

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина»  
(ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина»)

На правах рукописи



Иванов Алексей Павлович

**МОДЕЛЬ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ  
КАК ИНСТРУМЕНТ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ  
В МАГНИТОУПРУГОЙ СИСТЕМЕ**

Специальность 01.04.03 – Радиофизика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук, профессор  
Шавров Владимир Григорьевич

Сыктывкар – 2019

## Содержание

Введение.....	5
Глава 1. Нелинейные динамические явления в связанных колебательных системах.....	12
1.1 Общая теория нелинейных колебаний.....	12
1.2 Гармонический осциллятор .....	12
1.3 Нелинейный осциллятор .....	14
1.4 Диссипативная нелинейная система .....	15
1.5 Вынужденные колебания нелинейного осциллятора.....	16
1.6 Система двух связанных гармонических осцилляторов.....	18
1.7 Система двух связанных нелинейных осцилляторов.....	21
1.8 Классическая теория ферромагнитного резонанса.....	23
1.9 Нелинейный ферромагнитный резонанс .....	27
1.10 Виды нелинейной прецессии намагниченности.....	38
1.11 Резонансная прецессия намагниченности при различных уровнях магнитных полей.....	40
1.12 Влияние кристаллографической анизотропии на динамику намагниченности .....	42
1.13 Выводы по главе 1.....	44
Глава 2. Модель связанных линейного и нелинейного осцилляторов .....	46
2.1. Описание модели .....	46
2.2. Модель обобщенного потенциала.....	47
2.3. Применение модели потенциала к интерпретации характера колебаний ....	53
2.4. Характеристики модели, определяющие характер колебаний.....	58
2.5. Частотные свойства модели.....	67
2.6. Модель расщепления синусоиды .....	69
2.7. Выводы по главе 2.....	71
Глава 3. Линейное возбуждение гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов.....	73
3.1. Постановка и геометрия задачи.....	73
3.2. Линейное приближение.....	76

3.3. Линеаризованные уравнения для намагниченности и упругого смещения .	77
3.4. Линеаризованная система уравнений для намагниченности и упругого смещения в обобщенном виде .....	78
3.5. Аналитический критерий изменения характера колебаний .....	85
3.6. Критерии трех режимов на примере реальных материалов .....	92
3.7. Сравнение колебаний магнитной и модельной систем.....	93
3.8 Выводы по главе 3.....	95
Глава 4. Нелинейное возбуждение гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов в квадратичном приближении .....	97
4.1 Геометрия задачи и основные уравнения.....	97
4.2 Уравнение для намагниченности в квадратичном приближении.....	100
4.3 Уравнение для упругого смещения в квадратичном приближении .....	101
4.4 Уравнения для свободных колебаний при небольшой амплитуде .....	103
4.5 Полный обобщенный вид системы уравнений для вынужденных колебаний двух связанных осцилляторов в квадратичном приближении .....	103
4.6 Анализ структуры обобщенной системы уравнений для связанных осцилляторов .....	106
4.7 Укороченные уравнения при сохранении главных членов .....	111
4.8 Проверка корректности квадратичного приближения.....	112
4.9 Корректность приближения при большой константе магнитоупругого взаимодействия.....	113
4.10 Выводы по главе 4.....	115
Глава 5. Нестационарное запаздывание магнитоупругих колебаний связанных осцилляторов .....	118
5.1 Геометрия задачи и основные уравнения.....	118
5.2 Явление нестационарного запаздывания.....	120
5.3 Механизм задержки колебаний на основе динамического потенциала.....	123
5.4 Особенности нестационарного запаздывания.....	126
5.4.1 Амплитуда возбуждения .....	126
5.4.2 Частотные особенности колебаний до скачка амплитуды .....	129
5.4.3 Параметр кубической нелинейности .....	130

5.4.4 Подавление запаздывания.....	133
5.4.5 Амплитуда колебаний после запаздывания .....	134
5.5 Двухпотенциальная модель .....	138
5.6. Роль линейной связи осцилляторов в формировании режимов колебаний	141
5.6.1 Двухступенчатое запаздывание.....	142
5.6.2 Плавное насыщение.....	147
5.6.3 Перемежающиеся скачки .....	151
5.6.4 Малоамплитудная релаксация.....	153
5.6.5 Интерпретация режимов на основе модели динамического потенциала .....	153
5.6.6 Несимметричная линейная связь.....	159
5.7 Классификация режимов по интенсивности колебаний: малоамплитудные и высокоамплитудные режимы.....	161
5.7.1 Малоамплитудный режим слабой связи.....	162
5.7.2 Высокоамплитудный режим средней связи.....	163
5.7.3 Малоамплитудный режим сильной связи .....	165
5.8 Характеристики колебаний при малом и среднем уровнях связи .....	167
осцилляторов .....	167
5.9 Характеристики колебаний при высокой степени связи осцилляторов.....	182
5.10 Выводы по главе 5.....	188
Заключение .....	196
Список литературы .....	198
Авторский список литературы.....	206

## Введение

### Актуальность темы диссертационного исследования

Вопросы нелинейности присущи практически каждой области физики. Интенсивное развитие получили такие направления, как нелинейная оптика, нелинейная акустика, нелинейная радиофизика [1]. В связи с этим исследование нелинейных колебаний, как наиболее характерного процесса нелинейной динамики, представляет собой одну из приоритетных современных физических задач. Богатое разнообразие таких колебаний можно наблюдать в ферритах на сверхвысоких частотах (СВЧ) [2]. Особенно отчетливо они проявляются в процессах возбуждения гиперзвука при использовании ферритовых магнитострикционных преобразователей, работающих в условиях ферромагнитного резонанса (ФМР) [3, 4]. Традиционными материалами для таких преобразователей являются железоиттриевый и тербиевый ферриты-гранаты (ЖИГ и ТбФГ), обладающие низкими потерями и высоким значением константы магнитоупругого взаимодействия [4]. Но при повышении мощности возбуждаемого гиперзвука у этих материалов проявляется серьезный недостаток – увеличивается рост потерь за счет параметрического возбуждения обменных спиновых волн [5–7]. Это ограничение можно обойти путем выбора геометрии преобразователя, а именно в виде нормально намагниченного тонкого диска [8–12]. В работе [13] показано, что в такой геометрии амплитуда гиперзвука может быть увеличена в десятки раз, что способствует созданию магнитоакустических преобразователей высокой мощности.

Преимущественно задача возбуждения гиперзвука основана на классической теории нелинейного ферромагнитного резонанса (НФМР) [14]. В общем случае данная теория подразумевает решение сложной системы нелинейных дифференциальных уравнений, включающей в себя уравнения движения для намагниченности и упругого смещения. Такая задача сама по себе является нетривиальной и разрешима только численно, и в большинстве случаев приемлемые результаты удастся получить только для малых амплитуд возбуждающего поля. В связи с этим становятся востребованными модели, допускающие более простые и

наглядные решения, на основе которых можно получить важные для практики аналитические критерии.

Исследование нестационарных режимов нелинейных колебаний, в том числе и колебаний намагниченности ферромагнитного образца, ведется уже давно. Экспериментально продемонстрирована возможность возбуждения нестационарных колебаний автомодуляционного характера, которые обусловлены нелинейным взаимодействием намагниченности ферритового образца с электромагнитными колебаниями резонатора [15]. Выявлена роль магнитоупругого взаимодействия в этом процессе [16, 17]. Тем не менее, свойства системы связанных осцилляторов, представляющих магнитную и упругую подсистемы магнетиков, ещё не исследованы в полной мере.

При рассмотрении потенциала для описания свойств систем подобного рода обычно ограничиваются только первыми слагаемыми, отвечающими за квадратичную и кубическую нелинейность. При этом роль нелинейности, обусловленную слагаемыми четвертого порядка, которые отражают смешанную нелинейность обоих осцилляторов, оставлена вне рассмотрения. Однако предварительное исследование показывает, что учет членов потенциала со степенью выше третьей значительно разнообразит характер колебаний системы и приводит к режимам, нереализуемым на прежних уровнях нелинейности.

### Цели и задачи диссертации

Целью данной работы является сведение задачи возбуждения гиперзвука магнитострикционным преобразователем в условиях ФМР к упрощенной модели возбуждения двух связанных магнитного и упругого осцилляторов, один из которых в общем случае является нелинейными и связан с другим нелинейной связью. Для достижения поставленной цели решались следующие задачи.

1. Разработка модели связанных линейного и нелинейного осцилляторов, обладающей всеми свойствами, присущими нелинейным системам.
2. Выявление параметров модели, определяющих свойства колебаний системы, в первую очередь пороговый характер смены режимов колебаний, роль

параметров затухания и нелинейности осцилляторов и связи, условия перехода к стохастическому режиму при большом уровне возбуждения

3. Интерпретирование физической сущности явлений, происходящих в модельной системе, методом обобщенного потенциала, подобранного с учетом особенностей рассматриваемой модели.
4. Построение модели взаимодействия магнитной и упругой подсистем ферромагнетика, позволяющей оценить и рассчитать важные параметры магнитоакустического преобразователя без использования сложных аналитических и численных методов.
5. Вывод системы уравнений в обобщенном виде, соответствующей модельной системе из двух связанных осцилляторов, нелинейность в которых описывается слагаемыми не ниже третьего порядка по намагниченности, упругому смещению и их производных.
6. Определение степени влияния вида и уровня связи осцилляторов на развитие их колебаний, выявление и обоснование нелинейных эффектов, вызванных разным уровнем связи.

#### Научная новизна диссертационного исследования

1. Предложена модель системы связанных сильной нелинейной связью осцилляторов, упрощающая решение задачи развития колебаний в связанных нелинейных системах. В зависимости от уровня возбуждения и нелинейности выявлено пять режимов колебаний системы: регулярный синусоидальный, регулярный с расщеплением, регулярный без расщепления, нерегулярный квазихаотический, нерегулярный расходящийся.
2. Предложена модель динамического потенциала, представляющего собой совокупность потенциалов нелинейных осцилляторов и содержащего в своей структуре слагаемые четвертого порядка по координате. На основе динамического потенциала дана интерпретация динамики колебаний в модельной системе и эффектов, вызванных дополнительными слагаемыми нелинейности.

3. Предложенная модель связанных осцилляторов применена к решению задачи сильно возбужденных нелинейных колебаний намагниченности и упругого смещения в структуре с магнитоупругими свойствами. В результате достигнуто упрощение полной системы из семи уравнений первого порядка с граничными условиями до системы из четырех уравнений первого порядка без граничных условий.
4. Выведены аналитические критерии, определяющие зависимость смены режимов колебаний от величины связи осцилляторов и частоту резонансных колебаний в точке перехода.
5. Записана полная система уравнений для квадратичного приближения в обобщенном симметричном виде, соответствующая модельной системе. Нелинейность в этих уравнениях описывается слагаемыми третьего порядка по намагниченности, упругому смещению и их производных.
6. Определены критерии возникновения нестационарного запаздывания развития колебаний системы из двух осцилляторов, показана роль нелинейности и величины связи между осцилляторами в этом процессе.

### Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая значимость диссертации состоит в проработке решения системы уравнений для связанных осцилляторов, построенной на модели потенциала с членами четвертого порядка. Свойства такой системы позволяют интерпретировать характер вынужденных нелинейных колебаний намагниченности и упругого смещения в нормально намагниченной ферритовой пластине.

Практическая значимость работы заключена в возможности использования результатов теоретических исследований в построении магнестрикционных преобразователей с заданными свойствами для генерации гиперзвука, в моделировании устройств аналоговой обработки сигналов, а также в разного рода нелинейных генераторах и преобразователях частоты.



## Методы исследования

В ходе выполнения данной работы были использованы широко известные и часто применяемые в подобных задачах методы:

1. Численные методы решения задачи Коши для обычных дифференциальных уравнений, а именно метод Рунге–Кутты 4–5 порядка точности с контролем длины шага интегрирования.
2. Оригинальные программные коды для расчета динамики осциллирующих систем, построения потенциальных поверхностей, а также фазовых портретов.

## Положения, выносимые на защиту

1. Разработка модели двух связанных осцилляторов, один из которых обладает сильно нелинейными свойствами, для интерпретации вынужденных нелинейных колебаний намагниченности и упругого смещения нормально намагниченной ферритовой пластины.
2. Анализ системы нелинейных уравнений второго порядка на основе модели динамического потенциала, образованного совокупностью динамических потенциалов отдельных осцилляторов и содержащих в своей структуре слагаемые четвертого порядка по координате.
3. Аналитическое решение для укороченной системы в режиме постоянной амплитуды колебаний и два критерия, один из которых дает критическое значение константы связи, определяющее переход между режимами колебаний, а другой – частоту резонансных колебаний в точке перехода.
4. Решение полной системы уравнений для квадратичного приближения в обобщенном симметричном виде, соответствующее модельной системе из двух связанных осцилляторов, нелинейность в которых описывается слагаемыми третьего порядка по намагниченности, упругому смещению и их производных.

5. Интерпретация нестационарного запаздывания развития колебаний на основе существования дополнительного минимума, отделенного от основного потенциальным барьером, и условия реализации такого запаздывания.
6. Модель динамического потенциала, отражающая динамику колебаний первого осциллятора при условии использования амплитуды второго осциллятора как параметра.

### Степень достоверности и апробация результатов исследования

Результаты работы обсуждались на семинарах кафедры радиофизики и электроники ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина» и были представлены на следующих научных мероприятиях: Международной конференции «Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах» (г. Махачкала, 2010); Moscow International Symposium on Magnetism (MISM) (Moscow, Russia, 2011); XXII Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах» (НМММ) (г. Астрахань, 2012); XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы» (г. Москва, 2012); International Symposium on Spin Waves 2013 (Saint Petersburg, Russia, 2013); X Международной зимней школе-семинаре «Хаотические автоколебания и образование структур» (ХАОС-2013) (г. Саратов, 2013); XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы» (г. Москва, 2013); VI Байкальской Международной конференции «Магнитные материалы. Новые технологии» (пос. Большое Голоустное Иркутской обл., 2014); XXII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы» (г. Москва, 2014); XVI Международной зимней школе-семинаре по радиофизике и электронике сверхвысоких частот (г. Саратов, 2015); Международной конференции, посвящённой 80-летию чл.-корр. РАН И. К. Камилова «Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах» (г. Челябинск, 2015); XXIII Всероссийской конференции с международным участием «Электромагнитное поле и материалы (фундаментальные физические исследования)» (г. Москва, 2015).

### Публикации

По материалам диссертации опубликовано 30 работ, из которых: 11 публикаций в ведущих рецензируемых научных журналах, определенных ВАК при Минобрнауки России и индексируемых в РИНЦ, в том числе 3 публикации в журналах, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования Scopus и Web of Science, и 19 тезисов докладов на российских и международных конференциях, научных семинарах.

### Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Полный объем текста составляет 211 страниц и включает 60 рисунков и 4 таблицы. Список цитируемой литературы содержит 74 наименования.

## **Глава 1. Нелинейные динамические явления в связанных колебательных системах**

Данная глава посвящена рассмотрению простейших колебательных систем. В ней приведен обзор важных понятий общей теории нелинейных колебаний, на которые опирается данное исследование. Также эта глава затрагивает основные положения теории нелинейного ферромагнитного резонанса и нелинейных динамических явлений в связанных колебательных системах. Рассмотрены особенности прецессионного движения магнитного момента в условиях ферромагнитного резонанса, описаны явления, возникающие при больших уровнях накачки.

### **1.1 Общая теория нелинейных колебаний**

По своей сути процессы колебаний намагниченности являются нелинейными. И обычно при их рассмотрении применяется метод линеаризации, который является приближенным и во многих случаях дает приемлемые результаты. Однако линеаризация не всегда способна отразить всю суть процессов, поскольку в таких системах имеют место явления, принципиально невозможные в линейных системах [18]. Рассмотрим на основе простейших систем важные понятия общей теории нелинейных колебаний.

### **1.2 Гармонический осциллятор**

Начнем рассмотрение с основных аспектов движения гармонического осциллятора, который представляет собой колебательную систему с одной степенью свободы. Состояние такого осциллятора может быть описано с помощью некоторой динамической переменной  $x$ . Физическая сущность этой переменной может быть различной в зависимости от задачи, но описываемая такой переменной система ведет себя как гармонический осциллятор при условии, что изменение переменной  $x$  со временем определяется уравнением [19]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.1)$$

где  $\omega_0$  – частота колебаний. Решением уравнения (1.1) является гармоническая функция

$$x = a \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (1.2)$$

Здесь  $\varphi$  – начальная фаза колебания,  $a$  – амплитуда колебания, связанная с его энергией  $E$ . Эта связь следует из закона сохранения энергии и выражается в виде  $a = \sqrt{2E}/\omega_0$ . На фазовой плоскости  $(x, \dot{x})$  первый интеграл уравнения (1.1) определяет кривую линию в виде эллипса с полуосями  $\sqrt{2E}/\omega_0$  и  $\sqrt{2E}$ .

Уравнение (1.1) может быть представлено в виде двух дифференциальных уравнений первого порядка [20]:

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{V}, \quad \frac{d\mathcal{V}}{dt} = -\omega_0^2 x, \quad (1.3)$$

и в общем случае эта система обобщается:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mathcal{V}), \quad \frac{d\mathcal{V}}{dt} = g(x, \mathcal{V}). \quad (1.4)$$

В линейном приближении диссипация энергии осциллятора учитывается добавлением к уравнению (1.1) слагаемого, пропорционального скорости [19]:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x + \eta \frac{dx}{dt} = 0. \quad (1.5)$$

В случае  $\eta > 0$ , параметр  $\eta$  называется коэффициентом трения. Ненулевой коэффициент трения приводит к тому, что со временем на фазовой плоскости изображающая точка «падает на центр».

Точки  $(x_0, \mathcal{V}_0)$ , в которых  $f(x_0, \mathcal{V}_0) = g(x_0, \mathcal{V}_0) = 0$ , являются особыми. В случае системы с одной степенью свободы в зависимости от значения параметра  $\eta$  могут существовать особые точки типа центра, седла, фокуса и узла, которые исчерпывают все возможности поведения системы. Уравнения движения всегда в общем случае можно линеаризовать в окрестности любой точки, поэтому при изучении динамики гармонического осциллятора используются линейные уравнения.

### 1.3 Нелинейный осциллятор

В качестве примера нелинейной системы с одной степенью свободы в отсутствие сил трения можно рассмотреть ангармонический осциллятор с кубической нелинейностью, который известен, как осциллятор Дуффинга [21]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x + \beta x^3 = 0. \quad (1.6)$$

Данное уравнение в основном ангармоническом приближении описывает малоамплитудные колебания в произвольном симметричном потенциале. Соответствующая уравнению (1.6) потенциальная энергия имеет вид:

$$U = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{4}\beta x^4. \quad (1.7)$$

Различные комбинации знаков параметров  $\alpha$  и  $\beta$  позволяют моделировать разные физические ситуации. Так, если  $\alpha\beta > 0$ , то характер движения осциллятора Дуффинга имеет тот же качественный вид, что и у гармонического осциллятора. При  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$  фазовые портреты во многом схожи, но имеется одно очень важное отличие – движение уже неизохронное. Частота колебаний становится зависимой от энергии  $E$ . Такая зависимость частоты колебаний от энергии (или амплитуды) – важное свойство ангармонических колебаний. При  $\alpha < 0$  и  $\beta < 0$  особая точка сохраняет седловой характер.

Если представить уравнение (1.6) в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\alpha x - \beta x^3 \quad (1.8)$$

и приравнять правые части к нулю, то можно найти особые точки на фазовой плоскости  $(x, \dot{x})$ . Как можно видеть, в отличие от случая гармонического осциллятора в правой части теперь появляется нелинейная функция. Однако при  $\alpha\beta > 0$  на фазовой области по-прежнему имеется лишь одна особая точка  $x = y = 0$ .

Если  $\alpha\beta < 0$ , то из равенства нулю правых частей уравнений (1.8) получаются сразу три особые точки:  $x = 0$  и  $x = \pm x_0 \equiv \pm\sqrt{-\alpha/\beta}$ . Наличие одновременно нескольких особых точек на фазовой плоскости является характерным призна-

ком нелинейных систем. При  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$  особая точка  $x = 0$  является центром, а точки  $x = \pm x_0$  – седловыми. При  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$  точка  $x = 0$  – седло, а точки  $x = \pm x_0$  – центры.

Как видно на примере осциллятора Дуффинга, фазовые портреты нелинейной системы могут содержать те же элементы, что и в случае линейных уравнений: особые точки типа центр и седла, сепаратрисы, выходящие из них и входящие в седловые точки. Однако в случае нелинейных диссипативных систем на фазовой плоскости может появляться новый элемент – замкнутая сепаратриса, не выходящая не из какой особой точки.

Точные решения уравнения Дуффинга выражаются в терминах эллиптических функций Якоби [22]. Так, для случая  $\alpha = \omega_0^2 > 0$ ,  $\beta = -\varepsilon < 0$  решение записывается в виде:

$$x = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} \frac{\omega_0 k}{\sqrt{1+k^2}}} \operatorname{sn} \left( \frac{\omega_0 t}{\sqrt{1+k^2}}, k \right), \quad (1.9)$$

где  $k$  – модуль эллиптического интеграла, а  $\operatorname{sn}$  – эллиптический синус. Эллиптические функции, являясь решением уравнения Дуффинга с кубической нелинейностью, могут аппроксимировать слабонелинейные колебания при произвольном виде ангармонизмов.

Следует отметить, что в общем случае решение нелинейного дифференциального уравнения затруднительно представить с помощью элементарных или известных специальных функций. В связи с этим прибегают к приближенным методам нахождения решений таких уравнений, таким как: метод прямого разложения, метод возмущений, метод Ван дер Поля, адиабатические инварианты и др.

#### 1.4 Диссипативная нелинейная система

Диссипативная нелинейная система с одной степенью свободы может быть описана уравнением Ван дер Поля [1]. Это уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \varepsilon(1 - bx^2) \frac{dx}{dt}, \quad b > 0. \quad (1.10)$$

При  $\varepsilon = 0$  – это уравнение свободных гармонических колебаний. При  $\varepsilon \neq 0$  – уравнение вынужденных колебаний осциллятора под действием силы  $f = \varepsilon(1 - bx^2)\dot{x}$ . В случае малых значений  $\varepsilon$  наличие силы  $f$  незначительно влияет на движение осциллятора, слабо меняя его энергию. Колебания близки к линейным. Исходя из этого, при подстановке линейного уравнения, можно показать, что приближенное выражение для изменения энергии осциллятора за период колебаний  $T = 2\pi/\omega_0$  будет иметь вид:

$$\Delta E \approx \varepsilon \frac{2\pi E}{\omega_0} \left(1 - \frac{bE}{2\omega_0^2}\right). \quad (1.11)$$

Началу движения соответствует малая энергия колебаний, которая при  $\varepsilon > 0$  растет. Но, как следует из (1.11), скорость увеличения энергии со временем падает, и когда энергия приближается к предельному значению  $2\omega_0^2/b$ , оказывается, что  $dE/dt \rightarrow 0$ . Таким образом, система переходит в состояние стационарного движения, при котором поступающая в систему энергия за период колебания компенсируется диссипацией. Как следует из (1.10) и (1.11) такое периодическое во времени решение имеет амплитуду  $a \sim 1/\sqrt{b}$  и частоту  $\omega \sim \omega_0$ . Здесь мы имеем дело с явлением, которое называется автоколебанием. Фазовая кривая такого движения представляет собой предельный цикл. Она выполняет роль сепаратрисы, разделяющей сужающиеся и расширяющиеся фазовые траектории.

### 1.5 Вынужденные колебания нелинейного осциллятора

Теперь рассмотрим вынужденные колебания ангармонического осциллятора. Для этого воспользуемся комплексным уравнением:

$$i \frac{d\psi}{dt} = (\omega_0 - i\gamma)\psi - \alpha|\psi|^2\psi - Ae^{-i\omega t}, \quad (1.12)$$

где внешняя сила меняется по гармоническому закону, а также введена комплексная функция  $\psi = x + iy$ , позволяющая свести задачу к дифференциальному уравнению первого порядка [23]. В такой модели замена  $\psi = \varphi e^{-i\omega t}$ , что соответствует переходу во вращающуюся систему координат, приводит к дифференциальному уравнению для  $\varphi$ , которое не содержит в явном виде время:



$$i \frac{d\varphi}{dt} = (\omega_0 - i\gamma - \omega)\varphi - \alpha|\varphi|^2\varphi - A. \quad (1.13)$$

В отсутствие затухания ( $\gamma \equiv 0$ ) интеграл движения записывается в виде:

$$E = (\omega_0 - \omega)|\varphi|^2 - \frac{\alpha}{2}|\varphi|^4 - A(\varphi + \varphi^*), \quad (1.14)$$

что позволяет решить задачу о динамике данной консервативной системы. В традиционном случае, когда рассматривается уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x - \alpha x^3 = A_0 \cos \omega t, \quad (1.15)$$

динамика в общем случае достаточно сложна. Так, при больших амплитудах внешней силы  $A > A_{кр} \sim 1/\alpha\omega_0$  колебания системы становятся стохастическими. Поэтому, как правило, ограничиваются рассмотрением для такого уравнения периодических решений в частном виде.

Опишем вкратце резонансные явления, связанные с ангармоническим осциллятором. При рассмотрении резонанса традиционно полагается, что под действием гармонической возбуждающей силы в системе возбуждаются одночастотные колебания, для которых во вращающейся системе координат  $\varphi = const$  [23]. Примем  $\varphi = ae^{i\delta}$  и опишем зависимость амплитуды вынужденных колебаний  $a$  и фазы  $\delta$  от частоты внешней силы при заданной её амплитуде  $A$ . Если  $d\varphi/dt = 0$ , то из (1.60) получаем:

$$a^2\{(\omega - \omega_0 + \alpha a^2)^2 + \gamma^2\} = A^2, \quad (1.16)$$

$$tg\delta = \gamma/(\omega_0 - \alpha a^2 - \omega). \quad (1.17)$$

При малых значениях  $A$  амплитуда колебаний  $a$  тоже мала, и резонансная кривая имеет симметричный вид с максимумом в точке  $\omega = \omega_0$  (рисунок 1.1а) [23].

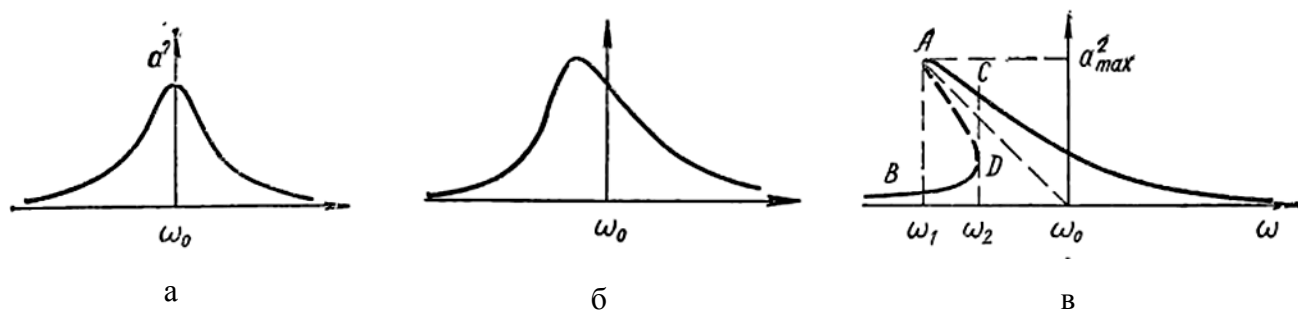


Рисунок 1.1. Схематичный вид резонансных кривых ангармонического осциллятора

По мере увеличения  $A$  резонансная кривая деформируется, но при этом всё ещё сохраняет свой вид – каждой частоте  $\omega$  соответствует одно значение амплитуды (рисунок 1.1б).

Начиная с определенных значений  $A = A_k$  характер резонансной кривой меняется. При каждом значении  $A > A_k$  существует область частот, где уравнение (1.16) имеет три вещественных корня (рисунок 1.1в). Границы этого интервала частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  определяются корнями уравнения  $d\omega/da^2 = 0$ , которые находятся из совместного решения уравнения (1.16) и уравнения

$$(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2 + 4(\omega - \omega_0)\alpha a^2 + 3\alpha^2 a^4 = 0. \quad (1.18)$$

Значение критической амплитуды вычисляется при условии равенства корней уравнения (1.18), и оно равно

$$A_k = 2\gamma^3/\alpha. \quad (1.19)$$

Как видно, особенностью резонанса в нелинейной системе является наличие области частот  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ , где возможны несколько решений динамических уравнений с разной степенью устойчивости.

Наличие неустойчивости приводит к гистерезисной зависимости амплитуды колебаний от частоты. При уменьшении частоты от значений  $\omega > \omega_0$  до значений  $\omega \ll \omega_0$  амплитуда вынужденных колебаний растет (верхняя ветвь кривой на рисунке 1.1в). При достижении частоты  $\omega_1$  происходит «срыв» амплитуды (точка  $A$ ), которая скачком меняется до значения, отвечающего точке  $B$ , а затем уменьшается, следуя нижней ветви резонансной кривой. Если увеличивать частоту, то амплитуда колебаний растет вдоль кривой  $BD$ , а в точке  $D$  ( $\omega = \omega_2$ ) скачкообразно возрастает до  $C$  и затем идёт на спад по верхней ветви резонансной кривой.

## 1.6 Система двух связанных гармонических осцилляторов

Начнем рассмотрение с консервативной системы двух связанных гармонических осцилляторов. Будем считать их идентичными. Лагранжиан системы в этом случае имеет вид [24]:

$$\mathcal{L} = \sum_{n=1}^2 \left( \frac{\dot{x}_n^2}{2} - \frac{\omega_0^2 x_n^2}{2} \right) - \frac{\varepsilon^2}{2} (x_1 - x_2)^2, \quad (1.20)$$

где  $\omega_0$  – собственная частота осциллятора при отсутствии связи между осцилляторами,  $x_n$  – смещения осцилляторов, а параметр  $\varepsilon$  характеризует взаимодействие осцилляторов, т. е. параметр связи. Данная система является консервативной и обладает энергией

$$E = \sum_{n=1}^2 \left( \frac{\dot{x}_n^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x_n^2}{2} \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} (x_1 - x_2)^2. \quad (1.21)$$

Динамика осцилляторов описывается уравнениями [23]:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 + \varepsilon^2 (x_1 - x_2) = 0, \quad (1.22)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_0^2 x_2 + \varepsilon^2 (x_2 - x_1) = 0. \quad (1.23)$$

В виду линейности этих уравнений их решения можно представить в виде

$$x_n = a_n e^{-i\omega t}, n = 1, 2, \quad (1.24)$$

где  $a_n$  – амплитуды колебаний осцилляторов. Тогда, подставляя (1.24) в систему (1.22)–(1.23), можно получить собственные частоты колебаний осцилляторов:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2, \omega_2^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon^2. \quad (1.25)$$

Здесь частоте  $\omega_1$  соответствуют синфазные колебания, а частоте  $\omega_2$  – противофазные. Если ввести новые переменные  $u_1 = x_1 + x_2$  и  $u_2 = x_1 - x_2$ , то система уравнений движения примет вид:

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \omega_1^2 u_1 = 0, \quad (1.26)$$

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + \omega_2^2 u_2 = 0. \quad (1.27)$$

То есть система представляется как два независимых консервативных осциллятора с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Новые координаты  $u_1$  и  $u_2$  называются нормальными, а соответствующие им колебания – нормальными колебаниями.

Общее решение системы (1.22)–(1.23) записывается в виде суммы нормальных колебаний. Оно содержит обе частоты, но парциальные колебания имеют разные амплитуды и фазы [25]:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t + i\alpha} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\omega_2 t + i\beta}, \quad (1.28)$$

где  $a$  и  $b$  – вещественные парциальные амплитуды.

Как и в случае систем с одной степенью свободы для рассмотрения свойств данной колебательной системы удобно перейти от вещественного смещения  $x$  к комплексной величине  $\psi$ :

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \left( \omega_0 x_n + i \frac{dx_n}{dt} \right), n = 1, 2. \quad (1.29)$$

Тогда динамические уравнения примут вид:

$$i \frac{d\psi_n}{dt} = \left( \omega_0 + \frac{\Omega}{2} \right) \psi_n + \frac{\Omega}{2} (\psi_n^* - \psi_m^* - \psi_m), n \neq m, n, m = 1, 2, \quad (1.30)$$

где  $\Omega = \varepsilon^2 / \omega_0$  – частота биений.

Система (1.30) может быть заменена иной, но близкой к рассматриваемой системе, допускающей простые решения вида  $e^{-i\omega t}$  [23]:

$$i \frac{d\psi_1}{dt} = \omega_0 \psi_1 + \frac{\Omega}{2} (\psi_1 - \psi_2), \quad (1.31)$$

$$i \frac{d\psi_2}{dt} = \omega_0 \psi_2 + \frac{\Omega}{2} (\psi_2 - \psi_1). \quad (1.32)$$

Полная энергия системы тогда запишется в виде:

$$E = \omega_0 \sum_n |\psi_n|^2 + \frac{\Omega}{2} |\psi_1 - \psi_2|^2. \quad (1.33)$$

Наряду с этим система (1.31)–(1.32) обладает дополнительным интегралом движения:

$$N = \sum_{n=1}^2 |\psi_n|^2. \quad (1.34)$$

С учетом интеграла движения представим решение системы уравнений (1.31)–(1.32) с помощью новых переменных:

$$\psi_1 = \sqrt{N} \cos \theta e^{i\varphi_1}, \quad \psi_2 = \sqrt{N} \sin \theta e^{i\varphi_2}, \quad (1.35)$$

где величина  $\theta$  описывает соотношение амплитуд колебаний отдельных осцилляторов. Подставляя эти переменные в (1.31)–(1.32), получаем:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\Omega}{2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (1.36)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = -\omega_0 - \frac{\Omega}{2} [1 - \operatorname{tg} \theta \cos(\varphi_2 - \varphi_1)], \quad (1.37)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = -\omega_0 - \frac{\Omega}{2} [1 - \operatorname{ctg} \theta \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]. \quad (1.38)$$

Делая подстановку:

$$\psi = \varphi_2 - \varphi_1, \quad u = 2\theta, \quad (1.39)$$

приходим к паре уравнений:

$$\frac{du}{dt} = \Omega \sin \psi, \quad (1.40)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \Omega ctgu \cos \psi. \quad (1.41)$$

Решения системы (1.40)–(1.41) дает зависимость от времени величин  $\theta$  и  $\psi$ , а также однозначно определяют скорость изменения фаз каждого из осцилляторов.

Запишем энергию связанных гармонических осцилляторов через переменные  $u$  и  $\psi$ :

$$E = \left[ \omega_0 + \frac{\Omega}{2} (1 - \cos \psi \sin u) \right] N. \quad (1.42)$$

Тогда энергия для одного возбуждения  $\mu = E/N$  будет равна:

$$\mu = \omega_0 + \frac{\Omega}{2} (1 - \cos \psi \sin u) \quad (1.43)$$

и изменяется в пределах  $\omega_0 \leq \mu \leq \omega_0 + \Omega$ .

## 1.7 Система двух связанных нелинейных осцилляторов

Теперь рассмотрим два нелинейных осциллятора, между которыми имеется линейная связь. Будем считать систему консервативной и оставим только кубическую нелинейность. Таким образом, получаем два линейно связанных осциллятора Дуффинга, полная энергия которых имеет вид [23]:

$$E = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{2} x_i^2 + \frac{\omega_0^2}{2} x_i^2 - \frac{\beta}{4} x_i^4 \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} (x_1 - x_2)^2. \quad (1.44)$$

Соответственно уравнения движения осцилляторов выглядят следующим образом:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + \varepsilon^2 (x_1 - x_2) - \beta x_1^3 = 0, \quad (1.45)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + \varepsilon^2 (x_2 - x_1) - \beta x_2^3 = 0. \quad (1.46)$$

В отсутствие дополнительного интеграла движения рассматриваемая модель не является интегрируемой. Решения системы (1.45)–(1.46) анализируются приближенно.

Для качественного описания колебательных процессов рассмотрим близкую к данной модельную систему, которая является полностью интегрируемой. С учетом ангармонизма колебаний, выраженного дополнением потенциальной энергии

системы слагаемым  $\delta U = -1/2 \alpha \sum_n |\psi_n|^4$ , уравнения движения будут иметь вид [23]:

$$i \frac{d\psi_1}{dt} = \omega_0 \psi_1 + \frac{\Omega}{2} (\psi_1 - \psi_2) - \alpha |\psi_1|^2 \psi_1, \quad (1.47)$$

$$i \frac{d\psi_2}{dt} = \omega_0 \psi_2 + \frac{\Omega}{2} (\psi_2 - \psi_1) - \alpha |\psi_2|^2 \psi_2. \quad (1.48)$$

Здесь также выполняется сохранение полной энергии системы, которая равна:

$$E = \sum_{n=1}^2 \left\{ \omega_0 |\psi_n|^2 - \frac{\alpha}{2} |\psi_n|^4 \right\} + \frac{\Omega}{2} |\psi_1 - \psi_2|^2. \quad (1.49)$$

И кроме этого остается интеграл движения (1.34).

Осуществляя переход к вещественным функциям и переписывая уравнения движения для переменных  $\psi$  и  $u$ , имеем:

$$\frac{du}{dt} = \Omega \sin \psi, \quad (1.50)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \Omega c t g u \cos \psi - \alpha N \cos u. \quad (1.51)$$

Энергия связанных осцилляторов в переменных  $\psi$  и  $u$  будет иметь вид:

$$E = \left[ \omega_0 + \frac{\Omega}{2} (1 - \cos \psi \sin u) \right] N - \frac{\alpha}{4} (1 + \cos^2 u) N^2, \quad (1.52)$$

а энергия, приходящаяся на один период, будет равна:

$$\mu = \omega_0 + \frac{\Omega}{2} (1 - \cos \psi \sin u) - \frac{\alpha}{4} (1 + \cos^2 u) N. \quad (1.53)$$

Сравнивая (1.53) и (1.43), можно видеть, что нелинейность осцилляторов приводит к связыванию элементарных возбуждений, создавая эффект их взаимного притяжения.

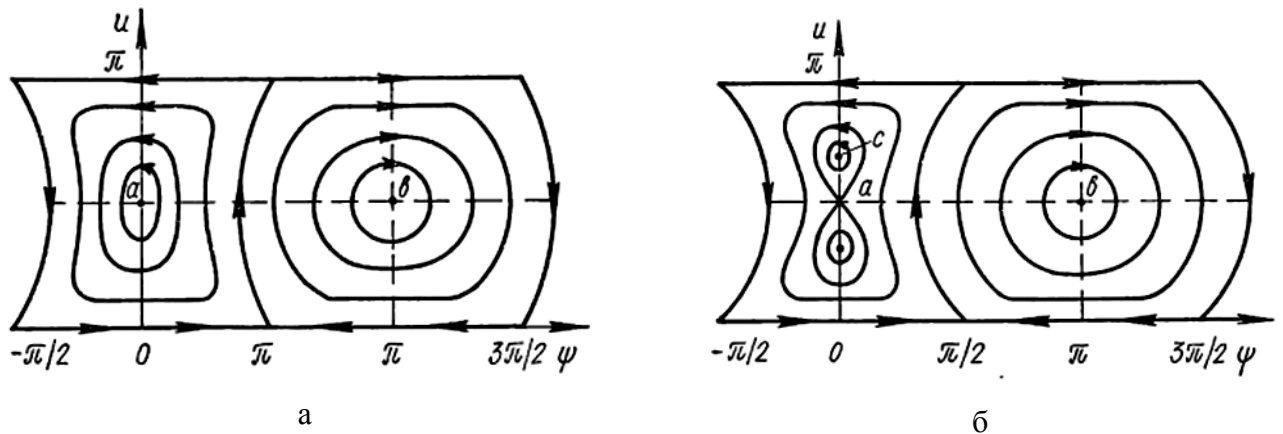


Рисунок 1.2. Фазовые портреты нелинейных колебаний связанных осцилляторов

Анализируя движение на плоскости  $(\psi, u)$ , можно видеть, что для слабонелинейных осцилляторов фазовые портреты во многом совпадают с фазовыми портретами гармонических осцилляторов (рисунок 1.2а) [23].

В отличие от случая гармонических осцилляторов частота вращения изображающей точки по замкнутым фазовым траекториям уже не является постоянной величиной, а зависит от энергии.

С ростом возбуждения (т. е. с ростом  $N$ ) характер колебаний резко меняется.

Из (1.51) следует, что при  $N > N_0 = \Omega/\alpha$ , когда  $\alpha > 0$ , появляется дополнительная пара стационарных точек:

$$\psi = 0, u_{1,2} = \frac{\pi}{2} \pm \arccos\left(\frac{\Omega}{\alpha N}\right), \quad (1.54)$$

соответствующих двум новым типам одночастотных колебаний (рисунок 1.2б). Таким образом, имеет место бифуркация с точкой бифуркации  $N_0 = \Omega/\alpha$ .

Фазовый портрет после точки бифуркации претерпевает существенное изменение (рисунок 1.2б). Точка  $b$  остается особой точкой типа центр, а вот точка  $a$  из особой точки – центра – превращается в седло. Одновременно появляются два новых центра (точки  $c$ ), соответствующие двум новым стационарным состояниям. Поскольку особые точки типа центр обладают устойчивостью, а седловые – не устойчивы, то противофазные колебания устойчивы при всех энергиях. Синфазные колебания устойчивы только до точки бифуркации, а при больших энергиях – не устойчивы.

## 1.8 Классическая теория ферромагнитного резонанса

Классический подход к обсуждению колебаний магнитного момента основан на уравнении движения для вектора намагниченности  $\vec{M}$  в предположении, что длина этого вектора остается постоянной [2]:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma \vec{M} \times \vec{H}, \quad (1.55)$$

при этом равновесное направление вектора намагниченности определяется условием:

$$\vec{M}_0 \times \vec{H}_0 = 0, \quad (1.56)$$

где  $\vec{M}_0$  – равновесное значение вектора  $\vec{M}$ , а  $\vec{H}_0$  – статическое поле.

Нарушение этого равновесия вызывает прецессионное движение вектора  $\vec{M}$ . Частота прецессии зависит от момента сил, действующих на вектор  $\vec{M}$ , и определяется формулой Лармора для прецессии свободного магнитного момента в магнитном поле [26]:

$$\omega = \gamma H, \quad (1.57)$$

где  $\gamma$  – гиромагнитное отношение.

В реальных ферромагнетиках прецессию намагниченности неизбежно сопровождают процессы диссипации энергии, которые по своей сути довольно разнообразны и сложны. В рамках классической теории диссипацию достаточно учесть феноменологически, дополнив правую часть уравнения (1.55) некоторым подходящим выражением. Чаще всего используется одно из следующих выражений:

$$-\frac{\gamma\alpha}{M} [\vec{M} \times (\vec{M} \times \vec{H})], \quad (1.58)$$

$$-\frac{\vec{M}-\vec{M}_0}{\tau} + \frac{|\vec{M}|}{|\vec{H}|} \frac{\vec{H}}{\tau}. \quad (1.59)$$

Выражение (1.4) было предложено Ландау и Лифшицем [27], а (1.59) – Блохом и Бломбергенем [28]. В этих выражениях  $\alpha$  обозначает постоянную затухания (параметр диссипации),  $\tau$  – время релаксации, т. е. время, за которое (в отсутствие переменного поля) происходит затухание прецессии (уменьшение амплитуды отклонения вектора намагниченности в  $e$  раз).

Влияние потерь может быть скомпенсировано слабым поляризованным по кругу высокочастотным полем  $\vec{h}$ , приложенным в плоскости, перпендикулярной постоянному полю, и вращающемся в том же направлении, что и вектор намагниченности, с частотой, близкой к собственной частоте прецессии (1.57).



Чтобы мог возникнуть резонанс, частота  $\omega$  (1.57) должна быть значительно больше, чем  $\tau^{-1}$ . Времена релаксации в ферромагнетиках, как правило, малы, и обычно составляют  $10^{-7} - 10^{-10}$  с. Из чего следует, что ферромагнитный резонанс может исследоваться лишь при достаточно высоких частотах – в диапазоне сантиметровых или ещё более коротких волн [29].

Как правило, для решения уравнения (1.55) магнитное поле и намагниченность представляют в виде постоянных и переменных составляющих [2]:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}_\sim, \vec{M} = \vec{M}_0 + \vec{m}_\sim \quad (1.60)$$

в предположении, что

$$h_\sim \ll H_0, m_\sim \ll M_0. \quad (1.61)$$

Используя метод последовательных приближений и метод комплексных амплитуд [30], решение уравнения (1.55) может быть представлено в тензорном виде [31]:

$$\vec{m}_\sim = \vec{\chi} \vec{h}_\sim, \quad (1.62)$$

где  $\vec{\chi}$  – магнитная восприимчивость, являющаяся тензором [32]:

$$\vec{\chi} = \begin{vmatrix} \chi & i\chi_a & 0 \\ -i\chi_a & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (1.63)$$

Компоненты этого тензора имеют вид:

$$\chi = \frac{\gamma M_0 \omega_H}{\omega_H^2 - \omega^2}, \chi_a = \frac{\gamma M_0 \omega}{\omega_H^2 - \omega^2}, \quad (1.64)$$

где  $\omega_H = \gamma H_0$ .

Особенностью данного решения является то, что тензор восприимчивости является несимметричным. У него присутствуют антисимметричные компоненты  $i\chi_a$  и  $-i\chi_a$ , свидетельствующие о наличии гиротропии.

Ещё одна особенность – это резонансная зависимость компонент тензора от частоты переменного поля  $\omega$ , а также от величины постоянного поля  $H_0$ . В условиях отсутствия диссипации компоненты тензора восприимчивости неограниченно возрастают при  $\omega = \omega_H \equiv \gamma H_0$ . На рисунке 1.3 приведены зависимости  $\chi$  и  $\chi_a$  от значений  $\omega$  и  $H_0$  [2]. Такое резонансное поведение компонент тензора высокочастотной магнитной восприимчивости ферромагнетика и является причиной

ферромагнитного резонанса – явления, заключающегося в резонансном поглощении энергии электромагнитного поля ферромагнетиком.

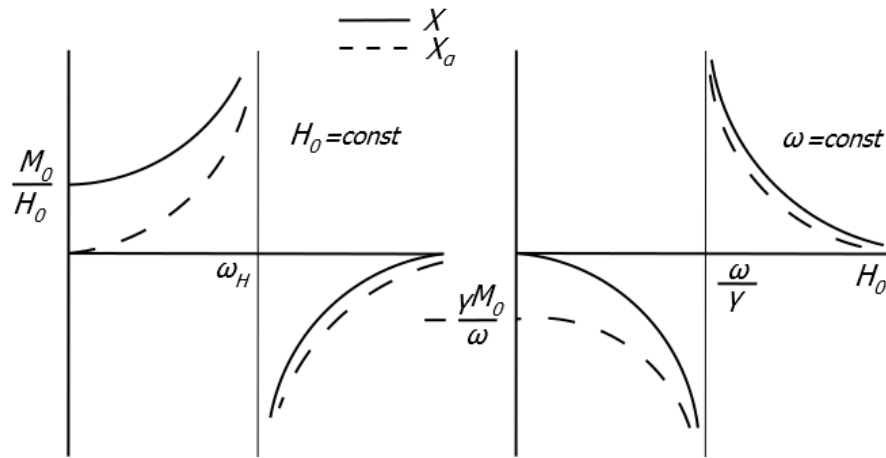


Рисунок 1.3. Резонансное поведение компонент тензора магнитной восприимчивости  $\vec{\chi}$  в отсутствие диссипации.

При учете диссипации энергии переменного магнитного поля компоненты тензора восприимчивости  $\chi$  и  $\chi_a$  становятся комплексными:  $\chi = \chi' - i\chi''$ ,  $\chi_a = \chi'_a - i\chi''_a$ .

Так, если учесть потери, записав их, например, в форме, предложенной Ландау и Лифшицем (1.58), то компоненты тензора восприимчивости примут вид [33]:

$$\chi' = B^{-1}\gamma M_0 \omega_H [\omega_H^2 - (1 - \alpha^2)\omega^2] \quad (1.65)$$

$$\chi'' = B^{-1}\alpha\gamma M_0 \omega [\omega_H^2 + (1 + \alpha^2)\omega^2] \quad (1.66)$$

$$\chi'_a = B^{-1}\gamma M_0 \omega [\omega_H^2 - (1 + \alpha^2)\omega^2] \quad (1.67)$$

$$\chi''_a = B^{-1}2\alpha\omega^2\gamma M_0 \omega_H \quad (1.68)$$

$$B = [\omega_H^2 - (1 + \alpha^2)\omega^2]^2 + 4\alpha^2\omega^2\omega_H^2 \quad (1.69)$$

Диссипация энергии переменного магнитного поля связана с мнимыми частями  $\chi''$  и  $\chi''_a$ . На рисунке 1.4 приведены зависимости компонент  $\chi'$  и  $\chi''$  от  $H_0$  при различных значениях параметра  $\alpha$ , характеризующего потери [34]. Видно, что кривые остаются конечными при резонансе, который наступает при значении поля  $\omega_H/\gamma$ .

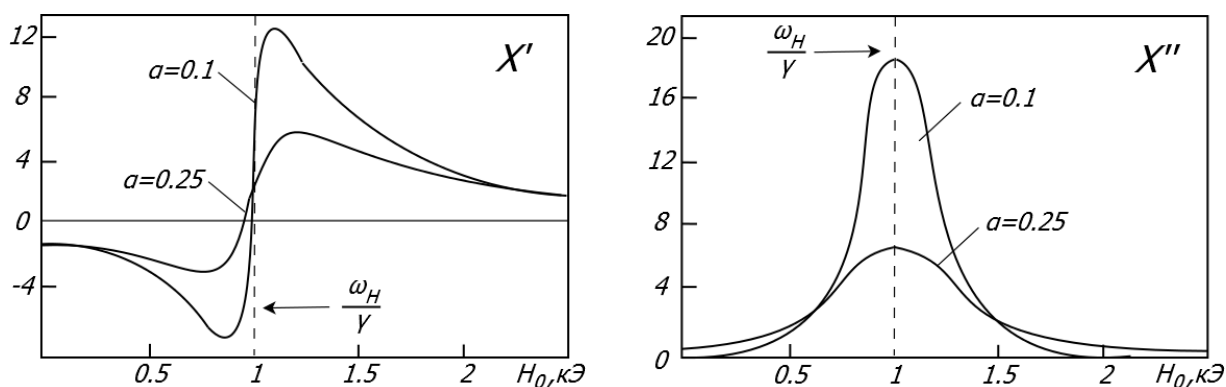


Рисунок 1.4 Зависимости вещественной и мнимой частей компоненты  $\chi$  тензора восприимчивости от  $H_0$  для двух значений постоянной затухания  $\alpha$ .

Значения мнимых частей восприимчивости тем больше, чем меньше параметр  $\alpha$ , т. е. поглощение энергии переменного магнитного поля возрастает при уменьшении частоты релаксации. Зачастую для определения этой частоты релаксации пользуются значением ширины резонансной кривой, определяемой разностью полей, при которых  $\chi'' = \frac{1}{2} \chi'_{max}$ . Через полуширину линии резонансного поглощения частота релаксации выражается в виде:

$$\omega_r = \frac{\gamma \Delta H}{2}. \quad (1.70)$$

Ширина и форма резонансной линии зависят от природы релаксационных процессов и изменяются в широких пределах для различных кристаллов ферромагнетиков.

### 1.9 Нелинейный ферромагнитный резонанс

Вышеизложенное описание явления ФМР подразумевало, что угол прецессии вектора намагниченности был достаточно мал, что позволило в уравнении движения пренебречь членами, нелинейными по динамическим составляющим поля и намагниченности. То есть принималось, что  $M_z \approx |\vec{M}| = const$ ,  $\dot{M}_z = \dot{m}_z \approx 0$ . Однако, в общем случае уравнение (1.55) с включенными членами, учитывающими потери, является нелинейным. Поэтому полученные в результате его решения динамические компоненты намагниченности  $m_i$  ( $i = x, y, z$ ) должны представлять собой нелинейные функции амплитуды высокочастотного магнитного поля. Таким образом, уже сама нелинейность классического уравнения движения

приводит к нелинейной связи между динамической составляющей намагниченности  $\vec{m} = \vec{m}(t)$  и высокочастотным полем даже в случае решения для однородной прецессии [29].

Решение нелинейного уравнения движения [35] показывает, что увеличение угла прецессии приводит к двум новым явлениям: уменьшению среднего значения компоненты намагниченности вследствие уменьшения статической составляющей и появлению отличной от нуля динамической составляющей  $m_z$ . Неравенство нулю  $m_z$  следует из соотношения для мгновенных значений компонент намагниченности:

$$M_0^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = m_x^2 + m_y^2 + (m_z + \langle M_z \rangle)^2 \quad (1.71)$$

при выполнении условия

$$|\vec{M}| = M_0 = \text{const}, \quad (1.72)$$

которое имеет силу при использовании диссипативного члена в форме Ландау и Лифшица (1.58). При сохранении в уравнении движения членов до второго порядка включительно для не очень больших амплитуд выражение (1.71) заменяется приближенным равенством

$$M_z = \langle M_z \rangle + m_z \approx M_0 - \frac{1}{2M_0} (m_x^2 + m_y^2). \quad (1.73)$$

В случае эллиптической прецессии вектора  $\vec{M}$ , которая может возникать из-за кристаллографической магнитной анизотропии, анизотропии формы или вследствие линейной поляризации высокочастотного поля амплитуды компонент  $m_x$  и  $m_y$  отличаются друг от друга. При соблюдении условия (1.72) линия, описываемая концом вектора  $\vec{M}$ , не будет плоской, вследствие чего и возникает отличная от нуля периодическая компонента  $m_z$ . При этом сумма  $m_x^2 + m_y^2$  представляет собой периодическую функцию времени с частотой  $2\omega$ . Такой же функцией является и компонента  $m_z$ . При этом уменьшение статической составляющей намагниченности  $\Delta M_z = M_0 - \langle M_z \rangle$  и амплитуда динамической составляющей  $m_z$  пропорциональны квадрату амплитуды высокочастотного поля  $h$ .

Вследствие больших амплитуд поля и намагниченности линейная связь между ними утрачивается, что приводит к таким нелинейным эффектам, как детектирование колебаний, умножение и преобразование частоты.

Решение уравнения Ландау–Лифшица при произвольной амплитуде переменного поля возможно лишь в ограниченном числе случаев [2]. Самым простым из них является прецессия намагниченности под действием переменного магнитного поля с круговой поляризацией. Так, в своих трудах Скроцкий и Алимов [36] показали, что характер нелинейной прецессии существенно зависит от вида диссипативного члена в уравнении движения.

В случае использования диссипативного члена в форме Блоха–Бломбергена (1.5) решение уравнения движения следует искать в виде:

$$\vec{M} = m_0[\vec{x}_0 \cos(\omega t + \varphi) + \vec{y}_0 \sin(\omega t + \varphi)] + \vec{z}_0 M_z, \quad (1.74)$$

которое подразумевает представление постоянного внутреннего поля и поперечного переменного поля с круговой поляризацией и правым вращением соответственно в виде:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}_\sim, \quad (1.75)$$

$$\vec{h}_\sim = h_0[\vec{x}_0 \cos(\omega t) + \vec{y}_0 \sin(\omega t)]. \quad (1.76)$$

Таким образом, переменная намагниченность будет лежать в плоскости  $xu$  и так же иметь круговую поляризацию и правое вращение, но может быть сдвинута по фазе относительно поля  $\vec{h}_\sim$ . При этом постоянная намагниченность будет направлена вдоль оси  $z$  и не будет равна равновесной намагниченности.

С учетом (1.75)–(1.76) из решения уравнения движения можно получить комплексную нелинейную циркулярную восприимчивость, которая определяется следующим образом:

$$\chi_{+n} = m_0 e^{i\varphi} / h_0. \quad (1.77)$$

Выражения для  $M_z$  и мнимой части  $\chi_{+n}$  при резонансе ( $\omega = \gamma H_0$ ) будут иметь вид:

$$M_{z \text{ res}} = \frac{M_0}{1 + \gamma^2 h_0^2 / \omega_r^2}, \quad (1.78)$$

$$\chi''_{+n res} = \frac{\gamma}{\omega_r} M_{z res}. \quad (1.79)$$

Видно, что нелинейная восприимчивость не является, как в случае малых амплитуд, постоянной величиной, а зависит от амплитуды переменного поля.

В случае решения уравнения движения с диссипативным членом, когда длина вектора  $\vec{M}$  сохраняется, например, в форме Гильберта:

$$\frac{\alpha}{M} \vec{M} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}, \quad (1.80)$$

имеем качественно другие результаты. Переменная намагниченность и мнимая компонента циркулярной восприимчивости при резонансе будут иметь вид [36]:

$$\text{при } h_0 \leq \alpha\omega/\gamma \quad M_{z res} = M_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2 h_0^2}{\alpha^2 \omega^2}}, \quad \chi''_{+n res} = \frac{\gamma M_0}{\alpha\omega} \quad (1.81)$$

$$\text{при } h_0 \geq \alpha\omega/\gamma \quad M_{z res} = 0, \quad \chi''_{+n res} = M_0 h_0. \quad (1.82)$$

На рисунке 1.5 показаны кривые зависимостей динамической намагниченности и нелинейной восприимчивости от амплитуды переменного поля в области резонанса, рассчитанные для диссипативных членов в форме Блоха–Бломбергера и Гильберта [2].

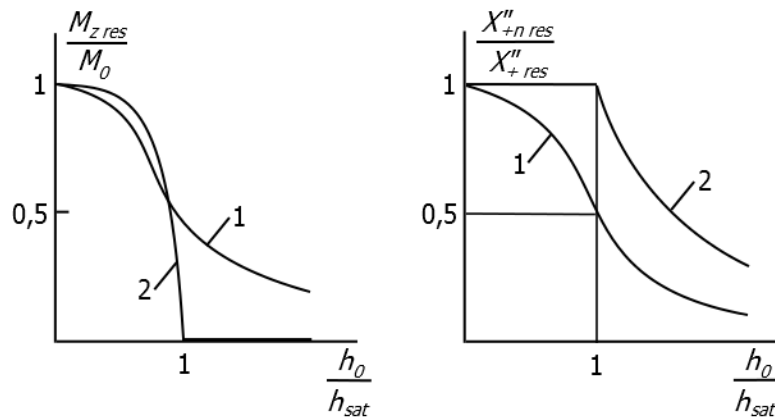


Рисунок 1.5. Зависимости намагниченности и нелинейной восприимчивости при резонансе от амплитуды переменного поля, найденные из решений уравнения движения намагниченности с диссипативными членами в форме Блоха–Бломбергера (кривые 1) и Гильберта (кривые 2), где

$$h_{sat} \approx \frac{1}{2} \Delta H - \text{половина ширины линейной резонансной кривой.}$$

Из рисунка 1.5 видно, что при увеличении высокочастотного поля наступает насыщение резонансного поглощения, что характеризуется уменьшением энергии, поглощаемой образцом, т. е. уменьшением резонансного максимума мнимой части восприимчивости.

Рассмотренные выше решения уравнений движения с разными диссипативными членами в первую очередь справедливы для безграничной среды. Также они справедливы для сферы и эллипсоида вращения (сфероида), находящегося в постоянном поле, совпадающем с осью вращения, и переменном поле с круговой поляризацией [2]. Для такого сфероида собственная частота будет иметь вид:

$$\omega_{0n} = \gamma[H_{e0} + (N_{\perp} - N_z)M_z], \quad (1.83)$$

где  $H_{e0}$  – внешнее магнитное поле,  $N_{\perp}$  и  $N_z$  – размагничивающие факторы сфероида. Принимая во внимание (1.81), видно, что собственная частота зависит от амплитуды прецессии  $m_0$ : для сплющенного сфероида ( $N_z > N_{\perp}$ ) она будет расти с ростом  $m_0$ , для вытянутого сфероида ( $N_z < N_{\perp}$ ) – уменьшаться. При этом сама амплитуда  $m_0$  резонансным образом (при заданной частоте переменного поля) зависит от собственной частоты  $\omega_0$ . Это обстоятельство приводит к неустойчивости колебаний. Данную неустойчивость подробно в своей работе рассмотрели Скроцкий и Алимов [37]. Они показали, что в некотором интервале значений  $\omega$  и  $H_{e0}$  указанная неустойчивость приводит к неоднозначной зависимости  $m_0$  и  $M_z$  от значений  $\omega$  или  $H_{e0}$ . Неоднозначность возникает, когда амплитуда переменного поля превышает некоторую критическую величину. Вследствие чего резонансные кривые приобретают ярко выраженный наклон, и наблюдается гистерезис. В некоторых электродинамических системах, содержащих подобные несферические образцы при достаточно большом уровне накачки, могут иметь место автоколебания [38, 39].

Как показали эксперименты по исследованию ферромагнитного резонанса в сильно переменных полях [40, 41], спад мнимой компоненты нелинейной восприимчивости наступает при значительно меньших полях, чем величина  $\Delta H/2$ , а также проявляются другие нелинейные эффекты, например, появляется дополнительный максимум поглощения в области малых постоянных полей, когда амплитуда поля превышает некоторое, пороговое, значение [42]. Это все указывает на то, что теория, основанная на учете только лишь однородной прецессии, не способна объяснить все эти явления.

Если искать решение нелинейного уравнения движения в виде ряда Фурье, то после подстановки этого ряда в уравнение в нем возникнут произведения амплитуд спиновых волн с различными значениями  $\vec{k}$ . Это означает, что спиновые волны уже не могут существовать независимо друг от друга, что и вызывает ряд новых нелинейных явлений. Из-за наличия в решении нелинейного уравнения спиновых волн с  $\vec{k} \neq 0$  существует вероятность превращения магнонов с  $\vec{k} = 0$  в магноны с  $\vec{k} \neq 0$  и обратно [29]. Таким образом, для рассмотрения нелинейных процессов требуется ещё принимать во внимание параметрическое возбуждение спиновых волн, которые оказывают существенное влияние на наблюдение стабильных нелинейных процессов.

Впервые теория, объясняющая преждевременное насыщение мнимой компоненты нелинейной восприимчивости и возникновение дополнительного максимума поглощения при ферромагнитном резонансе в сильных высокочастотных полях, была предложена Сулом [43]. Теория Сула основана на неустойчивости определенных спиновых волн, возникающей при больших углах однородной прецессии. Данная неустойчивость заключается в том, что спиновые волны, связанные с однородной прецессией вследствие нелинейности уравнения движения, при достижении определенного критического значения угла прецессии начинают быстро нарастать, т. е. имеет место отток энергии от однородной прецессии, и вследствие этого дальнейшего роста угла прецессии уже не происходит. При этом стационарное движение магнитного момента будет складываться из однородной прецессии с углом прецессии, равным критическому, и определенных спиновых волн. Число таких спиновых волн с  $\vec{k} \neq 0$  достаточно велико, поэтому, когда переменное поле достигает порогового значения,  $\alpha$ -компонента и величина вектора намагниченности начинают уменьшаться.

Рассматривая аномальный ход  $\chi''_{res}(h)$  и возникновение дополнительного максимума поглощения, Сул указывает на существование двух различных видов неустойчивости, которые связаны с наличием двух сравнительно узких групп спиновых волн, способных возрастать под действием однородной прецессии. От-



бор энергии однородной прецессии в каждом из этих случаев осуществляется при помощи разных механизмов. В первом случае задействован трехмагنونный процесс, при котором уничтожается магنون с  $\vec{k} = 0$  и вместо него возникают два магнона с  $\vec{k}_1, \vec{k}_2 \neq 0$ . Из законов сохранения энергии и импульса получаются условия:

$$\vec{k}_1 = -\vec{k}_2 = \vec{k}, \quad (1.84)$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{\vec{k}} + \varepsilon_{-\vec{k}}, \quad (1.85)$$

из которых следует, что

$$\omega_{\vec{k}} = \frac{1}{2}\omega, \quad (1.86)$$

где  $\omega$  – частота высокочастотного поля. Во втором случае имеет место четырехмагنونный процесс, при котором при сохранении энергии и импульса исчезают два магнона с  $\vec{k} = 0$ , и возникают два магнона с векторами  $\vec{k}$  и  $-\vec{k} \neq 0$  такой же частоты:

$$\omega_{\vec{k}} = \omega. \quad (1.87)$$

Как видно из этих соотношений частот, четырехмагنونный процесс соответствует основному максимуму резонансного поглощения, тогда как трехмагنونный – дополнительному.

Для объяснения причины возникновения дополнительного максимума обратимся к спектру спиновых волн малого эллипсоида вращения. Дисперсионное соотношение, т. е. зависимость частоты  $\omega_{\vec{k}}$  от волнового вектора  $\vec{k}$ , для такой формы образца записывается в виде [44]:

$$\omega_{\vec{k}} = \gamma \sqrt{(H^i + H_{\text{обм}} a^2 k^2)(H^i + H_{\text{обм}} a^2 k^2 + 4\pi M \sin^2 \Theta)}, \quad (1.88)$$

где  $H^i = H_z - N_z M$  – статическое поле внутри эллипсоида,  $H_{\text{обм}} = \nu M$ ,  $\Theta$  – угол, который вектор  $\vec{k}$  образует с направлением поля  $\vec{H}^i$ . Спектр спиновых волн, определяемый выражением (1.88), показан на рисунке 1.6 [29].

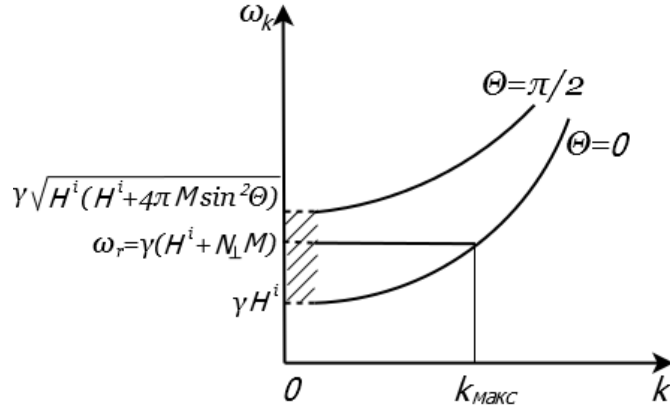


Рисунок 1.6. Спектр спиновых волн в эллипсоиде вращения.

При возрастании  $k$  член  $4\pi M \sin^2 \Theta$  в выражении (1.88) становится всё менее значимым, и зависимость  $\omega_k$  от  $k$  приближается к параболической. Однако при уменьшении  $k$  роль этого члена возрастает по сравнению с  $H_{\text{обм}} a^2 k^2$ . В результате в спектре появляется полоса частот, заключенная между  $\omega_{\text{мин}}$ , соответствующей  $\Theta = 0$ , и  $\omega_{\text{макс}}$ , соответствующей  $\Theta = \pi/2$ . Частота однородной прецессии, как спиновой волны с  $\vec{k} = 0$ , т. е. с бесконечно большой длиной волны, будет лежать внутри экстраполированного к  $k = 0$  спин-волнового спектра при больших значениях внутреннего поля  $H^i$ . Для эллипсоида вращения из дисперсионного соотношения (1.88) и резонансного условия:

$$\omega_r = \gamma[H_z - (N_z - N_{\perp})M] \quad (1.89)$$

можно получить, что  $\omega_r$  будет находиться внутри полосы, т. е.  $\omega_{\text{мин}} \leq \omega_r \leq \omega_{\text{макс}}$ , при выполнении условия:

$$H_z \geq \frac{M}{N_z} (N_{\perp}^2 + N_z^2), \quad (1.90)$$

где  $N_{\perp}$  – размагничивающий фактор в направлении, перпендикулярном оси эллипсоида. Если данное условие не выполняется,  $\omega_r$  будет превышать  $\omega_{\text{макс}}$ , т. е. частота однородной прецессии будет лежать выше полосы частот спиновых волн.

Из рисунка 1.6 видно, что всегда существуют спиновые волны, собственные частоты которых совпадают с  $\omega_r$ . Эти волны вырождены с однородной прецессией. Число таких волн и соответствующая область значений волнового вектора  $\vec{k}$  зависят в общем случае от положения частоты  $\omega_r$  по отношению к полосе частот спиновых волн. Наибольшее число вырожденных спиновых волн достигается при

$\omega_r = \omega_{\text{макс}}$ . Оно убывает при отклонении от этого условия в обе стороны, и при  $\omega_r = \omega_{\text{мин}}$  обращается в нуль. Такое вырождение спиновых волн с однородной прецессией является следствием ограниченности образца [44]. В случае безграничного образца всегда было бы справедливо равенство  $\omega_r = \omega_{\text{мин}}$ , и вырождение отсутствует.

Из дисперсионного выражения (1.88) следует, что при заданном  $k$  частота является функцией формы образца, намагниченности  $M$  и внешнего постоянного поля  $H$ . Для эллипсоида вращения  $\omega_{\vec{k}}$  является возрастающей функцией  $H$ , поэтому с ростом постоянного поля весь спектр волн перемещается вверх (рисунок 1.6). При включении высокочастотного поля с заданной частотой  $\omega$  в некоторых пределах изменения этой частоты и поля  $H$  будут существовать спиновые волны с определенным волновым вектором  $\vec{k}$ , удовлетворяющие условию (1.93) и способные к нестабильному росту. В виду того, что частота приложенного поля  $\omega$  значительно отличается от резонансной частоты однородной прецессии при том же значении поля  $H$ , такие спиновые волны могут стать причиной возникновения дополнительного максимума поглощения. В противном случае дополнительный максимум сливается с основным, и трехмагنونный процесс участвует в насыщении основного резонанса [29]. Реализация любого из этих случаев зависит от того, будет частота высокочастотного поля выше или ниже характеристической частоты  $\omega_{\text{пр}}$ . Дополнительный максимум появляется только при  $\omega > \omega_{\text{пр}}$ , в то время как при  $\omega < \omega_{\text{пр}}$  имеет место только насыщение основного резонанса.

Значение порогового высокочастотного поля, при котором возникает дополнительный максимум поглощения, в первом приближении определяется формулой [44]:

$$h'_{\text{пор}} \approx \frac{(\omega - \omega_r)\Delta H_k}{2\pi\gamma M}, \quad (1.91)$$

а насыщение основного резонанса происходит при значениях поля, превышающих пороговую величину:

$$h_{\text{пор}} = \Delta H \sqrt{\frac{\Delta H_k}{4\pi M}}, \quad (1.92)$$

где  $\Delta H_k$  – ширина резонансной кривой спиновых волн, а  $\Delta H$  – ширина линии ферромагнитного резонанса.

Как указывалось ранее, при взаимном перпендикулярном расположении переменного и постоянного магнитных полей (поперечная накачка) возбуждение спиновых волн происходит при участии однородной прецессии намагниченности, где магны с  $\vec{k} = 0$  превращаются в магны с  $\vec{k} \neq 0$ . В случае сонаправленного расположения векторов  $\vec{h}$  и  $\vec{H}$  при определенных условиях возможно непосредственное возбуждение спиновых волн высокочастотным полем (продольная накачка). Этот метод был предложен Шлёманном [45] и Моргенталером [46]. Главным условием возбуждения спиновых волн при продольной накачке является наличие связи между переменным полем и прецессией намагниченности спиновой волны, которая должна быть эллиптической. Для эллиптичности прецессии спиновой волны с  $\vec{k} \neq 0$  вполне достаточно внутреннего размагничивающего поля, которое пропорционально  $\sin \Theta_k$  и вследствие чего не обращается в нуль, если  $\sin \Theta_k \neq 0$ . Здесь  $\Theta_k$  – угол между волновым вектором и постоянным полем  $\vec{H}$ . При этом намагниченность будет обладать отличной от нуля компонентой, параллельной полям  $\vec{h}$  и  $\vec{H}$  и осциллирующей с частотой, равной двойной частоте спиновой волны:

$$\omega = 2\omega_{\vec{k}} = \omega_{\vec{k}} + \omega_{-\vec{k}}. \quad (1.93)$$

При этом учтено, что стоячая волна представляет собой наложение двух бегущих волн с волновыми векторами  $\vec{k}$  и  $-\vec{k}$ .

Из решения уравнения движения (1.55) следует, что само возбуждение продольным высокочастотным полем является нелинейным. Действительно, т.к. высокочастотное поле входит в уравнение только в виде произведений с динамическими составляющими намагниченности, то мощность, поглощаемая спиновой системой, помимо того, что напрямую зависит от амплитуды высокочастотного поля, ещё растёт пропорционально числу возбуждаемых спиновых волн. При этом мощность, теряемая при процессах релаксации и передаваемая спиновой системой решетке, пропорциональна только числу магнов. Таким образом, при росте

амплитуды возбуждающего поля поглощаемая мощность растет быстрее, чем диссипируемая, вследствие чего возникает пороговое поле, при котором вся поглощенная спиновой системой мощность ещё может быть передана в решетку. При полях выше порогового значения это уже становится невозможным, и возникает неустойчивость, проявляющаяся в виде экспоненциального роста во времени амплитуд спиновых волн.

Благодаря такой неустойчивости возбуждение спиновых волн продольным переменным полем может экспериментально наблюдаться при полях  $h > h_{\text{пор}}$ . Так как пороговое поле есть функция волнового вектора возбуждаемых спиновых волн, то при изменении величин  $\omega$  и  $H$  будут возбуждаться спиновые волны с различными  $\vec{k}$ . При этом в первую очередь будут возбуждаться волны, для которых пороговое поле  $h_{\text{пор}}$  минимально. Величина этого поля определяется соотношением:

$$h_{\text{пор}} = \frac{\omega \Delta H_k}{4\pi M \gamma \sin^2 \Theta_k}, \quad (1.94)$$

которое вытекает из закона сохранения энергии [29]. Из этого выражения следует, что при продольной накачке в первую очередь возбуждаются спиновые волны с волновыми векторами, перпендикулярными постоянному магнитному полю. Для таких волн внутреннее размагничивающее поле и, как следствие, эллиптичность будут наибольшими, и они сильнее связаны с высокочастотным полем.

Как видно, резонансные явления в нелинейной области очень разнообразны, но в реальном магнетике наблюдать их бывает затруднительно, т.к. они перекрываются параметрическим возбуждением обменных спиновых волн, порог возбуждения которых значительно ниже. Чтобы избежать влияния параметрического возбуждения спиновых волн, необходимо выбирать специальную геометрию образца, а именно образец в виде тонкой пластины, намагниченной постоянным магнитным полем, перпендикулярным ее плоскости [8–12]. В такой геометрии частота ферромагнитного резонанса приходится на низшую частоту спектра спиновых волн, где их плотность состояний стремится к нулю, вследствие чего влияние

параметрического возбуждения исключается. В этом случае стабильные нелинейные процессы проявляются в чистом виде.

### 1.10 Виды нелинейной прецессии намагниченности

Разнообразие нелинейных эффектов обусловленных нелинейной динамикой намагниченности вызывает большой интерес при исследовании воздействия высокочастотного поля накачки на диссипативную спиновую систему [2,6,47]. Так, например, в работе [48] рассматриваются особенности прецессионного движения магнитного момента в режиме ферромагнитного резонанса, обусловленные нутационным движением в эффективном поле и эффектом удвоения частоты. Показано, что при больших углах прецессии и при линейной поляризации высокочастотного поля определенная симметрия поля анизотропии материала приводит к проявлению в нутационном движении намагниченности в режиме ФМР более высоких гармоник основной частоты прецессии. В указанной работе особенности динамики вектора намагниченности рассматриваются в перпендикулярно подмагниченной феррит-гранатовой пленке с кубической симметрией и нормалью, совпадающей с кристаллографической осью [111]. Была выбрана пленка со следующими параметрами:

$$4\pi M = 214.6 \text{ G}; \gamma = 1.755 \cdot 10^7 (\text{Oe} \cdot \text{s})^{-1}; \lambda = 3 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1};$$

$$K_u = -10^3 \text{ erg/cm}^3, K_1 \simeq -10^3 \text{ erg/cm}^3.$$

Уравнение движения намагниченности решалось численно в предположении, что ориентация статического магнитного поля  $\vec{H}$  перпендикулярна поверхности пленки, а величина поля выбиралась такой, чтобы равновесная ориентация намагниченности также была нормальной. Принималось, что высокочастотное поле является линейно поляризованным и ориентированным вдоль оси  $y$ . Авторы показали, что в данной геометрии ФМР в нутационном движении вектора  $\vec{M}$  преобладает третья гармоника резонансной частоты  $\omega_r$ . Зависимости среднего значения угла прецессии  $\phi_0$  и вкладов в нутационное движение магнитного момента

первых трех гармоник  $\phi_{n\omega}$  ( $n = 1,2,3$ ) от величины намагничивающего поля  $H$  приведены на рисунке 1.7 [48].

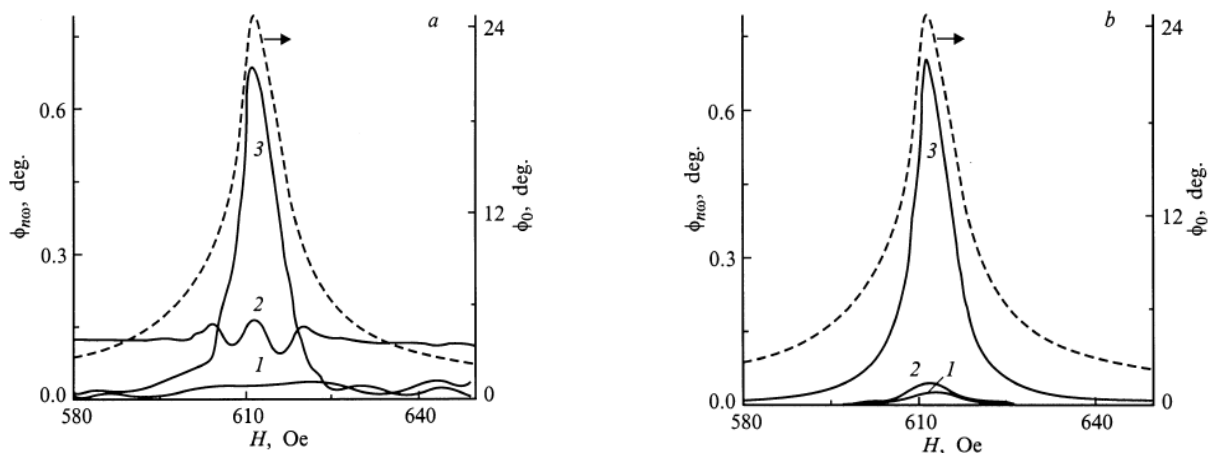


Рисунок 1.7. Зависимости вклада в угол прецессии различных гармоник  $\phi_{n\omega}$  ( $n = 0$  – пунктирные кривые,  $n = 1,2,3$  – сплошные кривые) от намагничивающего поля  $H$  для случаев линейной ( $h = 3 Oe$ ,  $a$ ) и круговой ( $h = 1.5 Oe$ ,  $b$ ) поляризации высокочастотного поля.

Из приведенных зависимостей видно, что для разных значений СВЧ-поля амплитуды основных гармоник угла прецессии остаются практически одинаковыми для линейной и круговой поляризации поля. Помимо  $\phi_0$  для обеих поляризаций на резонансной частоте достигает максимума третья гармоника  $\phi_{3\omega}$ , которая значительно превосходит по величине, как первую, так и вторую гармоники. Это относится и к линейной, и к круговой поляризации высокочастотного поля. По мере удаления от резонанса при линейной поляризации СВЧ-поля всё больше проявляется эффект удвоения частоты, и преобладающей становится вторая гармоника, величина которой практически не зависит от намагничивающего поля. При выбранном значении амплитуды высокочастотного поля она мала и существенного вклада в нутационное движение вектора намагниченности не вносит. В случае круговой поляризации во всем рассматриваемом диапазоне статического поля  $H$  величины первой и второй гармоник пренебрежимо малы.

## 1.11 Резонансная прецессия намагниченности при различных уровнях магнитных полей

Как отмечалось в работе [48], максимальные углы резонансной прецессии достигаются только при определенных значениях величины статического и высокочастотного полей, наведенной и кристаллографической анизотропии. В работе [49] показано, что наряду с этим имеют место бифуркации, резко меняющие амплитуду и приводящие к состояниям бистабильности, а также способствующие установлению прецессионного движения с периодом, кратным периоду высокочастотного поля. Оставаясь в рамках геометрии задачи, принятой в работе [48], и проведя численный анализ уравнения движения намагниченности для реальной феррит-гранатовой пленки  $Y_{2.9}La_{0.1}Fe_{3.9}Ga_{11}O_{12}$  [50], было показано, что в зависимости от значений намагничивающего и высокочастотного полей реализуются режимы резонансной прецессии намагниченности, сильно отличающиеся по амплитуде и форме траектории. Соответствующие проекции траекторий намагниченности приведены на рисунке 1.8 [49].

Из рисунка 1.8а видно, что попеременное увеличение намагничивающего и высокочастотного полей ведет к переходу от режима, при котором ось прецессии совпадает с нормалью, к режиму, когда при росте СВЧ-поля намагниченность отклоняется к одному из трех направлений, определяемых статическим полем и анизотропией, вокруг которого устанавливается прецессионное движение.

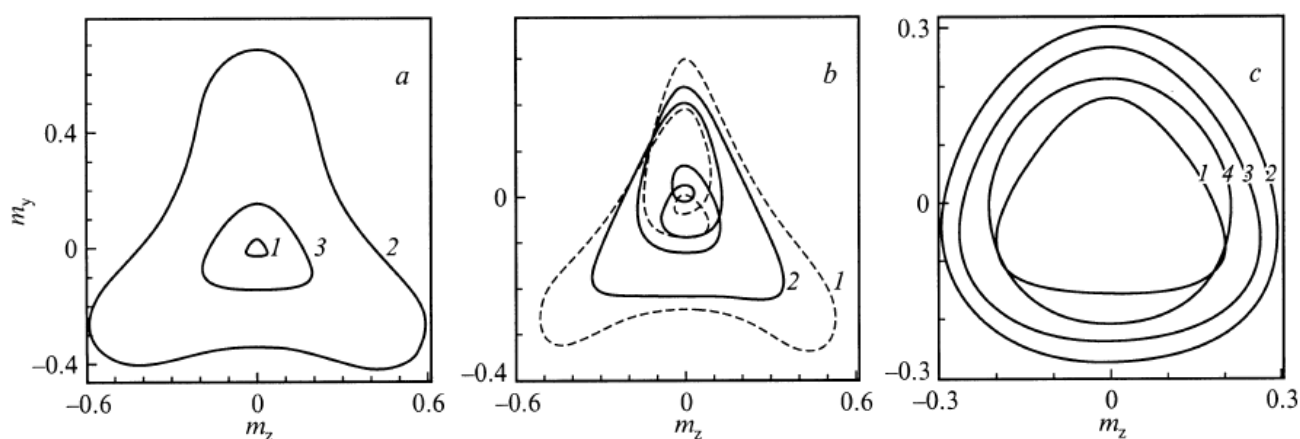


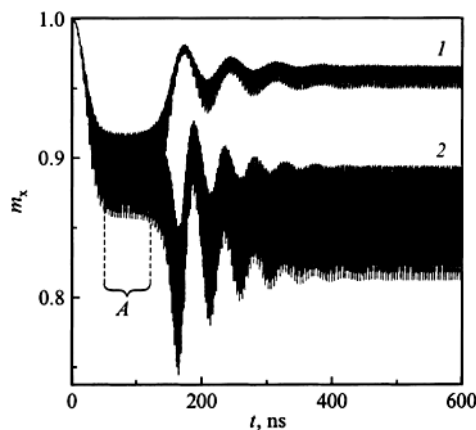
Рисунок 1.8. Проекция на плоскость  $yz$  стационарных траекторий магнитного момента для различных величин статического поля:

$H = 260$  (1,  $a$ ),  $283.5$  (2 и 3,  $a$ ),  $280, 285$  (1 и 2,  $b$ ),  $290, 350, 400, 600$   $Oe$  (1 – 4,  $c$ )  
и высокочастотного поля:

$h = 0.04$  (1,  $a$ ),  $1.5$  (2 и 3,  $a$ ; 2,  $b$ ; 1 – 4,  $c$ ),  $2$   $Oe$  (1,  $b$ ).



Дальнейшее увеличение намагничивающего поля вновь приводит к прецессии вокруг нормали, характеризуемой наибольшими амплитудами (кривая 2 на рисунке 1.8а). Кроме этого в небольшом интервале значений статического поля была обнаружена динамическая бистабильность, выражающаяся в том, что к орбите с максимальной амплитудой прецессии магнитного момента добавляется вторая устойчивая стационарная орбита (кривая 3 на рисунке 1.8а). Реализация того или иного состояния зависит от флуктуации параметров полей и намагниченности, а также от начальной фазы высокочастотного поля. В узких интервалах намагничивающего поля (порядка сотых эрстед) были выявлены режимы со сложной траекторией движения, период которых кратен периоду СВЧ-поля  $T = 2\pi l/\omega_r$ , где  $l$  – целое число. На рисунке 1.8b приведены кривые, соответствующие стационарным периодическим движениям намагниченности с  $l = 3$  (кривая 1) и  $l = 4$  (кривая 2). Фиксация высокочастотного поля ( $h \lesssim 1.7$  Ое) и постепенное увеличение статического поля  $H$  приводит к незначительному росту амплитуды прецессии, а затем к ее спаду (кривые 1 – 4 на рисунке 1.8с). При этом форма траекторий приближается к круговой, что говорит об уменьшении вклада в нутационное движение намагниченности высших гармоник резонансной частоты.



Рисунке 1.9. Временная зависимость нормальной составляющей магнитного момента.

При значениях СВЧ-поля  $1.7 \lesssim h \lesssim 2$  Ое численный анализ показал наличие бифуркации, приводящей к устойчивому прецессионному движению с резко увеличенной амплитудой. На рисунке 1.9 [49] представлена временная зависи-

мость нормальной составляющей магнитного момента, выходящего под действием поля  $h = 2$  Ое из начального положения на стационарную орбиту.

Кривая 1 соответствует полю  $H = 334.44$  Ое, кривая 2 – полю  $H = 334.45$  Ое. Данные значения полей выбирались вблизи бифуркационного значения  $H_1$ . При приближении величины поля  $H$  к этому значению наблюдается удлинение участка  $A$ . Это указывает на то, что переход от одной устойчивой стационарной орбиты к другой в данном случае происходит через третье устойчивое прецессионное движение вектора  $\vec{M}$ .

### 1.12 Влияние кристаллографической анизотропии на динамику намагниченности

В отличие от феррит-гранатовой пленки типа (111) в пленке типа (100) установление стационарной резонансной прецессии намагниченности происходит несколько иным путем [51]. Данный тип пленок характерен тем, что для них относительно легко достигается перпендикулярность оси легкого намагничивания к плоскости пленки, и такая ориентация наименее чувствительна к различного рода неоднородностям состава, напряжениям, изменениям температуры [52]. Перпендикулярная намагниченность пленки за счет подбора толщины слоя позволяет разнести основную моду (однородную) спин-волнового спектра и первую (неоднородную) моду [53, 54], что исключает насыщение резонанса на основной моде [9, 55]. Таким образом, в работе [51] приводятся результаты численного решения уравнений намагниченности для феррит-гранатовой пленки типа (100), а также показаны основные особенности нелинейной резонансной прецессии намагниченности в пленках этого типа.

Для рассмотрения была выбрана пленка состава  $Y_{2.9}La_{0.1}Fe_{3.9}Ga_{1.1}O_{12}$  с параметрами [50]:

$$4\pi M = 214.6 \text{ G}; \gamma = 1.755 \cdot 10^7 (\text{Oe} \cdot \text{s})^{-1}; \lambda = 3 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}, K_u = -10^3 \text{ erg/cm}^3.$$

Здесь величина индуцированная ростом анизотропии принята фиксированной, поскольку проведенный авторами анализ показал, что в рассматриваемом случае

амплитуда прецессии магнитного момента, характеристики его нутационного движения и процесс установления стационарных динамических режимов определяются преимущественно величиной поля кристаллографической анизотропии.

На рисунке 1.10 [51] показаны временные зависимости нормальной к поверхности пленки составляющей магнитного момента  $m_x = M_x/M$ , выходящего на стационарные орбиты, соответствующие высокочастотному полю 0.5 Oe частотой 1 GHz, для различных значений константы кристаллографической анизотропии  $K_1$ .

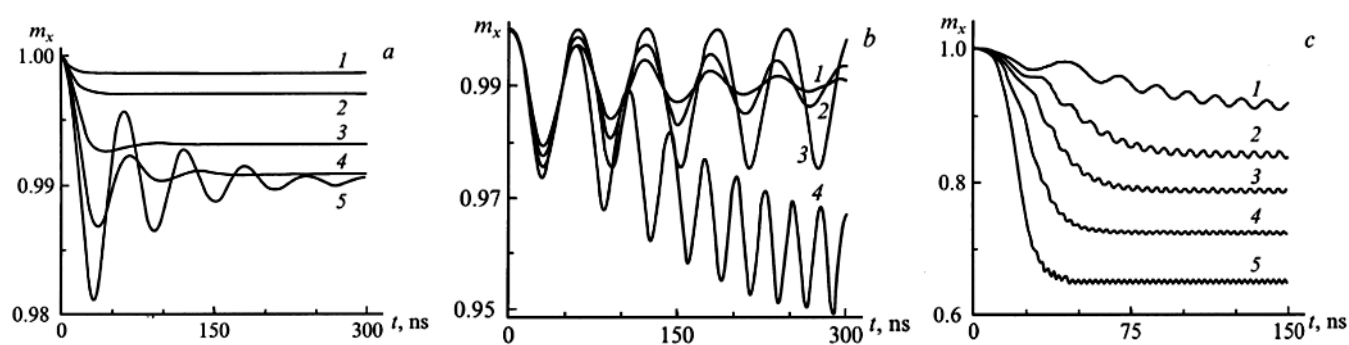


Рисунок 1.10. Временная зависимость нормальной компоненты намагниченности, выходящей на стационарную орбиту прецессии при включении СВЧ-поля 0.5 Oe и частотой 1 GHz для различных значений константы  $K_1$  ( $erg/cm^3$ ) и величины статического поля  $H$  (Oe):  
 а)  $K_1 = 100, H = 678$  (1);  $K_1 = 50, H = 684$  (2);  $K_1 = 0, H = 690$  (3);  $K_1 = -30, H = 693$  (4);  $K_1 = -50, H = 695.5$  (5); б)  $K_1 = -55, H = 696$  (1);  $K_1 = -60, H = 696.7$  (2);  $K_1 = -65, H = 697$  (3);  $K_1 = -70, H = 698$  (4); в)  $K_1 = -80, H = 699$  (1);  $K_1 = -100, H = 701$  (2);  $K_1 = -120, H = 704$  (3);  $K_1 = -150, H = 707$  (4);  $K_1 = -200, H = 713$  (5).

В условиях ФМР для пленок феррит-граната типа (100) соотношение намагничивающего поля и поля кристаллографической анизотропии является определяющим при установлении режима прецессионного движения намагниченности. В зависимости от данного соотношения могут реализовываться режимы, сильно отличающиеся как по амплитуде, так и по характеру нутационного движения.

Так, для больших значений константы  $K_1$  при фиксированных значениях статического поля  $H$  имеет место быстрое установление стационарной прецессии с малой амплитудой и незначительной нутацией, частота которой кратна частоте прецессии. При уменьшении константы  $K_1$  за счет возникновения затухающих колебаний прецессионного угла время установления стационарной прецессии возрастает, и в пределе, реализуется особый стационарный динамический режим, за-

ключающийся в спиралеобразном движении намагниченности между орбитой с максимальным углом прецессии и положением, близким к нормали к пленке. Дальнейшее уменьшение константы  $K_1$  приводит к тому, что угол прецессии устанавливается в интервале между максимальным значением и некоторым отличным от нуля минимальным значением. Таким образом, имеют место большие по амплитуде нутации с периодом, кратным периоду прецессии [51], при которых уже отсутствуют стационарные орбиты прецессии. При изменении константы кристаллографической анизотропии или величины намагничивающего поля в пленках типа (100) не возникает бифуркационных изменений прецессионного движения намагниченности, приводящих к динамической бистабильности или резким изменениям амплитуды прецессии. Напротив, в пленках такого типа переход между различными режимами прецессии происходит плавно.

### 1.13 Выводы по главе 1

В данной главе, в рамках обзора литературы были рассмотрены основы теории колебаний применительно к различным колебательным системам. Рассмотрение проведено от наиболее простого случая гармонического осциллятора до нелинейной системы с двумя степенями свободы. Показаны основные уравнения, описывающие колебания, приведены их основные качественные характеристики. Произведено сопоставление линейных и нелинейных систем, указано на их принципиальные отличия.

Во второй части главы изложены основные явления и процессы, протекающие в намагниченном ферромагнетике, которые, так или иначе, затрагиваются в следующих главах.

На основе фундаментальных работ известных авторов рассмотрена классическая теория ферромагнитного резонанса, приведено основное уравнение движения вектора намагниченности в условиях сохранения его длины. Показано, что решение этого уравнения в слабопеременных полях имеет резонансный характер.

В рамках теории нелинейного ФМР, опираясь на результаты исследований прошлых лет, указано на тот факт, что в общем случае уравнение движения вектора намагниченности является нелинейным, а компоненты этого вектора представляют собой нелинейные функции амплитуды высокочастотного поля. В случае больших углов прецессии линейная связь между амплитудой возбуждающего поля и намагниченностью утрачивается, что вызывает ряд нелинейных эффектов. Решение уравнения движения намагниченности при этом может быть найдено лишь в ограниченном числе случаев.

С помощью теории Сула, основанной на нестабильности определенных спиновых волн, которая возникает при больших углах однородной прецессии, дано объяснение механизма параметрического возбуждения спиновых волн, оказывающих сильное влияние на развитие нелинейных процессов при ферромагнитном резонансе.

Приведен обзор современных результатов исследований нелинейной динамики намагниченности. Согласно этим результатам при больших углах прецессии и линейной поляризации высокочастотного поля в нутационном движении намагниченности в области ФМР проявляются более высокие гармоники основной частоты прецессии, а именно, вблизи резонанса преобладает третья гармоника резонансной частоты.

Для разных типов пленок феррит-граната установлено, что максимальные углы резонансной прецессии достигаются только при определенных значениях величины статического и высокочастотного полей, наведенной и кристаллографической анизотропии, а также отмечено, что для пленок типа (111) имеют место бифуркации, резко меняющие амплитуду колебаний и приводящие к состоянию бистабильности.

## Глава 2. Модель связанных линейного и нелинейного осцилляторов

В главе приведено описание упрощенной модели двух связанных осцилляторов, обладающей всеми свойствами нелинейной системы. Рассмотрены характеристики такой модели в зависимости от присутствия нелинейности: нелинейные осцилляторы, нелинейная связь между осцилляторами и сочетание этих двух нелинейностей. С помощью понятия обобщенного потенциала дана интерпретация колебательных процессов, протекающих в системе. В зависимости от соотношений параметров осцилляторов определены основные режимы колебаний.

### 2.1. Описание модели

Особенности нелинейных колебаний связанных осцилляторов отчетливо проявляются в ферритах на СВЧ, сопровождая резонансные и волновые явления при высоких уровнях мощности [2]. В работах [39, 56, 57] рассмотрены связанные колебания двух осцилляторов, один из которых является магнитным и нелинейным, а второй – электродинамическим [39, 57] или упругим [56] и чисто линейным. Связь между такими осцилляторами носит нелинейный невзаимный характер. Общим в обоих случаях является возбуждение интенсивных автоколебаний, частота которых значительно ниже частоты возбуждения. Традиционный подход к таким задачам, основанный на решении нелинейного уравнения Ландау–Лифшица в сочетании с трехмерными уравнениями электродинамики или упругости, приводит к крайне громоздким вычислениям. Поэтому представляет интерес создание наиболее простой модели явления, позволяющей выявить его основные закономерности.

Характер рассматриваемой задачи позволяет сформулировать модель, содержащую максимально простой вид связи осцилляторов, допускающий автоколебания. Возьмем за основу такой модели систему из двух связанных осцилляторов, первый из которых является нелинейным, а второй – линейным. Связь между осцилляторами предполагается невзаимной и нелинейной. Возбуждающая сила

действует только на первый нелинейный осциллятор. С целью выявления автоколебаний будем рассматривать развитие колебаний обоих осцилляторов во времени после включения возбуждения.

В качестве наиболее простой подходящей модели рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot (x_1 + \delta \cdot x_1^3) + \gamma_1 \cdot x_2^{\alpha_1} = A \cdot \cos \omega t; \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1^{\alpha_2} = 0. \quad (2.2)$$

Здесь  $x_{1,2}$ ,  $\beta_{1,2}$ ,  $\omega_{1,2}$  – координатные переменные, параметры затухания и собственные частоты осцилляторов,  $\gamma_{1,2}$  – коэффициенты связи,  $\delta$  – параметр нелинейности первого осциллятора,  $A$  и  $\omega$  – амплитуда и частота возбуждающей силы,  $\alpha_{1,2}$  – показатели степени слагаемого связи.

Решая численно данную систему уравнений методом Рунге–Кутты четвертого порядка [58], можно установить, что автомодуляционное решение имеет место при следующих условиях: связь во втором уравнении всегда должна быть первой степени, а в первом – второй, четвертой, шестой и всех последующих степеней (2,4,6,7,8,9,...). Условия возбуждения к подбору параметров довольно критичны. Наиболее легко автоколебания получаются при сочетании:  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 1$ , поэтому далее ограничимся именно этим случаем.

## 2.2. Модель обобщенного потенциала

Несмотря на свой упрощенный вид, предложенная модель связанных линейного и нелинейного осцилляторов, описываемая системой уравнений (2.1)–(2.2), позволяет выявить основные свойства автоколебательных систем. В первую очередь это пороговый характер смены режимов колебаний, роль параметров затухания и нелинейности осцилляторов и связи, переход к стохастическому режиму при большом уровне возбуждения.

Рассмотрим перечисленные явления на примере модели обобщенного потенциала, которую можно положить в основу физической интерпретации указан-

ных колебательных явлений. В традиционной трактовке многих задач о колебаниях часто используется модель потенциальной ямы, вблизи минимума которой, частица совершает периодические колебания [19, 59].

Будем полагать, что система уравнений движения для осцилляторов имеет вид:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial U_S}{\partial x_1} = A \cdot \cos(\omega t); \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial U_S}{\partial x_2} = 0, \quad (2.4)$$

где  $U_S(x_1, x_2)$  – обобщенный потенциал системы в целом, а слагаемые  $\partial U_S / \partial x_{1,2}$  представляют собой обобщенные силы (знак для удобства учтён заранее). Диссипативные члены в этот потенциал не включены, чтобы не усложнять вычисления.

Разберем структуру потенциала на основе задачи о связанных магнитном и упругом (или магнитном и электродинамическом) осцилляторах, о которых подробнее речь пойдет в следующих главах.

Согласно общей трактовке этой задачи, обобщенный потенциал должен содержать слагаемые вида  $x_1^m x_2^n$ , где  $m$  и  $n$  – целые числа от 0 до 9. В работах [А3–А6], показано, что связь между магнитным и упругим осцилляторами может осуществляться также за счёт производных от переменных по координатам, однако такую связь рассмотрим позже. Ограничимся также степенью входящих в потенциал переменных не выше четвертой. В таких предположениях обобщенный потенциал принимает вид:

$$U_S = U_S^{(1)} + U_S^{(2)} + U_S^{(3)} + U_S^{(4)}, \quad (2.5)$$

где

$$U_S^{(1)} = \psi_1 x_1 + \psi_2 x_2; \quad (2.6)$$

$$U_S^{(2)} = \zeta_1 x_1^2 + \zeta_2 x_1 x_2 + \zeta_3 x_2^2; \quad (2.7)$$

$$U_S^{(3)} = \xi_1 x_1^3 + \xi_2 x_1^2 x_2 + \xi_3 x_1 x_2^2 + \xi_4 x_2^3; \quad (2.8)$$

$$U_S^{(4)} = \eta_1 x_1^4 + \eta_2 x_1^3 x_2 + \eta_3 x_1^2 x_2^2 + \eta_4 x_1 x_2^3 + \eta_5 x_2^4. \quad (2.9)$$

Из этих выражений обобщенные силы получаются путем дифференцирования по переменным  $x_{1,2}$ . Так как первое выражение (2.6) дает статическую посто-



янную силу, которая на колебания никак не влияет, можно положить  $\psi_{1,2} = 0$ , т. е.  $U_S^{(1)} = 0$ .

Выражение (2.7) даёт в уравнениях линейные слагаемые, пропорциональные  $x_{1,2}$ , т. е. собственные частоты осцилляторов  $\omega_{1,2}$  в линейном приближении, а также линейные связи между ними. Таким образом, можно положить:  $\zeta_1 = \omega_1^2/2$ ,  $\zeta_3 = \omega_2^2/2$ , а также  $\zeta_2 = \vartheta$ , где  $\vartheta$  – параметр линейной связи между осцилляторами. Этот параметр должен в одинаковой степени присутствовать в обоих уравнениях.

Третье выражение (2.8) даёт, прежде всего, параметры квадратичной нелинейности для обоих осцилляторов через слагаемые с  $\xi_1$  и  $\xi_4$ . Однако квадратичная нелинейность, не будучи дополненной нелинейностью более высоких порядков, вызывает уход системы на бесконечность вследствие нечетности потенциала каждого из осцилляторов по отдельности. То есть при отрицательном значении переменной ввиду стремления энергии к минимуму система устремляется на минус бесконечность по спадающей ветви кубической параболы, перегиб которой приходится на нуль. Таким образом, для исключения расходящихся решений в отсутствие связи между осцилляторами, следует положить  $\xi_{1,4} = 0$ .

Другие два слагаемых дают силы для первого осциллятора пропорциональные  $x_1x_2$  и  $x_2^2$ , а для второго – тоже  $x_1x_2$ , а также  $x_1^2$ . Первые из этих пар слагаемых обеспечивают нелинейную связь между осцилляторами низшего порядка, которая в силу своей нечетности также может привести к расходимости. Вторые же слагаемые обеспечивают квадратичную связь, и в отсутствие слагаемых более высокого порядка также способны увести систему на бесконечность вследствие нечетности потенциала.

Из четвертого выражения (2.9), прежде всего, получаются параметры кубической нелинейности для каждого из осцилляторов – это слагаемые с  $\eta_1$  и  $\eta_5$ . Потенциал в этом случае является чётным, что полностью исключает уход на бесконечность. При достаточной величине констант  $\eta_1$  и  $\eta_5$  такая чётность четвертого порядка может компенсировать нечетность более низких порядков, в частности,

третьего, т. е. предотвратить уход на бесконечность, обеспечиваемый слагаемыми, составляющими выражение (2.8).

Остальные слагаемые выражения (2.9) дают различные виды нелинейной связи между осцилляторами, такие как  $x_1^2 x_2$  и  $x_1 x_2^2$ , входящие в то или иное уравнение. Кроме того они могут дать кубические виды связи для первого уравнения вида  $x_2^3$  и для второго вида  $x_1^3$ .

Следует заметить, что хотя в потенциале (2.5) и присутствуют слагаемые третьей степени по обоим переменным, но эти слагаемые входят наряду со слагаемыми более низких степеней, поэтому у получающихся кубических парабол могут иметься локальные минимумы (т. е. соответствующее кубическое уравнение имеет три действительных корня). По одну сторону от такого минимума кубическая парабола уходит на плюс бесконечность, а по другую – идет вверх до определенного локального максимума – потенциального барьера, достигая который и переваливая через него, устремляется к минус бесконечности. Таким образом, в окрестности локального минимума могут происходить колебания с ограниченной амплитудой, а при превышении амплитуды над потенциальным барьером система уходит на бесконечность. Подобное свойство кубического потенциала в сочетании с потенциалом четвертой степени, дающее малые локальные колебания с уходом на бесконечность при превышении определенного порога, в классике хорошо известно и проявляется, например, в уравнении Дуффинга [19].

Возвращаясь к рассмотрению системы (2.1)–(2.2) можно видеть, что в полном выражении для потенциала (2.5)–(2.9) главную роль играют, во-первых, слагаемые с коэффициентами  $\zeta_1$  и  $\zeta_3$ , дающие собственные частоты осцилляторов, во-вторых, слагаемое с  $\zeta_2$ , обеспечивающее линейную связь второго осциллятора с первым. В первом уравнении такое слагаемое отсутствует, однако расчёты показывают, что роль его в сравнении со слагаемым квадратичной связи довольно невелика и характера рассмотренных колебаний практически не меняет.

Далее важны слагаемое с  $\eta_1$ , ответственное за кубическую нелинейность первого осциллятора, а также слагаемое с  $\xi_3$ , обеспечивающее квадратичную связь первого осциллятора со вторым. Все остальные слагаемые в настоящем рас-

смотрении можно положить равными нулю. Определенную роль может играть также слагаемое с  $\eta_3$ , дающее в первое уравнение вклад вида  $x_1 x_2^2$ , однако проверка показывает, что общий характер колебаний при учете такого слагаемого не меняется.

Проводя соответствие между выражениями (2.5)–(2.9) и системой уравнений (2.1)–(2.2), получаем:

$$\omega_1^2 \rightarrow 2\zeta_1; \quad (2.10)$$

$$\omega_2^2 \rightarrow 2\zeta_3; \quad (2.11)$$

$$\gamma_2 \rightarrow \zeta_2; \quad (2.12)$$

$$\delta \rightarrow \eta_1/\omega_1^2 \rightarrow \eta_1/2\zeta_1; \quad (2.13)$$

$$\gamma_1 \rightarrow \xi_3 \text{ (или } \gamma_1 \rightarrow \eta_3\text{)}. \quad (2.14)$$

При таком наборе параметров потенциал (2.5) принимает вид:

$$U_S = \zeta_1 x_1^2 + \zeta_2 x_1 x_2 + \zeta_3 x_2^2 + \eta_1 x_1^4 + \xi_3 x_1 x_2^2. \quad (2.15)$$

Здесь первое и третье слагаемые определяют собственные частоты осцилляторов, второе – линейную связь между ними, четвертое – нелинейность первого осциллятора, пятое – нелинейную связь между осцилляторами.

В соответствии с физической природой входящих в (2.15) коэффициентов, т. е. в соответствии с (2.10)–(2.14), все их надо считать положительными.

Важно отметить, что первые четыре слагаемых потенциала являются четными по степеням переменных (вторая и четвертая степени), тогда как пятое – нечетным (третья степень). При этом из четных, независимыми от знаков переменных являются только слагаемые с коэффициентами  $\zeta_1$ ,  $\zeta_3$  и  $\eta_1$ , т. е. вклад этих слагаемых в общий потенциал всегда положителен. Слагаемое с коэффициентом  $\zeta_2$  положительно только при одинаковых знаках обеих переменных, а при отрицательном одном из них может дать в потенциал отрицательный вклад. Знак слагаемого с коэффициентом  $\xi_3$  зависит только от знака  $x_1$  – слагаемое положительно при положительном значении  $x_1$ , а при отрицательном – его вклад в потенциал отрицателен.

Получаемые из потенциала (2.15) обобщенные силы имеют следующий вид (отрицательные знаки перед производными присутствуют также и в уравнениях, т. е. взаимно уничтожаются, поэтому здесь для простоты опущены):

$$F_{x_1} = \frac{\partial U_S}{\partial x_1} = 2\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + 4\eta_1 x_1^3 + \xi_3 x_2^2; \quad (2.16)$$

$$F_{x_2} = \frac{\partial U_S}{\partial x_2} = 2\zeta_3 x_2 + \zeta_2 x_1 + 2\xi_3 x_1 x_2. \quad (2.17)$$

Уравнения принимают вид:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + 2\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + 4\eta_1 x_1^3 + \xi_3 x_2^2 = A \cos(\omega t); \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + 2\zeta_3 x_2 + \zeta_2 x_1 + 2\xi_3 x_1 x_2 = 0. \quad (2.19)$$

Эта система имеет довольно общий характер. Здесь в первом уравнении присутствует кубическая нелинейность, тогда как во втором подобная нелинейность отсутствует. В каждом уравнении имеется линейная связь с другим уравнением через  $\zeta_2$ . Во втором уравнении есть квадратичная связь с первым уравнением вида  $\xi_3 x_1 x_2$ , т. е. по второй переменной  $x_2$  связь является линейной. Таким образом, эта система имеет сходство с системой (2.1)–(2.2). Здесь также имеют место кубическая нелинейность по первой переменной, квадратичность связи в первом уравнении и линейность во втором. То есть в некотором отношении систему (2.1)–(2.2) можно считать частным случаем полученной здесь на основе модели обобщенного потенциала системы (2.18)–(2.19). При этом системы (2.1)–(2.2) и (2.18)–(2.19) полностью тождественными не являются, т. е. при простой замене коэффициентов вида (2.10)–(2.14) одна в другую не переходят. В системе (2.18)–(2.19) имеются отличия от (2.1)–(2.2), такие как линейная связь с одним и тем же коэффициентом в обоих уравнениях ( $\zeta_2 x_1$  и  $\zeta_2 x_2$ ), а также во втором уравнении умножение линейной связи по первой переменной на вторую переменную вида  $\xi_3 x_1 x_2$ . Однако предварительное исследование не выявило решающего влияния этих отличий на характер поведения системы в целом.

### 2.3. Применение модели потенциала к интерпретации характера колебаний

Рассмотренная модель обобщенного потенциала может быть применена к интерпретации вынужденных колебаний системы связанных осцилляторов при различных уровнях возбуждения, степени нелинейности и характере связи.

Прежде всего, следует отметить, что входящие в уравнения (2.18)–(2.19) первые два слагаемых, содержащие вторую и первую производные по времени, отражают обычные свойства колебаний, такие как периодичность и затухание во времени. Они соотносятся с потенциалом, но напрямую с моделью потенциала не связаны. Все остальные слагаемые, содержащие переменные в различных сочетаниях, определяются уже непосредственно потенциалом, поэтому рассмотрим роль каждого слагаемого по отдельности.

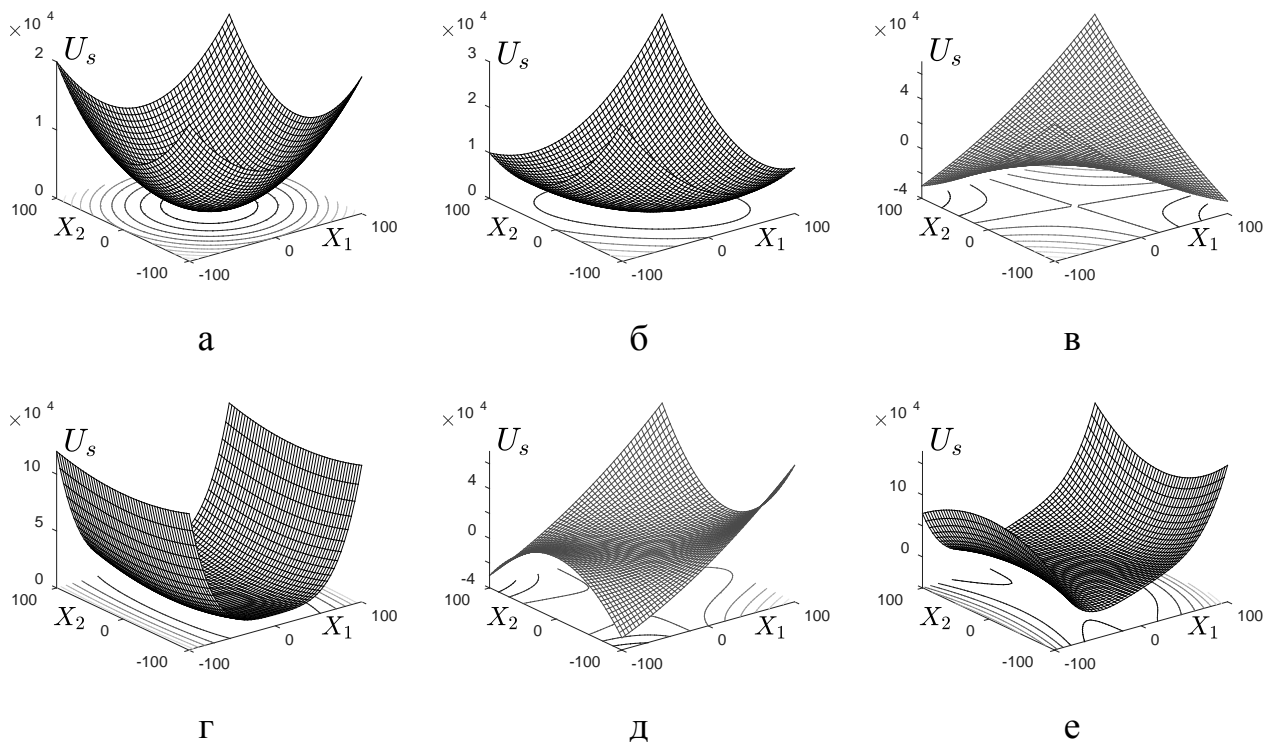


Рисунок 2.1. Потенциальные поверхности при различных параметрах связи и нелинейности осцилляторов.

- а – связь отсутствует, оба осциллятора линейные;
- б – линейная связь слабая, оба осциллятора линейные;
- в – линейная связь сильная, оба осциллятора линейные;
- г – связь отсутствует, первый осциллятор нелинейный, второй – линейный;
- д – связь по первому осциллятору квадратичная, оба осциллятора линейные;
- е – связь по первому осциллятору квадратичная, первый осциллятор нелинейный, второй – линейный.

На рисунке 2.1 показаны различные варианты формы потенциальной поверхности, построенной по формуле (2.15) в координатах  $Ox_1x_2U_S$ . Точка  $O$  соответствует началу координат  $x_1 = 0, x_2 = 0, U_S = 0$  и для удобства рисунка явно не обозначена. На горизонтальной плоскости  $Ox_1x_2$  приведены эквипотенциальные линии, т. е. сечения потенциальной поверхности горизонтальной плоскостью, соответствующие некоторым характерным значениям потенциала.

Наборы коэффициентов, использовавшихся при построении рисунка 2.1, приведены в таблице 2.1. Собственные частоты осцилляторов полагаются равными друг другу, причем для простоты положены равными единице. Все остальные числовые значения коэффициентов выбраны из условия наглядности построения.

Таблица 2.1. Коэффициенты построения потенциальных поверхностей

№	$\zeta_1$	$\zeta_2$	$\zeta_3$	$\eta_1$	$\xi_3$
	$(x_1^2)$	$(x_1x_2)$	$(x_2^2)$	$(x_1^4)$	$(x_1x_2^2)$
а	1	0	1	0	0
б	1	1	1	0	0
в	1	5	1	0	0
г	1	0	1	0.001	0
д	1	0	1	0	0.05
е	1	0	1	0.001	0.05

Рассмотрим представленные варианты потенциальных поверхностей по отдельности.

Рисунок 2.1а соответствует набору параметров «а» в таблице 2.1. В этом случае осцилляторы никак не связаны, и потенциальная поверхность является симметричной относительно вертикальной оси. Эквипотенциальные кривые представляют собой правильные окружности. Для каждого осциллятора возможны периодические колебания с ограниченной амплитудой, которые не зависят от колебаний другого осциллятора. При этом, поскольку первый осциллятор возбуждается периодической силой, в установившемся режиме он колеблется с постоянной

амплитудой, тогда как колебания второго возможны только при каком-то начальном отклонении и имеют затухающий характер во времени.

На рисунке 2.1б приведена поверхность, соответствующая наличию слабой линейной связи между осцилляторами, определяемой коэффициентом  $\zeta_2 = 1$ . При этом потенциальная поверхность слегка вытягивается вдоль линии, соответствующей  $x_2 = -x_1$  и составляющей с осями  $Ox_1$  и  $Ox_2$  углы по  $45^\circ$ . На этой линии у поверхности появляются широкие «крылья», формирующие продольную «лощину». Эквипотенциальные кривые представляют собой вытянутые эллипсы, большая ось которых ориентирована вдоль упомянутой линии. Колебания осцилляторов синхронизируются друг с другом, будучи сдвинутыми по фазе на  $90^\circ$ . Это классическая картина связанных колебаний двух осцилляторов при линейной связи [20, 60]. Такие колебания соответствуют регулярному синусоидальному режиму. На подобный сдвиг фазы на  $90^\circ$  между колебаниями магнитного и упругого осцилляторов указывалось также в работах [13, 61–62, А3–А6, А25], посвященных нелинейному возбуждению гиперзвука.

Рисунок 5в соответствует наличию сильной линейной связи между осцилляторами, определяемой коэффициентом  $\zeta_2 = 5$ . При этом «крылья» потенциальной поверхности склоняются вниз, так что вместо «лощины» образуется «седло». Эквипотенциальные поверхности представляют собой гиперболы, обращенные вершинами друг к другу. Их оси симметрии соответствуют линии  $x_2 = -x_1$ . Переход от «лощины» на рисунке 2.1б к «седлу» на рисунке 2.1в, т. е. от случая «слабой» связи к «сильной» происходит при критическом значении параметра  $\zeta_2 = 2.012$ .

Периодические колебания при таком потенциале невозможны. Система при любом сколь угодно малом отклонении от нуля «скатывается вниз» по боковым поверхностям «седла», что проявляется как уход переменных  $x_1$  и  $x_2$  на бесконечность.

Подобное поведение системы отмечалось в работе [А6], как эквивалент переориентации вектора намагниченности в нормально намагниченной пластине при достаточной величине константы магнитоупругой связи  $B_2$ . Аналогичная пе-

реориентация, вызванная значительной величиной той же константы, подробно рассматривается и в работе [63]. Во всех этих случаях можно полагать объяснение наблюдаемой расходимости с помощью модели потенциала достаточно адекватным.

Поверхности, представленной на рисунке 5г, соответствует отсутствие связи между осцилляторами, а также наличие кубической нелинейности первого осциллятора, определяемой коэффициентом  $\eta_1$ . Потенциальная поверхность по обеим переменным является симметричной в силу четности соответствующих слагаемых выражения (2.15). Рост потенциала  $U_S$  по мере увеличения  $x_1$  становится более значительным, чем на рисунке 2.1а, тогда как по  $x_2$  остается прежним. В результате потенциальная поверхность приобретает вид «лощины», вытянутой вдоль оси  $Ox_2$ , а эквипотенциальные кривые обращаются в эллипсы с большой осью, ориентированной вдоль той же оси. Колебания каждого из осциллятора по отдельности, как и в случае на рисунке 2.1а, возможны и имеют периодический характер. Потенциал всегда остается четным, поэтому какая-либо расходимость отсутствует.

Рисунок 2.1д соответствует наличию между осцилляторами нелинейной связи, задаваемой коэффициентом  $\xi_3$  при том, что сами осцилляторы остаются линейными. В этом случае потенциальная поверхность относительно переменной  $x_2$  является симметричной вследствие квадратичности этой переменной в пятом слагаемом потенциала (2.15). Симметрия относительно переменной  $x_1$  становится центральной с двойной кратностью, т. е. при изменении знака  $x_1$  добавка к потенциалу становится отрицательной. Это проявляется в загибе вниз обоих углов поверхности при  $x_1 \rightarrow \pm\infty$  (на рисунке при  $x_1 \rightarrow \pm 100$ ). Эллипсы эквипотенциальных кривых при отрицательных значениях  $x_1$  разрываются, формируя гиперболы с ветвями, стремящимися к бесконечности.

Такой разрыв эллипсов с загибом углов поверхности вниз происходит только при достаточной величине коэффициента  $\xi_3$ , т.к. ему надо преодолеть загибы углов вверх, определяемые коэффициентом  $\zeta_1$  (рисунок 2.1а). Поэтому при малых значениях  $\xi_3$  колебания в системе имеют ограниченный характер. Однако, благо-



даря наличию при коэффициенте  $\xi_3$  квадрата переменной  $x_2$ , при достаточной величине этой переменной отрицательный вклад слагаемого с  $\xi_3$  может превысить положительный вклад от слагаемого с  $\zeta_1$ . В этом случае потенциальная поверхность в начальной точке системы координат приобретает седловидный характер. Периодические колебания в такой системе опять становятся невозможными, т. е. система, скатываясь по боковым склонам «седла», уходит на бесконечность.

Итак, в случае умеренных значений коэффициента  $\xi_3$  при малом уровне возбуждения колебания в системе остаются периодическими, тогда как при большом его уровне система уходит на бесконечность.

Наконец, на рисунке 2.1e показана поверхность, которой соответствует наличие нелинейной связи между осцилляторами, задаваемой коэффициентом  $\xi_3$ , и кубической нелинейности первого осциллятора, определяемой коэффициентом  $\eta_1$ . Видно, что загибы углов поверхности вниз, характерные для рисунка 2.1д, здесь в значительной степени компенсированы стремлением тех же углов вверх. Такая компенсация происходит из-за четности потенциала при коэффициенте  $\eta_1$ . Причем здесь степень этой четности равняется четырем, тогда как степень нечетности при коэффициенте  $\xi_3$  составляет всего три. Эта четность, преобладая над нечетностью, формирует минимум потенциальной поверхности, в пределах которого колебания остаются конечными при любом сколь угодно высоком уровне возбуждения. Эквипотенциальные кривые при этом снова замыкаются, причем их форма хотя и отличается от эллиптической, напоминая треугольную с закругленными углами, но всегда при этом остается замкнутой.

Следует отметить, что роль кубической нелинейности в компенсации расходимости колебаний системы из двух осцилляторов отмечалась также в работе [Аб], где исследовалось развитие колебаний во времени. Можно полагать, что рассматриваемая здесь модель обобщенного потенциала в достаточной мере применима и к этому случаю.

## 2.4. Характеристики модели, определяющие характер колебаний

Рассматриваемая модель допускает множество видов колебаний, которые зависят от свойств самих осцилляторов и связи между ними. Рассмотрим это разнообразие колебаний более подробно.

В первую очередь остановимся на случае, когда оба осциллятора линейны, а связь между ними нелинейна, что соответствует равенству нулю параметра  $\delta$  в уравнениях (2.1)–(2.2). Для простоты рассмотрения зададим параметры задачи небольшими целыми числами, что, не ограничивая общности, позволяет избежать необходимости сравнения величин высоких порядков, в то же время, повышает наглядность и создает удобство для машинного счета. При этом фактическую размерность параметров будем опускать, полагая все расчеты выполненными в соизмеримых единицах. Положим частоты обоих осцилляторов, а также частоту возбуждения, равными друг другу:  $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 2\pi$  ед.  $\approx 6.28$  ед. Параметры затухания и параметры связи также положим одинаковыми между собой соответственно:  $\beta_1 = \beta_2 = 4$  ед.,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 30$  ед. Таким образом, осцилляторы можно считать идентичными, кроме связи, которая для первого осциллятора относительно второго является квадратичной, а для второго относительно первого – линейной.

Исследование показало, что при таких условиях все реализуемые режимы вынужденных колебаний достигаются путем изменения в достаточно широких пределах только амплитуды возбуждения. Рассмотрим трансформацию колебаний при последовательном увеличении возбуждения более подробно. Варианты получаемых при этом режимов колебаний приведены на рисунке 2.2.

При уровне возбуждения ниже  $A = 20$  ед. колебания полностью регулярны, имеют вид правильных синусоид, параметрический портрет представляет собой четко выраженное узкое кольцо.

При увеличении возбуждения выше 20 ед. синусоидальная правильность формы колебаний слегка нарушается, в результате чего образующая параметрического кольца начинает слегка размываться, как это показано на рисунке 2.2а.

При увеличении возбуждения выше 24 ед. синусоида колебаний начинает расщепляться, т. е. между основными колебаниями появляются отщепленные колебания меньшей амплитуды (рисунок 2.2б). При этом полный период колебаний как бы удваивается, в результате чего кольцо разделяется по ширине на два четких вложенных друг в друга кольца. Эти кольца при возбуждении выше 24 ед. разъезжаются в стороны, образуя в области своего перекрытия петлю, как это видно из рисунка 2.2б. Размер петли сначала близок к размеру исходного кольца и вследствие уменьшения перекрытия образовавшихся колец постепенно уменьшается вплоть до нуля. В результате этого петля при уровне возбуждения около 34 ед. полностью разглаживается. При этом общее кольцо снова становится единым, приобретая вид выпукло-вогнутой «чечевицы», с четкой огибающей, напоминающей зерно фасоли.

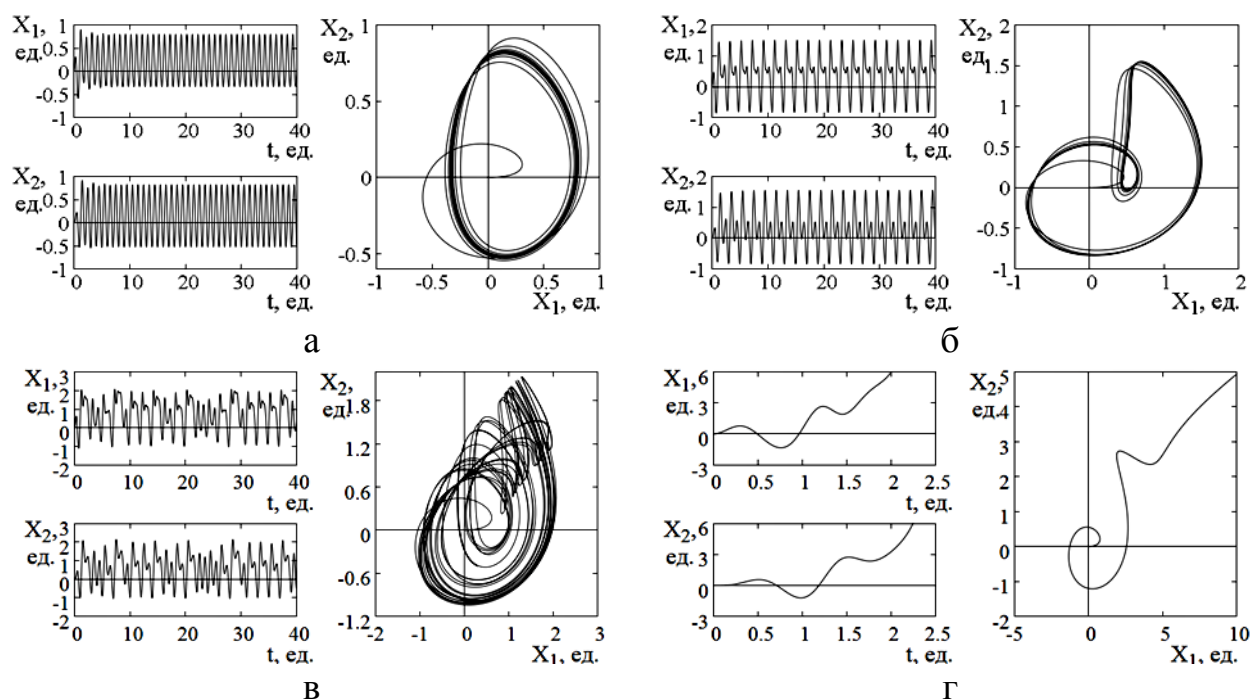


Рисунок 2.2. Режимы колебаний при различной величине возбуждения. Слева показаны развертки колебаний во времени, справа – параметрические портреты.

Амплитуда возбуждения: а – 20 ед.; б – 30 ед.; в – 40 ед.; г – 50 ед.

При увеличении возбуждения выше 28 ед. четкий периодический характер колебаний нарушается, появляются отдельные сбои периода, постепенно распространяющиеся на все времена. Характер колебаний теряет регулярность, приобретая элементы хаотичности (рисунок 2.2в). При этом огибающая чечевицы сначала

начинает расщепляться, а при дальнейшем увеличении возбуждения всё более размазывается, в результате чего чечевица практически полностью замывается уже при уровне возбуждения равном 39 ед.

Дальнейшее увеличение возбуждения приводит к тому, что характер колебаний остается нерегулярным вплоть до  $\sim 40.7$  ед., после чего колебания срываются, и координатные переменные обоих осцилляторов устремляются к бесконечности (рисунок 2.2г). При этом параметрическая чечевица сменяется единственной изогнутой линией, также уходящей на бесконечность. Такой переход от замкнутой чечевицы к расходящейся кривой имеет резкий порог, равный 40.75 ед. (с точностью до 0.1 %).

Исходя из описания характера вынужденных колебаний, можно выделить пять основных режимов.

Режим № 1 – регулярный синусоидальный. Имеет место при  $0 < A < 24$ . Характеризуется четкими регулярными колебаниями обоих осцилляторов, имеющими правильный синусоидальный вид. Параметрический портрет имеет форму правильного узкого кольца, близкую к круговой.

Режим № 2 – регулярный с расщеплением. Этот режим соответствует значениям возбуждения  $24 < A < 34$ . Характеризуется отщеплением от каждого полупериода синусоиды небольшого дополнительного пика, отделенного от основного минимумом. Колебания остаются регулярными, приобретая вид наложенных друг на друга двух синусоид с разными амплитудами. Общий период колебаний удваивается. Параметрический портрет имеет форму двух частично перекрывающихся колец, образующих в области перекрытия замкнутую петлю.

Режим № 3 – регулярный без расщепления. Наблюдается при  $34 < A < 38$ . Характеризуется также отщеплением от каждого полупериода синусоиды дополнительного пика, однако минимум между основным и дополнительным пиками постепенно сглаживается. Общий период колебаний остается удвоенным. Параметрический портрет имеет форму единого кольца, имеющего вид выпукловогнутой чечевицы. Петля полностью отсутствует.

Режим № 4 – нерегулярный квазихаотический. Имеет место при  $38 < A < 40.75$ . Характеризуется скачкообразным изменением амплитуды синусоиды от периода к периоду. Колебания теряют четкую периодичность, хотя в среднем смена их полярности во времени остается близкой к исходной. Изменение амплитуды носит квазихаотический характер. Огибающая параметрического портрета имеет вид выпукло-вогнутой чечевицы, полностью замазанной случайно блуждающими траекториями.

Режим № 5 – нерегулярный расходящийся. Возникает при  $40.75 < A < \infty$ . Характеризуется несколькими (одним–двумя) возвратно-поступательными колебаниями, переходящими в стремление переменных к бесконечности. Параметрический портрет имеет вид раскручивающейся спирали, после нескольких витков уходящей на бесконечность.

Переходы между режимами № 1 и № 4 по амплитуде возбуждения являются плавными (в пределах  $5 \div 10$  % от средней величины), т. е. беспороговыми. Переход между режимами № 4 и № 5 имеет резкий порог (менее 0.1 % от средней величины).

Рассмотрим теперь роль нелинейности первого осциллятора при условии сохранения линейности второго. Связь между осцилляторами оставим прежней, т. е. в уравнениях (2.1)–(2.2) положим  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 1$ . Нелинейность введем в уравнение (2.1) посредством отличного от нуля параметра  $\delta$  при третьей степени  $x_1$ .

Исследование показало, что введение такой нелинейности при  $\delta > 0$  приводит преимущественно к регуляризации колебаний обоих осцилляторов, т. е. преобладающим становится режим № 1. При довольно высоком уровне возбуждения (более  $40 \div 50$  ед.) режим № 1 переходит в режимы № 3 и № 4. Но дальнейшее увеличение возбуждения приближает характер колебаний снова к режиму № 1. При достаточно большой величине  $\delta$  (более 1000 ед.) режим № 5 также не достигается, т. е. система не уходит на бесконечность ни при каком сколь угодно большом уровне возбуждения. Реализация режима № 4, т. е. нерегулярных квазихаотических колебаний, становится по параметрам довольно критичной. С увеличением нелинейности критичность возрастает.

Типичный пример колебаний при умеренном уровне нелинейности показан на рисунке 2.3.

Первыми характерными особенностями наблюдаемой картины являются значительно (примерно в два раза) меньшая амплитуда и резкое (в три–пять раз) уменьшение периода колебаний первого осциллятора по сравнению с амплитудой и периодом колебаний второго. Причиной этих двух особенностей является именно нелинейность первого осциллятора. И эти особенности проявляются, начиная примерно с  $\delta \sim 100$  ед., и тем сильнее, чем больше параметр  $\delta$ . К остальным параметрам эти особенности не критичны, т. е. сохраняются при изменении упомянутых параметров в обе стороны не менее, чем на порядок.

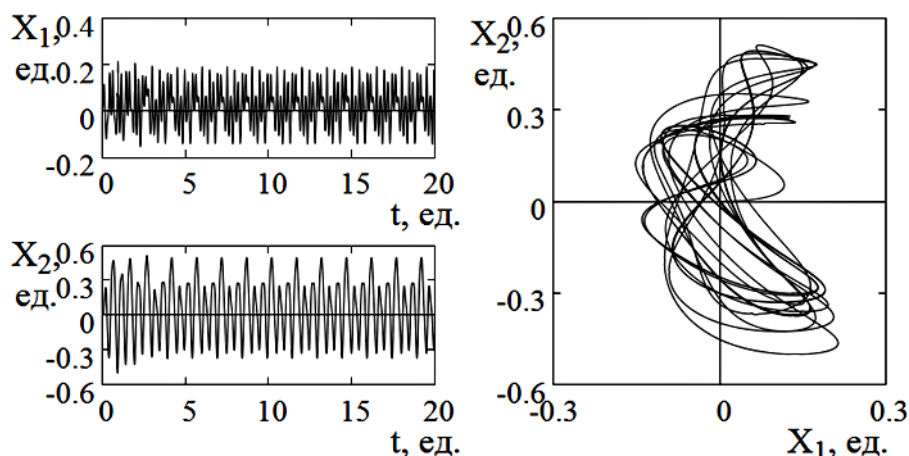


Рисунок 2.3. Колебания при нелинейности первого осциллятора. Слева показаны развертки колебаний во времени, справа – параметрический портрет.

Параметры:  $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 12.57$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 4$ ,  $\delta = 300$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 400$ ,  $A = 45$ .

Далее можно видеть, что колебания обоих осцилляторов, особенно второго, близки к регулярным с расщеплением (режим № 3). Однако расщепление для второго осциллятора происходит здесь не на два пика, а на три, а для первого – на ещё большее количество (пять–семь). Кроме того, повторяемость колебаний от периода к периоду для второго осциллятора, в общем, соблюдается, когда для первого она сильно нарушена. Параметрический портрет имеет множественный сильно расщепленный характер, главным образом за счет нерегулярности колебаний первого осциллятора. В колебаниях явно присутствуют элементы нерегулярной квазихаотичности, характерной для режима № 4.

Такой смешанный регулярно-квазихаотический режим довольно критичен к выбору параметров. Так при уменьшении параметра нелинейности с 300 до 250 ед. колебания становятся регулярными. То есть наступает режим № 1 с едва заметными элементами расщепления, которые при уменьшении  $\delta$  до 200 ед. пропадают. То же наблюдается и при уменьшении параметров связи с 400 до 350 ед. Увеличение параметра нелинейности выше 500 ед. или параметров связи выше 600 ед. устраняет элементы квазихаотичности, однако расщепление остается вплоть до  $\delta \sim 1000$  ед., после чего колебания опять стремятся к регулярности.

Важно отметить, что при  $\delta \geq 400$  ед. увеличение возбуждения до сколь угодно большого уровня к расходимости, т. е. режиму № 5, не приводит. При этом более или менее устойчиво реализуется режим № 3, причем амплитуда отщепленных импульсов приближается к амплитуде основного, а кратность расщепления особенного для первого осциллятора возрастает (при  $A \sim 1000$  ед. становится больше десятка). То есть колебания превращаются в регулярную последовательность почти прямоугольных импульсов с сильно изрезанной плоской частью.

По амплитуде возбуждения наблюдаемые автомодуляционные колебания имеют заметно выраженный порог. Переход от регулярного режима № 1 к регулярному режиму с расщеплением № 2 происходит при  $A \sim 5 \div 10$ . При увеличении затухания любого из осцилляторов в несколько раз этот порог повышается примерно пропорционально степени увеличения затухания. Увеличение затухания обоих осцилляторов на порядок автомодуляционных колебаний не вызывает. Колебания остаются близкими к регулярными, в том числе и при большой нелинейности ( $\delta \geq 400$  ед.). Переход к режиму № 5 отсутствует.

Вышеприведенное рассмотрение относится к случаю одинаковых параметров обоих осцилляторов. Однако в реальности параметры осцилляторов во многом разнятся. Зачастую различаются параметры затухания, сами осцилляторы могут обладать разной степенью нелинейности и различающимися собственными частотами, а частота возбуждения может не совпадать ни с одной из них. Кроме этого, связь между осцилляторами может быть нелинейной и довольно сильной.

В работах [A2, A18] показано, что в таких условиях в системе может существовать особый вид автомодуляционных колебаний, период которых значительно (в несколько раз) больше периода возбуждающей силы. Такие колебания там названы «асинхронными». Иллюстрацией асинхронных колебаний осцилляторов в случае сильного различия между ними является рисунок 2.4.

Характерной особенностью наблюдаемой картины является в несколько раз меньшая амплитуда колебаний первого осциллятора по сравнению с амплитудой колебаний второго. Такая особенность наблюдалась и в случае идентичных осцилляторов и также обусловлена нелинейностью первого из них.

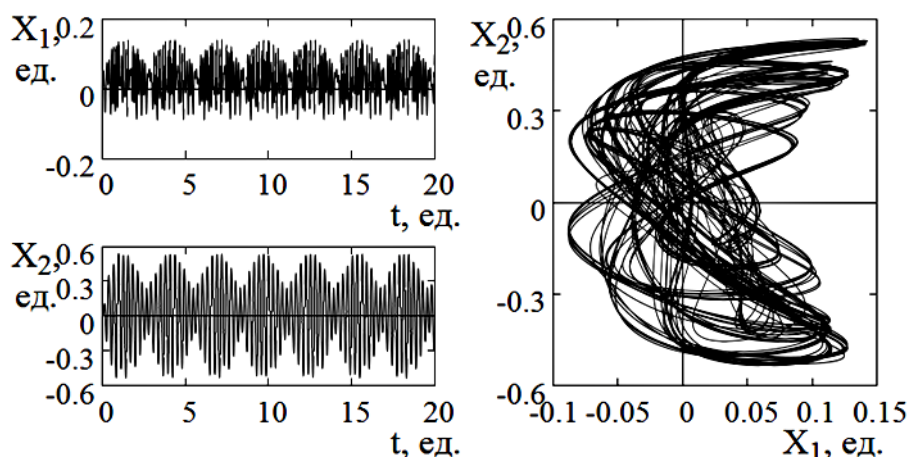


Рисунок 2.4. Асинхронные колебания различающихся осцилляторов. Слева показаны развертки колебаний во времени, справа – параметрический портрет.

$$\text{Параметры: } \omega_1 = 18.85, \omega_2 = 21.99, \omega = 20.11 \\ \beta_1 = 10.0, \beta_2 = 0.2, \delta = 1000, \gamma_1 = 800, \gamma_2 = 800, A = 45.$$

Главной особенностью асинхронных колебаний является их двухпериодичность. Так колебания второго осциллятора имеют четко выраженные два периода. Первый из периодов – малый, равен 0.31 ед. и соответствует периоду возбуждения, второй – большой, равен 3.27 ед. и определяется параметрами осцилляторов. Колебания первого осциллятора также имеют четко выраженный период, равный 3.27 ед., т. е. соответствующий большому периоду колебаний второго осциллятора. Эта периодичность особенно ярко проявляется на верхней огибающей развертки колебаний, а на нижней её роль менее заметна. Внутри такого периода колебания имеют близкий к хаотическому характер, малая периодичность в котором выражена значительно слабее, однако все же ее проявление в какой-то степени



имеет место. Длительность такого малого внутреннего «квазипериода» близка к длительности периода возбуждения.

Указанные особенности позволяют выделить асинхронные колебания в особый режим.

Режим № 6. Имеет место при значительном отличии параметров осцилляторов друг от друга. Характеризуется двухпериодичностью колебаний, малый период которых совпадает с периодом возбуждения, а большой – превышает период возбуждения в несколько раз. Изменение амплитуды второго осциллятора носит периодический характер, типичный для случая синусоидальной амплитудной модуляции единственной частотой, определяющей величину большого периода. Изменение амплитуды первого осциллятора по большому периоду синхронно с таковым для второго осциллятора, а внутри малого периода носит квазихаотический характер. Параметрический портрет заметно размазан за счет хаотической составляющей колебаний первого осциллятора.

Рассмотрим особенности асинхронного режима с точки зрения критичности параметров осцилляторов и возбуждения.

Основной (большой) период асинхронных колебаний мало зависит от амплитуды возбуждения и значений параметров затухания обоих осцилляторов – меняется не более чем на  $\pm 10\%$  при изменении тех и других на порядок. Заметная зависимость периода наблюдается от соотношения собственных частот осцилляторов друг с другом и частотой возбуждения. Так при увеличении частоты второго осциллятора с  $\omega_2 = 21.99$  до 30 период уменьшается примерно в полтора раза. При дальнейшем увеличении этой частоты амплитуда асинхронных колебаний падает в три–пять раз, и режим приближается к регулярному.

При равенстве частот обоих осцилляторов величине  $\omega_{1,2} = 18.85$  и сохранении частоты возбуждения  $\omega = 20.11$  асинхронные колебания приближаются к хаотическим, четко выраженный период исчезает, и режим становится близким к нерегулярному квазихаотическому режиму № 4. При равенстве частот обоих осцилляторов друг другу и частоте возбуждения  $\omega_{1,2} = \omega = 18.85$  асинхронные колебания пропадают, и режим совпадает с регулярным режимом № 1.

К параметру нелинейности  $\delta$  колебания становятся критичными только при его значительном уменьшении. Так при изменении  $\delta$  от 200 до 2000 ед. период и амплитуда асинхронных колебаний меняются не более чем на 10 %. Однако в нижней части этого диапазона глубина модуляции асинхронных колебаний уменьшается с 50 % при  $\delta \sim 300$  ед. до 10 % при  $\delta \sim 200$  ед. При уменьшении  $\delta$  до 100 ед. отчётливый период пропадает, в колебания добавляется хаотичность. Дальнейшее уменьшение  $\delta$  до  $\sim 50$  ед. приводит к тому, что система уходит на бесконечность, т. е. реализуется режим № 5.

К параметрам связи  $\gamma_{1,2}$  колебания мало критичны в интервале от  $\gamma_{1,2} = 400$  ед. до  $\gamma_{1,2} = 1400$  ед. Их период меняется мало (не более 10 %), однако вблизи нижней границы этого интервала глубина модуляции уменьшается до  $\sim 10$  %, а при дальнейшем уменьшении связи колебания регуляризируются, т. е. наступает режим № 1. При увеличении параметров связи выше 1400 ед. вплоть до 1600 ед. четкая периодичность асинхронных колебаний нарушается, период с течением времени скачкообразно меняется в два–три раза и более. При этом глубина модуляции сохраняется близкой к 50 %. Дальнейшее увеличение параметров связи до 2000 ед. приводит к переходу системы в новое стационарное состояние: колебания полностью регуляризируются, их частота равняется частоте возбуждения, а амплитуда резко падает. Отклонение первого осциллятора от нуля составляет около 0.10 ед., а второго – 0.35 ед. При этом амплитуда колебаний первого осциллятора не превышает 0.01 ед., а второго – 0.05 ед.

По амплитуде возбуждения асинхронные колебания имеют хорошо выраженный порог. Переход от регулярного режима № 1 к асинхронному происходит при  $A \sim 20 \div 30$  ед. При увеличении затухания любого из осцилляторов в несколько раз этот порог незначительно повышается. Увеличение затухания обоих осцилляторов  $\beta_{1,2}$  до значений  $\sim 10$  ед. приводит к установлению регулярного режима с отсутствием каких-либо автомодуляционных явлений.

## 2.5. Частотные свойства модели

Теперь подробнее рассмотрим частотные свойства предложенной модели. В первую очередь рассмотрим частотные характеристики асинхронных колебаний, о чем уже несколько слов говорилось в предыдущем разделе.

В зависимости от частоты возбуждения  $\omega$  наблюдаются четыре различных режима колебаний, проиллюстрированные на рисунке 2.5. На этом рисунке показано развитие во времени колебаний второго осциллятора, при этом колебания первого аналогичны с некоторым добавлением осцилляций на удвоенной частоте возбуждения.

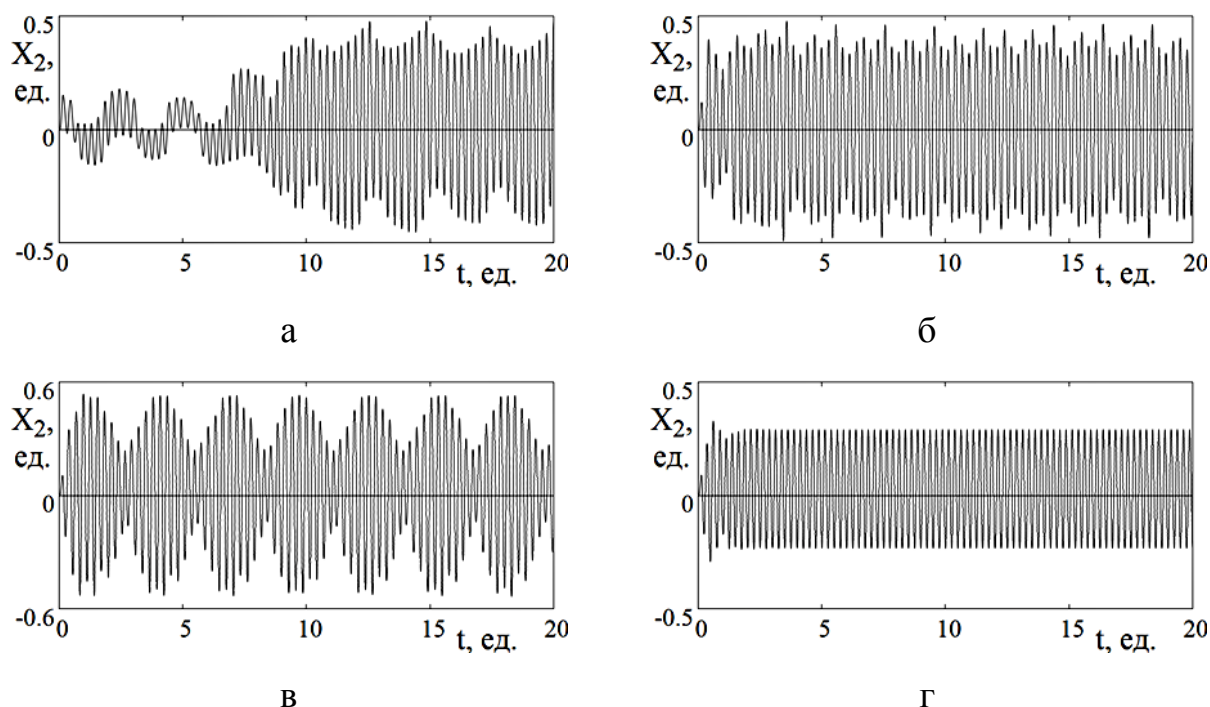


Рисунок 2.5. Колебания при различных частотах возбуждения:  
а –  $\omega = 2.51$ , б –  $\omega = 15.7$ , в –  $\omega = 20.11$ , г –  $\omega = 25.13$ .

Параметр нелинейности первого осциллятора  $\delta = 1000$ , нелинейность второго осциллятора отсутствует. Частоты осцилляторов равны соответственно  $\omega_1 = 18.85$  и  $\omega_2 = 21.99$ . Другие параметры:  $\beta_1 = 10.0$ ,  $\beta_2 = 0.2$ ,  $\gamma_1 = 800$ ,  $\gamma_2 = 800$ ,  $A = 45$ .

Поскольку рассматриваемые колебания являются вынужденными, то в установившемся режиме при любых условиях оба осциллятора колеблются с частотой возбуждения  $\omega$ . При этом их амплитуда тем или иным образом модулируется.

ется, что и приводит к автоколебаниям. В зависимости от соотношения между частотами осцилляторов и частотой возбуждения можно выделить четыре характерных частотных области, каждой из которых свойственен собственный режим колебаний.

Область  $\omega \ll \omega_1$ , режим № 1. «Навязанные» автоколебания (рисунок 2.5а), период которых совпадает с периодом возбуждающей силы. Колебания происходят на частоте значительно ниже частоты первого осциллятора. Частые колебания на рисунка 2.5а соответствуют колебаниям на собственных частотах осцилляторов. Частота модуляции амплитуды соответствует частоте возбуждающей силы, т. е. этой вынуждающей силой как бы навязывается. Большая амплитуда этих автоколебаний развивается не сразу после начала действия возбуждающей силы, а с задержкой во времени, тем меньшей, чем больше амплитуда возбуждения. Это говорит о том, что для выхода системы на стационарный режим в ней должно произойти определенное накопление энергии. На рисунке 2.5а при амплитуде возбуждения  $A = 45$  время задержки составляет около 10, при  $A = 15$  время задержки увеличивается до 50.

Область  $\omega \leq \omega_1$ , режим № 2. «Стохастические» автоколебания (рисунок 2.5б), период которых четко не выражен, а амплитуда меняется хаотическим образом вокруг среднего значения 0.4 в ту и другую сторону на  $\pm 0.1$ . Частые колебания здесь опять соответствуют собственным частотам осцилляторов, а модуляция амплитуды носит стохастический характер.

Область  $\omega_1 \leq \omega < \omega_2$ , режим № 3. «Регулярные» автоколебания (рисунок 2.5в), период которых тем больше, чем выше частота возбуждения, и при  $\omega \rightarrow \omega_2$  стремится к бесконечности. Частые колебания соответствуют частоте возбуждения, которая здесь близка к собственным частотам обоих осцилляторов. Модуляция амплитуды носит регулярный синусоидальный характер, а глубина модуляции при неизменном уровне возбуждения становится тем больше, чем ближе частота возбуждения приближается к частоте колебаний второго осциллятора.

Область  $\omega > \omega_2$ , режим № 4. Отсутствие автоколебаний (рисунок 2.5г). В этом режиме осцилляторы колеблются с частотой возбуждающей силы, причем амплитуда этих колебаний сохраняется постоянной.

Описанные четыре режима соответствуют четырем возможным положениям частоты возбуждения относительно частот двух осцилляторов. При увеличении частоты от минимальных значений режим № 1 плавно переходит в режим № 2, т. е. время задержки постепенно уменьшается, а модуляция амплитуды установившегося режима приобретает хаотический характер. Режим № 1 выражен тем сильнее, чем частота возбуждения ниже. При частоте возбуждения порядка половины собственной частоты первого осциллятора, этот режим полностью переходит в режим № 2. Между режимами № 2 и № 3 резкая граница также отсутствует. Постепенный переход одного режима в другой происходит в частотной области, составляющей до 10 % вниз и не более 5 % вверх от частоты первого осциллятора. Граница между режимами № 3 и № 4 весьма резкая и точно соответствует частоте второго осциллятора.

## 2.6. Модель расщепления синусоиды

Заканчивая рассмотрение свойств модели связанных осцилляторов, выясним природу расщепления синусоидальных колебаний, которое проявляется в режимах № 2–№ 4, описанных в разделе 2.4.

Далее будет показано, что такое расщепление может быть следствием возбуждения второй гармоники основных колебаний за счёт нелинейности системы. Иллюстрация этого явления приведена на рисунке 2.6, где слева представлены развертки по времени колебаний первого и второго осцилляторов, а справа – соответствующий параметрический портрет.

Развертки колебаний построены с помощью формул:

$$x_1 = \sin(t) + \sin(2t); \quad (2.20)$$

$$x_2 = \sin(t) + \sin(2t - \pi/2), \quad (2.21)$$

где коэффициенты выбраны минимально необходимыми для выявления существа явления.

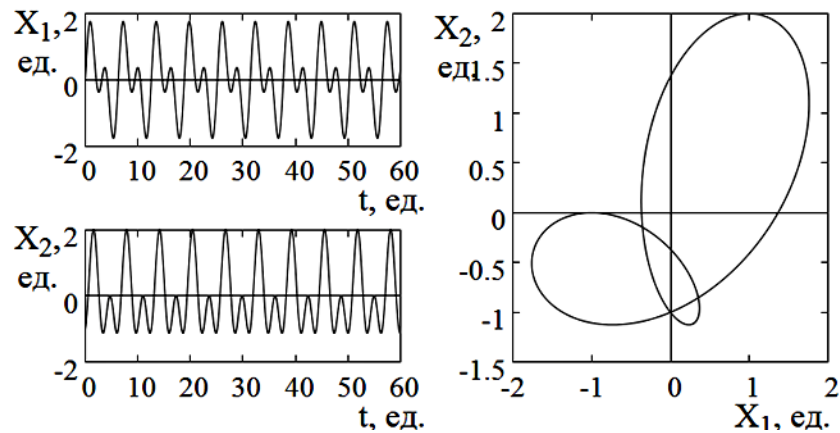


Рисунок 2.6. Иллюстрация роли возбуждения второй гармоники колебаний.

Видно, что в обоих случаях за счет второй гармоники имеет место удвоение периода, характерное для разверток, представленных на рисунке 2.2б, т. е. для режима № 2. Параметрический портрет имеет петлю, подобную проявляющейся на рисунке 2.2б, тоже характерную для режима № 2.

Нелинейность системы, требуемая для появления двойной частоты, может быть обусловлена как нелинейностью любого из осцилляторов, так и нелинейностью связи, т. е. обусловлена коэффициентами  $\eta_1$  или  $\xi_3$  в выражении для потенциала (2.15).

Для появления четко выраженной петли в слагаемом двойной частоты в выражении (2.21) необходимым условием является запаздывание фазы на  $\pi/2$ . Такой же сдвиг наблюдается в развертке по времени для второго осциллятора системы на рисунке 2.2б (колебания  $x_2$  отстают по фазе от колебаний  $x_1$  как раз на четверть начального периода).

Таким образом, реализуемое за счет нелинейности системы возбуждение двойной частоты объясняет общий характер колебаний в режиме № 2, который соответствует умеренному уровню возбуждения системы.

Однако при повышении уровня возбуждения кроме второй гармоники могут образовываться третья, четвертая и более высокие. Такое возбуждение более вы-

сокочастотных гармоник происходит постепенно без проявления каких-либо порогов.

Подобное возбуждение высших гармоник может беспороговым образом приводить к постепенному усложнению характера колебаний. То есть сначала к режиму № 3, которому свойственно дробное расщепление траекторий параметрического портрета (рисунок 2.2б), а затем к режиму № 4, где гармоник возбуждения настолько много, что колебания приобретают квазистохастический характер (рисунок 2.2в).

Дальнейшее увеличение уровня возбуждения по достижению определенного порога приводит к уходу системы на бесконечность (рисунок 2.2г), как это объяснено ранее.

Наблюдаемый при неидентичности осцилляторов асинхронный режим № 6 (рисунок 2.4) может быть обусловлен совокупным действием, как умножения частоты возбуждения, так и возникновением комбинационных частот за счет различия собственных частот осцилляторов.

## 2.7. Выводы по главе 2

Предложена упрощенная модель, состоящая из двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным, другой – линейным. Связь между осцилляторами принята нелинейной. Исследован характер вынужденных колебаний такой системы при совпадении и различии параметров осцилляторов. Показано, что автомодуляционные колебания в системе могут существовать в обоих случаях. Введено понятие обобщенного потенциала, с помощью которого интерпретированы возникающие в системе колебания. Потенциал представлен в виде суммы степенных функций, образованных произведениями обобщенных координат обоих осцилляторов вплоть до четвертого порядка. Произведено упрощение данного потенциала до вида из пяти слагаемых, два из которых дают собственные частоты осцилляторов, одно – нелинейность первого осциллятора, и оставшиеся два обеспечивают связь между осцилляторами. Проанализирован вклад каждого из этих

слагаемых в характер колебаний путем построения соответствующих потенциальных поверхностей. На основе формы потенциальной поверхности установлены условия формирования регулярных режимов колебаний, а также уход системы на бесконечность.

Для случая идентичности осцилляторов построены развертки во времени и параметрические портреты характерных для системы видов колебаний. В зависимости от степени возбуждения выявлены пять основных режимов: режим № 1 – регулярный синусоидальный, режим № 2 – регулярный с расщеплением, режим № 3 – регулярный без расщепления, режим № 4 – нерегулярный квазихаотический, режим № 5 – нерегулярный расходящийся. Установлено, что переходы между режимами от № 1 до № 4 через все промежуточные при увеличении амплитуды возбуждения являются беспороговыми. Переход из режима № 4 в режим № 5 происходит скачкообразно. В режимах № 1–3 наблюдаются периодические колебания, которые синхронизированы с возбуждающей силой. В режиме № 4 колебания становятся квазихаотическими, а в режиме № 5 колебательный процесс отсутствует, и система уходит на бесконечность.

Для неидентичных осцилляторов выявлен двухпериодический режим асинхронных колебаний – режим № 6. В этом режиме малый период колебаний соответствует периоду возбуждающей силы, а большой значительно превышает период возбуждения.

Исследованы частотные характеристики колебаний асинхронного режима. Выявлены четыре различных режима, соответствующие различным положениям частоты возбуждения относительно частот двух осцилляторов. Три из этих режимов являются автоколебательными: навязанный, стохастический и регулярный.

Предложена основанная на нелинейности системы модель генерации гармоник, объясняющая расщепление синусоидальных колебаний в режимах № 2–№ 4. Показано, что возбуждение второй гармоники приводит к регулярным автомодуляционным колебаниям, которые соответствуют режиму № 3, а возбуждение гармоник более высоких порядков может привести к нерегулярным колебаниям, соответствующим режимам № 3 и № 4.



### **Глава 3. Линейное возбуждение гиперзвуковых колебаний магнестрикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов**

В данной главе описано применение модели связанных осцилляторов в задаче возбуждения гиперзвуковых колебаний магнестрикционным преобразователем. Рассмотрена линеаризованная система уравнений, позволяющая свести эту задачу к решению системы из четырех дифференциальных уравнений первого порядка без граничных условий. На основе параметров реальных образцов ЖИГ приведена упрощенная система уравнений, где связь осцилляторов осуществляется через производные от координатных переменных. Показаны основные режимы колебаний в зависимости от величины связи, записаны аналитические критерии смены этих режимов.

#### **3.1. Постановка и геометрия задачи**

Возбуждение гиперзвуковых колебаний в диапазоне СВЧ является востребованной задачей, как для общей физики, так и для технической акустики [14, 64, 65]. Такие колебания широко применяются для устройств обработки информации на поверхностных акустических волнах [66–71]. Однако на частотах выше 1 ГГц используемые для этих целей пьезоэлектрики обладают высоким уровнем потерь. В связи с этим очень перспективными здесь являются магнестрикционные преобразователи на основе ферритов, в которых возбуждение упругих колебаний происходит в условиях ФМР [70,71], что позволяет повысить частоту возбуждаемого гиперзвука до десятков ГГц без заметного роста затухания. Наиболее подходящими материалами для таких преобразователей являются железоиттриевый гранат, имеющий низкие потери как упругих, так и магнитных колебаний, а также тербиевый феррит-гранат, у которого высокое значение константы магнитоупругого взаимодействия сочетается с невысокой намагниченностью насыщения [4].

Теоретический анализ возбуждения гиперзвука производится на основе решения уравнения Ландау–Лифшица для прецессии намагниченности в совокупности с волновыми уравнениями для упругих колебаний [2]. При этом для достиже-

ния максимальной амплитуды возбуждения гиперзвука используется геометрия нормально намагниченной ферритовой пластины [8–12], что позволяет исключить потери, обусловленные параметрическим возбуждением обменных спиновых волн [5–7, 43]. В работе [13] показано, что в такой геометрии амплитуда гиперзвука может превышать таковую в линейном режиме более чем в 30 раз, что способствует созданию магнитоакустических преобразователей высокой мощности. Однако расчёт свойств таких преобразователей в условиях ФМР требует привлечения весьма сложного аналитического аппарата, успешно реализуемого только ценой ряда упрощающих предположений. В простейшем виде задача сводится к системе из семи нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, которая решается только численными методами [13].

В то же время практика требует построения упрощенной модели, допускающей более простое и наглядное решение, на основе которого можно оценить и рассчитать важные параметры преобразователя без привлечения сложных аналитических и численных методов. В данной и следующей главах приведена такая модель на основе системы из двух связанных осцилляторов, взаимодействие между которыми осуществляется аналогично взаимодействию магнитной и упругой подсистем в магнитоакустическом преобразователе.

Геометрия задачи, совпадающая с принятой в [13], показана на рисунке 3.1. В её основе лежит плоскопараллельная пластина толщины  $d$ , обладающая магнитными, упругими и магнитоупругими свойствами.

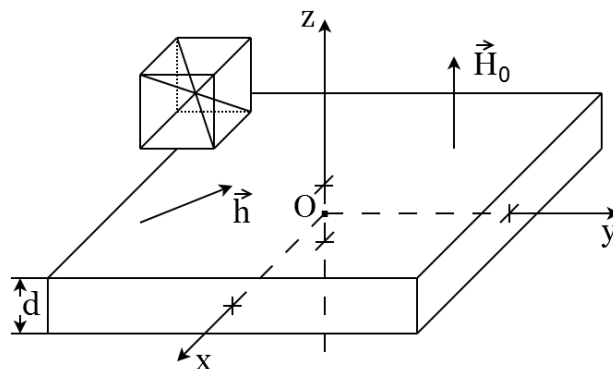


Рисунок 3.1 Геометрия задачи

Материал пластины имеет кубическую кристаллографическую симметрию, плоскость (100) которой совпадает с плоскостью пластины (вверху слева на рисунке показана схема ориентации кубической ячейки).

Внешнее постоянное магнитное поле  $\vec{H}_0$  приложено перпендикулярно плоскости пластины. Переменное магнитное поле  $\vec{h}$  действует в плоскости пластины. Задача решается в декартовой системе координат  $Oxyz$ , плоскость  $Oxy$  которой совпадает с плоскостью пластины, а оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  параллельны ребрам куба кристаллографической ячейки. Центр системы координат  $O$  находится в центре пластины, так что её плоскости соответствуют координатам  $z = \pm d/2$ .

Основная система уравнений движения для нормированных компонент намагниченности имеет вид [13]:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2} \cdot [(m_y + \alpha m_x m_z) \cdot H_z - (m_z - \alpha m_y m_x) \cdot H_y - \alpha \cdot (m_y^2 + m_z^2) \cdot H_x]; \quad (3.1)$$

где уравнения для компонент  $m_y$  и  $m_z$  получаются циклической перестановкой  $x, y, z$ .

Уравнения для компонент упругого смещения  $u_{x,y}$  имеют вид:

$$\frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial t^2} = -2\beta \frac{\partial u_{x,y}}{\partial t} + \frac{c_{44}}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial z^2}, \quad (3.2)$$

граничные условия:

$$c_{44} \left. \frac{\partial u_{x,y}}{\partial z} \right|_{z=\pm d/2} = -B_2 m_{x,y} m_z. \quad (3.3)$$

Таким образом, имеются три уравнения первого порядка для компонент намагниченности и два уравнения второго порядка для компонент упругого смещения, что эквивалентно системе из семи уравнений первого порядка. В работах [1,19] приведен анализ развития колебаний в такой системе методом фазового пространства, что потребовало для нахождения координат особых точек решения линейного алгебраического уравнения седьмой степени. Сложность такой задачи очевидна. Далее в главе пойдёт речь о способе уменьшения общего числа уравнений и получении более простого расчетного аппарата.

### 3.2. Линейное приближение

Рассмотрим задачу в линейном приближении. Положим  $m_{x,y} \ll 1$ ,  $m_z \rightarrow 1$  и далее будем оставлять члены только первого порядка по  $m_{x,y}$ . В отношении упругих колебаний, аналогично [13], примем следующие предположения:  $u_z = 0$ , продольные упругие волны отсутствуют;  $B_1 = 0$ , упругие волны распространяются только вдоль оси  $Oz$ ;  $\partial u_{x,y}/\partial x = 0$ ;  $\partial u_{x,y}/\partial y = 0$ . Также дополнительно будем считать, что упругие смещения вдоль оси  $Oy$  отсутствуют, т. е.  $u_y = 0$ .

Эффективные поля в уравнении (3.1) с учетом линеаризации принимают вид:

$$H_x = h_x - \frac{B_2}{M_0} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial z}; \quad (3.4)$$

$$H_y = h_y; \quad (3.5)$$

$$H_z = H_p - \frac{B_2}{M_0} \cdot m_x \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad (3.6)$$

где введено вспомогательное обозначение:

$$H_p = H_0 - 4\pi M_0. \quad (3.7)$$

В эти выражения входит производная от смещения  $u_x$  по координате  $z$ . Найдем эту производную.

Согласно [13], в рассматриваемой задаче  $x$  – компонента упругого смещения для первой моды колебаний может быть представлена в виде:

$$u_x = -\frac{B_2}{c_{44}} \cdot m_x m_z \cdot z + v_x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right). \quad (3.8)$$

При этом производная от смещения  $u_x$  по координате  $z$  имеет вид:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{B_2}{c_{44}} \cdot m_x m_z + \frac{2}{d} \cdot v_x; \quad (3.9)$$

где  $v_x$  – функция, удовлетворяющая уравнению:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{c_{44}\pi^2}{\rho d^2} \cdot v_x = \frac{4B_2 d}{c_{44}\pi^2} \cdot \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} (m_x m_z) + 2\beta \frac{\partial}{\partial t} (m_x m_z) \right]. \quad (3.10)$$

Полагая  $m_z \rightarrow 1$ , из (3.9) получаем:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{B_2}{c_{44}} \cdot m_x + \frac{2}{d} \cdot v_x, \quad (3.11)$$

а уравнение (3.10) переписется в виде:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{c_{44}\pi^2}{\rho d^2} \cdot v_x = \frac{4B_2 d}{c_{44}\pi^2} \cdot \left[ \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial m_x}{\partial t} \right]. \quad (3.12)$$

Теперь при условии  $m_x v_x \ll 1$  эффективные поля (3.4)–(3.6) принимают вид:

$$H_x = h_x + \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}} \cdot m_x - \frac{2B_2}{M_0 d} \cdot v_x; \quad (3.13)$$

$$H_y = h_y; \quad (3.14)$$

$$H_z = H_p. \quad (3.15)$$

### 3.3. Линеаризованные уравнения для намагниченности и упругого смещения

Преобразуем теперь уравнения для намагниченности (3.1). Полагая, что  $m_z \rightarrow 1$ , третье уравнение опускаем, а в первом и втором при условии  $m_{x,y} \ll 1$  оставляем только члены первого порядка по  $m_{x,y}$ :

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2} \cdot [(m_y + \alpha m_x) \cdot H_z - H_y - \alpha \cdot H_x]; \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2} \cdot [H_x - (m_x - \alpha m_y) \cdot H_z - \alpha \cdot H_y]. \quad (3.17)$$

Раскрывая скобки, выражая из первого уравнения  $m_y$  и подставляя его во второе, получаем уравнение для  $m_x$ :

$$(1 + \alpha^2) \cdot \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} + 2\alpha\gamma H_0 \cdot \frac{\partial m_x}{\partial t} + (\gamma H_p)^2 \cdot m_x - \\ - \gamma \cdot \frac{\partial H_y}{\partial t} - \alpha\gamma \cdot \frac{\partial H_x}{\partial t} - \gamma^2 H_p H_x = 0. \quad (3.18)$$

Имеем одно уравнение второго порядка для компоненты  $m_x$ , которое было получено через  $m_y$ , т. е. оно эквивалентно двум уравнениям первого порядка для  $m_x$  и  $m_y$ . Такое же уравнение второго порядка можно получить и для  $m_y$ , которое будет совпадать с уравнением (3.18).

Подставляя в (3.18) поля (3.13)–(3.15), получаем уравнение для  $m_x$  в виде:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} + \frac{\alpha\gamma(2H_p - b_1)}{1+\alpha^2} \cdot \frac{\partial m_x}{\partial t} + \frac{\gamma^2 H_p (H_p - b_1)}{1+\alpha^2} \cdot m_x + \frac{\alpha\gamma b_2}{1+\alpha^2} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\gamma^2 H_p b_2}{1+\alpha^2} \cdot v_x = \\ = \frac{\gamma}{1+\alpha^2} \cdot \frac{\partial h_y}{\partial t} + \frac{\alpha\gamma}{1+\alpha^2} \cdot \frac{\partial h_x}{\partial t} + \frac{\gamma^2 H_p}{1+\alpha^2} \cdot h_x, \quad (3.19)$$

где введены обозначения:

$$b_1 = \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}}; \quad (3.20)$$

$$b_2 = \frac{2B^2}{M_0 d}; \quad (3.21)$$

Обратимся теперь к уравнению (3.12) для упругого смещения  $v_x$ . Вводя вспомогательные обозначения:

$$c_1 = \frac{c_{44}\pi^2}{\rho d^2}; \quad (3.22)$$

$$c_2 = \frac{4B_2 d}{c_{44}\pi^2}, \quad (3.23)$$

и подставляя в (3.12) вторую производную от намагниченности (3.19), получаем уравнение для упругого смещения  $v_x$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + \left(2\beta + \frac{\alpha\gamma b_2 c_2}{1+\alpha^2}\right) \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} + \left(c_1 + \frac{\gamma^2 H_p b_2 c_2}{1+\alpha^2}\right) \cdot v_x + \\ & + \left[\frac{\alpha\gamma c_2 (2H_p - b_1)}{1+\alpha^2} - 2\beta c_2\right] \cdot \frac{\partial m_x}{\partial t} + \frac{\gamma^2 H_p (H_p - b_1) c_2}{1+\alpha^2} \cdot m_x = \\ & = \frac{\gamma c_2}{1+\alpha^2} \cdot \frac{\partial h_y}{\partial t} + \frac{\alpha\gamma c_2}{1+\alpha^2} \cdot \frac{\partial h_x}{\partial t} + \frac{\gamma^2 H_p c_2}{1+\alpha^2} \cdot h_x. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Уравнения (3.19) и (3.24) образуют искомую систему.

### 3.4. Линеаризованная система уравнений для намагниченности и упругого смещения в обобщенном виде

В результате преобразований вместо исходной системы (3.1)–(3.2), которая эквивалентна семи уравнениям первого порядка с граничными условиями (3.3), получена более простая система (3.19)–(3.24), содержащая два уравнения второго порядка без граничных условий. В общем случае эта система описывает колебания двух связанных гармонических осцилляторов, связь которых осуществляется не только через сами переменные, но и через их производные.

Уравнения для намагниченности (3.19) и упругого смещения (3.24) могут быть записаны в обобщенном виде:

$$\begin{aligned} & a_{11} \cdot \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} + a_{12} \cdot \frac{\partial m_x}{\partial t} + a_{13} \cdot m_x + a_{14} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} + a_{15} \cdot v_x = \\ & = b_{11} \cdot \frac{\partial h_y}{\partial t} + b_{12} \cdot \frac{\partial h_x}{\partial t} + b_{13} \cdot h_x; \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned}
& a_{21} \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + a_{22} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} + a_{23} \cdot v_x + a_{24} \cdot \frac{\partial m_x}{\partial t} + a_{25} \cdot m_x = \\
& = b_{21} \cdot \frac{\partial h_y}{\partial t} + b_{22} \cdot \frac{\partial h_x}{\partial t} + b_{23} \cdot h_x.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Здесь с учетом (3.20)–(3.23) коэффициенты имеют вид:

$$a_{11} = 1; \tag{3.27}$$

$$a_{12} = \frac{2\alpha\gamma}{1+\alpha^2} \cdot \left( H_p - \frac{B_2^2}{2M_0 c_{44}} \right); \tag{3.28}$$

$$a_{13} = \frac{\gamma^2 H_p}{1+\alpha^2} \cdot \left( H_p - \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}} \right); \tag{3.29}$$

$$a_{14} = \frac{2\alpha\gamma B_2}{(1+\alpha^2)M_0 d}; \tag{3.30}$$

$$a_{15} = \frac{2\gamma^2 H_p B_2}{(1+\alpha^2)M_0 d}; \tag{3.31}$$

$$b_{11} = \frac{\gamma}{1+\alpha^2}; \tag{3.32}$$

$$b_{12} = \frac{\alpha\gamma}{1+\alpha^2}; \tag{3.33}$$

$$b_{13} = \frac{\gamma^2 H_p}{1+\alpha^2}; \tag{3.34}$$

$$a_{21} = 1; \tag{3.35}$$

$$a_{22} = 2 \cdot \left[ \beta \cdot \frac{4\alpha\gamma B_2^2}{(1+\alpha^2)M_0 c_{44} \pi^2} \right]; \tag{3.36}$$

$$a_{23} = \frac{c_{44} \pi^2}{\rho d^2} \cdot \left[ 1 + \frac{8\gamma^2 H_p B_2^2 \rho d^2}{(1+\alpha^2)M_0 c_{44}^2 \pi^4} \right]; \tag{3.37}$$

$$a_{24} = \frac{8B_2 d}{c_{44} \pi^2} \cdot \left[ \frac{\alpha\gamma}{1+\alpha^2} \cdot \left( H_p - \frac{B_2^2}{2M_0 c_{44}} \right) - \beta \right]; \tag{3.38}$$

$$a_{25} = \frac{4\gamma^2 H_p B_2 d}{(1+\alpha^2)c_{44} \pi^2} \cdot \left( H_p - \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}} \right); \tag{3.39}$$

$$b_{21} = \frac{4\gamma B_2 d}{(1+\alpha^2)c_{44} \pi^2}; \tag{3.40}$$

$$b_{22} = \frac{4\alpha\gamma B_2 d}{(1+\alpha^2)c_{44} \pi^2}; \tag{3.41}$$

$$b_{23} = \frac{4\gamma^2 H_p B_2 d}{(1+\alpha^2)c_{44} \pi^2}. \tag{3.42}$$

Приведенные коэффициенты имеют довольно сложный вид, некоторые из них состоят из двух и трех слагаемых. Однако при учете реальных значений параметров материалов, используемых для магнитострикционных преобразователей, таких как ЖИГ и ТбФГ, можно увидеть, что роль этих слагаемых различна. Это позволяет произвести некоторые упрощения.

В качестве примера рассмотрим параметры, соответствующие монокристаллу ЖИГ [4]:  $4\pi M_0 = 1750$  Гс;  $B_2 = 6.96 \cdot 10^6$  эрг · см<sup>-3</sup>;  $\rho = 5.17$  г · см<sup>-3</sup>;

$c_{44} = 7.64 \cdot 10^{11}$  эрг  $\cdot$  см $^{-3}$ ;  $\alpha = 0.001$ ;  $\beta = 10^6$  с $^{-1}$ . В таблице 3.1 приведены значения коэффициентов, рассчитанные с этими параметрами при двух значениях постоянного поля: 2750 Э и 1850 Э. В этих случаях поле  $H_p$  принимает значения 1000 Э и 100 Э, а частоты ФМР в отсутствие магнитоупругости равны 2800 МГц и 280 МГц. Все коэффициенты в таблице 3.1 рассчитаны в системе Гауссовой системы единиц. Для упрощения записи размерности величин опущены.

Во втором и четвертом столбцах таблицы приведены численные значения коэффициентов, рассчитанные для указанных полей, причем составляющие их слагаемые записаны отдельно. По этим слагаемым видно, что в большинстве случаев одно из них преобладает над другим на порядок и более. Это позволяет пренебречь меньшими слагаемыми. В третьем и пятом столбцах таблицы записаны значения коэффициентов с учетом этого пренебрежения.

Таблица 3.1. Значения коэффициентов

	$H_p = 1000$ Э		$H_p = 100$ Э	
$a_{11}$	$0.10 \cdot 10^1$	$0.10 \cdot 10^1$	$0.10 \cdot 10^1$	$0.10 \cdot 10^1$
$a_{12}$	$0.35 \cdot 10^8 - 0.80 \cdot 10^4$	$0.35 \cdot 10^8$	$0.35 \cdot 10^7 - 0.83 \cdot 10^4$	$0.35 \cdot 10^7$
$a_{13}$	$0.31 \cdot 10^{21} - 0.14 \cdot 10^{18}$	$0.31 \cdot 10^{21}$	$0.31 \cdot 10^{19} - 0.14 \cdot 10^{17}$	$0.31 \cdot 10^{19}$
$a_{14}$	$0.26 \cdot 10^{14}$	$0.26 \cdot 10^{14}$	$0.26 \cdot 10^{14}$	$0.26 \cdot 10^{14}$
$a_{15}$	$0.45 \cdot 10^{27}$	$0.45 \cdot 10^{27}$	$0.45 \cdot 10^{26}$	$0.45 \cdot 10^{26}$
$b_{11}$	$0.18 \cdot 10^8$	$0.18 \cdot 10^8$	$0.18 \cdot 10^8$	$0.18 \cdot 10^8$
$b_{12}$	$0.18 \cdot 10^5$	$0.18 \cdot 10^5$	$0.18 \cdot 10^5$	$0.18 \cdot 10^5$
$b_{13}$	$0.31 \cdot 10^{18}$	$0.31 \cdot 10^{18}$	$0.31 \cdot 10^{17}$	$0.31 \cdot 10^{17}$
$a_{21}$	$0.10 \cdot 10^1$	$0.10 \cdot 10^1$	$0.10 \cdot 10^1$	$0.10 \cdot 10^1$
$a_{22}$	$0.20 \cdot 10^7 + 0.65 \cdot 10^4$	$0.20 \cdot 10^7$	$0.20 \cdot 10^7 + 0.65 \cdot 10^4$	$0.20 \cdot 10^7$
$a_{23}$	$0.31 \cdot 10^{21} + 0.12 \cdot 10^{18}$	$0.31 \cdot 10^{21}$	$0.31 \cdot 10^{21} + 0.12 \cdot 10^{18}$	$0.31 \cdot 10^{21}$
$a_{24}$	$0.89 \cdot 10^{-2} - 0.20 \cdot 10^{-5} -$ $-0.51 \cdot 10^{-3}$	$0.89 \cdot 10^{-2}$	$0.89 \cdot 10^{-3} - 0.20 \cdot 10^{-5} -$ $-0.51 \cdot 10^{-3}$	$0.38 \cdot 10^{-3}$
$a_{25}$	$0.79 \cdot 10^{11} - 0.36 \cdot 10^8$	$0.79 \cdot 10^{11}$	$0.79 \cdot 10^9 - 0.36 \cdot 10^7$	$0.79 \cdot 10^9$
$b_{21}$	$0.45 \cdot 10^{-2}$	$0.45 \cdot 10^{-2}$	$0.45 \cdot 10^{-2}$	$0.45 \cdot 10^{-2}$
$b_{22}$	$0.45 \cdot 10^{-5}$	$0.45 \cdot 10^{-5}$	$0.45 \cdot 10^{-5}$	$0.45 \cdot 10^{-5}$
$b_{23}$	$0.79 \cdot 10^8$	$0.79 \cdot 10^8$	$0.79 \cdot 10^7$	$0.79 \cdot 10^7$



Аналогичный расчет коэффициентов по параметрам ТбФГ показывает, что полученные значения коэффициентов ведут себя подобным образом.

В соответствии с полученными данными в выражениях для коэффициентов (3.27)–(3.42) можно пренебречь слагаемыми, дающими малый вклад. И если при этом учесть, что  $\alpha^2 \ll 1$ , то эти коэффициенты принимают значительно упрощенный вид:

$$a_{11} = 1; \quad (3.43)$$

$$a_{12} = 2\alpha\gamma H_p; \quad (3.44)$$

$$a_{13} = \gamma^2 H_p^2; \quad (3.45)$$

$$a_{14} = \frac{2\alpha\gamma B_2}{M_0 d}; \quad (3.46)$$

$$a_{15} = \frac{2\gamma^2 H_p B_2}{M_0 d}; \quad (3.47)$$

$$b_{11} = \gamma; \quad (3.48)$$

$$b_{12} = \alpha\gamma; \quad (3.49)$$

$$b_{13} = \gamma^2 H_p; \quad (3.50)$$

$$a_{21} = 1; \quad (3.51)$$

$$a_{22} = 2\beta; \quad (3.52)$$

$$a_{23} = \frac{c_{44}\pi^2}{\rho d^2}; \quad (3.53)$$

$$a_{24} = \frac{8\alpha\gamma H_p B_2 d}{c_{44}\pi^2}; \quad (3.54)$$

$$a_{25} = \frac{4\gamma^2 H_p^2 B_2 d}{c_{44}\pi^2}; \quad (3.55)$$

$$b_{21} = \frac{4\gamma B_2 d}{c_{44}\pi^2}; \quad (3.56)$$

$$b_{22} = \frac{4\alpha\gamma B_2 d}{c_{44}\pi^2}; \quad (3.57)$$

$$b_{23} = \frac{4\gamma^2 H_p B_2 d}{c_{44}\pi^2}. \quad (3.58)$$

В виду того, что производные от переменных полей дают в качестве множителя частоту, то в уравнениях (3.19) и (3.24) вблизи резонанса вклад слагаемых с коэффициентами  $b_{ik}$  будет сопоставим с вкладом остальных слагаемых. Одновременно с этим следует учесть, что коэффициенты  $b_{12}$  и  $b_{22}$  меньше коэффици-

ентов  $b_{11}$  и  $b_{21}$  в  $\alpha$  раз, т. е. на три порядка. Поэтому коэффициентами  $b_{12}$  и  $b_{22}$  можно пренебречь. Слагаемые, содержащие производные от компонент переменных полей, в сумме со слагаемыми, содержащими сами эти поля, дают всего лишь сдвиг фазы примерно на четверть периода, поэтому их тоже можно опустить. Далее, поскольку возбуждение системы происходит через магнитный осциллятор, а действие возбуждающей силы на упругий осциллятор определяется слагаемым с коэффициентом  $b_{23}$ , пропорциональным константе магнитоупругого взаимодействия  $B_2$ , которая может быть достаточно малой, роль коэффициента  $b_{23}$  в процессе возбуждения колебаний также можно считать незначительной. В итоге решающим для возбуждения остается только коэффициент  $b_{13}$ , т. е. в первом приближении остальные коэффициенты  $b_{ik}$  можно положить равными нулю.

В виду различной природы колебательных систем при получении приближенных аналитических выражений необходимо обращать внимание на относительные величины параметров затухания  $\alpha$  и  $\beta$ , т.к. в зависимости от их значений коэффициенты слагаемых связи между осцилляторами  $a_{14}$  и  $a_{24}$  могут принимать сильно различающиеся значения.

Теперь система уравнений (3.25)–(3.26) в обозначениях, традиционно принятых для рассмотрения системы связанных осцилляторов, будет иметь вид:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta_1 \cdot \frac{dx_2}{dt} = A \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (3.59)$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 + \delta_2 \cdot \frac{dx_1}{dt} = 0, \quad (3.60)$$

где  $\beta_{1,2} = a_{12,22}$ ;  $\omega_{1,2}^2 = a_{13,23}$ ;  $\gamma_{1,2} = a_{15,25}$ ;  $\delta_{1,2} = a_{14,24}$ ;  $A \cdot \cos(\omega_0 t) = b_{13} \cdot h_x$ , а  $b_{11} = b_{12} = b_{21} = b_{22} = b_{23} = 0$ .

В отсутствие вынуждающей силы эти уравнения могут описывать только затухающие колебания. Однако, поскольку каждое из уравнений кроме слагаемого с производной от основной переменной содержит еще слагаемое с производной от другой переменной, то затухание одного осциллятора может зависеть от колебаний другого. При наличии вынуждающей силы это обстоятельство могло бы привести к частичной или даже полной компенсации затухания каждого из осцилляторов, т. е. колебания могли бы как убывать во времени, так и нарастать. В

случае роста колебаний можно полагать, что система приобретает «отрицательное сопротивление», т. е. становится активной.

Для проверки это предположения решим систему (3.59)–(3.60) численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка [58] и исследуем характер возбуждаемых колебаний при различной величине параметров связи осцилляторов  $\delta_1$  и  $\delta_2$  при производных. Положим собственные частоты осцилляторов равными и рассмотрим два случая: случай равенства частоты возбуждения собственным частотам осцилляторов и случай различия между ними.

На рисунке 3.2 показано развитие колебаний во времени двух осцилляторов с равными частотами. Рисунок 3.2а соответствует равенству частоты возбуждения собственным частотам осцилляторов, рисунок 3.2б – её отличию от частот осцилляторов (приняты относительные единицы, исходя из наглядности рисунка).

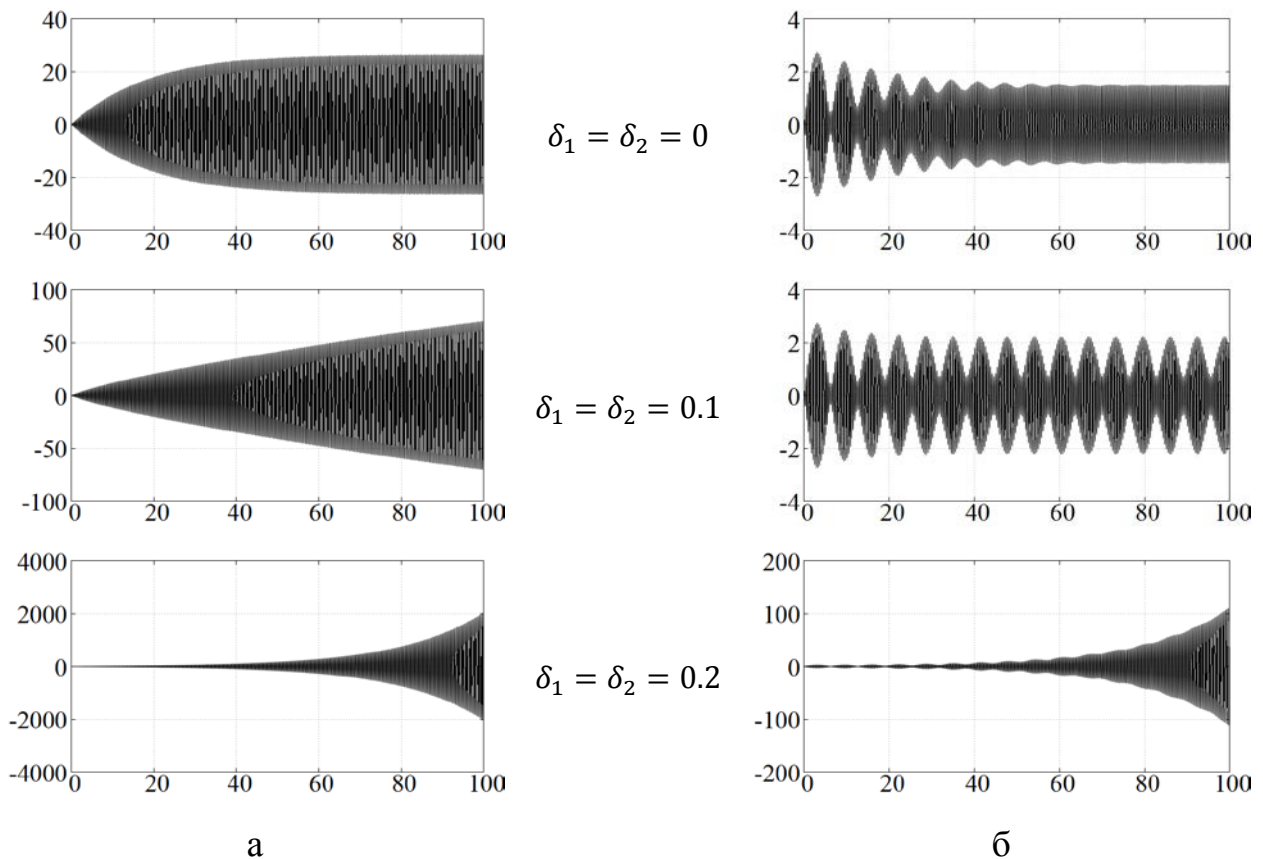


Рисунок 3.2. Развитие вынужденных колебаний во времени при различной величине связи.

Параметры:  $\beta_1 = \beta_2 = 0.1$ ;  $\omega_1 = \omega_2 = 17.5$ ;  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ ;  $A = 50$ ;

значения  $\delta_1 = \delta_2$  приведены на рисунке;

а – частота возбуждения  $\omega_0 = 17.5$ ; б – частота возбуждения  $\omega_0 = 16.5$ .

Из рисунка 3.2а. видно, что при возбуждении системы на собственной частоте осцилляторов в отсутствие связи через производные (верхний рисунок) колебания довольно быстро (примерно через время 40) приходят к стационарной амплитуде и дальше не меняются. Картина соответствует обычному экспоненциальному насыщению, характерному для положительного затухания.

При  $\delta_{1,2} = 0.1$  (средний рисунок) колебания нарастают почти линейно. В конце рассматриваемого интервала времени можно наблюдать незначительное отклонение от линейности, что, возможно, означает приближение к какой-то стационарной амплитуде где-то за далеко за временем 100. Как видно, амплитуда колебаний заметно превышает предыдущую и при времени 100 составляет около 75. Близкий к линейному рост амплитуды можно интерпретировать как экспоненту с нулевым показателем.

При связи 0.2 (нижний рисунок) амплитуда колебаний примерно до времени 50 увеличивается малым темпом, составляя не более нескольких сот единиц, после чего рост ее резко усиливается. При времени 100 амплитуда достигает 2000, имея тенденцию увеличиваться ещё больше. Данная картина напоминает экспоненциальный рост, характерный для отрицательного затухания.

Таким образом, при частоте возбуждения равной собственным частотам осцилляторов из-за связи через производные знак показателя экспоненты, описывающей затухание, меняется с положительного, проходя через нуль, на отрицательный.

Теперь обратимся к случаю отстройки частоты возбуждения от резонансной. Полученные развертки во времени при тех же параметрах, что и на рисунке 3а, кроме частоты возбуждения показаны на рисунке 3.2б.

Из рисунка 3.2б видно, что в отсутствие связи через производные имеет место модуляция амплитуды, обусловленная биениями с частотой, равной разности частот возбуждения и собственной. Однако такие модуляционные колебания, как и полагается биениям, быстро затухают (примерно через время 60). Эта картина полностью соответствует обычному установлению вынужденных колебаний при экспоненциальном затухании с положительным затуханием.

При связи  $\delta_1 = \delta_2 = 0.1$  (средний рисунок) модуляционные колебания не затухают, и их амплитуда имеет постоянное значение. Модуляция опять обусловлена разностью частот возбуждения и собственной, т. е. биениями, а затухание отсутствует, что соответствует нулевому показателю экспоненты.

При связи равной 0.2 (нижний рисунок) модуляционные колебания присутствуют, однако их размах на фоне резкого роста общей амплитуды теряется. То есть биения, хотя и остаются, но роль их в общей картине колебаний становится весьма незначительной. Рост амплитуды опять соответствует экспоненте с отрицательным показателем.

Наблюдаемое во всех трех случаях уменьшение амплитуды колебаний примерно на порядок по сравнению с рисунком 3.2а обусловлено отстройкой частоты возбуждения от резонансной.

Таким образом, в случае связи через производные по мере её увеличения имеет место уменьшение затухания от положительного значения через нулевое до отрицательного. То есть наблюдаются три различных режима вынужденных колебаний: режим спада амплитуды, режим её нарастания и между ними режим стационарной амплитуды. При этом автоколебания, как самоподдерживающийся процесс, полностью отсутствуют, а наблюдаемая в некоторых случаях модуляция амплитуды обусловлена биениями.

Следует заметить, что экспоненциальный рост амплитуды колебаний, наблюдаемый на рисунке 3.2, не может продолжаться до бесконечности, т.к. это соответствовало бы бесконечному нарастанию энергии колебаний. В реальном случае такой экспоненциальный рост неизбежно ограничивается нелинейной расстройкой, приводящей к выходу системы из резонанса [20].

### **3.5. Аналитический критерий изменения характера колебаний**

В ряде случаев система уравнений (3.59)–(3.60) допускает аналитическое решение. Рассмотрим, к примеру, частный случай свободных колебаний в отсут-

ствии вынуждающей силы. В этом случае система (3.59)–(3.60) переписывается в виде:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta_1 \cdot \frac{dx_2}{dt} = 0; \quad (3.61)$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 + \delta_2 \cdot \frac{dx_1}{dt} = 0, \quad (3.62)$$

Введем дополнительные переменные:

$$y_1 = \frac{dx_1}{dt}; \quad (3.63)$$

$$y_2 = \frac{dx_2}{dt}. \quad (3.64)$$

Подставляя новые переменные и их производные в уравнения (3.61)–(3.62), получаем систему уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_1}{dt} = y_1; \quad (3.65)$$

$$\frac{dy_1}{dt} + \beta_1 \cdot y_1 + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta_1 \cdot y_2 = 0; \quad (3.66)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = y_2; \quad (3.67)$$

$$\frac{dy_2}{dt} + \beta_2 \cdot y_2 + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 + \delta_2 \cdot y_1 = 0. \quad (3.68)$$

Будем искать решение этой системы в виде:

$$x_1 = x_{10} \cdot e^{\lambda t}; \quad (3.69)$$

$$x_2 = x_{20} \cdot e^{\lambda t}; \quad (3.70)$$

$$y_1 = y_{10} \cdot e^{\lambda t}; \quad (3.71)$$

$$y_2 = y_{20} \cdot e^{\lambda t}; \quad (3.72)$$

Подставляя (3.69)–(3.72) в (3.65)–(3.68), можно видеть, что уравнения (3.65) и (3.67) удовлетворяются тождественно, а уравнения (3.66) и (3.68) образуют систему:

$$(\lambda^2 + \beta_1 \lambda + \omega_1^2) \cdot x_{10} + (\lambda \delta_1 + \gamma_1) \cdot x_{20} = 0; \quad (3.73)$$

$$(\lambda \delta_2 + \gamma_2) \cdot x_{10} + (\lambda^2 + \beta_2 \lambda + \omega_2^2) \cdot x_{20} = 0, \quad (3.74)$$

детерминант которой имеет вид:

$$D_0 = \begin{vmatrix} \lambda^2 + \beta_1 \lambda + \omega_1^2 & \lambda \delta_1 + \gamma_1 \\ \lambda \delta_2 + \gamma_2 & \lambda^2 + \beta_2 \lambda + \omega_2^2 \end{vmatrix}. \quad (3.75)$$

Условие нетривиальности решения системы  $D_0 = 0$  даёт уравнение для  $\lambda$ :

$$\lambda^4 + \lambda^3 \cdot (\beta_1 + \beta_2) + \lambda^2 \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) + \lambda \cdot (\beta_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2 - \delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1) + \omega_1^2\omega_2^2 - \gamma_1\gamma_2 = 0. \quad (3.76)$$

В виду того, что решение этого уравнения в аналитическом виде довольно громоздко, рассмотрим упрощенный частный случай.

Предположим, что  $\lambda$  имеет вид:

$$\lambda = a + i \cdot b, \quad (3.77)$$

где  $a, b$  – действительные, т. е.  $a$  соответствует изменению амплитуды колебаний во времени, а  $b$  – частоте этих колебаний.

Подставляя (3.77) в (3.76) и выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$A + i \cdot B = 0, \quad (3.78)$$

где:

$$A = (a^4 + b^4 - 6a^2b^2) + (a^3 - 3ab^2) \cdot (\beta_1 + \beta_2) + (a^2 - b^2) \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) + a \cdot (\beta_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2 - \delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1) + \omega_1^2\omega_2^2 - \gamma_1\gamma_2; \quad (3.79)$$

$$B = 4ab \cdot (a^2 - b^2) + (3a^2b - b^3) \cdot (\beta_1 + \beta_2) + 2ab \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) + b \cdot (\beta_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2 - \delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1). \quad (3.80)$$

Равенство (3.78) верно только в том случае, когда как действительная, так и мнимая части равны нулю. Из (3.79) получаем:

$$(a^4 + b^4 - 6a^2b^2) + (a^3 - 3ab^2) \cdot (\beta_1 + \beta_2) + (a^2 - b^2) \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) + a \cdot (\beta_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2 - \delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1) + \omega_1^2\omega_2^2 - \gamma_1\gamma_2 = 0. \quad (3.81)$$

Из (3.80), деля  $B$  на  $b$  и группируя относительно  $b^2$ , имеем:

$$b^2 \cdot (4a + \beta_1 + \beta_2) = 4a^3 + 3a^2 \cdot (\beta_1 + \beta_2) + 2a \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) + (\beta_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2 - \delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1). \quad (3.82)$$

Уравнения (3.81) и (3.82) составляют систему относительно  $a$  и  $b$ , которая должна быть решена совместно. Путем выражения  $b^2$  из (3.82) через  $a$  и последующей подстановкой полученного выражения в (3.81) можно получить уравнение,

содержащее только  $a$ . Это уравнение будет шестой степени, и его решение, вероятно, будет не проще решения исходного уравнения (3.76).

Поэтому рассмотрим частный случай, соответствующий постоянству амплитуды во времени, т. е.  $a = 0$ . При этом из (3.81) и (3.82) получаем два уравнения для  $b$ , которые должны удовлетворяться одновременно:

$$b^4 - b^2 \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) + \omega_1^2\omega_2^2 - \gamma_1\gamma_2 = 0; \quad (3.83)$$

$$b^2 \cdot (\beta_1 + \beta_2) - (\beta_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2 - \delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1) = 0. \quad (3.84)$$

Из (3.84) при условии  $\beta_1 + \beta_2 \neq 0$  получаем:

$$b^2 = \frac{\beta_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2 - \delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1}{\beta_1 + \beta_2}. \quad (3.85)$$

Это соотношение позволяет найти частоту собственных колебаний системы при условии постоянства амплитуды:

$$\omega_S = \sqrt{\frac{\beta_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2 - \delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1}{\beta_1 + \beta_2}}. \quad (3.86)$$

При этом (3.83) также соответствует условию сохранения амплитуды постоянной, т. е. при его нарушении в ту или другую сторону амплитуда растет или спадает.

Введем вспомогательную функцию:

$$G_S(\omega) = \omega^4 - \omega^2 \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) + \omega_1^2\omega_2^2 - \gamma_1\gamma_2, \quad (3.87)$$

с помощью которой получаем критерий перехода от нарастания амплитуды к её убыванию:

$$G_S(\omega) = 0. \quad (3.88)$$

Таким образом, главным критерием постоянства амплитуды колебаний является (3.88). Если он выполняется, то частота определяется соотношением (3.86).

При этом выполняется равенство:

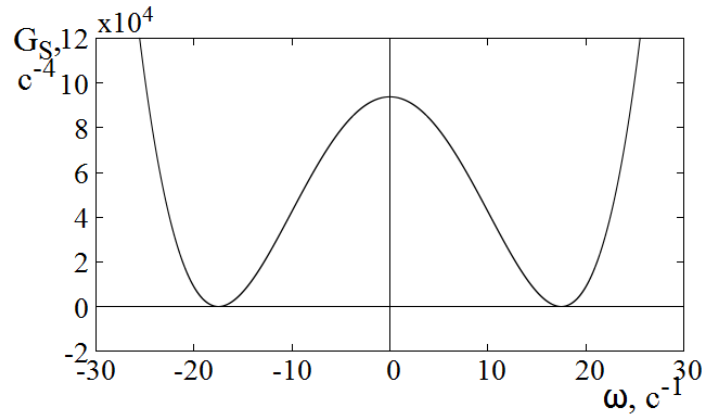
$$\omega_S^4 - \omega_S^2 \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) + \omega_1^2\omega_2^2 - \gamma_1\gamma_2 = 0. \quad (3.89)$$

Этот критерий позволяет определить возможные значения параметров  $\beta_{1,2}$ ,  $\gamma_{1,2}$ ,  $\delta_{1,2}$ , соответствующие разным режимам колебаний.

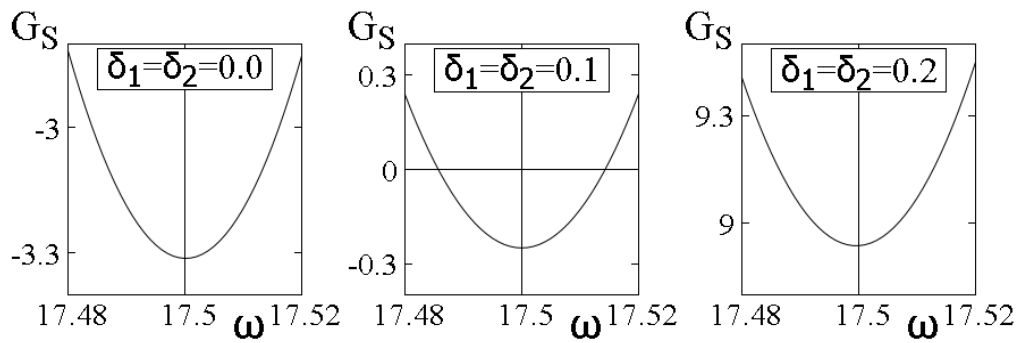
Проверим полученный критерий численно. Зависимость функции  $G_S$  от частоты приведена на рисунке 3.3.



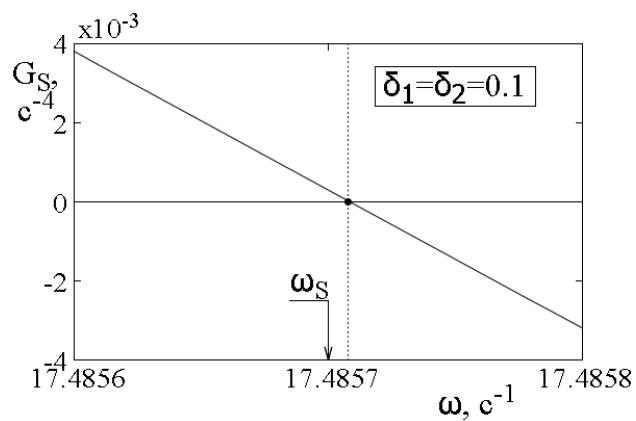
На рисунке 3.3а представлен общий характер зависимости  $G_S(\omega)$ . Видно, что она представляет собой параболу четвертого порядка, симметричную относительно оси ординат. Функция  $G_S(\omega)$  имеет два минимума при  $\omega = \pm 17.5$ , разделенные максимумом при  $\omega = 0$ .



а



б



в

Рисунок 3.3. Зависимость функции  $G_S$  от частоты  $\omega$ .

Параметры:  $\beta_1 = \beta_2 = 0.1$ ;  $\omega_1 = \omega_2 = 17.5$ ;  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ ;  $\delta_1 = \delta_2 = 0.1$

а – общий характер зависимости;

б – зависимость при различных параметрах связи;

в – зависимость вблизи главного нуля в крупном масштабе.

Реальный физический смысл имеет правый минимум, окрестность которого показана на рисунке 3.3б в более крупном масштабе при трёх характерных значениях параметров связи  $\delta_{1,2}$ . Левый из этих рисунков построен при  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ , что в случае свободных колебаний соответствует их затуханию во времени. Случай  $\delta_1 = \delta_2 = 0.1$  представлен на среднем рисунке и соответствует постоянной амплитуде свободных колебаний. Правый рисунок, построенный при  $\delta_1 = \delta_2 = 0.2$ , соответствует экспоненциальному нарастанию амплитуды. При вынужденных колебаниях эти случаи соответствуют показанным на рисунке 3.2а трем режимам: установлению стационарного значения (верхний рисунок), линейному (средний рисунок) и экспоненциальному (нижний рисунок) росту амплитуды колебаний.

Из рисунка 3.3б видно, что во всех трех случаях минимум зависимости  $G_S(\omega)$  приходится на  $\omega = 17.5$ . Однако минимум этой функции находится вблизи нуля (около  $-0.25$ ) только в случае  $\delta_1 = \delta_2 = 0.1$  (средний рисунок), тогда как при  $\delta_1 = \delta_2 = 0$  (левый рисунок), значение минимума является отрицательным и составляет  $-3.32$ , а при  $\delta_1 = \delta_2 = 0.2$  (правый рисунок) – положительным, равным  $8.9$ . Таким образом, нули функции  $G_S(\omega)$  находятся вблизи минимума только при  $\delta_1 = \delta_2 = 0.1$ , тогда как при  $\delta_1 = \delta_2 = 0$  они отнесены в разные стороны на значительные расстояния, а в случае  $\delta_1 = \delta_2 = 0.2$  вообще отсутствуют.

На рисунке 3.3в показан левый нуль правой ветви функции  $G_S(\omega)$  (где  $\omega > 0$ ) в ещё более крупном масштабе. Видно, что он приходится на  $\omega = 17.48571$ . Рассчитанное по формуле (3.86) значение частоты резонанса системы составляет  $\omega_S = 17.4857$  (на рисунке обозначено стрелкой). Можно видеть, что это значение весьма близко к частоте, при которой функция  $G_S(\omega)$  проходит через нуль.

Таким образом, можно сказать, что оба условия постоянства амплитуды (3.88) и (3.86) выполняются с весьма высокой степенью точности.

Выполненная численная проверка показывает, что из четырех возможных корней уравнения (3.88) только один соответствует частоте (3.86). То есть полу-

чается, что условие (3.86) дополняет основной критерий (3.88) тем, что позволяет определить, какой именно из четырех корней уравнения (3.88) действительно соответствует переходу от убывания амплитуды колебаний к её нарастанию. Из рисунка 3.3в видно, что этот корень соответствует убыванию функции  $G_S(\omega)$  в области  $\omega > 0$ . То есть для выбора корня можно использовать условие отрицательности производной функции  $G_S(\omega)$  по частоте:

$$\frac{dG_S}{d\omega} < 0, \quad (3.90)$$

или в развернутом виде:

$$2\omega^2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) < 0. \quad (3.91)$$

Для частоты можно записать:

$$\omega < \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2)}, \quad (3.92)$$

причем это соотношение должно быть дополнено условием:

$$\delta_1\delta_2 < \omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2, \quad (3.93)$$

которое накладывает ограничение на величины параметров связи через производные.

Следует отметить, что приведенные условия (3.90)–(3.93) получены на основе анализа численного примера с конкретными заданными значениями параметров, т. е. не исключена необходимость коррекции этих условий при других значениях параметров.

Запишем теперь полученное значение частоты и критерия перехода для магнитоупругой колебательной системы, приведенной на рисунке 3.1.

Так из (3.86) и (3.87) получаем:

$$\omega_S = \sqrt{\frac{a_{12}a_{23} + a_{22}a_{13} - a_{15}a_{24} - a_{25}a_{14}}{a_{12} + a_{22}}}, \quad (3.94)$$

$$G_S(\omega) = \omega^4 - \omega^2(a_{13} + a_{23} + a_{12}a_{22} - a_{15}a_{25}) + a_{13}a_{23} - a_{14}a_{24}, \quad (3.95)$$

а условие (3.88) принимает вид:

$$\omega_S^4 - \omega_S^2(a_{13} + a_{23} + a_{12}a_{22} - a_{15}a_{25}) + a_{13}a_{23} - a_{14}a_{24} = 0, \quad (3.96)$$

где величины  $a_{ik}$  определяются формулами (3.27)–(3.42) или (3.43)–(3.58).

### 3.6. Критерии трех режимов на примере реальных материалов

Рассмотрим возможность существования трех режимов – стационарной амплитуды, ее роста и убывания – на примере реальных материалов типа ЖИГ и ТбФГ.

На рисунке 3.4 представлены зависимости  $G_S$  от частоты  $\omega$  для ферритов двух разных составов: ЖИГ (а) и ТбФГ (б).

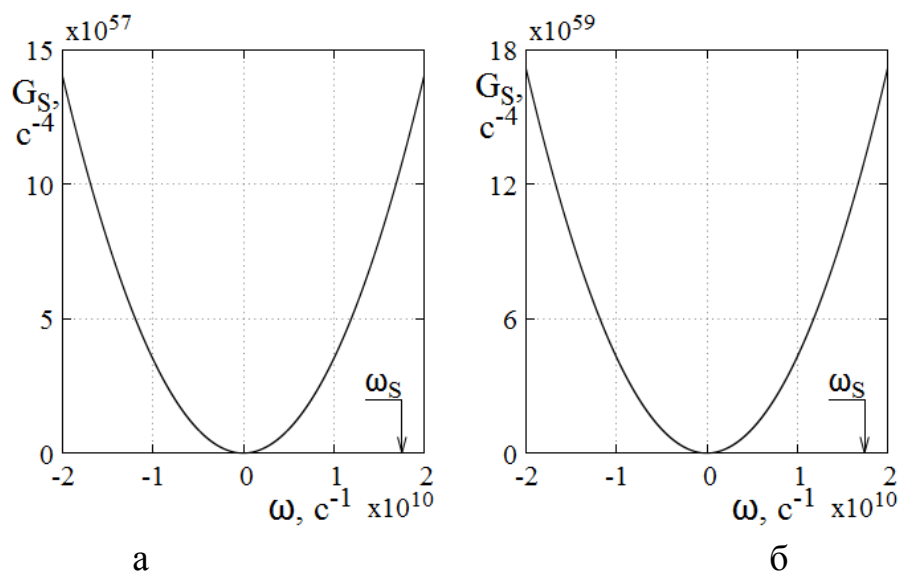


Рисунок 3.4. Зависимость функции  $G_S$  от частоты  $\omega$  для ферритов различных составов: ЖИГ (а) и ТбФГ (б).

Параметры общие:

$$c_{44} = 7.64 \cdot 10^{11} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3}; \rho = 5.17 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}; \alpha = 0.02;$$

$$\beta = 10^9 \text{ с}^{-1}; d = 6.865 \cdot 10^{-5} \text{ см}.$$

Параметры специфические:

$$\text{ЖИГ(а): } 4\pi M_0 = 1750 \text{ Гс}; B_2 = 6.96 \cdot 10^6 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3}; H_0 = 2750 \text{ Э};$$

$$\text{ТбФГ(а): } 4\pi M_0 = 250 \text{ Гс}; B_2 = 3.0 \cdot 10^7 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3}; H_0 = 1250 \text{ Э}.$$

Из рисунка 3.4 видно, что в обоих случаях  $G_S$  представляет собой параболу, симметричную относительно оси ординат, с единственным нулем при  $\omega = 0$ . Ветви параболы для ТбФГ поднимаются вверх значительно круче (на два порядка), чем ветви параболы для ЖИГ. Это, по-видимому, связано с большим значением константы  $B_2$  для этого материала. Однако критические частоты, определяемые формулой (3.94) с учетом (3.27)–(3.42), для обоих ферритов близки друг к другу и составляют:  $\omega_S(\text{ЖИГ}) = 1.7557 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_S(\text{ТбФГ}) = 1.7455 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ . Видно, что в обоих случаях эти частоты далеки от нуля функции  $G_S$ , т. е. критерий постоянства амплитуды не выполняется.

### 3.7. Сравнение колебаний магнитной и модельной систем

Рассмотрим, в какой степени колебания осцилляторов, описываемые упрощенной системой (3.19)–(3.24), соответствуют колебаниям намагниченности, описываемым полной системой (3.1)–(3.3). Сравнение колебаний приведено на рисунке 3.5.

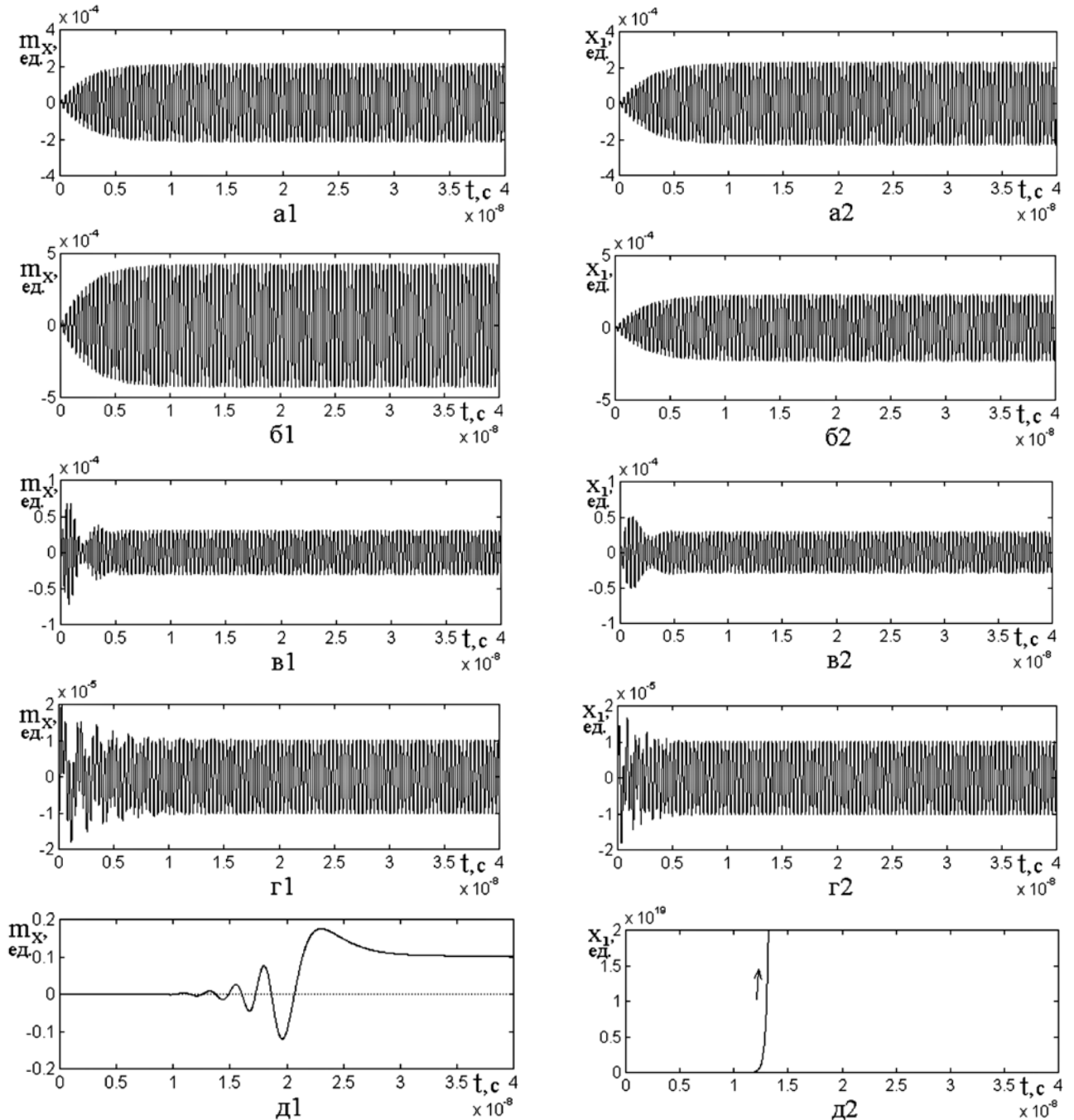


Рисунок 3.5. Развитие колебаний компонент  $m_x$  и  $x_1$  во времени при различных коэффициентах константы магнитоупругого взаимодействия  $N = B_2/B_2$  (ЖИГ).

Частота возбуждения  $f = 2800$  МГц. Условия возбуждения: а –  $h_x = 0.01$  Э,  $h_y = 0$ ; б, в, г, д –  $h_x = 0.01$  Э,  $h_y = 0.01$  Э; везде  $A = 0.01$

Коэффициент константы магнитоупругого взаимодействия:

а –  $N = 1$ ; б –  $N = 1$ ; в –  $N = 10$ ; г –  $N = 40$ ; д –  $N = 50$ .

На рисунке 3.5 приведено развитие колебаний компонент  $m_x$  и  $x_1$  во времени при различных коэффициентах константы магнитоупругого взаимодействия  $N = B_2/B_2$  (ЖИГ). Кривые в левом столбце соответствуют полной системе (3.1)–(3.3), кривые в правом столбце – укороченной системе (3.19)–(3.24).

Кривая a1 построена при возбуждении магнитной системы по одной координате  $x$ . Из сравнения с кривой a2, соответствующей возбуждению первого осциллятора упрощенной системы, видно совпадение установившейся амплитуды в обоих случаях с точностью до единиц процентов. С ростом константы  $B_2$  установившаяся амплитуда  $x_1$  падает несколько быстрее, чем амплитуда  $m_x$ . При  $N = 10$  это различие достигает почти двух раз. В этом случае с точки зрения совпадения установившихся амплитуд более удобным становится возбуждение магнитной системы сразу по двум координатам  $x$  и  $y$ . Но тогда при  $N = 1$  амплитуда  $m_x$  будет превосходить амплитуду  $x_1$  почти в два раза, как это показано на рисунке 3.5б1 и б2.

Тем не менее, при увеличении константы  $B_2$  от  $N = 10$  и вплоть до  $N = 40$  установившиеся амплитуды  $m_x$  и  $x_1$  совпадают до единиц процентов (рисунок 3.5в1, в2, г1, г2). Дальнейший рост константы  $B_2$ , начиная с  $N \approx 47$ , приводит к переориентации намагниченности к направлению более близкому к плоскости пластины. Это происходит посредством нескольких затухающих осцилляций подобным тем, что показаны на рисунке 3.5д1 при  $N = 50$ . Более подробный процесс переориентации намагниченности рассмотрен в работе [63]. При том же значении константы  $B_2$  амплитуда осциллятора  $x_1$ , как показано на рисунке 3.5д2, устремляется к бесконечности.

Таким образом, можно видеть, что переориентация вектора намагниченности в исходной магнитоупругой системе и уход на бесконечность амплитуды колебаний модельной системы осцилляторов происходят при одном и том же значении константы магнитоупругого взаимодействия  $B_2$ .

### 3.8 Выводы по главе 3

В применении к задаче анализа работы магнестрикционного преобразователя СВЧ диапазона на частоте ферромагнитного резонанса для плоскопараллельной нормально намагниченной ферритовой пластины записаны связанные уравнения движения вектора намагниченности и упругого смещения с граничными условиями и возбуждением переменным магнитным полем.

Для упрощения данной задачи предложена линеаризованная система уравнений, основанная на модели связанных осцилляторов, в результате чего полная система, содержащая семь уравнений первого порядка и четыре граничных условия, сведена к системе четырех уравнений первого порядка без граничных условий.

На основе характеристик реальных образцов ЖИГ получены укороченные выражения, описывающие параметры задачи с точностью не менее двух порядков.

Упрощенная система уравнений приведена к виду, соответствующему модельной системе из двух осцилляторов, связанных через производные от переменных. Для получения развития колебаний во времени полная и укороченная системы решались методом Рунге–Кутты четвертого порядка.

Показано, что в зависимости от величины параметров связи осцилляторов возможны два режима вынужденных колебаний: спад и нарастание амплитуды во времени. Эти два режима разделены третьим режимом (точкой бифуркации), в котором амплитуда вынужденных колебаний сохраняет постоянное значение. При этом критичность порога перехода от одного режима к другому по константе связи составляет не менее шести значащих цифр.

Для укороченной системы в режиме постоянной амплитуды колебаний приведено аналитическое решение. Записаны два критерия, один из которых определяет критическое значение константы связи, определяющее переход между режимами, а другой дает частоту резонансных колебаний в точке перехода.

Результаты исследования укороченной системы сопоставлены с реальным случаем возбуждения колебаний в пластине из ЖИГ. Выявлены условия перехода

от режима убывания амплитуды к режиму ее роста. Отмечено, что в реальном случае железиттриевого граната амплитуда нарастающих колебаний ограничивается на достаточно высоком постоянном уровне, обусловленном нелинейной расстройкой магнитной колебательной системы.

Показано, что точка перехода между режимами, соответствующая бесконечному росту амплитуды колебаний модельной системы, для случая ЖИГ эквивалентна точке переориентации вектора намагниченности, причем тот и другой переходы происходят при одном и том же критическом значении константы магнитоупругого взаимодействия.



## Глава 4. Нелинейное возбуждение гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов в квадратичном приближении

В главе применительно к задаче возбуждения гиперзвуковых колебаний рассмотрены уравнения движения вектора намагниченности и упругого смещения, в которых с учетом кругового характера прецессии использовано квадратичное приближение по намагниченности. Для такой квадрированной системы на основе параметров и геометрии исходной ферритовой пластины приведены эквивалентные параметры. Выполнен анализ приближения, обеспечиваемого линеаризованной и квадрированной системами по сравнению с решением исходной нелинейной системой.

### 4.1 Геометрия задачи и основные уравнения

Геометрия задачи совпадает с принятой в главе 3 и показана на рисунке 3.1.

Основная система уравнений движения для нормированных компонент намагниченности имеет вид [13]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_x}{\partial t} = & -\frac{\gamma}{1+\alpha^2} \cdot [(m_y + \alpha m_x m_z) \cdot H_z - (m_z - \alpha m_y m_x) \cdot H_y - \\ & -\alpha \cdot (m_y^2 + m_z^2) \cdot H_x]; \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $\gamma$  – гиромангнитная постоянная,  $\alpha$  – параметр затухания Гильберта, уравнения для  $m_{x,z}$  получаются циклической перестановкой  $x, y, z$ .

Входящие в эти уравнения эффективные поля  $H_{x,y,z}$  равны:

$$H_x = h_x + H_{ax}; \quad (4.2)$$

$$H_y = h_y + H_{ay}; \quad (4.3)$$

$$H_z = H_0 - 4\pi M_0 m_z + H_{az}, \quad (4.4)$$

где  $H_0$  – внешнее постоянное поле,  $h_{x,y}$  – компоненты внешнего переменного поля,  $M_0$  – намагниченность насыщения материала пластины, а выражения для компонент полей  $H_{ax,ay,az}$  имеют вид [13]:

$$H_{ax} = -\frac{2K_0}{M_0}m_x - \frac{2K_1}{M_0}m_x(m_y^2 + m_z^2) - \frac{2K_2}{M_0}m_xm_y^2m_z^2 - \\ - \frac{2B_1}{M_0}m_x \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{B_2}{M_0} \left[ m_y \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + m_z \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right], \quad (4.5)$$

причем  $H_{ay}$  и  $H_{az}$  получаются из (4.5) циклической перестановкой  $x, y, z$ . Здесь  $K_{0,1,2}$  – константы одноосной и кубической анизотропии,  $B_{1,2}$  – константы магнитоупругого взаимодействия,  $u_{x,y,z}$  – компоненты упругого смещения.

Уравнения для компонент упругого смещения  $u_{x,y}$  [13]:

$$\frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial t^2} = -2\beta \frac{\partial u_{x,y}}{\partial t} + \frac{c_{44}}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial z^2}, \quad (4.6)$$

граничные условия:

$$c_{44} \frac{\partial u_{x,y}}{\partial z} \Big|_{z=\pm d/2} = -B_2 m_{x,y} m_z, \quad (4.7)$$

где  $\beta$  – параметр затухания,  $c_{44}$  – константа упругости,  $\rho$  – плотность материал пластины.

Аналогично [A3, A4] примем следующие упрощающие предположения: анизотропия отсутствует –  $K_0 = 0, K_1 = 0, K_2 = 0$ ; продольные упругие волны отсутствуют –  $B_1 = 0$ ; упругие смещения вдоль оси  $O_y$  отсутствуют –  $u_y = 0$ ; упругие волны распространяются только вдоль оси  $O_z$  –  $\partial u_{x,y}/\partial x = 0, \partial u_{x,y}/\partial y = 0$ .

Для упрощения записи введем обозначение:

$$H_p = H_0 - 4\pi M_0. \quad (4.8)$$

При этом эффективные поля (4.2)–(4.4) принимают вид:

$$H_x = h_x - \frac{B_2}{M_0} m_z \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad (4.9)$$

$$H_y = h_y; \quad (4.10)$$

$$H_z = H_p + 4\pi M_0 - 4\pi M_0 m_z - \frac{B_2}{M_0} m_x \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (4.11)$$

Условие сохранения длины вектора намагниченности требует выполнения соотношения [2, 33]:

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1, \quad (4.12)$$

откуда, полагая  $m_{x,y} \ll 1$  и разлагая  $m_z$  в ряд Тейлора в окрестности единицы с точностью до второй степени по  $m_x$  и  $m_y$ , получаем

$$m_z = 1 - \frac{1}{2}m_x^2 - \frac{1}{2}m_y^2. \quad (4.13)$$

Подставляя (4.13) в (4.9)–(4.11) и оставляя члены не выше второй степени по намагниченности, получаем эффективные поля в виде:

$$H_x = h_x + \left(-\frac{B_2}{M_0} + \frac{B_2}{2M_0}m_x^2 + \frac{B_2}{2M_0}m_y^2\right)\frac{\partial u_x}{\partial z}; \quad (4.14)$$

$$H_y = h_y; \quad (4.15)$$

$$H_z = H_p + 2\pi M_0 m_x^2 + 2\pi M_0 m_y^2 - \frac{B_2}{M_0}m_x \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (4.16)$$

В эти выражения входит производная от упругого смещения по координате  $\partial u_x/\partial z$ . Согласно работе [13] эта производная имеет вид:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{B_2}{c_{44}}m_x m_z + \frac{2}{d}v_x, \quad (4.17)$$

где  $v_x$  – функция, удовлетворяющая уравнению [13]:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{c_{44}\pi^2}{\rho d^2}v_x = \frac{4B_2 d}{c_{44}\pi^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2}(m_x m_z) + 2\beta \frac{\partial}{\partial t}(m_x m_z) \right]. \quad (4.18)$$

Поскольку функция  $v_x$  представляет собой решение краевой задачи, редуцированное к случаю первой упругой моды [13], далее будем называть эту функцию «редуцированной функцией упругого смещения» или просто «редуцированным упругим смещением». При этом полная  $x$ -компонента упругого смещения имеет вид [72]:

$$u_x = -\frac{B_2}{c_{44}}m_x m_z z + v_x \sin\left(\frac{\pi}{d}z\right), \quad (4.19)$$

и на поверхностях пластины при  $z = \pm d/2$  равна:

$$u_{xS} = \pm \left(-\frac{B_2 d}{2c_{44}}m_x m_z + v_x\right). \quad (4.20)$$

С учетом квадратичного приближения (4.13) производная (4.17) принимает вид:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{B_2}{c_{44}}m_x + \frac{B_2}{2c_{44}}m_x^3 + \frac{B_2}{2c_{44}}m_x m_y^2 + \frac{2}{d}v_x. \quad (4.21)$$

Вводя вспомогательные обозначения:

$$b_0 = 2\pi M_0; \quad (4.22)$$

$$b_1 = \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}}; \quad (4.23)$$

$$b_2 = \frac{B_2}{M_0 d} \quad (4.24)$$

и подставляя (4.21) в (4.14)–(4.16), получаем эффективные поля:

$$H_x = h_x + b_1 m_x - b_1 m_x^3 - b_1 m_x m_y^2 - 2b_2 v_x + b_2 m_x^2 v_x + b_2 m_y^2 v_x; \quad (4.25)$$

$$H_y = h_y; \quad (4.26)$$

$$H_z = H_p + (b_0 + b_1) m_x^2 + b_0 m_y^2 - 2b_2 m_x v_x. \quad (4.27)$$

#### 4.2 Уравнение для намагниченности в квадратичном приближении

Подставим (4.25)–(4.27) в (4.1), а также учтем, что при реальных параметрах материала (например, ЖИГ):  $b_1 \ll H_p$ ,  $b_1 \ll b_2$ , причем  $b_2 \sim H_p$ . То есть везде при умножении  $b_1$  на  $m_{x,y}^3$  получаются величины четвертого порядка малости, которые отбрасываем. При этом, полагая затухание достаточно малым, т. е.  $\alpha \ll 1$ , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_x}{\partial t} = & -\gamma[-h_y + H_p m_y + b_0 m_x^2 m_y + b_0 m_y^3 - 2b_2 m_x m_y v_x + \\ & + \alpha(H_p - b_1) m_x + 2\alpha b_2 v_x]; \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_y}{\partial t} = & \gamma[h_x + (H_p - b_1) m_x + b_0 m_x^3 + b_0 m_x m_y^2 + 2b_2 v_x - \\ & - 4b_2 m_x^2 v_x - 2b_2 m_y^2 v_x - \alpha H_p m_y]. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Дифференцируя (4.28) по времени и подставляя  $\partial m_y / \partial t$  в соответствии с (4.29), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} + \alpha\gamma(H_p - b_1) \frac{\partial m_x}{\partial t} + \gamma^2 H_p (H_p - b_1) m_x + 2\gamma^2 H_p b_2 v_x + 2\alpha\gamma b_2 \frac{\partial v_x}{\partial t} + \\ + 2\gamma^2 H_p b_0 m_x^3 - 2\gamma^2 (3H_p - b_0) b_2 m_x^2 v_x - \\ - 4\gamma^2 b_2^2 m_x v_x^2 - \alpha\gamma^2 H_p^2 m_y + 2\gamma b_0 m_x m_y \frac{\partial m_x}{\partial t} - \\ - 2\gamma b_2 m_y v_x \frac{\partial m_x}{\partial t} - 2\gamma^2 (H_p - 3b_0) b_2 m_y^2 v_x = \gamma^2 H_p h_x \end{aligned} \quad (4.30)$$

Это уравнение получено для компоненты намагниченности  $m_x$ , однако в некоторых слагаемых оно содержит компоненту  $m_y$ , которая не позволяет рассматривать это уравнение независимо от получаемого подобным путем уравнения

для  $m_y$ . Чтобы уравнения для  $m_x$  и  $m_y$  стали независимыми, примем приближение круговой прецессии.

Предположим, что прецессия намагниченности является круговой по правому кругу с частотой  $\omega$ , т. е. будем считать, что

$$m_x = \cos(\omega t); \quad (4.31)$$

$$m_y = \sin(\omega t), \quad (4.32)$$

т. е. выполняется соотношение

$$m_y = -\frac{1}{\omega} \frac{dm_x}{dt}. \quad (4.33)$$

В случае вынужденных колебаний частота прецессии  $\omega$  совпадает с частотой вынуждающей силы, а в случае свободных колебаний при малой амплитуде в отсутствие магнитоупругости равна [2, 33]:

$$\omega = \gamma H_p. \quad (4.34)$$

Рассмотрим вынужденные колебания намагниченности с частотой  $\omega$  под действием поля:

$$h_x = h_0 \cos(\omega t). \quad (4.35)$$

Подставляя (4.35) в (4.30) и приводя подобные члены, получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} + \alpha \gamma \left( H_p - b_1 + \frac{\gamma H_p^2}{\omega} \right) \frac{\partial m_x}{\partial t} + \gamma^2 H_p (H_p - b_1) m_x + 2\gamma^2 H_p b_2 v_x + \\ & + 2\alpha \gamma b_2 \frac{\partial v_x}{\partial t} + 2\gamma^2 H_p b_0 m_x^3 - 2\gamma^2 (3H_p - b_0) b_2 m_x^2 v_x - \\ & - 4\gamma^2 b_2^2 m_x v_x^2 + \frac{2\gamma^2 b_0}{\omega^2} (2\gamma H_p - \omega) m_x \left( \frac{\partial m_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{2\gamma b_2}{\omega} m_x \right) \left( \frac{\partial m_x}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} \right) - \\ & - \frac{2\gamma^2 b_0}{\omega^2} [\gamma (H_p - 3b_0) - \omega] \left( \frac{\partial m_x}{\partial t} \right)^2 v_x = \gamma^2 H_p h_0 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Это – уравнение второго порядка для компоненты намагниченности  $m_x$ , полностью независимое от уравнения для  $m_y$ , которое тождественно (4.36) с точностью до замены индексов  $x, y$ .

### 4.3 Уравнение для упругого смещения в квадратичном приближении

Рассмотрим теперь уравнение (4.18) для редуцированного упругого смещения  $v_x$ . Численный расчет по полным уравнениям (4.1)–(4.7), выполненный ана-

логично [13], показывает, что правая часть уравнения (4.18) меньше левой более чем на порядок, поэтому вместо (4.13) можно положить  $m_z = 1$ . При этом уравнение (3.18) с использованием следующих вспомогательных обозначений:

$$c_1 = \frac{c_{44}\pi^2}{\rho d^2}; \quad (4.37)$$

$$c_2 = \frac{4B_2d}{c_{44}\pi^2}, \quad (4.38)$$

принимает вид:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial v_x}{\partial t} + c_1 v_x - 2\beta c_2 \frac{\partial m_x}{\partial t} - c_2 \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} = 0. \quad (4.39)$$

Подставляя в уравнение (4.39) вторую производную от намагниченности в соответствии с (4.36), получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + 2(\beta + \alpha\gamma b_2 c_2) \frac{\partial v_x}{\partial t} + (c_1 + 2\gamma^2 H_p b_2 c_2) v_x + \gamma^2 H_p (H_p - b_1) c_2 m_x + \\ & + \left[ \alpha\gamma \left( H_p - b_1 + \frac{\gamma H_p}{\omega} \right) - 2\beta \right] c_2 \frac{\partial m_x}{\partial t} + 2\gamma^2 H_p b_0 c_2 m_x^3 - \\ & - 2\gamma^2 (3H_p - b_0) b_2 c_2 m_x^2 v_x - 4\gamma^2 b_2^2 c_2 m_x v_x^2 + \frac{2\gamma^2 b_0 c_2}{\omega^2} (2\gamma H_p - \omega) m_x \left( \frac{\partial m_x}{\partial t} \right)^2 + \\ & + \frac{2\gamma b_2 c_2}{\omega} m_x \left( \frac{\partial m_x}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} \right) - \frac{2\gamma b_2 c_2}{\omega^2} [\gamma(H_p - 3b_0) - \omega] \left( \frac{\partial m_x}{\partial t} \right)^2 v_x = \\ & = \gamma^2 H_p h_0 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Уравнения (4.36) и (4.40) составляют искомую систему уравнений для намагниченности и редуцированного упругого смещения в квадратичном приближении. При этом полные упругие смещения на поверхности пластины определяются формулой (4.20).

Приведем для сравнения ту же систему в линейном приближении:

уравнение для намагниченности –

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} + \alpha\gamma(2H_p - b_1) \frac{\partial m_x}{\partial t} + \gamma^2 H_p (H_p - b_1) m_x + \\ & + 2\gamma^2 H_p b_2 v_x + 2\alpha\gamma b_2 \frac{\partial v_x}{\partial t} = \gamma^2 H_p h_0 \cos(\omega t); \end{aligned} \quad (4.41)$$

уравнение для редуцированного упругого смещения –

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + 2(\beta + \alpha\gamma b_2 c_2) \frac{\partial v_x}{\partial t} + (c_1 + 2\gamma^2 H_p b_2 c_2) v_x + \gamma^2 H_p (H_p - b_1) c_2 m_x + \\ & + [\alpha\gamma(2H_p - b_1) - 2\beta] c_2 \frac{\partial m_x}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Как видно, эта система с точностью до обозначений совпадает с полученной в главе 3 (формулы (3.19) и (3.24)).

Для удобства будем называть систему (4.41)–(4.42) «линеаризованной», а систему (4.36), (4.40) – «квадрированной».

#### 4.4 Уравнения для свободных колебаний при небольшой амплитуде

В случае свободных колебаний при небольшой амплитуде (т. е. в пренебрежении эффектом нелинейной расстройки) для частоты можно воспользоваться выражением (4.34), подставляя которое в (4.36) и (4.40), получаем:

уравнение для намагниченности –

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} + \alpha\gamma(2H_p - b_1) \frac{\partial m_x}{\partial t} + \gamma^2 H_p (H_p - b_1) m_x + 2\gamma^2 H_p b_2 v_x + 2\alpha\gamma b_2 \frac{\partial v_x}{\partial t} + \\ & + 2\gamma^2 H_p b_0 m_x^3 - 2\gamma^2 (3H_p - b_0) b_2 m_x^2 v_x - 4\gamma^2 b_2^2 m_x v_x^2 + \\ & + \frac{2b_0}{H_p} m_x \left( \frac{\partial m_x}{\partial t} \right)^2 + \frac{2b_2}{H_p} m_x \left( \frac{\partial m_x}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} \right) + \frac{6b_0 b_2}{H_p^2} v_x \left( \frac{\partial m_x}{\partial t} \right)^2 = 0; \end{aligned} \quad (4.43)$$

уравнение для упругого смещения –

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + 2(\beta + \alpha\gamma b_2 c_2) \frac{\partial v_x}{\partial t} + (c_1 + 2\gamma^2 H_p b_2 c_2) v_x + \gamma^2 H_p (H_p - b_1) c_2 m_x + \\ & + [\alpha\gamma(H_p - b_1) - 2\beta] c_2 \frac{\partial m_x}{\partial t} + 2\gamma^2 H_p b_0 c_2 m_x^3 - 2\gamma^2 (3H_p - b_0) b_2 c_2 m_x^2 v_x - \\ & - 4\gamma^2 b_2^2 c_2 m_x v_x^2 + \frac{2b_0 c_2}{H_p} m_x \left( \frac{\partial m_x}{\partial t} \right)^2 + \\ & + \frac{2b_2 c_2}{H_p} m_x \left( \frac{\partial m_x}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} \right) + \frac{6b_0 b_2 c_2}{H_p^2} \left( \frac{\partial m_x}{\partial t} \right)^2 v_x = 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Приведенные к такому виду уравнения (4.43) и (4.44) с точностью до обозначений совпадают с полученными в работе [А4].

#### 4.5 Полный обобщенный вид системы уравнений для вынужденных колебаний двух связанных осцилляторов в квадратичном приближении

Полученная квадрированная система (4.36), (4.40) представляет собой частный случай более общей симметричной системы двух нелинейных дифференци-

альных уравнений второго порядка с двумя переменными  $x_1$  и  $x_2$ , соответствующей нелинейным вынужденным колебаниям системы из двух связанных осцилляторов с двумя степенями свободы:

$$\begin{aligned}
& p_{11} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + p_{12} \frac{\partial x_1}{\partial t} + p_{13} x_1 + q_{11} x_2 + q_{12} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \\
& + r_{11} x_1^3 + r_{12} x_1^2 x_2 + r_{13} x_1 x_2^2 + r_{14} x_2^3 + \\
& + s_{11} x_1 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 + s_{12} x_1 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right) + s_{13} x_1 \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right)^2 + \\
& + s_{14} x_2 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 + s_{15} x_2 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right) + s_{16} x_2 \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right)^2 = \\
& = A_{11} \cos(\omega t) + A_{12} \sin(\omega t); \tag{4.45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& p_{21} \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + p_{22} \frac{\partial x_2}{\partial t} + p_{23} x_2 + q_{21} x_1 + q_{22} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \\
& + r_{21} x_2^3 + r_{22} x_2^2 x_1 + r_{23} x_2 x_1^2 + r_{24} x_1^3 + \\
& + s_{21} x_2 \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right)^2 + s_{22} x_2 \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) + s_{23} x_2 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 + \\
& + s_{24} x_1 \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right)^2 + s_{25} x_1 \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) + s_{26} x_1 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 = \\
& = A_{21} \cos(\omega t) + A_{22} \sin(\omega t). \tag{4.46}
\end{aligned}$$

Эти уравнения переходят одно в другое при замене индексов переменных и первых индексов коэффициентов «1» на «2» и обратно. Ещё более полный вид подобной связанной системы должен включать в себя слагаемые, состоящие из произведений трех производных. Однако в решаемой здесь реальной задаче о вынужденных магнитоупругих колебаниях в ферритовой пластине такие слагаемые отсутствуют, поэтому в приведенных уравнениях не рассматриваются.

Линеаризованная система (4.41)–(4.42) является частным случаем этой системы.

Приведем значения коэффициентов системы (4.45)–(4.46), выраженные через параметры материала, геометрию магнитной пластины и значения приложенного поля:

$$p_{11} = 1; \tag{4.47}$$

$$p_{12} = \alpha \gamma \left( H_p - b_1 + \frac{\gamma H_p^2}{\omega} \right); \tag{4.48}$$



$$p_{13} = \gamma^2 H_p (H_p - b_1); \quad (4.49)$$

$$q_{11} = 2\gamma^2 H_p b_2; \quad (4.50)$$

$$q_{12} = 2\alpha\gamma b_2; \quad (4.51)$$

$$r_{11} = 2\gamma^2 H_p b_0; \quad (4.52)$$

$$r_{12} = -2\gamma^2 (3H_p - b_0) b_2; \quad (4.53)$$

$$r_{13} = -4\gamma^2 b_2^2; \quad (4.54)$$

$$r_{14} = 0; \quad (4.55)$$

$$s_{11} = \frac{2\gamma b_0}{\omega^2} (2\gamma H_p - \omega); \quad (4.56)$$

$$s_{12} = \frac{2\gamma b_2}{\omega}; \quad (4.57)$$

$$s_{13} = 0; \quad (4.58)$$

$$s_{14} = -\frac{2\gamma b_2}{\omega^2} [\gamma(H_p - 3b_0) - \omega]; \quad (4.59)$$

$$s_{15} = 0; \quad (4.60)$$

$$s_{16} = 0; \quad (4.61)$$

$$A_{11} = \gamma^2 H_p h_0; \quad (4.62)$$

$$A_{12} = 0; \quad (4.63)$$

$$p_{21} = 1; \quad (4.64)$$

$$p_{22} = 2(\beta + \alpha\gamma b_2 c_2); \quad (4.65)$$

$$p_{23} = c_1 + 2\gamma^2 H_p b_2 c_2; \quad (4.66)$$

$$q_{21} = \gamma^2 H_p (H_p - b_1) c_2; \quad (4.67)$$

$$q_{22} = \left[ \alpha\gamma \left( H_p - b_1 + \frac{\gamma H_p}{\omega} \right) - 2\beta \right] c_2; \quad (4.68)$$

$$r_{21} = 0; \quad (4.69)$$

$$r_{22} = -4\gamma^2 b_2^2 c_2; \quad (4.70)$$

$$r_{23} = -2\gamma^2 (3H_p - b_0) b_2 c_2; \quad (4.71)$$

$$r_{24} = 2\gamma^2 H_p b_0 c_2; \quad (4.72)$$

$$s_{21} = 0; \quad (4.73)$$

$$s_{22} = 0; \quad (4.74)$$

$$s_{23} = -\frac{2\gamma b_2 c_2}{\omega^2} [\gamma(H_p - 3b_0) - \omega]; \quad (4.75)$$

$$s_{24} = 0; \quad (4.76)$$

$$s_{25} = \frac{2\gamma b_2 c_2}{\omega}; \quad (4.77)$$

$$s_{26} = \frac{2\gamma b_0 c_2}{\omega^2} (2\gamma H_p - \omega); \quad (4.78)$$

$$A_{21} = \gamma^2 H_p c_2 h_0; \quad (4.79)$$

$$A_{22} = 0. \quad (4.80)$$

В этих выражениях используются следующие вспомогательные обозначения:

$$H_p = H_0 - 4\pi M_0; \quad (4.81)$$

$$b_0 = 2\pi M_0; \quad (4.82)$$

$$b_1 = \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}}; \quad (4.83)$$

$$b_2 = \frac{B_2}{M_0 d}; \quad (4.84)$$

$$c_1 = \frac{c_{44} \pi^2}{\rho d^2}; \quad (4.85)$$

$$c_2 = \frac{4B_2 d}{c_{44} \pi^2}. \quad (4.86)$$

#### 4.6 Анализ структуры обобщенной системы уравнений для связанных осцилляторов

Рассмотрим структуру системы (4.45)–(4.46) более подробно. Уравнения (4.45) и (4.46) содержат большое количество слагаемых. Для того чтобы выявить их роль в формировании колебаний намагниченности и упругого смещения, оценим относительную величину отдельных слагаемых для типичной ситуации возбуждения гиперзвуковых колебаний. Пусть параметры материала соответствуют (ЖИГ) [2, 33, 65]:  $4\pi M_0 = 1750$  Гс;  $B_2 = 6.96 \times 10^6$  эрг см<sup>-3</sup>;  $c_{44} = 7.64 \times 10^{11}$  эрг см<sup>-3</sup>;  $\rho = 5.17$  г см<sup>-3</sup>, параметр затухания:  $\alpha = 0.02$ ;  $\beta = 10^9$  с<sup>-1</sup>, толщина пленки:  $d = 6.865 \times 10^{-5}$  см, поле  $H_0 = 2750$  Э, частота  $f = 2800$  МГц (т. е.  $\omega = 1.7592 \times 10^{10}$  с<sup>-1</sup>). Выбранные значения частоты и поля соответствуют возбуждению ферромагнитного и упругого резонансов. Вспомогательные параметры (4.81)–(4.86) принимают значения:  $H_p = 1000$  Э;  $b_0 = 875$  Гс;  $b_1 =$

$0.4553 \text{ Э}; \quad b_2 = 7.2802 \times 10^8 \text{ Э см}^{-1}; \quad c_1 = 3.0947 \times 10^{20} \text{ с}^{-1}; \quad c_2 = 2.5346 \times 10^{-10} \text{ см}.$

Структура слагаемых уравнений (4.45)–(4.46) представляет собой различные комбинации произведений коэффициентов  $p_{ik}, q_{ik}, r_{ik}, s_{ik}$  и переменных  $x_1, x_2$ , соответствующих намагниченности и упругости. Некоторые произведения умножены на частоту  $\omega$  в первой или второй степени, которая возникает за счет производных (при временном множителе типа  $e^{i\omega t}$ ).

Полученные таким образом абсолютные величины слагаемых уравнений (4.45)–(4.46) представлены в табл. 4.1 при различных значениях возбуждающего поля (знаки и наименования размерности в системе СГС (Гаусса) опущены для простоты записи).

Таблица 4.1. Слагаемые системы (4.45)–(4.46) при  $B_2 = 6.96 \times 10^6 \text{ эрг см}^{-3}$

Первый осциллятор			Второй осциллятор		
слагаемые	$h_0 = 0.01$	$h_0 = 400$	слагаемые	$h_0 = 0.01$	$h_0 = 400$
$p_{11}\omega^2 x_1$	$6.19 \times 10^{16}$	$1.86 \times 10^{20}$	$p_{21}\omega^2 x_2$	$1.55 \times 10^8$	$3.09 \times 10^{11}$
$p_{12}\omega x_1$	$2.49 \times 10^{15}$	$7.46 \times 10^{18}$	$p_{22}\omega x_2$	$1.76 \times 10^7$	$3.52 \times 10^{10}$
$p_{13}x_1$	$6.23 \times 10^{16}$	$1.87 \times 10^{20}$	$p_{23}x_2$	$1.55 \times 10^8$	$3.09 \times 10^{11}$
$q_{11}x_2$	$2.27 \times 10^{14}$	$4.54 \times 10^{17}$	$q_{21}x_1$	$1.58 \times 10^7$	$4.73 \times 10^{10}$
$q_{12}\omega x_2$	$4.52 \times 10^{12}$	$9.04 \times 10^{15}$	$q_{22}\omega x_1$	$1.47 \times 10^6$	$4.40 \times 10^9$
$r_{11}x_1^3$	$4.36 \times 10^9$	$1.18 \times 10^{20}$	$r_{21}x_2^3$	0.00	0.00
$r_{12}x_1^2 x_2$	$1.93 \times 10^7$	$3.47 \times 10^{17}$	$r_{22}x_2^2 x_1$	$8.37 \times 10^{-6}$	$1.00 \times 10^5$
$r_{13}x_1 x_2^2$	$3.30 \times 10^4$	$3.96 \times 10^{14}$	$r_{23}x_2 x_1^2$	$4.90 \times 10^{-3}$	$8.80 \times 10^7$
$r_{14}x_2^3$	0.00	0.00	$r_{24}x_1^3$	$1.10 \times 10^0$	$2.98 \times 10^{10}$
$s_{11}\omega^2 x_1^3$	$4.38 \times 10^9$	$1.18 \times 10^{20}$	$s_{21}\omega^2 x_2^3$	0.00	0.00
$s_{12}\omega^2 x_1^2 x_2$	$9.04 \times 10^6$	$1.63 \times 10^{17}$	$s_{22}\omega^2 x_2^2 x_1$	0.00	0.00
$s_{13}\omega^2 x_1 x_2^2$	0.00	0.00	$s_{23}\omega^2 x_2 x_1^2$	$6.00 \times 10^{-3}$	$1.08 \times 10^8$
$s_{14}\omega^2 x_1^2 x_2$	$2.28 \times 10^7$	$4.28 \times 10^{17}$	$s_{24}\omega^2 x_2^2 x_1$	0.00	0.00
$s_{15}\omega^2 x_1 x_2^2$	0.00	0.00	$s_{25}\omega^2 x_2 x_1^2$	$2.30 \times 10^{-3}$	$4.12 \times 10^7$
$s_{16}\omega^2 x_2^3$	0.00	0.00	$s_{26}\omega^2 x_1^3$	$1.11 \times 10^0$	$3.00 \times 10^{10}$
$A_{11}$	$3.11 \times 10^{15}$	$1.25 \times 10^{20}$	$A_{21}$	$7.90 \times 10^5$	$3.16 \times 10^{10}$
$A_{12}$	0.00	0.00	$A_{22}$	0.00	0.00

Амплитуды переменных, полученные из разверток по времени при решении полной задачи (4.1)–(4.7), составляют:

при поле  $h_0 = 0.01$  Э;  $m = 2 \times 10^{-4}$ ,  $\nu = 5 \times 10^{-13}$  см;

при поле  $h_0 = 400$  Э;  $m = 6 \times 10^{-4}$ ,  $\nu = 1 \times 10^{-9}$  см.

Такие значения полей выбраны, исходя из следующего. Поле  $h_0 = 0.01$  Э соответствует чисто линейному режиму, что дает опорную точку, отталкиваясь от которой можно выявить роль нелинейности наиболее отчетливо. Поле  $h_0 = 400$  Э соответствует сильно нелинейному режиму, когда квадратичное приближение дает ошибку по намагниченности порядка 5 % и по упругому смещению – около двух раз [А3].

Из данных, приведенных в табл. 4.1, видно следующее. В линейном режиме ( $h_0 = 0.01$  Э) вклад от слагаемых с коэффициентами  $r_{ik}$  и  $s_{ik}$  меньше основных слагаемых с коэффициентами  $p_{ik}$  и  $q_{ik}$  более чем на семь порядков, т. е. ими с высокой точностью можно пренебречь. Связь обеспечивается слагаемыми, пропорциональными первой степени переменных, т. е.  $q_{11}$  и  $q_{21}$ , тогда как слагаемые, пропорциональные производным от переменных с коэффициентами  $q_{12}$  и  $q_{22}$  вносят вклад на один–три порядка меньший, чем вклад от параметров затухания  $p_{12}$  и  $p_{22}$ .

В сильно нелинейном режиме при  $h_0 = 400$  Э значительно возрастает роль нелинейных слагаемых с коэффициентами  $r_{11}$  и  $r_{24}$ , что отражает роль нелинейности магнитного осциллятора, обусловленную нелинейностью прецессии намагниченности. Роль связи, обеспечиваемой линейными слагаемыми с коэффициентами  $q_{ik}$ , несколько возрастает, становясь больше примерно на порядок. Сильно проявляют себя нелинейные слагаемые с производными, особенно с коэффициентом  $s_{11}$  для магнитного осциллятора и  $s_{26}$  для упругого, причем в обоих случаях эта нелинейность обеспечивается за счет нелинейного магнитного осциллятора. Заметно увеличивается нелинейная связь через производные за счет слагаемых с коэффициентами  $s_{12}$  и  $s_{14}$  для магнитного осциллятора и  $s_{23}$  и  $s_{25}$  для упругого,

причем в обоих случаях нелинейность обеспечивается за счет квадрата амплитуды магнитного осциллятора.

Таким образом, в сильно нелинейном режиме возрастает роль слагаемых с производными, причем нелинейность обеспечивается за счет магнитного осциллятора. В уравнениях в первую очередь надо учитывать те слагаемые, которые пропорциональны квадрату и кубу амплитуды колебаний намагниченности.

Для более эффективного возбуждения гиперзвуковых колебаний величина константы магнитоупругого взаимодействия  $B_2$  должна быть достаточно большой. Так, например, в тербиевом феррит-гранате эта константа превышает такую для ЖИГ примерно в пять раз [65]. При этом, как показано в работе [63], возможны дополнительные нелинейные эффекты, такие как заметное изменение поля ориентационного перехода намагниченности и спонтанная переориентация вектора намагниченности при значении константы  $B_2$  выше критического.

В связи с этим представляет интерес выяснить, как ведут себя слагаемые системы (4.45)–(4.46) при повышенном значении этой константы. Полученные результаты при  $B_2 = 20B_2$  (ЖИГ) представлены в табл. 4.2. При заполнении табл. 4.2 использовались те же параметры, что и для табл. 4.1, кроме константы  $B_2$ . Вспомогательные параметры (4.81)–(4.86) при этом имеют следующие значения:  $H_p = 1000$  Э;  $b_0 = 875$  Гс;  $b_1 = 182.12$  Э;  $b_2 = 1.4560 \times 10^{10}$  Э см<sup>-1</sup>;  $c_1 = 3.0947 \times 10^{20}$  с<sup>-1</sup>;  $c_2 = 5.0692 \times 10^{-9}$  см.

Из сравнения данных, представленных в табл. 4.2 и табл. 4.1, видно, что при большом значении константы  $B_2$  даже в линейном режиме ( $h_0 = 0.01$  Э) значительно возрастает роль линейных слагаемых связи, определяемых коэффициентами  $q_{ik}$ . Они становятся того же порядка, что и основные слагаемые, определяемые коэффициентами  $p_{ik}$  (особенно это заметно для  $q_{11}$ , где эти слагаемые даже слегка превышают основные).

В нелинейном режиме значительно возрастает роль слагаемых с производными, причем в случае магнитного осциллятора это происходит для всех таких слагаемых с коэффициентами  $r_{ik}$  и  $s_{ik}$ . Величина этих слагаемых всего на порядок

не достигает величины основных слагаемых с коэффициентами  $p_{ik}$  и  $q_{ik}$ . А слагаемое, ответственное за затухание с коэффициентом  $p_{12}$  – даже несколько превышает. В случае упругого осциллятора главную роль здесь играют слагаемые с коэффициентами  $r_{23}$  и  $s_{23}$ , опять же пропорциональные квадрату амплитуды магнитных колебаний.

Таблица 4.2. Слагаемые системы (4.45)–(4.46) при  $B_2 = 20B_2$  (ЖИГ)

Первый осциллятор			Второй осциллятор		
слагаемые	$h_0 = 0.01$	$h_0 = 400$	слагаемые	$h_0 = 0.01$	$h_0 = 400$
$p_{11}\omega^2x_1$	$9.28 \times 10^{14}$	$4.64 \times 10^{19}$	$p_{21}\omega^2x_2$	$4.02 \times 10^7$	$1.86 \times 10^{12}$
$p_{12}\omega x_1$	$3.39 \times 10^{13}$	$1.70 \times 10^{18}$	$p_{22}\omega x_2$	$4.69 \times 10^6$	$2.17 \times 10^{11}$
$p_{13}x_1$	$7.65 \times 10^{14}$	$3.82 \times 10^{19}$	$p_{23}x_2$	$4.62 \times 10^7$	$2.13 \times 10^{12}$
$q_{11}x_2$	$1.18 \times 10^{15}$	$5.44 \times 10^{19}$	$q_{21}x_1$	$3.88 \times 10^6$	$1.94 \times 10^{11}$
$q_{12}\omega x_2$	$2.35 \times 10^{13}$	$1.08 \times 10^{18}$	$q_{22}\omega x_1$	$4.58 \times 10^5$	$2.29 \times 10^{10}$
$r_{11}x_1^3$	$1.47 \times 10^4$	$1.84 \times 10^{18}$	$r_{21}x_2^3$	0.00	0.00
$r_{12}x_1^2x_2$	$2.26 \times 10^4$	$2.60 \times 10^{18}$	$r_{22}x_2^2x_1$	$6.79 \times 10^{-5}$	$7.23 \times 10^9$
$r_{13}x_1x_2^2$	$1.34 \times 10^4$	$1.43 \times 10^{18}$	$r_{23}x_2x_1^2$	$1.14 \times 10^{-4}$	$1.32 \times 10^{10}$
$r_{14}x_2^3$	0.00	0.00	$r_{24}x_1^3$	$7.46 \times 10^{-5}$	$9.33 \times 10^9$
$s_{11}\omega^2x_1^3$	$1.48 \times 10^4$	$1.85 \times 10^{18}$	$s_{21}\omega^2x_2^3$	0.00	0.00
$s_{12}\omega^2x_1^2x_2$	$1.06 \times 10^4$	$1.22 \times 10^{18}$	$s_{22}\omega^2x_2^2x_1$	0.00	0.00
$s_{13}\omega^2x_1x_2^2$	0.00	0.00	$s_{23}\omega^2x_2x_1^2$	$1.41 \times 10^{-4}$	$1.63 \times 10^{10}$
$s_{14}\omega^2x_1^2x_2$	$2.78 \times 10^4$	$3.21 \times 10^{18}$	$s_{24}\omega^2x_2^2x_1$	0.00	0.00
$s_{15}\omega^2x_1x_2^2$	0.00	0.00	$s_{25}\omega^2x_2x_1^2$	$5.36 \times 10^{-5}$	$1.19 \times 10^9$
$s_{16}\omega^2x_2^3$	0.00	0.00	$s_{26}\omega^2x_1^3$	$7.49 \times 10^{-5}$	$9.36 \times 10^9$
$A_{11}$	$3.11 \times 10^{15}$	$1.25 \times 10^{20}$	$A_{21}$	$1.58 \times 10^7$	$6.32 \times 10^{11}$
$A_{12}$	0.00	0.00	$A_{22}$	0.00	0.00

Таким образом, в случае большой константы магнитоупругого взаимодействия даже в линейном режиме велика роль слагаемых связи, в нелинейном режиме ещё более возрастающая. В сильно нелинейном режиме для магнитного осциллятора велика роль всех слагаемых с производными, а для упругого – тех слагаемых, которые пропорциональны квадрату амплитуды колебаний намагниченности.

#### 4.7 Укороченные уравнения при сохранении главных членов

На основе данных табл. 4.1 и 4.2 связанные уравнения (4.45)–(4.46) можно несколько упростить, сохраняя в них только наибольшие по величине слагаемые. При этом такие укороченные уравнения для случаев малой и большой величины константы  $B_2$  различаются, поэтому запишем их отдельно.

Для малой величины константы  $B_2$  получаем уравнение для первого осциллятора:

$$p_{11} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + p_{12} \frac{\partial x_1}{\partial t} + p_{13} x_1 + q_{11} x_2 + r_{11} x_1^3 + s_{11} x_1 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 = A_{11} \cos(\omega t); \quad (4.87)$$

и уравнение для второго осциллятора:

$$p_{21} \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + p_{22} \frac{\partial x_2}{\partial t} + p_{23} x_2 + q_{21} x_1 + q_{22} \frac{\partial x_1}{\partial t} + r_{24} x_1^3 + s_{26} x_1 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 = A_{21} \cos(\omega t). \quad (4.88)$$

Для большой величины константы  $B_2$  получаем уравнение для первого осциллятора:

$$p_{11} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + p_{12} \frac{\partial x_1}{\partial t} + p_{13} x_1 + q_{11} x_2 + q_{12} \frac{\partial x_2}{\partial t} + r_{11} x_1^3 + r_{12} x_1^2 x_2 + r_{13} x_1 x_2^2 + s_{11} x_1 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 + s_{12} x_1 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right) + s_{14} x_2 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 = A_{11} \cos(\omega t); \quad (4.89)$$

и уравнение для второго осциллятора:

$$p_{21} \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + p_{22} \frac{\partial x_2}{\partial t} + p_{23} x_2 + q_{21} x_1 + q_{22} \frac{\partial x_1}{\partial t} + r_{23} x_2 x_1^2 + s_{23} x_2 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 = A_{21} \cos(\omega t). \quad (4.90)$$

Следует отметить, что в обоих случаях система уравнений получается не полностью симметричной, что обусловлено различной природой колебательных систем – магнитной и упругой. Однако можно видеть, что из линейных членов, как правило, присутствуют слагаемые связи через переменные и производные от переменных, а из нелинейных – слагаемые, содержащие третью степень переменных и произведение первой степени переменной на квадрат производной, т. е. в обоих случаях нелинейность имеет кубический характер.

### 4.8 Проверка корректности квадратичного приближения

Рассмотрим степень приближения результатов, обеспечиваемых квадратованной системой (4.45)–(4.46), и результатов, обеспечиваемых исходной нелинейной системой (4.1)–(4.7). А также приведем приближение, обеспечиваемое линеаризованной системой (4.41)–(4.42).

На рисунке 4.1 показаны зависимости поперечной компоненты намагниченности (а) и упругого смещения (б) от амплитуды переменного поля при параметрах ЖИГ. Смещение  $u$  получено из  $v$  в соответствии с формулой (4.20) при  $z = d/2$ .

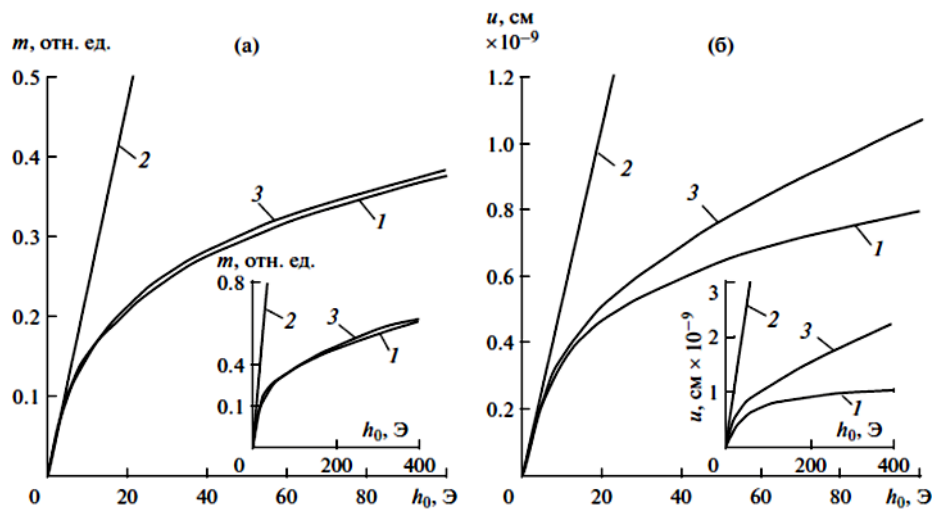


Рисунок 4.1. Зависимость поперечной компоненты намагниченности (а) и упругого смещения (б) от амплитуды переменного поля. 1 – решение полной нелинейной системы (4.1)–(4.7); 2 – решение линеаризованной системы (4.41)–(4.42); 3 – решение квадратованной системы (4.45)–(4.46). На вставках – те же кривые в интервале переменного поля до 400 Э. Параметры материала соответствуют ЖИГ;  $4\pi M_0 = 1750$  Гс;  $B_2 = 6.96 \times 10^6$  эрг см $^{-3}$ ;  $c_{44} = 7.64 \times 10^{11}$  эрг см $^{-3}$ ;  $\rho = 5.17$  г см $^{-3}$ ,  $\alpha = 0.02$ ;  $\beta = 10^9$  с $^{-1}$ ; а также  $d = 6.865 \times 10^{-5}$  см;  $H_0 = 2750$  Э, частота возбуждения 2.8 МГц.

Из рисунка 4.1 видно, что обе системы – квадратованная и линеаризованная – несколько завышают точные значения амплитуд намагниченности и смещения, причем для смещения это завышение выражено сильнее, чем для намагниченности. В то же время видно, что приближение, обеспечиваемое квадратованной системой, значительно лучше, чем приближение, даваемое линеаризованной системой.

Так, линеаризованная система (4.41)–(4.42) описывает точную картину до амплитуды переменного поля, равной 5 Э (т. е. до  $h_0/M_0 = 0.04$ ) с точностью по-



рядка 10 %, а для амплитуды поля, равной 10 Э (до  $h_0/M_0 = 0.07$ ) – с точностью около 30 %, после чего её приближение резко ухудшается.

В то же время квадрированная система (4.45)–(4.46) описывает амплитуду магнитных колебаний до амплитуды переменного поля 100 Э ( $h_0/M_0 = 0.71$ ) с точностью порядка 3 %, а для амплитуды поля 400 Э ( $h_0/M_0 = 2.86$ ) – до 5 %. Та же система описывает амплитуду упругих колебаний при амплитуде переменного поля 60 Э ( $h_0/M_0 = 0.43$ ) с точностью до 20 %, при амплитуде 100 Э с точностью 25 %, а при амплитуде поля 400 Э – с точностью около двух раз.

Таким образом, ограничиваясь точностью описания упругих колебаний на уровне 20 %, можно видеть, что квадрированная система позволяет рассматривать амплитуду переменного поля до 0.40 от намагниченности насыщения, что обеспечивает углы прецессии до  $25^\circ$ , тогда как для линеаризованной системы эти же параметры составляют 0.05 и  $3^\circ$ . Что касается магнитных колебаний, то здесь возможности использования квадрированной системы простираются до полей, превышающих намагниченность насыщения в несколько (не менее трех) раз, что соответствует углам прецессии до  $30^\circ \dots 40^\circ$ . Можно полагать, что столь большие углы прецессии позволяют успешно использовать квадрированную систему для описания многих нелинейных процессов с достаточно хорошим приближением.

#### **4.9 Корректность приближения при большой константе магнитоупругого взаимодействия**

В связи с тем, что для некоторых условий возбуждения упругих колебаний, например для явления переориентации вектора намагниченности [63], большое значение имеет несколько повышенная по сравнению с ЖИГ величина константы магнитоупругого взаимодействия  $B_2$ , представляет интерес рассмотреть, какую точность обеспечивает линейное и квадратичное приближение в этом случае.

На рисунке 4.2 представлены зависимости амплитуды колебаний намагниченности (а) и упругого смещения (б) от относительной величины константы маг-

нитоупругого взаимодействия  $N = B_2/B_2$  (ЖИГ) при различных уровнях возбуждения, в том числе соответствующих заведомо сильно нелинейному режиму.

Из рисунка 4.2а видно, что для колебаний намагниченности при сравнительно невысоком уровне возбуждения (группа кривых 1, соответствующая  $h_0 = 10$  Э) как линейное, так и квадратичное приближение обеспечивают вблизи  $N \sim 1$  точность около 20 %, тогда как при увеличении  $N$  до 10 точность возрастает до  $\sim 1$  %, а при дальнейшем увеличении  $N$  возрастает ещё более.

При среднем уровне возбуждения (группа кривых 2, соответствующая  $h_0 = 100$  Э) линейное приближение при  $N \sim 1$  дает отклонение вверх почти на порядок, тогда как ошибка квадратичного приближения не превышает 10 %. По мере увеличения  $N$  ошибка как линейного, так и квадратичного приближений уменьшается, составляя при  $N \sim 1$  не более 10 %, а при дальнейшем увеличении  $N$  вблизи 20 падает до  $\sim 1$  %.

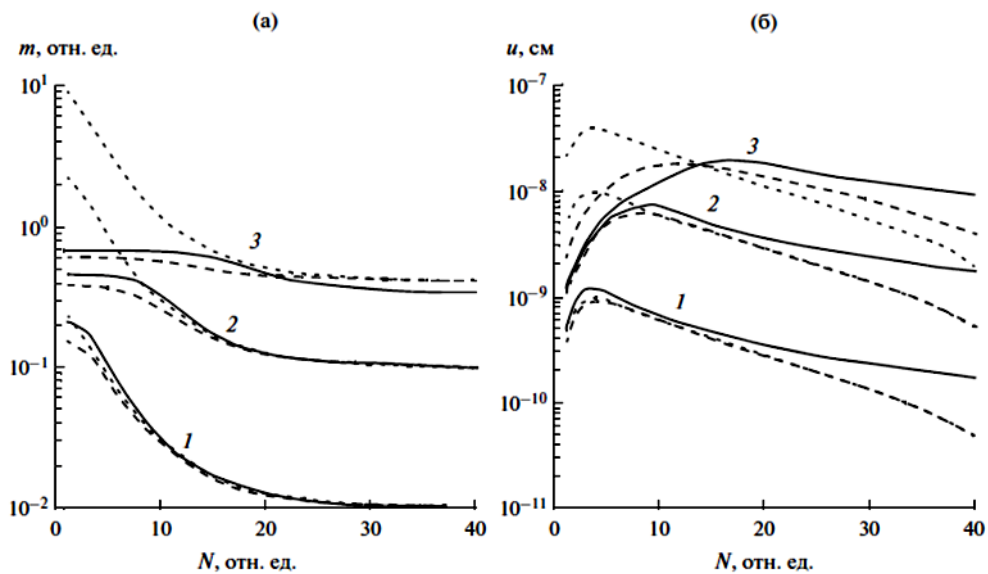


Рисунок 4.2. Зависимости амплитуды колебаний намагниченности (а) и упругого смещения (б) от относительной величины константы магнитоупругого взаимодействия  $N = B_2/B_2$  (ЖИГ) при различных уровнях возбуждения:  $h_0 = 10$  (1), 100 (2), 400 Э (3), сплошная линия – решение по полным уравнениям (4.1)–(4.7), пунктирная – линейное приближение (4.41)–(4.42), штриховая – квадратичное приближение (4.45)–(4.46).

При высоком уровне возбуждения (группа кривых 3, соответствующая  $h_0 = 400$  Э) ошибка линейного приближения при малых значениях  $N$  составляет более полутора порядков, тогда как для квадратичного не превышает 20 %. При

увеличении  $N$  до 20 ошибки обоих приближений сравниваются, уменьшаясь до  $\sim 20\%$ , и при дальнейшем увеличении  $N$  больше не меняются.

Для упруго смещения (см. рисунок 4.2б) наибольшее отклонение приближенных решений от полного наблюдается вблизи малых значений  $N \sim 2 \dots 3$  и по мере увеличения уровня возбуждения также увеличивается, составляя при  $h_0 = 1$  Э (кривые 1) для обоих приближений не более  $20\%$ , а при  $h_0 = 400$  Э (кривые 3) для линейного приближения – более порядка, тогда как для квадратичного приближения – не более  $30\%$ .

С увеличением  $N$  до 20 ошибки обоих приближений падают до  $10\%$  при  $h_0 = 10$  Э и не превышают  $30\%$  при  $h_0 = 400$  Э. Однако при дальнейшем увеличении  $N$  ошибки обоих приближений снова растут, при  $N = 40$  достигая в случае  $h_0 = 10$  Э –  $30\%$ , а в случае  $h_0 = 400$  Э для линейного приближения до  $80\%$  и для квадратичного до  $30\%$ .

Таким образом, можно сделать вывод, что для колебаний намагниченности при увеличении константы магнитоупругого взаимодействия  $B_2$  точность как линейного, так и квадратичного приближения возрастает вплоть до высоких уровней нелинейности. Для упругих колебаний при увеличении константы  $B_2$  точность сначала возрастает, после чего, пройдя максимум, убывает. Причем максимум точности приходится на значение константы  $B_2$  на порядок большее, чем значение  $B_2$  для ЖИГ.

#### 4.10 Выводы по главе 4

Рассмотрено возбуждение гиперзвуковых колебаний переменным магнитным полем в геометрии плоскопараллельной нормально намагниченной ферритовой пластины. Записаны уравнения движения вектора намагниченности и упругого смещения с граничными условиями и возбуждением переменным магнитным полем.

Для упрощения задачи рассмотрено квадратичное приближение по намагниченности с учетом кругового характера прецессии, в результате чего полная си-

стема, содержащая семь уравнений первого порядка и четыре граничных условия, сведена к квадрированной системе четырех уравнений первого порядка без граничных условий. Показано, что полученная ранее линеаризованная система является частным случаем выведенной квадрированной системы.

Введены эквивалентные параметры квадрированной системы, выраженные через параметры материала и геометрию исходной ферритовой пластины. Записана полная система уравнений для квадратичного приближения в обобщенном симметричном виде, соответствующая модельной системе из двух связанных осцилляторов, нелинейность в которых описывается слагаемыми третьего порядка по намагниченности, упругому смещению и их производных.

На основе численного анализа соотношений, составляющих эквивалентные параметры для реального случая железиттриевого граната, получены укороченные уравнения, содержащие только главные слагаемые, отвечающие за динамическое поведение системы. Показано, что главную роль играют слагаемые, пропорциональные третьей степени по намагниченности и произведению намагниченности на квадрат ее производной по времени.

Путем рассмотрения развития колебаний во времени выполнен анализ приближения, обеспечиваемого линеаризованной и квадрированной системами по сравнению с решением, обеспечиваемым исходной нелинейной системой. Показано, что при описании упругих колебаний на уровне точности 20 % линеаризованная система является корректной при значениях переменных полей не более 0.05 от намагниченности насыщения при углах прецессии порядка  $3^\circ$ . Квадрированная система сохраняет корректность вплоть до полей, составляющих 0.40 от намагниченности насыщения, что соответствует углам прецессии до  $25^\circ$ . По магнитным колебаниям квадрированная система сохраняет точность 5 % до полей, превышающих намагниченность насыщения более чем в три раза. Это соответствует углам прецессии до  $40^\circ$ .

Рассмотрена точность расчета, обеспечиваемая линеаризованной и квадрированной системами для случая повышенных значений константы магнитоупругого взаимодействия. Показано, что для колебаний намагниченности по мере уве-

личения константы магнитоупругого взаимодействия до 40 раз по сравнению с таковой для ЖИГ точность линейного и квадратичного приближений, вплоть до полей порядка 0.40 от намагниченности насыщения, возрастает, составляя не менее 5 %. Для упругих колебаний при таком же увеличении константы магнитоупругого взаимодействия точность, первоначально составляя не более 40 %, при значении константы на порядок большем, чем значение таковой для ЖИГ, возрастает до 10 % после чего, пройдя через максимум, при увеличении константы до 40 раз убывает до 80 %.

## Глава 5. Нестационарное запаздывание магнитоупругих колебаний связанных осцилляторов

В данной главе в продолжение исследования нелинейных вынужденных колебаний намагниченности и упругого смещения в нормально намагниченной ферритовой пластине рассмотрена роль нелинейности, обусловленная членами четвертого порядка, отражающими смешанную нелинейность первого и второго осцилляторов. Для случая, когда резонансные частоты обоих осцилляторов различаются в кратном отношении, выполнено исследование развития вынужденных колебаний во времени. Показано, что в условиях умножения частоты второго осциллятора относительно частоты первого, при определенных значениях параметров возбуждение колебаний происходит с нестационарным запаздыванием во времени. Исследован характер этого запаздывания в широком интервале значений параметров системы. Для интерпретации развития колебаний предложена модель, представляющая собой совокупность двух динамических потенциалов. Выявлено четыре наиболее характерных режима, соответствующих различным уровням параметра линейной связи. Исследованы различные режимы колебаний при вариации параметра нелинейной связи. Выполнена классификация наблюдаемых режимов по величине амплитуды возбуждаемых колебаний.

### 5.1 Геометрия задачи и основные уравнения

Явление нестационарного запаздывания магнитоупругих колебаний рассматривается в геометрии, совпадающей с геометрией задачи, принятой в главе 3 (рисунок 3.1). Основные уравнения движения для нормированных компонент намагниченности и упругого смещения имеют соответственно вид (3.1) и (3.2), а граничные условия – вид (3.3), т. е. образуют систему из семи связанных уравнений первого порядка.

Как было показано в главе 4, система уравнений (3.1)–(3.3) в квадратичном приближении с высокой степенью точности может быть сведена к более простой

системе из двух уравнений второго порядка. Для задачи, описываемой в данной главе, достаточно ограничиться частным случаем этой системы в виде:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta \cdot x_1^3 + \eta \cdot x_1^2 x_2 = A \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (5.2)$$

В системе (5.1)–(5.2) принято:  $x_1$  и  $x_2$  – нормированные компоненты намагниченности и упругого смещения в плоскости пластины,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – параметры затухания,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – собственные частоты осцилляторов,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  – константы линейной связи,  $\delta$  – параметр кубической нелинейности первого осциллятора,  $\eta$  – параметр нелинейной связи,  $A$  и  $\omega_0$  – амплитуда и частота переменного поля. Выражения используемых здесь коэффициентов через параметры материала и геометрию задачи приведены в главе 4 (выражения (4.47)–(4.86)).

Для рассматриваемого явления наибольшее значение имеет коэффициент  $\eta$  (или  $r_{12}$ ), который через параметры задачи записывается в виде:

$$\eta = -\frac{2\gamma^2 B_2}{M_0 d} (3H_p - 2\pi M_0), \quad (5.3)$$

где  $H_p$  имеет вид (4.81), а  $M_0$  – намагниченность насыщения магнитной пластины.

Из (5.3) и (4.81) следует, что знак параметра  $\eta$  будет меняться в зависимости от величины поля  $H_0$ . Критическое значение этого поля определяется выражением:

$$H_c = \frac{14}{3} \cdot \pi M_0. \quad (5.4)$$

При  $H_0 > H_c$  параметр будет отрицательным, а при  $H_0 < H_c$  – положительным.

Исходя из параметров реальных образцов, например, для случая пленки железоиттриевого граната толщиной 15 мкм, можно оценить величину параметра  $\eta$ . При  $M_0 = 140$  Гс,  $B_2 = 6.96 \cdot 10^6$  эрг см<sup>-3</sup>,  $\gamma = 1.76 \cdot 10^7$  Э<sup>-1</sup>с<sup>-1</sup> и значении постоянного поля большем критического  $H_0 = 3000$  Э получаем  $\eta = -5.836 \cdot 10^{25}$  с<sup>-2</sup>. Для типичной круговой частоты ФМР в поле 3000 Э порядка  $10^{11}$  с<sup>-1</sup> характерный порядок величин слагаемых в уравнении (5.1) будет около  $10^{22}$  с<sup>-2</sup>, что на три порядка меньше абсолютного значения  $\eta$ . При этом переменная  $x_1$ , как нормированная компонента намагниченности, по порядку близка к единице, а пе-

ременная  $x_2$  примерно на два порядка меньше этой величины. Такое соотношение между  $x_1$  и  $x_2$  следует из оценки реальной связи при заданной константе  $B_2$  [13]. Таким образом, все слагаемые в уравнении (5.1) имеют один и тот же порядок, т. е. параметр  $\eta$ , нормированный на квадрат частоты, может иметь величину порядка  $10^2 - 10^3 \text{ с}^{-2}$ .

## 5.2 Явление нестационарного запаздывания

Рассмотрим численное решение системы (5.1)–(5.2) в режиме кратности частот осцилляторов. Будем решать систему методом Рунге–Кутты четвёртого порядка. Все параметры нормируем на квадрат частоты, то есть на  $10^{22} \text{ с}^{-2}$ , что позволяет работать с безразмерными величинами.

Будем работать с кратностью три и использовать следующие параметры. Резонансные частоты осцилляторов  $\omega_1 = 5$ ,  $\omega_2 = 15$ , т. е. резонансная частота второго осциллятора в три раза выше резонансной частоты первого. Параметры затухания  $\beta_1$  и  $\beta_2$  варьируются в пределах от 0.1 до 1.0. Значения линейной связи одинаковы для обоих осцилляторов:  $\gamma_1 = \gamma_2 = 10$ . Кубическая нелинейность первого осциллятора, ограничивающая возможность ухода системы на бесконечность:  $\delta = 5$ . Параметр нелинейной связи между осцилляторами, рассмотренный в предыдущем разделе:  $\eta = -200$ . Частоту вынуждающей силы примем равной частоте первого осциллятора, т. е.  $\omega_0 = 5$ , а её амплитуду –  $A = 50$ .

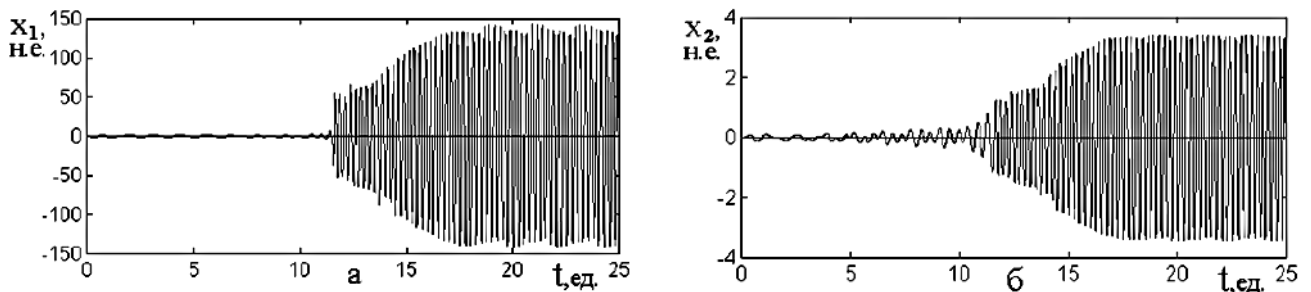


Рисунок 5.1 Развитие колебаний во времени для первого (а) и второго (б) осцилляторов при параметрах затухания  $\beta_1 = 1.0$ ,  $\beta_2 = 0.1$ .



На рисунке 5.1 приведены развертки во времени колебаний первого и второго осцилляторов для случая, когда затухание первого осциллятора значительно превышает затухание второго.

При времени около 12 н.е. наблюдается резкий скачок амплитуды обоих осцилляторов, после которого устанавливается стационарный режим колебаний. Установление стационарного режима обоих осцилляторов после скачка происходит с некоторым временем релаксации, которое по величине близко ко времени релаксации первого осциллятора.

На рисунке 5.2 приведен обратный случай, когда затухание первого осциллятора значительно меньше затухания второго.

Эти оба случая объединяет ярко выраженная характерная особенность – развитие колебаний сначала идет крайне медленно, но, начиная с некоторого момента времени амплитуды колебаний обоих осцилляторов скачкообразно увеличиваются на несколько порядков. Дальнейшее изменение амплитуды колебаний протекает сравнительно медленно, стремясь к постоянному значению. Таким образом, в обоих случаях имеет место нестационарное запаздывание развития колебаний, одинаковое для первого и второго осцилляторов. В первом случае (рисунок 5.1) характерное время запаздывания составляет порядка 12 н.е., во втором случае (рисунок 5.2) – около 5 н.е.

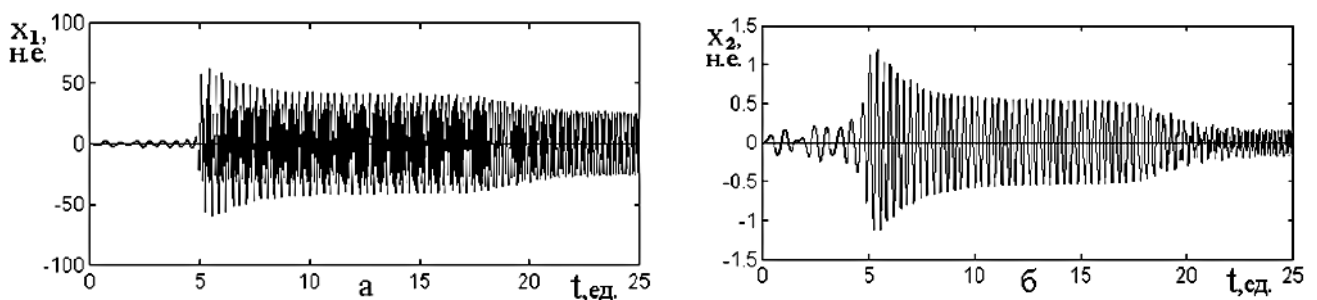


Рисунок 5.2 Развитие колебаний во времени для первого (а) и второго (б) осцилляторов при параметрах затухания  $\beta_1 = 0.1$ ,  $\beta_2 = 1.0$ .

Следует отметить, что большое отличие (на порядок) параметров затухания осцилляторов для реализации запаздывания является принципиальным. В случае равенства этих параметров или их малом различии вынужденные колебания возникают сразу, без какой-либо задержки во времени. Причем их амплитуда нарастает

тает, стремясь к постоянному значению, как единица минус экспонента с отрицательным показателем.

Если сопоставить времена запаздывания с временами свободной релаксации обоих осцилляторов, определяемых в отсутствие связи между осцилляторами по спаду начальной амплитуды свободных колебаний в  $e$  раз, то можно установить, что время запаздывания приходится между временами релаксации обоих осцилляторов. Причем различие этих времен релаксации должно быть довольно большим.

Также нестационарное запаздывание обладает ещё рядом особенностей. Так, оно имеет резкий порог по амплитуде возбуждения. При выбранных выше параметрах задачи критическое значение амплитуды, ниже которого запаздывание отсутствует, составляет около  $A = 30$  н. е. Также критическое значение имеет параметр кубической нелинейности. В рассматриваемом случае эта величина равна  $\delta = 5$  н.е. Выше этого значения колебания носят регулярный характер, а ниже – система уходит на бесконечность. Параметр нелинейной связи  $\eta$  обязательно должен быть отрицательным, т.к. при положительном значении запаздывание отсутствует при любых комбинациях других параметров.

Кроме этого, принципиальным для реализации запаздывания является различие частот осцилляторов. Проверка показала, что запаздывание наблюдается только при нечетном коэффициенте умножения частот, причем этот коэффициент не должен быть большим. Так запаздывание хорошо реализуется в случае, когда собственная частота второго осциллятора превышает частоту первого в три или пять раз. При коэффициенте умножения равному двум, четырем или большему целому числу стационарное запаздывание отсутствует.

Обращает на себя внимание тот факт, что вынужденные колебания в стационарном режиме всегда происходят с частотой, равной собственной частоте второго осциллятора, то есть по отношению к частоте возбуждения умноженной в кратное число раз. Таким образом, умножение частоты имеет место для обоих осцилляторов.

Далее в этой главе перечисленные особенности запаздывания будут рассмотрены подробнее. Для этого рассмотрения за основу будет взят случай превышения затухания первого осциллятора над затуханием второго, т. е. ситуация, показанная на рисунке 5.1.

### **5.3 Механизм задержки колебаний на основе динамического потенциала**

Одной из возможных причин запаздывания может быть наличие нелинейной связи осцилляторов, определяемой параметром  $\eta$ . Благодаря этому потенциальная поверхность помимо главного локального минимума, связанного с линейными параметрами системы, приобретает дополнительный локальный минимум, удаленный на большое расстояние от положения равновесия в покое. Эти минимумы должны быть разделены определенным потенциальным барьером, отстоящим от положения равновесия на существенное расстояние.

При малой амплитуде возбуждения колебания целиком происходят внутри главного минимума, так что их амплитуда достигает стационарного значения за время, равное большему из времен релаксации осцилляторов. При увеличении амплитуды возбуждения колебания перескакивают через потенциальный барьер, в результате чего их амплитуда резко возрастает. Запаздывание возникает из-за того, что от начала возбуждения должно пройти определенное время, определяемое меньшим из двух времен релаксации системы в целом. За это время возбужденные колебания достигнут амплитуды достаточной для преодоления барьера. В этот отрезок времени колебания не просто растут по амплитуде в соответствии с законом экспоненты, а претерпевают определенные биения, вызванные взаимодействием осцилляторов, собственные частоты которых различны. Эти биения способствуют увеличению результирующего времени нарастания амплитуды, давая в результате значительное время запаздывания.

После преодоления барьера система стремится уйти на бесконечность, но кубическая нелинейность препятствует этому, и амплитуда колебаний стабилизируется на более или менее стационарном уровне. Такой стационарный уровень

достигается за время, сопоставимое с наибольшим из времен релаксации осцилляторов. Таким образом, наступает стационарный режим, при котором оба осциллятора совершают только вынужденные колебания конечной амплитуды. При этом частота таких колебаний определяется частотой собственных колебаний того осциллятора, у которого эта частота выше, т. е. высокочастотного, в рассматриваемом случае – второго. Это происходит по той причине, что его возбуждение, хотя и происходит не каждый период, но до начала следующего периода возбуждения заметно затухнуть не успевает, определяя тем самым непрерывный режим со стационарной амплитудой. При этом низкочастотный осциллятор, т. е. первый, пребывая в режиме вынуждения, просто повторяет колебания высокочастотного, что и дает наблюдаемое равенство частот колебаний обоих осцилляторов.

Механизм образования запаздывания можно интерпретировать путем введения динамического потенциала. Из уравнения (5.1) можно видеть, что соответствующий потенциал имеет вид:

$$U = \frac{\omega_1^2}{2} \cdot x_1^2 + \gamma_1 \cdot x_1 x_2 + \frac{\delta}{4} \cdot x_1^4 + \frac{\eta}{3} \cdot x_1^3 x_2. \quad (5.5)$$

Дифференцирование этого выражения по  $x_1$ , принимая  $x_2$  как постоянный параметр, даёт потенциальную группу слагаемых уравнения (5.1).

На рисунке 5.3 показана зависимость динамического потенциала от амплитуды колебаний первого осциллятора при различных значениях амплитуды второго осциллятора. При построении левых ветвей зависимостей знаки обеих переменных менялись на противоположные.

В отсутствие колебаний второго осциллятора (кривая 0) потенциал имеет единственный минимум, приходящийся на  $x_1 = 0$ . При  $x_2 = 1$  н. е. (кривая 1) минимум остаётся на прежнем месте (в нуле), но потенциальная кривая немного расширяется. При  $x_2 = 2$  н. е. (кривая 2) начинает проявляться новый минимум, приходящийся на  $x_1 = 95$  н. е. При дальнейшем увеличении  $x_2$  минимум потенциала углубляется и смещается в сторону больших значений  $x_1$ . Так, при  $x_2 =$

5 н. е. (кривая 5) минимум приходится уже на  $x_1 = 205$  н. е. Ещё большее увеличение  $x_2$  всё дальше смещает минимум от нуля.

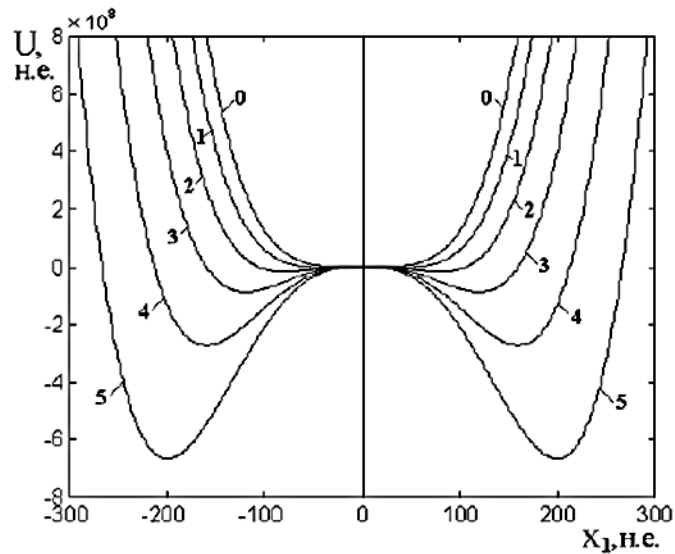


Рисунок 5.3. Зависимость динамического потенциала от амплитуды колебаний первого осциллятора при различных значениях амплитуды второго осциллятора: 0 — 0 н. е.; 1 — 1 н. е.; 2 — 2 н. е.; 3 — 3 н. е.; 4 — 4 н. е.; 5 — 5 н. е.

При критическом значении  $x_2$  около 1.2 н. е. минимум при  $x_1 = 0$  сменяется перегибом и резко смещается в область больших значений  $x_1$ , что выражается скачкообразным ростом амплитуды колебаний.

Предварительная проверка показала, что время первичного развития колебаний первого осциллятора определяется его собственным временем релаксации, а время задержки резкого роста колебаний определяется временем релаксации второго осциллятора. То есть для проявления запаздывания времена релаксации осцилляторов между собой должны различаться.

Следует учитывать, что построенный таким образом потенциал является динамическим. Это означает, что его величина не остается стационарной во времени, а претерпевает изменения в такт со смещением второго осциллятора  $x_2$ .

Можно полагать, что динамический характер потенциала требует синхронизма между колебаниями обоих осцилляторов, но, как показала дополнительная проверка, равенство частот осцилляторов не вызывает запаздывание при любых значениях параметров. Однако синхронизм может проявляться и при кратном соотношении частот осцилляторов между собой. Видимо, требование синхронизма

и является причиной того, что запаздывание проявляется только в режиме умножения частоты.

## 5.4 Особенности нестационарного запаздывания

Ранее отмечалось, что нестационарное запаздывание обладает рядом характерных свойств. В этом разделе упомянутые особенности запаздывания будут рассмотрены более подробно.

### 5.4.1 Амплитуда возбуждения

Начнем с обсуждения порога по амплитуде возбуждения, который в рассматриваемом случае составляет  $A = 30$ . Выше этого значения запаздывание имеет место, а ниже – отсутствует.

На рисунке 5.4 показана зависимость времени запаздывания колебаний первого и второго осцилляторов от амплитуды возбуждения. Параметры расчетов совпадают с теми, что приняты при построении рисунка 5.1.

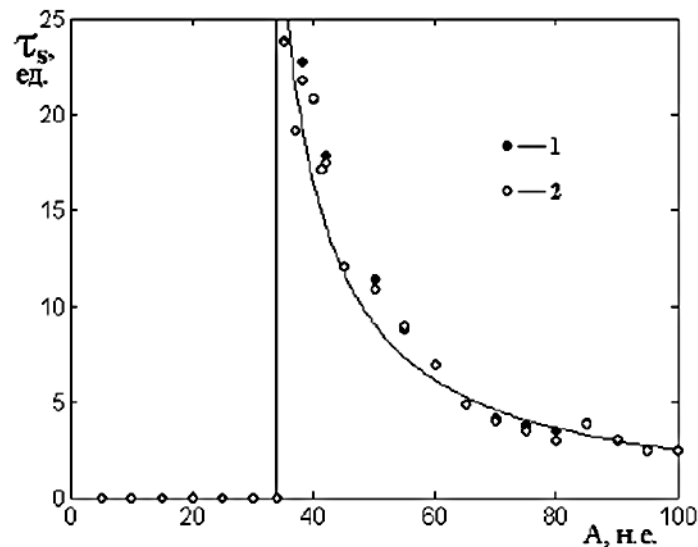


Рисунок 5.4. Зависимость времени запаздывания от амплитуды возбуждения.

1 – первый осциллятор (сплошные точки)

2 – второй осциллятор (открытые точки)

Аппроксимирующая кривая построена по формуле (5.6)

Из рисунка 5.4 можно видеть, что до критического значения амплитуды  $A_S = 30.880$  н. е. запаздывание полностью отсутствует. При достижении амплитудой указанного значения время запаздывания резким скачком возрастает и при значении  $A = 30.881$  н. е. составляет уже 153 н. е. (на рисунке не показано, т.к. выходит за его пределы). Максимальное время запаздывания  $\tau_S = 155$  н. е. приходится на  $A = 30.884$  н. е. После прохождения этой амплитуды время запаздывания начинает спадать: при  $A = 31$  н. е. составляет 86 н. е., при  $A = 32$  н. е. – 48 н. е., при  $A = 33$  н. е. – 54 н. е., при  $A = 34$  н. е. – 37 н. е. и далее по рисунку.

Как видно, времена запаздывания у обоих осцилляторов практически совпадают. При амплитуде выше критической время запаздывания довольно близко описывается эмпирической зависимостью вида:

$$\tau_S = \frac{220}{A-27} - 0.5, \quad (5.6)$$

которая представляет собой обратную пропорциональность.

Следует отметить, что формула (5.6) правдоподобно описывает значения времени запаздывания только при амплитуде возбуждения более 40 н. е. В интервале от 30 до 40 н. е. время запаздывания, вопреки формуле (5.6), не стремится к бесконечности, а, как уже отмечалось, ограничивается значением 155 н. е. (при  $A = 30.884$  н. е.). При этом в пределах этого интервала ход зависимости  $\tau_S(A)$  не является монотонным, а испытывает скачки в пределах 10 %, что проявляется в разбросе точек, особенно для второго осциллятора.

Как видно на рисунке 5.1, после скачкообразного увеличения амплитуды колебания обоих осцилляторов по истечении небольшого периода релаксации стабилизируются на стационарном постоянном уровне. Рассмотрим теперь, как зависит амплитуда таких установившихся колебаний от амплитуды возбуждения. Для этого обратимся к рисунку 5.5.

На рисунке 5.5 приведены указанные зависимости для обоих осцилляторов. Для удобства совмещения кривых на одном рисунке, ввиду малости амплитуды второго осциллятора ( $x_{20}$ , кривая 2) в сравнении с амплитудой первого ( $x_{10}$ , кривая 1) значения амплитуды второго осциллятора увеличены в 10 раз.

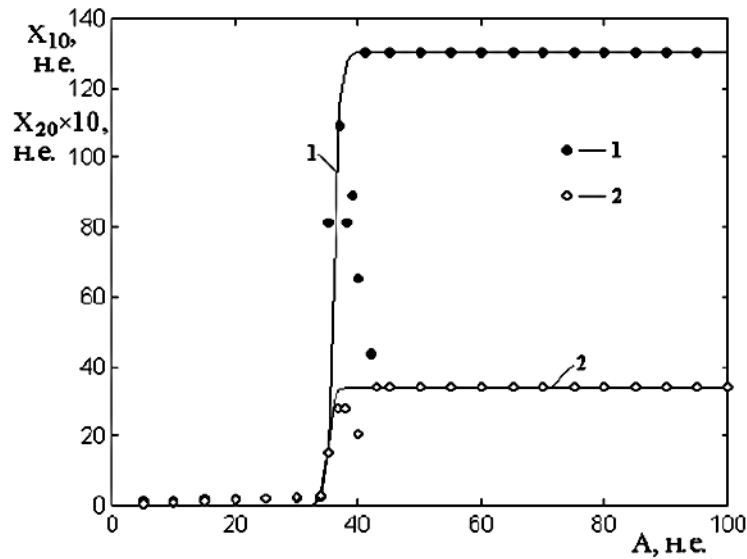


Рисунок 5.5. Зависимость амплитуды установившихся колебаний от амплитуды возбуждения.

1 – первый осциллятор (сплошные точки);

2 – второй осциллятор (открытые точки).

Аппроксимирующие кривые построены по формулам (5.7) и (5.8)

Характерным свойством обеих зависимостей является резкий скачок амплитуды колебаний осцилляторов при критическом значении амплитуды возбуждения. Как и в предыдущем случае (рисунок 5.4), рост амплитуды колебаний осцилляторов происходит не единым скачком при амплитуде возбуждения  $A_S$ , а претерпевает несколько колебаний в пределах изменения амплитуды  $A$  от 32 до 40 н.е. В то же время, вне этого интервала при  $A < 32$  н.е. амплитуда растёт крайне медленно, а при  $A > 40$  н.е. совсем не меняется. В связи с этим для сглаженного приближения обеих зависимостей удобнее всего использовать гиперболический тангенс. Соответствующие зависимости, приведенные сплошными линиями на рисунке 5.5, построены по формулам:

$$x_{10} = 65 \cdot th(A - 36) + 65; \quad (5.7)$$

$$x_{20} = 17 \cdot th(A - 36) + 17. \quad (5.8)$$

Как видно, здесь наиболее подходящим значением, где кривые претерпевают перегиб, является  $A = 36$  н.е. Это значение довольно близко к введенному выше значению критической амплитуды  $A_S = 30.881$  н.е.



### 5.4.2 Частотные особенности колебаний до скачка амплитуды

Обратимся к особенностям, касающимся частоты колебаний обоих осцилляторов до скачка амплитуды, т. е. при амплитуде возбуждения меньше критической. Рассмотрим развитие колебаний во времени, которое приведено на рисунке 5.6, соответствующее случаю  $A = 20$  н. е.

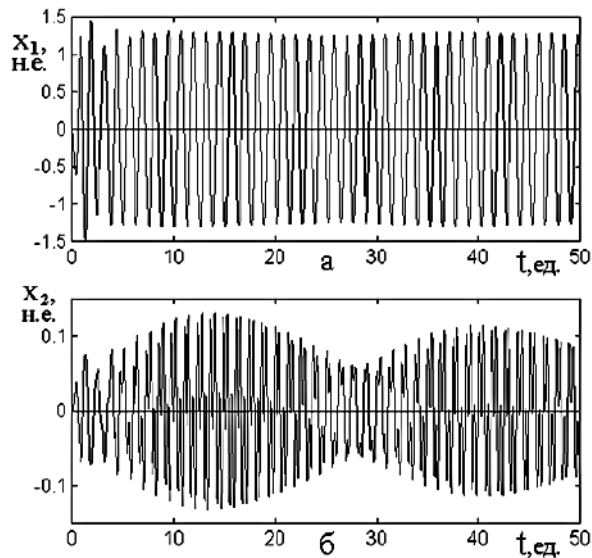


Рисунок 5.6. Развитие колебаний во времени для первого (а) и второго (б) осцилляторов при малой амплитуде возбуждения

Можно видеть, что период колебаний первого осциллятора до скачка амплитуды постоянен и составляет 1.25 н.е., тогда как после скачка уменьшается до 0.05 н.е. (рисунок 5.1). Указанные периоды соответствуют частотам 5.03 и 12.7 н.е., что сопоставимо с собственными частотами осцилляторов – 5 н.е. и 15 н.е. В обоих случаях колебания первого осциллятора остаются близкими к синусоидальным.

Период колебаний второго осциллятора до скачка также близок к 1.25 н.е., что соответствует чисто вынужденным колебаниям на частоте возбуждения 5 н.е. Однако при этом колебания второго осциллятора являются двухамплитудными или двухпериодическими. Основной период остается равным 1.25 н.е., но к нему с небольшой амплитудой примешиваются колебания на частоте 12.7 н.е. с периодом около 0.05 н.е., который соответствует собственной частоте колебаний второго осциллятора.

По амплитуде имеют место биения (до 50 %) между вынуждающей и собственной частотами. Период этих биений составляет около 20 – 25 н.е., причем амплитуда биений во времени медленно затухает и падает до нуля при времени порядка 200 н.е. По мере роста амплитуды возбуждения период биений уменьшается. Так, при  $A = 5$  н.е. он составляет около 25 н.е., а при  $A = 30$  н.е. снижается до 11 н.е. После затухания биений амплитуда колебаний второго осциллятора устанавливается на постоянном уровне, но колебания сохраняют двухамплитудность – примесь периода 0.05 н.е. остаётся до 50 %.

Таким образом, можно полагать, что при амплитуде возбуждения ниже критической колебания первого осциллятора всегда остаются синусоидальными с постоянной амплитудой, а их частота равна частоте возбуждения. При этом колебания второго осциллятора происходят с биениями между собственной частотой и частотой возбуждения, в результате чего они являются двухамплитудными (двухпериодическими).

При значениях амплитуды возбуждения выше критической колебания обоих осцилляторов после небольшого периода релаксации (порядка времени релаксации первого осциллятора) происходят с постоянной амплитудой на частоте, близкой к собственной частоте второго осциллятора.

### 5.4.3 Параметр кубической нелинейности

Другим параметром, оказывающим существенное влияние на формирование запаздывания, является параметр кубической нелинейности первого осциллятора  $\delta$ . Этот параметр, будучи наиболее высоким по показателю степени  $x_1$ , при достаточной величине может препятствовать уходу системы на бесконечность при любых сочетаниях других параметров.

На рисунке 5.7 приведена зависимость времени запаздывания  $\tau_S$  от величины параметра кубической нелинейности  $\delta$ . Сплошные точки соответствуют моменту времени, при котором происходит резкое скачкообразное увеличение ам-

плитуды колебаний. Открытые точки соответствуют моменту времени, начиная с которого система уходит на бесконечность.

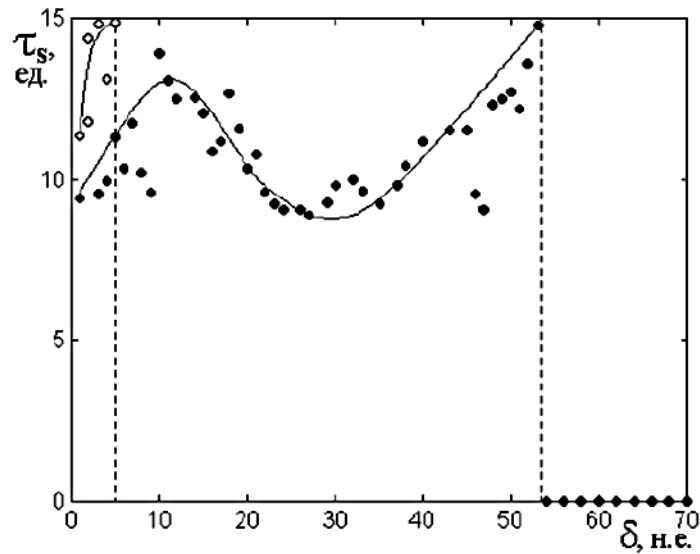


Рисунок 5.7. Зависимость времени запаздывания от параметра кубической нелинейности первого осциллятора.

Непрерывные, бесконечно продолжающиеся во времени колебания большой амплитуды существуют только в области изменения параметра  $\delta$  между значениями 5 и 53 н.е., которая на рисунке ограничена вертикальными пунктирными линиями. При  $\delta < 5$  н.е. колебания большой амплитуды имеют место, но продолжаются сравнительно небольшой промежуток времени, соответствующий интервалу по вертикали между сплошными и открытыми точками, после чего система уходит на бесконечность. При  $\delta > 5$  н.е. система не уходит на бесконечность ни при каких значениях других параметров, т.е. в данном случае значение параметра  $\delta = 5$  н.е. является достаточным для обеспечения возвратно-поступательных (периодических или близких к таковым) колебаний системы с ограниченной амплитудой.

При  $\delta > 53$  н.е. колебания большой амплитуды исчезают, т.е. происходит как бы «подавление» запаздывания, которое более подробно будет рассмотрено далее.

На рисунке 5.7 видно, что сплошные точки имеют большой разброс по вертикали. Уже при малом изменении параметра нелинейности не более чем на 3–5

н.е. время запаздывания меняется на величину, достигающую до 20–30 %. Функциональная зависимость в данном случае является довольно сложной и носит стохастический характер, поэтому сплошные линии на рисунке 5.7 проведены эмпирическим путем через области с максимальным сгущением точек.

Как отмечалось ранее, в рамках интерпретации рассматриваемых явлений на основе механизма динамического потенциала запаздывание может быть обусловлено возникновением дополнительного минимума потенциала на расстоянии достаточно большом от нуля.

Такое возникновение дополнительного минимума происходит путем преобразования потенциального барьера в перегиб, на котором производная от потенциала близка к нулю. То есть переход системы из нулевого положения в дополнительный минимум происходит через участок, где наклон потенциальной кривой весьма мал. Колебания на этом участке происходят с биениями между частотой возбуждения и частотами осцилляторов, так что амплитуда от одного периода колебаний к другому может меняться довольно сложным образом. При этом если рабочая точка успевает зайти достаточно далеко от точки перегиба в сторону дополнительного минимума, то происходит провал системы в этот минимум, и амплитуда колебаний резко возрастает. Если смещение рабочей точки будет недостаточным для удаления от точки перегиба, то она возвращается обратно, после чего колебания продолжаются с небольшой амплитудой в течение еще одного периода. Вследствие переменного размаха колебаний при биениях, заход амплитуды за точку перегиба происходит нерегулярным образом, т. е. в различные периоды, в результате чего зависимость времени запаздывания от величины параметра нелинейности приобретает характер близкий к стохастическому.

Такой нерегулярный характер расположения точек в окрестности величины  $\tau_S = (12 \pm 2)$  н.е. на всём интервале изменения параметра нелинейности  $\delta$  от нуля до его критического значения даёт основание полагать, что время запаздывания от этого параметра практически не зависит.

#### 5.4.4 Подавление запаздывания

Как отмечалось в предыдущем разделе, достаточно большое значение параметра кубической нелинейности приводит к подавлению запаздывающих колебаний большой амплитуды – они более не возбуждаются ни при каких значениях амплитуды возбуждения.

На рисунке 5.8 показано развитие во времени колебаний первого осциллятора при различных значениях параметра кубической нелинейности – меньшем (а) и большем (б) критического значения  $\delta_c$ .

Из рисунка видно, что запаздывающее возбуждение колебаний большой амплитуды (рисунок 5.8а) имеет место только при значении параметра кубической нелинейности  $\delta$  меньшем его критического значения  $\delta_c$ . До момента запаздывания частота первого осциллятора равна 5 н.е., а после, когда уже возбуждены колебания большой амплитуды, частота становится равной 12.5 н.е., т. е. близка к собственной частоте второго осциллятора. При параметре нелинейности  $\delta$  выше критического значения  $\delta_c$  (рисунок 5.8б) частота всегда остается постоянной, равной 5 н.е.

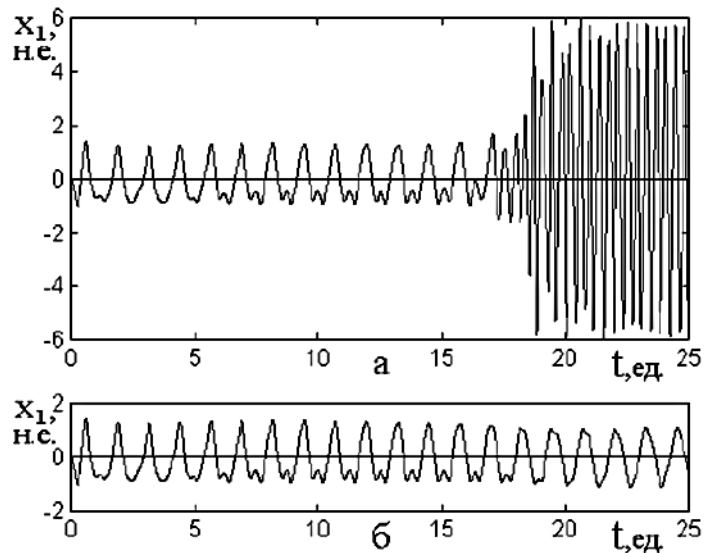


Рисунок 5.8. Развитие колебаний первого осциллятора во времени при разных значениях параметра кубической нелинейности.

а –  $\delta = 53.04$ ; б –  $\delta = 53.05$ .

Критическое значение параметра нелинейности  $\delta_c = (53.045 \pm 0.005)$  н. е.

Интерпретировать подавление запаздывания можно с помощью особенностей потенциала, обусловленных кубической нелинейностью.

Так, по мере увеличения параметра кубической нелинейности потенциальная яма сужается, поэтому амплитуда возможных колебаний уменьшается. Колебания большой амплитуды возбуждаются тогда, когда динамический потенциал имеет минимум, отстоящий достаточно далеко от нуля. Кубическая нелинейность уменьшает это расстояние, вплоть до того, что этот дополнительный минимум скатывается к нулю. При этом колебания большой амплитуды затихают, их амплитуда спадает до малого значения. Скатывание происходит резко, поскольку потенциальный барьер заменяется перегибом, и вследствие этого подавление тоже происходит резко, как раз при критическом значении параметра нелинейности.

#### 5.4.5 Амплитуда колебаний после запаздывания

На основе отмеченного потенциального характера кубической нелинейности первого осциллятора рассмотрим свойства возбуждаемых колебаний и прежде всего величину их амплитуды через некоторое время после окончания запаздывания.

На рисунке 5.9 приведена зависимость амплитуды колебаний в установившемся режиме от величины параметра кубической нелинейности. На врезке показана та же зависимость при малых значениях  $\delta$ .

Кривые на основном рисунке и врезке построены соответственно по формулам (5.9) и (5.10):

$$x_{10} = \frac{600}{\delta-4} - 8, \quad (5.9)$$

$$x_{10} = \frac{600}{\delta} + 45. \quad (5.10)$$

Из рисунка 5.9 видно, что установившаяся амплитуда колебаний с ростом параметра кубической нелинейности более или менее монотонно спадает. Этот спад является существенным при значениях параметра  $\delta$  до 10–15 н.е. После этих значений динамика изменения амплитуды замедляется. Начиная со значения

$\delta \approx 53$  н.е. амплитуда колебаний резко падает и в дальнейшем практически не меняется. Такое резкое уменьшение амплитуды соответствует достижению параметром  $\delta$  критического значения  $\delta_c$  (на рисунке отмечено стрелкой), что приводит к подавлению запаздывания, обсуждаемому в предыдущем разделе.

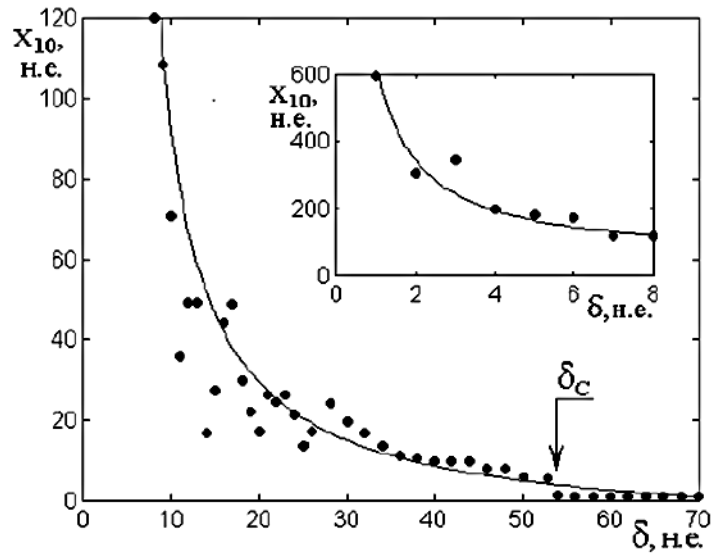


Рисунок 5.9. Зависимость амплитуды колебаний в установившемся режиме после запаздывания от величины параметра кубической нелинейности. На врезке – та же зависимость при малых значениях  $\delta$ .

Также в области значений параметра  $\delta$  до 30 н.е. наблюдается сильный разброс точек вдоль вертикальной оси вплоть до 50 %, происходящий при малом изменении  $\delta$  – всего на 1–2 н.е. Можно предположить, что такой разброс точек указывает на сложный характер потенциальной поверхности системы. То есть в формировании динамического потенциала участвует вся совокупность параметров системы в сочетании с меняющейся амплитудой колебаний второго осциллятора, собственная частота которого значительно отличается от частоты возбуждения. При значениях  $\delta$  выше 30 н.е. вплоть до величины  $\delta_c$  отмеченный разброс точек отсутствует.

Таким образом, достаточно уверенный спад зависимости  $x_{10}$  от  $\delta$  позволяет приблизить её эмпирическими кривыми (5.9) и (5.10), которые на рисунке 5.9 показаны сплошными линиями. Обе кривые соответствуют закону обратной пропорциональности, что с хорошей степенью достоверности может быть использовано в нулевом приближении.

Указанный спад амплитуды колебаний может быть интерпретирован на основе механизма потенциала, соответствующего кубической нелинейности.

Из выражения для динамического потенциала (5.5) видно, что кубическая нелинейность соответствует слагаемому с четвертой степенью по амплитуде смещения первого осциллятора  $x_1$ , имеющему вид:

$$U_\delta = \frac{\delta}{4} \cdot x_1^4. \quad (5.11)$$

Примерный вид кубического потенциала для этого случая показан на рисунке 5.10, где кривые построены по формуле:

$$U_\delta = \delta \cdot (x_{10})^4. \quad (5.12)$$

При построении коэффициент  $1/4$  опущен, поскольку он не меняет сути дела, а интервал изменения амплитуды осциллятора выбран в пределах 5 н.е. с целью избежать больших значений потенциалов и повысить наглядность рисунка.

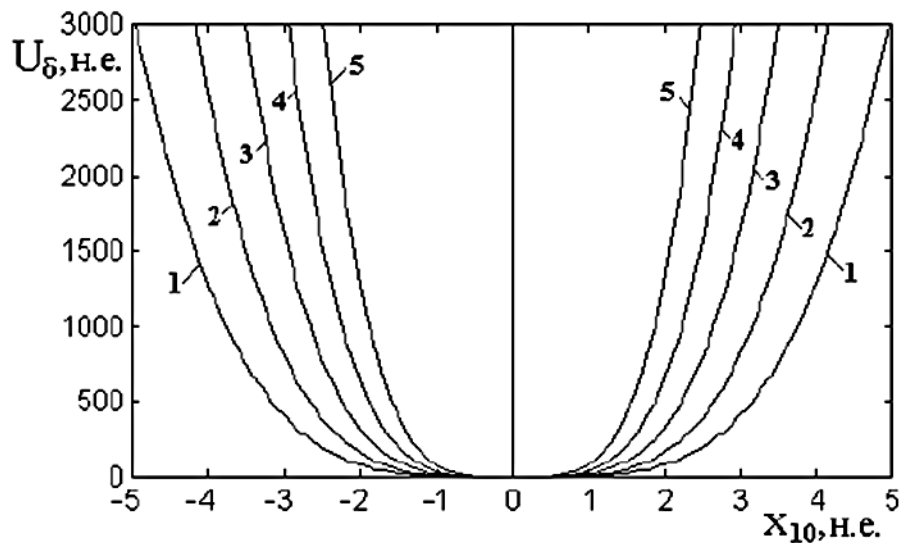


Рисунок 5.10. Зависимость потенциала кубической нелинейности от амплитуды колебаний первого осциллятора при различных значениях параметра  $\delta$ :  
1 – 5 н.е., 2 – 10 н.е., 3 – 20 н.е., 4 – 40 н.е., 5 – 80 н.е.

Из рисунка 5.10 видно, что потенциал  $U_\delta$  представляет собой симметричную яму, сужающуюся с ростом параметра  $\delta$ . Такое сужение не является линейным и по мере увеличения  $\delta$  постепенно замедляется. Края ямы при заданном значении потенциала определяют интервал допустимых значений смещения первого осциллятора, т. е., чем выше потенциал, тем размах колебаний может быть больше.



На рисунке 5.11 показана зависимость допустимой амплитуды колебаний первого осциллятора от величины параметра кубической нелинейности при различном уровне потенциала  $U_\delta$ . Точки построены в соответствии с кривыми на рисунке 5.10 при трех уровнях потенциала: 1000, 2000 и 3000 н.е.

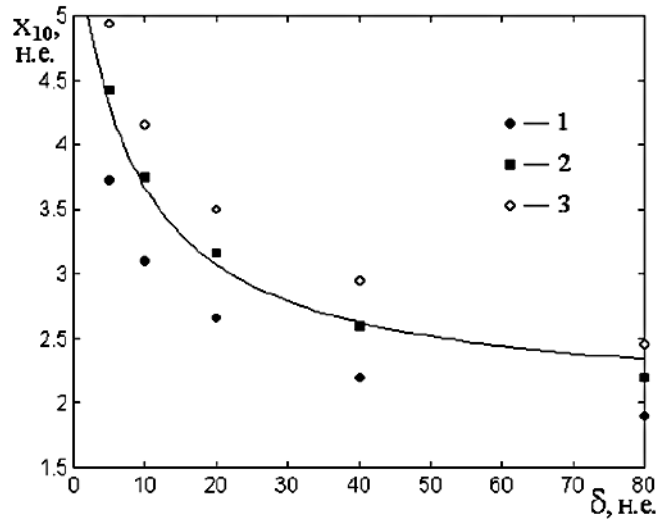


Рисунок 5.11. Зависимость допустимой амплитуды колебаний первого осциллятора от величины параметра кубической нелинейности при различном уровне потенциала  $U_\delta$ :  
1 – 1000 н.е., 2 – 2000 н.е., 3 – 3000 н.е.

Для построения кривой использовалась эмпирическая формула:

$$x_{10} = \frac{30}{\delta - 8} + 2. \quad (5.13)$$

Из рисунка 5.11 можно видеть, что допустимая амплитуда колебаний с ростом уровня потенциала уменьшается, что соответствует сужению потенциальной ямы на рисунке 5.10. Одновременно при увеличении параметра  $\delta$  допустимая амплитуда монотонно падает, и этот спад, как отмечалось ранее, является сильно нелинейным. Обратной пропорциональной зависимости, записанная в виде формулы (5.13), является приближенной, но динамику спада амплитуды передает в достаточно хорошей степени.

Если вновь обратиться к рисунку 5.10, то можно видеть, что вследствие четности потенциала оба его ветви стремятся к плюс бесконечности, так что колебания по амплитуде всегда остаются ограниченными. Поскольку степень потенциала по переменной  $x_1$  равна четырем, а все остальные слагаемые динамического потенциала (5.5) при фиксированном значении  $x_2$  имеют по той же пере-

менной  $x_1$  степень не выше третьей, то этот потенциал при достаточной величине своего параметра  $\delta$  превышает все остальные слагаемые, и колебания всегда остаются конечными.

Следует отметить, что наблюдаемый в некоторых случаях уход системы на бесконечность (открытые точки на рисунке 5.7), во-первых, имеет место только при довольно малых значениях параметра  $\delta$  (менее 5 н.е.) и, во-вторых, вероятно обусловлен сложным характером потенциальной поверхности в этом случае. Здесь может иметь место преобладающая роль слагаемого со смешанной нелинейностью при параметре  $\eta$ , где первая переменная хотя и имеет всего третью степень, но в динамике к ней добавляется ещё вторая переменная. В итоге результирующая степень становится четвертой, пусть даже при некотором возможно нарушении синхронизма. Возникающая конкуренция двух четвертых степеней  $x_1^4$  и  $x_1^3 x_2$  при малом значении параметра  $\delta$ , но достаточно большой величине  $\eta$ , может снять ограничение по амплитуде, создаваемое кубической нелинейностью, и дать возможность системе уйти на бесконечность.

### 5.5 Двухпотенциальная модель

Теперь рассмотрим особенности динамического потенциала, записанного в разделе 5.3 в виде выражения (5.5).

Можно видеть, что потенциал (5.5) является невзаимным, т. е. при дифференцировании по второй переменной он даёт слагаемое вида  $\eta x_1^3/3$ , которое в уравнении (5.1) отсутствует. Такая невзаимность потенциала означает, что он не является единым для системы в целом, а представляет собой совокупность двух потенциалов, каждого для своего осциллятора, где во втором потенциале, член содержащий слагаемое с коэффициентом, подобным  $\eta$ , отсутствует. Таким образом, для описания движения системы в целом следует использовать два потенциала – по одному для каждого осциллятора:

$$U_1 = \frac{\omega_1^2}{2} \cdot x_1^2 + \gamma_1 \cdot x_1 x_2 + \frac{\delta}{4} \cdot x_1^4 + \frac{\eta}{3} \cdot x_1^3 x_2, \quad (5.14)$$

$$U_2 = \frac{\omega_2^2}{2} \cdot x_2^2 + \gamma_2 \cdot x_1 x_2. \quad (5.15)$$

Далее с целью удобства терминологии такую модель будем называть «двухпотенциальной», при этом модель, описываемая потенциалом вида (5.5), становится «однопотенциальной».

Невзаимность потенциала возникает из-за того, что рассматриваемая система представляет собой совокупность двух отдельных колебательных систем – магнитной и упругой, которые обладают принципиально различными физическими свойствами. Так, к примеру, магнитная система обладает гиротропией, которая у упругой системы отсутствует, и именно свойство гиротропии позволяет использовать магнитные материалы для построения невзаимных устройств СВЧ диапазона.

В предыдущих разделах отмечалось, что запаздывание возбуждения в достаточной мере можно интерпретировать на основе однопотенциальной модели. Относительно потенциала (5.5) делалось замечание, что его следует понимать в динамическом смысле, т. е. его величина не остается стационарной во времени, а меняется в такт со смещением второго осциллятора  $x_2$ . При этом входящая в (5.5) величина  $x_2$  является параметром. Этот параметр становится постоянным на тот момент времени, когда уравнение (5.1) описывает колебания первого осциллятора. Таким образом, в формировании потенциала первого осциллятора участвует как бы «мгновенное» значение переменной  $x_2$ , постоянное в данный момент времени. В случае двухпотенциальной модели поведение системы более сложное. Здесь необходимо учитывать возможность изменения во времени переменной  $x_2$ , которое происходит за счёт воздействия на нее первым осциллятором. Такое воздействие становится тем более сильным, чем крепче связь между осцилляторами. Поэтому оптимальным случаем применения двухпотенциальной модели является рассмотрение сильной связи между осцилляторами

Рассматриваемая двухпотенциальная модель (5.14)–(5.15) представляет собой совокупность двух потенциалов  $U_1$  и  $U_2$ , зависящих от двух переменных  $x_1$  и  $x_2$ . Однако, как показывает подробное рассмотрение развития колебаний во вре-

мени, вторая переменная  $x_2$  преимущественно ведет себя подобно первой  $x_1$  с тем отличием, что её амплитуда значительно меньше амплитуды  $x_1$ . Конечно, если подходить к сравнению строго, то различие в колебаниях имеется, но не более 10 %, поэтому в первом приближении им можно пренебречь. Именно такое подобие и позволяет рассматривать потенциал (5.5) с единственной переменной  $x_1$ , а переменную  $x_2$  принимать в качестве параметра. Однако двухпотенциальная модель может быть сведена к однопотенциальной в более общем виде. Так, располагая слагаемые по степеням и деля всё на  $\omega_2^2/2$ , запишем выражение (5.15) в виде:

$$x_2^2 + \frac{2\gamma_2 x_1}{\omega_2^2} \cdot x_2 - \frac{2U_2}{\omega_2^2} = 0. \quad (5.16)$$

Это есть квадратичное уравнение относительно  $x_2$ , решая которое, получаем:

$$x_2 = \frac{\gamma_2 x_1}{\omega_2^2} \cdot \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2U_2 \omega_2^2}{\gamma_2^2 x_1^2}} \right). \quad (5.17)$$

Здесь перед корнем взят знак плюс, исходя из условия положительности  $x_2$ . Подстановка полученного выражения в (5.14) даёт потенциал, зависящий только от одной переменной  $x_1$ :

$$U_1 = \left\{ \frac{\omega_1^2}{2} + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\omega_2^2} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2U_2 \omega_2^2}{\gamma_2^2 x_1^2}} \right) \right\} x_1^2 + \left\{ \frac{\delta}{4} + \frac{\eta \gamma_2}{3\omega_2^2} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2U_2 \omega_2^2}{\gamma_2^2 x_1^2}} \right) \right\} x_1^4. \quad (5.18)$$

Это выражение не содержит второй переменной  $x_2$ , так что теперь параметром здесь является второй потенциал  $U_2$ .

Из выражения (5.18) можно видеть, что первое слагаемое содержит вторую степень от  $x_1$ , а второе – четвертую степень от этой же переменной. Таким образом, полное выражение является суммой двух парабол.

Численная оценка при параметрах:  $\omega_1 = 5$  н. е.,  $\omega_2 = 15$  н. е.,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 10$  н. е.,  $\delta = 6$  н. е.,  $\eta = -200$  н. е. и переменных  $x_1 = 150$  н. е.,  $x_2 = 4$  н. е., соответствующих режиму запаздывания при условиях возбуждения  $A = 50$  н. е. и  $\omega = 5$ , показывает, что в выражении (5.18) решающую роль играет второе слагаемое. Оно превосходит первое на 2–3 порядка. Четвертая степень  $x_1$  обеспечивает растущие вверх две ветви параболы, симметричные относительно нуля с минимум посередине. При этом второе слагаемое в скобках, имеющее в своем составе от-

рицательный параметр нелинейной связи  $\eta = -200$  н. е., а также  $x_1^2$  в знаменателе, резко растет вблизи нуля и, будучи отрицательным, обеспечивает инверсию знака параболы в этой области. В результате на параболе вблизи нуля вместо минимума появляется максимум, образуя два минимума по обе стороны от нуля.

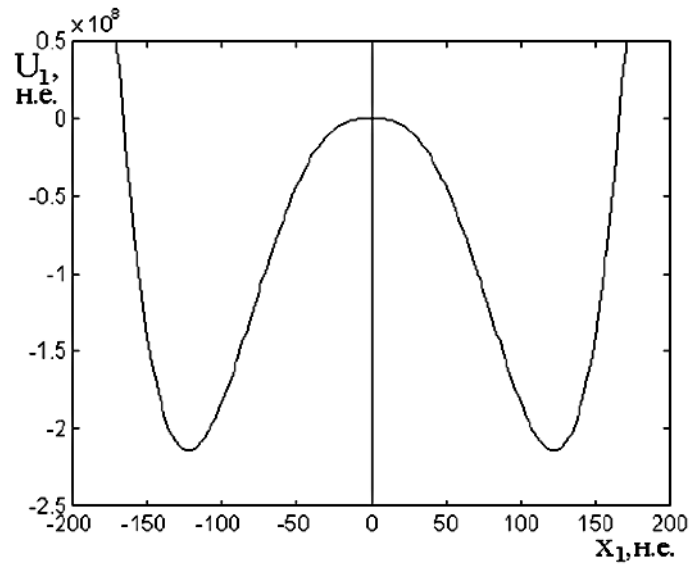


Рисунок 5.12. Зависимость потенциала  $U_1$  от переменной  $x_1$ , построенная по формуле (5.18)

Общий вид рассматриваемой зависимости потенциала  $U_1$  от переменной  $x_1$  показан на рисунке 5.12. При построении в качестве параметра использовалось значение потенциала  $U_2 = 7800$  н. е., которое получается при подстановке принятых значений переменных и параметров в выражение (5.15). Как можно видеть, приведенный на этом рисунке потенциал имеет вид, близкий к кривой 4 на рисунке 5.3, соответствующей подобным значениям параметров. Различие связано с конкретным выбором  $x_2$  и  $\delta$ .

## 5.6. Роль линейной связи осцилляторов в формировании режимов колебаний

В процессе исследования эффекта запаздывания было установлено, что в большинстве случаев развитие колебаний во времени происходит путем двух следующих друг за другом скачков амплитуды. В процессе первого скачка амплитуда возрастает на порядок и более, а в процессе второго – еще в два-три раза. При этом время установления амплитуды на стационарный уровень после того и дру-

гого скачка может различаться. Между скачками колебания могут, как нарастать плавно по закону экспоненты, так и нерегулярно меняться стохастическим образом. В некоторых случаях в установившемся режиме колебания имеют не обычный синусоидальный, а двухамплитудный характер, образованный двумя синусоидами, наложенными друг на друга. Причем вариации амплитуды могут достигать 20 %. При достаточно сильной линейной связи развитие колебаний двумя скачками не ограничивается. Через некоторое время после второго скачка происходит плавный рост амплитуды, который оканчивается новым стационарным уровнем, заметно более высоким, чем уровень между скачками. Ещё более сильная связь приводит к режиму перемежающихся скачков, который через некоторое время переходит в стационарный режим со смещенным положением нуля и малой амплитудой.

Из всей совокупности различных режимов можно выделить четыре наиболее характерных, которые соответствуют различным уровням параметра линейной связи. Условно будем называть эти режимы «двухступенчатым запаздыванием», «плавным насыщением», «перемежающимися скачками» и «малоамплитудной релаксацией». Рассмотрим их в соответствующем порядке. Будем следить за развитием колебаний только первого осциллятора. Колебания второго осциллятора имеют сходный вид, отличаясь лишь значительно меньшей амплитудой.

### 5.6.1 Двухступенчатое запаздывание

Развитие колебаний, соответствующее двухступенчатому запаздыванию, показано на рисунке 5.13. Этот режим отчетливо проявляется в интервале параметра  $\gamma$  примерно от 4 до 30 н.е.

При больших значениях параметра  $\gamma$  данный режим постепенно вытесняется режимом плавного насыщения, а при значениях выше 200–300 н.е. совсем исчезает, и ему на смену приходит режим перемежающихся скачков.

В качестве параметров, характеризующих развитие колебаний, примем:

$\tau_S$  – момент времени первого (основного) скачка, т. е. собственно время запаздывания в принятом ранее смысле;

$A_S$  – амплитуда, достигаемая непосредственно в момент первого скачка;

$\tau_C$  – момент времени второго скачка;

$A_C$  – амплитуда стационарных колебаний, устанавливающихся сразу после второго скачка.

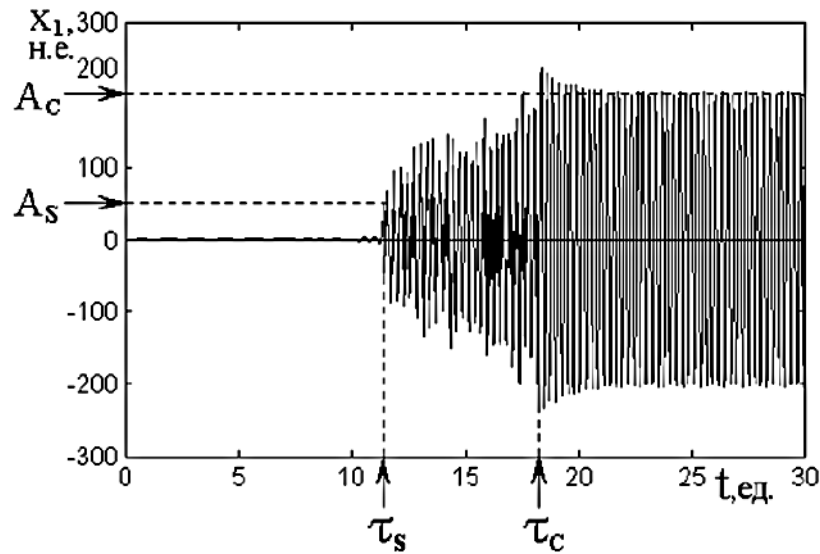


Рисунок 5.13. Развитие колебаний во времени и схема определения основных характеристик процесса при значениях параметра линейной связи  $\gamma = 10$  н. е.

Как видно из рисунка 5.13, до момента времени  $\tau_S$  амплитуда колебаний крайне мала (менее 1 н.е.). В момент времени  $\tau_S$  она скачком увеличивается до величины  $A_S = 50$  н. е. Далее до момента времени  $\tau_C$  амплитуда растет медленно, достигая к этому моменту времени значения порядка 130 н.е. В момент времени  $\tau_C$  происходит второй резкий скачок амплитуды до 230 н.е., после которого она быстро приходит к стабильному уровню, ограничиваясь значением  $A_C = 200$  н. е. Таким образом, наблюдаются следующие друг за другом два скачка амплитуды при временах  $\tau_S$  и  $\tau_C$ , где  $\tau_C$  превышает  $\tau_S$  почти в два раза. При этом скачок амплитуды при  $\tau_S$  происходит примерно на два порядка величины, тогда как скачок при  $\tau_C$  – всего не более чем в полтора раза.

Рассмотрим зависимость параметров скачков от величины линейной связи. Для этого обратимся к рисунку 5.14, где показаны зависимости времени первого

$\tau_S$  и второго  $\tau_C$  скачков амплитуды колебаний первого осциллятора от величины параметра линейной связи  $\gamma$ .

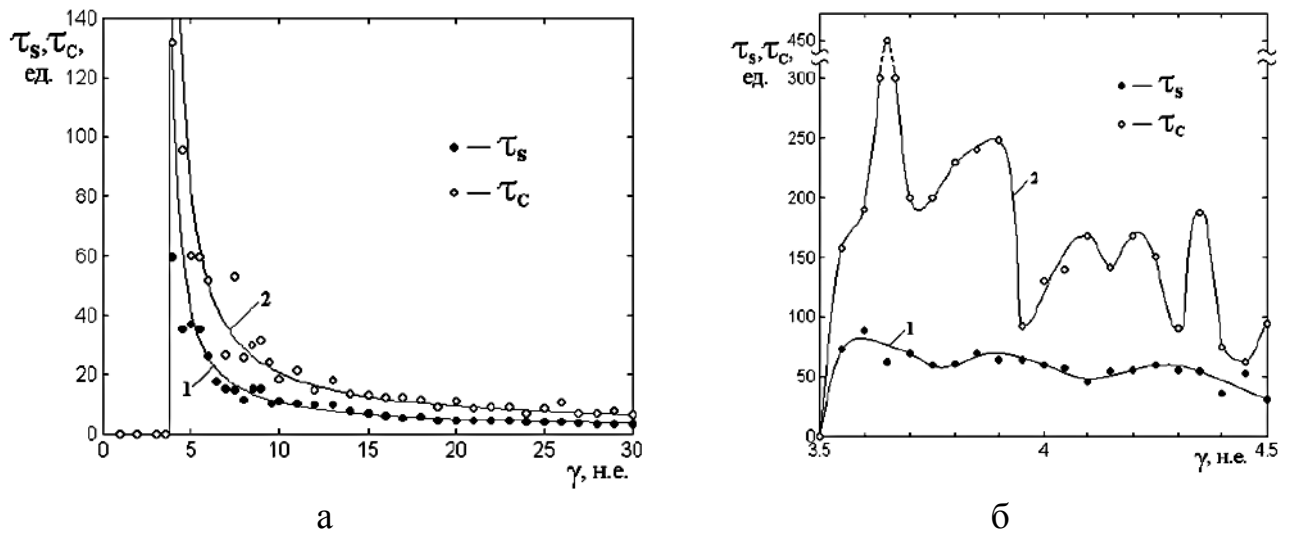


Рисунок 5.14. а – зависимости времени первого  $\tau_S$  и второго  $\tau_C$  скачков амплитуды колебаний первого осциллятора от величины параметра линейной связи  $\gamma$ ; б – укрупненный фрагмент по горизонтальной оси.

1, 2 – аппроксимирующие кривые: а – построены по формулам (5.19) и (5.20), б – построены приближенно по точкам.

Аппроксимирующие кривые на рисунке 5.14а построены по формулам:

кривая 1:

$$\tau_S = \frac{60}{\gamma - 3.5} + 1.4; \quad (5.19)$$

кривая 2:

$$\tau_C = \frac{120}{\gamma - 3.5} + 2.1. \quad (5.20)$$

Из рисунка 5.14а видно, что оба скачка имеют место при превышении параметром связи определенного критического значения, равного 3.5 н.е., т.е. в интервале  $0 < \gamma < 3.5$  н.е. запаздывание возбуждения колебаний отсутствует. Начиная со значения  $\gamma = 3.5$  н.е., время запаздывания с довольно больших значений  $\tau_S$  и  $\tau_C$  порядка 80–140 н.е. постепенно спадает, составляя при  $\gamma = 30$  н.е. менее 10 н.е. При этом время второго скачка  $\tau_C$  всегда превышает время первого  $\tau_S$  в два-три раза, причем спад обоих времен с ростом параметра связи  $\gamma$  происходит тем медленнее, чем этот параметр больше. Эти зависимости довольно близко аппроксимируются формулами обратной пропорциональности (5.19) и (5.20), но в интервале изменения  $\gamma$  от 5 до 10 н.е. оба времени испытывают резкие скачки, в неко-



торых случаях достигающие двух и более раз. Характер таких скачков подробно проиллюстрирован на рисунке 5.14б, на котором приведены фрагменты зависимостей в более крупном масштабе по горизонтальной оси. Как видно из этого рисунка, обе кривые начинаются от нуля при критическом значении  $\gamma = 3.50$  н.е., после чего уже при  $\gamma = 3.65$  н.е. время  $\tau_C$  испытывает резкий взлет вплоть до 450 н.е., а при  $\gamma = 3.70$  н.е. снижается до 200 н.е. Далее эта зависимость снова растет, потом убывает, потом снова растет, т.е. испытывает значительные колебания вплоть до конца рассматриваемого интервала значений  $\gamma$ . Можно видеть, что аппроксимирующая кривая 2 на рисунке 5.14а этих скачков не отражает, т.е. реальная зависимость в отличие от аппроксимирующей имеет характер близкий к фрактальному [73, 74]. В то же время зависимость  $\tau_S$  от  $\gamma$  в некоторой степени выглядит более гладкой. Эта зависимость также имеет скачки, но в среднем, особенно при  $\gamma \geq 10$  н.е., определяется кривой 1 на рисунке 5.14а вполне удовлетворительно.

Рассмотрим теперь зависимость амплитуд скачков  $A_S$  и  $A_C$  от величины параметра линейной связи  $\gamma$ . Для этого обратимся к рисунку 5.15, где приведены соответствующие зависимости.

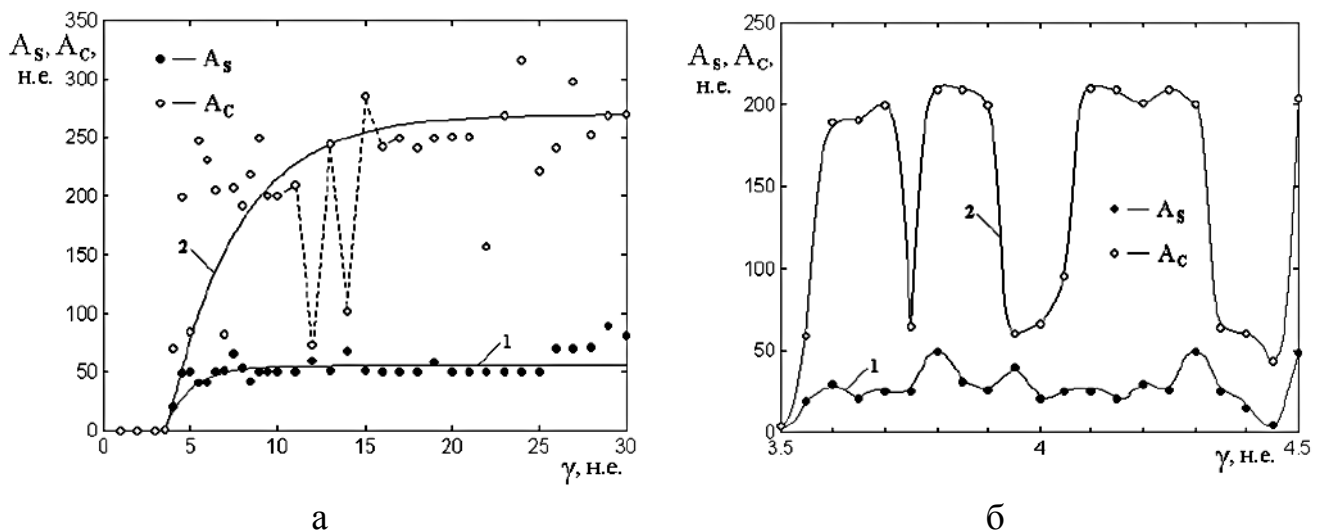


Рисунок 5.15. а – зависимости амплитуд  $A_S$  и  $A_C$  от величины параметра линейной связи  $\gamma$ , где пунктиром показаны некоторые скачки амплитуды  $A_C$  при малом изменении  $\gamma$ ; б – укрупненный фрагмент по горизонтальной оси.

1, 2 – аппроксимирующие кривые: а – построены по формулам (5.21) и (5.22), б – построены приближенно по точкам.

Формулы для построения аппроксимирующих кривых:

кривая 1:

$$A_S = 55 - 125 \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{1.5} + 1.5\right); \quad (5.21)$$

кривая 2:

$$A_C = 270 - 15 \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{4} + 3.8\right). \quad (5.22)$$

Приведенные выражения определяют зависимости по закону как единица минус экспонента с отрицательным показателем.

Из рисунка 5.15а можно видеть, что и в данном случае обе зависимости испытывают скачки. Особенно это характерно для амплитуды  $A_C$ . Некоторые из таких скачков на рисунке показаны пунктиром. Обращает на себя внимание тот факт, что в отличие от зависимостей для времени запаздывания, здесь скачки имеют место во всём интервале изменения параметра  $\gamma$ . У амплитуды  $A_S$  величина скачков значительно меньше, чем величина скачков амплитуды  $A_C$ , но здесь они наблюдаются до конца интервала  $\gamma$ . Таким образом, можно полагать, что аппроксимирующие кривые 1 и 2 на рисунке 5.15а хотя и проходят через области максимального сгущения точек, но всё же отражают реальные зависимости только в среднем.

Дополнительной иллюстрацией характера скачков является рисунок 5.15б, где фрагменты рассматриваемых зависимостей приведены в более крупном масштабе по горизонтальной оси. Можно видеть, что и здесь для второго скачка зависимость амплитуды  $A_C$  от параметра линейной связи изрезана значительно сильнее, чем для амплитуды  $A_S$  первого скачка. Видимо, и в этом случае можно говорить о фрактальном характере приведенных зависимостей.

В подтверждение к сказанному рассмотрим развитие колебаний первого осциллятора во времени при различных значениях константы линейной связи  $\gamma$ , которые отличаются на малую величину – всего 0.1 н.е., т. е. около 2.5 % от средней величины 4.0 н.е. Данные развертки по времени показаны на рисунке 5.16.

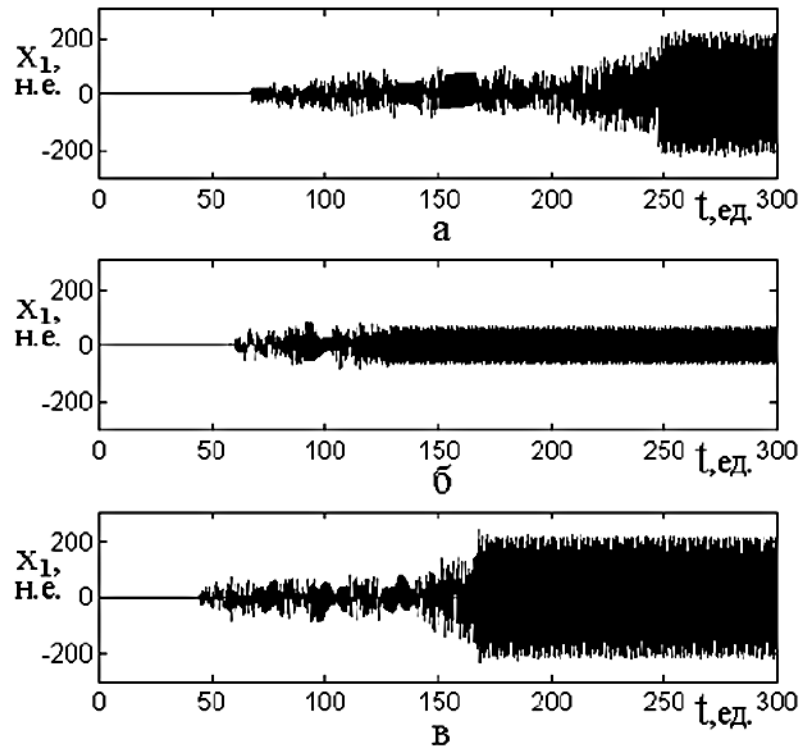


Рисунок 5.16. Развитие колебаний первого осциллятора во времени при различных значениях константы линейной связи  $\gamma$ .  
 а – 3.9 н.е.; б – 4.0 н.е.; в – 4.1 н.е.

Как видно из рисунка, незначительное изменение  $\gamma$  мало меняет время первого скачка – от 60 до 44 н.е. (сверху вниз по рисунку), тогда как время второго скачка меняется очень сильно – от 250 н.е. через 130 н.е. до 170 н.е. При этом амплитуда между скачками также меняется незначительно, но в установившемся режиме её значение меняется от 200 н.е. через 66 н.е. снова на 200 н.е. Следует отметить, что во всех случаях колебания между первым и вторым скачками являются сильно нерегулярными, т. е. имеют стохастический характер.

### 5.6.2 Плавное насыщение

Этому режиму соответствуют колебания, показанные на рисунке 5.17. Плавное насыщение в чистом виде характерно для значений параметра  $\gamma$ , лежащих в диапазоне от примерно 30 до 200–300 н.е. При больших значениях этого параметра плавное насыщение сменяется режимом перемежающихся скачков.

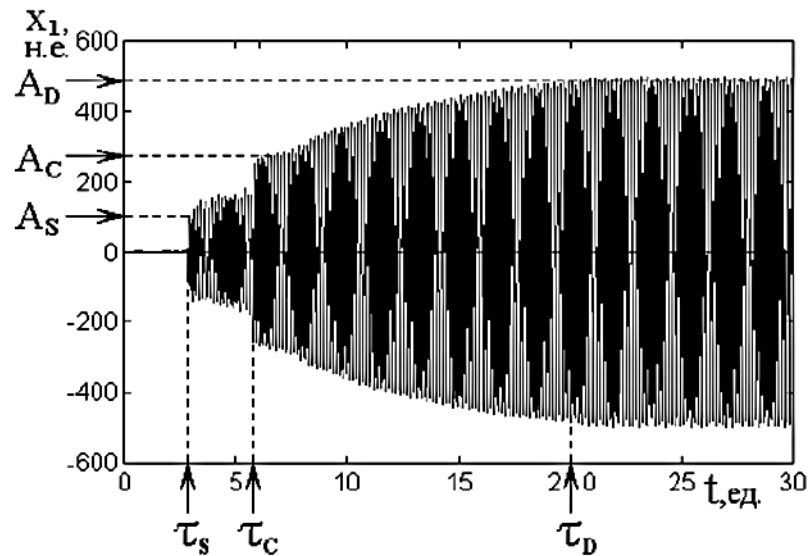


Рисунок 5.17. Развитие колебаний во времени и схема определения основных характеристик режима плавного насыщения при значении параметра линейной связи  $\gamma = 50$  н. е., кубической нелинейности  $\delta = 6$  н. е., нелинейной связи  $\eta = -200$  н. е. и амплитуде возбуждения  $A = 50$  н. е.

К рассмотренным ранее параметрам: временам  $\tau_S$  и  $\tau_C$  и амплитудам  $A_S$  и  $A_C$ , характеризующим развитие колебания, добавим ещё:

$\tau_D$  – время выхода колебаний на стационарный уровень в случае плавного роста после второго скачка;

$A_D$  – амплитуда колебаний, устанавливающихся после второго скачка по окончании плавного роста.

Из рисунка 5.17 можно видеть, что до момента времени  $\tau_C$  и чуть далее, примерно до 7 ед., колебания ведут себя согласно режиму двухступенчатого запаздывания. Но по прошествии этого времени после второго скачка амплитуда колебаний не остается постоянной, а испытывает постепенный рост по закону, близкому к экспоненциальному, т.е. как единица минус экспонента с отрицательным показателем. Этот рост переходит в насыщение при времени  $\tau_D$ , после чего амплитуда остается постоянной. Как видно, время выхода на насыщение  $\tau_D$  превосходит время второго скачка  $\tau_C$  примерно в три раза, а установившаяся при этом амплитуда  $A_D$  превышает начальную амплитуду  $A_C$  в два раза. То есть обе характеристики, как временная, так и амплитудная, меняются в несколько раз, что и послужило причиной выделения такого развития колебаний в отдельный режим.

Рассмотрим, как зависят параметры этого режима от величины линейной связи. Для этого обратимся к рисунку 5.18, на котором показаны зависимости времени первого скачка амплитуды  $\tau_S$  и времени установления второй стационарной амплитуды  $\tau_D$  от величины параметра линейной связи  $\gamma$ .

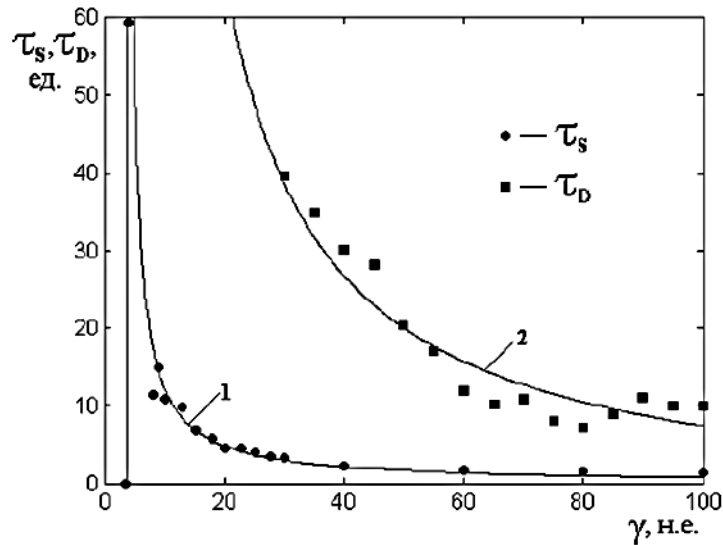


Рисунок 5.18. Зависимости времени запаздывания первого скачка  $\tau_S$  и времени установления второй стационарной амплитуды  $\tau_D$  первого осциллятора от величины параметра линейной связи  $\gamma$ .

1, 2 – аппроксимирующие кривые, построенные по формулам (5.23) и (5.24).

Аппроксимирующие кривые построены по формулам:

кривая 1:

$$\tau_S = \frac{80}{\gamma - 3.5}; \quad (5.23)$$

кривая 2:

$$\tau_D = \frac{1100}{\gamma - 4.2} - 4.0. \quad (5.24)$$

Как видно из рисунка 5.18, плавное насыщение имеет место только при превышении параметром связи определенного критического значения, близкого к 30 н.е., т.е. ниже этого значения амплитуда после второго скачка остается постоянной, и плавное насыщение отсутствует. Время второго установления амплитуды  $\tau_D$  всегда превышает время первого скачка  $\tau_S$  примерно на порядок. Аппроксимирующие функции для обоих времен (5.23) и (5.24) носят характер обратной пропорциональности. При  $\gamma < 15$  н.е. зависимость времени  $\tau_S$  от этого параметра

имеет скачки, но далее вплоть до значения  $\gamma = 100$  н.е. эти скачки практически отсутствуют. Зависимость времени  $\tau_D$  от  $\gamma$  в некоторых местах, например, при  $\gamma = 45, 65, 89$  и  $90$  н.е. несколько (до 30 %) отклоняется от аппроксимирующей кривой 2. Однако эти отклонения резкими не являются и не носят фрактальный характер. Таким образом, в целом зависимость  $\tau_D$  от параметра  $\gamma$  ведёт себя гораздо «спокойнее», чем подобная зависимость для  $\tau_S$ .

Обратимся теперь к рисунку 5.19, где показаны зависимости установившейся амплитуды первого скачка  $A_S$  и установившейся второй стационарной амплитуды  $A_D$  от величины параметра линейной связи  $\gamma$ . Аппроксимирующие кривые построены по формулам:

кривая 1:

$$A_S = 280 - 15 \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{4.0} + 4.3\right); \quad (5.25)$$

кривая 2:

$$A_D = 500 - 15 \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{4.0} + 10.0\right), \quad (5.26)$$

где оба выражения ведут себя, как зависимость единица минус экспонента с отрицательным показателем.

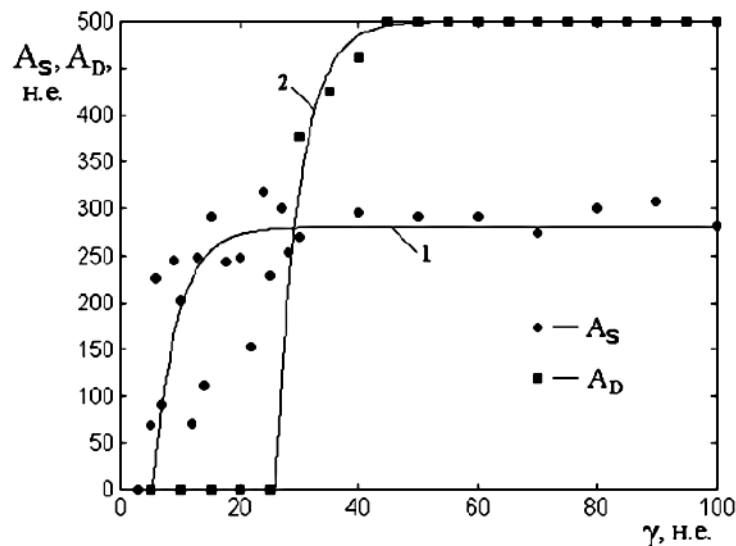


Рисунок 5.19. Зависимость установившейся амплитуды первого скачка  $A_S$  и второй стационарной амплитуды  $A_D$  от величины параметра линейной связи  $\gamma$ .  
1, 2 – аппроксимирующие кривые, построенные по формулам (5.25) и (5.26).

Из данного рисунка можно видеть, что зависимость  $A_S$  от  $\gamma$  при значениях  $\gamma < 30$  н. е. претерпевает многочисленные скачки, но после превышения этого значения скачки значительно стихают и вплоть до  $\gamma = 100$  н. е. составляют менее 10 %. Зависимость  $A_D$  от  $\gamma$ , исходящая из нуля при  $\gamma \approx 30$  н. е., устремляется вверх достаточно плавно. Начиная с  $\gamma = 45$  н. е. эта зависимость выходит на постоянный уровень 500 н. е. и далее совершенно не меняется. Таким образом, и здесь стационарная амплитуда  $A_D$  ведет себя значительно «спокойнее», чем амплитуда первого скачка  $A_S$ .

### 5.6.3 Перемежающиеся скачки

Режим перемежающихся скачков имеет место в области значений параметра  $\gamma$  более 200–300 н. е. Развитие колебаний в этом режиме показано на рисунке 5.20, где значение  $\gamma$  равно 300 н. е.

Характерными параметрами этого режима являются:

$\tau_p$  – время окончания режима перемежающихся скачков;

$A_p$  – амплитуда перемежающихся скачков;

$x_{1p}$  – значение переменной  $x_1$ , соответствующее нулевой линии колебаний, устанавливающихся после окончания перемежающихся скачков.

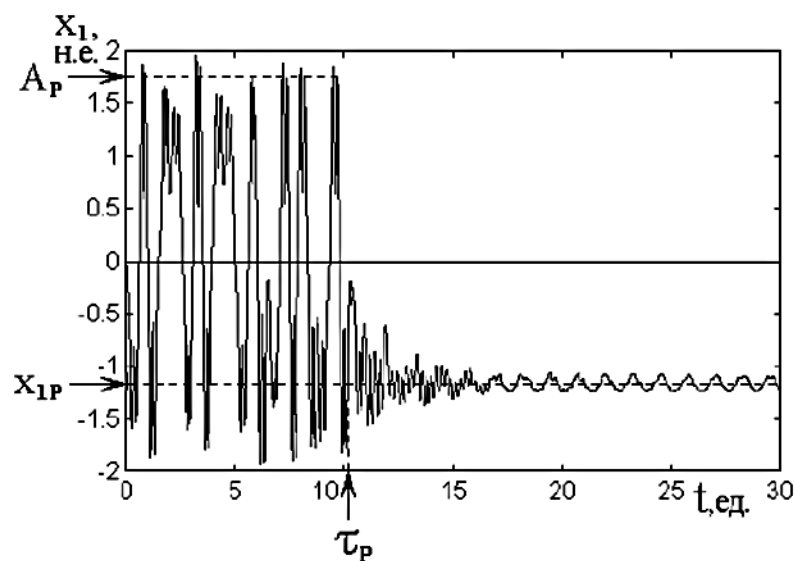


Рисунок 5.20. Развитие колебаний во времени и схема определения основных характеристик процесса при значении параметров:  $\gamma = 300$  н. е.,  $\delta = 6$  н. е.,  $\eta = -200$  н. е.,  $A = 50$  н. е.

Из данного рисунка видно, что характерной особенностью режима перемежающихся скачков является малое значение амплитуды колебаний по сравнению с предыдущими режимами. Сравнивая этот рисунок с рисунками (5.13) и (5.17), можно видеть, что такое падение амплитуды происходит примерно на три порядка. Другой особенностью этого режима, резко отличающей его от других режимов, является смещение равновесного положения колебаний с нуля на значение  $x_{1P} = -1.2$  н.е. Далее вокруг этого положения колебания происходят с весьма малой амплитудой – около 0.1 н.е. Следует отметить, что изменение равновесного положения происходит для обоих осцилляторов.

При варьировании параметра  $\gamma$  в пределах от 200 до 800 н.е. заметное изменение времени  $\tau_P$  отсутствует. Это время всегда остается в интервале от 7 до 12 н.е. Также и амплитуда перемежающихся скачков  $A_P$  не претерпевает особых изменений – она всегда имеет значения от 1.5 до 2.0 н.е.

Рассмотрим некоторые свойства режима перемежающихся скачков чуть подробнее. Как отмечалось ранее, данный режим получается из режима плавного насыщения по мере увеличения параметра линейной связи  $\gamma$ . Так, после  $\gamma = 100$  н.е. амплитуда насыщения  $A_D$  с величины 500 н.е. начинает плавно расти и при  $\gamma = 200$  н.е. составляет уже 900 н.е. Далее рост амплитуды ускоряется, и при  $\gamma = 212$  н.е. она достигает 1100 н.е. Но уже при  $\gamma = 213$  н.е. происходит резкий спад амплитуды, её величина уменьшается на три порядка до значения 1.5 н.е. Этот процесс сопровождается сдвигом равновесного положения переменной  $x_1$  с нуля на значение  $x_{1P} = -0.9$  н.е., т.е. наступает режим перемежающихся скачков. Скачки заканчиваются при времени  $\tau_P = 10$  ед., и дальнейшие колебания происходят вблизи нового положения равновесия с амплитудой порядка 0.1 н.е. При  $\gamma = 213$  н.е. наблюдается всего один скачок, и с ростом  $\gamma$  число скачков увеличивается, достигая при  $\gamma = 300$  н.е. восьми, как это видно на рисунке 5.20. Возбуждение режима перемежающихся скачков по  $\gamma$  не является обратимым. Так, при  $\gamma = 214$  н.е. система снова возвращается в режим плавного насыщения с амплитудой  $A_D = 1500$  н.е. Однако уже при  $\gamma = 215$  н.е. система снова переходит в



режим перемежающихся скачков с амплитудой порядка 0.8 н.е. и сдвигом равновесного положения до  $-0.9$  н.е. Если не принимать во внимание такое возвращение, то можно полагать, что режим перемежающихся скачков обладает резким порогом по  $\gamma$ . В данном случае этот порог находится в интервале между 213 и 215 н.е., или в среднем при  $\gamma = 214$  н.е. Следует отметить, что в этом режиме равновесное положение второго осциллятора также смещается и при  $\gamma = 225$  н.е. составляет около  $x_{2P} = 1.0$  н.е.

#### 5.6.4 Малоамплитудная релаксация

Ещё большее увеличение параметра линейной связи до уровня порядка 800 н.е. приводит к новому режиму, который можно условно назвать «режимом малоамплитудной релаксации». В этом режиме колебания, как первого, так и второго осцилляторов происходят так, как если бы они возбуждались не непрерывным переменным сигналом, а ударным образом в начальный момент времени включения возбуждения. То есть колебания осцилляторов спадают согласно своим временам релаксации: для первого осциллятора равного 2.2 ед., а для второго осциллятора – 22 ед. По завершении процессов релаксации колебания обоих осцилляторов затухают не полностью, а продолжают непрерывно с малой амплитудой (менее 0.1 н.е.).

#### 5.6.5 Интерпретация режимов на основе модели динамического потенциала

Рассмотрим интерпретацию некоторых свойств перечисленных выше режимов колебаний на основе модели динамического потенциала. Поскольку первичный скачок, т. е. само запаздывание развитие колебаний, рассматривался ранее, а второй скачок выражен значительно слабее (на два порядка) первого и проявляется не всегда, и часто стохастическим образом, то основное внимание будет уделено смещению центрального положения колебаний и падению их амплитуды.

Начнем со смещения центрального положения. Согласно общим правилам физики колебаний любые периодические движения происходят вокруг определенного среднего положения. После прекращения процессов релаксации система приходит как раз в это среднее положение и пребывает в нем бесконечно долго. Такое положение можно назвать стационарным или равновесным состоянием. В рассмотренных ранее режимах колебаний таких равновесных состояний можно насчитать несколько. В случаях двухступенчатого запаздывания и плавного насыщения это нулевые значения координат первого и второго осцилляторов. В режиме перемежающихся скачков колебания, т. е. собственно скачки, сначала происходят так же вблизи нуля, но далее по окончании этих скачков система продолжает с небольшой амплитудой колебаться вокруг нового положения равновесия, которое смещено от нуля.

Для интерпретации смещения центра колебаний воспользуемся моделью двух потенциалов (5.14)–(5.15). Будем полагать, что колебания происходят вокруг стационарного состояния, которое соответствует одновременному минимуму обоих потенциалов, т. е. равенству нулю их производных:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \omega_1^2 x_1 + \gamma_1 x_2 + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x_2} = \omega_2^2 x_2 + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (5.28)$$

Выражая из второго равенства  $x_2$  через  $x_1$  и подставляя в первое, имеем:

$$x_1 \cdot \left\{ \left( \omega_1^2 - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\omega_2^2} \right) + \left( \delta - \frac{\eta \gamma_2}{\omega_2^2} \right) \cdot x_1^2 \right\} = 0. \quad (5.29)$$

Это уравнение определяет два возможных положения минимума:

$$1) x_1 = 0; \quad (5.30)$$

$$2) x_1 = \sqrt{\frac{\gamma_1 \gamma_2 - \omega_1^2 \omega_2^2}{\delta \omega_2^2 + |\eta| \cdot \gamma_2}}. \quad (5.31)$$

Действительность переменной  $x_1$  требует, чтобы подкоренное выражение в (5.31) было положительным. Примем для простоты  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$  и рассмотрим вспомогательную функцию:

$$G(\gamma) = \frac{\gamma^2 - \omega_1^2 \omega_2^2}{\delta \omega_2^2 + |\eta| \cdot \gamma}. \quad (5.32)$$

Зависимость этой функции от  $\gamma$  при принятых ранее значениях параметров приведена на рисунке 5.21.

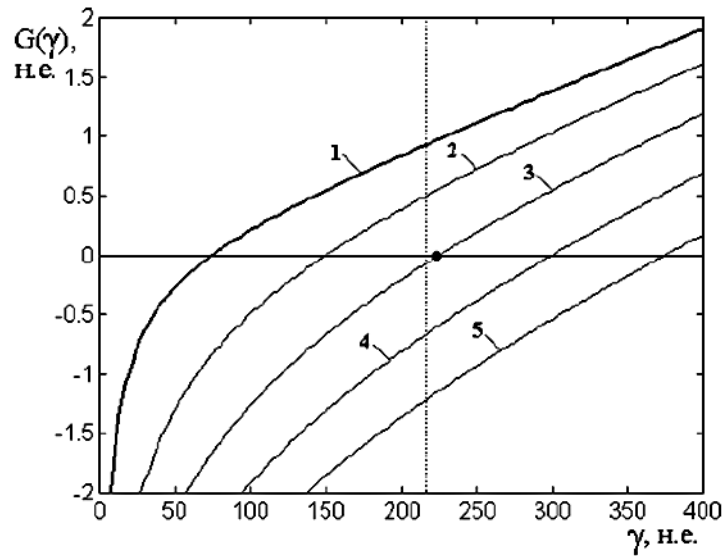


Рисунок 5.21. Зависимость функции  $G$  от  $\gamma$  при различных значениях коэффициента  $K_S$ :

1 – 1 н.е.; 2 – 2 н.е.; 3 – 3 н.е.; 4 – 4 н.е.; 5 – 5 н.е.

Вертикальная точечная линия соответствует критическому значению  $\gamma$ , при котором наступает смещение равновесного положения в соответствии с рисунком 5.20.

Параметры:  $\omega_1 = 5$  н.е.,  $\omega_2 = 15$  н.е.,  $\delta = 6$  н.е.,  $\eta = -200$  н.е.

На этом рисунке зависимость, построенная точно по формуле (5.32), соответствует кривой 1 и показана утолщенной линией. Как видно, при значениях  $\gamma$  меньших 53 н.е. эта кривая располагается ниже нулевой линии. Это означает, что минимум потенциала соответствует решению (5.30), при котором равновесное положение равно нулю. При  $\gamma > 53$  н.е. кривая 1 проходит выше нулевой линии, т. е. минимум потенциала соответствует решению (5.31), для которого равновесное положение смещено относительно нуля на величину  $\sqrt{G(\gamma)}$ . Для  $\gamma = 300$  н.е. такое смещение составляет примерно 1.4 н.е., что с точностью до знака довольно близко к значению  $x_{1P}$ , показанному на рисунке 5.20. Следует отметить, что знак здесь роли не играет, поскольку корень в формуле (5.31) может иметь оба знака – его подстановка в (5.29) равенства не меняет.

В то же время минимальное значение  $\gamma = 53$  н.е., при котором происходит смещение положения равновесия, в сравнении с рисунком 5.20 заметно ниже. Там критическое значение равно  $\gamma = 214$  н.е., что значительно превышает 53 н.е.

Предположительно эта ситуация обусловлена близким к стохастическому характером колебаний, особенно отчетливо проявляющемся в режиме перемежающихся скачков. Здесь период возбуждающей силы приходится не на три периода колебаний второго осциллятора, а на какое-то дробное их количество, которое меняется от периода к периоду. Можно предполагать, что такое нестационарное соответствие этих периодов эквивалентно повышению частоты второго осциллятора. Для того, чтобы учесть это рассогласование, можно феноменологически ввести вспомогательный безразмерный «коэффициент синхронизации»  $K_S$ , на который следует умножить частоту второго осциллятора. Когда этот коэффициент равен единице, синхронизация осцилляторов достаточно полная. А когда он больше единицы, эффективная частота второго осциллятора  $\omega_{2e} = \omega_2 \cdot K_S$  увеличивается, и синхронизация нарушается. В этом случае формула (5.32) примет вид:

$$G(\gamma) = \frac{\gamma^2 - \omega_1^2 (\omega_2 \cdot K_S)^2}{\delta (\omega_2 \cdot K_S)^2 + |\eta| \cdot \gamma}. \quad (5.33)$$

Зависимости  $G(\gamma)$  при небольших целочисленных значениях коэффициента синхронизации  $K_S$  показаны на рисунке 5.21 кривыми 2–5. Из этого рисунка можно видеть, что критическому значению  $\gamma = 214$  н. е. наиболее точно соответствует кривая 3, для которой коэффициент синхронизации равен  $K_S = 3$ . На рисунке пересечение этой кривой с нулевой линией отмечено укрупненной точкой. Однако для кривой 3 значение смещения равновесного положения в сравнении с кривой 1 немного ухудшается. Здесь это значение находится около 0.7 н.е., что, учитывая сложность явления, не так уж и сильно отличается от значения  $x_{1P}$  на рисунке 5.20.

Таким образом, можно полагать, что совокупная минимизация обоих потенциалов двухпотенциальной модели в сочетании с введением коэффициента синхронизации описывает наблюдаемые свойства режима перемежающихся скачков (порог возбуждения и смещение равновесия) в удовлетворительной степени.

Обратимся теперь к другой особенности режима перемежающихся скачков – резкому падению амплитуды колебаний по сравнению с режимом плавного насыщения.

Исходя из модели потенциала, можно полагать, что колебания с малой амплитудой происходят в окрестности некоторого минимума потенциала, не покидая пределов этой окрестности по причине окружения её двумя потенциальными барьерами. В связи с этим возникает две задачи: отыскать этот достаточно узкий локализованный минимум потенциала и обосновать, почему колебания происходят именно в его пределах, не нарушая его границ.

Прежде всего, следует отметить, что рассматриваемые колебания соответствуют режиму перемежающихся скачков, который имеет место только при достаточно большой величине линейной связи.

В решении указанных задач будем опираться на однопотенциальную модель (5.5). Вначале рассмотрим изменение переменной  $x_1$  в широких пределах, соответствующих колебаниям с большой амплитудой, т. е. режимам двухступенчатого запаздывания и плавного насыщения. На рисунке 5.22а показаны зависимости потенциала  $U_1$  от первой переменной  $x_1$  при различных значениях параметра линейной связи  $\gamma$ . Для удобства восприятия на этом рисунке кривые 2 и 3 несколько смещены вверх. В отсутствие такого смещения в выбранном масштабе кривые совпадают.

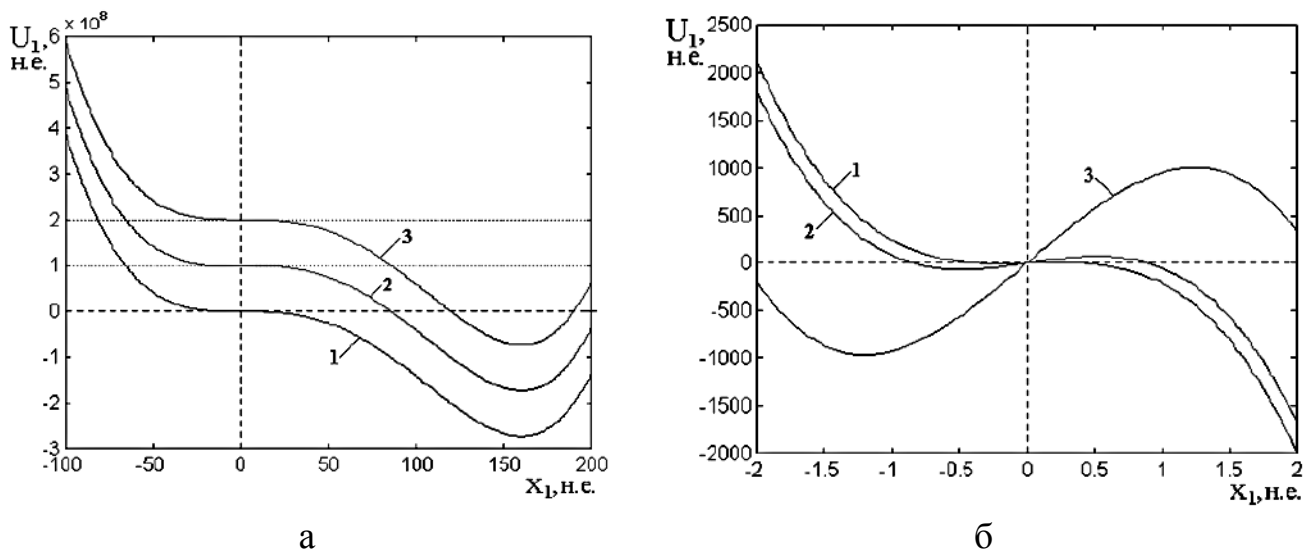


Рисунок 5.22. а – зависимость потенциала  $U_1$  от первой переменной  $x_1$  при различных значениях параметра линейной связи  $\gamma$ : 1 – 10 н.е., 2 – 50 н.е., 3 – 300 н.е.

Во избежание наложения кривых друг на друга, кривые 2 и 3 смещены вверх на  $1 \cdot 10^8$  и  $2 \cdot 10^8$  н.е. соответственно.

б – те же самые зависимости в области нуля в укрупненном масштабе.

Как видно из рисунка 5.22а, вид кривых в выбранном интервале значений  $\gamma$  не меняется, т. е. их вид от параметра линейной связи не зависит. Все кривые имеют минимум вблизи  $x_1 = 160$  н.е., а минимум, соответствующий малой амплитуде, на них не проявляется. Как показала контрольная проверка, искажение кривых наступает, начиная с величины  $\gamma$  порядка  $10^4$  н.е. При этом глубина минимума в правой части рисунка уменьшается, а слева кривые слегка опускаются вниз.

При  $\gamma \sim 10^6$  н.е. минимум из правой части рисунка перемещается в левую, так что кривая как бы отображается относительно вертикальной оси. Однако, как уже отмечалось ранее, такие высокие значения параметра линейной связи переводят систему из режима перемежающихся скачков в режим малоамплитудной релаксации. Таким образом, применение модели потенциала в данном случае малоамплитудный режим не объясняет.

Заметим, что на рисунке 5.22а область малых амплитуд из-за слишком мелкого масштаба выражена недостаточно явно. Поэтому обратимся к рисунку 5.22б, на котором приведены те же кривые в области нуля, но в укрупненном масштабе.

Из рисунка 5.22б видно, что при достаточно больших значениях параметра связи на потенциальной кривой имеется дополнительный минимум. Для  $\gamma = 300$  н.е. этот минимум соответствует  $x_1 = -1.2$  н.е. (кривая 3). Если обратиться к рисунку 5.20, можно видеть, что этот минимум как раз приходится на смещённое положение центра колебаний в установившемся режиме перемежающихся скачков. Отсюда можно заключить, что именно этот минимум обеспечивает колебания малой амплитуды. Из рисунка 5.22б также видно, что такой локальный минимум справа отделен от минимума при  $x_1 = 160$  н.е. (рисунок 5.22а) барьером при  $x_1 = 1.5$  н.е. Можно полагать, что при достаточном уровне возбуждения этот барьер может быть преодолен, и колебания сместятся на минимум при  $x_1 = 160$  н.е. с соответствующим увеличением амплитуды.

Как показали расчеты, такое изменение режима колебаний действительно имеет место. Так, рисунок 5.20 построен при  $A = 50$  н.е., а при увеличении амплитуды возбуждения до 160 н.е. режим перемежающихся скачков сменяется ре-

жимом плавного насыщения с запаздыванием  $\tau_S = 24$  ед. времени и установившейся амплитудой  $A_D = 1900$  н. е.

Такая же смена режимов наблюдается и при изменении начального положения осциллятора. Рисунок 5.20 построен при нулевом начальном смещении обоих осцилляторов. Но при начальном смещении только первого осциллятора на величину  $x_1 = 3$  н. е., которая соответствует правому склону барьера, и той же амплитуде возбуждения  $A = 50$  н. е. режим перемежающихся скачков сменяется режимом плавного насыщения с запаздыванием  $\tau_S = 0.5$  ед. времени и установившейся амплитудой  $A_D = 1900$  н. е.

Таким образом, можно считать, что колебания с малой амплитудой обусловлены наличием дополнительного минимума потенциала вблизи нулевого значения переменной первого осциллятора. Этот минимум отделен от главного минимума потенциальным барьером. Увеличение уровня возбуждения или достаточное начальное смещение осциллятора позволяет системе преодолеть барьер и перейти в режим колебаний с большой амплитудой.

### 5.6.6 Несимметричная линейная связь

В предыдущих разделах рассматривались различные свойства колебаний связанных осцилляторов при их симметричной связи, т. е. когда параметры связи этих осцилляторов были равны между собой:  $\gamma_1 = \gamma_2$ . Теперь рассмотрим некоторые особенности колебаний, накладываемые несимметричностью связи, т. е. при  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ .

Прежде всего, следует отметить, что при любом соотношении этих параметров связи между собой какие-либо новые режимы, которые существенно отличались бы от рассмотренных ранее, не проявляются. В некоторых случаях помимо двух скачков наблюдается ещё третий, и даже иногда четвёртый, но все они по сравнению с первым выражены слабо. Во всех случаях амплитуда каждого последующего скачка превышает амплитуду предыдущего не более чем на 20 %. При очень больших параметрах связи (порядка 600 н.е.) время запаздывания ко-

лебаний настолько мало, что скачки становятся не ярко выраженными. После небольшого запаздывания (до 4 ед. времени) наблюдается рост амплитуды колебаний с довольно быстрым насыщением до уровня 2000 н.е. Таким образом, в большинстве рассматриваемых случаев имеют место те же четыре режима (с небольшими вариациями), что и при равенстве параметров связи.

При изменении, как первого, так и второго параметров связи в интервале значений от 10 до 1000 н.е. в формировании характера режима наблюдается преобладание второго параметра  $\gamma_2$ . Особенно отчетливо это проявляется при значении параметров до 300 н.е. Так, при изменении первого параметра связи  $\gamma_1$  от 10 до 300 н.е. и постоянстве второго параметра  $\gamma_2$  в значении 10 н.е. всегда наблюдается режим двухступенчатого запаздывания, у которого второй скачок выражен слабо – не более чем на 10% выше первого. При этом время запаздывания  $\tau_S$  составляет от 17 до 10 ед. и с ростом значения  $\gamma_1$  слегка уменьшается.

При задании параметра  $\gamma_2$  равным 30 н.е. и варьировании  $\gamma_1$  от 10 до 300 н.е. так же всегда наблюдается режим двухступенчатого запаздывания, но у которого второй скачок выражен значительно ярче, чем в предыдущем случае. Так, его амплитуда может превышать амплитуду первого скачка в два и даже в три раза. Время запаздывания первого скачка  $\tau_S$  составляет от 2 до 4 ед., при этом время второго скачка  $\tau_C$  меняется хаотическим образом в пределах от 4 до 28 ед.

При увеличении  $\gamma_2$  до 60 н.е. и изменении  $\gamma_1$  от 10 до 300 н.е. наблюдается режим двухступенчатого запаздывания, который после двух скачков переходит в режим плавного насыщения. Время  $\tau_S$  при этом составляет от 2 до 3 ед., время второго скачка  $\tau_C$  – от 3 до 17 ед., а время полного насыщения  $\tau_D$  меняется от 10 до 30 ед.. Амплитуда в режиме насыщения  $A_D$  достигает значений от 1000 н.е. до 2000 н.е.

Как показали расчеты, наиболее восприимчивым к соотношению параметров линейной связи является режим перемежающихся скачков. Наиболее оптимальным условием для его возбуждения является равенство этих параметров, т. е.  $\gamma_1 = \gamma_2$ . При отклонении от этого равенства более чем на 20 % режим перемежающихся скачков заменяется режимом плавного насыщения, у которого само



насыщение достигается довольно быстро – за время  $\tau_D \sim 10$  н. е. Так, например, при  $\gamma_1 = 300$  н. е. и  $\gamma_2 = 400$  н. е. (или при обратной ситуации:  $\gamma_1 = 400$  н. е. и  $\gamma_2 = 300$  н. е.) имеет место только плавное насыщение с установившейся амплитудой 2000 н. е.

В случае режима малоамплитудной релаксации решающая роль второго параметра связи пропадает, и этот режим наблюдается примерно с одинаковыми свойствами как при  $\gamma_1 = 400$  н. е. и  $\gamma_2 = 1000$  н. е., так и при  $\gamma_1 = 1000$  н. е. и  $\gamma_2 = 400$  н. е.

### **5.7 Классификация режимов по интенсивности колебаний: малоамплитудные и высокоамплитудные режимы**

Подробное рассмотрение различных режимов колебаний двухосцилляторной системы позволяет разделить эти режимы на две большие группы, характеризующиеся величиной амплитуды колебаний, т. е. можно сказать, что имеются два вида режимов: малоамплитудные и высокоамплитудные. Основные свойства этих режимов заключены в следующем.

Малоамплитудные режимы – это режимы, при которых амплитуда колебаний первого осциллятора  $x_1$  составляет несколько единиц (обычно 2–5), а амплитуда второго осциллятора  $x_2$  – доли единицы. Отношение амплитуд  $x_1/x_2$  составляет от 6 до 15.

В свою очередь малоамплитудные режимы могут быть так же разделены на две группы: без смещения установившегося положения колебаний относительно нуля и с таким смещением. К первой из этих групп относятся режимы, возникающие при слабой связи, как линейной, так и нелинейной. Их отличают отсутствие запаздывания и высокая стабильность установившихся колебаний. Вторая группа включает режимы, имеющие место при очень сильной линейной и нелинейной связи. Эти режимы характеризуются малым запаздыванием или даже его отсутствием. Развитие колебаний в течение некоторого времени происходит с сильной хаотической составляющей (до 50 % от средней величины), после чего амплитуда

резко падает, и устанавливаются малоамплитудные колебания вокруг смещенного равновесного положения.

К группе малоамплитудных режимов относится описанный ранее режим перемежающихся скачков, а также в какой-то степени режим малоамплитудной релаксации.

Высокоамплитудные режимы – это режимы, при которых амплитуда колебаний первого осциллятора  $x_1$  составляет несколько сотен или даже тысяч единиц (как правило, от 400 до 2000), а амплитуда второго осциллятора  $x_2$  заключена в интервале от нескольких единиц до двух-трех десятков. Отношение амплитуд  $x_1/x_2$  составляет от 30 до 40. Как видно, от малоамплитудной группы эти режимы отличаются на 2-3 порядка большей амплитудой и большим (до порядка) отношением амплитуд колебаний.

Этим режимам присуще значительное запаздывание, сильная примесь хаотических колебаний в процессе установления – до 30 % от средней величины – и довольно высокой стабильностью установившихся колебаний. В некоторых случаях установившиеся колебания могут иметь пилообразный автомодуляционный характер, но форма зубьев пилы приближается к периодическому повторению.

К этой группе относятся двухступенчатое запаздывание и режим плавного насыщения.

Рассмотрим некоторые примеры режимов из той и другой группы и интерпретируем их, опираясь на введенную ранее модель динамического потенциала.

### 5.7.1 Малоамплитудный режим слабой связи

Первым будет режим, относящийся к первой группе малоамплитудных режимов, имеющих место при слабой связи. Слабость связи здесь соответствует значениям констант линейной связи  $\gamma$  не более 30–40 н.е. и нелинейной связи  $\eta$  по абсолютной величине менее 100 н.е. Развитие колебаний в таком режиме приведено на рисунке 5.23.

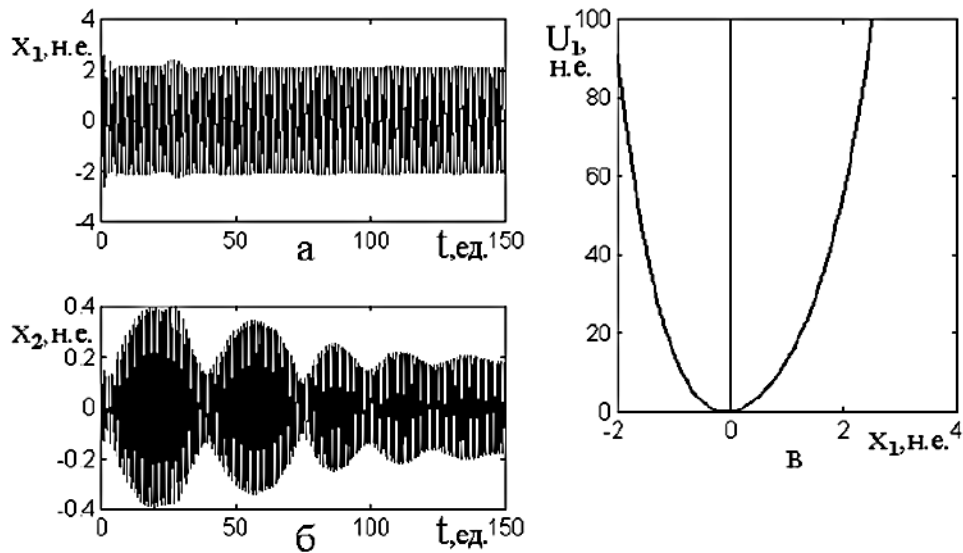


Рисунок 5.23. Малоамплитудный режим слабой связи.

Параметры связи:  $\gamma = 10$  н. е.,  $\eta = -50$  н. е.

Амплитуды колебаний в установившемся состоянии:  $x_1 = 2.0$  н. е.,  $x_2 = 0.17$  н. е.

Отношение амплитуд:  $x_1/x_2 = 12$ .

Из данного рисунка можно видеть, что колебания первого осциллятора устанавливаются сразу после включения возбуждения. Их амплитуда не меняется. Колебания второго осциллятора также начинаются сразу после включения возбуждения, но до установления проходят через несколько периодов затухающих биений. Потенциал (рисунок 5.23в) имеет единственный минимум, других минимумов нет. Колебания происходят в единственной потенциальной яме вблизи нуля. Динамический характер потенциала здесь проявляется только в биениях колебаний второго осциллятора. Период этих биений, составляя порядка 40 ед. времени, приближается к удвоенному времени релаксации второго осциллятора, которое равняется 22 ед. времени. Биения затухают довольно медленно, и при времени порядка 150 ед. амплитуду колебаний второго осциллятора можно считать установившейся.

### 5.7.2 Высокоамплитудный режим средней связи

Далее рассмотрим пример режима, относящийся группе высокоамплитудных режимов и возникающий при средней величине связи осцилляторов. Средняя связь здесь соответствует значению константы линейной связи  $\gamma$  между 10 и 50

н.е. и абсолютному значению константы нелинейной связи  $\eta$  между 100 и 400 н.е. Характерной особенностью данного режима является сильное запаздывание начала интенсивных колебаний после включения возбуждения (до 100 ед. времени). Развитие колебаний в этом режиме приведено на рисунке 5.24.

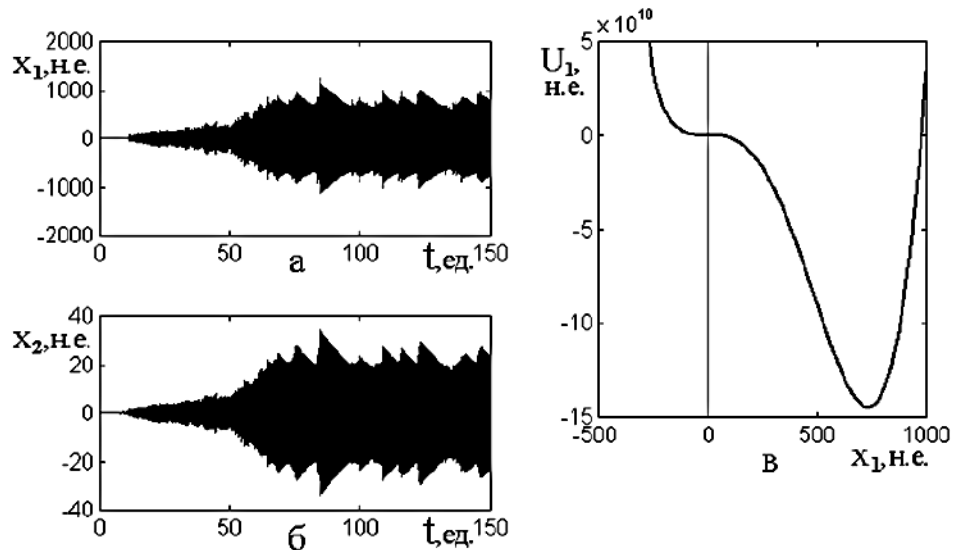


Рисунок 5.24. Высокоамплитудный режим средней связи.

Параметры связи:  $\gamma = 10$  н.е.,  $\eta = -200$  н.е.

Амплитуды колебаний в установившемся состоянии:  $x_1 = 750$  н.е.,  $x_2 = 22$  н.е.

Отношение амплитуд:  $x_1/x_2 = 34$ .

Из рисунка видно, что колебания обоих осцилляторов подобны друг другу с тем отличием, что амплитуда второго осциллятора меньше амплитуды колебаний первого в 30–40 раз.

Надо отметить, что сразу после включения возбуждения в системе наблюдаются незначительные колебания хаотического характера, но их амплитуда крайне мала и составляет для первого осциллятора не более 1–2 н.е., а для второго – не более 0.5 н.е.

Настоящие интенсивные колебания начинаются скачкообразным образом с сильным запаздыванием относительно момента включения возбуждения. При этом амплитуда первого скачка первого осциллятора составляет несколько десятков нормированных единиц. После скачка амплитуда постепенно растет, достигая нескольких тысяч таких единиц. Именно по этой причине этот режим и назван «высокоамплитудным».

Потенциал имеет глубокий минимум в значительном удалении от нуля (рисунок 5.24в). Имеется ещё небольшой минимум вблизи нуля (в области перегиба), но он настолько мал, что на рисунке не заметен и серьезного влияния на колебания не оказывает. Колебания происходят в весьма глубокой потенциальной яме далеко от нуля. Именно удаление основного минимума потенциала от нуля обуславливает значительную амплитуду установившихся колебаний в этом режиме. Динамический характер потенциала здесь проявляется в механизме самовоздействия осцилляторов друг на друга при наличии положительной обратной связи первого осциллятора самого на себя через посредство второго. Как уже отмечалось, колебания второго осциллятора с высокой точностью повторяют колебания первого осциллятора только лишь со значительно меньшей амплитудой. Процесс роста и установления амплитуды происходит с сильной примесью хаотических колебаний (до 20 % от средней величины). В установившемся режиме колебания имеют автомодуляционный пилообразный характер, близкий к периодическому. Время установления более или менее стабильного режима составляет около 80 ед., что значительно превышает время релаксации второго осциллятора, которое составляет 22 ед.

### 5.7.3 Малоамплитудный режим сильной связи

Рассмотрим теперь пример режима, относящийся ко второй группе малоамплитудных режимов и имеющий место при сильной связи. Сильная связь здесь соответствует значению константы линейной связи  $\gamma$  более 200 н.е. и абсолютному значению константы нелинейной связи  $\eta$  между 200 и 1000 н.е. Этот режим образно можно назвать «перенапряженным», поскольку большие значения коэффициентов связи в совокупности приводят к падению амплитуды колебаний обоих осцилляторов. Отличительной чертой данного режима является установление колебаний того и другого осцилляторов вокруг новых положений равновесий. Развитие колебаний в таком режиме показано на рисунке 5.25.

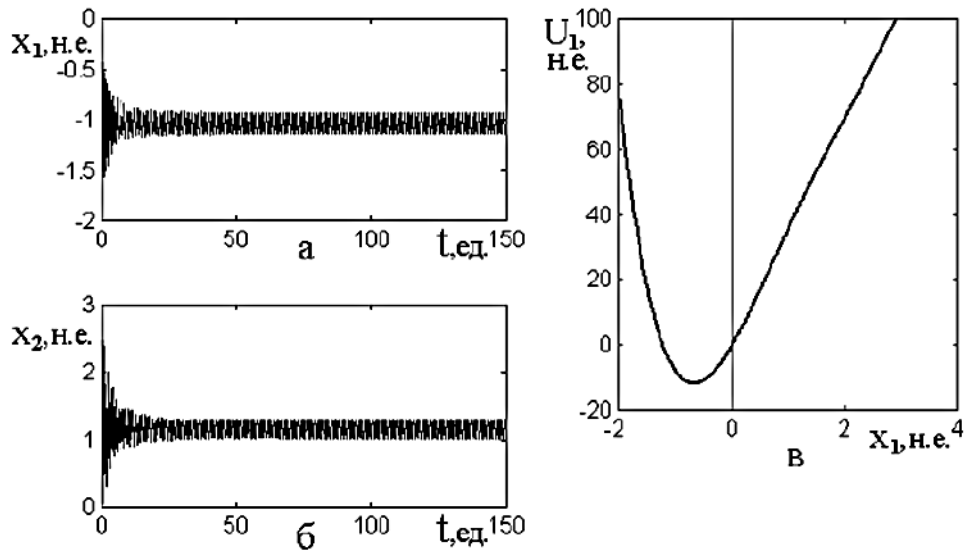


Рисунок 5.25. Малоамплитудный режим сильной связи.

Параметры связи:  $\gamma = 250$  н. е.,  $\eta = -200$  н. е.

Амплитуды колебаний в установившемся состоянии:  $x_1 = 1.0$  н. е.,  $x_2 = 0.12$  н. е.

Отношение амплитуд:  $x_1/x_2 = 8$ .

Из рисунка можно видеть, что внешне характер колебаний осцилляторов совпадает, однако равновесные положения, вокруг которых происходят колебания после установления, различны. В обоих случаях колебания начинаются сразу после включения возбуждения и имеют заметную амплитуду (до нескольких единиц), однако такие колебания быстро затухают, и им на смену приходят установившиеся регулярные колебания с малой амплитудой, происходящие вокруг нового положения равновесия. Время затухания первичных колебаний составляет порядка 10 ед., что приходится между временами релаксации осцилляторов. Амплитуда установившихся колебаний имеет значение порядка 0.1 н.е., а смещение равновесного положения – до 1–2 н.е. При этом знаки смещения для осцилляторов различны.

Потенциал имеет минимум в небольшом удалении от нуля, причем величина этого удаления как раз соответствует новому установившемуся положению равновесия (рисунок 5.25в). Следует заметить, что полный потенциал также имеет второй более глубокий минимум (на рисунке 5.25в не показан), но он отделен от минимума вблизи нуля довольно высоким потенциальным барьером, который является препятствием для развития высокоамплитудных колебаний.

## 5.8 Характеристики колебаний при малом и среднем уровнях связи осцилляторов

В предыдущих разделах было проведено исследование развития колебаний осцилляторов в сравнительно небольшом интервале времени, который можно считать начальным после первичного запаздывания колебаний. Этот интервал составляет порядка 30–50 ед. времени. При наблюдении колебаний в этих пределах времени изменение переменной  $x_2$ , выступающей в качестве параметра в выражении для потенциала (5.5), не учитывалось, и ее значение в большинстве случаев полагалось равным 4 н.е. Однако более подробное исследование показывает, что переменная  $x_2$  с течением времени меняется как переменная  $x_1$ , имея лишь меньшую амплитуду (примерно на два порядка). Такое изменение  $x_2$  приводит к значительному изменению характера колебаний на больших промежутках времени. Этот характер различен в зависимости от величины параметров линейной связи.

Первичное запаздывание развития колебаний наиболее ярко проявляется при сравнительно невысоком уровне линейной связи. Слабость связи обеспечивает достаточно медленное развитие колебаний во времени, что позволяет проследить тонкие детали их развития. Поэтому более подробно рассмотрим именно этот случай. Типичная картина развития таких колебаний приведена на рисунке 5.26, где при параметре линейной связи  $\gamma = 10$  н. е. и параметре нелинейной связи  $\eta = -200$  н. е. показан интервал времени от нуля до 150 ед.

Из рисунка можно видеть, что развитие колебаний последовательно проходят следующие стадии:

- запаздывание развития колебаний, малая амплитуда, нерегулярные колебания типа биений;
- резкий скачок амплитуды после запаздывания;
- плавное увеличение амплитуды, амплитуда меняется хаотично в пределах 10–20 % от средней величины;
- резкое увеличение скорости роста амплитуды, колебания остаются частично хаотическими (хаотическая составляющая в пределах до 20 % от средней величины);

– установившиеся колебания с пилообразной модуляцией амплитуды, амплитуда зубцов пилы составляет 20–30 % от средней величины.

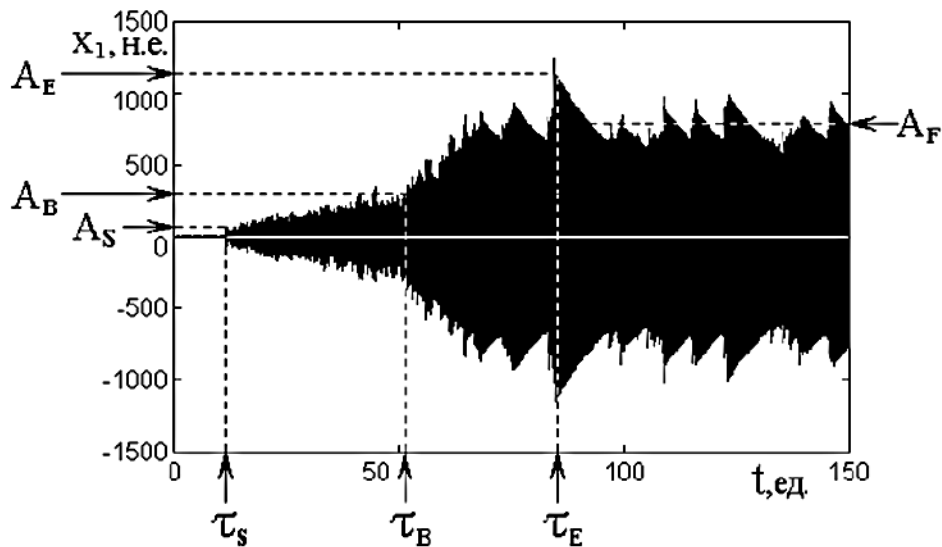


Рисунок 5.26. Развитие колебаний во времени и схема определения основных характеристик процесса при значении параметра линейной связи  $\gamma = 10$  н. е., кубической нелинейности  $\delta = 6$  н. е., нелинейной связи  $\eta = -200$  н. е. и амплитуде возбуждения  $A = 50$  н. е.

Исходя из этого, в качестве основных параметров, характеризующих развитие колебаний, можно выбрать:

$\tau_S$  – момент времени первого (основного) скачка, т. е. время запаздывания;

$A_S$  – амплитуда, достигаемая непосредственно в момент первого скачка;

$\tau_B$  – момент времени, при котором происходит резкое увеличение скорости роста амплитуды;

$A_B$  – амплитуда, в момент увеличения скорости роста амплитуды;

$\tau_E$  – момент времени начала пилообразных колебаний;

$A_E$  – амплитуда первого пилообразного колебания;

$A_F$  – средняя амплитуда установившихся пилообразных колебаний.

Из рисунка 5.26 можно заметить, что в интервалах времени от  $\tau_S$  до  $\tau_B$  и от  $\tau_B$  до конца рисунка средняя амплитуда колебаний на каждом из этих участков меняется по закону близкому к «единице минус экспонента в отрицательной степени». На этот закон накладываются колебания, приближенные к хаотическим. В установившемся режиме, т. е. когда размах колебаний насыщается, а это происходит при времени  $\tau_E$ , колебания приобретают пилообразный характер автомодуля-



ционного типа, близкий к периодическому. При этом период такой «пилы», составляющий около 10 ед. времени, по продолжительности находится между временами релаксации первого (2.2 ед. времени) и второго (22 ед. времени) осцилляторов.

Сравнивая рисунок 5.26 с рисунком 5.13, можно видеть, что в интервале времени до 30 н.е. колебания ведут себя преимущественно одинаковым образом. На рисунке 5.26 второй скачок амплитуды выражен слабее, но и на рисунке 5.13 он является достаточно малым по сравнению с первым. Остальные незначительные отличия можно отнести к различию масштабов и погрешностям машинного расчета при нестационарном развитии колебаний с заметной хаотической составляющей.

Теперь рассмотрим зависимость временных и амплитудных характеристик процесса развития колебаний от величины параметра нелинейной связи. Как было показано ранее, для реализации нестационарного запаздывания параметр нелинейной связи должен быть отрицательным. Ограничимся далее именно этим случаем, а все характеристики будем строить в виде зависимости от абсолютной величины этого параметра  $|\eta|$ . Начнем рассмотрение со случая слабой линейной связи  $\gamma = 10$  н.е., поскольку именно при этом влияние изменения  $\eta$  проявляется наиболее отчетливо. Все остальные параметры положим такими же, как и ранее.

На рисунке 5.27 приведены зависимости временных параметров процесса развития колебаний  $\tau_S$ ,  $\tau_B$  и  $\tau_E$  от абсолютного значения параметра нелинейной связи  $|\eta|$ .

На рисунке точки соответствуют параметрам, измеренным с шагом по  $|\eta|$  в 10 н.е. В области значений  $|\eta|$  от 180 до 230 н.е., где наблюдаются резкие изменения временных параметров, шаг  $|\eta|$  уменьшен до 5 н.е. Тонкие сплошные кривые построены путем соединения последовательных точек отрезками прямых. Утолщенные пунктирные кривые 1, 2, 3, приближенно аппроксимирующие точки, построены по следующим эмпирическим формулам:

$$\text{кривая 1: } \tau_S = \frac{800}{|\eta| - 100} + 2; \quad (5.34)$$

$$\text{кривая 2: } \tau_B = \frac{6500}{|\eta| - 100} - 5; \quad (5.35)$$

$$\text{кривая 3: } \tau_E = \frac{800}{|\eta| - 100} + 7. \quad (5.36)$$

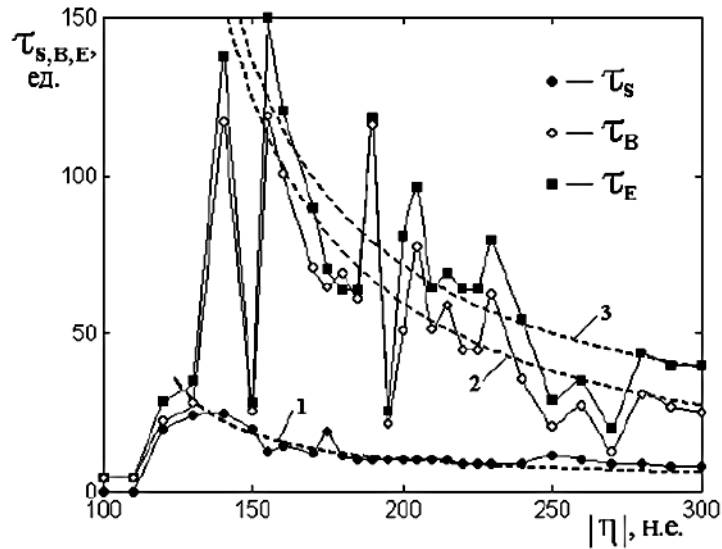


Рисунок 5.27. Зависимость временных параметров процесса развития колебаний от абсолютного значения параметра нелинейной связи.

Из рисунка 5.27 можно видеть, что все зависимости в среднем с разной степенью приближения соответствуют функциям обратной пропорциональности. Такая зависимость наблюдается после превышения  $|\eta|$  критического значения около 120–130 н.е. При этом время запаздывания  $\tau_S$  составляет около 20–30 ед., а времена  $\tau_B$  и  $\tau_E$  отличаются от этого значения незначительно – до 20 %. Обратная пропорциональная зависимость характерных времен аналогична подобным зависимостям параметров  $\tau_S$ ,  $\tau_C$  и  $\tau_D$ , рассматриваемым в разделах 5.6.1 и 5.6.2 (рисунки 5.14а и 5.18). Можно полагать, что такой характер временных зависимостей просто отражает факт усиления связи между осцилляторами, не учитывая тип этой связи.

С ростом  $|\eta|$  время  $\tau_S$  более или менее монотонно убывает в соответствии с законом (5.34), тогда как времена  $\tau_B$  и  $\tau_E$  при переходе  $|\eta|$  через критическое значение резко увеличиваются до значений порядка 120–140 ед. После этого они в среднем постепенно спадают в несколько раз, следуя выражениям (5.35) и (5.36). Однако при этом точки времен  $\tau_B$  и  $\tau_E$  (кривые 2 и 3) имеют сильный разброс.

Примечательным является тот факт, что разброс точек зависимости  $\tau_S$ , т. е. собственно запаздывания (кривая 1), составляет не более 20–30 %, что по величине согласуется с зависимостями на рисунках 5.14а и 5.18, но для  $\tau_B$  и  $\tau_E$  разброс достигает нескольких раз. Так, при  $|\eta| = 190$  н. е. эти времена достигают 120 ед, при  $|\eta| = 195$  н. е. падают до 40 ед, а при  $|\eta| = 205$  н. е. вновь возрастают до 70–80 ед. Более подробное исследование показывает, что зависимости  $\tau_B$  и  $\tau_E$ , как и ранее рассмотренные подобные зависимости, имеют фракталоподобный характер.

Обратимся теперь к амплитудным характеристикам развития колебаний, которые показаны на рисунке 5.28. Точки соответствуют амплитудам  $A_S$ ,  $A_B$ ,  $A_E$  и  $A_F$ , снятым в том же диапазоне изменения  $|\eta|$ , что и предыдущий случай. Тонкие сплошные кривые также соединяют точки отрезками прямых линий. Аппроксимирующие зависимости здесь представляют собой прямые линии параллельные горизонтальной оси, показанные утолщенным пунктиром. Эти прямые соответствуют следующим уровням амплитуды:

$$\text{линия 1: } A_S = 30 \text{ н. е.;} \quad (5.37)$$

$$\text{линия 2: } A_B = 350 \text{ н. е.;} \quad (5.38)$$

$$\text{линия 3: } A_E = 910 \text{ н. е.;} \quad (5.39)$$

$$\text{линия 4: } A_F = 730 \text{ н. е.} \quad (5.40)$$

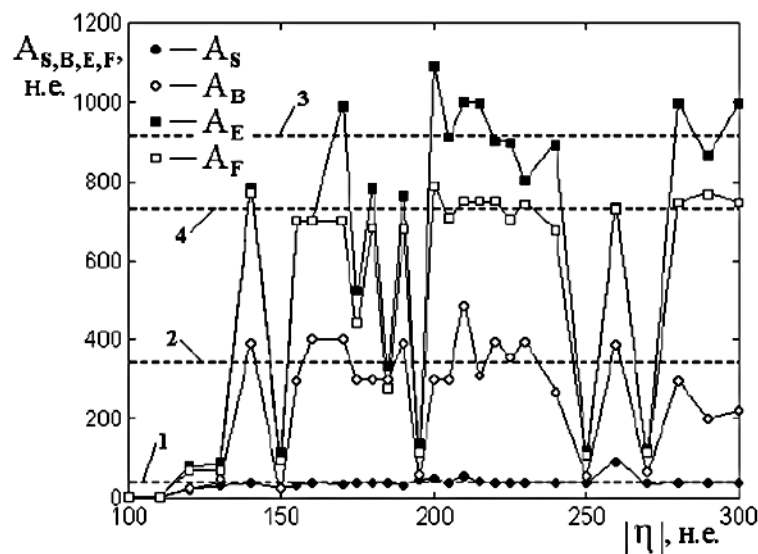


Рисунок 5.28. Зависимости амплитудных параметров процесса развития колебаний от абсолютной величины параметра нелинейной связи.

Из рисунка можно видеть, что все зависимости в своём среднем значении с той или иной степенью приближения соответствуют аппроксимирующим приближениям (5.37)–(5.40). Это означает, что характерные амплитуды не зависят от параметра нелинейной связи  $|\eta|$ . Такое отсутствие зависимости так же начинается с критического значения  $|\eta| = 130$  н.е. При значении  $|\eta|$  меньше критического все амплитуды являются малыми (порядка 20–100 н.е.), и их значения накладываются друг на друга. При достижении критического значения  $|\eta|$  происходит резкий рост амплитуд:  $A_B$  до 400 н.е.,  $A_E$  и  $A_F$  до 800 н.е. Однако, амплитуда первичного скачка  $A_S$  сохраняет своё достаточно малое значение (около 30 н.е.). Дальнейшее повышение  $|\eta|$  амплитуду  $A_S$  не меняет, в то время как  $A_B$ ,  $A_E$  и  $A_F$  по величине резко разделяются и испытывают ряд скачков, группируясь вокруг стационарных значений (5.37)–(5.40).

Следует отметить, что, несмотря на постоянство средних значений  $A_B$ ,  $A_E$  и  $A_F$  (кривые 2–4), их зависимости от  $|\eta|$  носят скачкообразный характер. Так, при  $|\eta|$  равном примерно 150, 190, 250, 270 н.е. эти зависимости имеют резкие провалы вниз до величины около 100 н.е., т. е. меняются почти на порядок. Из сравнения с рисунком 5.27 можно видеть, что такие перепады приходятся как раз на аналогичные скачки зависимостей характерных времен. Таким образом, обе характеристики колебаний – амплитуда и время изменения характера колебаний – отражают одни и те же внутренние процессы в системе связанных осцилляторов. Более подробное исследование показывает, что зависимости амплитуд  $A_B$ ,  $A_E$ ,  $A_F$  от параметра  $|\eta|$ , как и подобные зависимости характерных времен развития колебаний  $\tau_B$  и  $\tau_E$ , имеют фракталоподобный характер.

Рассмотрим теперь интерпретацию описанных явлений на основе модели динамического потенциала. Как уже отмечалось, в формировании уровня амплитуды колебаний первого осциллятора второй осциллятор играет значимую роль. Для демонстрации этой роли обратимся к системе (5.1)–(5.2), которую приведем здесь для наглядности:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta \cdot x_1^3 + \eta \cdot x_1^2 x_2 = A \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (5.42)$$

Как видно из уравнения (5.42), первый осциллятор через переменную  $x_1$  обеспечивает возбуждение второго осциллятора посредством слагаемого линейной связи  $\gamma_2 x_1$ . При этом второй осциллятор отдает часть энергии своих колебаний первому осциллятору через слагаемое линейной связи  $\gamma_1 x_2$  в уравнении (5.41). Кроме этого второй осциллятор оказывает воздействие на первый за счёт нелинейной связи вида  $\eta \cdot x_1^2 x_2$ , где эффективность воздействия пропорциональна квадрату переменной первого осциллятора. То есть воздействие второго осциллятора на первый тем больше, чем больше амплитуда колебаний первого осциллятора, причем из-за квадратичности это воздействие увеличивается.

Таким образом, благодаря нелинейной связи первый осциллятор через посредство второго воздействует сам на себя, подобно цепи положительной обратной связи, приводящей к лавинообразному процессу нарастания колебаний. В общем случае такое самовоздействие может привести к неограниченному росту амплитуды колебаний, т. е. уходу системы на бесконечность. Но, как было показано ранее, в ограничении амплитуды колебаний решающую роль играет кубическая нелинейность вида  $\delta \cdot x_1^3$ , не допускающая такой уход при надлежащей величине параметра  $\delta$ . Тем не менее, можно ожидать, что механизм самовоздействия первого осциллятора, реализуемый в виде положительной обратной связи, через достаточный промежуток времени приведет к значительной величине установившейся амплитуды первого осциллятора. Значительную роль здесь будет играть и амплитуда колебаний второго осциллятора, т.к. слагаемое нелинейной связи  $\eta \cdot x_1^2 x_2$  содержит эту амплитуду в виде коэффициента.

Таким образом, в формировании динамического потенциала для уравнения (5.41) следует учитывать рост амплитуды колебаний второго осциллятора по мере увеличения амплитуды колебаний первого.

Рассмотрим роль амплитуды второго осциллятора в формировании высокоамплитудных режимов колебаний. Для этого обратимся к рисунку 5.29, где пока-

заны зависимости амплитуд установившихся колебаний первого  $A_{F1}$  и второго  $A_{F2}$  осцилляторов (а) и их отношения  $A_{F1}/A_{F2}$  (б) от параметра линейной связи  $\gamma$ .

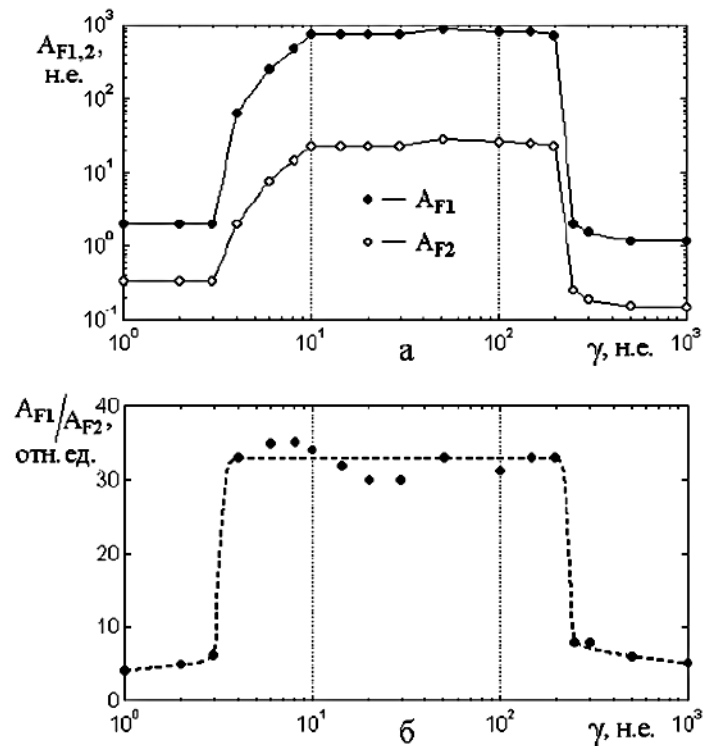


Рисунок 5.29. Зависимость амплитуд установившихся колебаний первого и второго осцилляторов (а) и их отношения (б) от параметра линейной связи.

Параметр нелинейной связи положен равным  $\eta = -200$  н.е., и от его изменения в пределах от 100 до 800 н.е. характер картины не меняется.

Из рисунка 5.29 можно видеть, что при параметре связи меньше 4 н.е. имеет место режим малой амплитуды:  $A_{F1}$  составляет порядка 2 н.е., отношение амплитуд —  $x_1/x_2 = 6 \pm 2$  отн. ед. При изменении параметра линейной связи  $\gamma$  от 4 до 200 н.е., т. е. в высокоамплитудных режимах (двухступенчатое запаздывание, плавное насыщение),  $A_{F1}$  составляет от 60 до 1000 н.е., а отношение амплитуд —  $x_1/x_2 = 33 \pm 2$  отн. ед. При параметре связи больше 200 н.е. снова наступает малоамплитудный режим (перемежающиеся скачки), и  $A_{F1}$  составляет от 0.5 до 2 н.е., а отношение амплитуд —  $x_1/x_2 = 1.0 \pm 0.2$  отн. ед.

Следует отметить, что во всем интервале существования высокоамплитудных режимов, отношение амплитуд колебаний осцилляторов имеет значение в районе 33 отн. ед. и практически не меняется. То есть при амплитуде первого ос-

циллятора порядка 800–1000 н.е., что согласно рисунку (5.28), имеет место в интервале изменения  $|\eta|$  от 140 до 300 н.е., амплитуда колебаний второго осциллятора составляет порядка 30 н.е. Можно полагать, что именно такая величина является основой для формирования динамического потенциала в случае высокоамплитудных режимов.

Рассмотрим, как в этих случаях ведёт себя динамический потенциал. Для этого обратимся к рисунку 5.30. На этом рисунке показаны зависимости потенциала (5.5):

$$U = \frac{\omega_1^2}{2} \cdot x_1^2 + \gamma_1 \cdot x_1 x_2 + \frac{\delta}{4} \cdot x_1^4 + \frac{\eta}{3} \cdot x_1^3 x_2 \quad (5.43)$$

от величины  $x_1$  при различных значениях  $x_2$  в качестве параметра.

Из рисунка можно видеть, что по мере увеличения  $x_2$  минимум потенциала смещается в сторону больших значений  $x_1$ , что и обеспечивает высокий уровень амплитуды в соответствующих режимах.

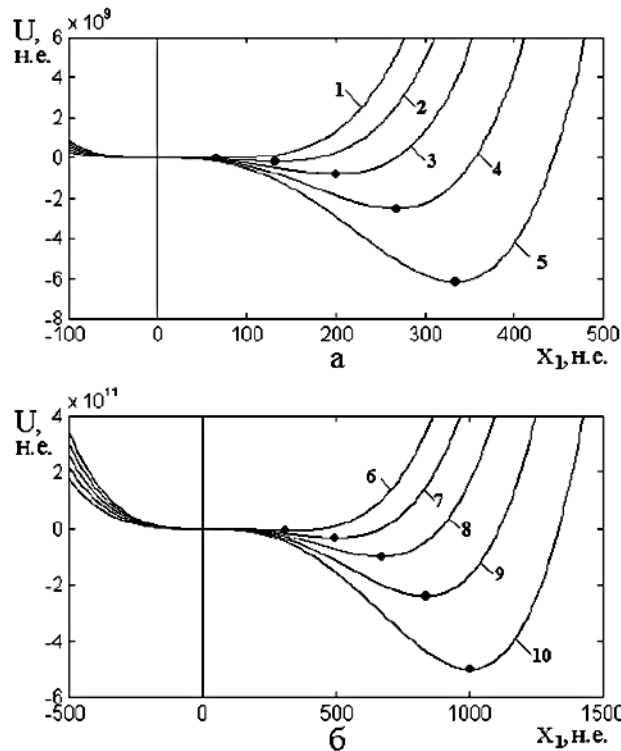


Рисунок 5.30. Потенциал при разных амплитудах второго осциллятора. Для наглядности рисунок разбит на две части, отличающиеся масштабом по обеим осям.

Кривые построены по формуле (5.43), где  $x_2$  равняется:

а – 1 – 2 н.е.; 2 – 4 н.е.; 3 – 6 н.е.; 4 – 8 н.е.; 5 – 10 н.е.;

б – 6 – 10 н.е.; 7 – 15 н.е.; 8 – 20 н.е.; 9 – 25 н.е.; 10 – 30 н.е.

Точки соответствуют минимумам кривых.

На рисунке 5.31 приведена зависимость переменной  $x_1$  от переменной  $x_2$  в точках, соответствующих минимумам потенциала на рисунке 5.30.

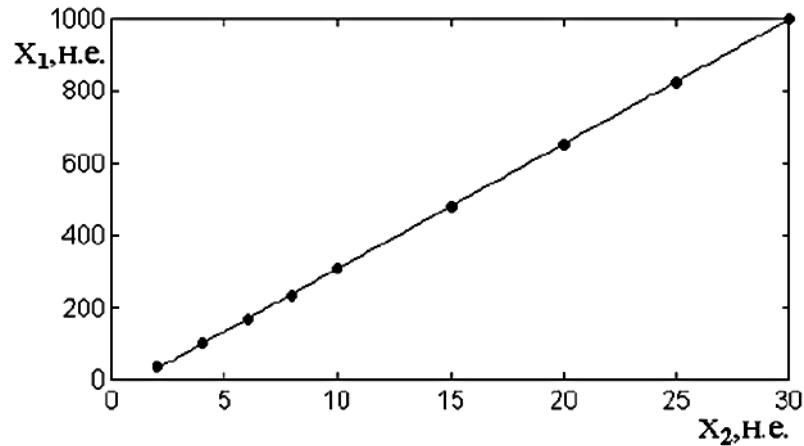


Рисунок 5.31. Зависимость переменной  $x_1$  от  $x_2$  в точках, соответствующих минимумам на рисунке 5.30.

Как видно, с высокой степенью точности точки на рисунке 5.31 ложатся на прямую, которую можно представить линейной зависимостью вида:

$$x_1 = k \cdot x_2, \quad (5.44)$$

где  $k = 33.3$ . Положения минимумов соответствуют равенству нулю производной потенциала (5.43), т. е. решению относительно  $x_1$  кубического уравнения:

$$\delta \cdot x_1^3 + \eta x_2 \cdot x_1^2 + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 x_2 = 0. \quad (5.45)$$

Это уравнение содержит  $x_2$  в качестве параметра. При этом оно в общем случае описывает кубическую параболу, но при принятых в настоящей задаче значениях параметров первые два слагаемых на несколько порядков превышают остальные, поэтому уравнение в первом приближении принимает вид:

$$\delta \cdot x_1^3 + \eta x_2 \cdot x_1^2 = 0, \quad (5.46)$$

что и приводит к линейной зависимости  $x_1$  от  $x_2$  вида:

$$x_1 = -\frac{\eta}{\delta} \cdot x_2, \quad (5.47)$$

которая при  $\eta = -200$  н. е. и  $\delta = 6$  н. е. соответствует (5.44).

Рассмотрим теперь особенности колебаний системы при средней степени связи  $\gamma = 50$  н. е., где переход к установившемуся режиму происходит за более короткий промежуток времени, чем в предыдущем случае.



Прежде всего надо отметить, что для реализации рассматриваемых далее высокоамплитудных режимов необходимо превышение первого критического значения параметра нелинейной связи  $|\eta_{c1}| = 11$  н.е. При значениях  $|\eta|$  ниже этой величины запаздывание отсутствует, и амплитуда держится постоянной на уровне 2–3 н.е., т. е. режим остается малоамплитудным.

На рисунке 5.32 представлены наиболее характерные варианты развития таких колебаний при различных уровнях параметра нелинейной связи  $|\eta|$ .

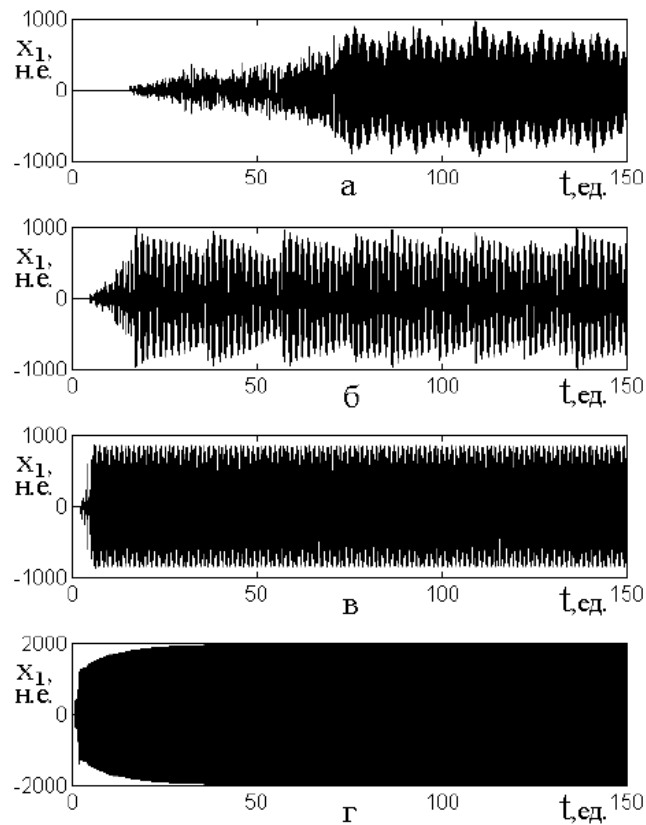


Рисунок 5.32. Развитие колебаний при средней степени линейной связи  $\gamma = 50$  н.е. и различных значениях параметра нелинейной связи  $|\eta|$ :  
а – 36 н.е., б – 110 н.е., в – 300 н.е., г – 1200 н.е.

Как видно из этого рисунка, во всех случаях имеет место начальное запаздывание развития колебаний, уменьшающееся с ростом  $|\eta|$ . Так, на рисунке 5.32а время запаздывания равно 17 ед., на рисунке 5.32б – 7 ед., на рисунке 5.32в – 3 ед., а на рисунке 5.32г – около 1 ед. времени. В первых трёх случаях установившаяся амплитуда имеет примерно равную величину – около 700–900 н.е., что говорит о едином значении главного минимума динамического потенциала, т. е. о некотором единстве первых трех процессов. Но при этом характер самих колеба-

ний во всех случаях заметно различается, что позволяет выделить три разных режима.

Первый из показанных на рисунке 5.32 режимов – режим (а) – подобен обсуждаемому ранее режиму двухступенчатого запаздывания. Он имеет место при изменении  $|\eta|$  от 11 до 40 н.е., т. е. ограничен двумя критическими значениями параметра  $\eta$ : снизу  $|\eta_{c1}| = 11$  н.е. и сверху  $|\eta_{c2}| = 40$  н.е. Отличительной особенностью данного режима является сильно выраженный хаотический характер изменения амплитуды. После установления амплитуды при времени около 75 ед., колебания приобретают более упорядоченный характер, имеющий следы двухпериодичности. Однако, элемент хаотичности сохраняется.

Второй режим (рисунок 5.32б) тоже близок к двухступенчатому запаздыванию, но здесь скорее следует говорить не о двух, а о трёх скачках амплитуды: при 7, 11 и 17 ед. времени. В установившемся состоянии (после 17 ед. времени) наблюдаются отчетливо выраженные пилообразные, близкие к периодическим, колебания амплитуды. Этот режим возникает при изменении  $|\eta|$  от 40 до 140 н.е., т. е. ограничен двумя критическими значениями параметра  $\eta$ : снизу  $|\eta_{c2}| = 40$  н.е. и сверху  $|\eta_{c3}| = 140$  н.е. Период «пилы» составляет около 20–25 ед. и во времени несколько варьируется. Высота «зубьев» достигает 20–30 % от средней величины. Хаотическая составляющая присутствует, но выражена слабо и проявляется только до третьего скачка амплитуды (до времени 17 ед.).

Третий режим (рисунок 5.32в) тоже в какой-то мере можно отнести к двухступенчатому запаздыванию, но здесь промежуток времени между первым и вторым скачками крайне мал – от 3 до 5 ед. времени, после чего колебания приходят к полностью регулярному виду с постоянной амплитудой без какой-либо примеси хаотической составляющей. Образно этот режим можно назвать режимом «регулярного установления». Он ограничен двумя критическими значениями параметра  $\eta$ : снизу  $|\eta_{c3}| = 140$  н.е. и сверху  $|\eta_{c4}| = 400$  н.е. При значениях этого параметра выше  $|\eta_{c4}|$  система уходит на бесконечность. Причем увеличение значения параметра кубической нелинейности  $\delta$  выше принятой величины 6 н.е. вплоть до 100 н.е. уход системы на бесконечность не предотвращает. Следует отметить, что

при  $\delta = 6$  н. е. значение  $|\eta_{c4}| = 400$  н. е. не является строго фиксированным. Так, при  $|\eta| = 405$  н. е. колебания снова возобновляются, но при  $|\eta| = 410$  н. е. система вновь уходит на бесконечность. Такие скачкообразные вариации зависимости амплитуды от  $|\eta|$  продолжаются вплоть до нового критического значения  $|\eta_{c5}| = 935$  н. е., после которого срывы системы на бесконечность прекращаются, и колебания принимают четкий регулярный характер (рисунок 5.32г). Этот режим уже не является «родственным» по отношению к первым трем. Установившаяся амплитуда регулярных колебаний по мере увеличения  $|\eta|$  от значения 700–900 н. е. начинает расти и, как видно из рисунка 5.32г, при  $|\eta| = 1200$  н. е. составляет 2000 н. е. Далее такая динамика сохраняется. Таким образом, главный минимум потенциала приходит в движение и начинает смещаться в область высоких значений  $x_1$ .

Также из рисунка 5.32г можно видеть, что после первого скачка до значения амплитуды примерно 1000 н. е., имеющего место при времени порядка 2–3 ед., амплитуда устанавливается не сразу, как на рисунке 5.32в, а медленно растет по закону типа «единица минус экспонента в отрицательной степени». При времени порядка 30 ед. амплитуда устанавливается на уровне 1000 н. е. и далее не меняется. Таким образом, данный режим по своим свойствам соответствует режиму плавного насыщения. Он сохраняется до следующего критического значения  $|\eta_{c6}| = 4000$  н. е., выше которого система стабильно уходит на бесконечность.

Перейдем теперь к рассмотрению динамических характеристик колебаний при средней степени линейной связи. Из рисунка 5.32 видно, что наибольшее разнообразие режимов имеет место при сравнительно небольших значениях параметра нелинейной связи, поэтому при изменении  $|\eta|$  ограничимся сверху значением 400 н. е. и рассмотрим временные и амплитудные характеристики возбуждаемых колебаний более подробно.

Сначала рассмотрим время первичного запаздывания  $\tau_S$  и время последнего резкого скачка амплитуды колебаний  $\tau_E$ , после которого характер колебаний принимает более или менее установившийся вид. Обратимся к рисунку 5.33, где показаны зависимости  $\tau_S$  и  $\tau_E$  от  $|\eta|$ .

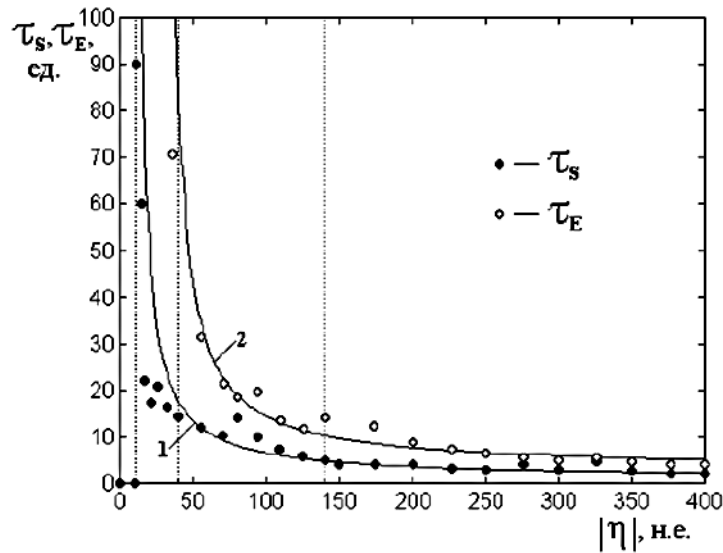


Рисунок 5.33. Зависимости временных параметров развития колебаний от абсолютной величины параметра нелинейной связи. Параметр линейной связи  $\gamma = 50$  н. е. Вертикальные точечные линии соответствуют границам между режимами.

Приведенные на рисунке аппроксимирующие линии 1 и 2 построены по эмпирическим формулам:

$$\text{кривая 1: } \tau_S = \frac{500}{|\eta| - 10} + 1; \quad (5.48)$$

$$\text{кривая 2: } \tau_E = \frac{800}{|\eta| - 30} + 3. \quad (5.49)$$

Из рисунка 5.33 видно, что обе зависимости, подобно таковым на рисунке 5.27 (кривые 1 и 3), аппроксимируются зависимостями типа обратной пропорциональности. Однако здесь область больших запаздываний (порядка 100 н.е.) начинается при  $|\eta| = 11$  н.е., т. е. при  $|\eta_{c1}|$ , тогда как на рисунке 5.27 – при  $|\eta| = 130$  н.е. Характерные времена здесь тоже несколько меньше: время запаздывания  $\tau_S$  не более чем в 2–3 раза, а время установления стационарной амплитуды  $\tau_E$  на порядок. Следует отметить, что здесь скачкообразный характер приведенных зависимостей, особенно  $\tau_E$ , по сравнению с рисунком 5.27 значительно сглажен.

Обратимся теперь к рисунку 5.34, где показана зависимость установившейся амплитуды колебаний  $A_F$  от значений  $|\eta|$  при тех же условиях.

Аппроксимирующая кривая на рисунке 5.34 построена по формуле:

$$A_F = 1000 \cdot \left\{ 1 - \frac{\exp[-(|\eta| - 10)]}{50} \right\}. \quad (5.50)$$

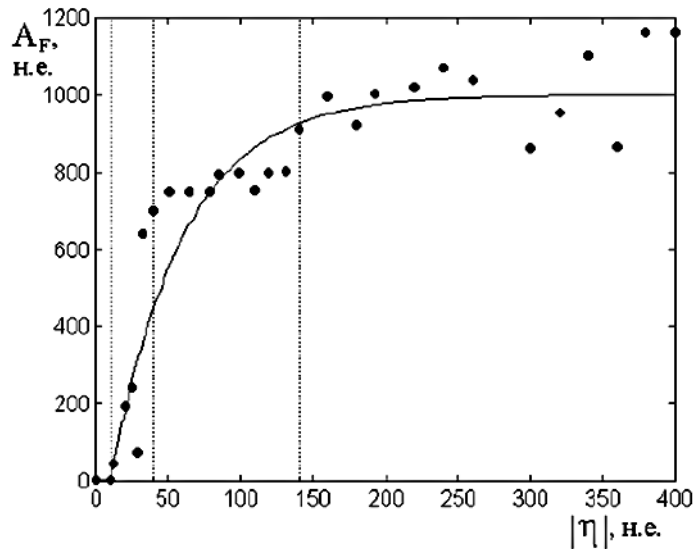


Рисунок 5.34. Зависимость амплитуды установившихся колебаний первого осциллятора от абсолютной величины параметра нелинейной связи. Параметр линейной связи  $\gamma = 50$  н. е. Вертикальные точечные линии соответствуют границам между режимами

Из этого рисунка можно видеть, что рассматриваемая зависимость в среднем аппроксимируется кривой типа «единица минус экспонента с отрицательным показателем». Такое поведение заметно отличается от поведения кривых на рисунке 5.28, где в среднем какая-либо зависимость отсутствует. Скачкообразные отклонения от аппроксимирующей кривой здесь выражены значительно слабее. На рисунке 5.28 отдельные выбросы точек относительно кривой 4 в области  $|\eta|$  от 150 до 200 н.е. достигают 4–5 раз, тогда как здесь отклонения точек от аппроксимирующей кривой не превышают 20 %.

Контрольная проверка конфигурации динамического потенциала показывает, что здесь, как и в случае слабой связи, амплитуда колебаний соответствует главному минимуму потенциала с учетом амплитуды колебаний второго осциллятора. Однако здесь, в отличие от предыдущего случая, где во всем интервале существования высокоамплитудных режимов отношение амплитуды первого осциллятора к амплитуде второго  $A_{F1}/A_{F2}$  сохранялось постоянным и равным 33 н.е. (рисунок 5.29б), подобное соотношение по мере изменения  $|\eta|$  меняется. Это соотношение во всем интервале изменения  $|\eta|$  возрастает примерно в 5–7 раз, но при этом всё же амплитуда установившихся колебаний соответствует главному минимуму потенциала с довольно высокой степенью точности.

### 5.9 Характеристики колебаний при высокой степени связи осцилляторов

Рассмотрим особенности колебаний системы при высокой степени линейной связи  $\gamma = 300$  н. е. Как было показано ранее, при такой степени связи, т. е. выше критической 214 н.е., высокоамплитудные колебания в обычных условиях не возбуждаются. Вместо них происходит установление нового равновесного положения, вокруг которого совершаются более или менее регулярные колебания малой амплитуды, т. е. имеет место режим малоамплитудной релаксации. Эти колебания малой амплитуды обусловлены наличием дополнительного локального минимума потенциала вблизи нулевого значения  $x_1$ , отделенного от главного минимума потенциальным барьером (рисунок 5.22б). Для возбуждения колебаний большой амплитуды следует выйти из локального минимума и перейти в область главного минимума потенциала, для чего необходимо преодолеть разделяющий эти минимумы потенциальный барьер. Как уже отмечалось, возможны два варианта преодоления этого барьера: установка достаточно большого начального смещения осциллятора, приходящегося на другую сторону барьера, или задание достаточно большой амплитуды возбуждения, способной сместить колебания за пределы локального минимума.

Рассмотрим вариант задания начального смещения. Из рисунка 5.22б можно видеть, что вершина разделяющего минимумы потенциального барьера приходится на значение  $x_1$  примерно равное 1.5 н.е. Более подробная проверка показывает, что имеется критическое значение начального смещения первого осциллятора  $x_{10c} = 2.5$  н. е. Ниже этого значения при амплитуде возбуждения  $A = 50$  н. е. наблюдается малоамплитудный режим перемежающихся скачков со смещением положения равновесия на величину порядка 2–4 н.е. При значениях смещения выше критического имеют место высокоамплитудные режимы без смещения центра. Эти режимы сменяют друг друга по мере увеличения параметра нелинейной связи при достижении этим параметром определенных критических значений. Типичные примеры высокоамплитудных режимов колебаний, возникающих при задании начального отклонения осциллятора, приведены на рисунке 5.35.

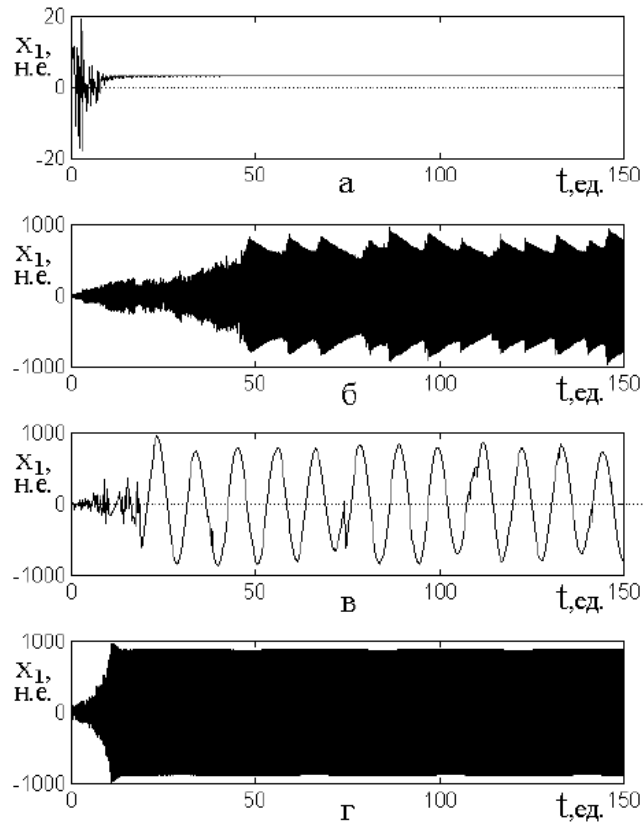


Рисунок 5.35. Развитие колебаний при высокой степени линейной связи  $\gamma = 300$  н. е. и начальном смещении  $x_{10} = 20$  н. е., соответствующих различным значениям параметров нелинейной связи  $|\eta|$ : а – 6 н.е., б – 10 н.е., в – 22 н.е., г – 30 н.е.

Из этого рисунка видно, что большинство режимов совпадает с уже рассматриваемыми ранее режимами. Так, рисунок 5.35а соответствует малоамплитудному режиму перемежающихся скачков с равновесным положением около 4 н.е., рисунок 5.35б – варианту режима двухступенчатого запаздывания с пилообразным развитием колебаний, рисунок 5.35г – другому варианту режима двухступенчатого запаздывания – регулярному установлению.

Исключением является режим, показанный на рисунке 5.35в, где колебания имеют вид высокоамплитудной синусоиды, не коррелирующей по фазе ни с колебаниями обоих осцилляторов, ни с сигналом возбуждения. Будем далее называть этот режим «асинхронной синусоидой». Период этой синусоиды значительно превышает периоды колебаний, как осцилляторов, так и возбуждения. Так, период собственных колебаний первого осциллятора (совпадающий с периодом возбуждения) равен 1.25 ед. времени, период второго – 0.417 ед. времени, тогда как

период наблюдаемой синусоиды меняется от 2 до 12 ед. времени. Период этой синусоиды увеличивается с ростом параметра нелинейной связи.

Можно предположить, что причиной значительной величины периода асинхронной синусоиды является почти плоский участок потенциала вблизи нуля, на котором рабочая точка вследствие малости его наклона движется медленно и затрачивает большее время на его преодоление.

Из приведенных на рисунке 5.35 численных значений параметра нелинейной связи  $|\eta|$  можно видеть, что наблюдаемое разнообразие режимов имеет место при сравнительно небольших величинах этого параметра. Так, для возбуждения колебаний с нулевым начальным отклонением требуется величина параметра нелинейности связи  $|\eta| = 200$  н. е. В данном случае, при наличии начального смещения, высокоамплитудные режимы реализуются уже при  $|\eta| = 30$  н. е. Увеличение параметра  $|\eta|$  выше 30 н.е. вплоть до 400 н.е. к изменению режима регулярного установления (рисунок 5.35г) не приводит. Еще большее увеличение этого параметра уводит систему на бесконечность.

Малые величины параметра нелинейной связи можно объяснить тем, что в реализации того или иного режима главным фактором является конкретная конфигурация динамического потенциала. В формировании такого потенциала одновременно участвуют оба вида связи осцилляторов: линейная и нелинейная. Можно предположить, что, чем выше линейная связь, тем меньшее значение нелинейной связи требуется для реализации того же вида потенциала, которым и определяется тот или иной режим.

Также важно отметить, что во всех рассмотренных здесь режимах отсутствует первичное запаздывание, на основании чего можно предположить, что необходимым условием первичного запаздывания является нулевое начальное отклонение.

Следует заметить, что в разделе 5.6.5 при описании рисунка 5.22 говорилось, что при начальном отклонении  $x_{10} = 3$  н. е. режим перемежающихся скачков сменяется режимом плавного насыщения, имеющим время запаздывания  $\tau_S = 0.5$  ед. времени. Это противоречит выдвинутому выше утверждению. Однако



можно полагать, что столь малое время запаздывания (меньшее периода колебаний первого осциллятора) находится в пределах ошибки измерения, особенно с учетом фракталоподобного характера зависимости  $\tau_S$  от параметров связи. Поэтому можно считать, что утверждение о необходимости для первичного запаздывания нулевого значения начального отклонения в первом приближении является вполне достоверным.

С ростом параметра нелинейной связи характер возбуждаемых режимов меняется пороговым образом при достижении этим параметром определенных критических значений, которые обозначим  $|\eta_{D1,2,3,4}|$ , где  $|\eta_{D1}| \leq |\eta_{D2}| \leq |\eta_{D3}| \leq |\eta_{D4}|$ . Так при  $0 \leq |\eta| \leq |\eta_{D1}|$  имеет место малоамплитудный режим перемежающихся скачков. Между  $|\eta_{D1}|$  и  $|\eta_{D2}|$  – высокоамплитудный режим пилообразной амплитуды. При  $|\eta_{D2}| \leq |\eta| \leq |\eta_{D3}|$  – высокоамплитудный режим асинхронной синусоиды. Выше  $|\eta_{D3}|$ , т. е. при  $|\eta_{D3}| \leq |\eta| \leq |\eta_{D4}|$  – высокоамплитудный режим регулярного установления, а ещё выше, т. е. при  $|\eta_{D4}| \leq |\eta| \rightarrow \infty$  система уходит на бесконечность.

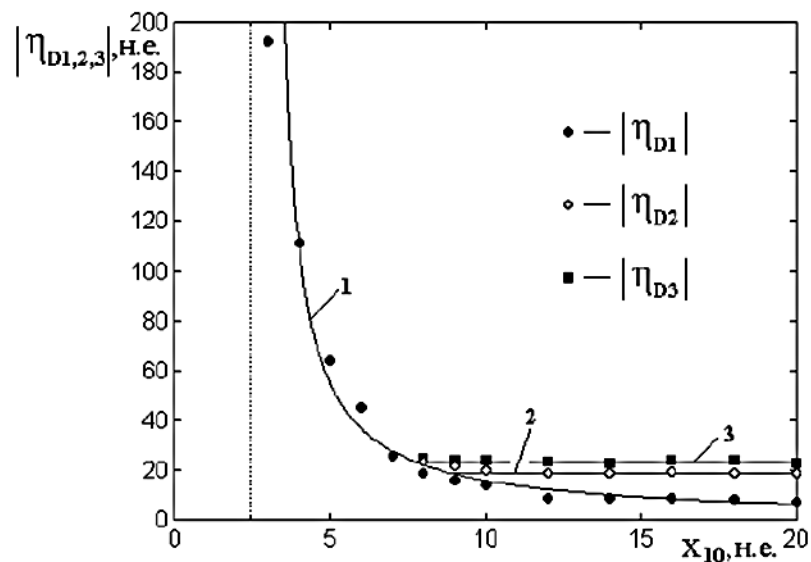


Рисунок 5.36. Зависимости критических значений параметра нелинейной связи от величины начального смещения первого осциллятора. Кривые соответствуют следующим критическим значениям: 1 –  $|\eta_{D1}|$ , 2 –  $|\eta_{D2}|$ , 3 –  $|\eta_{D3}|$ . Вертикальная точечная линия соответствует критическому начальному смещению первого осциллятора  $x_{10c} = 2.5$  н. е.

На рисунке 5.36 показаны зависимости критических значений параметра нелинейной связи от величины начального смещения первого осциллятора. Кри-

вые соответствуют следующим критическим значениям: 1 –  $|\eta_{D1}|$ , 2 –  $|\eta_{D2}|$ , 3 –  $|\eta_{D3}|$ . Приведенная на рисунке аппроксимирующая кривая 1 построена по формуле:

$$|\eta_{D1}| = \frac{110}{x_{10}-3}. \quad (5.51)$$

Аппроксимирующие кривые 2 и 3 являются прямыми линиями, параллельными горизонтальной оси, проведенными на уровнях: 2 – 18 н.е., 3 – 20 н.е.

Как видно на рисунке, основная аппроксимирующая кривая 1 довольно хорошо аппроксимируется зависимостью типа обратной пропорциональности. При этом ниже кривой 1, а также левее вертикальной точечной линии имеет место только малоамплитудный режим перемежающихся скачков. Выше аппроксимирующей кривой 1 имеют место высокоамплитудные режимы. Линии 2 и 3, определяющие верхние границы режимов асинхронной синусоиды и регулярного установления при  $x_{10} < 8$  н.е., полностью сливаются с кривой 1, так что в этой области остается только этот последний режим. Выше линии 3 также имеет место только режим регулярного установления, а при  $x_{10} > 8$  н.е. наблюдаются две узкие полосы существования режимов пилообразной амплитуды и асинхронной синусоиды.

Таким образом, из высокоамплитудных режимов преобладающим является режим регулярного установления, а остальные режимы существуют только в довольно узких областях изменения параметра нелинейной связи, расположенных вблизи нижнего его критического значения.

Теперь рассмотрим вариант формирования высокоамплитудных режимов за счет задания достаточно большой амплитуды возбуждения в отсутствие начального отклонения.

Исследование показывает, что высокоамплитудные режимы возникают только при превышении амплитудой возбуждения определенного критического значения  $A_{0c}$ , зависящего от величины параметра нелинейной связи  $|\eta|$ . На рисунке 5.37 показана зависимость критического значения амплитуды возбуждения от величины параметра нелинейной связи.

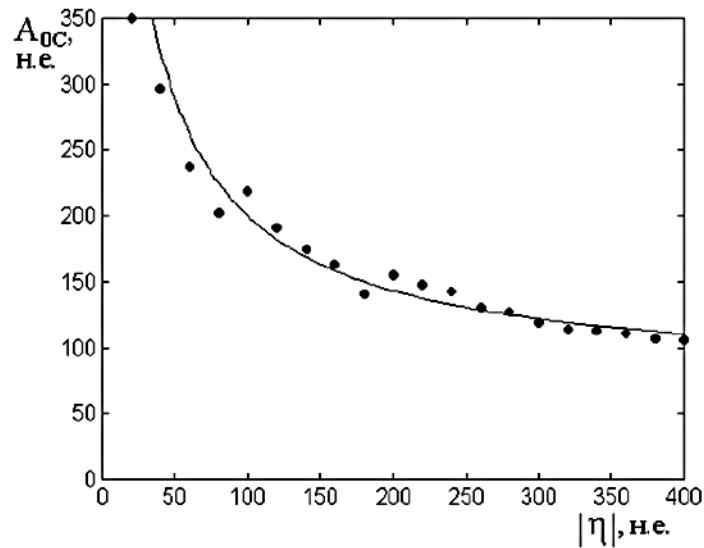


Рисунок 5.37. Зависимость критического значения амплитуды возбуждения от величины параметра нелинейной связи. Параметр линейной связи  $\gamma = 300$  н. е.

Приведенная на рисунке аппроксимирующая кривая построена по формуле:

$$A_{0c} = \frac{15000}{|\eta|+20} + 75. \quad (5.52)$$

Из рисунка 5.37 можно видеть, что аппроксимирующая кривая довольно хорошо аппроксимируется зависимостью типа обратной пропорциональности. Ниже этой кривой везде имеет место малоамплитудный режим перемежающихся скачков, а выше – высокоамплитудный режим типа регулярного установления. Нижняя граница  $|\eta|$  четко не выражена и находится около 12–15 н.е.

Важным моментом является тот факт, что при превышении амплитудой возбуждения критического значения режим регулярного установления всегда сопровождается значительным первичным запаздыванием развития колебаний. Время такого запаздывания  $\tau_S$  в зависимости от параметра нелинейной связи  $|\eta|$  меняется скачками в интервале от 10 до 110 ед. времени, проявляя фракталоподобный характер. Так, при  $|\eta| = 200$  н.е. время запаздывания колебаний  $\tau_S = 25$  ед., при  $|\eta| = 300$  н.е. это время составляет уже 110 ед., а при  $|\eta| = 400$  н.е. падает до 10 ед. времени. Такое поведение  $\tau_S$  сходно с наблюдаемым на рисунке 5.27 (кривая 1), однако проявляется здесь в значительно большей степени, подобно зависимостям  $\tau_B$  и  $\tau_E$  (кривые 2 и 3 на том же рисунке). Можно полагать, что

такое усиление фракталоподобного характера изменения  $\tau_5$  вызвано усложнением условий синхронизма колебаний при высоких уровнях возбуждения.

Таким образом, реализация высокоамплитудных режимов при нулевом начальном отклонении за счет увеличения амплитуды возбуждения, хотя и отличается их меньшим разнообразием, но все же приводит к значительным вариациям времени первичного запаздывания. Это обстоятельство может служить подтверждением сделанного выше вывода о том, что для реализации первичного запаздывания начальное отклонение должно отсутствовать.

### 5.10 Выводы по главе 5

Проведено исследование нелинейных вынужденных колебаний намагниченности и упругого смещения в нормально намагниченной ферритовой пластине при различных уровнях линейной и нелинейной связи. Рассмотрена роль нелинейности, обусловленная членами четвертого порядка, представляющими смешанную нелинейность первого и второго осцилляторов. Отмечена значительная роль нелинейного члена, содержащего произведение квадрата амплитуды колебаний магнитного осциллятора на первую степень амплитуды колебаний упругого осциллятора.

Для типичных параметров задачи о возбуждении гиперзвука СВЧ диапазона в пленке железоиттриевого граната выполнена численная оценка коэффициента нелинейного слагаемого.

На основе полученной в предыдущей главе системы уравнений для случая, когда резонансные частоты обоих осцилляторов различаются в кратном отношении, выполнено исследование развития вынужденных колебаний во времени. Показано, что в условиях умножения частоты второго осциллятора относительно частоты первого при определенных значениях параметров возбуждение колебаний происходит с нестационарным запаздыванием во времени. По окончании такого запаздывания происходит скачкообразный рост амплитуды колебаний на один-

два порядка и более, после чего амплитуда колебаний стремится к стационарному значению.

Выявлены необходимые условия реализации такого нестационарного запаздывания. Показано, что важнейшим условием является значительное различие времен релаксации осцилляторов. При этом время запаздывания приходится на интервал между временами релаксации обоих осцилляторов.

Отмечен пороговый характер реализации запаздывания по амплитуде возбуждения и критический характер по параметру кубической нелинейности первого осциллятора. Установлено, что принципиально важным моментом для реализации запаздывания является кратность частоты второго осциллятора относительно первого в небольшое число раз, в оптимальном случае – в три раза.

Для интерпретации эффекта запаздывания предложена гипотеза о наличии наряду с основным дополнительного минимума потенциала системы, который отделен от основного потенциальным барьером. На основе этой гипотезы построена модель динамического потенциала, отражающая характер колебаний первого осциллятора при условии использования амплитуды второго осциллятора в качестве параметра. В качестве главной причины появления минимума указано наличие нелинейной связи, пропорциональной произведению квадрата амплитуды колебаний первого осциллятора на первую степень амплитуды колебаний второго осциллятора. Показано, что предложенная модель позволяет описать как пороговый по различным параметрам характер реализации запаздывания, так и необходимую кратность частот осцилляторов.

В рамках предложенной модели подробно исследован характер запаздывания в широком интервале изменения амплитуды возбуждения. Выявлено критическое значение амплитуды, превышение которого является необходимым условием реализации запаздывания.

Исследована зависимость запаздывания и характера возбуждаемых колебаний от параметра кубической нелинейности первого осциллятора. Указана решающая роль этой кубической нелинейности в удержании амплитуды возбуждаемых колебаний на постоянном уровне. Выявлены нижний и верхний критические

уровни параметра кубической нелинейности, необходимые для реализации такого сдерживания. Отмечено, что за пределами верхнего критического уровня запаздывание пропадает, то есть происходит как бы его подавление. Наблюдаемые нижний и верхний критические уровни параметра кубической нелинейности интерпретированы на основе модели динамического потенциала с учетом четной степени потенциала кубической нелинейности.

Для интерпретации развития колебаний во времени предложена модель динамического потенциала, представляющая собой совокупность двух потенциалов, по одному для каждого осциллятора. Отмечена невзаимность такой двухпотенциальной модели, которая вызвана сочетанием в полной колебательной системе линейного и нелинейного осцилляторов.

Показана возможность сведения двухпотенциальной модели к однопотенциальной на основе представления потенциала второго осциллятора в качестве параметра для потенциала первого.

Рассмотрена качественная картина развития колебаний в двухпотенциальной системе. Отмечен динамический характер связи и требование соблюдения синхронизма колебаний двух осцилляторов. Показано, что сочетание механизма синхронизации с процессом релаксации первого осциллятора может приводить к запаздыванию возбуждения интенсивных колебаний относительно момента включения возбуждения.

Рассмотрен процесс развития колебаний во времени в случае симметричной линейной связи между осцилляторами. Выявлено четыре наиболее характерных режима, соответствующих различным уровням параметра линейной связи: двухступенчатое запаздывание; плавное насыщение; перемежающиеся скачки; малоамплитудная релаксация.

Отмечено, что в режиме двухступенчатого запаздывания развитие колебаний после первичной задержки происходит путем двух следующих друг за другом резких возрастаний амплитуды. Показано, что время запаздывания обоих скачков амплитуды с увеличением связи уменьшается по закону обратной пропорциональности. Как временные, так и амплитудные характеристики скачков по мере

изменения связи испытывают резкие колебания, в результате чего зависимости этих характеристик от величины связи приобретают фракталоподобный характер.

Отмечено, что в режиме плавного насыщения развитие колебаний после первичного двухступенчатого запаздывания происходит путем плавного увеличения амплитуды с выходом на стационарный уровень. Показано, что время такого выхода значительно превышает время второго скачка, причем также зависит от величины линейной связи по закону обратной пропорциональности.

Отмечено, что режим перемежающихся скачков характеризуется двумя свойствами: амплитуда перемежающихся скачков более чем на два порядка меньше амплитуды установившихся колебаний в режиме плавного насыщения, а после окончания скачков колебания с малой амплитудной происходят вокруг нового положения равновесия, заметно смещенного относительно начального. Интерпретация обоих этих свойств выполнена на основе модели динамического потенциала. Показано, что минимизация двухпотенциальной модели выявляет два равновесных положения, различающиеся резким порогом по величине параметра линейной связи.

Так, при величине связи ниже пороговой равновесие системы достигается в нуле переменной первого осциллятора, а при величине связи выше пороговой положение равновесия смещается от нуля в сторону отрицательного или положительного значения первой переменной. Малое значение амплитуды колебаний после окончания скачков объяснено появлением дополнительного минимума потенциала, имеющего место при достаточно высокой величине линейной связи. Такой минимум расположен около нуля первой переменной и отделен от больших ее значений потенциальным барьером, что и объясняет малую величину амплитуды колебаний в этом режиме.

Отмечено, что режим малоамплитудной релаксации имеет место только при высоких значениях параметров линейной связи и характеризуется быстрым затуханием колебаний обоих осцилляторов, после чего амплитуда колебаний устанавливается на крайне малом уровне вблизи нулевого положения.

Рассмотрены особенности развития колебаний при несимметричной величине линейной связи между осцилляторами. Показано, что такая несимметричность не приводит к формированию каких-либо новых режимов колебаний.

Исследованы различные режимы колебаний при изменении параметра нелинейной связи. Выполнена классификация наблюдаемых режимов по величине амплитуды возбуждаемых колебаний. Показано, что из всего многообразия наблюдаемых колебаний можно выделить две большие группы режимов – малоамплитудные и высокоамплитудные. Малоамплитудные режимы имеют место в двух случаях: при очень слабой степени линейной связи и при очень сильной. Высокоамплитудные режимы имеют место при промежуточной величине линейной связи. Малоамплитудные режимы слабой связи характеризуются отсутствием запаздывания и высокой стабильностью возбуждаемых колебаний. Малоамплитудные режимы сильной связи характеризуются сильной хаотической составляющей начальных колебаний, после чего их амплитуда резко падает, и далее колебания происходят с малой амплитудой вокруг смещенного положения равновесия. Высокоамплитудные режимы характеризуются значительным запаздыванием, сильной примесью хаотических колебаний в процессе установления и высокой стабильностью установившихся колебаний.

Исследовано развитие колебаний во времени в типичных высокоамплитудных режимах. Показано, что развитие колебаний последовательно проходит следующие стадии: первичное запаздывание, первичный скачок амплитуды, постепенный хаотический рост амплитуды, пилообразные колебания, регулярное установление. Выделены типичные временные и амплитудные параметры, характеризующие развитие колебаний. Показано, что характер колебаний при изменении параметра нелинейной связи существенным образом зависит от величины параметра линейной связи.

Рассмотрен случай низкой степени линейной связи. Показано, что по мере увеличения параметра нелинейной связи последовательно наступают следующие режимы: двухступенчатое запаздывание с сильной хаотической составляющей, пилообразные колебания амплитуды и регулярное установление. Показано, что



зависимости временных параметров процесса развития колебаний от абсолютной величины параметра нелинейной связи в среднем описываются функциями типа обратной пропорциональности.

Исследованы зависимости амплитудных параметров возбуждаемых колебаний от величины параметра нелинейной связи. Показано, что начиная с критической величины этого параметра, амплитуды возбуждаемых колебаний имеют в среднем постоянные значения и от величины параметра не зависят.

Рассмотренные зависимости интерпретированы на основе модели динамического потенциала. Показано, что по мере увеличения амплитуды колебаний первого осциллятора имеет место сильный рост амплитуды второго осциллятора. Выявлена решающая роль амплитуды второго осциллятора в формировании амплитуды первого осциллятора.

Отмечен эффект самовоздействия первого осциллятора на амплитуду собственных колебаний через посредство второго осциллятора. В качестве механизма воздействия предложена модель положительной обратной связи, приводящая к лавинообразному росту амплитуды колебаний. Показано, что ограничение такого роста происходит за счет кубической нелинейности системы, вызывающей нелинейную расстройку и выход системы из резонанса с частотой возбуждения. Показано, что существование положительной обратной связи ограничено сверху и снизу двумя критическими значениями параметра нелинейной связи, по обе стороны от которых реализуются малоамплитудные режимы. Рассмотрена конфигурация динамического потенциала в пределах реализации режима положительной обратной связи.

Рассмотрен случай средней степени линейной связи. Показано, что по мере увеличения параметра нелинейной связи последовательно наступают следующие режимы: двухступенчатое запаздывание с сильной хаотической составляющей, пилообразные колебания амплитуды, регулярное установление и плавное насыщение. Эти режимы отделены друг от друга и от режима малоамплитудных колебаний четырьмя критическими значениями параметра нелинейной связи. Выявлено пятое критическое значение этого параметра, при превышении которого си-

стема уходит на бесконечность. Показано, что зависимости временных параметров процесса развития колебаний от абсолютной величины параметра нелинейной связи в среднем описываются функциями типа обратной пропорциональности, а зависимость амплитуды установившихся колебаний в среднем – функцией типа «единица минус экспонента с отрицательным показателем». Также показано, что значение установившейся амплитуды колебаний полностью соответствует модели динамического потенциала.

Рассмотрен случай высокой степени линейной связи. Показано, что при параметре линейной связи выше критического значения высокоамплитудные режимы в рассмотренных выше условиях не реализуются, а всегда имеет место только малоамплитудный режим перемежающихся скачков. В этом случае для реализации высокоамплитудных режимов необходимо задание достаточного начального отклонения смещения первого осциллятора или достаточно высокая амплитуда возбуждающего сигнала.

В случае задания начального смещения по мере увеличения параметра нелинейной связи последовательно наступают следующие высокоамплитудные режимы: двухступенчатое запаздывание с пилообразным характером колебаний, асинхронная синусоида и регулярное установление. Показано, что период колебаний в режиме асинхронной синусоиды значительно превышает как периоды собственных колебаний обоих осцилляторов, так и период сигнала возбуждения. В качестве причины значительной величины периода асинхронной синусоиды предложено существование плоского участка потенциала, где рабочая точка колебаний проводит значительное время. Выявлены критические значения параметра нелинейной связи, при которых происходит последовательное изменение перечисленных режимов. Показано, что зависимость минимального критического значения возбуждения высокоамплитудного режима от величины начального смещения соответствует функции обратной пропорциональности.

Рассмотрено формирование высокоамплитудных режимов за счет задания достаточно большой амплитуды возбуждающего сигнала. Показано, что для возбуждения таких режимов амплитуда возбуждения должна превышать определен-

ное критическое значение. Исследована зависимость критического значения амплитуды возбуждения от величины параметра нелинейной связи. Показано, что эта зависимость в среднем соответствует функции обратной пропорциональности. Отмечено, что необходимым условием первичного запаздывания возбуждения колебаний является нулевые значения начального отклонения колебаний обоих осцилляторов.

## Заключение

Основные результаты, полученные в ходе работы над диссертацией, сводятся к следующему.

1. Предложена модель системы из двух связанных осцилляторов, один из которых обладает гиромангнитными свойствами, описываемая двумя нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Показано, что динамические свойства системы могут быть описаны с помощью динамического потенциала, представленного в виде суммы степенных функций от обобщенных координат вплоть до четвертого порядка.

2. На основании предложенной модели двух осцилляторов найдены семь основных режимов колебаний, определяемых степенью возбуждения и соотношением параметров осцилляторов. Выявлен режим асинхронных колебаний, присущий осцилляторам с различающимися параметрами. На основании частотных характеристик этого режима определены три автоколебательных режима: навязанный, стохастический и регулярный.

3. В рамках той же модели рассмотрены магнитоупругие колебания в нормально намагниченной ферритовой пластине, возбуждаемые переменным полем. В результате предложенной процедуры квадрирования исходная система, содержащая семь уравнений первого порядка и четыре граничных условия, сведена к системе четырех уравнений первого порядка без граничных условий.

4. Для характеристики магнитоупругих колебаний получена укороченная система уравнений, связанных через производные по координатам. Для такой системы в режиме постоянной амплитуды найдено аналитическое решение и приведены критерии смены режимов. Сопоставление полученных результатов с расчётом по полной системе уравнений магнитоупругости для пластины ЖИГ выявило хорошее согласие.

5. Выполнена классификация режимов колебаний, соответствующих разным уровням линейной и нелинейной связи осцилляторов. Для интерпретации наблюдаемых явлений введён динамический потенциал, отражающий воздействие осцилляторов друг на друга, результатом которого являются наблюдаемые режимы.

Взаимодействие осцилляторов интерпретировано на основе механизма положительной обратной связи.

б. На основе предложенной модели связанных осцилляторов показана возможность кратного (до пяти раз) умножения частоты вынужденных колебаний. Выявлено, что в этих условиях возбуждение колебаний второго осциллятора происходит с нестационарным запаздыванием во времени. Показано, что важнейшим условием реализации запаздывания является значительное различие времен релаксации осцилляторов. Для интерпретации эффекта запаздывания предложена модель динамического потенциала, отражающая характер колебаний первого осциллятора, когда амплитуда второго осциллятора выступает в качестве параметра.

### Список литературы

1. Заславский, Г. М. Введение в нелинейную физику : от маятника до турбулентности и хаоса / Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев. – М. : Наука, 1988. – 368 с.
2. Гуревич, А. Г. Магнитные колебания и волны / А. Г. Гуревич, Г. А. Мелков. – М. : Наука : Физматлит, 1994. – 462 с.
3. Comstock, R. L. Generation of Microwave Elastic Vibrations in a Disk by Ferromagnetic Resonance / R. L. Comstock, R. C. LeCraw // *Journal of Applied Physics*. – 1963. – Vol. 34. – No. 10. – P. 3022.
4. Ле-Кроу, Р. Магнитоупругие взаимодействия в ферромагнетных диэлектриках / Р. Ле-Кроу, Р. Комсток // *Физическая акустика*. Т. 3. Ч. Б. Динамика решетки / под ред. У. Мэзона, Р. Терстона. – М. : Мир, 1968. – С. 156–243.
5. Suhl, H. The theory of ferromagnetic resonance at high signal powers // *Journal of Physics and Chemistry of Solids*. – 1957. – Vol. 1. – No. 4. – P. 209–227.
6. Моносов, Я. А. Нелинейный ферромагнитный резонанс / Я. А. Моносов. – М. : Наука, 1971. – 376 с.
7. Захаров, В.Е. Турбулентность спиновых волн за порогом их параметрического возбуждения / В. Е. Захаров, В. С. Львов, С. С. Старобинец // *Успехи физических наук*. – 1974. – Т. 114. – № 12. – С. 609–654.
8. Temiryazev, A. G. “Exchange” spin waves in nonuniform yttrium iron garnet films / A. G. Temiryazev, M. P. Tikhomirova, P. E. Zilberman // *Journal of Applied Physics*. – 1994. – Vol. 76. – No. 12. – P. 5586.
9. Зильберман, П. Е. Возбуждение и распространение обменных спиновых волн в пленках железо-иттриевого / П. Е. Зильберман, А. Г. Темирязов, М. П. Тихомирова // *Журнал теоретической и экспериментальной физики*. – 1995. – Т. 108. – Вып. 1. – С. 281–302.
10. Гуляев, Ю. В. Нелинейные собственные колебания спинов в плоскопараллельном ферромагнитном резонаторе / Ю. В. Гуляев, П. Е. Зильберман, А. Г. Темирязов, М. П. Тихомирова // *Радиотехника и электроника*. – 1999. – Т. 44. – № 10. – С. 1262–1270.

11. Гуляев, Ю. В. Основная мода нелинейного спин-волнового резонанса в нормально намагниченных ферритовых пленках / Ю. В. Гуляев, П. Е. Зильберман, А. Г. Темиряев, М. П. Тихомирова // Физика твердого тела. – 2000. – Т. 42. – Вып. 6. – С. 1062–1067.
12. Gerrits, Th. Large-angle magnetization dynamics measured by time-resolved ferromagnetic resonance / Th. Gerrits, M. L. Schneider, A. V. Kos, T. J. Silva // Physical Review B – Condensed Matter and Materials Physics. – 2006. – Vol. 73. – No. 9. – P. 094454.
13. Власов, В. С. Нелинейное возбуждение гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе / В. С. Власов, Л. Н. Котов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // Радиотехника и электроника. – 2009. – Т. 54. – № 7. – С. 863–874.
14. Такер, Дж. Гиперзвук в физике твердого тела : пер. с англ. / Дж. Такер, В. Рэмптон ; под ред. В. Г. Михайлова, В. А. Шутилова. – М. : Мир, 1975. – 455 с.
15. Вейсс, М. Сверхвысокочастотные и низкочастотные колебания, вызванные нестабильностью резонанса в ферритах / М. Вейсс // Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах : сб. ст. / под ред. А. Г. Гуревича. – М. : Изд-во иностр. лит., 1961. – С. 281–285.
16. Моносов, Я. А. Возбуждение резонансных упругих колебаний при нелинейном ферромагнитном резонансе / Я. А. Моносов, В. В. Сурин, В. И. Щеглов // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1968. – Т. 7. – № 9. – С. 315–317.
17. Зубков, В. И. Спиновый эффект Мандельштама–Бриллюэна / В. И. Зубков, Я. А. Моносов, В. И. Щеглов // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1971. – Т. 13. – № 5. – С. 229–232.
18. Хаяси, Т. Нелинейные колебания в физических системах / Т. Хаяси ; пер. с англ. Б. А. Болдова, Г. Г. Гусева ; под ред. В. Е. Боголюбова. – М. : Мир, 1968. – 432 с.

19. Карлов, Н. В. Колебания, волны, структуры / Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко. – М. : Физматлит, 2003. – 496 с.
20. Основы теории колебаний / В. В. Мигулин, В. И. Медведев, Е. Р. Мустель, В. Н. Парыгин ; под ред. В. В. Мигулина. – М. : Наука, 1978. – 392 с.
21. Блэкьер, О. Анализ нелинейных систем / О. Блэкьер ; пер. с англ. Э. С. Воронина, Ю. А. Янайта. – М. : Мир, 1969. – 400 с.
22. Федорюк, М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. В. Федорюк. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1985. – 447 с.
23. Косевич, А. М. Введение в нелинейную физическую механику / А. М. Косевич, А. С. Ковалев. – Киев : Наук. думка, 1989. – 303 с.
24. Табор, М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике / М. Табор; науч. ред. В. А. Журавлев. – М. : Едиториал УРСС, 2001. – 318 с.
25. Рабинович, М. И. Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. – 3-е изд. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 560 с.
26. Бом, Д. Квантовая теория / Д. Бом ; под ред. С. В. Вонсовского. – М. ; Л. : Физматгиз, 1965. – 728 с.
27. Ландау, Л. Д. Собрание трудов / Л. Д. Ландау ; под ред. Е. М. Лифшица. – М. : Наука, 1969. – Т. 1. – 512 с.
28. Bloembergen, N. On the Ferromagnetic Resonance in Nickel and Supermalloy / N. Bloembergen // *Physical Review*. – 1950. – Vol. 78. – P. 572.
29. Крупичка, С. Физика ферритов и родственных им магнитных окислов / С. Крупичка ; пер. с нем. А. С. Пахомов. – М. : Мир, 1976. – Т. 2. – 503 с.
30. Гуревич, А. Г. Полые резонаторы и волноводы : Введение в теорию / А. Г. Гуревич. – М. : Советское радио, 1952. – 256 с.
31. Ферромагнитный резонанс и поведение ферромагнетиков в переменных магнитных полях : сб. ст. / пер. Л. А. Шубиной ; под ред. С. В. Вонсовского. – М. : Изд-во иностр. лит., 1952. – 350 с.
32. Кочин, Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н. Е. Кочин. – 7-е изд. – М. : Изд-во АН СССР, 1951. – 427 с.



33. Гуревич, А. Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках / А. Г. Гуревич. – М. : Наука, 1973. – 591 с.
34. Тикадзуми, С. Физика ферромагнетизма. Магнитные характеристики и практическое приложение / С. Тикадзуми ; пер. с яп. А. И. Леонова ; под ред. Р. В. Писарева. – М. : Мир, 1987. – 420 с.
35. Ферромагнитный резонанс : Явление резонансного поглощения высокочастотного электромагнитного поля в ферромагнитных веществах / под ред. С. В. Вонсовского. – М. : Физматгиз, 1961. – 343 с.
36. Skrotskii, G. V. Ferromagnetic Resonance in a Circularly Polarized Magnetic Field of Arbitrary Amplitude / G. V. Skrotskii, Iu. I. Alimov // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1959. – Vol. 8. No. 6. – P. 1035–1037.
37. Skrotskii, G. V. Effect of Specimen Shape on Ferromagnetic Resonance in a Strong Radio-Frequency Field / G. V. Skrotskii, Iu. I. Alimov // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1959. – Vol. 9. No. 4. – P. 899–901.
38. Chen, M. Ferromagnetic resonance foldover and spin-wave instability in single-crystal YIG films / M. Chen, C. E. Patton, G. Srinivasan, Y.T. Zhang // IEEE Trans Magn. – 1989. – Vol. 25. – P. 3485–3487.
39. Weiss, M. T. Microwave and Low-Frequency Oscillation Due to Resonance Instabilities in Ferrites / M. T. Weiss // Physical Review Letters. – 1958. – Vol. 1. – No. 7. – P. 239–241.
40. Bloembergen, N. The Influence of Anisotropy on Ferromagnetic Relaxation / N. Bloembergen, S. Wang // Physical Review. – 1952. – Vol. 85. – P. 392.
41. Bloembergen, N. Relaxation Effects in Ferromagnetic Resonance / N. Bloembergen, R. W. Damon // Physical Review. – 1952. – Vol. 85. – P. 699.
42. Sakiotis, N.G. Properties of Ferrites in Waveguides / N.G. Sakiotis, H.N. Chait, M.L. Kales // IRE Trans. – 1956. – Vol. AP-4. – No. 2. – P. 111
43. Anderson, P. W. Instability in the Motion of Ferromagnets at High Microwave Power Levels / P. W. Anderson, H. Suhl // Physical Review. – 1955. – Vol. 100. – P. 1788.

44. Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах : сб. ст. / под ред. А. Г. Гуревича. – М. : Изд-во иностр. лит., 1961. – 634 с.
45. Schlömann, E. Recent Developments in Ferromagnetic Resonance at High Power Levels / E. Schlömann, J. J. Green, U. Milano // Journal of Applied Physics. – 1960. – Vol. 31. – No. 5. – S386.
46. Morgenthaler, F. R. Survey of Ferromagnetic Resonance in Small Ferrimagnetic Ellipsoids / F. R. Morgenthaler // Journal of Applied Physics. – 1960. – Vol. 31. – No. 5. – S95.
47. Резенде, С. М. Спин-волновые неустойчивости, автоколебания и хаос в железоиттриевом гранате / С. М. Резенде, Ф. М. де Агиар // Труды Института инженеров по электронике и радиотехнике. – 1990. – Т. 78. – Вып. 6. С. 5 – 20.
48. Шутый, А. М. Нелинейные эффекты прецессионного движения намагниченности в области ферромагнитного резонанса / А. М. Шутый, Д. И. Семенцов // Физика твердого тела. – 2000. – Т. 42. – Вып. 7. – С. 1268–1271.
49. Шутый, А. М. Динамика намагниченности в условиях нелинейного ферромагнитного резонанса в пленке типа (111) / А. М. Шутый, Д. И. Семенцов // Физика твердого тела. – 2001. – Т. 43. – Вып. 8. – С. 1439–1442.
50. Neite, B. Optical Mode Conversion In Magnetic Garnet Films / B. Neite, H. Doetsch // SPIE. Electro-Optic and Magneto-Optic Materials (Hamburg, Federal Republic of Germany, Sept. 22–23, 1988). – 1989. – Vol. 1018. – P. 115.
51. Шутый, А. М. Динамика нелинейного прецессионного движения намагниченности в феррит-гранатовой пленке типа (100) / А. М. Шутый, Д. И. Семенцов // Физика твердого тела. – 2002. – Т. 44. – Вып. 4. – С. 734–738.
52. Балбашов, А. М. Магнитные материалы для микроэлектроники / А. М. Балбашов, А. М. Червоненкис. – М. : Энергия, 1979. – 217 с.
53. Михайловский, С. С. Основная мода спектра спин-волнового резонанса в ферромагнитных пленках, намагниченных нормально к поверхности / С. С. Михайловский, Н. М. Саланский // Изв. АН СССР. Сер. физ. – 1972. – Вып. 36. – № 7. – С. 1496.

54. Тихонов, В. В. Линейное возбуждение обменных спиновых волн в имплантированных пленках ЖИГ / В. В. Тихонов, А. В. Толмачев // Физика твердого тела. – 1994. – Т. 36. – Вып. 1. – С. 185–193.
55. Темиряев А. Г., Тихомирова М. П., Маряхин А. В. // Новые магнитные материалы микроэлектроники : тезисы докл. XVI Междунар. школы-семинара (г. Москва, 23–26 июня 1998 г.). – М., 1998. – Ч. 1. – С. 270–271.
56. Карпачев, С. Н. Нелинейная релаксационная диагностика магнитной и упругой подсистем тонкой ферритовой пленки вблизи акустического резонанса / С. Н. Карпачев, В. С. Власов, Л. Н. Котов // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия. – 2006. – № 6. – С. 60–62.
57. Щеглов, В. И. Автомодуляционный режим нелинейных вынужденных колебаний намагниченности феррита в резонаторе / В. И. Щеглов, В. Г. Шавров, В. И. Зубков, В. С. Власов, Л. Н. Котов // Магнетизм, дальнее и ближнее спин-спиновое взаимодействие : сб. материалов XVII Междунар. конф. (г. Москва – Фирсановка, 20–22 нояб. 2009 г.). – М. : Изд-во МЭИ, 2009. – С. 100–107.
58. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров: определения, теоремы, формулы / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1973. – 831 с.
59. Ольховский, И. И. Курс теоретической механики для физиков / И. И. Ольховский. – М. : Наука, 1970. – 447 с.
60. Стрелков, С. П. Введение в теорию колебаний / С. П. Стрелков. – М. : Наука, 1964. – 438 с.
61. Власов, В. С. Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре / В. С. Власов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // Журнал радиоэлектроники. – 2013. – № 2. – Режим доступа : <http://jre.cplire.ru/jre/feb13/10/text.pdf>
62. Власов, В. С. Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре при ферромагнитном резонансе / В. С. Власов, В. Г. Шавров,

- В. И. Щеглов // Радиотехника и электроника. – 2014. – Т. 59. – № 5. – С. 482–497.
63. Власов, В. С. Нелинейная динамика установления намагниченности в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами в условиях ориентационного перехода / В. С. Власов, Л. Н. Котов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // Радиотехника и электроника. – 2010. – Т. 55. – № 6. – С. 689–701.
64. Черный, Г. Г. Гиперзвук / Г. Г. Черный // Физическая энциклопедия. Т. 1. Ааронова–Бома эффект – Длинные линии / гл. ред. А. М. Прохоров. – М. : Советская Энциклопедия, 1988. – С. 476–480.
65. Физическая акустика / под ред. У. Мэзона, Р. Терстона. – М. : Мир, 1966–1974. – Т. 1–7.
66. Поверхностные акустические волны / [А. Олинер, Дж. Фарнелл, Г. Джерард и др.]; под ред. А. Олинера. – М. : Мир, 1981. – 390 с.
67. Викторов, И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах / И. А. Викторов. – М. : Наука, 1981. – 287 с.
68. Bleustein, J. L. A new surface wave in piezoelectric materials / J. L. Bleustein // Applied Physics Letters. – 1968. – Vol. 13. – P. 412.
69. Гуляев, Ю. В. Поверхностные электрорезонансные волны в твердых телах / Ю. В. Гуляев // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1969. – Т. 9. – № 1. – С. 63–65.
70. Ультразвуковые преобразователи / под ред. Е. Кикучи. – М. : Мир, 1972. – 424 с.
71. Голямина, И. П. Магнитострикционные излучатели из ферритов / И. П. Голямина // Физика и техника мощного ультразвука. Кн. 1. Источники мощного ультразвука / Ю. Я. Борисов, И. П. Голямина, Л. Д. Розенберг и др. – М. : Наука, 1967. – С. 111–148.
72. Власов, В. С. Исследование релаксационной и нелинейной динамики магнитных и магнитоупругих колебаний пленок и частиц : дисс. ... канд. ф.-м. наук : 01.04.07. – Сыктывкар, 2007. – 149 с.

73. Mandelbrot, B. B. *The Fractal Geometry of Nature* / B. B. Mandelbrot . – N. Y. : Freeman, 1982. – 468 p.
74. Ханин, К. М. Фракталы / К. М. Ханин // *Физическая энциклопедия*. Т. 5. Стробоскопические приборы – Яркость / гл. ред. А. М. Прохоров. – М. : Советская Энциклопедия, 1998. – С. 371–372.

### Авторский список литературы

*Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах, определенных ВАК при Минобрнауки России, в том числе входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования*

- A1. Иванов, А. П. Динамика системы магнитных доменов при параметрическом возбуждении / А. П. Иванов, Л. Н. Котов, В. С. Власов, Ф. Ф. Асадуллин, С. М. Полещиков, В. В. Коледов, В. И. Щеглов, В. Г. Шавров // Известия РАН. Сер. физическая. – 2011. – Т. 75. – № 2. – С. 206–208.
- A2. Иванов, А. П. Исследование автоколебаний двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным / Л. Н. Котов, В. С. Власов, А. П. Иванов, В. И. Щеглов, В. Г. Шавров // Вестник Челябинского гос. ун-та. – 2013. – № 25 (316). Физика. Вып. 18. – С. 27–30.
- A3. Иванов, А. П. Анализ линейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов / В. С. Власов, А. П. Иванов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // Журнал радиоэлектроники. – 2013. – № 11. – Режим доступа : <http://jre.cplire.ru/jre/nov13/3/text.pdf>
- A4. Иванов, А. П. Анализ нелинейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов в квадратичном приближении / В. С. Власов, А. П. Иванов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // Журнал радиоэлектроники. – 2014. – № 1. – Режим доступа : <http://jre.cplire.ru/jre/jan14/11/text.pdf>
- A5. Иванов, А. П. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 1. Основные уравнения / В. С. Власов, А. П. Иванов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // Радиотехника и электроника. – 2015. – Т. 60. – № 1. – С. 75–86.
- A6. Иванов, А. П. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 2. Некоторые нелинейные явления / В. С. Власов,

- А. П. Иванов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // Радиотехника и электроника. – 2015. – Т. 60. – № 3. – С. 280–293.
- А7. Иванов, А. П. Анализ автомодуляционных колебаний в магнитоупругой среде на основе модели связанных магнитного и упругого осцилляторов / А. П. Иванов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // Журнал радиоэлектроники. – 2015. – № 5. – Режим доступа : <http://jre.cplire.ru/jre/may15/4/text.pdf>
- А8. Иванов, А. П. Анализ автомодуляционных явлений в системе связанных магнитного и упругого осцилляторов на основе модели потенциала / А. П. Иванов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // Журнал радиоэлектроники. – 2015. – № 6. – Режим доступа : <http://jre.cplire.ru/jre/jun15/9/text.pdf>
- А9. Иванов, А. П. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 1. Динамический потенциал / А. П. Иванов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // Журнал радиоэлектроники. – 2017. – № 7. – Режим доступа : <http://jre.cplire.ru/jre/jul17/6/text.pdf>
- А10. Иванов, А. П. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 2. Линейная связь / А. П. Иванов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // Журнал радиоэлектроники. – 2017. – № 8. – Режим доступа : <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/5/text.pdf>
- А11. Иванов, А. П. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 3. Нелинейная связь / А. П. Иванов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // Журнал радиоэлектроники. – 2017. – № 8. – Режим доступа : <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/6/text.pdf>

*Публикации в сборниках трудов всероссийских и международных научных конференций*

- А12. Иванов, А. П. Динамика системы магнитных доменов при параметрическом возбуждении / А. П. Иванов, В. С. Власов, Л. Н. Котов, Ф. Ф. Асадуллин, С. М. Полещиков, В. В. Коледов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // Новое в магнетизме и магнитных материалах : сб. тр. XXI Междунар. конф. (г. Москва, 28 июня – 04 июля 2009 г.). – М. : Изд-во МГУ, 2009. – С. 7–19.

- A13. Иванов, А. П. Исследование поступательного движения системы связанных осцилляторов с квадратичной нелинейностью / В. С. Власов, Л. Н. Котов, А. П. Иванов, Ф. Ф. Асадуллин, С. М. Полешиков, В. И. Щеглов, В. Г. Шавров // Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах : сб. тр. Междунар. конф. (г. Махачкала, 21–23 нояб. 2010 г.) / Ин-т физики им. Х. И. Амирханова Дагестанского науч. центра РАН. – Махачкала, 2010. – С. 619–622.
- A14. Ivanov, A. P. Using of model connected oscillators for the description of magnetic spectra / A. P. Ivanov, L. N. Kotov, V. S. Vlasov, S. M. Poleshikov, F. F. Asadullin, V. I. Shcheglov, V. G. Shavrov // Book of Abstracts of Moscow International Symposium on Magnetism (MISM) 2011 (Moscow, Russia, Aug. 21–25, 2011). – Moscow : Faculty of Physics M. V. Lomonosov MSU, 2011. – P. 805.
- A15. Иванов, А. П. Нелинейные колебания двух связанных магнитного и немагнитного осцилляторов / В. С. Власов, А. П. Иванов, Л. Н. Котов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ) : сб. тр. XXII Междунар. конф. (г. Астрахань, 17–21 сент. 2012 г.). – Астрахань : ИД «Астраханский университет», 2012. – С. 265–268.
- A16. Иванов, А. П. Резонансные свойства кольцевой цепочки связанных магнитных резонаторов / В. С. Власов, А. П. Иванов, Л. Н. Котов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ) : сб. тр. XXII Междунар. конф. (г. Астрахань, 17–21 сент. 2012 г.). – Астрахань : ИД «Астраханский университет», 2012. – С. 268–271.
- A17. Иванов, А. П. Резонансные свойства цепочки связанных магнитных резонаторов, замкнутой в кольцо / В. С. Власов, А. П. Иванов, Л. Н. Котов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // Электромагнитное поле и материалы : сб. тр. XX Междунар. конф. (г. Москва, 16–18 нояб. 2012 г.). – М. : Изд-во НИУ МЭИ, 2012. – С. 241–247.
- A18. Иванов, А. П. Автоколебания в системе двух связанных осцилляторов, один из которых является гиромангнитным / В. С. Власов, А. П. Иванов, Л. Н. Котов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // Электромагнитное поле и материалы : сб.



- тр. XX Междунар. конф. (г. Москва, 16–18 нояб. 2012 г.). – М. : Изд-во НИУ МЭИ, 2012. – С. 248–259.
- A19. Ivanov, A. P. Model of nonlinear magnetization vibrations in ferrite resonator connected with additional resonance system / V. S.Vlasov, A. P. Ivanov, L. N. Kotov, V. G. Shavrov, V. I. Shcheglov // International Symposium on Spin Waves 2013 (Saint Petersburg, Russia, June 09–15, 2013). – Saint Petersburg : Ioffe Physical-Technical Institute, 2013. – P. 159.
- A20. Иванов, А. П. Магнитоупругие автоколебания в нормально намагниченной ферритовой пластине / В. С. Власов, А. П. Иванов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // Хаотические автоколебания и образование структур (ХАОС-2013) : сб. матер. X Междунар. зимней школы-семинара (г. Саратов, 07–12 окт. 2013 г.). – Саратов : ООО «Издательский центр «Наука», 2013. – С. 77.
- A21. Иванов, А. П. Характер связи нелинейных осцилляторов как основа для нестационарного и автоколебательного режимов / В. С. Власов, А. П. Иванов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // Хаотические автоколебания и образование структур (ХАОС-2013) : сб. матер. X Междунар. зимней школы-семинара (г. Саратов, 07–12 окт. 2013 г.). – Саратов : ООО «Издательский центр «Наука», 2013. – С. 78.
- A22. Иванов, А. П. Автоколебания в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами / В. С. Власов, А. П. Иванов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // Электромагнитное поле и материалы : сб. тр. XXI Междунар. конф. (г. Москва, 15–17 нояб. 2013 г.). – М. : Изд-во НИУ МЭИ, 2013. – С. 188–198.
- A23. Иванов, А. П. Применение модели связанных осцилляторов для анализа работы магнестрикционного преобразователя / В. С. Власов, А. П. Иванов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // Электромагнитное поле и материалы : сб. тр. XXI Междунар. конф. (г. Москва, 15–17 нояб. 2013 г.). – М. : Изд-во НИУ МЭИ, 2013. – С. 199–215.
- A24. Иванов, А. П. Исследование нелинейной магнитоупругой динамики в перпендикулярно намагниченном ферритовом слое / В. С. Власов, Д. А. Пле-

- шев, П. А. Северин, А. П. Иванов, Л. Н. Котов, В. И. Щеглов, В. Г. Шавров // Магнитные материалы. Новые технологии : тезисы докл. VI Байкальской Междунар. конф. (пос. Большое Голоустное Иркутской обл., 19–23 авг. 2014 г.). – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2014. – С. 19–20.
- A25. Иванов, А. П. Применение модели связанных осцилляторов для анализа автомодуляционного режима возбуждения гиперзвука магнитострикционным преобразователем / В. С. Власов, А. П. Иванов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // Электромагнитное поле и материалы : сб. тр. XXII Междунар. конф. (г. Москва, 21–22 нояб. 2014 г.). – М. : Изд-во НИУ МЭИ, 2014. – С. 161–175.
- A26. Иванов, А. П. Динамика вынужденных колебаний намагниченности в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами в условиях ориентационного перехода / В. С. Власов, А. П. Иванов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // Электромагнитное поле и материалы : сб. тр. XXII Междунар. конф. (г. Москва, 21–22 нояб. 2014 г.). – М. : Изд-во НИУ МЭИ, 2014. – С. 176–188.
- A27. Иванов, А. П. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения СВЧ гиперзвука при ферромагнитном резонансе / В. С. Власов, А. П. Иванов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // XVI Международная зимняя школа-семинар по радиофизике и электронике сверхвысоких частот : материалы школы-конф. (г. Саратов, 02–07 февр. 2015 г.). – Саратов : ООО «Издательский центр «Наука», 2015. – С. 34.
- A28. Иванов, А. П. Нелинейные явления при возбуждении СВЧ гиперзвука в условиях ферромагнитного резонанса / В. С. Власов, А. П. Иванов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // XVI Международная зимняя школа-семинар по радиофизике и электронике сверхвысоких частот : материалы школы-конф. (г. Саратов, 02–07 февр. 2015 г.). – Саратов : ООО «Издательский центр «Наука», 2015. – С. 35.
- A29. Иванов, А. П. Использование модели связанных осцилляторов для описания магнитных спектров / А. П. Иванов, Л. Н. Котов, В. С. Власов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах : тезисы докл. Междунар. конф., посвящённой

- 80-летию чл.-корр. РАН И. К. Камилова (г. Челябинск, 24–28 авг. 2015 г.) / отв. за вып. М. А. Загребин. – Челябинск : Изд-во Челябинского гос. ун-та, 2015. – С. 127.
- А30. Иванов, А. П. Анализ колебаний в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами на основе модели квадратичного приближения / В. С. Власов, А. П. Иванов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов // Электромагнитное поле и материалы (фундаментальные физические исследования) : материалы XXIII Всерос. конф. с междунар. участием (г. Москва, 20–21 нояб. 2015 г.). – М. : Изд-во НИУ МЭИ ; ИНФРА-М, 2015. – С. 202–216.