхности зданий и других элементов городской среды, а также разработать требования для расчета траекторий и углов прихода.

Особенности, характерные для задачи распространения радиоволн в среде городской застройки

Среда городской застройки обладает рядом характерных особенностей, которые нужно учитывать при построении средства расчета радиоволн. Строгие методы расчета нецелесообразно применять в силу ряда причин: большой размер объекта расчета, неточность введения входных параметров, связанных с геометрическими размерами и свойствами материалов. Поэтому заранее понятно, что точно рассчитать сигнал невозможно. Под точностью здесь понимаем степень совпадения расчетных данных с результатами натурных измерений.

С другой стороны, развитие современных методов расчета позволяет разрабатывать методы расчета, более точные, чем приближенные статистические формулы или методы, основанные только на геометрической оптике. Тем более, что в условиях городской застройки существует множество теневых областей, представляющих интерес для исследования распространения радиоволн, в том числе – для исследования интерференции и многолучевого распространения. Среди других особенностей среды городской застройки следует выделить большое количество многогранников и прямолинейных кромок, что позволяет в полной мере использовать результаты, полученные в данной диссертации.

При многолучевом распространении сигнала в городской среде можно в зависимости от интенсивности выделить несколько групп сигналов:

1. Сигнал прямой видимости. Если таковой существует (он может быть только один), то он будет самым сильным.
2. Сигналы, зеркально отраженные от стен и дорожного покрытия. Чем меньше число переотражений, тем сильнее будет сигнал. Они нас интересуют в случае отсутствия сигнала по п.1. Многие современные программы расчета распространения радиоволн в городе ограничиваются рассмотрением сигналов по п.1. и п.2., т.е. не учитывают дифракцию. Таким образом зоны геометрической тени остаются вне рассмотрения.
3. Сигналы, рассеянные на кромках. Под кромками понимаются стены и крыши зданий. В случае отсутствия сигналов по пп. 1 и 2 именно они будут обеспечивать попадание сигнала в приемную антенну. В этом случае зона городской застройки, доступная для проведения расчетов, существенно увеличивается. Можно учесть поведение сигнала в зоне тени, в том числе – интерференцию и многолучевость. Эффективность именно этой части расчетов можно повысить, используя результаты данной диссертации.
4. Сигналы, рассеянные вершинами. Объекты городской застройки содержат много вершин, которые дают минимальный вклад в рассеянный сигнал. На первом этапе мы выводим их из рассмотрения, поскольку сигналов от плоских поверхностей и кромок (пп. 1 – 3) в условиях городской застройки тоже много, а вершины дают вклад минимальной амплитуды. Учет вклада вершин увеличит точность расчета в тех участках геометрической тени, куда не попадают сигналы ни напрямую от источника, ни от светящихся поверхностей, ни от светящихся кромок. Тем не менее, в случае необходимости мы можем провести уточненный расчет вклада вершин, причем в этом нам помогут результаты данной работы.

Зона, существенная для распространения радиоволн

Поскольку размер городской среды очень велик по сравнению с длиной волны, решение краевой задачи электродинамики на таком объекте невозможно найти не только строго, но даже в приближении физической оптики, поскольку численное интегрирование быстроосциллирующих сигналов по большим поверхностям занимает очень много времени. Мы воспользуемся известным фактом, заключающимся в том, что рассеянный сигнал в основном определяется областями и кромками стационарной фазы. Поэтому можно выделить в пространстве первую зону Френеля, расположенную вокруг геометрооптического луча, и рассматривать только ее, а остальные области пространства отбросить и не рассматривать. Именно первую зону Френеля мы и будем считать зоной, существенной для распространения радиоволн (ЗСРВ). Все, что не попадает в первую зону Френеля, выбрасываем из рассмотрения.

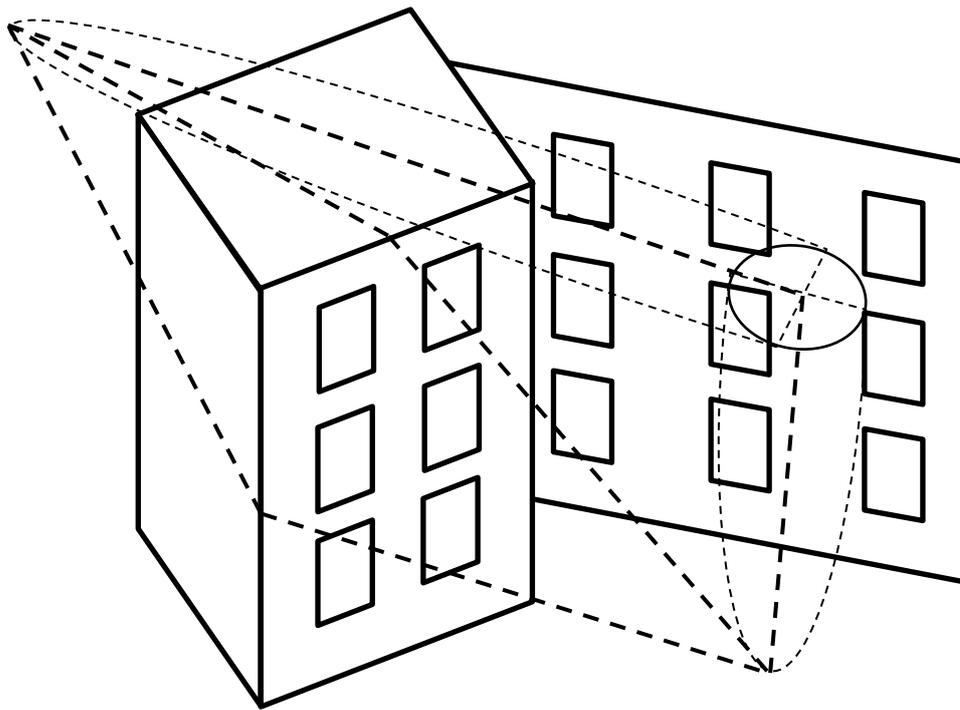
Определение трассы геометрооптического луча проводится так же, как в методе геометрической оптики. Считаем, что между источником и приемником луч может распространяться лишь тремя способами:

- (1) по направлению прямой видимости,
- (2) зеркально отражаясь от поверхностей (например, асфальта, стен, окон и т.п.) и
- (3) по дифракционным конусам, определяемым взаимным расположением точек источника, приемника, а также пространственным расположением кромки (например, края крыши или угла здания). Такой подход позволит наиболее полно учесть многолучевость распространения радиосигнала в городских условиях.

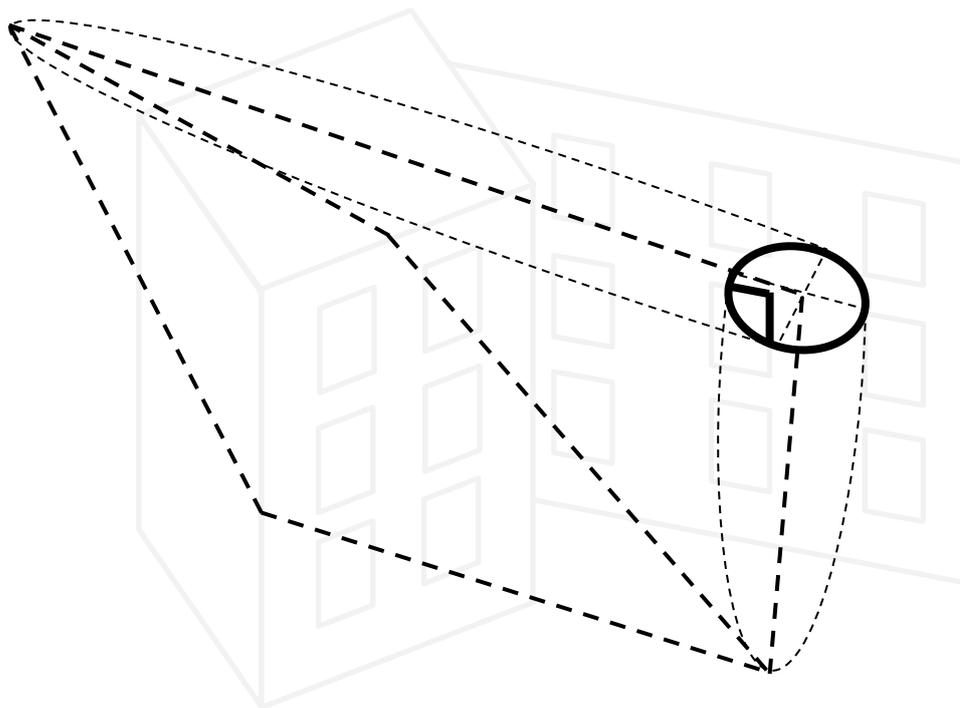
Построение трассы луча

Хотя математическая задача трассировки лучей является ключевой в нашем подходе, мы выводим ее за рамки вопросов, рассматриваемых в данной диссертации. Считаем, что трассировка лучей (по пп. (1), (2), (3) предыдущего абзаца) уже проведена, и занимаемся только расчетом дифракционных коэффициентов при отражении от поверхностей и дифракции на кромках (рис. 33). Но и эта задача является нетривиальной, поскольку нужно дополнительно учесть влияние зоны, существенной для распространения радиоволн (ЗСРВ). Как мы уже говорили ранее, ограничение рассматриваемых участков городской застройки при помощи этой зоны позволит существенно сократить объемы вычислений.

На рис. 33 (а) показаны трассы трех лучей в условиях городской застройки. Один луч зеркально отражается от плоскости стены, другой испытывает дифракцию на кромке крыши, третий – на угловой кромке стены. В соответствии с предложенным нами алгоритмом ограничиваемся рассмотрением зоны, существенной для распространения радиоволн (ЗСРВ), которая примерно соответствует первой зоне Френеля. Эта зона показана на рис. 33 (а) для луча, отражающегося от плоскости стены. Внутри первой зоны Френеля располагается часть окна. Для двух других лучей ЗСРВ тоже существуют, но мы их не показываем, чтобы не загромождать рисунок лишними подробностями. Все, что не попадает в ЗСРВ, мы исключаем из рассмотрения, как показано на рис. 33 (б).



а)



б)

Рис. 33

Трассы трех лучей в условиях городской застройки. Вокруг трассы луча, зеркально отраженного от стены с окнами, показана зона, существенная для распространения радиоволн.

На рис. 33 (а) изображен фрагмент городской застройки, точки источника (вверху) и приемника (внизу), расположенные вне зоны прямой видимости, а также трассы лучей, соответствующих условию стационарной фазы (см. п. 5.3.6) – прямые пунктирные линии. Трассы соответствуют лучам трех типов: с отражением от плоской стены с окнами, с рас-

сеянием на краю крыши и с рассеянием на углу здания. Трассы лучей проведены в соответствии с принципом Ферма (как это делается в методе ГТД). Поэтому по отношению к точке источника точка приемника находится на дифракционном конусе. С целью не загромождать рисунок зона, существенная для распространения радиоволн, показана только для одного луча (отражающегося от стены). В соответствии с методикой расчета мы принимаем во внимание только те участки городской застройки, которые попадают внутрь ЗСРВ (а влияние других участков считаем несущественным). Это показано на рис. 33 (б). Пересечение ЗСРВ со стеной показано жирным овалом, а участок окна, попавший в ЗСРВ, выделен жирными линиями. Выражения для определения размеров ЗСРВ будут приведены позже.

Учет влияния ЗСРВ проводим следующим образом. Сначала находим объекты дифракции, попавшие в ЗСРВ (участки поверхностей и кромок). Затем отбрасываем все, что не попало в ЗСРВ, и работаем с оставшейся частью точно так же, как с ограниченным ЗСРВ рассеивателем, на котором есть область стационарной фазы (поверхность или кромка). Этот объект был подробно исследован в предыдущих главах. В данной диссертации есть все необходимые эвристические формулы для того, чтобы рассчитать ослабление мощности отраженного или рассеянного луча на пути прохождения от источника к приемнику.

Эталонные решения

Как уже говорилось, с целью построения решения для рассеянного поля мы используем формулы для дифракции на плоских рассеивателях, в том числе на многоугольниках. Это решение выражается через интеграл по поверхности, который можно записать через интеграл по контуру. В свою очередь, в направлениях «прямо вперед» и зеркального отражения (где вклады всех кромок имеют сингулярности) мы можем легко получить уровень сигнала в точке наблюдения, напрямую воспользовавшись физоптическим интегралом по поверхности.

В отсутствии препятствий (т.е. в зоне прямой видимости) сигнал в точке наблюдения определяется расстоянием между источником и приемником. С другой стороны, этот сигнал можно выразить при помощи умножения плотности потока мощности, проходящей через первую зону Френеля, на площадь этой зоны. Если часть зоны Френеля занята препятствием, уменьшающим площадь, через которую проходит мощность, сигнал в точке наблюдения уменьшится пропорционально уменьшению этой площади. При этом мощность рассеянного сигнала равна площади той части рассеивателя, которая попала в зону Френеля. А мощность сигнала, рассеянного отдельной кромкой в направлениях «прямо вперед» и зеркального отражения, пропорциональна отношению длины этой кромки к периметру рассеивателя. В других направлениях, расположенных на дифракционном конусе, мощность уменьшается в зависимости от углового расстояния до направлений «прямо вперед» и зеркального отражения.

Несмотря на то, что мы располагаем двумерными решениями для дифракции на бесконечной кромке, представляется более правильным использовать трехмерное решение для дифракции на плоском многоугольнике, ограниченном с одной стороны контуром рассеивателя, а с другой стороны - контуром первой зоны Френеля. Зона Френеля имеет форму

эллипса, но если интерполровать ее многоугольником, то все расчетные формулы можно будет найти в данной диссертации.

Эталонные решения, которые можно использовать при исследовании распространения радиоволн в городских условиях, это поверхности, кромки, вершины. С целью упрощения подхода мы не применяем эталонные решения на вершинах, а ограничиваемся лишь эталонными решениями для поверхностей и кромок.

Кроме того, в связи с использованием подхода, в котором учитывается ЗСРВ, мы вообще не используем решения для полубесконечных рассеивателей (полуплоскости и углового сектора). Полубесконечные рассеиватели в случае навязанного условия дальней зоны дают бесконечный сигнал в направлениях «прямо вперед» и зеркального отражения. Это обстоятельство препятствует проведению нормировки по мощности в этих направлениях. Вместо решений на полубесконечных рассеивателях мы используем решение задачи дифракции на трехмерной плоской многоугольной пластине конечного размера. Решения, приведенные в данной диссертации, предполагают удовлетворение условия дальней зоны. Если это условие для пластины больших размеров не выполняется, то можно разбить ее на части, для каждой из которых условие дальней зоны выполняется. Впрочем, данные рассуждения относятся к абстрактному рассеивателю большого размера, а не к выбранному нами способу расчета распространения радиоволн в условиях городской застройки, поскольку можно считать, что для первой зоны Френеля условие дальней зоны всегда выполняется.

В эвристическом подходе к решению задачи распространения радиоволн в городе мы используем приближение физической оптики. При необходимости его можно уточнить, применив результаты этой диссертации. Уточнение может касаться решений для дифракции на кромке (в том числе расположенной на рассеивателе с неидеальными граничными условиями), а также вершинных волн.

Отражение от плоской поверхности

В этом разделе приводится формула для расчета отражения электромагнитной волны от плоской однородной поверхности, условие применимости этой формулы, коэффициенты отражения и прохождения на границе двух сред, а также приведены параметры некоторых материалов, применяемых на объектах городской застройки.

В случае отражения электромагнитной волны от плоской однородной поверхности (например, стены или дорожного покрытия) мощность отраженной волны определяется по формуле связи между двумя антеннами [111, стр. 26]:

$$P_1 = P_0 \frac{\lambda^2 G_1 G_2 |V_0|^2}{(4\pi)^2 (R_1 + R_2)^2} A_{12}, \quad |V_0| = \frac{|\vec{E}_R|}{|\vec{E}_0|} \quad (328)$$

где P_0 и P_1 - мощности сигналов в трактах передающей и приемной антенн, λ - длина волны, G_1 и G_2 - коэффициенты направленного действия передающей и приемной антенн, R_1 и R_2 - расстояния от зеркальной точки до передающей и приемной антенн, A_{12} - дифракционный коэффициент ослабления на трассе между приемной и передающей антеннами

(для однородной поверхности $A_{12}=1$), V_0 - множитель ослабления, описывающий взаимодействие волны с плоской безграничной поверхностью, \vec{E}_0 и \vec{E}_R - векторы напряженности электрического поля (падающего - с индексом 0, отраженного - с индексом R). Векторы электрического и магнитного полей определяются по формулам [112, стр. 28]:

$$\vec{E}_R = V_z \vec{E}_0 - \frac{(\vec{E}_0, \vec{n})}{\sin^2 \vartheta} [(V_g \cos 2\vartheta + V_z) \vec{n} + \cos \vartheta (V_g + V_z) \vec{n}'], \quad (329)$$

$$\vec{H}_R = V_g \vec{H}_0 - \frac{(\vec{H}_0, \vec{n})}{\sin^2 \vartheta} [(V_z \cos 2\vartheta + V_g) \vec{n} + \cos \vartheta (V_g + V_z) \vec{n}'], \quad (330)$$

$$V_z = \frac{\cos \vartheta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta}}{\cos \vartheta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta}}, \quad V_g = \frac{\varepsilon \cos \vartheta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta}}{\varepsilon \cos \vartheta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta}}, \quad (331)$$

где ϑ - угол между нормалью к поверхности \vec{n} и направлением на приемник, \vec{n}' - единичный вектор в направлении распространения падающей волны, $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ - комплексная диэлектрическая проницаемость, V_g и V_z - коэффициенты отражения для вертикально и горизонтально поляризованной волн. Под вертикально поляризованной волной будем понимать ту, у которой вектор \vec{E}_0 имеет только компоненты, лежащие в плоскости падения XOZ , а под горизонтально поляризованной волной - ту, у которой \vec{E}_0 перпендикулярен плоскости падения.

При необходимости найти поле внутри среды, для преломленных (т.е. прошедших границу раздела сред с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2) волн \vec{E}_T и \vec{H}_T имеем:

$$\vec{E}_T = W_z \vec{E}_0 - \frac{(\vec{E}_0, \vec{n})}{n \sin^2 \vartheta} \{ [nW_z - W_g (n \sin^2 \vartheta_2 + \cos \vartheta_2 \cos \vartheta)] \vec{n} + (nW_z \cos \vartheta - W_g \cos \vartheta_2) \vec{n}' \}, \quad (332)$$

$$\vec{H}_T = W_g \vec{H}_0 - \frac{(\vec{H}_0, \vec{n})}{\sin^2 \vartheta} \{ [W_g - nW_z (n \sin^2 \vartheta_2 + \cos \vartheta_2 \cos \vartheta)] \vec{n} + (W_g \cos \vartheta - nW_z \cos \vartheta_2) \vec{n}' \}, \quad (333)$$

$$W_z = \frac{2 \cos \vartheta}{\cos \vartheta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta}}, \quad W_g = \frac{2 \cos \vartheta}{\varepsilon \cos \vartheta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta}}, \quad n = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}, \quad \sin \vartheta = n \sin \vartheta_2, \quad (334)$$

где W_g и W_z - коэффициенты прохождения для вертикально и горизонтально поляризованной волн, $\varepsilon_1 = \varepsilon$, а n и ϑ_2 определяются из формул (334).

Применяемый в формуле (328) френелевский коэффициент отражения V_0 зависит от комплексной диэлектрической проницаемости материала поверхности, от которой происходит отражение. Для идеально проводящей поверхности $V_g = 1$, $V_z = -1$, $W_z = W_g = 0$, а параметры некоторых других материалов, применяемых в объектах городской застройки, приведены в таблице.

Диэлектрическая проницаемость некоторых видов материалов, применяемых при осуществлении городской застройки.

Материал	Длина волны, мм	ε'	ε''
Бетон	8	5,5	0,5
Бетон	6	5,7	0,3
Бетон	2	5,55	0,36
Штукатурка цементная	6	5,7	0,14
Кирпич красный	6	4,2	0,03
Кирпич красный	2	3,2	0,11
Кирпич силикатный	6	3,4	0,09
Кирпич силикатный	2	3,3	0,14
Стекло	2	3,8	0,19
Штукатурка меловая	6	2,9	0,02
Доска сосновая	2	2,0	0,08

Для построения эвристических формул мы используем методику расчета дифракции на полупрозрачных рассеивателях, предложенную в [68, 145, 172]. Формулы, описывающие теорию дифракции на полупрозрачных пластинах в приближении физической оптики, приведены в Приложениях 1, 7, 8.

Условие применимости формулы (328) состоит в том, что окружающий первую зону Френеля эллипс с центром в зеркальной точке и размерами полуосей a_x и a_y должен находиться в пределах отражающей поверхности. Размеры эллипса определяются так:

$$2a_x = \frac{2}{\cos \vartheta} \sqrt{\frac{\lambda}{2} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}, \quad 2a_y = 2 \sqrt{\frac{\lambda}{2} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}, \quad (335)$$

при этом расстояния R_1 и R_2 должны удовлетворять соотношению

$$R_1, R_2 \gg \sqrt{\lambda \cdot \min(R_1, R_2)}, \quad (336)$$

т.е. не находиться слишком близко от отражающей поверхности.

Если падение на отражающую поверхность происходит по нормали ($\vartheta=0$), то эллипс вырождается в окружность, площадь которой равна площади первой зоны Френеля $\pi(a_x)^2 = \pi(a_y)^2 = S_F$.

Если зона Френеля (335), (336) целиком находится внутри поверхности рассеивателя, то мощность отраженного сигнала соответствует формуле (328). Если условие (336) нарушается, то есть часть эллипса выходит за пределы отражающей поверхности, то отраженная мощность P_1 , вычисляемая по формуле (328), уменьшается во столько раз, во сколько раз уменьшается оставшаяся "освещенная" площадь рассеивателя по сравнению с площадью первоначального эллипса.

Зона Френеля

Для расчета рассеяния на многоугольном экране следует применять формулы для электромагнитных потенциалов типа (143), подставляя в них значение интеграла I , вычисленного по формуле (146). Формула (146) справедлива для всех точек наблюдения, кроме направлений "прямо вперед" и "зеркального". В этих направлениях слагаемые (148) из формулы (146) становятся сингулярными. Поэтому в этих направлениях следует применять для интеграла I формулу (149). Для расчета рассеяния в "зеркальном" направлении полезно сравнить результат, полученный по формуле (146) с подстановкой I из (149) с результатом, рассчитанном по формуле (328). Они должны совпадать, если в (149)

$$I = \frac{S_F}{(\pi/2)} = \frac{\lambda R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \text{ где } S_F = \frac{\pi \lambda}{2} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (337)$$

Здесь S_F – площадь первой зоны Френеля. Подробнее об этой подстановке будет сказано ниже (см. формулу (340)). При этом, если интерполировать форму овальной зоны Френеля при помощи многоугольника, то совпадение будет тем точнее, чем больше сторон брать у многоугольника, заполняющего ЗСРВ.

Формула (146) используется в том случае, если рассматриваемый многоугольный экран полностью находится в зоне Френеля, определяемой условием (335). При этом в качестве расстояний R_1 и R_2 подразумеваются расстояния от кромок до источника и точки наблюдения. Если размеры экрана превышают размеры зоны Френеля, то кромки следует рассматривать отдельно, пользуясь выражениями формулы (146) и используя в качестве a_j уже не длину всей стороны, а линейный размер соответствующей зоны Френеля. Вклад контура, ограничивающего зону Френеля, также добавляется к решению.

Таким образом, размер отражающей поверхности не влияет на коэффициенты отражения (понимаемые в духе формулы (331)), но, как можно показать, соотношение между размерами отражающей поверхности и соответствующей зоны Френеля влияет на расходимость сигнала. Так, если зона Френеля уместается внутри рассеивающего экрана, то расходимость будет порядка $(R_1 + R_2)^{-2}$, как в формуле (328), а если, наоборот, рассеивающий многоугольник уместается внутри зоны Френеля, то расходимость будет порядка $(R_1 \cdot R_2)^{-2}$, как следует из формул (326) (Приложение 7), (110) и (146).

Элементы теории антенн

Рассмотрим две апертурные антенны с площадями апертур S_1 и S_2 , расположенные на расстоянии R друг от друга (рис. 34).

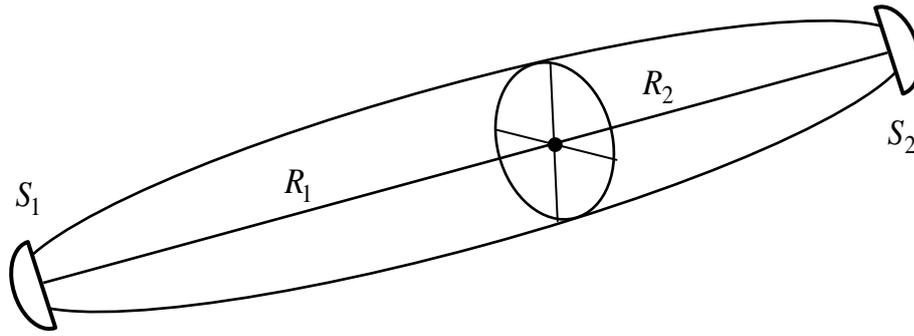


Рис. 34

Зона, существенная для распространения радиоволн, находящаяся в свободном пространстве между двумя апертурными антеннами.

На рис. 34 показана ЗСРВ, находящаяся в свободном пространстве между двумя апертурными антеннами. Если внутрь этой зоны попадет какой – либо объект (фрагмент отражающей поверхности или кромка), то он вызовет ослабление мощности, попадающей из апертуры одной антенны в апертуру другой антенны.

При проведении трассировки лучей мы ориентируемся на зоны стационарной фазы, которые располагаются на поверхностях или кромках. При расчете ослабления какого – либо луча мы сначала находим его траекторию, проходящую через точку стационарной фазы, находящуюся на поверхности или на кромке.

Затем переносим точку наблюдения таким образом, чтобы она находилась на продолжении падающего луча на том же расстоянии от точки стационарной фазы. Проводим ЗСРВ вокруг луча так, чтобы луч проходил через центральную точку ЗСРВ (см. рис. 34) и выделяем ту часть рассеивателя, которая попадает внутрь ЗСРВ. Считаем, что дифракция на этой части рассеивателя проходит в соответствии с законами физической оптики. При этом учитываем как реальные границы рассеивателя, которые попадают внутрь ЗСРВ, так и границы самой ЗСРВ, которые в реальности не существуют, а появляются в результате применения нашей методики, и находятся на поверхности рассеивателя.

Затем возвращаем точку наблюдения на место и определяем в этой точке поле, рассеянное частями объекта, расположенными внутри ЗСРВ. Таким способом мы находим ослабление луча, вызванное влиянием рассеивателя на первичное поле.

Формула связи между двумя антеннами

В этом разделе изложен принцип использования зоны Френеля при расчете дифракции на фрагментах городской застройки.

Как известно из теории апертурных антенн, их диаграммы направленности в направлении главного максимума равны $G_1 = 4\pi S_1/\lambda^2$ и $G_2 = 4\pi S_2/\lambda^2$, где λ - длина волны. С другой стороны, суммарная мощность в апертуре второй антенны $p_{2\Sigma}$ равна произведению плотности мощности на расстоянии R от первой антенны (т.е. плотности мощности в апертуре второй антенны p_{2S}) на площадь второй антенны:

$$P_{2\Sigma} = P_{2S}S_2 = G_1 \frac{P_{1\Sigma}}{4\pi R^2} S_2 = P_{1\Sigma} \frac{G_1}{4\pi R^2} G_2 \frac{\lambda^2}{4\pi} = P_{1\Sigma} \frac{\lambda^2 G_1 G_2}{(4\pi)^2 R^2} = P_{1\Sigma} \frac{S_1 S_2}{(\lambda R)^2}, \quad (338)$$

что согласуется с формулой (328), если подставить в нее $R = R_1 + R_2$, где R_1 и R_2 - расстояния от антенн до точки взаимодействия сигнала с рассеивателем.

В теории распространения радиоволн зоной, существенной для распространения, называется первая зона Френеля. Она ограничивает область, в которой фаза отличается от фазы в центре не более, чем на $\pi/2$. Если представить, что в качестве рассеивателя выступает зона Френеля с площадью S_F (337), расположенная на расстояниях R_1 от первой и R_2 от второй антенны, то в соответствии с этими представлениями на зону Френеля с первой антенны попадет мощность $P_{F\Sigma}$, а на вторую антенну мощность $P_{2\Sigma}$ попадет уже не с первой антенны, а с первой зоны Френеля:

$$P_{F\Sigma} = P_{FS}S_F = P_{1\Sigma} \frac{S_1 S_F}{(\lambda R_1)^2}, \quad P_{2\Sigma} = P_{F\Sigma} \frac{S_F S_2}{(\lambda R_2)^2} = P_{1\Sigma} \frac{S_1 S_F}{(\lambda R_1)^2} \frac{S_F S_2}{(\lambda R_2)^2} = P_{1\Sigma} \frac{S_1 S_2}{(\lambda^2 R_1 R_2)^2} S_F^2, \quad (339)$$

откуда

$$P_{2\Sigma} = P_{1\Sigma} \frac{S_1 S_2}{(\lambda^2 R_1 R_2)^2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{(\lambda R_1 R_2)^2}{(R_1 + R_2)^2} = P_{1\Sigma} \frac{S_1 S_2}{[\lambda(R_1 + R_2)]^2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2. \quad (340)$$

Сравнивая последнюю формулу с выражением (338) получим, что с точностью до постоянного коэффициента $(\pi/2)^2$ мощность, проходящая через первую зону Френеля, равна мощности, попадающей из первой антенны во вторую. Уменьшив линейный размер зоны Френеля в $(\pi/2)^{1/2} \approx 1.253$ раза, мы получим зону свободного распространения радиоволн, имеющую площадь $S_{ЗСФ} = 2S_F/\pi$ и пропускающую мощность, в точности равную мощности, попадающую из первой антенны во вторую (см. также уменьшение линейного размера в формуле (337)). В первом приближении при рассмотрении распространения радиоволн в условиях городской застройки можно ограничиться рассмотрением лишь этой зоны, считая амплитуду и фазу волны одинаковой во всех ее точках, а вне этой зоны считать амплитуду нулевой. В последующих приближениях можно добавлять к ней следующие зоны, увеличивая точность расчета вместе с объемами вычислений. Назовем описанную зону зоной стационарной фазы (ЗСФ). ЗСФ находится в области рассеивателя и зависит от расстояния до передающей и приемной антенн. Если ЗСФ частично или полностью попадает на рассеиватель, то следует применять формулу для отраженного сигнала, соответственно корректируя амплитуду. Если точка стационарной фазы лежит на прямой, соединяющей приемную и передающую антенны, то мощность попадающего в приемную антенну сигнала в точности равна соответствующей части мощности ЗСФ, а именно - относящейся к данному акту отражения или дифракции части площади ЗСФ. В этом и заключается амплитудная коррекция. Для остальных частей ЗСФ (проходящих мимо рассеивателя и таким образом попадающих на его кромки) следует применять формулу для дифрагированного сигнала.

Ранее мы дали определение зоне существенного распространения радиоволн (ЗСРВ), которую мы с технической точки зрения (ограничения объема вычислений) выделяли вокруг геометрооптического луча. Теперь скажем, что эта зона совпадает с зоной стационарной фазы (ЗСФ), которую мы выделили с физической точки зрения.

Если рассеиватель полностью попадает в ЗСФ или, что то же самое, в зону, существенную для распространения радиоволн (ЗСРВ), то следует использовать формулу для многоугольника. Если рассеиватель попадает в ЗСФ (ЗСРВ) частично, то следует использовать ту часть рассеивателя, которая попадает в ЗСРВ, а оставшуюся часть рассеивателя ограничить границей ЗСРВ.

Энергетические соотношения

Применяя в трехмерных практических задачах решения двумерных задач дифракции, нужно следить за соблюдением энергетических соотношений. Решения для дифракции на кромках выражаются при помощи двумерных формул, которые имеют расходимость, отличную от трехмерной. Также двумерные формулы строятся на основе возбуждения плоской волной, представляющей собой бесконечно удаленный источник с бесконечной мощностью, т.е. математическую абстракцию. Эти обстоятельства вынуждают нас тщательно выбирать энергетические соотношения, чтобы получить правильную амплитуду рассеянного сигнала в эвристических формулах.

Поскольку мы используем решения эталонных задач для полубесконечных рассеивателей и вместе с тем предполагаем выполнение условия дальней зоны, рассеянный сигнал в направлениях «прямо вперед» и «зеркальное отражение» стремится к бесконечности. Поэтому нужно применять специальные меры по энергетической нормировке. Эта нормировка основывается на решении трехмерной задачи в направлениях «прямо вперед» и «зеркальное отражение», а при отклонении от этих направлений рассеянный сигнал уменьшается в соответствии с решением задачи дифракции на плоской многоугольной пластине.

Плотность потока мощности вдали от рассеивателя вычисляется в точке расположения второй антенны по формуле:

$$S_2(\vartheta, \varphi) = \frac{|E_\vartheta(\vartheta, \varphi)|^2 + |E_\varphi(\vartheta, \varphi)|^2}{2}, \quad (341)$$

где $E_\vartheta(\vartheta, \varphi)$ и $E_\varphi(\vartheta, \varphi)$ вычисляются по формулам (110), (327) и (326) (Приложение 7), (R, ϑ, φ) – сферические координаты, связанные с точкой стационарной фазы. При этом в формуле (326) (Приложение 7) $R = R_2$, а в качестве E_{0x} и H_{0x} подставляются значения поля, идущего от первой антенны и удовлетворяющие соотношению:

$$\frac{|E_{0x}|^2 + |H_{0x}|^2}{2} = S_1(\vartheta, \varphi) = p_{1\Sigma} \frac{G_1}{4\pi R_1^2}, \quad (342)$$

где $P_{1\Sigma}$ – суммарная мощность на выходе первой антенны. Поля E_{0x} и H_{0x} соответствуют двум составляющим поляризации для рассеивающего экрана, расположенного в плоскости XOY .

Методика разработки эвристических формул

Методика разработки эвристических формул соответствует изложенному ранее плану. Сначала находим мощность волн, отраженных от безграничной плоской поверхности. Записываем эту мощность при помощи коэффициентов отражения, преломления и прохождения. Затем ограничиваем участок поверхности и строим в приближении физической оптики решение для плоской многоугольной пластины с неидеальными граничными условиями.

Итак, для вычисления рассеяния на кромке в приближении физической оптики нужно сделать следующие шаги:

1. Найти точки стационарной фазы на рассеивателях.

Если это – точка зеркального отражения, то рассеяние происходит на плоском участке и $|\vec{\Delta}| = 0$. Может быть два случая: рассеиватель малых размеров (частично закрывает ЗСРВ) и рассеиватель больших размеров (полностью закрывает ЗСРВ). При расчете дифракции в качестве рассматриваемого объекта берем пересечение областей, занимаемых в пространстве рассеивателем и ЗСРВ.

Если точка наблюдения не находится в прямой видимости от источника, но находится на дифракционном конусе, то это означает, что рассеиватель – «отдельная» кромка. Следовательно, выполняется условие $(\vec{\Delta}, \vec{\rho}') = 0$. Границы рассматриваемого объекта определяем так же, как и для случая рассеяния плоским участком.

2. Определить геометрические и физические параметры, входящие в формулу.
3. Подставив параметры в формулу, рассчитать коэффициент дифракции.

Сначала располагаем вспомогательную точку наблюдения на том же расстоянии от рассеивателя в зоне прямой видимости, определяем «опорный» уровень сигнала в соответствии с энергетическими соотношениями (см. пп. 5.3.4 и 5.3.5), а затем определяем его ослабление при угловом отклонении от сигнала прямой видимости в соответствии с формулами для дифракции на плоском многоугольнике.

Алгоритм построения решения

В этом разделе изложен алгоритм построения решения задачи распространения радиоволн в условиях городской застройки.

1. Проводятся трассировки лучей между передающей и приемной антеннами. Под трассой луча понимается пространственная ломаная линия. В начале ломаной линии расположена

передающая антенна, в конце – приемная, а в узлах ломаной расположены точки стационарной фазы. Отрезки ломаной имеют направление, т.е. являются векторами. Точки стационарной фазы (ТСФ) находятся на плоскости или на краях рассеивателей. Если ТСФ находится на плоскости рассеивателя, то прилегающие к ней отрезки ломаной располагаются в соответствии с законом зеркального отражения. Если ТСФ находится на кромке экрана, то прилегающие к ней отрезки ломаной располагаются на дифракционном конусе.

2. С целью ограничения количества объектов, которые необходимо учитывать в процессе рассеяния, введем зону, существенную для распространения радиоволн (ЗСРВ). Такой подход оправдан с точки зрения физики, поскольку энергия электромагнитных волн, попадающих из передающей антенны в приемную, в основном заключена именно в этой зоне. С целью упрощения расчетных формул будем считать, что ЗСРВ – это не цилиндр, а правильный 24 - угольник, вписанный в цилиндр, окружающий трассу луча (т.е. каждый из отрезков ломаной). Таким образом, вершины многоугольника располагаются на окружности цилиндра с шагом 15 градусов. Радиус цилиндра пропорционален радиусу первой зоны Френеля (335):

$$R_{ЗСРВ} = a_y \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}, \text{ тогда } \pi(R_{ЗСРВ})^2 = \frac{\lambda R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (343)$$

(см. также (337)). Мы ограничиваемся рассмотрением рассеяния лишь на тех элементах, которые попадают в ЗСРВ.

Будем считать, что элементы городской застройки представляют собой совокупность многогранников различной формы. При проведении в приближении физической оптики расчета рассеяния сигнала на трассе луча можно заменить многогранники плоскими полупрозрачными многоугольными экранами. При этом "освещенным" экранам (т.е. тем, на которые попадает хотя бы часть ЗСРВ) присваиваются свойства соответствующего материала городской застройки, а "теневые" части экранов, попадающих в ЗСРВ, **считаем** в первом приближении идеально поглощающими, чтобы для расчета в теневой зоне можно было использовать физоптическое решение для плоской пластины. Таким образом можно приближенно рассчитать дифракцию на здании, имеющем конечную толщину (рис. 35).

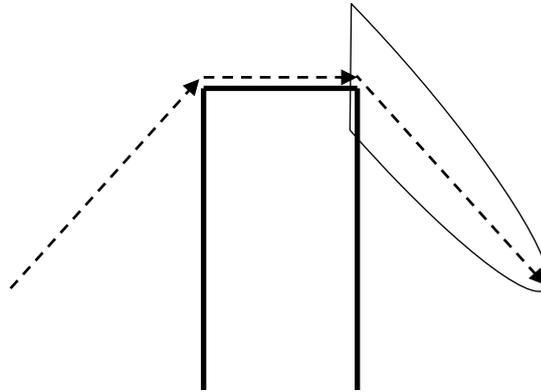


Рис. 35

Трасса луча, испытывающего дифракцию на здании, имеющем конечную толщину. Теневую часть здания, попадающую в ЗСРВ, считаем идеально поглощающей. Это дает возможность использовать в расчетах приближение физической оптики для плоских экранов.

На рис. 35 показана трасса луча, испытывающего дифракцию на здании, имеющем конечную толщину. При рассмотрении дифракции учитываем влияние только тех фрагментов рассеивателя, которые попадают в ЗСРВ. Если мы при расчете применяем приближение физической оптики, то влиянием теневой части здания пренебрегаем, из чего следует, что мы приближенно считаем ее идеально поглощающей. Такое представление является заложенной методической погрешностью, связанной с применением приближения ФО. Часть ЗСРВ, соответствующая последнему участку луча, показана на рисунке.

Замечание по методике эвристического подхода. Слово «считаем» в одном из предыдущих абзацев характеризует заложенную методическую погрешность, которую вводим для того, чтобы иметь право использовать имеющееся у нас решение. Упрощая расчет, нужно четко представлять, какие особенности задачи выводим из рассмотрения.

Пересечения полупрозрачных многоугольных экранов и многоугольной ЗСРВ образуют многоугольники, лежащие на трассе луча, т.е. в окрестности точек стационарной фазы. Применение формулы для рассеяния на многоугольных экранах позволяет рассчитать ослабление луча на трассе. При этом в случае зеркального отражения применяется "отражательная" формула, а при расчете рассеяния на кромках - "дифракционная". Эту же формулу можно применять и при необходимости расчета сигнала, распространяющегося в направлениях, отклоняющихся от ЗСРВ.

ПРИЛОЖЕНИЕ 9. Аналитическое эвристическое решение задачи дифракции волнового поля на плоском рассеивателе многоугольной формы

Построение эвристического решения задачи дифракции волнового поля общего типа, в том числе поля упругой волны является весьма актуальной задачей по ряду причин. Первая причина: активное изучение этого явления в настоящее время с целью дальнейшего использования результатов при решении различного рода технических задач локации сейсмических объектов, в том числе решения обратных задач. Вторая причина: сложность двумерных и тем более трехмерных задач эластодинамики. Третья причина: развитие численных методов, позволяющих получить верификационные решения.

С физической точки зрения явление дифракции упругой волны имеет существенные отличия от электродинамического случая. Это касается не только физической природы поля, но поляризации, характером отражения и распространения поля на разных поляризациях и т.п. На одной частоте упругая волна может распространяться с разными поляризациями. При этом частицы среды могут двигаться продольно по отношению к направлению распространению волны (продольная поляризация) и поперечно по направлению к направлению распространения волны (поперечная поляризация). Скорости продольно и поперечно поляризованных волн отличаются. При падении на границу раздела двух сред волны с продольной поляризацией отражение и прохождение волн проходит под разными поляризациями и в разных направлениях (в том числе – в направлениях, отличающихся от зеркального и от направления «прямо вперед») (рис. 36). Эта ситуация напоминает преломление электромагнитной волны при проходе через границу раздела двух сред.

На рис. 36 показана схема взаимодействия упругой волны с плоской границей раздела двух сред. При падении на границу раздела упругой волны (1) на границе возникают две отраженные волны (2) и (4) с продольной и поперечной поляризацией соответственно и две прошедшие волны (3) и (5) с продольной и поперечной поляризацией соответственно. Направление движения частиц упругой среды при продольной и поперечной поляризации показано стрелками (6) и (7) соответственно.

Тем не менее, общие особенности поведения волновых полей позволяют использовать решение для поля одной физической природы в качестве основы для решения задачи для поля другой физической природы. Поэтому результаты, приведенные в данной диссертации, можно использовать для решения очень широкого спектра задач.

Строгое решение краевой задачи дифракции упругой волны представляет собой сложную проблему. Для получения дифракционных коэффициентов приближенного решения в данном разделе выбран другой подход. Взяв за основу решение задачи дифракции электромагнитного поля на идеально проводящей полуплоскости, можно построить дифракционные коэффициенты из эвристических соображений, а затем скорректировать их при помощи сравнения с результатами численного эксперимента.

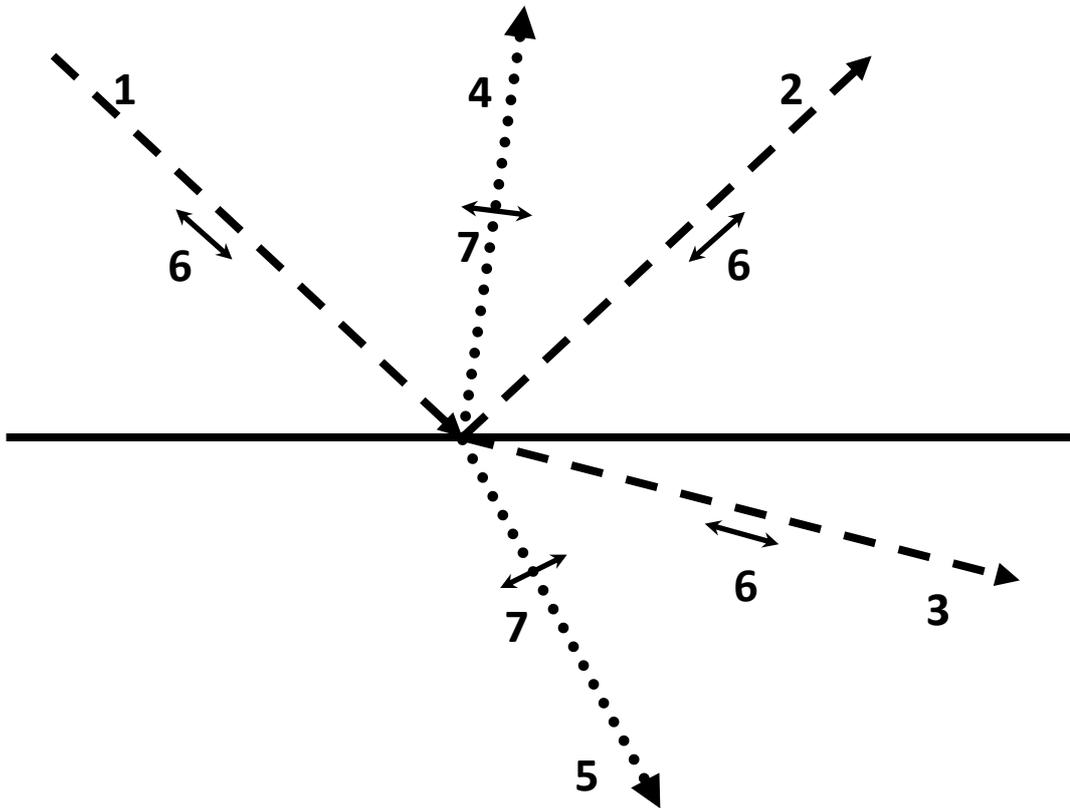


Рис. 36

Падение упругой волны на плоскую границу раздела двух сред.

- 1 – падающая волна продольной поляризации;
- 2 – отраженная волна продольной поляризации;
- 3 – прошедшая волна продольной поляризации;
- 4 – отраженная волна поперечной поляризации;
- 5 – прошедшая волна поперечной поляризации;
- 6 – направление движения частиц в волне продольной поляризации;
- 7 – направление движения частиц в волне поперечной поляризации.

Постановка задачи дифракции упругой волны

Рассмотрим решение задачи дифракции упругой волны на идеально проводящей пластине. Геометрия задачи дифракции упругой волны показана на рис. 37.

Задача рассматривается в кубической области размером 1000×1000 м. Область распространения упругой волны представляет собой куб размером 1000×1000 м. Плоский рассеиватель размером 100×100 м расположим в центре координат. Источник расположен в точке $(-500, 0, -500)$. Ограничимся случаем нахождения источника и точек наблюдения в плоскости $y=0$, расположив точки наблюдения на отрезке $[(-500, 0, -500), (-500, 0, 500)]$ с шагом в 100 м.

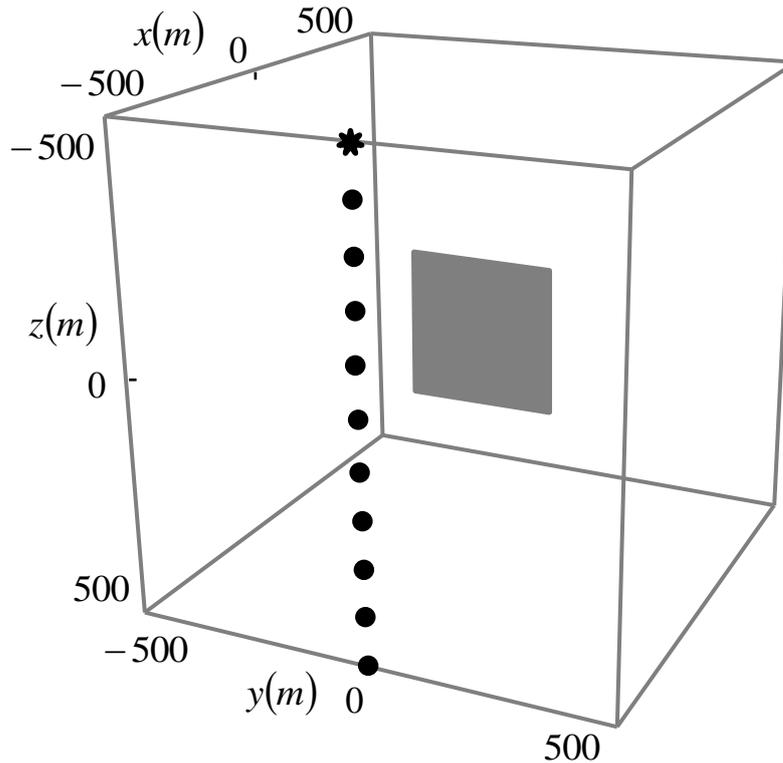


Рис. 37

Геометрия задачи дифракции упругой волны.

Длину волны выберем такой, чтобы данная геометрия допускала применение условия дальней зоны. Это условие выполняется тогда, когда расстояние между рассеивателем и точками расположения источника или точкой наблюдения составляет не меньше $2D^2/\lambda$, где D – максимальный размер рассеивателя, λ – длина волны. При этом падающую волну, которая на самом деле является сферической, можно условно считать плоской. Это приводит к значительному упрощению всех формул без снижения точности решения.

В качестве источника продольно поляризованной упругой волны возьмем возмущение вектора скорости \vec{v}_{L0} движения частиц упругого тела. Модуль скорости продольно поляризованной волны меняется в зависимости от времени по закону, соответствующему вейвлету Рикера [113] с доминирующей частотой $f_i=40$ Гц.

При падении на поверхность с граничными условиями типа «linear slip» [114] волна продольной поляризации возбуждает две отраженные волны: продольно поляризованную и поперечно поляризованную. Скорости распространения в упругой среде продольно поляризованной и поперечно поляризованной волны равны $c_L=4000$ м/с и $c_T=2500$ м/с соответственно. Длины волн $\lambda_L=c_L/f_i$, $\lambda_T=c_T/f_i$. Волновые числа $k_L=2\pi/\lambda_L$, $k_T=2\pi/\lambda_T$. Плотность упругой среды равна $\rho=2$ г/см³ [115].

Как следует из геометрии задачи, источник и приемник расположены так, что выполняется условие дальней зоны, т.е. и источник, и приемник расположены от рассеивателя на расстоянии не менее, чем $2D_0^2/\lambda_i$, где D_0 – максимальный размер рассеивателя в направлении, поперечном к направлению на источник или на точку наблюдения, $\lambda_i=\min(c_L, c_T)/f_i$. При этом сферическую волну можно условно описывать как плоскую, и все формулы упрощаются.

Построим эвристическое аналитическое решение для полного вектора скорости движения частиц упругого тела \vec{v} , представляющего собой сумму падающего поля \vec{v}_{L0} и рассеянного поля \vec{v}_s

$$\vec{v} = \vec{v}_{L0} + \vec{v}_s. \quad (344)$$

В свою очередь, вектор рассеянного поля \vec{v}_s представляет собой сумму компонентов скоростей упругих полей продольной и поперечной поляризации

$$\vec{v}_s = \vec{v}_L + \vec{v}_T. \quad (345)$$

Компоненты v_x , v_y , и v_z полного вектора скорости \vec{v} связаны с компонентами векторов продольной \vec{v}_L и поперечной \vec{v}_T поляризации рассеянного поля, а также с компонентами вектора начального возмущения \vec{v}_{L0} при помощи соотношений:

$$v_x = v_{L0x} + v_{Lx} + v_{Tx}, \quad v_y = v_{L0y} + v_{Ly} + v_{Ty}, \quad v_z = v_{L0z} + v_{Lz} + v_{Tz}. \quad (346)$$

В свою очередь, вектора \vec{v}_{L0} , \vec{v}_L и \vec{v}_T выражаются при помощи формул:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{L0} &= \vec{n}_{0z} \frac{-1}{\sqrt{4\pi k_L r_{0z}}} F_R \left(t - \frac{r_{0z}}{c_L}, f_j \right), \\ \vec{v}_L &= \vec{n}_s \frac{1}{\sqrt{4\pi k_L r_0}} \frac{1}{\sqrt{4\pi k_L r_z}} (D_{L1} A I_{L1} + D_{L3} A I_{L3}), \\ \vec{v}_T &= \vec{v}_{Ts} \frac{1}{\sqrt{4\pi k_T r_0}} \frac{1}{\sqrt{4\pi k_T r_z}} (D_{T1} A I_{T1} + D_{T3} A I_{T3}). \end{aligned} \quad (347)$$

Здесь \vec{n}_{0z} - единичный вектор поляризации продольно поляризованной падающей волны, $F_R(t, f_j)$ - вейвлет Рикера (характеризующий амплитуду продольно поляризованной упругой волны), t - текущее время в точке наблюдения, r_{0z} - расстояние от источника до точки наблюдения.

Выражения для скоростей \vec{v}_L и \vec{v}_T справедливы при заданной геометрии задачи и имеют ясную физическую интерпретацию. Единичные вектора \vec{n}_s и \vec{v}_{Ts} задают направление поляризации векторов скоростей движения частиц \vec{v}_L и \vec{v}_T соответственно. Вектор \vec{n}_s направлен параллельно направлению ухода продольно поляризованной рассеянной волны, вектор \vec{v}_{Ts} направлен перпендикулярно направлению ухода поперечно поляризованной рассеянной волны. Все, что стоит после векторов \vec{n}_s или \vec{v}_{Ts} - скалярные функции, описывающие амплитуду рассеянных волн. Первые два сомножителя описывают затухание сигнала при распространении от источника до рассеивателя и от рассеивателя до точки наблюдения. Расстояния от рассеивателя до источника и до точки наблюдения рав-

ны r_0 и r_z соответственно, $r_0 = |\vec{N}_0|$, $r_z = |\vec{N}_z|$, $r_{0z} = |\vec{N}_z - \vec{N}_0|$. Здесь \vec{N}_0 и \vec{N}_z - радиус - векторы источника и точки наблюдения (рис. 38).

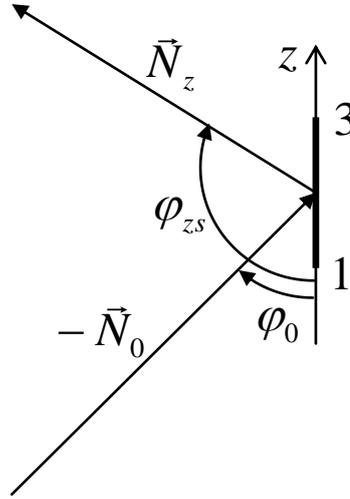


Рис. 38

Падение упругой волны на плоский многоугольный рассеиватель.

На рис. 38 показана схема падения упругой волны на плоский многоугольный рассеиватель, расположенный в плоскости $ХОУ$. Угол φ_0 соответствует вектору направления на источник \vec{N}_0 (направляющий вектор падающей волны равен $-\vec{N}_0$), угол φ_{zs} соответствует вектору направления на точку наблюдения \vec{N}_z , нижняя и верхняя кромки рассеивателя обозначены цифрами 1 и 3.

Выражение в скобках из (347) представляет собой сумму вкладов от двух кромок (1-ой и 3-ей). При данной геометрии вклад двух других кромок незначителен, поскольку наибольший вклад в решение вносят кромки, лежащие на оси дифракционного конуса. В данном случае поверхность дифракционного конуса вырождается в плоскость, образованную направлениями падающей волны и направлением на точку наблюдения, а ось конуса представляет собой нормаль к этой плоскости. Усложнение геометрии приведет к усложнению решения, однако подход останется тем же самым.

Функции AI описывают влияние геометрических параметров кромки на рассеянный сигнал:

$$\begin{aligned} AI_{L1} &= AI_{L1s} \left(t - \frac{r_0 + r_z}{c_L} \right), & AI_{L3} &= AI_{L3s} \left(t - \frac{r_0 + r_z}{c_L} \right), \\ AI_{T1} &= AI_{T1s} \left(t - \frac{r_0}{c_L} - \frac{r_z}{c_T} \right), & AI_{T3} &= AI_{T3s} \left(t - \frac{r_0}{c_L} - \frac{r_z}{c_T} \right). \end{aligned} \quad (348)$$

Функции D_L и D_T описывают влияние свойств поверхности (граничных условий) на рассеянный сигнал.

Эвристические выражения для функций AI и D мы построим позже на основе аналогичных функций, входящих в решение электродинамической задачи рассеяния.

Для построения дифракционных коэффициентов эвристического решения задачи рассеяния упругой волны мы используем дифракционные коэффициенты электромагнитной волны (Глава 5). Чтобы это сделать, нужно заранее получить коэффициенты прохождения T и отражения R при взаимодействии упругой волны с безграничной плоской неоднородностью в среде распространения упругой волны.

Формулы, полученные в предыдущих главах, позволяют строить эвристические решения очень сложных задач дифракции, в том числе – дифракции упругих волн. При этом нужно решить следующие проблемы: (а) построить эвристические формулы для решения в частотной области задачи дифракции упругой волны на плоской прямоугольной неоднородности; (б) построить эвристические формулы для дифракционных коэффициентов упругой волны; (в) перейти из частотной области во временную при помощи преобразования Фурье.

Дифракция на плоских многоугольниках была изложена в Главе 4. Дифракция на полупрозрачных пластинах в приближении ФО была изложена в Главе 5 и в Приложениях 7 и 8. На основе полученных ранее результатов в этой главе будут построены обобщенные дифракционные коэффициенты упругой волны, а также проведено преобразование Фурье для перевода решения из частотной области во временную.

Характер решения определяется рядом факторов.

- а) Геометрия задачи: размеры форма и размеры рассеивателя, положение источника и приемника.
- б) Вид возбуждающего сигнала: форма и спектр.
- в) Граничные условия на поверхности рассеивателя: физические особенности распространяющейся волны, поляризация падающего и рассеянного сигнала.

Возбуждение вейвлетом Рикера

Возбуждение сейсмических волн часто задается вейвлетом Рикера. Он очень удобен для расчет, поскольку относится к классу функций, которые одновременно почти финитны по времени и имеют почти финитный спектр.

Зависимость от времени вейвлета Рикера дается выражением [113]:

$$F_R(t, f_j) = (1 - 2\pi^2 f_j^2 t^2) \exp(-\pi^2 t^2 f_j^2), \quad (349)$$

а его спектральная плотность равна

$$\bar{F}_R(f, f_j) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{f^2}{f_j^3} \exp\left(-\frac{f^2}{f_j^2}\right). \quad (350)$$

Здесь f_j – доминирующая частота вейвлета Рикера.

Методика построения формул

В предыдущих главах диссертации рассматривалась дифракция электромагнитной волны на трехмерных объектах (в том числе – на полупрозрачных многоугольных пластинах) в приближении физической оптики и в приближении метода эквивалентных контурных

токов. Эти решения являются базовыми и для задачи дифракции упругой волны. Отличие упругой волны от электромагнитной состоит в направлениях векторов поляризации, в направлениях границ «свет – тень» для разных типов волн и в граничных условиях на поверхности. В предлагаемых нами эвристических решениях для электромагнитной волны влияние всех этих компонентов локализовано в виде постоянных множителей или множителей-функций. Заменяя в эвристических формулах решения для электромагнитной волны множители, характеризующие электромагнитную волну, на множители, характеризующие упругую волну, можно получить эвристическое решение для упругой волны.

Еще один важный момент состоит в том, что наши эвристические формулы для электромагнитной волны получены в области “frequency domain”, т.е. зависят от частоты, а эвристические формулы для упругой волны нужно получить в области “time domain”, т.е. найти зависимость решения от времени. Эту проблему решаем при помощи преобразования Фурье.

Дифракционные коэффициенты упругой волны вычисляем при помощи решения задачи дифракции электромагнитного поля на полуплоскости с учетом того, что при падении продольно поляризованной упругой волны на плоскую границу среды распространения отраженный сигнал разделяется на две компоненты. Каждая из этих компонент распространяется в своем направлении на своей поляризации со своей скоростью и со своим коэффициентом отражения.

Для описания влияния свойств поверхности применяется обобщенный дифракционный коэффициент. Получение его для случая электромагнитной волны описано в Приложении 8 (формулы 292 – 308)

Преобразование Фурье

Простота дифракционных коэффициентов позволяет трансформировать их при помощи преобразования Фурье и перевести решение для дифракционных коэффициентов из частотной во временную область. Этой простоте также способствует выделение расстояния R от начала координат до точки наблюдения из общего интеграла.

Пара преобразований Фурье определяется выражениями

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ix\omega) dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \exp(ix\omega) d\omega \quad (351)$$

Здесь $\hat{f}(\omega) = \bar{w}_R(f, f_j)$, $f(x) = w_R(t, f_j)$, замена переменных в выражениях происходит по следующей схеме $x \leftrightarrow t$, $f \leftrightarrow \omega$, $f_j \leftrightarrow f_0 2Hz$. На больших частотах условие дальней зоны для рассматриваемого рассеивателя может перестать работать, поскольку длина волны уменьшается. Применяя преобразование Фурье, нужно иметь в виду это обстоятельство, поскольку оно может повлиять на качество решения.

Зависимость от времени вейвлета Рикера $F_R(t, f_j) \leftrightarrow f(x)$ и его спектральная плотность $\bar{F}_R(f, f_j) \leftrightarrow \hat{f}(\omega)$ определяются выражениями (349), (350).

В качестве переменной x в этих преобразованиях берем время t . Получаем пару преобразований переменных «время – частотных» и «частота – время».

Вклад поля отдельной кромки при дифракции электромагнитной волны на плоской

многоугольной пластине определяется выражением (180) (Глава 5):

$$E = \frac{1}{2\pi} \frac{ka_j \exp(ikR_0)}{kR_0} \exp\{i\Phi_j\} fg(\varphi, \varphi_0, R, T)$$

Воспользуемся этой же формулой с целью получения выражения для одной из компонент поля упругой волны v_L или v_T (а именно – скорости движения частиц упругого тела) на заданной поляризации

$$\begin{pmatrix} v_L \\ v_T \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \frac{k(f)a_j \exp(ikR_0)}{kR_0} \exp\{i\Phi_j\} \begin{pmatrix} D_L \\ D_T \end{pmatrix}. \quad (352)$$

Это выражение характеризует частотную зависимость поля упругой волны. А нас интересует зависимость от времени. Переход между этими зависимостями можно осуществить при помощи преобразования Фурье.

Введенные ранее в выражениях (347) дифракционные коэффициенты D_L и D_T определяются аналогично обобщенным дифракционным коэффициентам (ОДК) (Глава 5)

$$\begin{aligned} D_L &= fg(\varphi_L, \varphi_0, R_L, T_L), \\ D_T &= fg(\varphi_T, \varphi_0, R_T, T_T). \end{aligned} \quad (353)$$

При построении дифракционных коэффициентов мы приняли во внимание тот факт, что угол отражения φ , коэффициент отражения R и коэффициент прохождения T меняются в зависимости от поляризации упругой волны (продольной L и поперечной T).

Возникает вопрос: на каком основании мы написали формулы (352) и (353)? Оправдать это действие можно следующим образом. Как электромагнитная, так и упругая волна представляет собой решение уравнения Гельмгольца для однородной изотропной среды. Поляризация волны определяется ее физической природой и стоит отдельным множителем в эвристическом решении. Свойства поверхности мы определяем отдельно для каждого типа волны и поляризации в виде коэффициентов отражения и прохождения R и T для безграничной плоской поверхности. Вполне естественно предположить, что амплитуды рассеянных волн будут определяться одними и теми же скалярными функциями. Например, для акустических волн это предположение в полной мере выполняется [52].

Разумеется, наши решения как для электромагнитной, так и для упругой волны – эвристические и имеют заложенные методические погрешности. Можно предположить, что для отдельных постановок задач на освещенной стороне граничные условия будут выполняться лучше, чем на теневой. Например, если коэффициенты R и T зависят от угла падения волны на поверхность (а это действительно так как для электромагнитной волны в случае импедансных граничных условий [42], так и для упругой волны в случае граничных условий типа “linear slip” [114]), то на освещенной стороне этот угол будет меняться слабее, чем на теневой. Но это нестрогое выполнение граничных условий может не очень сильно влиять на конечный результат расчета.

Впрочем, не нужно забывать, что наше решение для упругой волны – эвристическое. Оно может быть построено для очень сложных случаев, обладает преимуществом простоты, но в любом случае нуждается в верификации, независимо от того, насколько строгое

обоснование оно имеет. В процессе верификации как раз и выяснится, насколько правильно наше представление об изучаемом процессе и насколько сильно эвристическое решение отличается от строгого.

Дифракционные коэффициенты мы получили в частотной области, а функция возбуждения (вейвлет Рикера $F_R(t, f_j)$) задана во временной области. С целью получения перехода «frequency domain – time domain» мы берем частотно-зависимое эвристическое решение для кромки конечного размера (352) и интегрируем вместе со спектральной плотностью $\bar{F}_R(f, f_j)$ частотно-зависимую компоненту дифракционного решения «frequency domain» из формулы для компоненты упругой волны v_L или v_T (352):

$$k(f) \exp\left\{\frac{i}{2} [\Phi_{L1}(f, \varphi_0, \varphi_{zs}) + \Phi_{L4}(f, \varphi_0, \varphi_{zs})]\right\}. \quad (354)$$

Частотно-независимые компоненты выносим за знак интеграла Фурье. В результате для функций AI (348) во временной области получим:

$$\begin{aligned} AI_{L1s}(t) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}_R(f', f_j) ik_L(f') \exp\left\{\frac{i}{2} [\Phi_{L1}(f') + \Phi_{L4}(f')]\right\} \exp(-i2\pi f' t) df', \\ AI_{L3s}(t) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}_R(f', f_j) ik_L(f') \exp\left\{\frac{i}{2} [\Phi_{L3}(f') + \Phi_{L2}(f')]\right\} \exp(-i2\pi f' t) df', \\ AI_{T1s}(t) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}_R(f', f_j) ik_T(f') \exp\left\{\frac{i}{2} [\Phi_{T1}(f') + \Phi_{T4}(f')]\right\} \exp(-i2\pi f' t) df', \\ AI_{T3s}(t) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}_R(f', f_j) ik_T(f') \exp\left\{\frac{i}{2} [\Phi_{T3}(f') + \Phi_{T2}(f')]\right\} \exp(-i2\pi f' t) df'. \end{aligned} \quad (355)$$

Здесь f' - переменная интегрирования, имеющая размерность частоты.

Фазы концов кромок (вершин) обозначены буквой Φ . Выражения в показателях экспонент, стоящих в подынтегральных выражениях (полусуммы фаз вершин), представляют собой фазы в середине кромок. Индексами L и T обозначены вклады волн продольной и поперечной поляризации соответственно. Индексами 1 и 3 в функциях AI обозначены стороны рассеивателя.

Для численного интегрирования можно использовать приближенную формулу в конечных пределах интегрирования, ограничив пределы интегрирования. В случае возбуждения вейвлетом Рикера это возможно, поскольку функция $F_R(t, f_j)$ является практически финитной во времени, а функция $\bar{F}_R(f, f_j)$ имеет практически финитный спектр.

$$\begin{aligned} AI_{L1s}(t) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-4f^{02}Hz}^{4f^{02}Hz} \bar{F}_R(f', f_j) ik_L(f') \times \\ &\times \exp\left\{\frac{i}{2} [\Phi_{L1}(f_1, \varphi_0, \varphi_{zs}) + \Phi_{L4}(f_1, \varphi_0, \varphi_{zs})]\right\} \times \exp(-i2\pi f' t) df' \end{aligned} \quad (356)$$

В эти выражения подставляем $\Phi_j = k(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_j)$ – фаза сигнала в точке j -ой вершины, $\vec{\rho}_j$ – радиус-вектор j -ой вершины, a_j – длина стороны. В нашем случае длины двух сторон, которые вносят вклад в рассеянный сигнал, одинаковы ($a_1=a_3=a$), поэтому этот параметр можно вынести за пределы интегралов как постоянную величину. Буквенные дополнения L и T к индексам у Φ_j и соответствующие индексы у волновых чисел k описывают продольную и поперечную поляризации. Вспомогательный вектор $\vec{\Delta}$ (210) представляет собой проекцию на плоскость рассеивателя разности векторов падающего поля \vec{n}' и направления на точку наблюдения \vec{n}'' .

Общий вид решения

Алгоритм получения формул, применяемых в эвристическом решении задачи дифракции упругой волны на плоском многоугольном объекте.

1. Строим формулы строгого в приближении физоптики решения для дифракции электромагнитной волны на идеально проводящей многоугольной пластине при выполнении условия дальней зоны (Приложения 1, 4).
2. Получаем решение задачи дифракции электромагнитной волны в приближении метода эквивалентных контурных токов. Для получения решения МЭКВ из физоптического решения в случае нормального или наклонного падения волны на кромку применяем формулы из Приложений 2, 4.

Введение корректирующих коэффициентов к физоптической ДН кромки позволяет учесть изменение ДН в результате возмущения краевых токов кромкой. Получается решение МЭКВ с равномерными краевыми токами на кромке. Изменение краевых токов из-за ограниченности кромки по длине («вершинные волны») мы пока не учитываем. В нашей геометрии влияние вершинных волн не столь заметно, но в будущем влияние вершинных волн нужно будет учитывать.

3. В выражении для дифракционных коэффициентов заменяем коэффициенты R и T для электромагнитной волны на соответствующие коэффициенты упругой волны (353).
4. Осуществляем переход «frequency domain – time domain» (355), (356).
5. Проводим пробный расчет по эвристическим формулам (347) и настраиваем решение при помощи данных проверочного (верификационного) расчета.

Как и любая эвристическая формула, решение для дифракции упругой волны нуждается в верификации. Верификация приближенных формул для дифракции упругой волны на плоской многоугольной пластине была проведена при помощи данных, полученных на кластере Массачусетского технологического института. Сравнение эвристических результатов со строгими показало перспективность данного эвристического подхода [168]. Однако окончательные выводы о пригодности эвристических формул можно делать только после завершения работы по их построению и тщательного исследования пределов их применимости. Такое исследование пока не проведено, поэтому в диссертации данные по верификации решения для упругой волны мы не приводим.

ПРИЛОЖЕНИЕ 10. Исследование задачи дифракции электромагнитной волны на трехмерном идеально проводящем рассеивателе.

Получение эвристического аналитического решения для трехмерного плоского многоугольника конечного размера – важная задача, поскольку проблема представляет большой интерес, а строгие аналитические решения для многоугольников отсутствуют. Дифракцию на таких объектах изучали и ранее (см., например, [116 – 123]).

Плоский квадратный рассеиватель – хороший объект для исследования. С одной стороны, он является многоугольником, и его рассеянное поле имеет соответствующие характерные особенности. С другой стороны, он похож на правильные фигуры, из-за чего эти особенности проявляются не все одновременно, поэтому их можно изучать последовательно.

Кроме того, угол при вершинах квадрата совпадает по величине с углом исследованного ранее плоского углового сектора, что позволяет максимально использовать полученные ранее эвристические формулы и сравнить получившиеся результаты.

Целью данного исследования не является построение уточненного эвристического решения задачи дифракции на плоском многоугольнике (это возможно, но не в рамках данной работы). Целью является применение к ряду объектов методов и приемов, предложенных в диссертации. К указанным объектам относятся трехмерный рассеиватель, плоский угловой сектор. Для них исследованы численные и эвристические (в разных приближениях) решения, а также выявлены особенности этих решений, которые следует учитывать при решении конкретных практических задач.

В предыдущих главах было получено решение задачи дифракции для плоского углового сектора с использованием подхода «условная кромка» в приближении ФО, МЭКТ и уточненное решение (ММЭКТ). Применим эти формулы для построения уточненного решения задачи дифракции на плоском многоугольнике. Для многоугольника выберем ту же геометрию, что и для плоского углового сектора. Будем использовать тот же ракурс и те же модифицирующие функции.

Все решения приведены к виду, позволяющему проводить сравнение данных. Геометрия задачи (рис. 39) выбрана в соответствии с положением плоского углового сектора (см. рис. 18). Рассеянное поле для эвристических формул преобразуем в амплитуду вектора суммы двух поляризаций, что соответствует формату данных численного решения.

На рис. 39 показана геометрия трехмерной задачи дифракции на плоском многоугольнике. Форма многоугольника, угол падения и расположение точки наблюдения выбраны таким образом, чтобы свести к минимуму отличия от условий задачи дифракции на плоском угловом секторе. Поэтому рассеивающий плоский многоугольник представляет собой квадрат с длиной стороны, равной ka . Параметр ka изменяется в диапазоне значений от 2 до 30.

Исследуем соотношение между амплитудами значений модуля рассеянного поля при возбуждении разными поляризациями для эвристических формул и сравним его со строгим решением. Модифицирующий множитель в случае многоугольника возьмем тот же,

что для плоского сектора. Вид этого множителя в данном случае играет меньшую роль, чем в случае ключевой задачи, поскольку множественные переотражения на рассеивателе конечного размера могут существенно изменить картину поля вблизи кромки, в то время как решения ключевых задач предполагают отсутствие дополнительных возмущений поля. В отличие от плоского углового сектора, сигнал от многоугольника не имеет сингулярностей в направлениях дифракционных конусов.

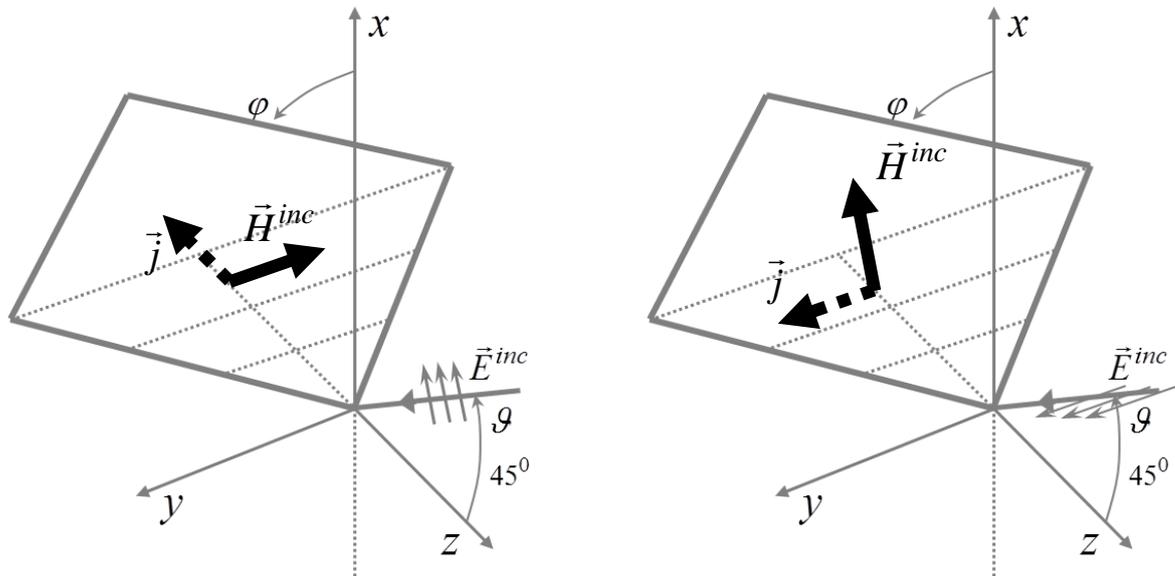


Рис. 39

Геометрия задачи. Плоская электромагнитная волна с направляющим вектором, расположенным в плоскости XOZ , падает на идеально проводящий плоский квадрат с длиной стороны a , расположенный в плоскости YOZ . Сплошной черной стрелкой показан вектор магнитного поля падающей волны, штриховой стрелкой – поверхностный электрический ток.

В предыдущем разделе мы получили эвристическое решение для плоского углового сектора в приближениях МЭКТ и модифицированного МЭКТ (ММЭКТ).

В этом разделе мы будем сравнивать между собой численное решение и эвристические решения в приближениях МЭКТ, ФО и МЭКТ-ФО. Приближение МЭКТ-ФО отличается от МЭКТ тем, что в решение МЭКТ вместо дифракционных коэффициентов строгого решения для полуплоскости подставлены физоптические.

Решения МЭКТ и МЭКТ-ФО характеризуются тем, что основаны на ТЕ- и ТН-поляризациях, зависящих от ориентации каждой отдельной кромки, в то время как поле классической физоптики (ФО) зависит только от направления нормали к рассеивателю.

Методика проведения исследования эвристических формул заключается в следующем. На первом этапе строим решение МЭКТ. Затем строим решение МЭКТ-ФО. На последнем этапе строим решение по классической физоптике.

Решение ФО представляет собой произведение линейного интеграла на поляризационную составляющую. Решение ФО находим при помощи формул (107) – (110), (146), (164).

Линейные интегралы типа (146) [124 – 125] – одна из составляющих решения в приближении ФО. Они правильно определяют форму ДР, но неверно описывают соотноше-

ние между поляризациями. Поляризационная составляющая (164) – числитель дифракционного коэффициента.

В качестве плоскости рассеяния берем плоскость φ или плоскость ϑ . Численное решение (предоставлено В.И. Калиничевым) задачи дифракции на плоском многоугольнике (квадрате) получено при помощи метода моментов. Сравним его с результатами расчета по эвристическим формулам. Рассмотрим падающую плоскую волну двух разных типов поляризации и амплитуду рассеянной волны в дальней зоне.

Численное решение было рассчитано в дальней зоне не отдельно для каждой поляризации, а для возможности суммарного сигнала на обеих поляризациях. Точно такую же обработку проводили и для эвристических формул.

Рассмотрим формулу (150) при $\vartheta=45^\circ$, $0<\varphi<180^\circ$ (рис. 39).

$$\begin{pmatrix} E_{\vartheta}^{\infty} \\ E_{\varphi}^{\infty} \end{pmatrix} = \frac{\exp(ikR)}{kR} \begin{pmatrix} D_{\vartheta\vartheta} & D_{\vartheta\varphi} \\ D_{\varphi\vartheta} & D_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\vartheta}^{inc} \\ E_{\varphi}^{inc} \end{pmatrix} = \frac{\exp(ikR)}{kR} \begin{pmatrix} D_{\vartheta\vartheta}E_{\vartheta}^{inc} + D_{\vartheta\varphi}E_{\varphi}^{inc} \\ D_{\varphi\vartheta}E_{\vartheta}^{inc} + D_{\varphi\varphi}E_{\varphi}^{inc} \end{pmatrix}. \quad (357)$$

Отсюда следует для амплитуды вектора рассеянного поля

$$|\vec{E}^{\infty}| = \sqrt{(E_{\vartheta}^{\infty})^2 + (E_{\varphi}^{\infty})^2} = \frac{\exp(ikR)}{kR} \sqrt{(D_{\vartheta\vartheta}E_{\vartheta}^{inc} + D_{\vartheta\varphi}E_{\varphi}^{inc})^2 + (D_{\varphi\vartheta}E_{\vartheta}^{inc} + D_{\varphi\varphi}E_{\varphi}^{inc})^2}. \quad (358)$$

При возбуждении вектором E_{ϑ}^{inc} (лежащим в плоскости падения) $E_{\varphi}^{inc}=0$, и тогда

$$|\vec{E}^{\infty}| = \sqrt{(E_{\vartheta}^{\infty})^2 + (E_{\varphi}^{\infty})^2} = \frac{\exp(ikR)}{kR} E_{\vartheta}^{inc} \sqrt{D_{\vartheta\vartheta}^2 + D_{\varphi\vartheta}^2}. \quad (359)$$

Для вектора E_{φ}^{inc} (перпендикулярным плоскости падения) $E_{\vartheta}^{inc}=0$ получаем:

$$|\vec{E}^{\infty}| = \sqrt{(E_{\vartheta}^{\infty})^2 + (E_{\varphi}^{\infty})^2} = \frac{\exp(ikR)}{kR} E_{\varphi}^{inc} \sqrt{D_{\vartheta\varphi}^2 + D_{\varphi\varphi}^2}. \quad (360)$$

Эвристические коэффициенты D берем из выражений (166).

Сравнение ДН показало, что эвристическое и строгое решения имеют качественное совпадение, но численное решение имеет ряд особенностей: «заплывы» нулей и «пьедесталы» (рис. 40 (а) – (в)).

В связи с особенностями численного решения («заплывы» нулей и «пьедесталы») будем сравнивать между собой не аналогичные кривые на одной поляризации для разных решений, а кривые для двух разных поляризаций одного и того же расчета (либо численного, либо эвристического). При этом «заплывы» нулей и «пьедесталы» не будут сильно влиять на результаты сравнения, поскольку они имеют место для обеих поляризаций численного решения, и в частном от деления амплитуд разных поляризаций численного решения их влияние компенсируется.

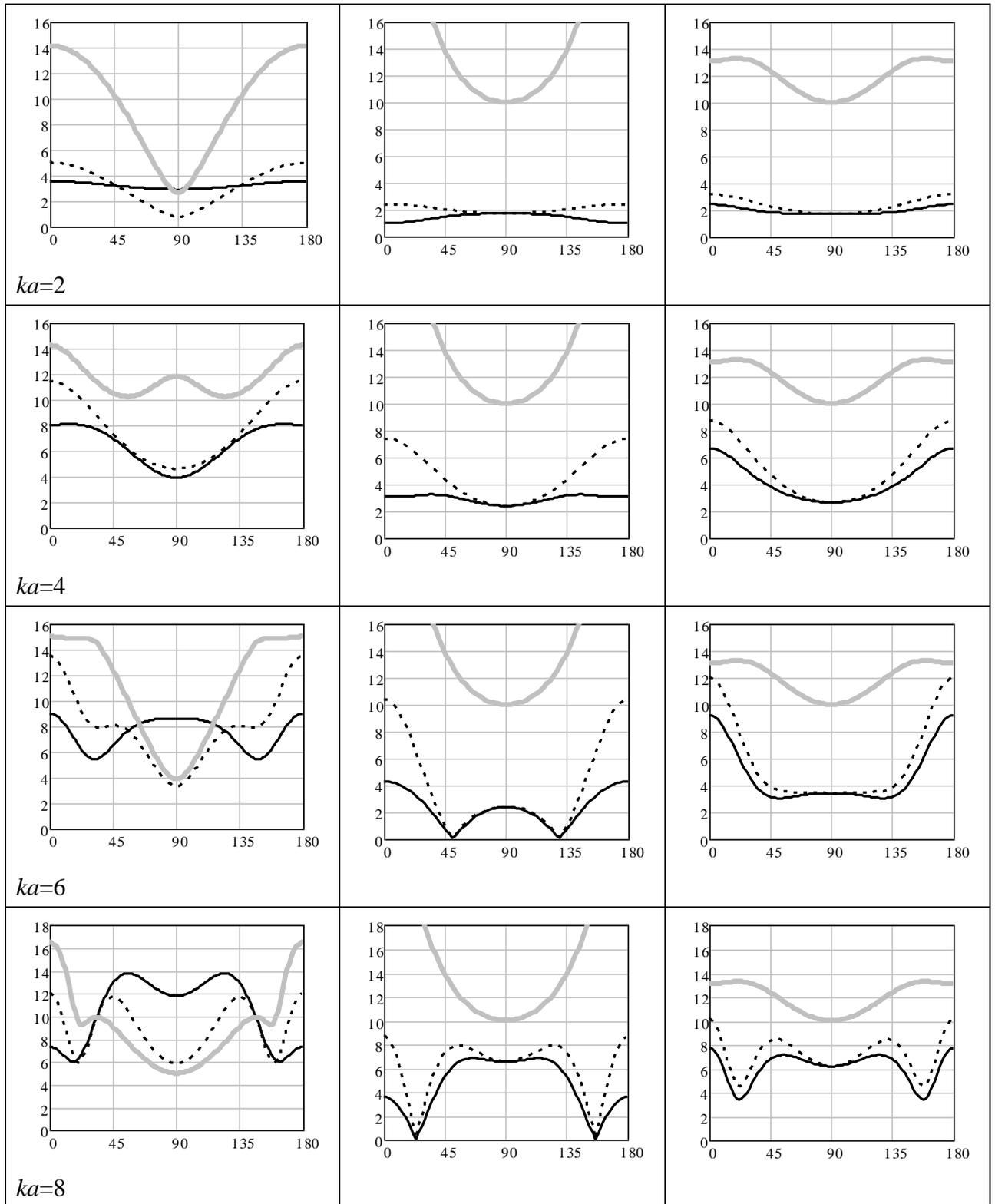


Рис. 40 (а)

Диаграммы рассеяния для $ka=2, 4, 6, 8$. По горизонтали отложен угол ϕ , по вертикали – амплитуда поля. Сплошной черной кривой показана ДР для падающего поля, вектор E которого расположен в плоскости падения, пунктирной – перпендикулярен. Серой кривой показано отношение между этими поляризациями. На левых графиках – строгое решение, на других – эвристические решения МЭКТ (в центре) и МЭКТ-ФО (справа).

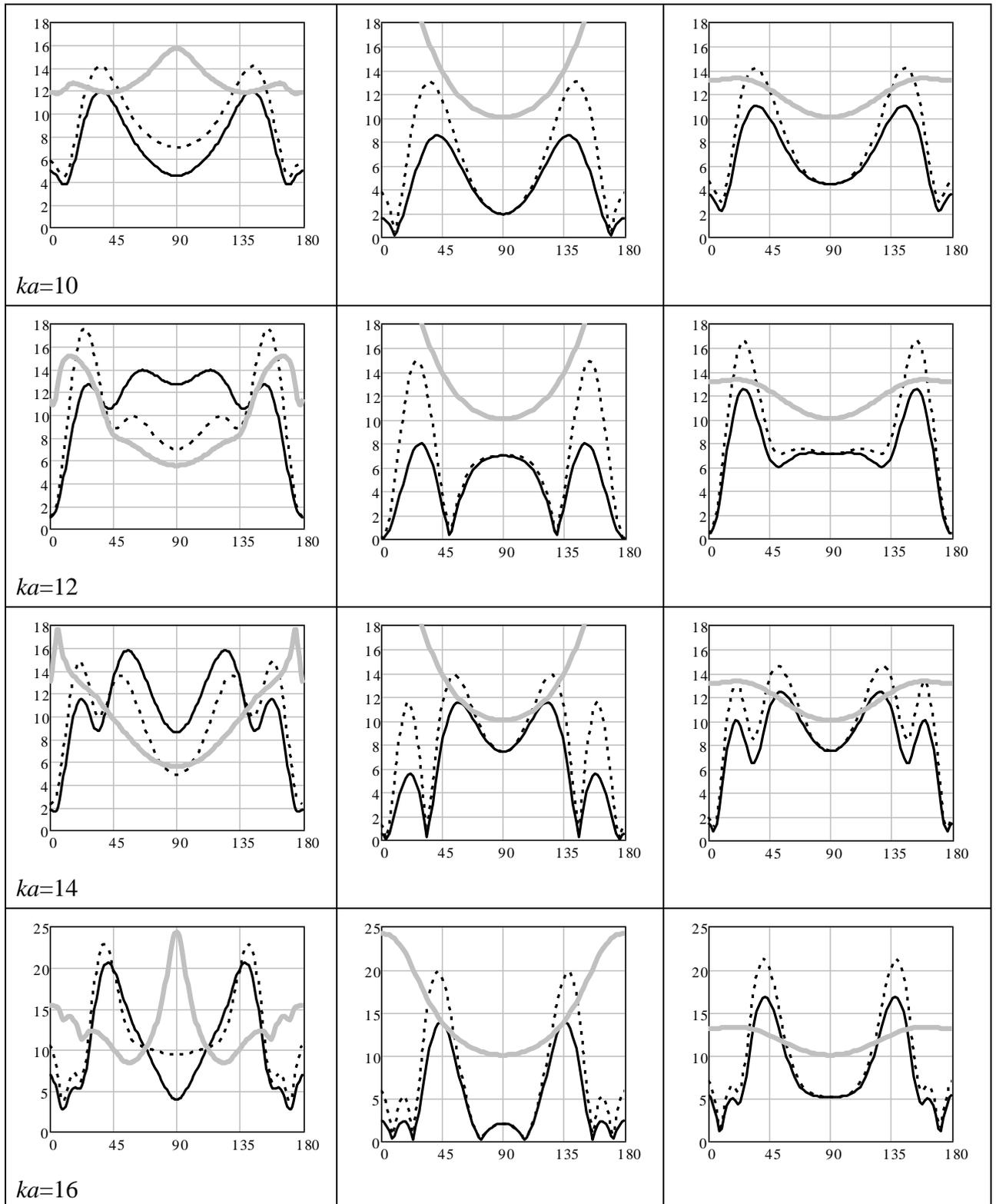


Рис. 40 (б)

Диаграммы рассеяния для $ka=10, 12, 14, 16$. По горизонтали отложен угол ϕ , по вертикали – амплитуда поля. Сплошной черной кривой показана ДР для падающего поля, вектор E которого расположен в плоскости падения, пунктирной – перпендикулярен. Серой кривой показано отношение между этими поляризациями. На левых графиках – строгое решение, на других – эвристические решения МЭКТ (в центре) и МЭКТ-ФО (справа).

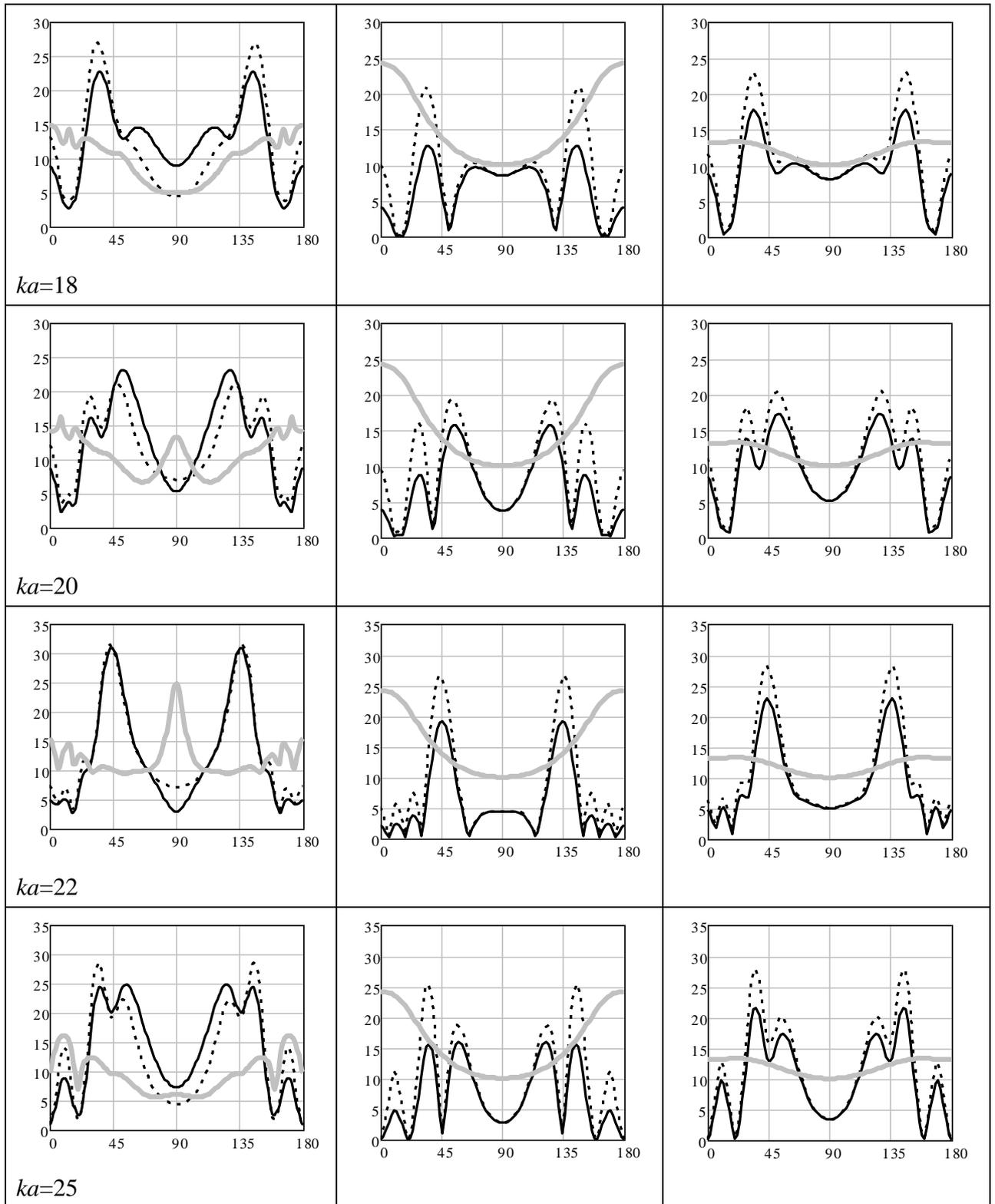


Рис. 40 (в)

Диаграммы рассеяния для $ka=18, 20, 22, 25$. По горизонтали отложен угол ϕ , по вертикали – амплитуда поля. Сплошной черной кривой показана ДР для падающего поля, вектор E которого расположен в плоскости падения, пунктирной – перпендикулярен. Серой кривой показано отношение между этими поляризациями. На левых графиках – строгое решение, на других – эвристические решения МЭКТ (в центре) и МЭКТ-ФО (справа).

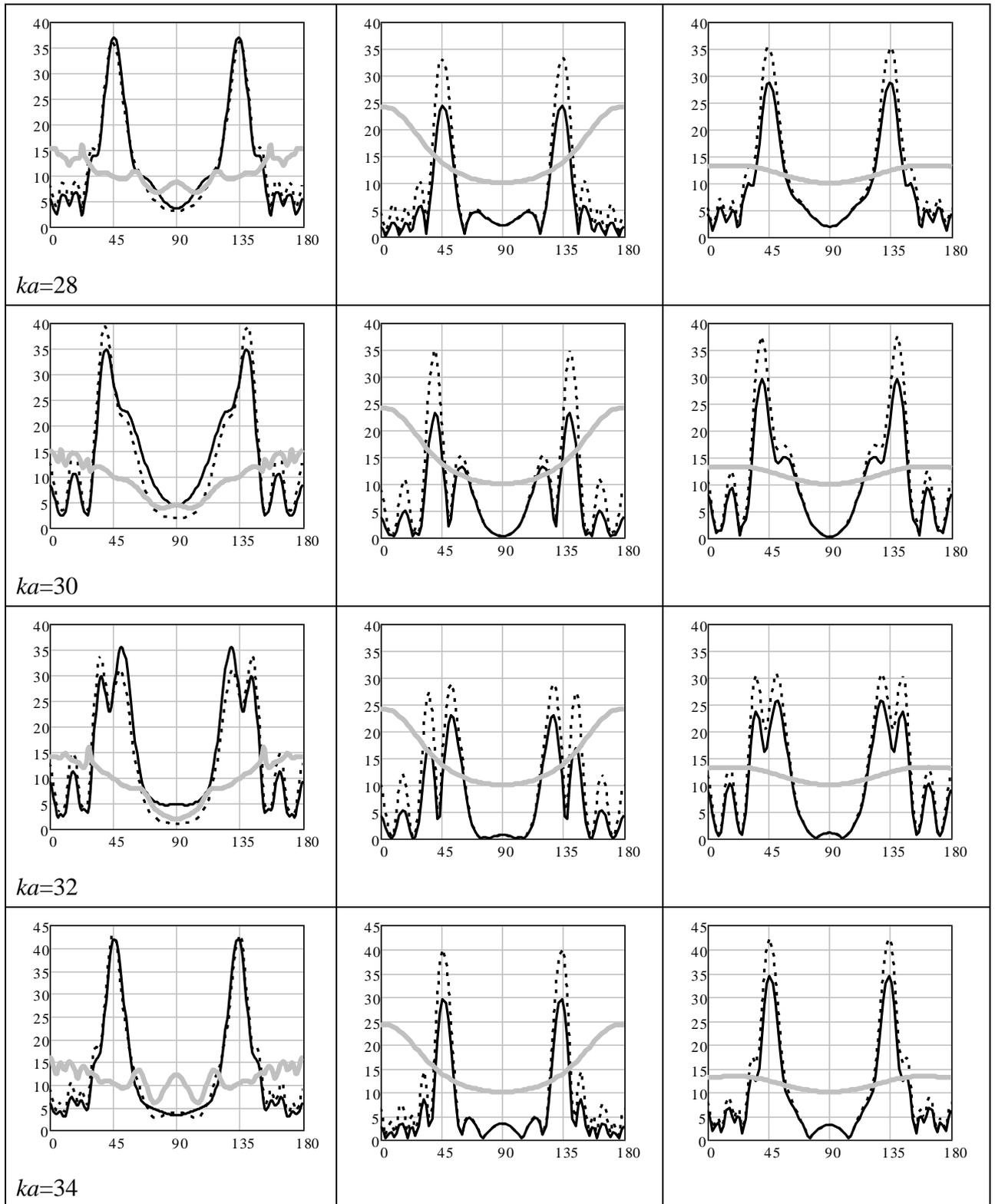


Рис. 40 (г)

Диаграммы рассеяния для $ka=28, 30, 32, 34$. По горизонтали отложен угол ϕ , по вертикали – амплитуда поля. Сплошной черной кривой показана ДР для падающего поля, вектор E которого расположен в плоскости падения, пунктирной – перпендикулярен. Серой кривой показано отношение между этими поляризациями. На левых графиках – строгое решение, на других – эвристические решения МЭКТ (в центре) и МЭКТ-ФО (справа).

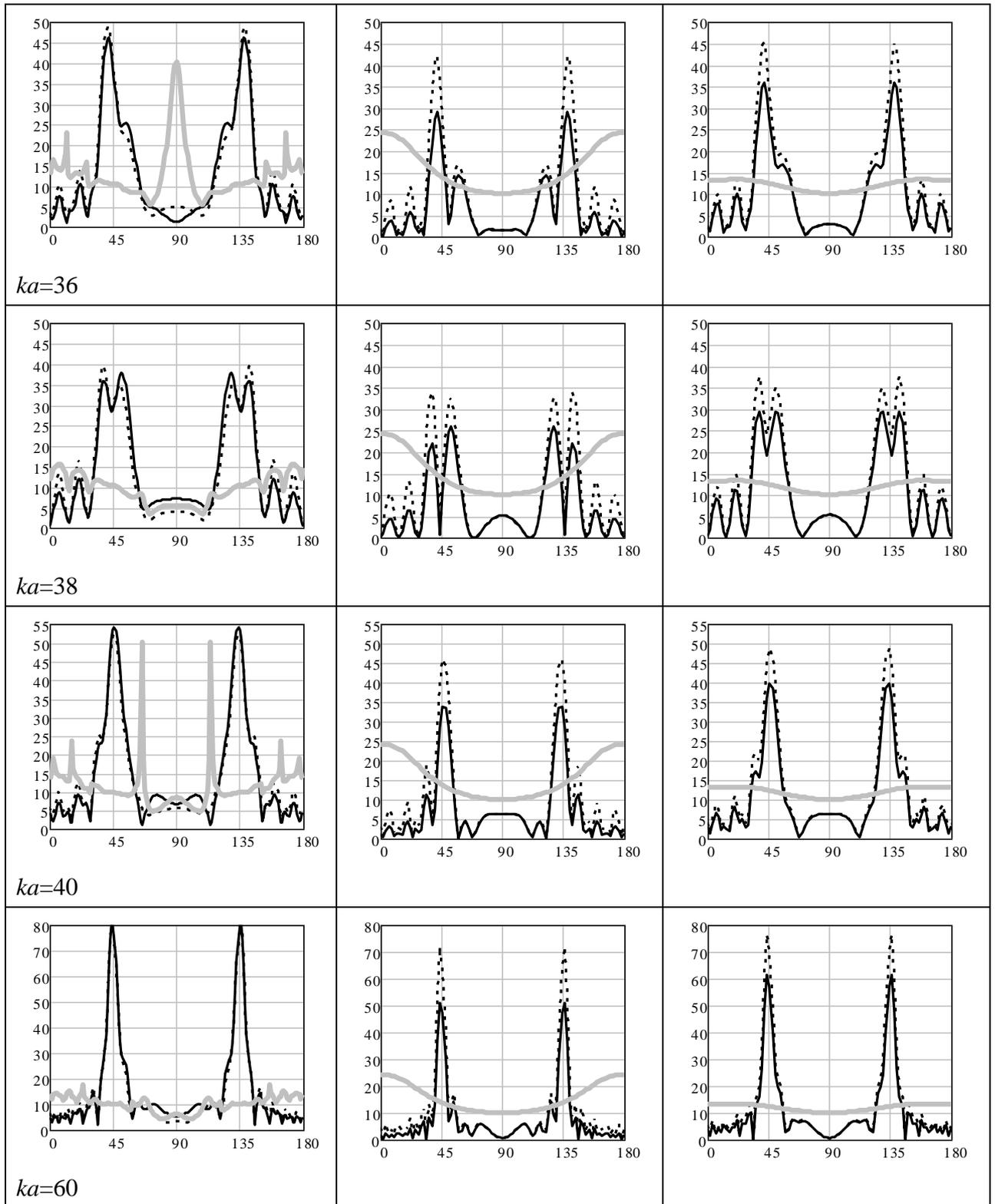


Рис. 40 (д)

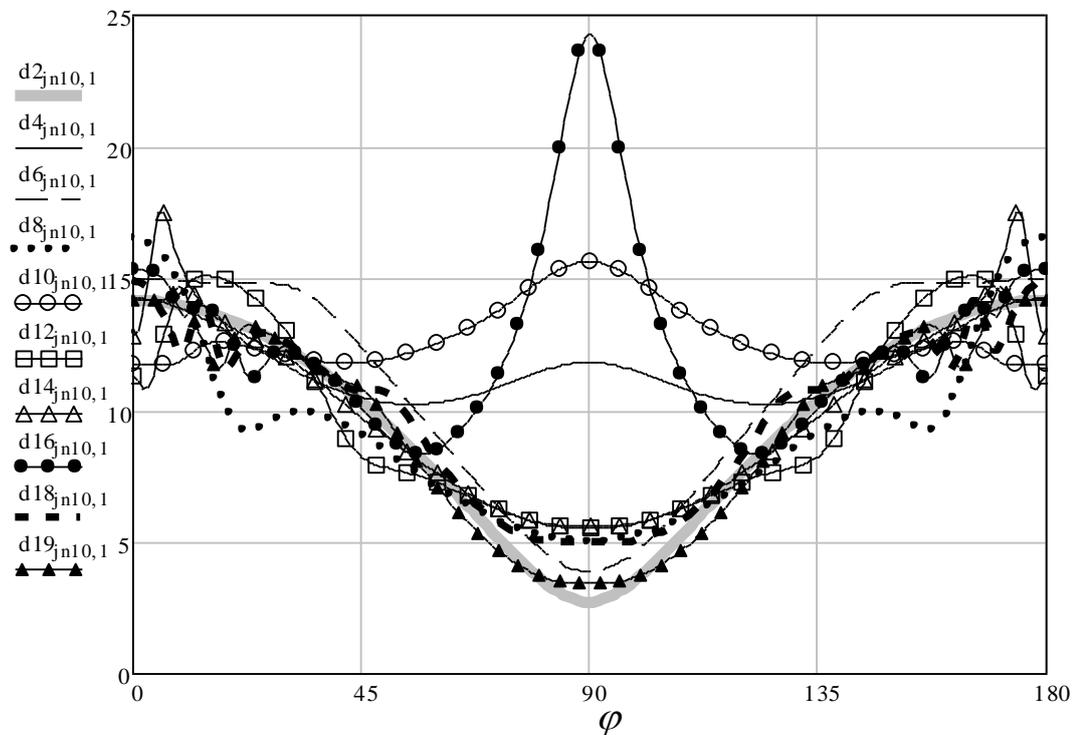
Диаграммы рассеяния для $ka=36, 38, 40, 60$. По горизонтали отложен угол ϕ , по вертикали – амплитуда поля. Сплошной черной кривой показана ДР для падающего поля, вектор E которого расположен в плоскости падения, пунктирной – перпендикулярен. Серой кривой показано отношение между этими поляризациями. На левых графиках – строгое решение, на других – эвристические решения МЭТ (в центре) и МЭТ-ФО (справа).

На рис. 40 (а) – (в) на левых рисунках показано численное решение, на средних рисунках – эвристическое решение в приближении МЭКТ, на правых – эвристическое решение в приближении ММЭКТ. Значение ka показано в левом нижнем углу. Сплошной черной кривой показана амплитуда $amplred(\varphi)$ вектора рассеянного поля \vec{E}^∞ для случая, когда единичный вектор E падающего поля (E_g^{inc}) лежит в плоскости падения XOZ , пунктиром показана амплитуда вектора рассеянного поля $amplblue(\varphi)$ для случая, когда единичный вектор E падающего поля (E_φ^{inc}) перпендикулярен плоскости падения XOZ (см. рис. 39). Серой линией показано десятикратное отношение между поляризациями $10*(amplblue(\varphi)/amplred(\varphi))$.

Более детальное сравнение численного решения с эвристическими аналитическими формулами можно было бы провести, внедрив эвристические формулы в программную среду численного решения. Тогда можно было бы получить точные значения для соотношений между амплитудами диаграмм рассеяния (ДР) на разных поляризациях. В данном случае у нас возможности внедрения в программную среду не было, сравнение проводили визуально по форме кривых ДР и по форме кривых отношения между поляризациями.

Отношение между поляризациями эвристических решений (МЭКТ и ММЭКТ) представляет собой постоянную величину, не зависящую от характерного размера рассеивателя (длины стороны рассеивающего квадрата) ka .

В отличие от эвристического решения и от плоского углового сектора, в численном расчете рассеяния многоугольником (квадратом) отношение поляризаций, имеет резонансный характер (см. рис. 41).



(a)

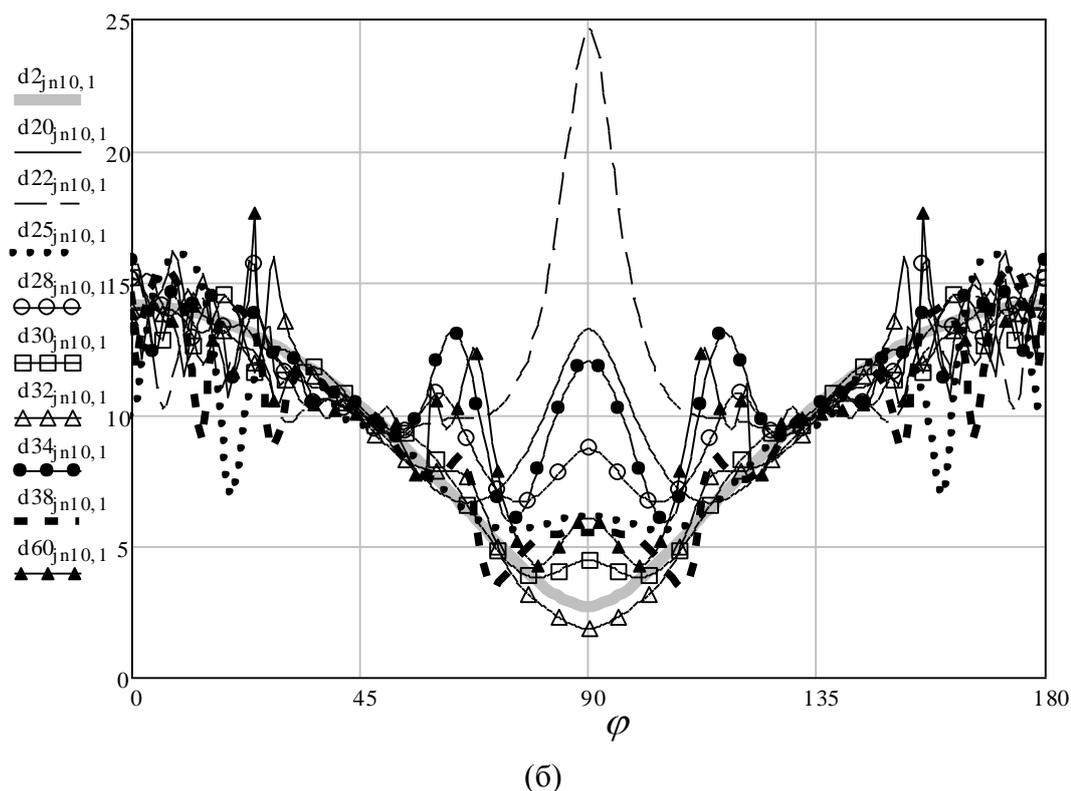


Рис. 41 (а), (б)

Кривые, характеризующие частное от деления амплитуд сигналов для ДР на разных поляризациях при разных значениях ka . Соответствие между значением ka и изображением кривых показано справа от графиков.

На рис. 41 на два графика (а) и (б) сведены угловые зависимости десятикратного отношения между поляризациями численного решения $10 \cdot (\text{amplblue}(\varphi) / \text{amplred}(\varphi))$ при различных значениях ka . Отношение между поляризациями численного решения характеризует систему собственных волн квадратной пластинки с чередованием резонансных и нерезонансных участков (см. рис. 42, 43). Построим график поведения средней точки ДН (при $\varphi = \pi/2$) в зависимости от ka (рис. 42).

На рис. 42 кружками и квадратами обозначены значения амплитуд вектора рассеянного поля $\text{amplred}(90)$ и $\text{amplblue}(90)$ численного решения в точке $\varphi = \pi/2$ ($\varphi = 90^\circ$). Черными сплошной и штриховой линиями показаны значения амплитуд вектора рассеянного поля $\text{amplred}(45)$ и $\text{amplblue}(45)$ численного решения в точке $\varphi = \pi/4$ ($\varphi = 45^\circ$). Треугольниками показана зависимость от величины ka значения отношения между поляризациями численного решения $5 \cdot (\text{amplblue}(90) / \text{amplred}(90))$ в точке $\varphi = \pi/2$ ($\varphi = 90^\circ$). Серой сплошной линией показана зависимость $5 \cdot (\text{amplblue}(45) / \text{amplred}(45))$ в точке $\varphi = \pi/4$ ($\varphi = 45^\circ$).

При изменении угла наблюдения $\varphi = \pi/2$ на $\varphi = \pi/4$ возрастает амплитуда кривых и сохраняется их резонансный характер, хотя разница между кривыми уменьшается. При $\varphi = \pi/4$ значения амплитуд изменяются по отношению к значению ka синфазно, в то время как раньше (при $\varphi = \pi/2$) они изменялись противофазно.

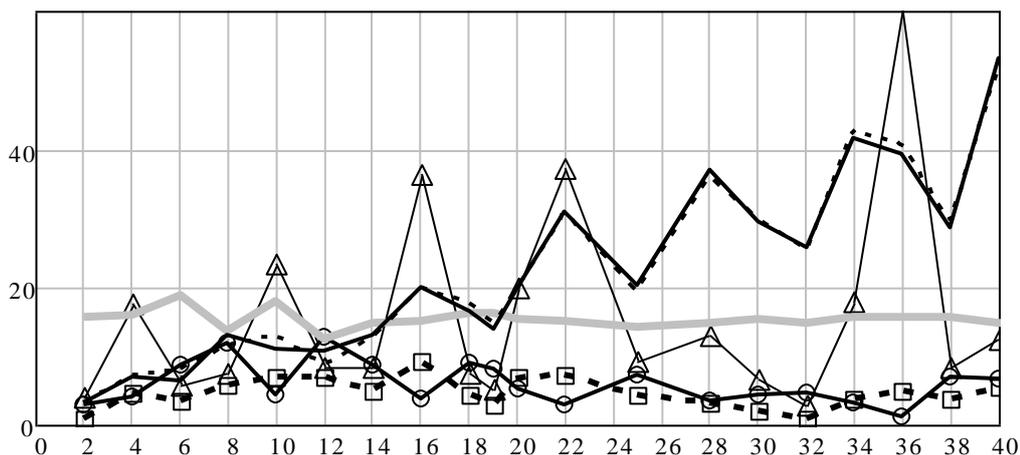


Рис. 42

Зависимость от ka амплитуды средней точки ДР (для $\varphi=\pi/2$) – кружки и квадраты и амплитуды ДР на дифракционных конусах (для $\varphi=\pi/4$) – сплошная линия и пунктир. По горизонтальной оси отложены значения ka , по вертикальной – амплитуда ДР на разных поляризациях и отношения амплитуд (треугольники и серая линия).

Рассмотрим зависимость от ka частного ka/π (рис. 43).

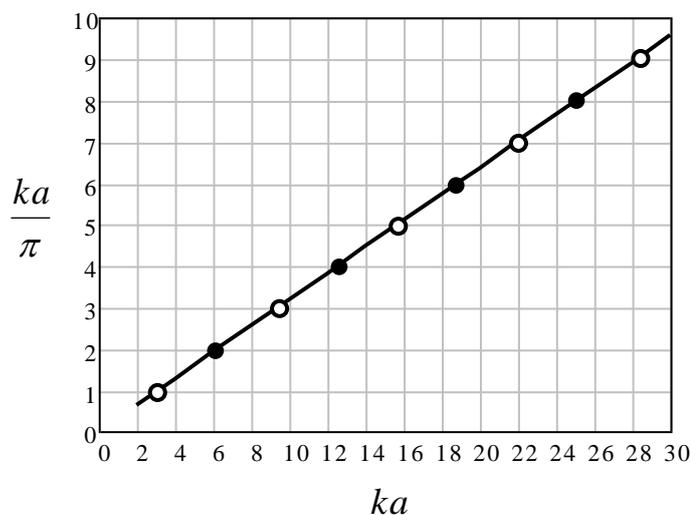


Рис. 43

Зависимость ka/π (вертикальная ось координат) от ka (горизонтальная ось координат). Целые нечетные значения величины ka/π соответствуют максимальной «резонансности» пластины, целые четные – минимальной. Белые кружки приблизительно соответствуют максимумам амплитуды средней точки (см. рис. 42), черные – минимумам.

Сравнивая рис. 43 с рис. 42, можно видеть, что целые нечетные значения этой величины $ka/\pi=1, 3, \dots$ соответствуют максимальной «резонансности» пластины, четные целые значения $ka/\pi=2, 4, \dots$ соответствуют минимальной «резонансности» пластины.

Резонансные максимумы: $ka=\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, 9\pi, \dots \approx 4, 10, 16, 22, 28, \dots$

Резонансные минимумы: $ka=2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi, \dots \approx 6, 8, 12, 14, 18, 19, 25, 30, \dots$

Расстояния как между пиками, так и между впадинами соответствуют соотношению $\Delta ka=2\pi$, где a – характерный размер. Отсюда следует $\Delta a=2\pi/k=\lambda$, или $a=2\pi/(\Delta k)=\Delta\lambda$.

По той же методике было обработано решение для плоского углового сектора (Приложение 4). В задаче дифракции на плоском угловом секторе было исследовано соотношение между значениями модуля рассеянного поля при возбуждении двумя ортогональными поляризациями. Строгие результаты, полученные из работы [16] при помощи ручной оцифровки, сравнивались с эвристическими формулами для случаев отсутствия и наличия модификации (167). Результаты расчета показаны на рис. 44.

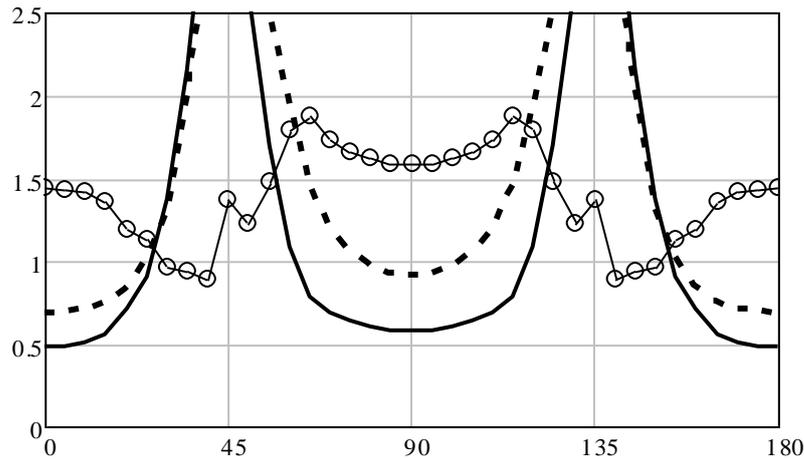


Рис. 44

Кривые для модуля численного решения при разных поляризациях падающего поля, ручная оцифровка. По горизонтальной оси отложены значения φ , по вертикали – модули поляризаций. Кривая с кружками – модуль отношения поляризаций.

На рис. 44 сплошной и штриховой линиями показаны зависимости $amplred(\varphi)$ и $amplblue(\varphi)$, аналогичные таким же зависимостям для плоского многоугольника (квадрата) и пересчитанные по той же методике (357) – (360). Кружками показана зависимость $1*(amplblue(\varphi)/amplred(\varphi))$.

Сравнение частных от деления для эвристических решений показано на рис. 45.

На рис. 45 (а), (б) показаны нескорректированное эвристическое решение в приближении МЭКТ (а) и скорректированное эвристическое решение в приближении ММЭКТ (б). Черные сплошная и штриховая кривая соответствуют мощности диаграммы рассеяния поля, у которого вектор E падающей волны лежит в плоскости падения или перпендикулярен ей. Серыми кривыми показаны отношения между поляризациями. Очень важно, что в эвристическом решении соотношение между поляризациями для плоского сектора – такое же, как у многоугольника. Это означает правильность выбранной нами стратегии исследования поля, рассеянного многоугольником.

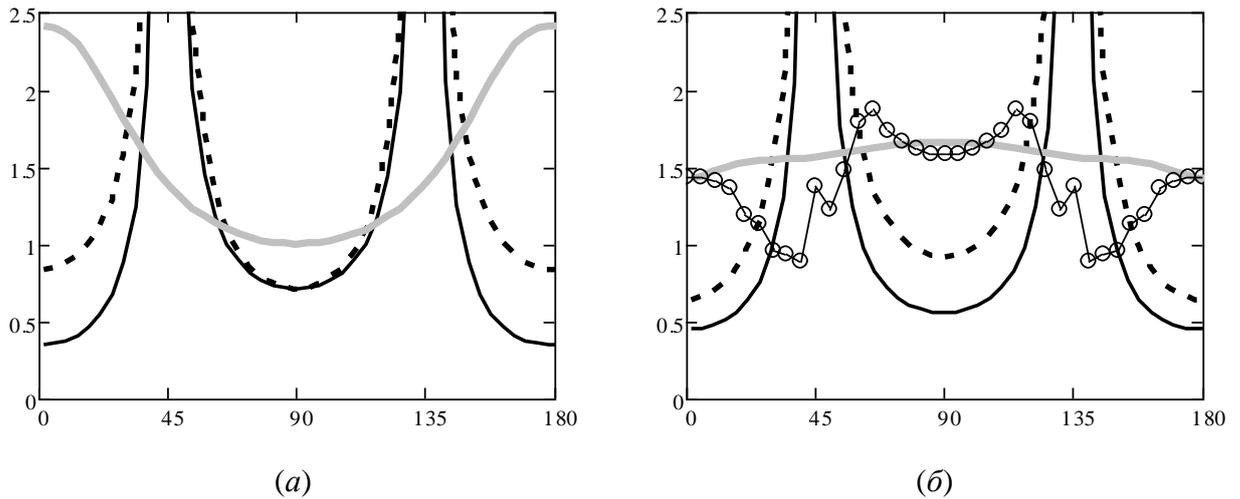


Рис. 45 (а) и (б).

Сравнение результатов строгого и эвристического расчета для идеально проводящего плоского углового сектора. По горизонтальной оси отложены значения φ , по вертикальной – модуль диаграммы рассеяния. На графиках:

(а) - нескорректированные значения МЭКТ;

(б) - скорректированные значения ММЭКТ (серая кривая отношения поляризаций эвристического решения имеет отличия от кривой отношения поляризаций строгого решения (кружки) в окрестности сингулярностей).

С учетом ошибок ручной оцифровки, сравнивая кривые отношений между поляризациями, можно утверждать, что применение модифицирующего множителя действительно улучшило соотношение между поляризациями (см. рис. 44), делая его более похожим на соотношение в оцифрованном решении. Это утверждение следует из того, что на рис. 45 модифицированная кривая (серая) примерно соответствует усредненному строгому решению (кружки).

Рассмотрим теперь решение ФО в плоскости ϑ (см. рис. 39). Сравнение эвристического решения ФО и численного решения показано на рис. 46.

На рис. 46 на левых рисунках показано численное решение, на правых – эвристическое решение в приближении ФО, рассчитанное при помощи формул (107) – (110), (146), (164): $0.761 \cdot \text{amplred}(\vartheta)$ (сплошная черная кривая), $0.761 \cdot \text{amplblue}(\vartheta)$ (черная штриховая кривая) и отношение между этими поляризациями, взятое с постоянным коэффициентом $\text{coeff} : \text{coeff} \cdot \text{amplred}(\vartheta) / \text{amplblue}(\vartheta)$ (серая кривая). Значения длины стороны ka и коэффициента coeff показаны на рисунках. Для упрощения представления решения на графиках мы отсчитываем угол ϑ от -180° до 180° от положительного направления оси z в плоскости XOZ , а не так, как это обычно принято в сферической системе координат. Заметим, что амплитуды поляризаций эвристического решения принимают одинаковое значение в направлениях «зеркальное» и «прямо вперед ($\vartheta = \pm 135^\circ$)» и в направлении «прямо назад» ($\vartheta = 45^\circ$). Численное решение обладает тем же свойством при $ka > 12$. Начиная с этого размера, можно условно считать квадрат «электрически большим». Такие же выводы можно сделать, анализируя кривые отношения поляризаций в плоскости φ (см. рис. 41). Из анализа этих графиков следует, что амплитуды поляризаций равны при $\varphi = 45^\circ$, $\varphi = 135^\circ$.

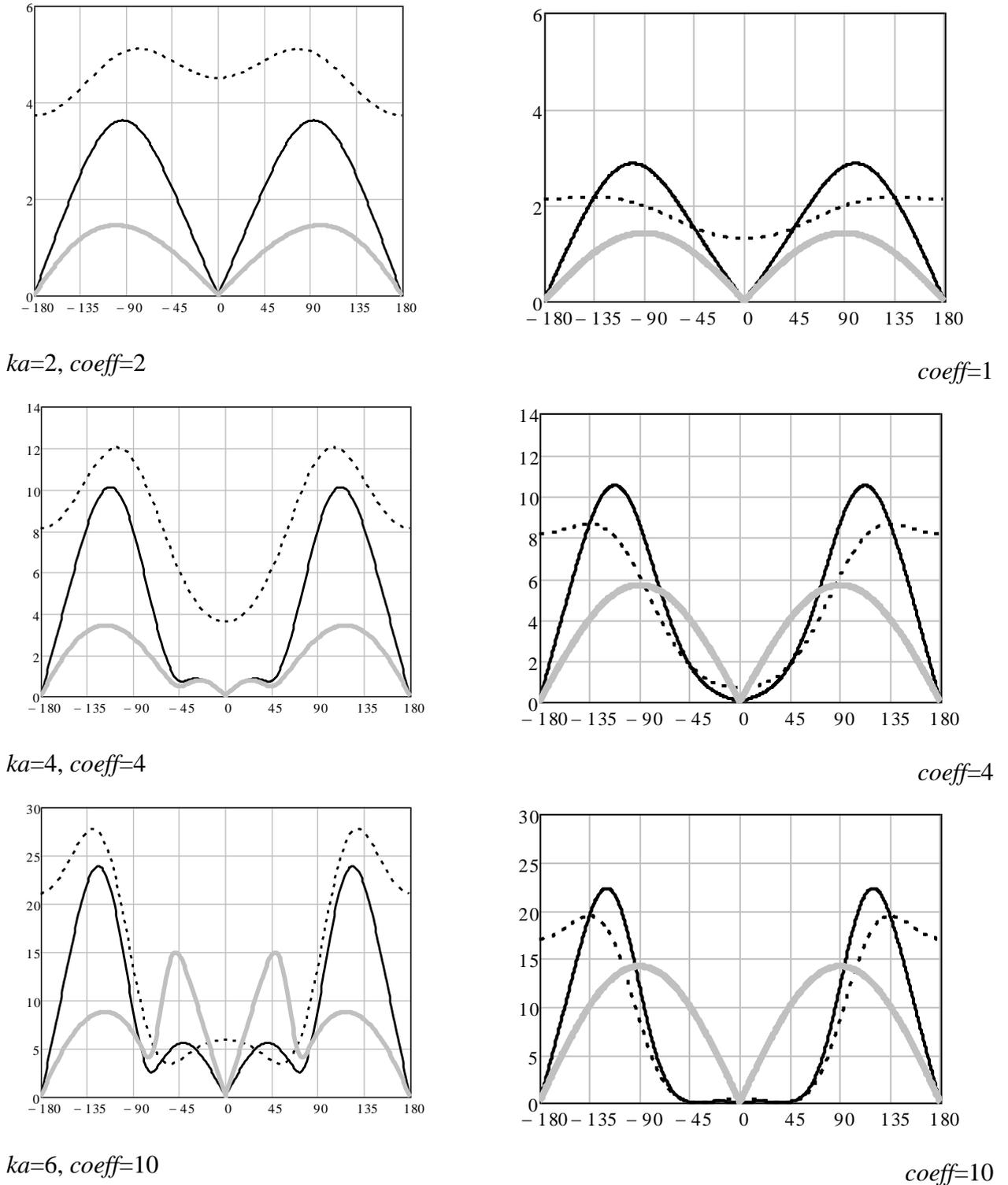


Рис. 46 (а)

Сравнение результатов численного расчета и приближения ФО.

Диаграммы рассеяния для $ka=2, 4, 6$. По горизонтали отложен угол ϑ , по вертикали – амплитуда поля. Сплошной черной кривой показана ДР для падающего поля, вектор E которого расположен в плоскости падения, пунктирной – перпендикулярен. Серой кривой показано значение отношения между этими поляризациями с множителем, обозначенным «*coeff*». На левых графиках – строгое решение, на правых – эвристические решения ФО.

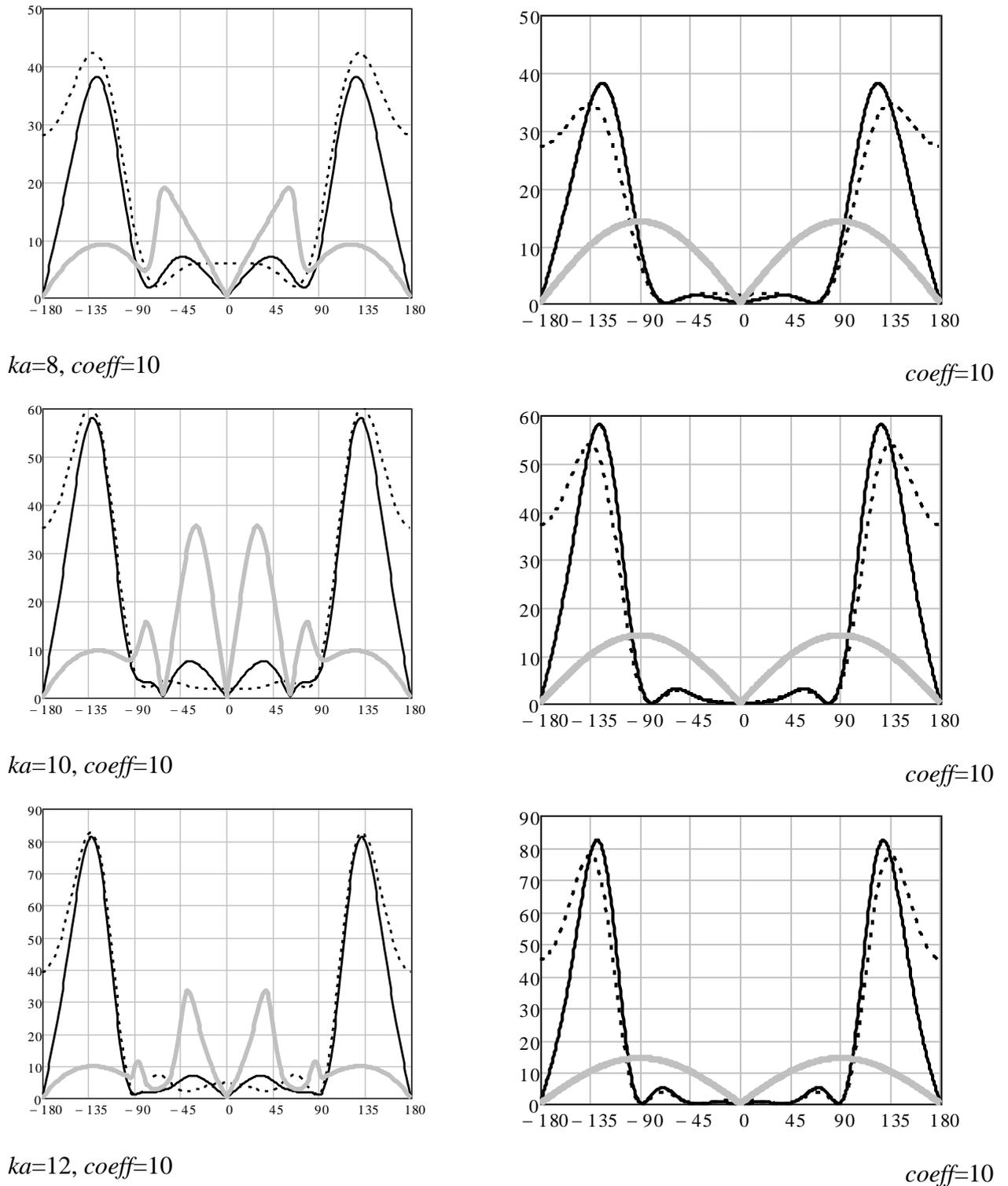


Рис. 46 (б)

Сравнение результатов численного расчета и приближения ФО.

Диаграммы рассеяния для $ka = 8, 10, 12$. По горизонтали отложен угол ϑ , по вертикали – амплитуда поля. Сплошной черной кривой показана ДР для падающего поля, вектор E которого расположен в плоскости падения, пунктирной – перпендикулярен. Серой кривой показано значение отношения между этими поляризациями с множителем, обозначенным « coeff ». На левых графиках – строгое решение, на правых – эвристические решения ФО.

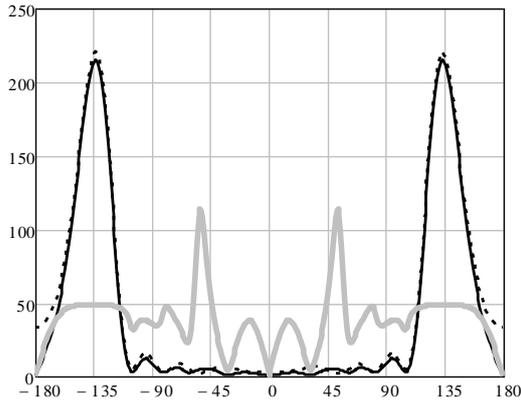
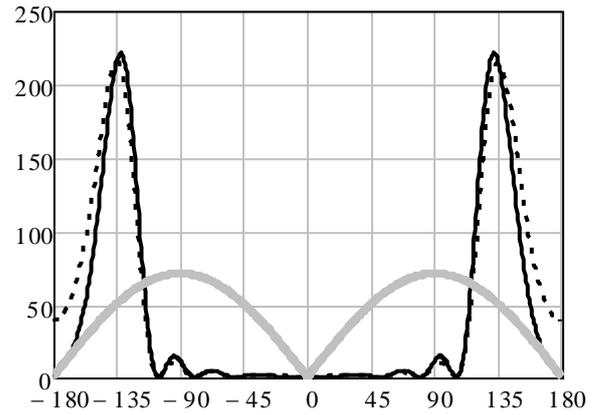
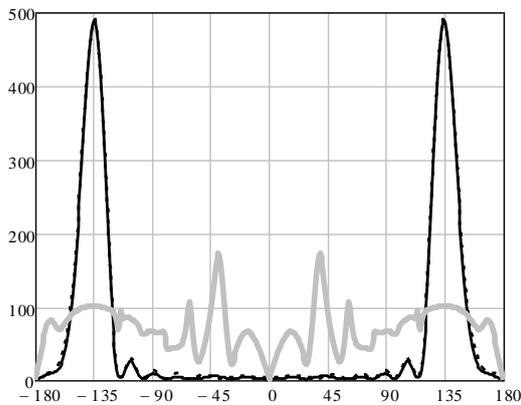
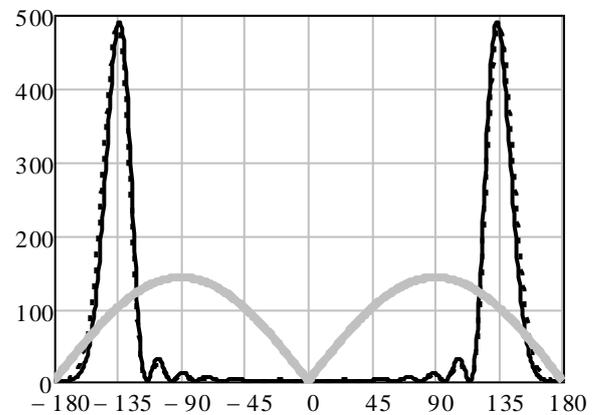
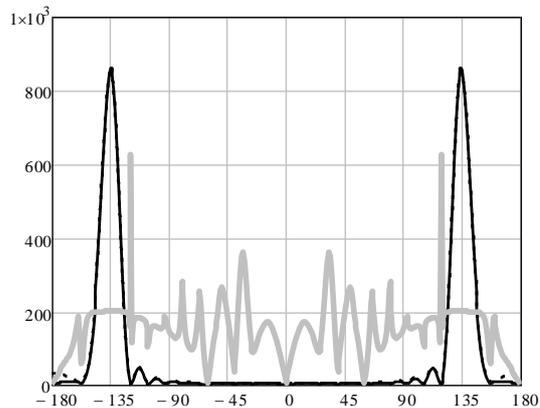
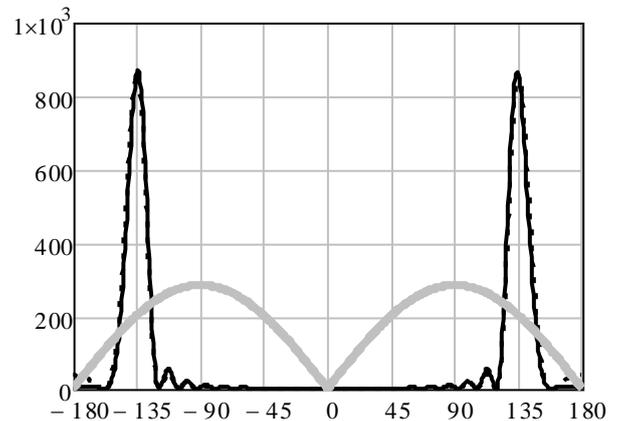
 $ka=20, \text{coeff}=50$  $\text{coeff}=50$  $ka=30, \text{coeff}=100$  $\text{coeff}=100$  $ka=40, \text{coeff}=200$  $\text{coeff}=200$

Рис. 46 (в)

Сравнение результатов численного расчета и приближения ФО.

Диаграммы рассеяния для $ka = 20, 30, 40$. По горизонтали отложен угол ϑ , по вертикали – амплитуда поля. Сплошной черной кривой показана ДР для падающего поля, вектор E которого расположен в плоскости падения, пунктирной – перпендикулярен. Серой кривой показано значение отношения между этими поляризациями с множителем, обозначенным « coeff ». На левых графиках – строгое решение, на правых – эвристические решения ФО.

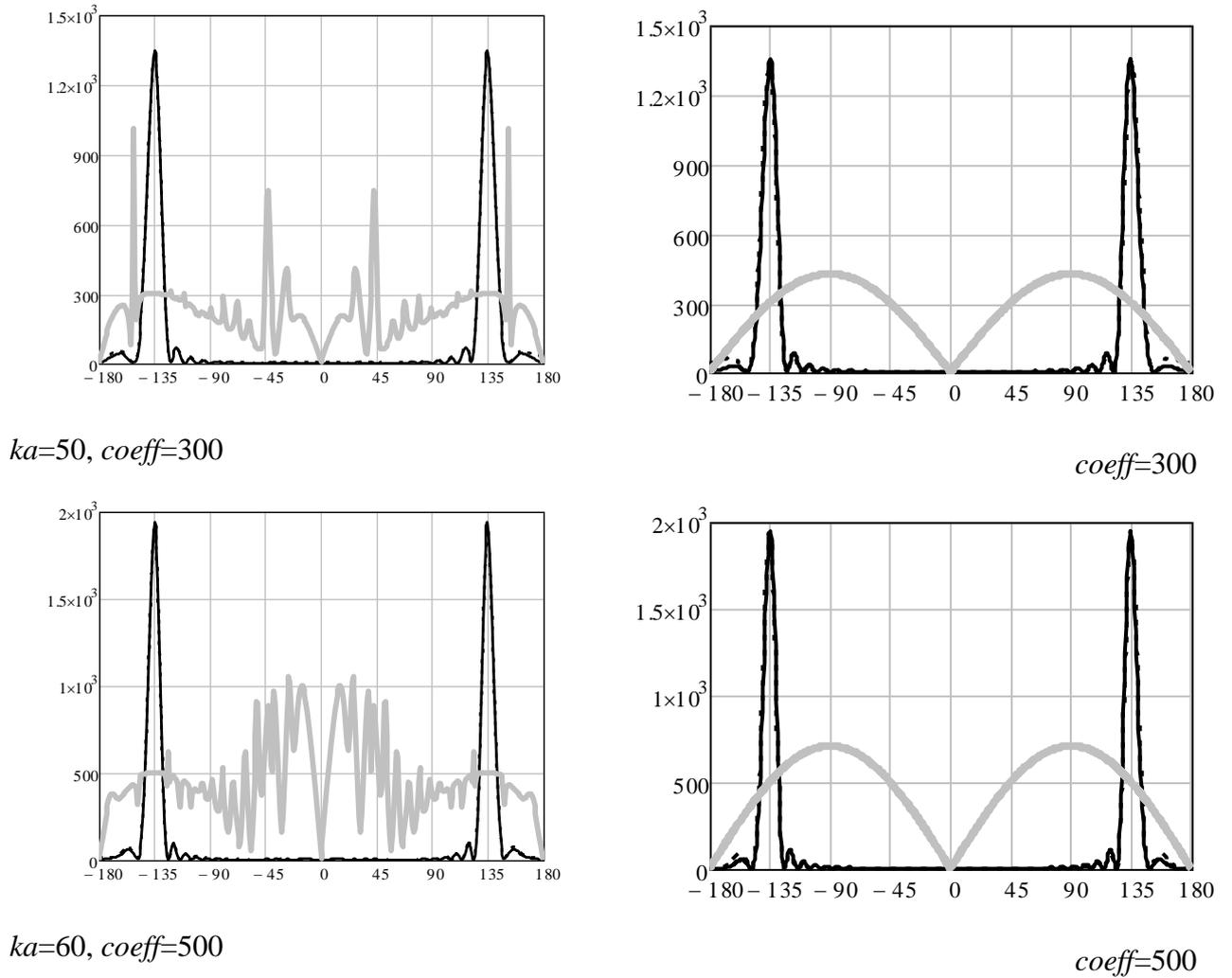


Рис. 46 (г)

Сравнение результатов численного расчета и приближения ФО.

Диаграммы рассеяния для $ka = 50, 60$. По горизонтали отложен угол ϑ , по вертикали – амплитуда поля. Сплошной черной кривой показана ДР для падающего поля, вектор E которого расположен в плоскости падения, пунктирной – перпендикулярен. Серой кривой показано значение отношения между этими поляризациями с множителем, обозначенным « coeff ». На левых графиках – строгое решение, на правых – эвристические решения ФО.

Равенство поляризаций как для численных, так и для эвристических решений характеризует отсутствие дополнительного влияния вершин в указанных направлениях, соответствующих постоянному значению фазы (243) на кромке или на плоскости рассеивателя.

Осцилляции кривых отношения поляризаций численного решения в направлении задней полусферы рассеяния можно объяснить возмущением диаграммы рассеяния вершинными волнами. Они изменяют амплитуду на низких уровнях сигнала. Для подробного изучения этого эффекта нужно иметь численное решение эталонной задачи дифракции на плоском угловом секторе.

Выводы.

В данном разделе рассмотрены эвристические решения задачи дифракции на идеально проводящем квадрате с разными величинами длины стороны ka в приближениях МЭКТ, МЭКТ-ФО и ФО. Эти решения сравнивали со строгим численным решением.

Отличие подхода ФО заключается в том, что в нем не учитывают взаимное положение кромки и направляющего вектора падающей волны. Подходы МЭКТ и МЭКТ-ФО учитывают взаимное положение кромки и падающей волны, поскольку основаны на двумерных решениях, рассматривающих нормальное и наклонное падение волны на кромку. Подход МЭКТ учитывает возмущение поля вблизи кромки, а подход МЭКТ-ФО – нет.

Комбинирование решений, построенных в рамках этих подходов, дает возможность строить большое разнообразие эвристических формул. Сравнение разнообразных эвристических формул со строгим решением дает возможность понять, какое именно явление определяет характеристики процесса дифракции.

Отношение между поляризациями может быть правильно описано при помощи ФО, но лишь в направлении «прямо вперед». В направлении «прямо назад» лучше работает МКВ и одна из его модификаций – МЭКТ.

В рассмотренных нами частных случаях численное решение показывает равенство поляризаций на дифракционных конусах. Пока что нет оснований утверждать, что это будет выполняться для всех геометрий задачи. Тем не менее, в данном случае значение отношения поляризаций представляет собой важный инвариант, который очень полезно проверять при построении эвристических решений.

Как стало ясно из исследования процесса дифракции на плоском угловом секторе, учет влияния возмущения поля, продольного по отношению к кромке, дает в диаграмму рассеяния поля вклад того же порядка малости, что и остальные компоненты. Поэтому с научной точки зрения продольную дифракцию нужно обязательно описать и учитывать при построении эвристических решений. Однако с практической точки зрения применение модифицирующих коэффициентов имеет смысл тогда, когда необходима «тонкая настройка» решения. Изменение формы и положения рассеивателя, а также его резонансы оказывают более грубое влияние на рассеянный сигнал.

Исследуя отраженный сигнал в зоне резонансов, можно сделать выводы о характерных размерах рассеивателя. Резонансный характер рассеяния можно попробовать применить для обнаружения радиолокационных целей. Существование резонансов волн, огибающих поверхность, известно и изучалось (в том числе при помощи ГТД и UTD) на 2D структурах и дисках в работах [126 – 130]. Резонансное рассеяние упругих волн изучалось в [131]. Применение резонансов для радиолокационного обнаружения изучалось в [132– 135].

Мы показали существование резонансной области у плоского многоугольника. Качественное описание может быть осуществлено при помощи ФО, МЭКТ и ММЭКТ. Если требуется количественное описание, следует проводить более детальный анализ, или найти способ обойти эту проблему при решении практической задачи.

При повороте рассеивателя может получаться еще и несимметрия диаграммы рассеяния относительно точки $\varphi=\pi$. Построение аналитического решения для любой задачи дифракции является проблемой, трудоемкость которой зависит от заданной точности. Для целей некоторых практических задач точность приближения ФО или МЭКТ вполне достаточна.

Для других задач нужно применять уточнения. Иногда предпочтительнее применять численные решения, все зависит от целей практической задачи.

Резонансные свойства плоского рассеивателя имеют гораздо большее влияние на ДН, чем применение модифицирующего множителя с целью учета продольного возмущения поля. Для очень маленьких рассеивателей форма и пространственная ориентация не оказывают влияния на ДН. Расчеты для идеально проводящих рассеивателей сравнительно небольшого размера не позволяют установить, существует ли верхняя граница проявлений резонансных свойств, и если существует, то какое именно значение ka ей соответствует. Разумно предположить, что граничные условия на поверхности рассеивателя влияют на величину резонансов и положение границы проявления резонансных свойств.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной диссертации предложен ряд подходов, позволяющих получить новые эвристические решения в теории дифракции электромагнитных волн и других типов волн. Диссертация основана на физическом (в отличие от строгого математического) подходе к теории дифракции. Эвристические решения, основанные на физических подходах, менее строгие, но более просты и понятны.

Эвристические решения нуждаются в верификации, т.е. проверке при помощи более строгих решений. В отличие от инженерных формул, которые представляют собой лишь более простую запись строгого решения и пригодны только для одного верификационного решения, эвристические решения можно построить даже для тех задач, для которых верификационные решения пока отсутствуют. Конечно, нужно четко осознавать, что в таком подходе есть доля риска, поскольку точность эвристического решения может гарантировать только верификация.

Метод обобщенного эйконала (Глава 1) позволяет получать новые двумерные решения на кромках, в том числе – на кромках с размерным параметром. МОЭ основан на интегральном представлении решения, представляющем собой обобщение интегрального представления Зоммерфельда для решения задачи дифракции на клине.

На основе МОЭ построены интегральные представления решения задачи дифракции на полупластине и усеченном клине (Глава 2). Из этих решений выделены функции (речь идет о функциях pN (106) для клина и аналогичных функциях для рассеивателей другой формы), позволяющие уточнять известные решения задач дифракции на двумерных рассеивателях другой формы (например, состоящие из нескольких полуплоскостей), у которых вершины расположены в тех же точках.

Разработан ряд новых подходов к применению двумерных решений теории дифракции при решении трехмерных задач (Глава 3). Предложен способ использования имеющихся решений на прямолинейных отрезках, из которых состоит огибающая двумерного рассеивателя. Такие решения можно напрямую использовать в трехмерных задачах, если подставить в имеющиеся аналитические выражения найденные из геометрических соображений величины угловых переменных, которые могут принимать в том числе комплексные значения. Исследованы свойства строгого в приближении физической оптики решения на плоском многоугольном рассеивателе (п. 3.2.1, Приложение 1), которое можно использовать при решении трехмерных задач дифракции.

Получено (Глава 4) эвристическое решение задачи дифракции на идеально проводящем плоском угловом секторе. За основу берется решение в приближении ФО, затем оно уточняется до решения в приближении МЭКТ. На последнем этапе решение МЭКТ уточняется до модифицированного МЭКТ (ММЭКТ). Решение ММЭКТ обладает такой же простотой как ФО, но по точности приближается к строгому решению ближе, чем все известные эвристические методы, в том числе – ГТД и ФТД (МКВ). При построении решения МЭКТ было применено решение на условной кромке (МЭКТУК) (п.4.2.2, Приложение 3), позволяющее избежать интегрирования эквивалентных контурных токов вдоль кромки.

Предложен (Глава 5) способ получения эвристических решений для тел с неидеальными граничными условиями, основанный на применении коэффициентов отражения и про-

хождения, характеризующих взаимодействие волны с плоской безграничной поверхностью.

Разработан (Глава 6) новый метод физической теории дифракции – метод базовых компонентов (МБК). Метод предназначен для получения эвристических решений двумерных и трехмерных задач дифракции и по сравнению с известными методами ГТД и МКВ позволяет строить простые по форме, но точные аналитические формулы, которые имеют ясный физический смысл и отличаются повышенной точностью, а также автономностью от вычислителя двумерных решений. В МБК эвристические аналитические формулы строят на основе численного решения. На первом этапе выдвигают гипотезу (одну или несколько) о поведении поля и строят на ее основе эвристические формулы. На втором этапе верифицируют эвристические формулы при помощи численного решения. Та гипотеза, которая дает наилучшее совпадение с верификационным решением, считается наиболее правильной. Этот подход позволяет не только получить аналитические формулы, более простые и поэтому более понятные и быстродействующие, чем формулы строгого аналитического решения, но и сделать это за более короткие сроки. Свойства формул МБК дают новые возможности как для решения практических задач (точность, автономность), так и для исследования процесса дифракции (физичность).

Некоторые подходы, предложенные в данной диссертации, являются строгими с математической точки зрения. Это относится к интегральному представлению в МОЭ (п.1.1) и к способу использования двумерных решений в трехмерных задачах, в котором применяются комплексные углы (п.3.1). Другие (эвристические) подходы, предлагаемые в данной диссертации, в отличие от известных эвристических подходов (ГТД и ФТД) не нуждаются в наличии строгих двумерных решений, а сами прогнозируют поведение строгих решений. Это относится к функциям pN в МОЭ (п.2.2.2), к ММЭКТ (п.4.3) и к методу ОДК (Глава 5).

Скажем несколько слов об общих принципах, лежащих в основе подходов, предложенных в данной диссертации.

При построении новых эвристических подходов мы не ищем новые математически строгие аналитические решения, а находим наиболее рациональные способы использования существующих решений меньшей размерности (более простых) в задачах большей размерности (более сложных) науки и техники. (См. также в Приложении 8 текст между формулами (178) и (179)).

Влияние различных факторов (формы кромки, вершин, граничных условий) сформулировано в виде простых множителей. Предполагается, что добавление их к физическому решению существенно повысит точность решения. Справедливость этого предположения подтверждает верификация, проведенная для отдельных двумерных и трехмерных задач. Список этих задач включает в себя: дифракция на двумерной кромке в виде полупластины или усеченного клина; дифракция на плоском угловом секторе; дифракция на импедансном клине; дифракция упругой волны на плоском многоугольном рассеивателе.

Получение новых решений – важная вещь, но не менее важно уметь их применять для решения научных и технических задач. Можно сказать, что мы улучшаем приближение физической оптики, которое пользуется большой популярностью в связи с описанными выше проблемами строгих аналитических или численных решений: (а) отсутствуют по

разным причинам (нет аналитических формул, проклятие размерности и т.п.); (б) сложные; (в) применение требует наличия программных пакетов и квалифицированных сотрудников, способных работать с этими пакетами; д) могут быть и другие причины, например, быстродействие и т.п..

В других случаях мы строим эвристические формулы для еще нерешенных проблем. Например, при попытке дополнить аналитическое решение на плоском угловом секторе «толщинкой» или неидеальными граничными условиями возникают серьезные проблемы. В эвристических решениях такие проблемы решаются относительно просто. Наш подход позволяет строить решение в виде произведения сомножителей, каждый из которых имеет физический смысл, т.е формулы позволяют осуществить разделение переменных. Это говорит о физичности нашего решения.

В диссертации описаны разнообразные методы построения эвристических формул, и каждый из них проверен на каком-либо отдельном частном случае. С целью тщательной отладки эвристических формул, требуемых для решения практической задачи с заданной точностью, необходимо иметь специализированный программный пакет для получения численного решения с возможностью влиять на численную постановку задачи и вводить в ее среду эвристических формул. По сравнению с другими программами по получению численного решения специализированный программный пакет должен иметь расширенные возможности по изучению характеристик процесса дифракции, важных для получения эвристических решений. В частности, специализированный пакет должен иметь возможность получать решения, соответствующие эвристическим подходам (например, ФО), а также рассчитывать эталонные решения на бесконечных и полубесконечных структурах.

Не очень внимательному читателю данной диссертации может показаться, что автор призывает отказаться от строгих решений в пользу эвристических. Это отнюдь не так. Строгие аналитические решения следует изучать, получать и применять везде, где это возможно. Но если существует возможность преодолеть какие-то трудности при помощи эвристических решений, то от такого средства решения задачи отказываться тоже не следует.

Представляется перспективным развивать методы, предложенные в данной диссертации, в направлении получения решений, учитывающих влияние вершин [16, 165], граничных условий [73, 74, 136, 172, 173] и уточнения известных решений, полученных при помощи метода физической оптики [124 – 125, 174]. При получении эвристических формул можно применять как аналитические, так и численные решения [137 – 140].

Таким образом, в рамках диссертационной работы получены следующие новые научные результаты.

1. Разработан метод обобщенного эйконала (МОЭ) – новый метод аналитического решения задач дифракции на двумерном полубесконечном рассеивателе с идеально проводящей линейно ломаной границей. Решение для рассеянного поля ищется на замкнутой плоской кривой, которая строится при помощи теории конформных отображений. Форма кривой определяется формой рассеивателя.

2. Получено в общем интегральное представление аналитического решения двумерной задачи дифракции цилиндрической и плоской волн для класса рассеивателей, который включает в себя полубесконечные рассеиватели с идеально проводящей линейно ломаной границей (в том числе – рассеиватели, имеющие размерный параметр).

Интегральное представление решения для рассеянного поля получено в виде суммы интегралов по отрезкам замкнутого контура в плоскости комплексной переменной. Подынтегральная функция представляет собой функцию поля возбуждения в обобщенном виде, которая получается путем введения дополнительной радиальной переменной в первичную функцию поля возбуждения. Обобщенная функция поля возбуждения удовлетворяет волновому уравнению Гельмгольца в первичной двумерной области (при фиксации вспомогательной радиальной переменной) и является аналитической во вспомогательной области (при фиксации первичной радиальной переменной). При помощи метода перевала выражения для строгого интегрального представления получены в общем виде приближенные выражения, справедливые во всем диапазоне углов, в том числе - вблизи границы «свет - тень». Для случая дифракции плоской волны на клине эти выражения совпадают с известными. Показано, что для полубесконечного рассеивателя клиновидной формы (в том числе - для бесконечно тонкой полуплоскости) новое интегральное представление совпадает с известным.

3. Получены при помощи МОЭ новые эвристические аналитические решения задач дифракции плоской электромагнитной волны на полупластине и усеченном клине, справедливые при стремлении к нулю размерного параметра (т.е. при малых размерах торца полупластины и торца усеченного клина). Те же решения получены при помощи метода последовательных дифракций. Сравнение решений, полученных разными эвристическими методами, показало хорошее совпадение результатов как на выделенной замкнутой кривой вблизи рассеивателя, так и в дальней зоне.

4. Рассмотрены принципы применения при решении трехмерных задач двумерных решений для нормального и наклонного падения на полубесконечную кромку. Предложен способ применения в трехмерных задачах дифракции имеющихся двумерных аналитических решений для интегралов по элементарным полоскам при помощи подстановки специальных угловых параметров – «комплексных углов». Преимущество такого подхода состоит в том, что при использовании уже имеющихся решений не требуется заново проводить интегрирование по элементарным полоскам.

5. Введено понятие «условной кромки», позволяющей применять двумерные решения при построении аналитических решений трехмерных дифракционных задач без непосредственного интегрирования по элементарным полоскам. Точность получающихся при этом результатов соответствует точности метода эквивалентных контурных токов.

6. Разработан способ повышения точности решений задач дифракции на многогранниках при помощи метода эквивалентных контурных токов и корректирующих коэффициентов,

связанных со строгими и физоптическими дифракционными решениями двумерной задачи дифракции для случая нормального падения на кромку.

7. Путем модификации решения МЭКТ при помощи корректирующих амплитудных коэффициентов разработан подход к получению уточненного аналитического эвристического решения для дифракции на плоском угловом секторе (решение ММЭКТ). Эффективность предложенного подхода продемонстрирована при помощи сравнения уточненного решения со строгим решением, взятым из имеющихся в литературе данных.

8. На основе объединения элементов теории дифракции, теории распространения волн и теории антенн построена детерминированная теория распространения радиоволн в условиях городской застройки. Этот подход позволяет при решении сложных задач дифракции на объектах большого размера сократить объем вычислений с одновременным увеличением точности расчетов.

9. На основе дифракционного коэффициента в приближении ФО и обобщенного дифракционного коэффициента (ОДК) получена функция полупрозрачности, позволяющая строить эвристические решения задач дифракции волновых полей произвольной физической природы на рассеивателях с неидеальными граничными условиями. Формулы дифракционных коэффициентов так же просты, как формулы приближения физической оптики, причем не требуют решения двумерных задач, а используют лишь «одномерные» решения для значений коэффициентов отражения и прохождения при взаимодействии волны с безграничной плоской поверхностью.

10. Разработан метод базовых компонентов (МБК), позволяющий получать эвристические решения двумерных и трехмерных задач дифракции. По сравнению с известными эвристическими методами ГТД и МКВ новый метод имеет ряд преимуществ, к которым относятся повышенная точность, универсальность, автономность и физичность.

11. Разработан способ получения эвристического решения задачи дифракции упругой волны, основанный на новых методах теории дифракции, предложенных в данной диссертации: МОЭ, ММЭКТ, ОДК. Для получения решения во временной области дифракционные коэффициенты, полученные в частотной области, были преобразованы при помощи преобразований Фурье. Сравнение с численным решением показало эффективность предложенных подходов.

Литература

- [1] Уфимцев П.Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. М.: Сов. радио, 1962. - 243с.
- [2] В.А. Боровиков Дифракция на многоугольниках и многогранниках М.: Наука, 1966. - 455с.
- [3] Н. Hönl, A.W. Maue, K. Westpfahl, в кн. “Handbuch der Physik”, Springer, Berlin, 1961, Vol. 25/1. (См. перевод Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль Теория дифракции. М.: Мир, 1964. - 428с.)
- [4] Sommerfeld A. // Math. Ann., 45, 263 (1894)
- [5] Sommerfeld A. // Math. Ann., 47, 317 (1896)
- [6] Frank Ph., Mises R., Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Braunschweig, 1927 – 1934. (См. перевод: Ф. Франк, Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, М. – Л., 1937.)
- [7] Sommerfeld A., Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. IV, Wiesbaden, 1950 (См. перевод: А. Зоммерфельд, Оптика, ИЛ, 1953)
- [8] Carslaw H.S. // Proc. Lond. Math. Soc. 30, 121 (1899)
- [9] Macdonald H.M. // Electric Waves, Cambr. Univ. Press, 1902
- [10] Macdonald H.M. // Proc. Lond. Math. Soc. 14, 410 (1915)
- [11] Carslaw H.S. // Proc. Lond. Math. Soc. 18, 291 (1919)
- [12] Pauli W. // Physical Review. 1938. V. 54. No. 11. P. 924.
- [13] Noble B. Methods based on the Wiener – Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations, London, 1958 (См. перевод: Б. Нобл, Метод Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных, ИЛ, 1962).
- [14] R. Mitra and S.W. Lee Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves, New York, London, 1971 (См. перевод: Р. Миттра, С. Ли Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. – 327с.)
- [15] Гринберг Г.А., Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.: Изд-во АН СССР, 1948
- [16] Ludger Klinkenbusch “Electromagnetic Scattering by a Quarter Plane”, Proceedings of the 2005 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, 3-8 July 2005, vol. 3B, pp. 163 – 166
- [17] В. П. Смышляев, Дифракция плоских волн на конических препятствиях, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1988, том 173, 142–154
- [18] Shanin A. V. Modified Smyshlyaev’s formulae for the problem of diffraction of a plane wave by an ideal quarter-plane // Wave motion. 2005. Vol. 41. Pp. 79–93.
- [19] T. B. Hansen, Corner diffraction coefficients for the quarter plane, IEEE Transactions on Antennas and Propagation Vol. 39, Issue: 7, July 1991, pp. 976 – 984 DOI: 10.1109/8.86918
- [20] V.P. Smyshlyaev, High-frequency asymptotics of wave field diffracted by plane angular sector. I, Radiophys. Quantum. Electron. (1991) 34: p. 906. doi:10.1007/BF01083623
- [21] Lyalinov M. A. Electromagnetic scattering by a plane angular sector: I. Diffraction coefficients of the spherical wave from the vertex //Wave Motion. – 2015. – №. 55. – С. 10-34.

- [22] Kraus, L., Diffraction by a plane angular sector, Ph.D. dissertation, New York University, New York, 1955
- [23] Satterwite, R.S., Diffraction by a plane angular sector, Ph.D. dissertation, The Ohio State University, Columbus (OH), 1969
- [24] K.C. Hill, A UTD solution to the EM scattering by the vertex of a perfectly conducting plane angular sector, Ph.D. dissertation, The Ohio State University, Columbus (OH), 1990
- [25] В.А. Тищенко, Р.Х. Хестанов «Дифракция поля с границей свет – тень на полуплоскости», Доклады Академии наук СССР, том 212, №4, 1973, стр. 842 – 845
- [26] L. P. Ivrisimtzis and R. J. Marhefka, “A Note on Double Edge Diffraction for Parallel Wedges”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 39, No. 10, pp. 1532-1537, Oct. 1991.
- [27] L. P. Ivrisimtzis and R. J. Marhefka, “Double diffraction at a coplanar skewed edge configuration,” Radio Science, vol. 26, 1991.
- [28] M. Albani, “A Uniform Double Diffraction Coefficient for a Pair of Wedges in Arbitrary Configuration”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 53, No. 2, pp. 702-710, Feb. 2005.
- [29] D. S. Jones, “Diffraction by a Thick Semi-Infinite Plate”, Proc. R. Soc. Lond. A, vol. 217, pp. 153-175, 1953
- [30] R. Tiberio, G. Manara, G. Pelosi, and R. G. Kouyoumjian, “High-frequency electromagnetic scattering of plane waves from double wedges,” IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 37(9), 1172–1180.
- [31] M. Albani, F. Capolino, S. Maci, and R. Tiberio, “Double diffraction coefficients for source and observation at finite distance for a pair of wedges,” presented at IEEE AP-S Symp., Newport Beach, CA, June 1995.
- [32] F. Capolino, M. Albani, S. Maci, and R. Tiberio, "Double Diffraction at a Pair of Coplanar Skew Edges," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 45, N.8, pp. 1219-1226, Aug. 1997.
- [33] M. Albani, F. Capolino, S. Maci, and R. Tiberio, “Diffraction at a Thick Screen Including Corrugations on the Top Face”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 45, No. 2, pp. 277-283, Feb. 1997.
- [34] Кравченко В. Ф. Электродинамика сверхпроводящих структур. Теория, алгоритмы и методы вычислений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 280 с. - ISBN 5-9221-0704-6.
- [35] В.И. Кравченко, М.А. Басараб, Булева алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики. М. Издательство Физико-математической литературы, 2004. 308 с. - ISBN 5-94052-079-0.
- [36] А. Г. Кюркчан, Н. И. Смирнова, Математическое моделирование в теории дифракции с использованием априорной информации об аналитических свойствах решения, ИД Медиа Паблицер, 2014, 225 с., ISBN: 978-5-903650-27-9
- [37] Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач. М.: Наука, 1972
- [38] Бабич В.М., Лялинов М.А., Грикуров В.Э. Метод Зоммерфельда-Малюжинца в теории дифракции. Изд. СПбГУ, 2003

- [40] А.С. Крюковский, *Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых катастроф: монография.* – М.: РосНОУ, 2013. – 368 с.
- [41] Ю.А. Кравцов, Ю.И. Орлов *Геометрическая оптика неоднородных сред*, М., Наука, 1980
- [42] Л.А. Вайнштейн *Электромагнитные волны*. М.: Радио и связь, 1988. – 440с. (учебник)
- [43] W.B.Gordon, "Far field approximations to the Kirchhoff-Helmholtz representations of scattered fields", *IEEE Trans. A&P*, vol. AP-23, pp. 590-592, 1975
- [44] G. Kubické, C. Bourlier, M. Delahaye, C. Corbel, N. Pinel and P. Pouliguen, "Bridging the gap between the Babinet principle and the physical optics approximation: Vectorial problem", *Radio Science*, Vol. 48, 573–581, doi:10.1002/rds.20059, 2013
- [45] Keller J.B. // *J. Appl. Phys.*, 1957, v.28, No.4, p. 426-424
- [46] Keller J.B. // *J. Appl. Phys.*, 1957, v.28, No.5, p. 570-579
- [47] Keller J.B. // *Symposium of Applied Mathematik*, v.8, 1958, N-Y., McGraw-Hill, p. 27-52
- [48] Joseph B. Keller, "Geometrical Theory of Diffraction", *Journal of the Optical Society of America*, vol. 52, No. 2, February 1962, pp. 116 – 130
- [49] G.L. James, *Geometrical Theory of Diffraction for Electromagnetic Waves*. England: Peter Peregrinus Ltd., 1976, pp. 8-250
- [50] В.А. Боровиков, Б.Е. Кинбер *Геометрическая теория дифракции*. М.: Связь, 1978. - 248с.
- [51] П.Я. Уфимцев, *Теория дифракционных краевых волн в электродинамике. Введение в физическую теорию дифракции; пер. с англ – 2-е изд., испр. и доп.* – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. – 372с.
- [52] П.Я. Уфимцев *Основы физической теории дифракции*, М. БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009
- [53] K.M.Mitzner, "Incremental Length Diffraction Coefficients", *Tech. Rep. AFAL-TR-73-296*, Northrop Corp., Aircr. Div., Apr. 1974
- [54] A.Michaeli, "Equivalent Edge Currents for Arbitrary Aspects of Observation", *IEEE Trans. A&P*, vol.AP-32, pp.252-258, Mar. 1984
- [55] A.Michaeli, "Elimination of Infinites in Equivalent Edge Currents, Part II: Physical Optics Components", *IEEE Trans. A&P*, vol.AP-34, pp.1034-1037, Aug. 1986
- [56] R.A.Shore and A.D.Yaghjian, "Incremental Diffraction Coefficients for Planar Surfaces", *IEEE Trans. A&P*, vol.AP-36, No.1, pp.55-70, Jan. 1988
- [57] М. Борн, Э. Вольф *Основы оптики*. М.: Наука, 1973. - 720с.
- [58] Mikhail A. Lyalinov and Ning Yan Zhu, «Scattering of waves by wedges and cones with impedance boundary conditions», *ISMB Series*, SciTech Publishing Inc. Raleigh, NC, 2012
- [59] Yury A. Kravtsov, Ning Yan Zhu "Theory of Diffraction: Heuristic Approaches" *Alpha Science International Ltd.Oxford, U.K.*, 2010
- [60] R. Borghi, "Summing Pauli asymptotic series to solve the wedge problem", *Journal of the Optical Society of America*, series A, vol.25, No.1, January 2008, pp. 211 - 218
- [61] Л. Фелсен, Н. Маркувиц "Излучение и рассеяние волн". М.: Мир, 1978. Т.1 - 547с.
- [62] Р.Б. Ваганов, Б.З. Каценеленбаум *Основы теории дифракции*. М.: Наука, 1982. - 272с.
- [63] Р. Куюмджан, П. Патхак "Равномерная геометрическая теория дифракции на идеально проводящей поверхности с ребром", *ТИИЭР*, 1974, т.62, № 11, с.40 – 55

- [64] Журав С.М., Калошин В.А. "Дифракция плоской электромагнитной волны на идеально проводящей полубесконечной пластине (E - поляризация)", РЭ, 1987, т.32, № 1, с.1.
- [65] W. Braunbek, G. Laukien, 'Features of refraction by a semi-plane', *Optik* 9 (1952), p.174
- [66] P. C. Clemmow and T. V. A. Senior, "A note on the generalized Fresnel integral," in *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 49, 1953.
- [67] Нотт Е.Ф., Сеньор Т.Б. Сравнение трех методов, применяемых в высокочастотной теории дифракции. ТИИЭР, т. 62, №11, 1974, с. 63-71.
- [68] П.Я. Уфимцев, Дифракция электромагнитных волн на черных телах и на полупрозрачных пластинах, Известия высших учебных заведений, Радиофизика, т.11, №6, 1968, с.912-931.
- [69] Буторин Д. И., Мартынов Н. А., Уфимцев П. Я., Асимптотические выражения для элементарной краевой волны. Радиотехника и электроника, 1987, Т.32, № 9, с. 1818-1828.
- [70] P. Ya. Ufimtsev, "Elementary edge waves and the physical theory of diffraction", *Electromagnetics*, vol. 11, No. 2, pp. 125–160, 1991.
- [71] В.А. Каратыгин, Розов В.А. «Метод стационарной фазы для двойного интеграла с произвольно расположенной стационарной точкой», Журнал вычислительной математики и математической физики, том 12, №6, ноябрь – декабрь 1972, стр. 1391 – 1405
- [72] Alper K. Ozturk, Robert Paknys and Christopher W. Trueman "Vertex Diffracted Edge Waves on a Perfectly Conducting Plane Angular Sector", *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, Vol. 59, No. 3, March 2011, pp. 888 – 897
- [73] Hassan M. El-Sallabi, Ioannis T. Rekanos and Pertti Vainikainen, "A New Heuristic Diffraction Coefficient for Lossy Dielectric Wedges at Normal Incidence", *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, Vol. 1, 2002, pp. 165-168
- [74] Г.Д. Малюжинец, Возбуждение, отражение и излучение поверхностных волн от клина с заданными поверхностными импедансами, ДАН СССР, 3, 1958, сс.752-755
- [75] Albani M., Capolino F., Maci S. Vertex diffraction coefficient for a quarter plane // *URSI Int. Symp. on EM Theory*, Pisa, Italy, May 2004, P. 1146–1148.
- [76] Albani M., Capolino F., Maci S. Diffraction at the vertex of a quarter plane // *Ant. and Prop. Soc. Int. Symp. IEEE*. 20–25 June 2004, P. 1991 – 1994.
- [77] Giuseppe Pelosi, Yahya Rahmat-Samii, and John L. Volakis, High-Frequency Techniques in Diffraction Theory: 50 Years of Achievements in GTD, PTD, and Related Approaches, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 55, No. 3, June 2013, p. 16
- [78] В. А. Фок, Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн, М., 1970
- [79] Г.Т. Марков, А.Ф. Чаплин, Возбуждение электромагнитных волн, М.-Л.: Энергия, 376с.
- [80] В.Б. Левянт, И.Б. Петров, М.В. Муратов, Численное моделирование волновых откликов от системы (кластера) субвертикальных макротрещин, Технологии сейсморазведки, №1, 2012, с. 5 – 21
- [81] В. А. Бирюков, М. В. Муратов, И. Б. Петров, А. В. Санников, А. В. Фаворская, Применение сеточно-характеристического метода на неструктурированных тетраэдральных сетках в решении прямых задач сейсморазведки трещиноватых пластов, Журнал вычислительной математики и математической физики, 2015, 55:10, с. 1762–1772

- [82] J.L. Volakis, "Diffraction by Canonical Metallic and Material Coated Structures: A Review", *IEEE Antennas & Propagat. Magazine*, Vol. 55 (4), pp. 21-31, Aug. 2013
- [83] John L. Volakis, "Diffraction by impedance structures and higher order boundary conditions: A review", *IEEE-APS Topical Conference on Antennas and Propagation in Wireless Communications (APWC)*, 2012, 2-7 Sept. 2012
- [84] J. Shmoys, Diffraction by a Half-Plane with a Special Impedance Variation, *IRE Trans. on Antennas and Propagation* Vol.7, No.5, December 1959, pp.88 – 90
- [85] R. G. Kouyoumjian and P. H. Pathak, "A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface," *Proc. IEEE*, vol. 62, pp. 1448–1461, November 1974
- [86] Н. Н. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, Е. Н. Коршунова, Л. И. Пангонис, М. Л. Переяславец, А. Н. Сивов, А. Д. Шатров. *Электродинамика антенн с полупрозрачными поверхностями: Методы конструктивного синтеза*. Москва, Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989, 176 с.
- [87] Нефедов Е.И. *Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических структурах*. М.: Наука, 1979, - 272 с.
- [88] C. V. Raman, K. S. Krishnan, The Diffraction of Light by Metallic Screens, *Proc. R. Soc. Lond. A* 1927 Vol.116 254-267; DOI: 10.1098/rspa.1927.0135. Published 1 October 1927
- [89] W. D. Burnside and K. W. Burgener, "High frequency scattering by a thin lossless dielectric slab," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-31, pp. 104-110, Jan. 1983
- [90] J. L. Volakis, "A uniform geometrical theory of diffraction for an imperfectly conducting half-plane," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-34, pp. 172-180, 1986
- [91] A. Chakrabarti, "Diffraction by a dielectric half-plane," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-34, pp. 830-833, 1986
- [92] R. J. Luebbers, "Finite conductivity uniform GTD versus knife edge diffraction in prediction of propagation path loss," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-32, pp. 70–76, Jan. 1984
- [93] F. Mioc, A. Toccafondi, and R. Tiberio, "Extended UTD solution for diffraction by dielectric screens," *Proc. of the IEEE 1999 AP-Symposium, Orlando*, 11-16 July 1999
- [94] В.А. Калошин, К.К. Клионовски 2015, Об излучении слабонаправленных осесимметричных антенн с круглыми экранами, *Радиотехника и электроника*, 2015, Т.60, № 10, с.1015-1024
- [95] Ахияров В.В., Калошин В.А., Решение задачи дифракции плоской волны на полубесконечном полупрозрачном экране методом отражений, *Труды III Всероссийской Микроволновой конференции*, 25-27 ноября 2015г., ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, стр. 346-350
- [96] Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров*, М., Наука, 1973. 832с.
- [97] И.С. Градштейн и И.М. Рыжик «Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений», М. Физматгиз, 1963г., 1100 стр. с илл.
- [98] J.B. Andersen, T.S. Rappaport and S. Youshida, "Propagation Measurement and Models for Wireless Communications Channels", *IEEE Communications Magazine*, v.33, No.1, January 1995, pp. 42-49

- [99] T.K. Sarkar, Zhong Ji, Kyungjung Kim, A. Medouri, and M. Salazar-Palma, A Survey of Various Propagation Models for Mobile Communication, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol.45, No.3, June 2003
- [100] H. Son and N. Myung, "A Deterministic Ray Tube Method for Microcellular Wave Propagation Prediction Model", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, V. AP-47, No.8, August 1999, pp. 1344 – 1350.
- [101] Okumura J. et al. Field strength and its variability in VHF and UHF land mobile radio service // *Rev. Inst. Elec. Eng.* –1968.- V.16.-No. 9-10. p.825-873.
- [102] Hata M. Empirical formula for propagation loss in land mobile radio services // *IEEE Trans. Veh. Technol.* –1980. – V.VT-29. No. 3. p.317-325.
- [103] Пономарев Г.А., Куликов А.М., Тельпуховский Е.Д. Распространение УКВ в городе. Томск: МП "Раско", 1991. –222 с.
- [104] Liebenow U. et al. Theoretical and practical investigations of propagation in microcells // *COST 231 T9 (90) 120*, Dec.1990.
- [105] Панченко В.Е., Ерохин Г.А., Гайнутдинов Т.А., Кочержевский В.Г., Шорин О.А. Сочетание статистических и детерминистских методов расчета радиополя в городских условиях // *Электросвязь*. –1998. N 4. с.31-33.
- [106] Лаврентьев Ю.В., Соколов А.В., Федорова Л.В. "Экспериментальные исследования отражения и рассеяния миллиметровых волн от шероховатых поверхностей зданий" *Радиотехника и электроника*, 1990, т.35, № 3, с.650
- [107] Куликов А.Н., Лаврентьев Ю.В., Пономарев Г.А., Сильвинский С.В., Соколов А.В., Тельпуховский Е.Д., Федорова Л.В., Фортес В.Б. "Распространение ультракоротких волн в городах" *Итоги науки и техники, сер. Радиотехника*, 1991, т.42, 196 с.
- [108] Dooren, van, G. A. J. (1994). «A deterministic approach to the modelling of electromagnetic wave propagation in urban environments» Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven DOI: 10.6100/IR412974
- [109] Y. Corre and Y. Lostanlen, "Three-Dimensional Urban EM Wave Propagation Model for Radio Network Planning and Optimization Over Large Areas," in *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 58, no. 7, pp. 3112-3123, Sept. 2009, doi: 10.1109/TVT.2009.2016973
- [110] W. M. Smith, «Urban Propagation Modeling for Wireless Systems», dissertation for the degree of doctor of philosophy, Stanford university, February 2004
- [111] Долуханов М.П. «Распространение радиоволн» М., «Связь», 1972, 336с.
- [112] Басс Ф.Г., Фукс И.М., «Рассеяние волн на статистически неровной поверхности» М., «Наука», 1972, 424с.
- [113] Sheriff, R.E., 2002, *Encyclopedic dictionary of applied geophysics*: Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, OK.
- [114] Schoenberg, M., 1980, Elastic wave behavior across linear slip interfaces: *Journal of Acoustical Society of America*, 68, 1516–1521
- [115] Fang, X., M. Fehler, T. Chen, D. Burns, and Z. Zhu, Sensitivity analysis of fracture scattering: *Geophysics*, 2013, Vol. 78, No. 1; P. T1–T10
- [116] R. Edward English, Jr., "Diffraction theory for polygonal apertures", Technical report, The Institute of Optics, University of Rochester, Rochester, New York, July 1988

- [117] O. Breinbjerg, "Higher-order equivalent edge currents for fringe wave radar scattering by perfectly conducting polygonal plates," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 40, no. 12, pp. 1543–1554, Dec. 1992
- [118] H. Kobayashi and K. Hongo, "Scattering of electromagnetic plane waves by conducting plates," *Electromagnetics*, vol. 17, no. 6, pp. 573–587, 1997
- [119] G. Apaydin, F. Hacivelioglu, L. Sevgi, W.B. Gordon and P.Ya. Ufimtsev, "Diffraction at a Rectangular Plate: First-Order PTD Approximation", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 64, No. 5, pp. 1891 – 1899, May 2016
- [120] R. A. Ross, "Radar cross section of flat plates as a function of aspect angle," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-14, no. 3, pp. 329–335, May 1966.
- [121] R. A. Ross, "Backscattering from square plates illuminated with vertical polarization," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 54, no. 1, pp. 272–275, Jan. 2006.
- [122] R. A. Ross, "Forward scattering at grazing incidence on flat plates," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 56, no. 2, pp. 606–609, Feb. 2008.
- [123] R. Tiberio and R. G. Kouyoumjian, "A uniform GTD solution for the diffraction by strips illuminated at grazing incidence," *Radio Science*, vol. 14, no. 6, pp. 933–941, 1979.
- [124] P.M. Johansen, O. Breinbjerg, "An Exact Line Representation of the Physical Optics Scattered Field: The Case of a Perfectly Conducting Polyhedral Structure Illuminated by Electric Hertzian Dipoles", *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, Vol. 43, No. 7, July 1995, pp. 689 – 696
- [125] W.B. Gordon, "High Frequency Approximations to the Physical Optics Scattering Integral", *IEEE Trans. A&P*, vol. AP-42, No.3, pp. 427-432, March 1994
- [126] E. Heyman and L. Felsen, "Creeping waves and resonances in transient scattering by smooth convex objects," in *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 31, no. 3, pp. 426-437, May 1983, doi: 10.1109/TAP.1983.1143087
- [127] E. Heyman and L. Felsen, "A wavefront interpretation of the singularity expansion method," in *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 33, no. 7, pp. 706-718, Jul 1985, doi: 10.1109/TAP.1985.1143669
- [128] H. Shirai and L. Felsen, "Modified GTD for generating complex resonances for flat strips and disks," in *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 34, no. 6, pp. 779-790, Jun 1986, doi: 10.1109/TAP.1986.1143889
- [129] H. Shirai and L. Felsen, "High-frequency multiple diffraction by a flat strip: Higher order asymptotics," in *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 34, no. 9, pp. 1106-1112, Sep 1986, doi: 10.1109/TAP.1986.1143955
- [130] H. Shirai and L. Felsen, "Wavefront and resonance analysis of scattering by a perfectly conducting flat strip," in *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 34, no. 10, pp. 1196-1207, Oct 1986, doi: 10.1109/TAP.1986.1143749
- [131] Delsanto, P. P., Alemar, J. D., Rosario, E., Subrahmanyam, J. V., Nagl, A., Überall, H., & Valcarcel, J. R., «Resonances and surface waves in elastic wave scattering from cavities and inclusions», *Review of progress in quantitative nondestructive evaluation*. Springer US, 1984, pp. 111-121.

- [132] R. Toribio, J. Saillard, and P. Pouliguen, «Identification of Radar Targets in Resonance Zone: E-Pulse Techniques», *Journal Of Electromagnetic Waves And Applications* Vol. 17, Iss. 12, 2003
- [133] Y. Kuznetsov, M. Cherniakov and A. Baev, "Identification of Air Targets by using Secondary Application of Terrestrial TV," 2001 31st European Microwave Conference, London, England, 2001, pp. 1-4, doi: 10.1109/EUMA.2001.339036
- [134] Jun You, Xianrong Wan, Hengyu Ke, Ziping Gong and Yunhua Rao, "Resonance-region target detection with wideband VHF radar," *IET International Radar Conference 2013*, Xi'an, 2013, pp. 1-6, doi: 10.1049/cp.2013.0460
- [135] B. Ng, L. Rosenberg and S. T. N. Nguyen, "Target detection in sea clutter using resonance based signal decomposition," 2016 IEEE Radar Conference (RadarConf), Philadelphia, PA, 2016, pp. 1-6, doi: 10.1109/RADAR.2016.7485249
- [136] Peter L. Christiansen, N. Chr. Albertsen, and Olav Breinbjerg, "50 years with J. B. Keller's Geometrical Theory of Diffraction in Denmark – Revisiting the Theory: Impedance Half-Plane Diffraction Coefficients", *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 55, No. 4, August 2013, pp. 32-40
- [137] А. Г. Кюркчан, Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов, Особенности продолжения волновых полей, *УФН*, 166:12 (1996), сс. 1285–1308
- [138] Галишников Т.Н., Ильинский А.С. Численные методы в задачах дифракции –М.: Изд-во МГУ, 1987, 208 с.
- [139] А. С. Ильинский, Ю. Ю. Капустин, А. Б. Самохин, Математическая модель задачи дифракции на однородном цилиндрическом теле, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, т. 38, № 9, 1998, сс. 1563–1571
- [140] А.Б. Самохин, *Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии*, Москва: Радио и связь, 1998. - 160 с. - ISBN 5-256-01405-6
- [141] M.V. Vesnik and P.Y. Ufimtsev, "A New Asymptotic Feature of the Field Scattered by Polygonal Plates", *Program and Abstracts of the 1991 North American Radio Science Meeting, URSI*, London, Canada, p. 176
- [142] M.V. Vesnik, P.Y. Ufimtsev "An Asymptotic Feature of Corner Waves Scattered by Polygonal Plates", *Electromagnetics*, Vol. 12, NN 3-4, pp. 265-272, Jul.-Dec. 1992
- [143] М.В. Весник "Использование двухмерных решений в трехмерных задачах", *Радиотехника и электроника*, 1993, т. 38, стр. 1416-1423
- [144] M.V. Vesnik "The Using of Two - Dimensional Solutions in Three - Dimensional Problems for Scatterers of Arbitrary Properties" *Conference Proceedings, Mathematical Methods in Electromagnetic Theory*, Kharkov, Ukraine, 7-10 Sept. 1994, pp. 465-468
- [145] M.V. Vesnik "Elimination of Infinites in Diffraction Coefficients of Physical Optics Current's Components for a Shadow Contour of a Scatterer", *Proceedings of the 1995 International Symposium on Electromagnetic Theory*, pp. 407-409, St. Petersburg, Russia, May 23-26, 1995
- [146] М.В. Весник "Аналитическое решение краевой задачи для уравнения Гельмгольца", *Труды VII Всероссийской школы-семинара "Физика и применение микроволн"*, том 1, стр. 75, Краснови́дово, Московская область, 24-30 мая 1999г.

- [147] М.В. Весник "Новый метод аналитического решения двумерных задач теории дифракции", Журнал радиоэлектроники, № 8, 1999 (электронный журнал) <http://jre.cplire.ru/win/aug 99/2/text.html>
- [148] М.В. Весник "Аналитическое решение краевой задачи для уравнения Гельмгольца", Радиотехника и электроника, 2000, т. 45, № 1, стр. 66-76
- [149] M.V. Vesnik "The Analytical Solution for the Electromagnetic Diffraction on 2-D Perfectly Conducting Scatterers of an Arbitrary Shape", Proceedings of AP 2000 Millenium Conference on Antennas & Propagation, Davos, Switzerland / April 9-14, 2000
- [150] M.V. Vesnik "The Analytical Solution for the Electromagnetic Diffraction on 2-D Perfectly Conducting Scatterers of Arbitrary Shape", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-49, No. 12, pp. 1638 - 1644, Dec. 2001
- [151] M.V. Vesnik "Analytical solution for electromagnetic diffraction on 2-D half-plate with finite thickness", *12^{èmes} Journées Internationales de Nice sur les Antennes (12th International Symposium on Antennas) (JINA)*, 12-14 November 2002, Nice, France vol. 2, pp. 273 – 276.
- [152] M.V. Vesnik "2-D diffraction analytical solutions based on method of generalized eikonal", *International Seminar Day on Diffraction*, Saint Petersburg, June 24 - 27, 2003, pp. 84 – 85
- [153] M.V. Vesnik "Method of generalized eikonal and new 2-D scattering analytical solutions", *IVth International Conference on Antenna Theory and Techniques (ICATT)*, 9 - 12 September 2003, Sevastopol, Ukraine vol.1, pp.149 - 151
- [154] М.В. Весник "Аналитическое решение краевых задач теории дифракции методом обобщенного эйконала", Радиотехника и электроника, 2003, том 48, № 9, стр. 1078 – 1084
- [155] Michael V. Vesnik "Method of Generalized Eikonal and 2 -D Diffraction Analytical Solutions", *17th International Conference on Applied Electromagnetics and Communications - ICECom 2003*, Dubrovnik, October 1 -3, 2003, pp. 427 – 429
- [156] М.В. Весник "Аналитическое решение краевых задач для волнового уравнения с переменным волновым числом методом обобщенного эйконала", *Нелинейный мир*, т. 1, № 1 -2, 2003, стр. 59 – 63
- [157] М.В. Весник "Получение дифракционных коэффициентов для двумерного полубесконечного идеально проводящего рассеивателя при помощи метода обобщенного эйконала", *Электромагнитные волны и электронные системы*, т. 9, № 11, 2004, стр. 23 – 29
- [158] М.В. Весник "Метод обобщенного эйконала и возможность получения новых аналитических решений краевых задач уравнений математической физики", Тезисы докладов Третьей Всероссийской конференции "Необратимые процессы в природе и технике" 24-26 января 2005 г. – М., МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005, с.175 – 176
- [159] Michael V. Vesnik "Method of Generalized Eikonal as a New Approach to Diffraction Process Description", *International Seminar Days on Diffraction'2006*, Saint Petersburg, May 30 - June 2, 2006
- [160] Vesnik M. V., Extension of Diffraction Theory Heuristic Methods Feasibilities by use of the Method of Generalized Eikonal, *International Conference on Antenna Theory and Techniques*, 17-21 September, 2007, Sevastopol, Ukraine pp. 214-216

- [161] M.Vesnik "Scattering Pattern Calculation in Far Zone with Use of the Method of Generalized Eikonal", 12th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, June 29-July 02, 2008, Odesa, Ukraine pp. 235-237
- [162] М.В. Весник «Аналитическое решение задачи дифракции электромагнитной волны на двумерной идеально проводящей полупластине при помощи метода обобщенного эйконала», Радиотехника и электроника, 2008, том 53, № 2, с. 144–156.
- [163] M.Vesnik, Yu.A. Kravtsov, Section 5.1.7 Diffraction by Bodies with Wedges: Method of Generalised Eikonal (MGE) in the book: Yury A. Kravtsov, Ning Yan Zhu "Theory of Diffraction: Heuristic Approaches" Alpha Science International Ltd.Oxford, U.K., 2010
- [164] М.В. Весник, «Эвристическое решение задачи рассеяния электромагнитной волны на плоском угловом секторе», Труды IV Всероссийской конференции "Радиолокация и радиосвязь", 29 ноября – 3 декабря Москва 2010 г., ИПЭ им. В.А. Котельникова РАН, Москва, стр. 382 - 386
- [165] М.В. Весник «О возможности построения уточненного эвристического решения в задаче дифракции на плоском угловом секторе», Радиотехника и электроника, 2011, том 56, № 5, с. 573 – 586
- [166] Vesnik M. V. "Heuristic Approaches Application Limits for Calculation of Electromagnetic Diffraction by Polyhedrons and Other Scatterers", Proceedings of VIII International Conference on Antenna Theory and Techniques, 20-23 September, 2011, Kyiv, Ukraine pp. 269 – 271
- [167] М.В. Весник, «Аналитическое решение двумерной задачи дифракции электромагнитной волны на усеченном клине», Радиотехника и электроника, 2012, т. 57, № 10, стр. 1053 – 1065
- [168] M. V. Vesnik, Analytical heuristic solution for the problem of elastic wave diffraction by a polygonal flat 3D scatterer, Abstracts of International conference Days on Diffraction 2013, St. Petersburg, May 27-31, 2013, p. 89
- [169] М.В. Весник, Получение эвристических дифракционных коэффициентов в задаче дифракции волнового поля на плоском многоугольном рассеивателе, Труды международной научной конференции «Излучение и рассеяние электромагнитных волн», Таганрог-Дивноморское, Россия, 24-28 июня 2013г., стр. 414-418
- [170] М.В. Весник, «Применение новых эвристических подходов для построения аналитических решений задач дифракции электромагнитных, акустических или упругих волн на трехмерных объектах со сложными граничными условиями», Труды 6-й международной научно – технической конференции «Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации», ARMIMP-2013, Российское НТОРЭС им. А.С. Попова, 15-17 сентября 2013г., Суздаль, Россия, стр. 35-39
- [171] М.В. Весник, «Новые эвристические подходы в задачах дифракции волновых полей разной физической природы на многоугольниках и многогранниках», Труды 1-ой Всероссийской Микроволновой конференции, 27-29 ноября 2013 г., ИПЭ им. В.А. Котельникова РАН, Москва, стр. 213-218
- [172] М.В. Весник, «Построение эвристических дифракционных коэффициентов в аналитических решениях задач рассеяния волновых полей разной физической природы на

- плоских многоугольных пластинах со сложными граничными условиями», Радиотехника и электроника, 2014, т.59, №6, с.543 – 551
- [173] Vesnik M.V., “Efficiency of Different Heuristic Approaches to Calculation of Electromagnetic Diffraction by Polyhedrons and other Scatterers”, Radio Science, Volume 49, Issue 10, October 2014, Pages 945–953, ссылка на статью: doi: 10.1002/2014RS005520
- [174] М.В. Весник, «Уточнение приближения физической оптики в задачах дифракции на трехмерных объектах», Труды 2-ой Всероссийской Микроволновой конференции, 26-28 ноября 2014 г., ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, Москва, стр. 443 – 448
- [175] Michael V. Vesnik, “The Method of the Generalized Eikonal. New Approaches in the Diffraction Theory.”, Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston, 2015, ISBN 978-3-11-031112-9
- [176] М.В. Весник, «Детерминированная теория распространения радиоволн в условиях городской застройки», Труды Международной научной конференции «Излучение и рассеяние ЭМВ – ИРЭМВ-2015, 28 июня – 3 июля 2015». – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2015, стр. 378 – 382
- [177] М.В. Весник, «Эвристическое выражение для дифракционного коэффициента полупрозрачной полуплоскости», Сборник трудов III Всероссийской Микроволновой конференции, ИРЭ им. В.А.Котельникова РАН, 25-27 ноября 2015 г., стр. 281 – 285
- [178] М.В. Весник, «Учет влияния профиля кромок, вершин и граничных условий в физической теории дифракции», Тезисы докладов XIII молодежной научно-технической конференции «Радиолокация и связь – перспективные технологии». – Москва, ОАО Радиофизика, 3 декабря 2015г., стр. 80
- [179] М.В. Весник, «Новые возможности повышения эффективности эвристических аналитических формул в физической теории дифракции», Сборник трудов IV Всероссийской Микроволновой конференции, ИРЭ им. В.А.Котельникова РАН, 23-25 ноября 2016 г., стр. 332 – 336
- [180] М.В. Весник, «Физическая интерпретация математически строгого решения задачи дифракции при помощи эвристических формул», Современная математика. Фундаментальные направления. Том 62 (2016). с. 32 – 52
- [181] М. В. Весник, «Физическая интерпретация численного решения задачи дифракции электромагнитной волны на плоском идеально проводящем рассеивателе», Журнал радиоэлектроники, № 4, 2017 (электронный журнал) <http://jre.cplire.ru/jre/apr17/7/text.pdf>
- [182] Michael Vesnik, Resonant properties of 3D electromagnetic diffraction by a flat polygon, Abstracts of International conference Days on Diffraction 2017, St. Petersburg, June 19-23, 2017, p. 148.