

ФАНО РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ РАДИОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ
ИМ. В.А.КОТЕЛЬНИКОВА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
(ИРЭ ИМ. В.А. КОТЕЛЬНИКОВА РАН)

На правах рукописи



Чуриков Дмитрий Викторович

**МЕТОДЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ
НА ОСНОВЕ АТОМАРНЫХ И R-ФУНКЦИЙ, ВЕЙВЛЕТОВ
В РАДИОФИЗИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ**

Специальность **01.04.03** – “Радиофизика”

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Заслуженный деятель науки РФ,
доктор физико-математических наук,
профессор **Кравченко В.Ф.**

Москва — 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ СОКРАЩЕНИЙ	4
ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. АТОМАРНЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ ФИЛЬТРАЦИИ И ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ.....	24
1.1. Основные системы атомарных функций	24
1.2. Конструкции весовых функций и улучшение их физических характеристик.....	27
1.2.1. Весовые функции Кравченко-Кайзера.....	27
1.2.2. Весовые функции Кравченко-Наттолла.....	28
1.3. Конструкции КИХ-фильтров на основе атомарных функций.....	29
1.3.1. Фильтры с линейной фазовой характеристикой	
1.3.2. Типы КИХ-фильтров с линейной фазовой характеристикой	31
1.3.3. Разработка КИХ-фильтров.....	32
1.3.4. Построение фильтра с конечной импульсной характеристикой.....	32
1.4. Обобщенные ряды отсчетов	37
1.4.1. Обобщенные ряды отсчетов на основе атомарных функций.....	38
1.4.2. Физический смысл обобщенного ряда отсчетов.....	40
1.4.3. Весовая функция Кравченко-Котельникова.....	42
1.4.4. Обобщенная теорема Кравченко-Котельникова для случайных сигналов	46
1.4.5. Анализ частных случаев обобщенных рядов отсчетов.....	48
1.4.6. Учет погрешностей обобщенной теоремы отсчетов.....	53
1.4.7. Ядро ряда отсчетов Кравченко-Левитана.....	55
1.5. Непараметрическое оценивание функции плотности вероятности последовательности случайных величин.....	57
1.5.1. Допустимые оценки функции плотности вероятности и её производных.....	59
1.5.2. Численный эксперимент.....	61
ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ 1	65

ГЛАВА 2. ПРИМЕНЕНИЕ WA-СИСТЕМ ФУНКЦИЙ	
В ЗАДАЧАХ РАДИОФИЗИКИ	66
2.1. Построение ортогональных WA-систем функций.....	66
2.1.1. Ортогональные WA-системы функций $\{\widetilde{u}_p(t)\}$	66
2.1.2. Алгоритм построения ортогональных WA-систем функций	73
2.1.3. Построение ортогональных WA-систем функций на основе атомарных функций $h_a(x)$	74
2.2. Ортогональные WA-системы функций в цифровой обработке сигналов и изображений.....	76
2.2.1. Удаление шума и компрессия одномерных сигналов.....	76
2.2.2. Удаление шума и компрессия изображений.....	79
2.3. Аналитические WA-системы функций	84
2.3.1. Построение комплексных WA-систем функций.....	84
2.3.2. Функционал качества выбора вейвлетного базиса для анализа сигналов	86
2.3.3. Анализ временных рядов комплексными WA-системами функций.....	87
ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ 2	92
ГЛАВА 3. СИНТЕЗ МНОГОМЕРНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ.....	93
3.1. Теория R-функций и обратная задача аналитической геометрии	93
3.2. Синтез двумерных цифровых фильтров с нестандартной геометрией опорной области.....	98
3.2.1. Двумерные цифровые фильтры с конечной импульсной характеристикой.....	98
3.2.2. Локусы сложной формы и опорные области двумерных цифровых фильтров с конечной импульсной характеристикой.....	99
3.2.2. Построение двумерного фильтра с конечной импульсной характеристикой.....	100
3.2.4. Численная реализация алгоритма и анализ физических результатов	102

3.3. Аналитические двумерные WA-системы функций и их физические свойства.....	114
3.3.1. Построение аналитических двумерных WA-систем функций	114
3.3.2. Физические свойства аналитических двумерных WA-систем функций.....	117
ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ 3	121
 ГЛАВА 4. ОБРАБОТКА РАДИОЛОКАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ И СИНТЕЗИРОВАНИЕ АПЕРТУРЫ АНТЕННЫ АТОМАРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ	
4.1. Обработка сигналов в радиоприемном устройстве.....	122
4.2. Цифровая обработка сигналов в антеннах с синтезированной апертурой при боковом обзоре	127
4.2.1. Геометрия синтеза апертуры	127
4.2.2. Формула дальности	128
4.2.3. Сигналы в системах синтеза апертуры	128
4.2.4. Двухэтапная цифровая обработка сигналов РСА	130
4.3. Применение функций Кравченко-Кайзера к задачам весового усреднения разностной частоты	132
4.4. Обобщение функции неопределенности по времени и частоте на основе семейства атомарных функций применительно к цифровой обработке сигналов в антенных системах	134
4.5. Атомарные и WA-системы функций в корреляционной обработке радиолокационных сигналов.....	145
4.5.1. Фильтрация корреляционной функции с помощью атомарных и WA-систем функций	151
ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ 4	159
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	160
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	161
ПРИЛОЖЕНИЕ. Комбинированный алгоритм описания сложных контурных объектов и фильтрации изображений в условиях помехи высокой интенсивности.....	168

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ СОКРАЩЕНИЙ

АФ	—	атомарная функция
АвФ	—	автокорреляционная функция
АМ	—	амплитудная модуляция
ВФ	—	весовая функция
ИСКО	—	интегральная среднеквадратичная ошибка
ИХ	—	импульсная характеристика
КМА	—	кратномасштабный анализ
КК	—	Кравченко-Котельников
КЛ	—	Кравченко-Левитан
КИХ	—	конечная импульсная характеристика
ЛЧМ	—	линейно частотно-моделированный
ЛА	—	летательный аппарат
ОАК	—	открытый атмосферный канал
ПФ	—	преобразование Фурье
РЛИ	—	радиолокационное изображение
РСА	—	радар с синтезированием апертуры
СРЧ	—	сигнал разностной частоты
СШП	—	сверхширокополосный
ФН	—	функция неопределенности
ФНК	—	функция неопределенности Кравченко
ФПВ	—	функцией плотности вероятности
ФСП	—	функция спектральной плотности
ЦОС	—	цифровая обработка сигналов
ЧМ	—	частотно-модулированный
ЧХ	—	частотной характеристики
ЭК	—	элементарный контур
ЭВ	—	элементарный вектор

ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия благодаря развитию вычислительной техники системы и методы цифровой обработки сигналов [1-9] активно развиваются в различных областях физики и техники. Они основаны на преобразованиях сигналов в цифровой форме и обладают таким полезным качеством как универсальность алгоритмов. Этим объясняется [1-28] их широкое распространение в: радиоастрономии, дистанционном зондировании природных сред, моделировании прохождения их в слоистых структурах, ионосфере и тропосфере, обработке многомерных сигналов и распознавании образов и др.

Для многих из этих задач требуется обработка данных в режиме реального времени. Это достигается путём увеличения вычислительных мощностей, а также путем оптимизации алгоритмов используемых методов. Здесь важным является поддержание заданной точности вычислений в условиях ограниченности исходных данных, а так же воздействию мешающих факторов. Поэтому [1-28] широко применяются цифровые методы фильтрации, сжатия, спектрального оценивания, весовой обработки, восприятия информации и распознавания образов многомерных данных.

Благодаря широкому применению новых методов в цифровой обработке сигналов активно развивается современная радиолокация [10-21]. Так как радиолокационные системы (РЛС) относятся к классу радиотехнических систем извлечения информации об объектах в пространстве из принимаемого электромагнитного сигнала, то осуществляется поиск и обнаружение электромагнитного сигнала с последующим измерением его параметров, которые можно использовать для получения необходимой информации.

В основе радиолокации [10-19] лежат следующие основные физические принципы: рассеяние радиоволн объектами, отличающимися своими физическими параметрами от соответствующих характеристик среды распространения, излучение радиоволн техническими системами, а также эффектом Доплера, заключающийся в изменении частоты отраженного сигнала от движущихся объектов. Одним из важных направлений радиолокации является радиовидение, целью которого является наблюдение объектов в радиодиапазоне электромагнитных волн с разрешением близким к оптическим системам. Очевидным преимуществом радиолокационных [10-19] систем является способность работать в любое время суток при различных погодных условиях. Для реализации высокого разрешения применяется метод радиолокационного синтезирования апертуры (РСА) [10], позволяющий использовать когерентные режимы работы антенны для формирования существенно улучшен-

ной диаграммы направленности. В когерентных радиолокационных системах используется информация об изменении параметров амплитуды и фазы отраженного сигнала. Когерентный приемопередающий тракт РСА состоит из следующих блоков: формирования зондирующего сигнала, усиления, преобразования промежуточной частоты, фазовых детекторов, аналого-цифровых преобразователей.

Эффективность РЛС в основном определяется видом используемых в ней зондирующих сигналов (ЗС) [10-19], выбор которых зависит от конкретных требований к системе по дальности действия, разрешающей способности, качеству обнаружения, а также точности оценивания координат и параметров целей. Высокая разрешающая способность по дальности может обеспечиваться использованием широкополосных зондирующих сигналов. Важными являются мощность излучаемого сигнала, малые потери и шумы приемопередающего тракта. Большой динамический диапазон радиолокационного изображения обеспечивается фокусировкой главного и низким уровнем боковых лепестков функции неопределенности зондирующего сигнала.

При разработке и проектировании РЛС необходимо учитывать множество их параметров с целью улучшения качества работы систем. Поэтому основу цифровой обработки многомерных сигналов [1-31] должны составлять современные вычислительные методы и многопараметрические алгоритмы, позволяющие варьировать физические характеристики, а так же режимы работы РЛС в целом. К ним можно отнести кратномасштабный вейвлет-анализ [6-8,26], который благодаря локальным свойствам в пространственной и частотной областях обладает существенными преимуществами перед преобразованиями Фурье. Вейвлет-анализ оказывается очень эффективным [6-8] при исследовании знакопеременных, разрывных и нестационарных сигналов.

Существенное улучшение обработки могут обеспечить многомерные весовые функции и вейвлеты [8,20-28,31] со специальными формами опорных областей. В настоящее время в основном используются такие канонические формы как эллипс и прямоугольник в силу простоты их построения. Современные методы R-функций (функций В.Л. Рвачева) [19-22, 28, 31] позволяют на аналитическом уровне с привлечением алгебры логики описывать объекты сложной геометрии. Это предоставляет широкие возможности в режиме реального времени учитывать пространственные особенности объектов, окружающей среды и подстилающих поверхностей.

Актуальность темы. В связи с активным развитием современных цифровых систем обработки информации актуальным является создание новых и улучшение существующих алгоритмов цифровой обработки одномерных и

многомерных сигналов в радиолокационных станциях, которые основаны на современных вычислительных методах в следующих радиофизических приложениях: радиоастрономия, дистанционное зондирование, моделирование прохождения сигналов в слоистых структурах, ионосфере и тропосфере. К ним можно отнести развитие методов весовой обработки, вейвлет-анализ, который нашел широкое применение при обнаружении кратковременных знакопеременных и сверхширокополосных процессов, а так же конструктивные возможности R-функций для описания многомерных объектов произвольной геометрии.

Такие важные характеристики современных радиолокационных станций как разрешающая способность радиолокационных изображений, точность измерения координат и скорости объектов, помехоустойчивость определяются характеристиками зондирующих сигналов, а также алгоритмами обработки радиолокационных данных. Так, высокая разрешающая способность по дальности может обеспечиваться использованием широкополосных зондирующих сигналов, а большой динамический диапазон радиолокационного изображения обеспечивается фокусировкой главного и низким уровнем боковых лепестков функции неопределенности зондирующего сигнала. Снижение уровня боковых лепестков достигается использованием согласованной фильтрации и весовой обработки. В этом случае снижение боковых лепестков основывается на сглаживании переходных процессов модуляции зондирующих сигналов при формировании и обработке. Так, использование широкополосных и сверхширокополосных зондирующих сигналов могут обеспечить высокую разрешающую способность по дальности.

Целью диссертационной работы является исследование, развитие и разработка методов анализа физических систем на основе теорий атомарных, R- и WA-систем функций, построение алгоритмов обработки и моделирования процессов дистанционного зондирования и радиоастрономии с целью улучшения физических характеристик передачи, восстановления и распознавания многомерных сигналов.

Методы исследований. Основные методы исследования, применяемые в данной работе: теории атомарных и R- функций, метод преобразования Фурье, вычислительные методы, вейвлет-анализ, WA-системы функций.

Научная новизна работы.

- Впервые рассмотрено применение нового класса весовых функций (окон) Кравченко-Кайзера и Кравченко-Наттолла, основанных на теории атомарных функций к задачам обработки сигналов дистанционного зон-

дирования. На их базе получены фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ).

- Рассмотрены частные случаи применения обобщенной теоремы отсчетов Кравченко-Котельникова для отклонения частоты дискретизации от заданной, конечного числа отсчетов, произвольной частотной полосы, а также амплитудно- и частотно- модулированных сигналов.
- Построены новые классы ортогональных и аналитических WA-систем функций (вейвлетов на основе атомарных функций), а также показано их применение для физического анализа сигналов и изображений различной физической природы. Приведены примеры обработки данных дистанционного зондирования поверхности Земли и радиоастрономии.
- Впервые на основе атомарных функций рассмотрено непараметрическое оценивание функции плотности вероятности последовательности случайных величин.
- Впервые синтезированы двумерные весовые функции со сложной геометрией опорной области, имеющие большое значение при анализе, фильтрации и пространственно-временной обработке сигналов. Получены аналитические многомерные WA-системы функций и исследованы их физические свойства.

Основные положения, выносимые на защиту. Автором получены и выносятся на защиту следующие результаты:

- новые классы весовых функций для цифровой обработки радиофизических сигналов и оценки спектральной плотности временных рядов;
- синтезированы цифровые фильтры с конечной импульсной характеристикой на основе атомарных функций, улучшающие частотно-временные свойства сигналов;
- предложены и обоснованы алгоритмы построения семейств ортогональных и аналитических вейвлет-систем на основе атомарных функций для применения к задачам анализа сигналов различной физической природы;
- предложены алгоритмы построения, а также реализованы двумерные весовые функции и аналитические WA-системы функций со сложной геометрией опорной области для пространственно-временной обработки сигналов;
- предложено и обосновано обобщение функции неопределенности по времени и частоте на основе семейства атомарных функций применительно к цифровой обработке зондирующих сигналов в антенных системах.

Личный вклад автора.

Все представленные в диссертации результаты численных экспериментов получены автором лично. Автор произвел программную реализацию и проверку алгоритмов, моделей и методов, осуществил подбор тестовых примеров и численный эксперимент. Принимал активное участие в постановке и обосновании цели исследования.

Практическая значимость полученных результатов заключается в реализации алгоритмов цифровой обработки радиолокационных сигналов и развитии теорий атомарных и R- функций в радиофизических приложениях. Разработанные методы и алгоритмы могут найти применение при решении широкого класса задач радиофизики, включая задачи обработки сигналов в РЛС с синтезированием апертуры, радиовидении, радиоастрономии, дистанционном зондировании, моделировании прохождения сигналов в слоистых структурах, ионосфере и тропосфере и др.

Предложенные и обоснованные методы и алгоритмы доведены до численной реализации. Проведен физический анализ полученных результатов, показывающий определенные качественные преимущества предложенных подходов по сравнению с известными.

Достоверность научных выводов. Алгоритмы имеют строгое математическое обоснование. Проведен анализ и сравнение полученных результатов с известными, имеющими как точные, так и приближенные решения. Использовались известные как в российской так и зарубежной литературе методы обработки сигналов в РЛС с синтезированием апертуры.

Структура диссертационной работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, приложения и списка литературы. Основные результаты работы изложены в выводах, которые находятся в конце каждой главы, а также в заключении.

В первой главе рассмотрены методы весовой обработки радиолокационных сигналов, конструкции весовых функций, а также улучшение их физических характеристик. Построены новые конструкции КИХ-фильтров на основе атомарных функций и проведен их физический анализ. Исследованы обобщенные ряды отсчетов на основе атомарных функций. Рассмотрено непараметрическое оценивание функции плотности вероятности и её производных 1- и 2-го порядков последовательностей случайных величин с помощью предложенных допустимых весовых функций.

Во второй главе рассмотрено построение ортогональных WA-систем функций и их применение в цифровой обработке сигналов и изображений различной физической природы. Построены аналитические WA-систем функции, функционал качества выбора вейвлетного базиса для анализа сигналов.

Полученные системы применены для анализа временных рядов радиоастрономических и климатических данных.

Третья глава посвящена теории R-функций и синтезу многомерных цифровых фильтров Кравченко-Рвачева со сложной геометрией опорных областей. Предложен алгоритм, а так же построены двумерные фильтры с конечной импульсной характеристикой и аналитические двумерные WA-системы функций.

В четвертой главе проведено исследование возможности применения предложенных весовых функций к цифровой обработке сигналов в радарах с синтезированной апертурой. Рассматривается применение функций Кравченко-Кайзера к задачам весового усреднения разностной частоты. Предложено и обосновано обобщение функции неопределенности по времени и частоте на основе семейства атомарных функций применительно к цифровой обработке сигналов в антенных системах. Дан анализ ее основных физических свойств. Рассмотрены комбинированные методы корреляционной обработки радиолокационных сигналов, основанные на теории атомарных и WA-системах функций. Предложены алгоритмы их оптимальной обработки, дискретной когерентной фильтрации, а так же определения доплеровской частоты. Построен функционал качества, позволяющий оценить эффективность обработки сигналов для конкретных физических моделей.

В приложении предложен и обоснован гибридный метод выделения контуров зашумленных изображений, основанный на применении атомарных функций, вейвлетов, контурных сигналов и функций В.Л. Рвачева. В процессе обработки изображения происходит выделение основных контуров и их корректировка. На основе информации о контурах изображения производится глубокая фильтрация и восстановление областей изображения, близких к контуру. Проведенные численные эксперименты показали эффективность и надежность его применения в условиях помехи высокой интенсивности.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на следующих российских и международных конференциях, а также научных семинарах:

- Региональная научно-техническая конференция «Прогрессивные технологии, конструкции и системы в приборо- и машиностроении», Калуга: 2001; 2002.
- Международная конференция «Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации» (ARMIMP). Суздаль: 2005; 22-24 сентября 2009; 20 – 22 сентября 2011 (**Пленарный доклад**); 18 – 19 сентября 2012 (**Пленарный доклад**); 15-17 сентября 2014 (**Пленарный доклад**); 20-23 сентября 2015 (**Пленарный доклад**)

- 4-я Международная научно-техническая конференция «Физика и технические приложения волновых процессов», Нижний Новгород, 3-9 октября 2005.
- Российская конференция «Физика волновых процессов и радиотехнические системы», Самара, 2006.
- Международная конференция «Цифровая обработка сигналов и ее применение», Москва: 29-31 марта 2006; 28-30 марта 2007; 26-28 марта 2008; 25-27 марта 2009; 31 марта – 2 апреля 2010; 30 марта – 1 апреля 2011;
- 6-я Международная научно-техническая конференция "Физика и технические приложения волновых процессов", Казань, 17-23 сентября 2007 (**Пленарный доклад**).
- International Kharkov symposium on physics and engineering of microwaves, Millimeter and submillimeter waves, MSMW, Харьков: 25-30 июня 2007; 2010; 23-28 июня 2013; 20-24 июня 2016 (**Пленарный доклад**).
- 11-я Всероссийская школа-семинар «Физика и применение микроволн». Звенигород. Московская область, 21-26 мая 2007.
- Научная сессия, посвященная Дню Радио, Москва: 2005, 2006, 16–17 мая 2007; 14 — 15 мая 2008; 19–20 мая 2010; 16-17 мая 2012 (**Пленарный доклад**).
- International Conference RVK08 and MMWP08 (Växjö, Sweden), Швеция, Векшё, 9-13 июня 2008.
- Международная конференция «Дни Дифракции» (DAYS on DIFFRACTION), Санкт-Петербург: 3-6 июня 2008; 2010; 30 мая – 3 июня 2011; 28 мая – 1 июня 2012; 27 – 31 мая 2013; 3 – 6 июня 2014; 25-29 мая 2015; 27 июня – 1 июля 2016.
- International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, Севастополь: 15-19 сентября 2008; 6-10 сентября 2010 (**Приглашенный доклад**); 17-21 сентября 2012.
- Украинский математический конгресс. Львов, 27-29 августа 2009.
- Международная научная конференция «Излучение и рассеяние электромагнитных волн» ИРЭМВ-2009. Таганрог-Дивноморское, 27 июня – 1 июля 2009.
- Международный симпозиум «Progress in Electromagnetics Research Symposium», The Electromagnetics Academy. Москва: 18-21 августа 2009; 19-23 августа 2012.
- Международная конференция «Радиолокация и радиосвязь», ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, Москва: 26 - 30 октября 2009; 23-25 ноября 2015 (**Пленарный доклад**).
- 10th International Conference on Signal Processing Proceedings (ICSP'10), Китай, Пекин, 24 – 28 октября 2010.
- Всероссийская радиоастрономическая конференция «Радиотелескопы, аппаратура и методы радиоастрономии», ВРК-2011. Санкт-Петербург, 17-21 октября 2011.

- 4-й Международный радиоэлектронный форум «Прикладная радиоэлектроника. Состояние и перспективы развития» МРФ–2011. Украина, Харьков, 18-21 октября 2011.

По теме диссертации опубликовано **120** научных работ, из которых **36** в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки России, **3** в иностранных журналах, включенных в **Международные системы цитирования Web of Science и Scopus**, **3** в иностранных журналах, не включённых в международные системы цитирования, **64** в трудах **Международных конференций**, **14** в трудах **Всероссийских конференций**.

Общий объем опубликованных по теме диссертации работ в научных журналах составляет **651** стр.

Научные публикации по теме диссертации

I. Статьи в научных журналах

I.1. Статьи в журналах из перечня ВАК РФ

1. Чуриков Д.В. Атомарные функции и комбинированный алгоритм фильтрации изображений в условиях помехи высокой интенсивности // Радиотехника. 2004. № 9. С.69-71.
2. Степанов С.Е., Чуриков Д.В. Дифференцирование дискретных сигналов на основе оптимизированного алгоритма вейвлет-преобразований // Электромагнитные волны и электронные системы. 2004. Т.9. № 8. С.50-54.
3. Кравченко В.Ф., Федоров И.Б., Чуриков Д.В. Функции В.Л. Рвачёва и атомарные функции в задачах описания сложных контурных объектов и цифровой обработке изображений // Электромагнитные волны и электронные системы. 2005. Т.10. №7. С.70-80.
4. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. Цифровая обработка нелинейных сигналов на основе преобразований Кравченко-Котельникова-Вигнера // Успехи современной радиоэлектроники. 2007. № 8. С. 67-71.
5. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Аналитические вейвлеты Кравченко-Котельникова и Кравченко-Левитана в цифровой обработке сверхширокополосных сигналов // Успехи современной радиоэлектроники. 2007. № 8. С. 3-33.
6. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В., Юрин А.В. Аналитическое описание локусов сложной формы R-операциями и атомарными функциями. Цифровая обработка сигналов и изображений // Успехи современной радиоэлектроники. 2007. №3. С. 6-37.

7. Чуриков Д.В. Сегментация и фильтрация радиолокационных изображений на основе нечетких отношений и атомарных функций // Нелинейный мир. №5. 2007. С. 265-266.
8. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Атомарные функции $h_a(x)$ и новые ортогональные вейвлеты на их основе // Успехи современной радиоэлектроники. 2008. № 6. С. 67-88.
9. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Цифровая обработка и спектральное оценивание сверхширокополосных сигналов атомарными функциями и вейвлетами // Успехи современной радиоэлектроники. 2008. № 8. С. 39-46.
10. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Новые алгоритмы пространственно-временной цифровой обработки сигналов в антенных системах // Антенны. 2008. Вып. 4 (131). С.47-54.
11. Чуриков Д.В. Новые конструкции спектральных функций Кравченко-Чебышева-Лежандра // Электромагнитные волны и электронные системы. 2009. Т. 14. № 4. С. 44.
12. Кравченко В.Ф., Кравченко О.В., Сафин А.Р., Чуриков Д.В.. Новый класс вероятностных весовых функций в цифровой обработке сигналов и изображений // Электромагнитные волны и электронные системы. 2009. Т.14. №9. С. 31-44.
13. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Синтез двумерных цифровых фильтров с нестандартной геометрией опорной области // Успехи современной радиоэлектроники. 2009. №5. С. 3-12.
14. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Конструкции ортогональных вейвлетов на основе атомарных функций $h_a(x)$ // Нелинейный мир. №3. 2009. С. 172-174.
15. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Семейство атомарных функций и вейвлетов в корреляционной обработке радиолокационных сигналов // Успехи современной радиоэлектроники. 2009. №9. С. 7-17.
16. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Анализ временных рядов комплексными WA-системами функций Кравченко // Электромагнитные волны и электронные системы. 2010. Т. 15. № 7. С. 3-17.
17. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. Применение комплексных WA-систем функций Кравченко к обработке временных рядов // ДАН РАН. 2011. Т. 436. № 5. С. 615–622.
18. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. Аналитические двумерные WA-системы функций Кравченко-Рвачева и их физические свойства // ДАН РАН. 2011, Т. 439. № 3. С. 336–341.
19. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. Атомарные функции и непараметрические оценки плотности вероятности // ДАН РАН. 2011, Т. 440. № 2. С. 182–186.
20. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. Применение семейства атомарных функций к задачам непараметрической оценки плотности вероятности // Электромагнитные волны и электронные системы. 2011. Т. 16. № 8. С. 44-52.

21. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. Аналитические двумерные WA-системы функций Кравченко-Рвачева в задачах цифровой обработки сигналов и изображений. Обзор // Электромагнитные волны и электронные системы. 2011. Т. 16. № 9. С. 7-32.
22. Кравченко В.Ф., Кравченко О.В., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. Атомарные функции и WA-системы функций в современных проблемах радиофизики и техники. Обзор // Электромагнитные волны и электронные системы. 2011. Т. 16. № 10. С. 38-53.
23. Кравченко В.Ф., Кравченко О.В., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. Атомарные функции в современных проблемах радиофизики. Обзор // Физические основы приборостроения. 2011. Т.1.№1. С. 3-48.
24. Чуриков Д.В. Комплексные WA-системы функций Кравченко в обработке временных рядов // Нелинейный мир. 2011. Т.9. №1. С.31-32.
25. Чуриков Д.В. Атомарная функция $h_a(x)$ в задаче непараметрической оценки функции плотности вероятности // Нелинейный мир. 2012. №2. Т. 10. С. 108-109.
26. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. Цифровая обработка сигналов на основе обобщенных теорем отсчетов Кравченко-Котельникова-Левитана // Радиотехника и электроника. 2012. Т. 57. №9. С.1039-1048.
27. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. WA-системы функций Кравченко-Рвачева и их модификации в анализе сверхширокополосных сигналов // ДАН РАН. 2013. Т. 449. №5. С. 530–534.
28. Чуриков Д.В. Интегральные непараметрические оценки плотности вероятности на основе атомарных функций // Нелинейный мир. 2013. Т. 11. № 2. С. 128-131.
29. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. Новый класс весовых и WA-систем функций Кравченко-Кайзера // ДАН РАН. 2014. Т. 456. № 3. С. 295-298.
30. Кравченко В. Ф., Кравченко О. В., Пустовойт В. И., Чуриков Д. В. Применение семейств атомарных, WA-систем и R-функций в современных проблемах радиофизики. Часть I // Радиотехника и электроника, 2014. Т. 59. № 10. С. 949–978.
31. Данилычев М.В., Кравченко В.Ф., Кутуза Б.Г., Чуриков Д.В. Спутниковые СВЧ радиометрические комплексы дистанционного зондирования Земли. Современное состояние и тенденции развития // Физические основы приборостроения. 2014. Т. 3. № 1 (10). С. 3-25
32. Кравченко В.Ф., Кравченко О.В., Луценко В.И., Луценко И.В., Чуриков Д.В. Восстановление информационных параметров природных сред с использованием атомарных и WA-систем функций. Обзор. Часть I. Применение теории полумарковских полей и финитных функций для описания нестационарных процессов // Физические основы приборостроения. 2014. Т. 3. № 2 (11). С. 3-17.

33. Кравченко В. Ф., Кравченко О. В., Пустовойт В. И., Чуриков Д. В., Юрин А.В. Применение семейств атомарных, WA-систем и R-функций в современных проблемах радиофизики. Часть II // Радиотехника и электроника. 2015. Т. 60. № 2. С. 109-148.
34. Кравченко В.Ф., Кравченко О.В., Коновалов Я.Ю., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. Применение семейств атомарных, WA-систем и R-функций в современных проблемах радиофизики. Часть III // Радиотехника и электроника. 2015. Т. 60. № 7. С. 663-694.
35. Кравченко В. Ф., Кравченко О. В., Пустовойт В. И., Чуриков Д. В., Юрин А.В. Применение семейств атомарных, WA-систем и R-функций в современных проблемах радиофизики. Часть IV // Радиотехника и электроника. 2015. Т. 60. № 11. С. 1113-1152.
36. Кравченко В. Ф., Кравченко О. В., Чуриков Д. В., Атомарные функции в задачах фильтрации и цифровой обработки сигналов // Физические основы приборостроения. 2015. Т. 4. № 2 (15). С. 5-53.

I.II. Статьи в иностранных журналах, включенных в международные системы цитирования Web of Science и Scopus

37. Kravchenko V.F., Churikov D.V. A New Class of Orthogonal Kravchenko WA-system functions $\{\widetilde{h}_a(t)\}$ // Telecommunications and Radio Engineering. Vol. 68. No. 8. P. 649-666. 2009.
38. Kravchenko V.F., Churikov D.V., and Yurin A.V. Analytical Description of Complex Shape Locus with the Help of R-Operations and Atomic Functions. The Digital Signal and Image Processing // Telecommunications and Radio Engineering. 2011. Vol. 70. No. 4. P. 283 – 323.
39. Kravchenko V.F., Churikov D.V. Analytical Kravchenko-Kotelnikov and Kravchenko-Levitan Wavelets in the Digital UWB Signal Processing // Telecommunications and Radio Engineering. 2011. Vol. 70. No. 9. P. 759-786.

I.III. Статьи в иностранных журналах, не включенных в международные системы цитирования

40. Kravchenko V. F., Churikov D. V. Kravchenko Atomic Transforms in Digital Signal Processing // Journal of Measurement Science and Instrumentation. 2012. Vol.3. No.3. P. 228-234.
41. Kravchenko V. F., Churikov D. V. New WA-System of Kravchenko Functions in Digital Signal Processing // Journal of Measurement Science and Instrumentation. 2012. Vol.3. No.4. P. 345-351.
42. Kravchenko V. F., and Churikov D. V. Kravchenko probability weight functions in problems of radar signals correlation processing // Journal of Measurement Science and Instrumentation. 2013. Vol.4. No.3. P. 231-237.

II. Материалы в трудах научных конференции

II.1. Публикации в трудах международных конференций

43. Чуриков Д.В. Применение R-функций в задаче анализа и распознавания изображений // Нижний Новгород: IV Международная научно-техническая конференция «Физика и технические приложения волновых процессов», 3-9 октября. 2005. С. 104-105.
44. Чуриков Д.В., Кравченко О.В. Цифровая обработка картографической информации R-функциями, атомарными функциями и вейвлетами // Труды Международной конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применение», Москва. 2006. С.440-442.
45. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. Преобразования Кравченко-Котельникова-Вигнера в цифровой обработке нелинейных сигналов // Труды 5-й Международной научно-технической конференции «Физика и технические приложения волновых процессов». Самара. 2006. С. 50-55.
46. Churikov D.V. Construction of 2D Filters for Digital Signal and Image Processing on Basis of the Kravchenko Weight Functions and R-operations in Millimeter Range // VI International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves, MSMW'07 Symposium Proceedings. Vol. 2. Kharkov, June 25-30. 2007. P.935-937.
47. Чуриков Д.В. Цифровая обработка сигналов и изображений R-функциями и атомарными функциями // Труды Международной конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применение, Москва. 2007. С.329-331.
48. Гуляев Ю.В., Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Новый класс вейвлет-модулированных окон Кравченко-Котельникова и Кравченко-Левитана в цифровой обработке сверхширокополосных сигналов // Труды 2-й Международной конференции «Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации». Суздаль. 2007.
49. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. Цифровая обработка нелинейных сигналов на основе преобразования Кравченко-Котельникова-Вигнера // Труды 2-й Международной конференции «Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации». Суздаль. 2007.
50. Churikov D.V. Construction 2D Filters for Digital Signal and Image Processing on Basis of the Kravchenko Weight Functions and R-Operations in Millimeter Range // Proceedings of 2007 International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves, Session H: R-functions, Atomic Functions, Wavelets, Fractals (3 p.)
51. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Синтез функции неопределенности радиолокационных сигналов на основе семейства атомарных функций // Труды Международной конференции «Радиолокация и радиосвязь», ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. 2007. Москва.

52. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Спектральный анализ и синтез радиолокационных сигналов на основе преобразований Кравченко-Котельникова-Вигнера и Кравченко-Левитана-Вигнера // Труды Международной конференции «Радиолокация и радиосвязь», ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. Москва. 2007.
53. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. Преобразования Кравченко-Котельникова-Вигнера в цифровой обработке нелинейных сигналов // Труды Международной конференции «Физика волновых процессов и радиотехнические системы». 2007. Т. 10. №3. С. 50-55.
54. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Построение новых вейвлетов Кравченко на основе атомарной функции $h_a(t)$ // Труды 10-й международной конференции и выставки Цифровая обработка сигналов и её применение, Москва. 2008. С.153-156.
55. Kravchenko V.F., Churikov D.V. A new Class of Orthogonal Kravchenko Wavelets // Proceedings of International Conference RVK08 and MMWP08, Växjö, Sweden, June 9-13. 2008. P.39-43.
56. Kravchenko V.F., Churikov D.V. Kravchenko-Kotel'nikov-Wigner Distributions in Radio Physical Applications. Proc. Int. conference "DAYS on DIFFRACTION", St.Petersburg, Russia, June 3-6. 2008. P. 87-88.
57. Kravchenko V.F., Churikov D.V. Spectral Estimation and Digital UWB Signal Processing by Atomic Functions and Wavelets // The Fourth International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, 15-19 September. 2008, Sevastopol, Ukraine. 2008.
58. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Синтез двумерных весовых функций (окон) на основе атомарных и R-функций в радиолокации // Труды Международной конференции «Радиолокация и радиосвязь», ИРЭ им.В.А.Котельникова РАН. Москва. 2008.
59. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Теория R-функций в пространственно-временной обработке сигналов и изображений // Украинский математический конгресс. Львов. 2009. (<http://www.imath.kiev.ua/~congress2009/>)
60. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Атомарные и R- функции в синтезе двумерных цифровых КИХ фильтров со сложной частотной избирательностью // Труды 11-й международной конференции и выставки Цифровая обработка сигналов и её применение, Москва. 25-27 марта 2009. 2009. С. 141-144.
61. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Обобщенная теорема Кравченко-Котельникова в задачах корреляционной обработки информации // Труды Международной научной конференции «Излучение и рассеяние электромагнитных волн» ИРЭМВ-2009. 27 июня – 1 июля, Таганрог-Дивноморское, Из-во ТТИ ЮФУ. 2009. С.431-433.
62. Kravchenko V.F., Churikov D.V. The Theory of Spectral Estimation of Signals and Generalized Kravchenko-Kotel'nikov-Levitan Theorems. Proc. Progress in Electromagnetics Research Symposium, August 18-21. 2009, Moscow, RUSSIA, The Electromagnetics Academy. 2009. P. 241-244.

63. Churikov D. V. Application of the Theory of R-functions to the Analysis and Synthesis of Multidimensional Signals. Proc. Progress in Electromagnetics Research Symposium, August 18-21. 2009, Moscow, RUSSIA, The Electromagnetics Academy. 2009. P. 245-248.
64. Churikov D.V. Construction of New Kravchenko-Kotel'nikov-Chebyshev-Legendre Spectral Kernels and Their Application in Digital Multidimensional Signals Processing // Proc. Progress in Electromagnetics Research Symposium, August 18-21. 2009, Moscow, RUSSIA, The Electromagnetics Academy. 2009. P. 251-254.
65. Кравченко В.Ф., Кравченко О.В., Сафин А.Р., Чуриков Д.В. Применение новых вероятностных весовых функций в цифровой обработке сигналов // Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи им. А.С.Попова. Серия: Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации. Выпуск III. 3 Международная конференция, 22-24 сентября 2009. Суздаль, Россия. С.9-17.
66. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Спектральная оценка двумерных сигналов на основе ядер обобщенного ряда Кравченко-Котельникова. Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова. Серия: Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации. Выпуск III. 3 Международная конференция, 22-24 сентября 2009. Суздаль, Россия. С.214-216.
67. Кравченко В.Ф., Чуриков Д. В. Новые методы корреляционной обработки радиолокационных сигналов семейством атомарных функций. Пленарный доклад. Труды 3 международной конференции «Радиолокация и радиосвязь», ИРЭ им. В.А.Котельникова РАН, 26 - 30 октября 2009. Т. 1, Москва. С. 3-16. (в электронном: с. 974-989)
68. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Цифровая обработка широкополосных сигналов атомарными функциями в антенной технике // Труды 3 международной конференции «Радиолокация и радиосвязь», ИРЭ им. В.А.Котельникова РАН, 26 - 30 октября 2009. Т. 2, Москва. С. 198-201. (в электронном: с. 916-921)
69. Kravchenko V., Meana H.P., Ponomaryov V., Churikov D. Spectral Estimation of Digital Signals by the Orthogonal Kravchenko Wavelets $\{\widetilde{h}_a(t)\}$ // Progress in Pattern Recognition, Image Analysis, Computer Vision, and Applications. Edited by Eduardo Bayro-Corrochano, Jan-Olof Eklundh. Proc. of 14th Iberoamerican Conference on Pattern Recognition, CIARP2009, Guadalajara, Jalisco, Mexico, November 15-18. Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. 2009. P. 989-996.
70. Kravchenko V.F., Churikov D.V. New constructions of Kravchenko-Kotel'nikov-Chebyshev-Legendre spectral kernels in time-and-frequency distributions // Prog. Int. conference "DAYS on DIFFRACTION", St. Petersburg, Russia. 2009.

71. Kravchenko V.F., Churikov D.V. Digital Signal and Image Processing on Basis of Orthogonal Kravchenko Wavelets $\{\widehat{h}_a(t)\}$ // Prog. Int. Conference "DAYS on DIFFRACTION", St. Petersburg, Russia. 2009.
72. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Модифицированные спектральные ядра Наги в цифровой обработке сигналов // Труды 12-й Международной конференции и выставки Цифровая обработка сигналов и её применение, Москва. 2010. Т. 1. С.145-148.
73. Kravchenko V.F., Churikov D.V. Radial Atomic Functions in Digital Signal Processing // Proc. Int. Conference "DAYS on DIFFRACTION", St. Petersburg, Russia, June 8-11. 2010. P. 99-101.
74. Kravchenko V.F., Churikov D.V. New Analytical WA-Systems of Kravchenko Functions // Proc. Int. Conference "DAYS on DIFFRACTION", St. Petersburg, Russia, June 8-11. 2010. P. 93-98.
75. Churikov D.V. Analytical Kravchenko Wavelets in the Digital UWB Signal Processing // Proceedings of 2010 International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves, Session H: R-functions, Atomic Functions, Wavelets, Fractals, H-8.
76. Churikov D.V. Atomic Functions in Problems of Interference UWB Signal Receiving // Proceedings of 2010 International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves, Session H: R-functions, Atomic Functions, Wavelets, Fractals, H-9.
77. Kravchenko V. F., Churikov D. V. Modified Nagy Kernels in Digital UWB Signal Processing // Proc. of 2010 International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves, Session H: R-functions, Atomic Functions, Wavelets, Fractals, H-10. (3 p.)
78. Kravchenko V.F., Churikov D.V. New Kravchenko Transforms and Digital UWB Signal Processing // Proc. Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, 6-10 September. 2010, Sevastopol, Ukraine. 2010. P. 54-58.
79. Kravchenko V.F., Churikov D.V. Atomic Distributions in SAR Problems // Proc. Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, 6-10 September. 2010, Sevastopol, Ukraine. 2010. P. 59-61.
80. Churikov D.V. New Analytical Kravchenko wavelets in Spectral Estimation of UWB Signals // Proc. Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, 6-10 September. 2010, Sevastopol, Ukraine. 2010. P. 59-61.
81. Kravchenko V.F., Churikov D.V. Correlation Radar Signal Processing on Basis of Probability Kravchenko Weight Functions, Proceedings of IEEE 10th International Conference on Signal Processing Proceedings (ICSP'10), October 24 – 28. 2010, Taiyangdao, Hotel Beijing, China. P. 1906-1909.

82. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Непараметрические оценки плотности вероятности и её производных на основе семейства атомарных функций // Труды 13-й международной конференции Цифровая обработка сигналов и её применение, Москва. 2011. Т. 1. С.163-165.
83. Kravchenko V.F., Churikov D.V. Atomic functions in nonparametric estimations of probability density functions and their derivatives // Proc. Int. conference "DAYS on DIFFRACTION", St.Petersburg, Russia, 30 May – 3 June. 2011. P. 75-77.
84. Kravchenko V.F., Churikov D.V. Two-dimensional analytical Kravchenko-Rvachev wavelets in digital signal and image processing // Proc. Int. conference "DAYS on DIFFRACTION", St.Petersburg, Russia, 30 May – 3 June. 2011. P. 78-82.
85. Kravchenko V.F., Churikov D.V. New constructions of complex orthogonal Kravchenko wavelets // Prog. of Int. Conference "DAYS on DIFFRACTION", St.Petersburg, Russia, 30 May – 3 June. 2011. P. 65-66.
86. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. Атомарные функции и вейвлеты в современных проблемах радиофизики. Пленарный доклад // Труды 4-ой Международная конференция «Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации». 20 – 22 сентября 2011. Суздаль, Россия. 2011. С. 6-12. (ISBN 978-5-905278-04-4)
87. Волосюк В.К., Кравченко В.Ф., Кравченко О.В., Павликов В.В., Чуриков Д.В. Атомарные функции и методы спектральной теории сигналов в современных проблемах радиофизики // Труды 4-го Международного радиоэлектронного форума «Прикладная радиоэлектроника. Состояние и перспективы развития» МРФ–2011. 18-21 октября, Харьков, Украина. С.61-66.
88. Kravchenko V. F., Churikov D. V., Ponomaryov V. I., and Perez-Meana H. M. Digital 2D and 3D Images Processing by Means of Atomic and WA-Systems of Function Families. Пленарный доклад // Труды 5-ой Международная конференция «Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации». 18 – 19 сентября 2011 г., Суздаль, Россия. 2012. С. 3-8.
89. Kravchenko V.F., Churikov D.V. The Generalized Kravchenko-Kotelnikov Sampling Theorem in problems of digital filters synthesis // Proc. Int. conference "DAYS on DIFFRACTION", St.Petersburg, Russia, 28 May – 1 June, 2012.
90. Kravchenko V.F., Churikov D.V. Integrated nonparametric estimations of probability density of stochastic processes by atomic functions // Proc. Int. conference "DAYS on DIFFRACTION", St.Petersburg, Russia, 28 May - 1 June, 2012. P. 152-157.
91. Kravchenko V.F., Churikov D.V. New constructions of digital filters synthesis on base of generalized Kravchenko-Kotelnikov sampling theorem // Proc. Int. conference "DAYS on DIFFRACTION", St.Petersburg, Russia, 28 May - 1 June, 2012. P. 158-163.

92. Kravchenko V.F., Churikov D.V., Ponomaryov V.I., and Perez-Meana H.M. WA-Systems of Functions in Reconstruction and Visualization of 2D and 3D Images // Proc. Progress in Electromagnetics Research Symposium, August 19-23, 2012, Moscow, Russia, The Electromagnetics Academy, 2012. P. 40-44.
93. Kravchenko V. F., Konovalov Ya. Yu., Churikov D. V. Nonparametric Estimations of Probability Density Functions Based on The Family of Atomic Functions $ch_{a,n}(x)$ in Problems of Digital Signal Processing // Proc. Progress in Electromagnetics Research Symposium, August 19-23, 2012, Moscow, RUSSIA, The Electromagnetics Academy, 2012. P. 45-49.
94. Kravchenko O.V., Churikov D. V. Wavelet Approximation of Discontinuous Solutions in EHD Model of Charged Jet Flow // Proc. Progress in Electromagnetics Research Symposium, August 19-23, 2012, Moscow, RUSSIA. The Electromagnetics Academy. 2012. P. 1236.
95. Kravchenko V.F., Pustovoi V.I., and Churikov D.V. Application of Generalized Kravchenko-Kotelnikov-Levitan Sampling Theorems for Signal Filtration // Proc. Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, 17-21 September, 2012, Sevastopol, Ukraine, 2012. P. 220-222. (<http://uwbusis.org.ua/>)
96. Kravchenko V.F., Churikov D.V. The New Modified Kernels and Weight Functions in the Generalized Kravchenko--Kotelnikov Sampling Theorem // Proc. Int. conference "DAYS on DIFFRACTION", St.Petersburg, Russia, 27 – 31 May, 2013.
97. Кравченко В.Ф., Кравченко О.В., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. Обобщенные теоремы отсчетов Кравченко-Котельникова-Стрэнга-Фикса в физических приложениях. Обзор. Пленарный доклад // 6-я Международная конференция "Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации". 2013. С. 16-23.
98. Данилычев М.В., Кравченко В.Ф., Кутуза Б.Г., Чуриков Д.В. Современное состояние и тенденции развития в спутниковой СВЧ радиометрии. Пленарный доклад // Труды 7-й Международной конференции "Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации". М.: Изд-во НТЦ УП РАН, 2014. С. 21-28.
99. Kravchenko, V.F., Kravchenko, O.V., Churikov, D.V. Analytic Kravchenko-Kaiser Wavelets and their Physical Properties // Proc. Int. conference "DAYS on DIFFRACTION", St. Petersburg, Russia, June 3-6, 2014. P. 168.
100. Коновалов Я.Ю., Кравченко В.Ф., Кравченко О.В., Чуриков Д.В. Новое семейство ортогональных вейвлетов на основе атомарных функций $ch_{a,n}$. Пленарный доклад // Труды 8-й Международной конференции "Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации". М.: Изд-во НТЦ УП РАН, 2015. С. 8-12.

101. Churikov D.V., Konovalov Ya.Yu., Kravchenko O.V., Kravchenko V.F. Implementation of modified Sinc-collocation method to linear two-point boundary value Problem // Proc. Int. conference "DAYS on DIFFRACTION", St. Petersburg, Russia, 25-29 May, 2015. P. 37-38.
102. Kravchenko V.F., Kravchenko O.V., Churikov D.V. Construction of filter systems with reference areas of complex geometry in the frequency and time spaces on the basis of R-functions theory // Prog. Int. conference "DAYS on DIFFRACTION", St. Petersburg, Russia, 25-29 May, 2015. P. 70-71.
103. Kravchenko V.F., Kravchenko O.V., Churikov D.V. FIR-filters on basis of atomic functions in problems of boundary value problems of diffraction and signal processing // Prog. Int. conference "DAYS on DIFFRACTION", St. Petersburg, Russia, 25-29 May, 2015. P. 71-72.
104. Kravchenko V.F., Kravchenko O.V., Konovalov Y.Y., Churikov D.V. Generalization of Kravchenko wavelets based on the family of atomic functions $ch_{a,n}$ // Proceedings of Int. conference "DAYS on DIFFRACTION 2015", St. Petersburg, Russia, 25-29 May, 2015. P. 180-184.
105. Churikov D.V., Volosyuk V.K., Kravchenko V.F., Kravchenko O. V., Pavlikov V.V., and Pustovoit V.I. Atomic Functions Theory: 45 Years Behind Dedicated to the Pioneer of Atomic Functions Theory V. L. Rvachev // Proc. Int. Conf. 9th International Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves MSMW'2016. Inv-9.
106. Kravchenko O.V., Kravchenko V.F., Churikov D.V. Application of $ch_{\{a,n\}}$ atomic basis to numerical simulation of wave propagation problem // Prog. Int. Conf. DAYS on DIFFRACTION 2016.

II. II. Публикации в трудах Всероссийских конференций

107. Чуриков Д.В. Региональная научно-техническая конференция «Прогрессивные технологии, конструкции и системы в приборо- и машиностроении», Калуга . 2001. С. 43.
108. Чуриков Д.В. Региональная научно-техническая конференция «Прогрессивные технологии, конструкции и системы в приборо- и машиностроении», Калуга. 2002. С. 5.
109. Чуриков Д.В. Применение атомарных функций и R-функций к задаче выделения сложных контурных сигналов из зашумленных изображений // Труды 60-й научной сессии, посвященной Дню радио. 2005. С.236-238.
110. Чуриков Д.В. Алгоритм описания объектов сложной формы в геоинформационных системах на основе теории R-функций // Труды 61-й научной сессии, посвященной Дню радио. 2006. С.46-48.

111. Чуриков Д.В. Контурный анализ изображений на основе семейства вейвлетов Кравченко-Рвачева // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2006. Самара. С. 35.
112. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Преобразование Кравченко-Вигнера и обобщенные ряды Котельникова на основе атомарных функций в нелинейной цифровой обработке сигналов // XI Всероссийский школа-семинар «Физика и применение микроволн». Звенигород. Московская область, 21-26 мая. 2007. Часть 6. С.48-51.
113. Чуриков Д.В. Построение двумерных фильтров на основе весовых функций Кравченко и R-операций // Труды 62-й Научной сессии, посвященной Дню Радио, Москва. 2007. С.293-295.
114. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Пространственно-временное преобразование радиолокационных сигналов на основе ортогональных вейвлетов Кравченко // Труды 63-й Научной сессии, посвященной Дню Радио, Москва. 2008. С. 58-60.
115. Чуриков Д.В. Цифровая обработка сигналов при передаче информации спектральными ядрами Наги // Труды 65-й Научной сессии, посвященной Дню радио, Москва. 2010. С. 145-148.
116. Кравченко В.Ф., Кравченко О.В., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. Атомарные функции и спектральная теория сигналов в современных проблемах физики и техники. Пленарный доклад // Труды Всероссийская радиоастрономическая конференция «Радиотелескопы, аппаратура и методы радиоастрономии», ВРК-2011. 17-21 октября 2011. Санкт Петербург. 2011.
117. Кравченко В.Ф., Кравченко О.В., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. Применение теории R-функций, атомарных и WA-систем функций в информационных технологиях. Обзор. Пленарный доклад // Труды 67-й Научной сессии, посвященной Дню Радио 16-17 мая 2012, Москва, 2012. С. III-VIII.
118. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Атомарных функции и интегральные непараметрические оценки плотности вероятности случайных процессов // Труды 67-й Научной сессии, посвященной Дню Радио 16-17 мая 2012, Москва, 2012. С. 83-86.
119. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Обобщенная теорема отсчетов Кравченко-Котельникова в задачах синтеза цифровых фильтров // Труды 67-й Научной сессии, посвященной Дню Радио 16-17 мая 2012, Москва, 2012. С. 86-90.
120. Кравченко В.Ф., Кравченко О.В., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. Новые методы цифровой обработки сигналов семейством атомарных функций. Пленарный доклад // 9-я Всероссийская конференция с иностранным участием «Радиолокация и радиосвязь». 23-25 ноября 2015.

ГЛАВА 1. АТОМАРНЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ ФИЛЬТРАЦИИ И ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Рассмотрены методы весовой обработки радиолокационных сигналов, конструкции весовых функций и улучшение их физических характеристик [8-31]. Исследованы обобщенные ряды отсчетов на основе атомарных функций [25, 31-35]. Построены новые конструкции КИХ-фильтров и проведен их физический анализ [25, 31-35]. Рассмотрено непараметрическое оценивание функции плотности вероятности и её производных 1- и 2-го порядков последовательностей случайных величин с помощью предложенных весовых функций [25, 35-46].

1.1. Основные системы атомарных функций

Рассмотрим [8,20,25] кратко основные используемые в диссертационной работе атомарные функции (АФ).

Атомарная функция $fup_N(x)$ составляется из свертки финитного сплайна N -го порядка $\theta_N(x)$ и функции $up(x)$

$$fup_N(x) = \theta_N * up(2x) = \theta_{N-1} * up(x), \quad (1.1)$$

причем $fup_0(x) \equiv up(x)$.

Функцию $fup_N(x)$ можно записать с помощью интеграла Фурье

$$fup_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(jux) \left(\frac{\sin(u/2)}{u/2} \right)^N \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(u2^{-k})}{u2^{-k}} du, \quad (1.2)$$

В отличие от финитного сплайна $\theta_N(x)$, имеющего не более $N-1$ непрерывных производных, функция (1.2) является бесконечно дифференцируемой. Для каждого N она четная, положительная, с носителем

$$\left[-(N+2)/2; (N+2)/2 \right]$$

и охватывает единичную площадь

$$\int_{-(N+2)/2}^{(N+2)/2} fup_N(x) dx = 1. \quad (1.3)$$

Производная $fup_N(x)$ может быть выражена через $fup_{N-1}(x)$ так

$$fup'_N(x) = fup_{N-1} \left(x + \frac{1}{2} \right) - fup_{N-1} \left(x - \frac{1}{2} \right). \quad (1.4)$$

Атомарные функции $h_a(x)$ являются финитными решениями функционально-дифференциального уравнения вида

$$y'(x) = \frac{a^2}{2}(y(ax+1) - y(ax-1)), \quad (1.5)$$

где a — любое действительное число, $a > 1$. Функция запишется так

$$h_a(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(jux) \prod_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{a^k}\right) du \quad (1.6)$$

При $a=2$ получаем частный случай $h_2(x) \equiv \operatorname{up}(x)$. Основным свойствам функции $h_a(x)$ являются следующие:

1. Компактность носителя $h_a(x) \equiv 0 \quad \forall x \notin \left[-\frac{1}{a-1}; \frac{1}{a-1}\right], a > 2$.
2. Наличие плоской вершины $h_a(t) = \frac{a}{2}$ на отрезке $x \in \left[-\frac{a-2}{a(a-1)}; \frac{a-2}{a(a-1)}\right], a > 2$.
3. Координаты точек перегиба $\left(\mp \frac{1}{a}, \frac{a}{4}\right)$.
4. Преобразование Фурье функции $h_a(x)$ имеет следующий вид:

$$\hat{h}_a(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{a^k}\right). \quad (1.7)$$

Выражение (1.7) обращается в нуль в точках $\omega = a^k \pi n, n = \pm 1, \pm 2, \dots$. В практических расчетах достаточно ограничиться небольшим числом членов бесконечного произведения (1.7), так как они с ростом k стремятся к единичному значению (см. рис. 1.1).

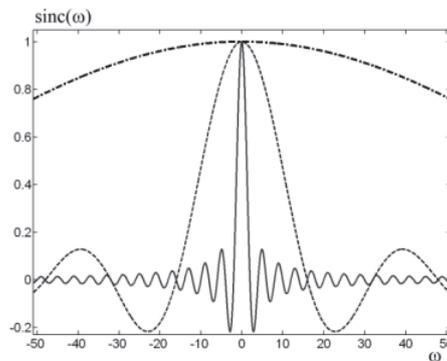


Рис. 1.1. Поведение функции $\operatorname{sinc}(\omega/2^k)$ для $k=1$ (сплошная линия), $k=4$ (пунктирная линия), $k=7$ (штрих-пунктирная линия).

5. Производные $h_a(x)$ выражаются через сдвиги-сжатия самой функции рекуррентно с помощью соотношения

$$h_a^{(n)}(x) = 2^{-n} a^{\frac{n(n+3)}{2}} \sum_{k=1}^{2^n} \delta_k h_a \left(a^n x + \sum_{j=1}^n a^{j-1} (-1)^{p_j(k-1)} \right), \quad (1.8)$$

где $\delta_1 = 1$, $\delta_{2k} = -\delta_k$, $\delta_{2k-1} = \delta_k$, $k = 1, 2, \dots$, а $p_j(k)$ – число, стоящее в j -м разряде двоичного разложения числа k , то есть $p_j(k) = [k \cdot 2^j] \bmod 2$.

Рисунок 1.2 поясняет свойства 1-3. Графики поведения функций $h_a(x)$ и её первой производной представлены на рис. 1.3.

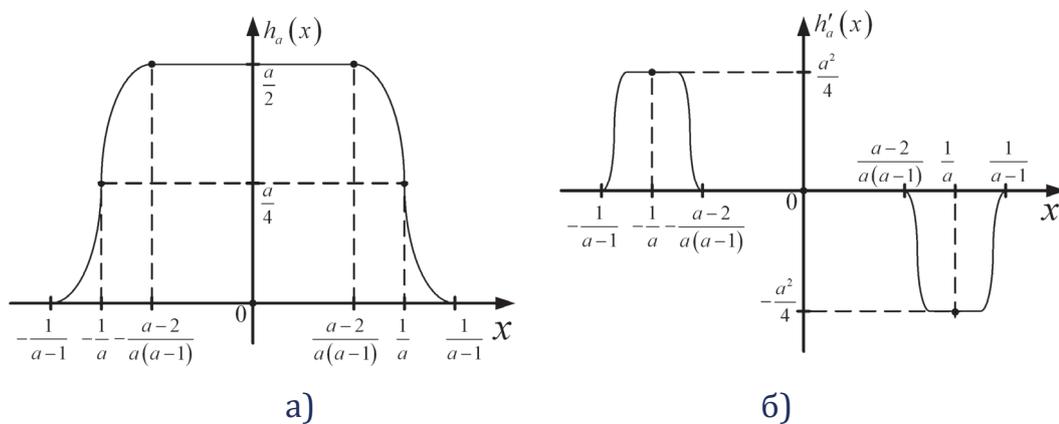


Рис. 1.2. Характер поведения атомарной функции $h_a(x)$ (а) и её производной (б).

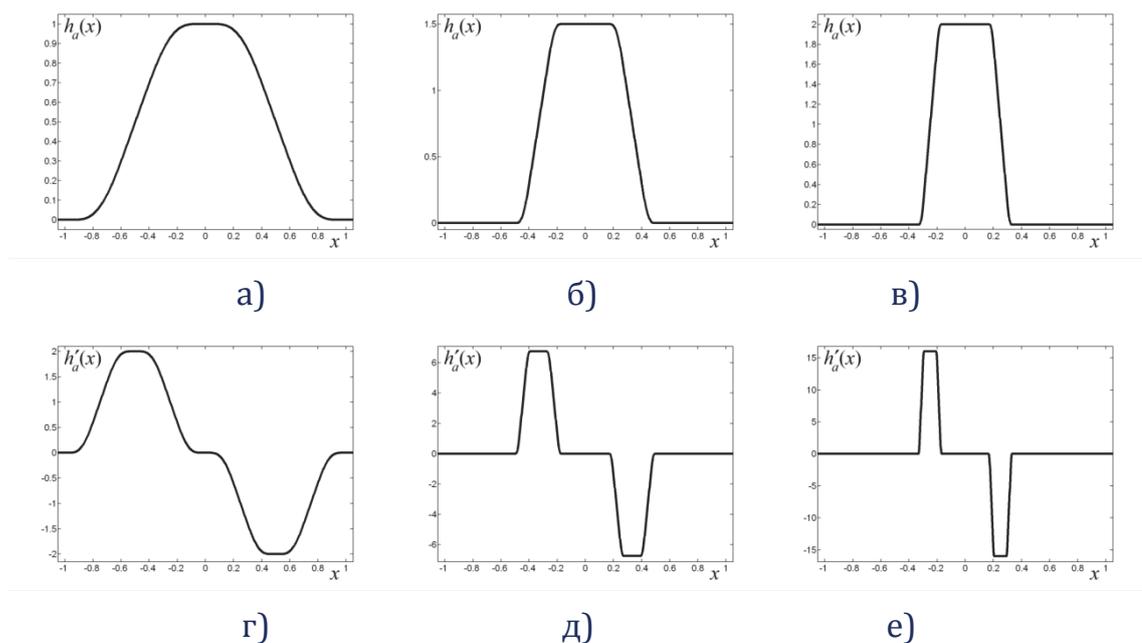


Рис. 1.3. Поведение атомарные функции $h_a(x)$ а), в), д) и её первой производной б), г), е) для $a = 2, 3, 4$.

1.2. Конструкции весовых функций и улучшение их физических характеристик

1.2.1. Весовые функции Кравченко-Кайзера

Рассмотрим на примере атомарной функции $\text{fup}_N(x)$ [20] и весовой функции Кайзера [29] построение новой весовой функции, обладающей более низким уровнем боковых лепестков. Воспользуемся модифицированной функцией $w_{2N} = \text{fup}_N\left(\frac{2x}{N+2}\right)$.

Функция Кайзера-Бесселя [20, 29] определяется так

$$K(x) = \frac{1}{I_0(\pi a)} I_0\left(\pi a \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{T_{\text{мод}}}\right)^2}\right), \quad x \in [-T_{\text{мод}}/4, T_{\text{мод}}/4]. \quad (1.9)$$

Здесь $I_0(*)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода. Нормированное время $x_{\text{нк}} = (k - \varepsilon - \varphi/\pi)\eta$ служит для попадания отсчетов выборки в нули функции разностной частоты.

Конструкции весовых функций Кравченко-Кайзера получим [29] с помощью операции прямого произведения

$$w_{\text{ККз}} = \frac{1}{\text{fup}_N(0)} \text{fup}_N\left(\frac{2x}{N+2}\right) \times \frac{I_0(\pi a \sqrt{1-x^2})}{I_0(\pi a)}. \quad (1.10)$$

Эта функция обладает компактным носителем и зависит от двух параметров. Качество функций [8, 25] определяется физическими характеристиками приведенными в Приложении 1 и приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1. Физические характеристики
функций Кравченко-Кайзера

β	N	γ_3	γ_4/γ_3	γ_2/γ_3	γ_7	γ_9	МПП
6	5	2.841	1.368	4.579	0.373	-80.0	3.73
7	3	2.692	1.444	6.500	0.380	-81.8	3.69
7	5	2.841	1.421	5.053	0.357	-86.6	3.85
8	3	2.841	1.421	6.368	0.364	-89.4	3.80
8	5	2.991	1.450	5.300	0.343	-91.1	3.96
9	3	2.991	1.400	6.250	0.349	-95.6	3.91

1.2.2. Весовые функции Кравченко-Наттолла

Функция Наттолла [31] задаётся выражением

$$w_N = a_0 - a_1 \cos\left(2\pi \frac{(x+1)}{2}\right) + a_2 \cos\left(4\pi \frac{(x+1)}{2}\right). \quad (1.11)$$

Наборы коэффициентов представлены в табл. 1.2.

Таблица 1.2. Коэффициенты некоторых весовых функций Наттала

Весовая функция	a_0	a_1	a_2
$w_{N,1}$	0.53836	0.46164	0
$w_{N,2}$	0.42323	0.49755	0.07922
$w_{N,3}$	0.44959	0.49364	0.05677
$w_{N,4}$	0.375	0.5	0.125
$w_{N,5}$	0.40897	0.5	0.09103
$w_{N,6}$	0.4243801	0.4973406	0.0782793

Используем [8,20,25,31] весовые функции Кравченко-Рвачева

$$\begin{aligned} w_1(t) &= \text{up}(t), \quad w_2(t) = \text{up}(t) + 0.01\text{up}''(t), \quad w_3(t) = \text{fup}_1(3t/2) / \text{fup}_1(0), \\ w_4(t) &= (\text{fup}_1(3t/2) + 0.0056\text{fup}_1''(3t/2)) / (\text{fup}_1(0) + 0.0056\text{fup}_1''(0)), \quad (1.12) \\ w_5(t) &= h_{3/2}(t), \quad w_6(t) = \Xi_2(t) / \Xi_2(0). \end{aligned}$$

Их физические характеристики приведены в табл. 1.3. Функционал качества имеет вид

$$J = \frac{1}{4} \left((1 - \gamma_7) + (2 - \log_{10}(-\gamma_9)) + (\gamma_{11} - 3) + (\Delta - 0.5) \right). \quad (1.13)$$

Весовые функции, построенные с помощью прямого произведения

$$w_{NK,(k,n)}(t) = w_k(t) \cdot w_{N,n}(t), \quad k = 1, \dots, 6, \quad n = 1, \dots, 6. \quad (1.14)$$

Весовые функции, построенные с помощью свертки определены так

$$cw_{NK,(k,n)}(t) = \frac{1}{b} w_k(bt) \times w_{N,n}(t). \quad (1.15)$$

Параметр b введен для улучшения характеристик $cw_{NK,(k,n)}(t)$ и выбирается таким образом, чтобы первый ноль функции $w_k(bt)/b$ положением совпал с максимумом боковых лепестков $w_{N,n}(t)$. Их физические характеристики представлены в табл. 1.4.

**Таблица 1.3. Физические характеристики
весовых функций Кравченко-Рвачева и Наттолла**

№№	γ_2 / γ_3	γ_3	γ_4 / γ_3	γ_7	γ_8	γ_9	γ_{10}	γ_{11}	Δ
Функции Кравченко-Рвачева									
1	2.625	2.391	1.375	0.500	1.618	-23.3	1.211	3.300	0.543
2	2.800	2.242	1.333	0.500	1.499	-31.1	1.428	3.185	0.520
3	3.500	2.690	1.444	0.387	1.863	-37.2	0.934	3.636	0.505
4	3.706	2.541	1.412	0.387	1.760	-50.9	1.055	3.510	0.503
5	3.000	3.139	1.381	0.500	2.118	-36.3	0.719	3.978	0.507
6	3.316	2.840	1.368	0.535	1.904	-51.9	0.898	3.694	0.503
7	3.500	2.690	1.444	0.378	1.895	-34.0	0.900	3.676	0.508
Функции Наттала									
1	3.231	1.943	1.462	0.538	1.367	-43.2	1.740	3.099	1.036
2	3.706	2.541	1.353	0.423	1.708	-70.5	1.129	3.455	0.504
3	3.688	2.391	1.375	0.450	1.611	-62.1	1.267	3.337	0.520
4	3.316	2.840	1.421	0.375	1.944	-46.7	0.863	3.751	0.503
5	3.706	2.541	1.412	0.409	1.772	-64.2	1.045	3.530	0.502
6	3.938	2.391	1.438	0.424	1.704	-71.1	1.135	3.449	0.505

**Таблица 1.4. Физические характеристики
весовых функций Кравченко-Наттолла**

k	n	γ_2 / γ_3	γ_3	γ_4 / γ_3	γ_7	γ_8	γ_9	γ_{10}	γ_{11}	Δ	J
$w_{NK,(k,n)}(t)$											
1	1	2.842	2.840	1.421	0.397	1.934	-29.5	0.858	3.722	0.516	0.468
1	3	3.050	2.989	1.450	0.361	2.087	-32.5	0.742	3.938	0.510	0.519
2	1	3.389	2.690	1.444	0.384	1.889	-41.0	0.918	3.680	0.505	0.422
2	3	3.850	2.989	1.400	0.348	2.066	-42.1	0.773	3.925	0.503	0.489
$cw_{NK,(k,n)}(t)$											
1	4	2.923	1.943	1.385	0.566	1.306	-38.6	1.896	3.055	1.044	0.362
1	5	3.000	1.794	1.417	0.582	1.271	-35.7	1.998	3.041	1.294	0.425
2	4	3.000	1.794	1.417	0.585	1.265	-35.3	2.017	3.038	1.345	0.438
3	2	3.308	1.943	1.385	0.551	1.325	-37.3	1.853	3.073	1.042	0.373
3	4	3.692	1.943	1.462	0.520	1.395	-41.2	1.680	3.125	0.764	0.313
3	5	3.462	1.943	1.385	0.542	1.344	-38.4	1.802	3.086	0.947	0.352
4	2	3.077	1.943	1.385	0.563	1.299	-35.9	1.923	3.059	1.190	0.408
4	5	3.231	1.943	1.385	0.555	1.316	-36.8	1.875	3.068	1.087	0.384
5	2	3.615	1.943	1.462	0.525	1.381	-40.2	1.712	3.115	0.812	0.324
5	3	3.462	1.943	1.385	0.543	1.342	-38.3	1.808	3.084	0.955	0.353
5	4	4.857	2.092	1.429	0.491	1.472	-47.1	1.518	3.196	0.609	0.285
6	2	3.385	1.943	1.385	0.546	1.334	-37.7	1.828	3.080	1.000	0.365
6	4	3.500	2.092	1.357	0.514	1.408	-41.7	1.652	3.136	0.734	0.309
6	6	3.385	1.943	1.385	0.547	1.333	-37.6	1.832	3.079	1.008	0.366
7	4	3.500	2.092	1.357	0.516	1.405	-41.9	1.657	3.133	0.734	0.307
7	6	3.385	1.943	1.385	0.548	1.331	-37.6	1.837	3.077	1.012	0.366

1.3. Конструкции КИХ-фильтров на основе атомарных функций

В современных радиофизических задачах стоит вопрос построения систем фильтров, обладающих хорошей частотной избирательностью и минимизирующих ошибки, связанные с цифровой обработкой сигналов. В данном разделе предлагаются новые конструкции цифровых фильтров [1-4,8], построенных на основе АФ [8,20-22]. Они определяются через обобщенные теоремы отсчетов Кравченко-Котельникова (КК) и Кравченко-Левитана (КЛ) [20,31-35].

1.3.1. Фильтры с линейной фазовой характеристикой

Одним из важнейших свойств КИХ-фильтров [1-4,31] является возможность получения точной линейной фазовой характеристики. При прохождении сигнала через фильтр модификации подвергается амплитуда и/или фаза данного сигнала. Природа и величина изменения сигнала зависят от амплитудной и фазовой характеристик фильтра. Удобной мерой модификации фазовой характеристики сигнала является фазовая или групповая задержка фильтра. Если сигнал состоит из нескольких частотных компонентов (например, речевой или модулированный сигнал), фазовая задержка фильтра — это величина временной задержки, которую испытывает каждый частотный компонент сигнала при прохождении через фильтр. Групповая задержка — это средняя временная задержка составного сигнала. Фазовая и групповая задержки определяются так

$$T_p = -\theta(\omega)/\omega,$$
$$T_g = -d\theta(\omega)/d\omega.$$

Фильтр с нелинейной фазовой характеристикой искажает фазу проходящего через него сигнала так как частотные компоненты задерживаются на величину не пропорциональную частоте. Это нарушает их гармоническую связь. Подобное явление нежелательно во многих ситуациях (передача данных, анализ сигналов при дистанционном зондировании, корреляционная обработка и др.) и его можно избежать, используя фильтры с линейными фазовыми характеристиками в рабочем диапазоне частот.

Фильтр с линейной фазовой характеристикой удовлетворяет одному из следующих соотношений:

$$\theta(\omega) = -\alpha\omega \quad (1.16)$$

или
$$\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega, \quad (1.17)$$

где α и β — некоторые константы. Если фильтр удовлетворяет условию (1.16), у него постоянны групповая и фазовая задержки. Условие (1.17) удовлетворяется, если импульсная характеристика фильтра обладает положительной симметрией. Фазовая характеристика в этом случае является функцией длины фильтра

$$\begin{aligned} h(n) &= h(N-n-1), \\ n &= 0, 1, \dots, \lfloor (N-1)/2 \rfloor, \\ \alpha &= (N-1)/2. \end{aligned}$$

Условие (19) удовлетворяется, когда фильтр имеет только постоянную групповую задержку. В этом случае импульсная характеристика фильтра имеет отрицательную симметрию

$$\begin{aligned} h(n) &= -h(N-n-1), \\ \alpha &= (N-1)/2, \\ \beta &= \pi/2. \end{aligned}$$

КИХ-фильтры с линейной фазовой характеристикой являются важным классом в семействе фильтров и обладают свойствами, положительно влияющими на их разработку и реализацию.

1.3.2. Типы КИХ-фильтров с линейной фазовой характеристикой

Можно выделить четыре типа КИХ-фильтров [31] с линейной фазовой характеристикой, отличающихся четностью N и типом симметрии $h(n)$ (положительная или отрицательная).

Частотная характеристика типа 2 (положительно-симметричные коэффициенты и четная длина) всегда равна нулю при половине частоты дискретизации ($f = 0.5$), т.к. все частоты нормированы на частоту дискретизации.

Фильтры типов 3 и 4 (отрицательно-симметричные коэффициенты) вводят сдвиг фазы на 90° , а частотная характеристика таких фильтров всегда равна нулю при нулевой частоте. Частотная характеристика фильтров третьего типа всегда равна нулю при $f = 0.5$. Фильтры первого типа наиболее универсальны. Фильтры третьего и четвертого типов часто используются при проектировании дифференциаторов и фильтров, реализующих преобразования Гильберта, поскольку могут давать сдвиг фазы на 90° .

1.3.3. Разработка КИХ-фильтров

Разработка цифрового фильтра [3,4,31] включает пять этапов.

- **Спецификация фильтра.** На данном этапе задаётся тип фильтра, например, фильтр нижних частот, нужная амплитудная и/или фазовая характеристика и разрешенные допуски (если есть), частота дискретизации и т.д.
- **Вычисление коэффициентов.** Здесь определяются коэффициенты передаточной функции $H(z)$, которая удовлетворяет спецификациям, полученным на этапе 1.
- **Выбор структуры.** Данный этап заключается в преобразовании полученной передаточной функции в удобную для обработки форму.
- **Анализ ошибок.** Оценивается влияние квантования на коэффициенты фильтра и входные данные, а также влияние на производительность фильтра операции фильтрации с дискретными последовательностями конечной длины.
- **Реализация.** Это заключительный этап. Разрабатывается программный код и/или аппаратный блок и выполняется собственно фильтрация.

1.3.4. Построение фильтра с конечной импульсной характеристикой

Целью методов вычисления коэффициентов КИХ-фильтров является получение значений $h(n)$, при которых фильтр удовлетворяет спецификациям, относящимся к амплитудно-частотной характеристике и требованиям к пропускной способности. Разработано несколько методов получения $h(n)$ [4]. Наиболее широко используемыми из них являются метод вырезания, оптимальный метод и метод частотной выборки. Все эти методы позволяют полу-

чать КИХ-фильтры с линейной фазовой характеристикой. В данной работе рассмотрен подробно метод вырезания с взвешиванием.

Весовая функция в задачах цифровой обработки сигналов (ЦОС) должна удовлетворять некоторым требованиям [1-4], определяющим реализуемость конкретного фильтра. Так, она должна обеспечивать нулевой сдвиг фазы

$$H(f) = H^*(f). \quad (1.18)$$

Это означает, что её импульсная характеристика симметрична относительно начала координат

$$h[x] = h[-x].$$

Частотная характеристика $H_0(f)$ представляется рядом Фурье вида

$$H_0(f) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} h_0[x] \exp(-jfx), \quad (1.19)$$

где коэффициенты ряда $h_0[x]$ определяются с помощью выражения

$$h_0[x] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} H_0(f) \exp(jfx) df. \quad (1.20)$$

Здесь $h_0[x]$ – коэффициенты бесконечной импульсной характеристики (ИХ) фильтра, соответствующего заданной частотной характеристике $H_0(f)$. Для реализации КИХ-фильтра пределы суммирования в (1.20) должны быть ограничены. Для улучшения сходимости усеченного ряда (1.20) коэффициенты $h_0[x]$ следует умножить на ВФ с компактным носителем $w[x]$

$$h[x] = w[x] \cdot h_0[x].$$

Для фильтров с нулевым фазовым сдвигом ВФ также должна удовлетворять условию $w[x] = w[-x]$.

Таким образом,

$$\tilde{h}_0[x] = \frac{w[x]}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} H_0(f) \exp(jfx) df,$$

а для частотной характеристики

$$\tilde{H}_0(f_1, f_2) = \sum_{x=N_1}^{N_2} \tilde{h}_0[x] \exp(-jfx).$$

Здесь N_1, N_2 – пределы суммирования.

Идеальным фильтром нижних частот является классическая функция [2] Котельникова

$$w(x) = \text{sinc}\left(\frac{\pi x}{\Delta}\right), \quad (1.21)$$

где Δ – шаг дискретизации. Чем больше величина Δ , тем шире получается функция. К достоинствам такого фильтра можно отнести простоту вычислений и идеальную форму спектра фильтра при $x \in [-\infty; \infty]$. Недостатки фильтра (1.21) вытекают из его достоинств. Идеальный фильтр нижних частот получается только при определении ИХ фильтра на бесконечном интервале. В других случаях появляется эффект Гиббса [1-4, 8, 31]. При сужении интервала определения ИХ эффект Гиббса резко усиливается (см. рис. 1.7)

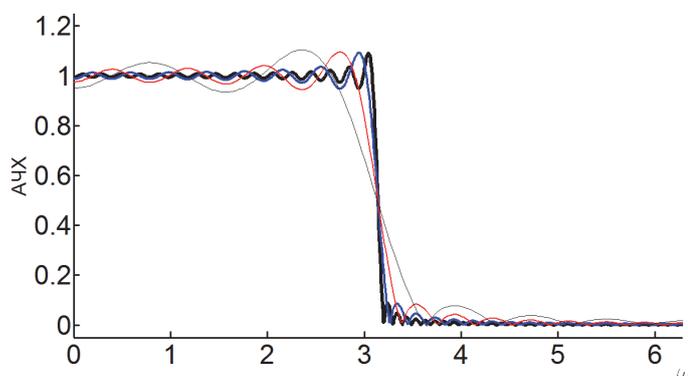
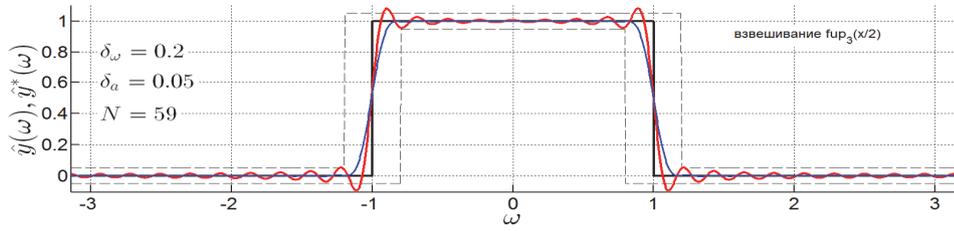
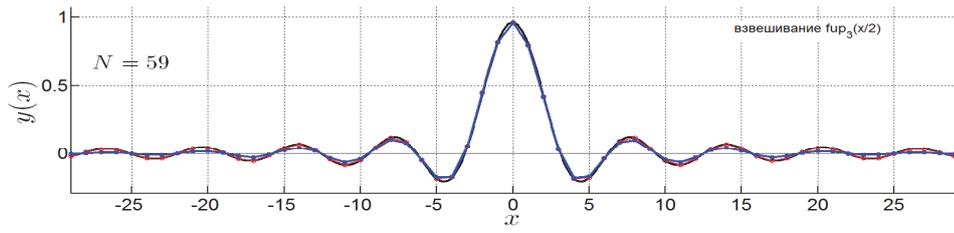


Рис. 1.7. Динамика изменения амплитудно-частотной характеристики функции Котельникова при уменьшении ширины интервала определения (носителя) функции.

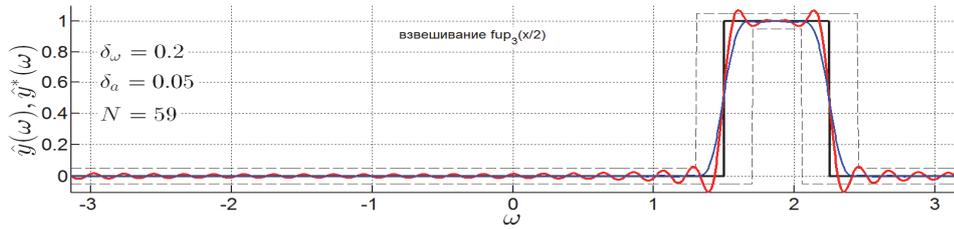
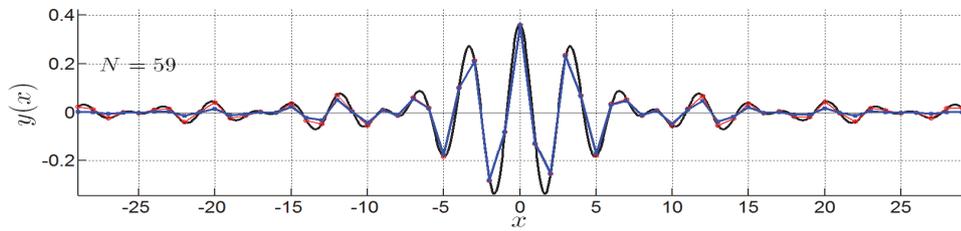
Это делает необходимым использование обобщенных функций [4,8,29], позволяющих путем варьирования параметров синтезировать цифровые фильтры с широким спектром физических характеристик.

Виды фильтров, построенные с помощью весовой обработки атомарными функциями представлены на рис. 1.8. Графики ошибки получаемой частотной характеристики фильтров в зависимости от количества коэффициентов приведены на рис. 1.9.

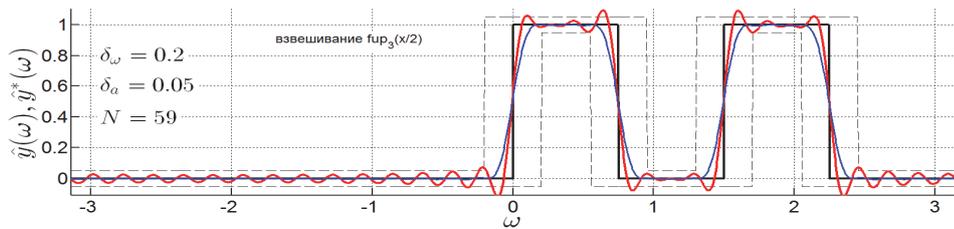
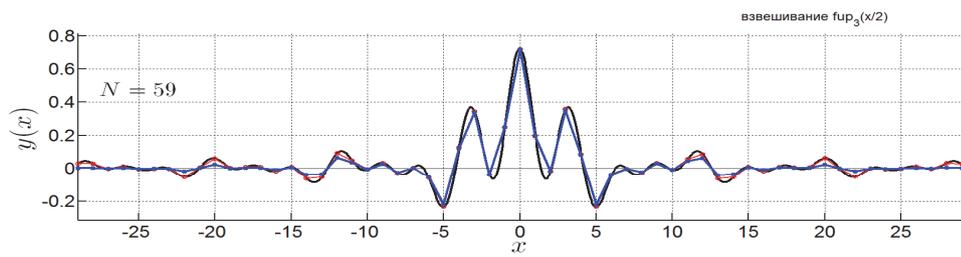
Достоинством метода взвешивания является простота построения и наглядность. Это дает удобство его применения в практических задачах цифровой обработки радиофизических сигналов.



а)

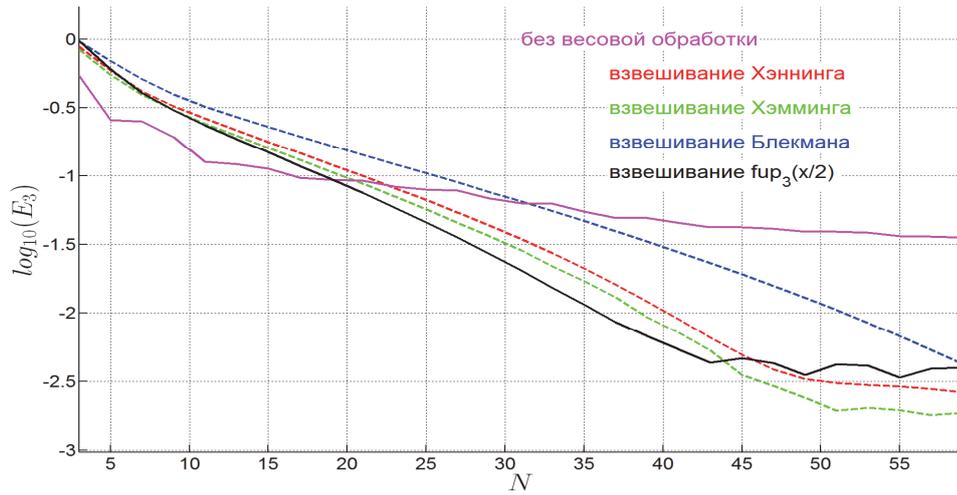


б)

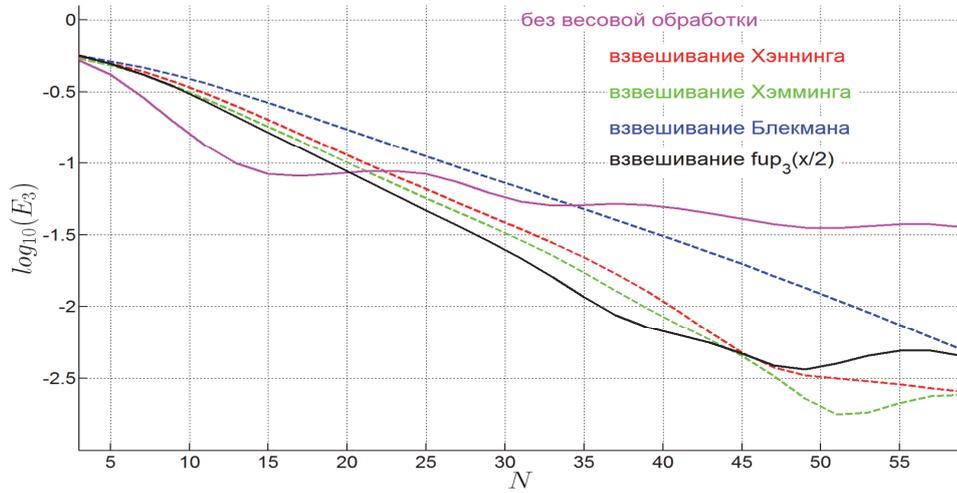


в)

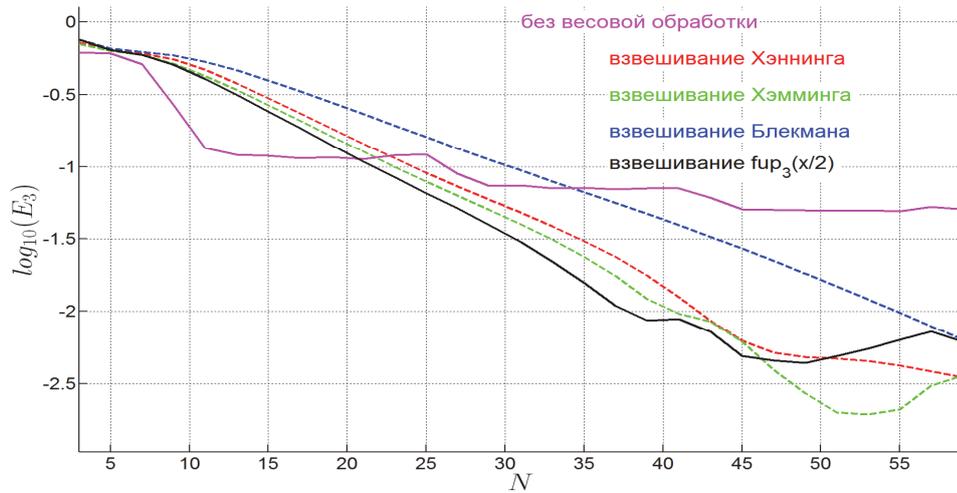
Рис. 1.8. Виды фильтров, построенные с помощью весовой обработки: низкочастотный (а), высокочастотный (б) и полосовой (в).



а)



б)



в)

Рис. 1.9. Графики ошибки получаемой частотной характеристики фильтров в зависимости от количества коэффициентов для низкочастотного (а), высокочастотного (б) и полосового (в) фильтров.

1.4. Обобщенные ряды отсчетов

Известно [8,9,16-31], что АФ нашли широкое применение в различных физических приложениях. На их основе [20] построены обобщенные ряды Котельникова [1,8,20]. Теоремы, определяющие условия, при которых аналоговый сигнал $s(t)$ можно точно восстановить по дискретным отсчетам называются теоремами отсчетов [1]. Они имеют дело с представлениями аналогового сигнала $s(t)$ в виде

$$s(t) \approx \sum_{t \in \{T\}} f_k(s) \varphi_k(t) = s_k(t), \quad (1.22)$$

где $\varphi_k(t)$, $k=1,2,\dots$ – множество сигналов (функций времени), выбранных заранее независимо от вида $s(t)$, $\{T\}$ – множество моментов времени, на котором определены $s(t)$ и $\{\varphi_k(t)\}$, $k=1,2,\dots$. Знак \approx указывает на то, что правая часть (1.22) не обязательно совпадает с $s(t)$ во всех точках, а лишь близка к $s(t)$ в соответствии с выбранной метрикой (расстоянием) $\rho[s(t), s_k(t)]$. Наиболее часто используется квадратичная метрика вида

$$\rho_{s\psi} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |s(t) - s_k(t)|^2 dt,$$

пропорциональная разности энергий аппроксимируемого $s(t)$ и аппроксимирующего $s_k(t)$ сигналов. В канале связи под сигналом $s(t)$ понимается огибающая амплитуды несущего сигнала $s_H(t)$ частоты порядка $f \sim 10^{14} \dots 10^{15}$ Гц. В роли функций $\{\varphi_k(t)\}$ обычно используются импульсы, смещенные относительно начала отсчета времени пропорционально k . Импульс $\varphi_k(t)$ называют интерполирующим, если

$$(\forall k)[\varphi_k(0) = 1], (\forall l = 1, 2, \dots)[\varphi_k(l\Delta) = 0],$$

где Δ – некоторый конечный интервал времени, период отсчетов. В роли функций $f_k(t)$ для удобства реализации в большинстве случаев выступают точечные отсчеты

$$f_k(t) = s(k\Delta), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

а вид импульсов $\{\varphi_k(t)\}$ принимается одинаковым. Тогда

$$s(t) \approx \sum_k s(k\Delta) \varphi_k(t - k\Delta).$$

Это представление дает точное равенство при $t = k\Delta$ и $s(t)$ в промежутках между отсчетами изменяется не слишком быстро. Тогда погрешность

$$\rho\left(s(t), \sum_k s(k\Delta)\varphi(t - k\Delta)\right)$$

получается технически допустимой. Более сильное утверждение справедливо для сигналов с ограниченной полосой частот. Для них спектр $\hat{s}(\omega) = 0$ вне интервала $|\omega| \leq \Omega$, где $\Omega = 2\pi F$ — максимально возможная круговая частота спектра. Внутри интервала $|\omega| \leq \Omega$ спектр $\hat{s}(\omega)$ отличен от нуля по крайней мере на некотором подмножестве точек ω ненулевой меры (область, в точках которой $\hat{s}(\omega) \neq 0$ имеет ненулевую длину). Сделанная оговорка имеет формальный характер, ибо нет смысла рассматривать тождественно нулевой спектр. Спектр аналогового сигнала $s(t)$ определяется так

$$\hat{s}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \exp(i\omega t) dt.$$

Здесь $\hat{s}(\omega)$ интегрируется в квадрате на $[-\Omega; +\Omega]$. Предполагается, что сигнал

$$s(t) = \int_{-\Omega}^{+\Omega} \hat{s}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega$$

обладает конечной энергией в области своего определения $-\infty < t < +\infty$ (теоретически бесконечной)

$$\int_{-\Omega}^{+\Omega} |\hat{s}(\omega)|^2 d\omega < \infty.$$

1.4.1. Обобщенные ряды отсчетов на основе атомарных функций

Аналоговый сигнал $s(t)$ с ограниченной полосой $\hat{s}(\omega)$ представим в виде

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta) \prod_{j=1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta a^{j-1}}(t - k\Delta)\right). \quad (1.23)$$

Выражение (1.23), удовлетворяя всем требованиям теоремы Котельникова, обладает лучшей сходимостью, особенно при восстановлении локальных во времени и разрывных сигналов. При вычислениях необходимо ограничиться конечным числом членов произведения в правой части (1.23).

В этом случае имеет место точное разложение

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta) \prod_{j=1}^M \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta a^{j-1}}(t - k\Delta)\right), \quad (1.24)$$

$$a(1 + a^{-M}) > 2, \quad \Delta = \frac{\pi}{\Omega} \cdot \frac{a(1 + a^{-M}) - 2}{a - 1}. \quad (1.25)$$

Минимальные значения a могут быть найдены из решения трансцендентного уравнения $a(1 + a^{-M}) = 2$. При $M=1$ из (1.24) следует ряд Котельникова [1,8,20,25], а в пределе, когда $M \rightarrow \infty$ ряд (1.23).

Ядром обобщенного ряда отсчетов является функция

$$\varphi(t) = \prod_{j=1}^M \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta a^{j-1}}(t - k\Delta)\right).$$

Её графики для $\tau = 1$ и различных значений параметров a, M на интервале $[-6;6]$ представлены на рис. 1.11.

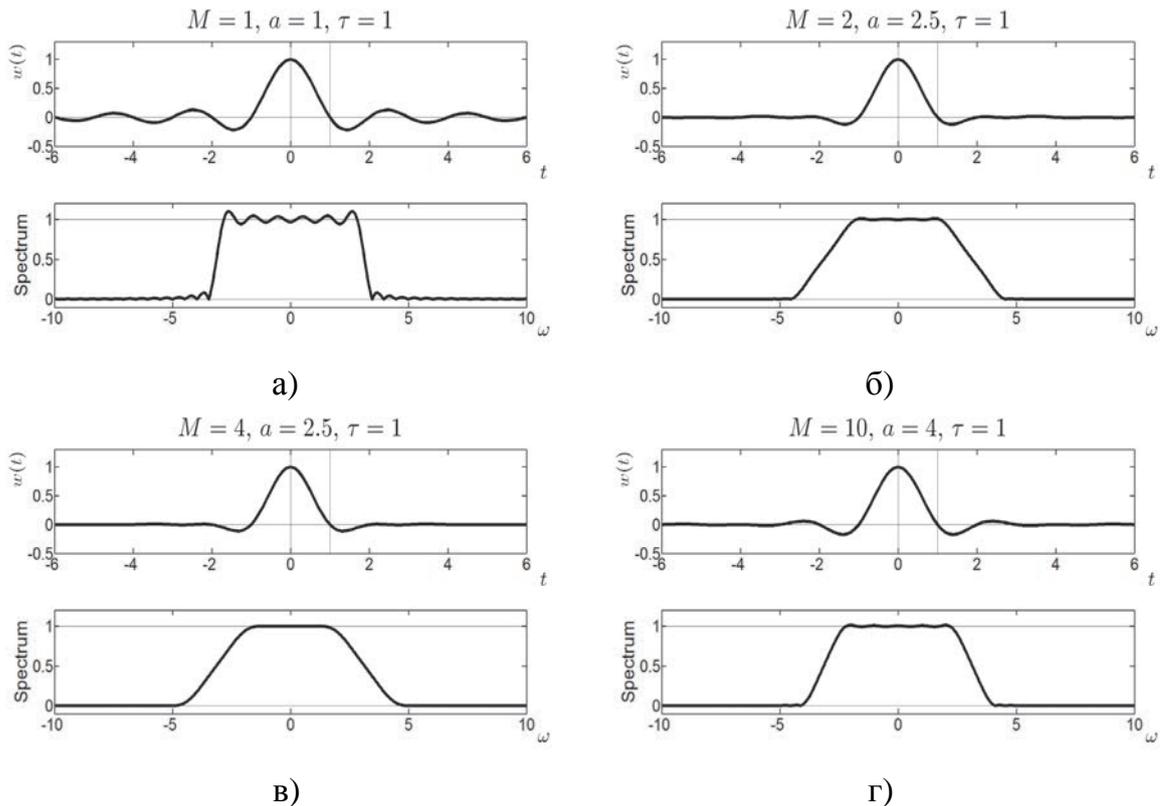


Рис. 1.11. Поведение функций $\varphi(t)$ для различных значений параметров a, M на интервале $[-6;6]$ для $M = 1, a = 1$ (а), $M = 2, a = 2.5$ (б), $M = 4, a = 2.5$ (в), $M = 10, a = 4$ (г) ($\tau = 1$).

1.4.2. Физический смысл обобщенного ряда отсчетов

Выражение (1.24), справедливое при условии (1.25), говорит о том, что операции дискретизации (цифрового преобразования) и восстановления сигнала взаимно обратны. Из разложения (1.23) следует, что для любого задаваемого t аналоговый сигнал $s(t)$ теоретически можно получить на приемном конце, если пропустить всю бесконечную последовательность $s(k\Delta)$, $k = \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots$ через идеальный фильтр нижних частот с частотой среза $\Omega = \frac{\pi}{\Delta} \frac{a(1+a^{-M})-2}{a-1}$ и амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) $|K(i\omega)| = \Delta$ в полосе пропускания. Однако идеального фильтра не существует и весьма проблематично пропустить через него (даже если бы он существовал) бесконечную последовательность отсчетов. Поэтому теорема Котельникова относится к гипотетической ситуации и характеризует лишь предельные возможности канала связи. Тогда (1.24) следует понимать так

$$s(t) = \lim_{K \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=-K}^K s(k\Delta) \prod_{j=1}^M \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta a^{j-1}} (t - k\Delta) \right) \right],$$

$$s_k(t; \Delta) = \sum_{k=-K}^K s(k\Delta) \prod_{j=1}^M \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta a^{j-1}} (t - k\Delta) \right). \quad (1.26)$$

Сходимость определяется в квадратичной метрике

$$\rho(s(t); \tilde{s}(t; \Delta)) = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t) - \tilde{s}(t; \Delta)|^2 dt,$$

где $\tilde{s}(t; \Delta) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(t; \Delta)$.

Для инженерных задач обобщенная теорема Котельникова может использоваться следующим образом. С какого-то фиксированного момента t_0 на приемный конец канала связи начинают поступать отсчеты $s(k\Delta)$. На практике отсчеты реализуются в виде импульсов прямоугольной (треугольной, трапециевидной или иной аналитически заданной) формы. Длительность импульсов достаточно малая, чтобы на интервале Δ успели закончиться все переходные процессы в приемнике. Используемая сейчас стандартная аппаратура открытого атмосферного канала (ОАК) позволяет формировать импульсы с почти прямоугольной огибающей длительности $\Delta \simeq (1 \dots 5) \cdot 10^{-8}$ с,

надежно гарантируя интервал дискретизации не более $\tilde{\Delta} \simeq (1...2) \cdot 10^{-7}$ с. При этом возможна дискретизация сигналов с верхней частотой

$$F = \frac{1}{2\Delta} \approx \frac{1}{(2...4) \cdot 10^{-7}} \approx (0.25...0.5) \cdot 10^{-7} \text{ Гц,}$$

обеспечивающей скорость передачи порядка 30 Мбит/с.

Пусть на приемном конце вид сигнала $s(t)$ известен заранее. Импульсы $s(k\Delta)$, поочередно поступая на вход приемника, формируют текущую сумму

$$s_k(t; \Delta), k = \left\lfloor \frac{t_0}{\Delta} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{t_0}{\Delta} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{t_0}{\Delta} \right\rfloor + 2, \dots,$$

для заранее выбранного $t = K\Delta + \frac{\Delta}{2}$ (или K). Величина t специально берется

не кратной $K\Delta$, чтобы оценить точность восстановления сигнала в точке отличной от момента отсчета. Как только номер текущего отсчета совпадает с

K ($k = K$), определяется величина суммы $s_k(t) = s_k\left(K\Delta + \frac{\Delta}{2}\right)$, а по истечении

периода времени $\Delta/2$ сравнивается с эталонным значением. Если погрешность восстановления $\Delta s = |s(t) - s_k(t)|$ не превышает заданной максимальной величины $\Delta s \leq \Delta s_{\max}$, то длина интервала дискретизации Δ и количество отсчетов K достаточны для восстановления аналогового сигнала по его дискретным отсчетам.

Основные свойства функции ядра обобщенного ряда следующие:

- В точке $t = k\tau$ функций $\varphi_k(t) = 1$, а в точках $t = n\tau$, где n - любое целое, $n \neq k$ функция $\varphi_k(t) = 0$.
- Спектр $\hat{\varphi}_k(\omega)$ равномерен в полосе $\omega \in \left[-\frac{a-2}{a-1}\pi; \frac{a-2}{a-1}\pi\right]$, $a > 2$.
- Носитель в спектральной области $\omega \in \left[-\frac{a}{a-1}\pi; \frac{a}{a-1}\pi\right]$, $a > 2$.

Алгоритм определения эффективной ширины равномерности полосы пропускания частотной характеристики (ЧХ) представлен на рис. 1.12. Пороговый уровень в этом случае следует выбирать $h = 0.05$. Если выбрать $h = (\sqrt{2} - 1) / \sqrt{2}$, то получим оценку полосы пропускания ЧХ. Чем ближе значение R к $2F$, тем ближе ЧХ к идеальной.

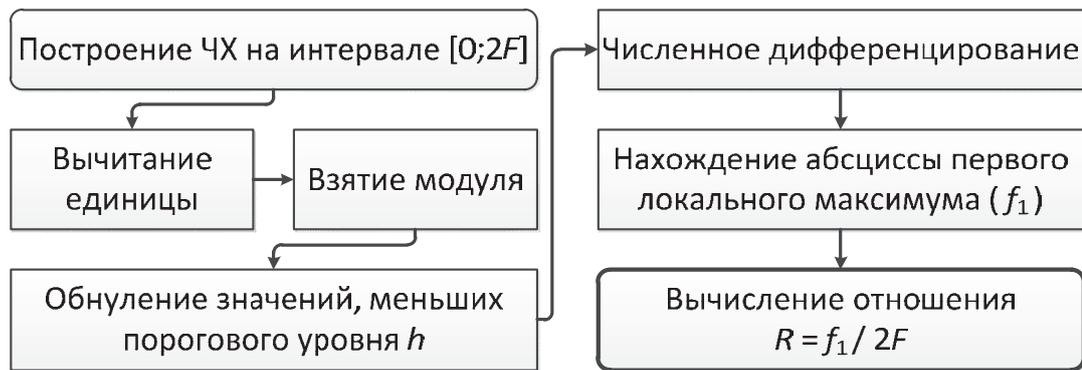


Рис. 1.12. Алгоритм определения равномерности полосы пропускания частотной характеристики.

Для проверки выполнения условий теоремы Котельникова [8,20,25,31] определим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) \equiv f(x) \prod_{n=2}^{\infty} \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi a}{\Delta a^n} (z - x) \right), \quad z \in \mathbb{R}. \quad (1.27)$$

Она имеет финитный спектр и $\operatorname{supp} \hat{\varphi}(p) = [-\alpha, \alpha]$, где

$$\alpha = \Omega + \frac{\pi}{\Delta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} = \pi \left(\frac{\Omega}{\pi} + \frac{1}{\Delta(a-1)} \right).$$

Должно соблюдаться условие $\alpha \leq \pi/\Delta$. Следовательно, необходимо выполнение неравенства (1.25). В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k\Delta) \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{\Delta} (x - k\Delta) \right] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ f(k\Delta) \prod_{n=2}^{\infty} \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi a}{\Delta a^n} (z - k\Delta) \right) \right\} \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{\Delta} (x - k\Delta) \right]. \end{aligned}$$

Введем замену аргументы $x = z$, тогда

$$\varphi(z) = f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta) \prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi a}{\Delta a^n} (z - k\Delta) \right).$$

Это выражение представляет собой требуемое разложение (1.23) с точностью до обозначения независимой переменной.

1.4.3. Весовая функция Кравченко-Котельникова

Выражение (1.27) запишем в следующем виде:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta) \cdot \varphi_{k-M}(t), \quad (1.28)$$

где

$$\varphi_{k-M}(t) = \prod_{j=1}^M \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta a^{j-1}} (t - k\Delta) \right).$$

Параметр a ($1 < a \leq 2$) выбирается исходя из частотных свойств сигналов [25]. Весовая функция (окно) Кравченко-Котельникова (КК) определяется так

$$w_{KK}(t) = \varphi_{0-M}(t) = \prod_{j=1}^M \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta a^{j-1}} t\right). \quad (1.29)$$

На её поведение оказывают существенное влияние три параметра: M , a , Δ . Изменяя их, получим весовые функции КК с различными физическими характеристиками. На рис. 1.13 представлены весовые функции Кравченко-Котельникова для разных значений: M , a и Δ ($M=1$ – штрих-пунктир, $M=2$ – пунктир, $M=3$ – сплошная линия).

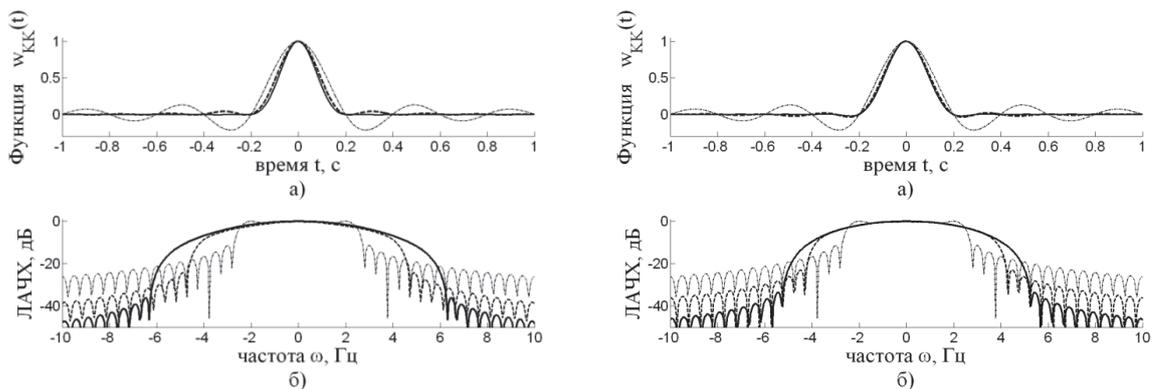


Рис. 1.13. Весовые функции Кравченко-Котельникова для $M=1$ (пунктир), $M=2$ (штрих-пунктир), $M=3$ (сплошная линия) $\Delta = 0,2$ (а), а также их АЧХ (б) для $a=1.2$ и $a=1.5$

Рассмотрим поведение второй производной весовой функции КК

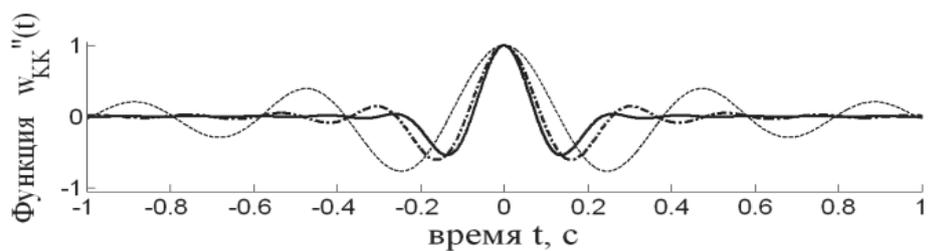
$$w_{KK}''(t) = \frac{d^2}{dt^2} \left(\prod_{j=1}^M \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta a^{j-1}} t\right) \right), \quad (1.30)$$

$$w_{2nKK}(t) = \frac{w_{KK}''(t)}{w_{KK}''(0)} \quad (1.31)$$

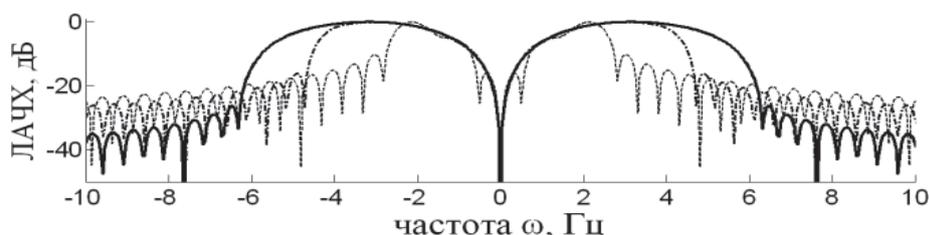
Графики представлены на рис. 1.14.

Обобщенную функцию ядра можно определять на компактном носителе без заметного искажения спектра (см. рис. 1.15). Это делает предсказуемыми частотные свойства синтезированных фильтров. Логарифмические функции изменения разности нормы функций Кравченко-Котельникова порядков M и $M - 1$ для носителя $[-50;50]$ и $[-100;100]$ приведены на рис. 1.16.

Соответствующий высокочастотный фильтр синтезируется путем частотного модулирования [25,31] функции (21). Получим систему двух фильтров полностью перекрывающую требуемую область частот. Спектры синтезированных функций представлены на рис. 1.17.



б)



г)

Рис. 1.14. Нормированные вторые производные весовых функций Кравченко-Котельникова для $M=1$ (пунктир), $M=2$ (штрих-пунктир), $M=3$ (сплошная линия) ($a=1,2$, $\Delta=0.2$ с.) (а), а также соответствующие ЛАЧХ (б)

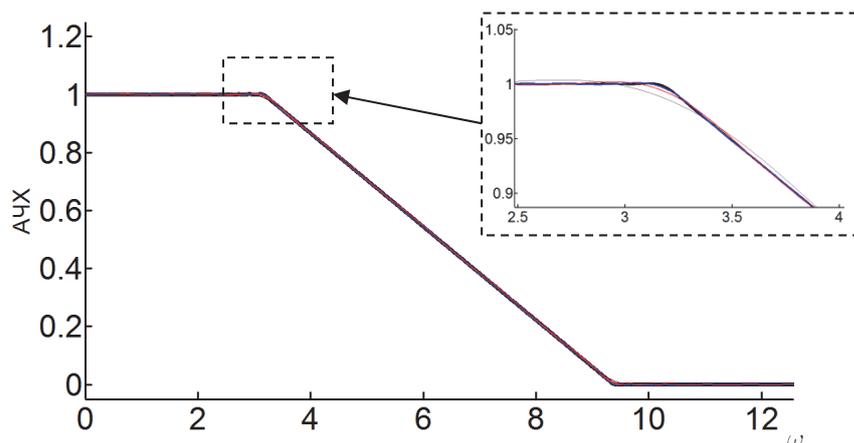
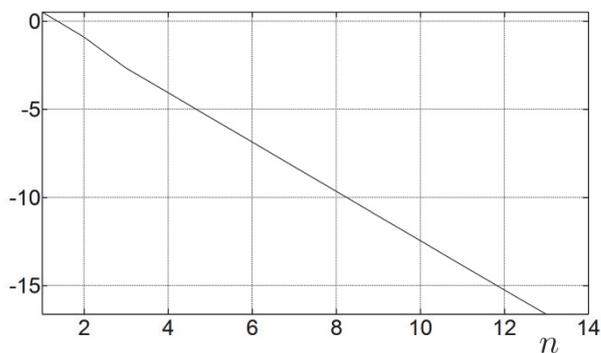
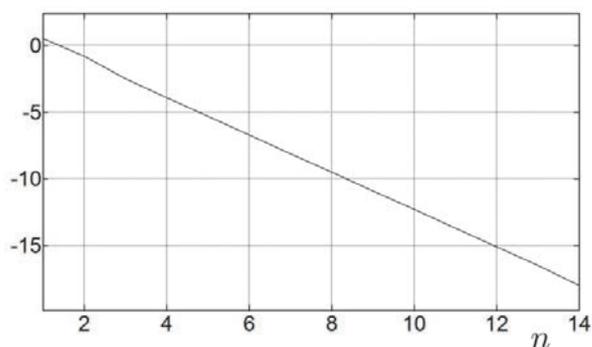


Рис. 1.15. Изменение спектра обобщенной функции Кравченко-Котельникова при уменьшении носителя при $M=2$



а)



б)

Рис. 1.16. Логарифмическое изменение разности нормы функций Кравченко-Котельникова порядков M и $M-1$ ($n \equiv M$) для носителя $[-50;50]$ (а), $[-100;100]$ (б).

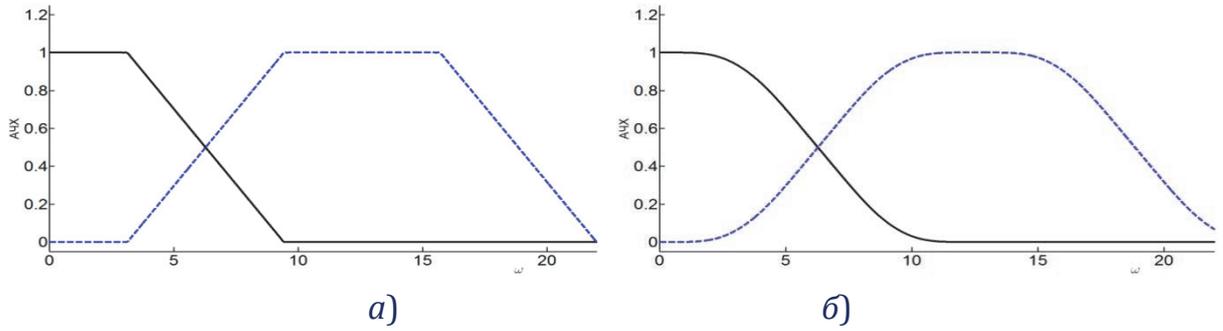


Рис. 1.17. Амплитудно-частотные характеристики низкочастотного (сплошная линия) и высокочастотного (пунктирная линия) фильтров Кравченко-Котельникова $M = 2$ (а), $M = 5$ (б).

Для улучшения качества спектров функций в переходной области (на фронтах) можно воспользоваться [25] свойством $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_a\left(x - \frac{2k}{a}\right) \equiv 1$ и формируется частичная сумма ряда разложения единицы

$$h_{a,N}^{sum}(\omega) = \sum_{k=-N}^N h_a\left(\omega - \frac{2k}{a}\right). \quad (1.32)$$

Рассмотрим случай формирования частичной суммы для произвольного N . На рис. 1.18 представлена схема разложения единицы на отрезке

$$\left[-\frac{2N(a-1)+a-2}{a(a-1)}; \frac{2N(a-1)+a-2}{a(a-1)} \right].$$

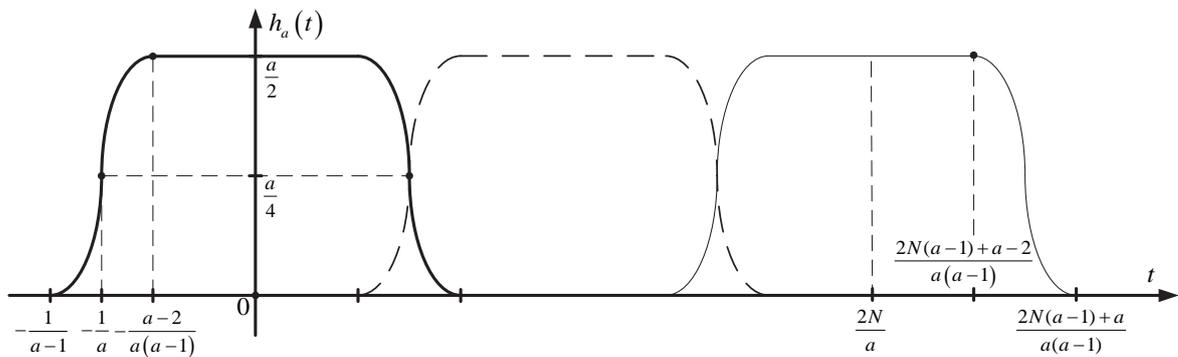


Рис. 1.18. Разложение единицы для произвольного значения N .

Здесь носителем частичной суммы является отрезок

$$\left[-\frac{2N(a-1)+a}{a(a-1)}; \frac{2N(a-1)+a}{a(a-1)} \right],$$

плоская вершина определена на

$$\left[-\frac{2N(a-1)+a-2}{a(a-1)}; \frac{2N(a-1)+a-2}{a(a-1)} \right],$$

а абсциссы средин линий перегиба такие: $x = \pm \frac{2N+1}{a}$. Вводя замену аргумента $x = \frac{2N+1}{a}\omega$, получаем выражение для спектра

$$\widetilde{h}_{a,M}(\omega) = \sum_{k=-N}^N h_a \left(\frac{2N+1}{a}\omega - \frac{2k}{a} \right).$$

А сама функция запишется следующим образом:

$$\widetilde{w}_{KK}(x) = \sum_{k=-N}^N \prod_{j=1}^M \text{sinc} \left(\frac{x}{(2N+1)\Delta a^j} \right) \exp \left(i \frac{2k}{(2N+1)\Delta} x \right). \quad (1.33)$$

Вид построенных фильтров нижних частот представлен на рис. 1.19.

Как следует из графиков, функции $\widetilde{w}_{KK}(x)$ обладают существенно более широкой полосой пропускания по сравнению с переходной областью. Это позволяет производить разделение частотных диапазонов, а также настраивать их более точно. Фильтры высоких частот можно синтезировать с помощью частотного модулирования

$$\widetilde{w}_{KK}(x) \exp(i2\Omega x).$$

Здесь $\Omega = 1/\Delta$ - частота среза.

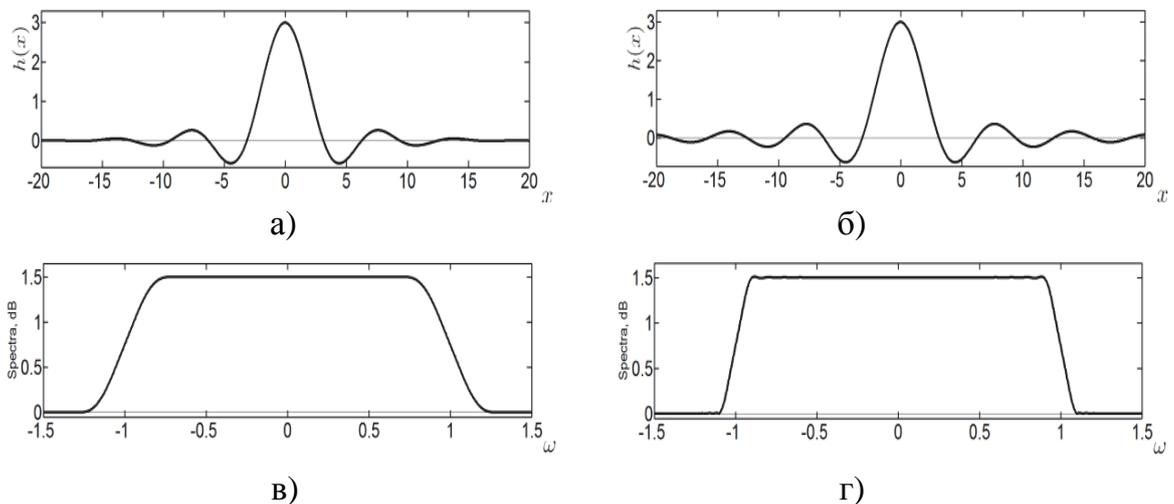


Рис. 1.19. Поведение функций $\widetilde{w}_{KK}(x)$ для $a=2, N=1$ (а), $a=4, N=1$ (б) и их спектры (в), (г)

1.4.4. Обобщенная теорема отсчетов для случайных сигналов

Рассмотрим стационарный случайный сигнал $s(t)$. Пусть его амплитудный спектр имеет вид

$$\hat{s}(f) = \begin{cases} C = \text{const}, & \text{если } -F \leq f \leq F, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для корреляционной функции запишем

$$R(\tau) = \int_{-F}^F C \exp(i2\pi f\tau) df = 2CF \frac{\sin 2\pi F\tau}{2\pi F\tau},$$

где τ - интервал времени между отсчётами. Корреляционная функция обращается в нуль при $\tau = 1/2F, 2/2F, \dots, k/2F$. Таким образом, отсчеты $s(k\tau)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ не коррелированы между собой. Все отсчеты подчиняются одинаковому закону распределения в силу стационарности случайного процесса. Максимальное количество информации, содержащееся в сигнале длительностью $2T$ с полосой частот $[-F; F]$, равно произведению энтропии одного отсчета

$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(s) \log \omega(s) = h$ на число отсчетов $I(s) = 4FT h$. Для случая нормального распределения относительно фиксированной амплитуды получим

$$I(Y|X) = 2FT h_{\sigma} = FT \log \left(\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \right),$$

где σ - мощность сигнала $s(t)$, а ε - допустимая погрешность восстановления сигнала ($\varepsilon = \Delta s_{\max}$), X - передаваемый, Y - принимаемый сигналы. Скорость

передачи составит $v = \frac{I}{T} = F \log \left(\frac{\sigma}{\varepsilon} \right)^2$. Корреляционная функция на приемном

конце $R_{yy}(f) = 0$ вне частотной полосы $|f| > 1/2\tau$. Для любого f имеем

$$R_{xx}(f) = \varphi(f) \sum_{l=-\infty}^{\infty} k_{yy}(l\tau) \exp(i2\pi l\tau f) = \frac{\hat{s}(f)}{\tau} \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_{yy} \left(f - \frac{l}{\tau} \right) = R_{yy}(f).$$

Пусть в канале данных передается сигнал следующего вида:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \varphi(t - k\tau), \quad (1.34)$$

где x_k - дискретные отсчеты реализации случайного процесса

$$\varphi(t) = \frac{\sin(\pi t/\tau)}{\pi t/\tau}, \text{ где } \hat{\varphi}(t) = \begin{cases} \tau, & \text{если } |f| \leq 1/2\tau, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Средняя энергия разности сигналов $\rho(x, y) = E \left\{ (x(t) - y(t))^2 \right\}$, E - символ математического ожидания.

Раскрывая последнее выражение, получим

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= E(x^2(t)) + E(y^2(t)) - 2E(x(t)y(t)) = \\ &= k_{xx}(0) + k_{yy}(0) - 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} k_{yy}(t - k\tau) \varphi(t - k\tau), \end{aligned} \quad (1.35)$$

где $k_{xx}(t + \tau, t) = E(x(t + \tau)x(t))$ - автокорреляционная функция (АвФ) случайного сигнала $x(t)$, $k_{yy}(t + \tau, t) = E(y(t + \tau)y(t))$ - АвФ случайного сигнала $y(t)$, $2E(x(t)y(t)) = k_{yy}(0)$. Получим $\rho(x, y) = 2(k_{yy}(0) - k_{yy}(0)) = 0$. Таким образом, ограниченный по полосе частот процесс $y(t)$ на входе приемника может быть представлен обобщенным рядом отсчетов (1.24)

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k\Delta) \prod_{j=1}^M \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta a^{j-1}}(t - k\Delta)\right).$$

Это представление подтверждается равенством нулю средней энергии разности сигналов на входе и выходе.

1.4.5. Анализ частных случаев обобщенных рядов отсчетов

А) Отклонение частоты дискретизации от теоретической F . Полоса пропускания ЧХ с ростом Δ уменьшается. Таким образом, если взять интервал τ' между соседними отсчетами меньшим, чем $1/2F$, то он будет соответствовать большей полосе $[-F'; F']$, чем ширина спектра $s(t)$. Таким образом, уменьшение τ для ограниченных по частоте сигналов технически нецелесообразно. При увеличении τ восстановление сигнала невозможно (рис. 1.20,б), поскольку полоса пропускания $\hat{\varphi}(\omega)$ становится уже частотного диапазона $s(t)$.

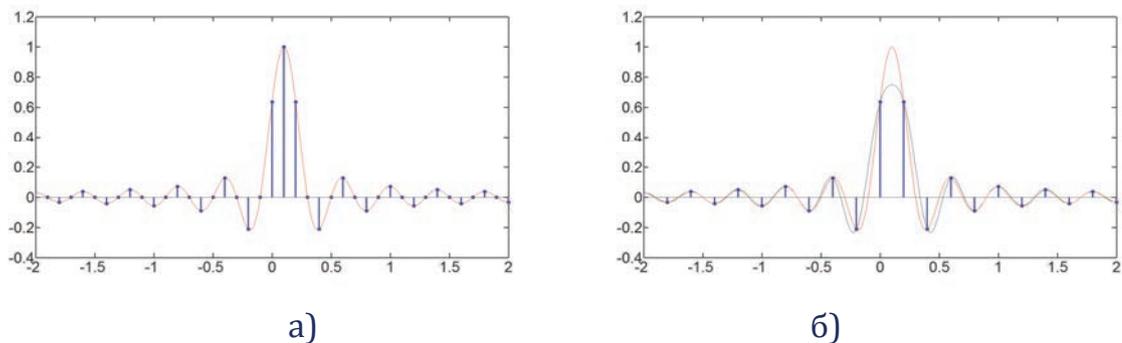


Рис. 1.20. Восстановление с помощью функции Кравченко-Котельникова

$\phi_{K-K}(t)$ для $\Delta = 0.1$ (а), $\Delta = 0.2$ (б), $M = 2$, $b = 0.1$.

В сравнении с классическим рядом Уиттекера-Котельникова-Шеннона имеем три случая:

- Шаг дискретизации меньше необходимого для ряда УКШ и КК
- Шаг дискретизации больше необходимого для ряда УКШ и КК
- Шаг дискретизации меньше необходимого для ряда УКШ и больше необходимого для КК

В первых двух случаях обобщенная теорема демонстрирует лучшие результаты, обеспечиваемые рассмотренными выше её свойствами.

Б) Обобщенный ряд для конечного числа отсчетов. При конечном числе отсчетов следует определить их количество, при котором терялась бы малую доля энергии исходного сигнала на всем временном интервале

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = E_s(-\infty; \infty). \quad (1.36)$$

Усеченный ряд отсчетов запишется так

$$s_k(t) = \sum_{k=-K}^K s(k\tau) \varphi_k(t), \quad (1.37)$$

где $\tau = 1/2F$, а количество отсчетов K необходимо определить. Отбрасывая значения сигнала вне интервала $[-T; T]$ оценим максимальное значение $K = \lfloor 2FT \rfloor + 1 = \lceil 2FT \rceil$. Таким образом, в интервал $[0; T]$ попало $\lfloor 2FT \rfloor$ отсчетов.

Тогда усеченный ряд принимает вид

$$s(t) = \sum_{k=-\lfloor 2FT \rfloor}^{\lfloor 2FT \rfloor} s(k\Delta) \prod_{j=1}^M \text{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta a^{j-1}} (t - k\Delta) \right), \quad (1.38)$$

а значение $K_{\max} = \lfloor 2FT \rfloor$ — база усеченного сигнала (число его степеней свободы). Энергию усеченного сигнала запишем так

$$E_s(-T; T) = \sum_{k=-K_{\max}}^{K_{\max}} s^2(k\tau) \varphi_k^2(t) = \tau \sum_{k=-K_{\max}}^{K_{\max}} s^2(k\tau). \quad (1.39)$$

При этом мощность имеет вид

$$\overline{s^2(t)} = E_s(-T; T)/2T = \frac{1}{4FT} \sum_{k=-K_{\max}}^{K_{\max}} s^2(k/2F) \quad (1.40)$$

и имеет смысл среднего квадрата энергий отсчетов на промежутке $[-T; T]$.

Сравнивая полученную оценочную энергию с энергией исходного сигнала,

оценим применимость усеченного ряда $E_s(-\infty; \infty) - E_s(-T; T) < \Delta$. На практике принимается значение $\Delta \sim 1\%$.

В) Обобщенная теорема отсчетов в частотной области. В случае, когда спектр сигнала $\hat{s}(\omega)$ представляется дискретными отсчетами построим ряд аналогичный (9). Имеет место теорема.

Теорема 1. Непрерывный спектр $\hat{s}(\omega)$ сигнала $s(t)$, ограниченного на $|t| \leq T$ и принимающего вне этого интервала нулевые значения, имеет вид

$$\hat{s}(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{s}(l\Delta\omega) \prod_{j=1}^M \operatorname{sinc}\left(\frac{T}{a^{j-1}}(\omega - l\Delta\omega)\right), \quad \Delta = \frac{\pi}{\Omega} \cdot \frac{a(1+a^{-M})-2}{a-1}, \quad (1.41)$$

где $\Delta\omega$ - шаг отсчета частоты. Теорема 1 является «дуальной» теореме на основе преобразованию Фурье атомарных функций во временной области и доказывается аналогично [20].

Тогда запишем ряд (1.41) в конечном виде как функцию круговой частоты ω , дискретизованную с шагом $\Delta\omega = \pi/T$. При ширине спектра 2Ω , охватывающей область частот $[-\Omega; \Omega]$, количество отсчетов в конечном ряде $2\Omega/\Delta\omega = 2 \cdot 2\pi F / (\pi/T) = 4FT$. Спектральные отсчеты $\hat{s}(l\Delta\omega)$ - комплексные числа. Они удовлетворяют условию

$$\hat{s}^*\left(-l\frac{\pi}{T}\right) = \hat{s}\left(l\frac{\pi}{T}\right), \quad (1.42)$$

где «*» - знак комплексного сопряжения. Это позволяет использовать только положительные частоты. Тогда

$$\hat{s}(\omega) = \sum_{l=-4FT}^{4FT} \hat{s}(-l\Delta\omega) \prod_{j=1}^M \operatorname{sinc}\left(\frac{T}{a^{j-1}}(\omega - l\Delta\omega)\right). \quad (1.43)$$

Спектр сигнала полностью характеризуется комплексным отсчетами (взятыми только в области положительных частот). Число степеней свободы составляет $4FT$. Вещественные части отсчетов четные относительно $\omega = 0$, а мнимые составляющие нечетны согласно (1.42).

Г) Обобщенная теорема для произвольной полосы частот ширины F . Пусть полоса

$$[\Omega_0 - \pi F; \Omega_0 + \pi F] \quad (1.44)$$

имеет своим центром частоту Ω_0 и ширину $2\pi F$.

Сигнал $S(t)$, частотный спектр $\widehat{S}(t)$ которого отличен от нуля только в пределах ограниченной полосы запишем в виде

$$S(t) = SS(t)\sin\Omega_0 t + SC(t)\cos\Omega_0 t \quad (1.45)$$

где $SS(t)$ и $SC(t)$ — функции, имеющие отличные от нуля спектры $\widehat{SS}(\omega)$ и $\widehat{SC}(\omega)$, только для $|\omega| < \pi F$. Согласно свойствам Фурье-преобразований спектры $\widehat{S}(\omega)$, $\widehat{SS}(\omega)$ и $\widehat{SC}(\omega)$ связаны соотношением

$$\widehat{S}(\omega) = \frac{1}{2}[\widehat{SC}(\omega - \Omega_0) + i\widehat{SS}(\omega - \Omega_0)] + \frac{1}{2}[\widehat{SC}(\omega + \Omega_0) + i\widehat{SS}(\omega + \Omega_0)]. \quad (1.46)$$

Так как $\widehat{SS}(\omega)$ и $\widehat{SC}(\omega)$ отличны от нуля только при $|\omega| < \pi F$, то $\widehat{S}(\omega)$ может отличаться от нуля при условии $\omega \in [\Omega_0 - \pi F; \Omega_0 + \pi F]$. Таким образом, $SS(t)$ и $SC(t)$ — функции с ограниченным спектром, которые разлагаются в следующие ряды:

$$SS(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} SS(k\tau) \prod_{j=1}^M \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi F}{a^{j-1}}(t - k\tau)\right), \quad (1.47)$$

$$SC(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} SC(k\tau) \prod_{j=1}^M \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi F}{a^{j-1}}(t - k\tau)\right), \quad (1.48)$$

где $SS(k\tau)$ и $SC(k\tau)$ — дискретные отсчеты. Два члена в правой части равенства (1.45) получаются при модуляции сигнала с подавлением несущей, когда опорные гармонические несущие $\sin\Omega_0 t$ и $\cos\Omega_0 t$ модулируются сигналами $SS(t)$ и $SC(t)$. Рассмотрим обобщение теоремы на произвольную полосу частот.

Теорема 2. Сигнал $S(t)$, строго ограниченный по полосе частот $[\Omega_0 - \pi F; \Omega_0 + \pi F]$, можно восстановить по формулам (1.45), (1.47), (1.48). При этом дискретные отсчеты $SS(k\tau)$ и $SC(k\tau)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ осуществляются через равноотстоящие промежутки времени с шагом $\tau = \frac{1}{2F}$. Таким образом, по отсчетам $SS(k\tau)$ и $SC(k\tau)$ восстанавливается огибающая сигнала.

Для применения (1.45) отсчеты следует нормировать так, чтобы средняя мощность сигнала $S(t)$ была равна сумме квадратов отсчетов

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T S^2(t) dt = \sum_{k=-2FT}^{2FT} S^2(kT). \quad (1.49)$$

Для этого коэффициенты $S(kT)$ в рядах в обобщенных рядах отсчетов следует разделить на $\sqrt{2FT}$.

Теорема 2 может быть применена в задачах исследования узкополосных сигналов. Для них $2\pi F \ll \Omega_0$. Эти сигналы представим в виде

$$S(t) = A(t) \cos[\Omega_0 t + \theta(t)], \quad (1.50)$$

Если интервал между отсчетами огибающей $A(t)$ не превышает $1/F$, то ряд для нее имеет вид

$$A(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A(kT) \prod_{j=1}^M \operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi F}{a^{j-1}}(t - kT)\right). \quad (1.51)$$

Тогда

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A(kT) \prod_{j=1}^M \operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi F}{a^{j-1}}(t - kT)\right) \cdot \cos[\Omega_0 t + \theta(t)]. \quad (1.52)$$

С помощью полосового разложения (1.51) оценивается количество информации, содержащейся в модулированных сигналах.

Д) Обобщенная теорема отсчетов для амплитудно- и частотно- модулированных сигналов. Известно, что амплитудная модуляция (АМ) — это изменение во времени $A(t)$, спектр которой $\hat{A}(\omega)$ содержит максимальную частоту $\Omega = 2\pi F$. Ширина спектра сигнала $S(t)$ равна $\Delta f_{\text{АМ}} = 2F$. В пределах этой полосы спектр $\hat{S}(\omega)$ симметричен относительно Ω_0 . Интервал τ между отсчетами $A(kT)$ должен быть не более $1/\Delta f_{\text{АМ}}$, т. е. таким же, как и при дискретизации исходного сигнала (модулирующей функции). При АМ фазу $\Omega_0 t + \theta(t)$ передавать нет необходимости. АМ сигнал определяется отсчётами своей амплитуды, которые дискретизованы с шагом $1/\Delta f_{\text{АМ}}$, где $\Delta f_{\text{АМ}}/2$ — верхняя частота в спектре модулирующей функции (передаваемого сообщения). Другими словами, число степеней свободы АМ сигнала такое же, как и число степеней свободы модулирующей функции. Рассмотрим частотно-модулированный (ЧМ) сигнал

$$S(t) = A_0 \cos[\Omega_0 t + \theta(t)], \quad (1.53)$$

в котором мгновенная частота $\omega(t) = \Omega_0 + \frac{d\theta(t)}{dt}$ промодулирована тем же сигналом. При этом максимальная девиация частоты $f_d \gg F$.

Тогда ширину полосы частот модулированного колебания можно приравнять

$$\Delta f_{\text{ЧМ}} = 2f_D. \quad (1.54)$$

Это случай широкополосной частотной модуляции. При ЧМ передавать A_0 нет необходимости. Тогда достаточно отсчетов фазы $\theta(k\tau)$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, дискретизованной с шагом $\tau \leq 1/2f_D$.

Для длительности сигнала $2T$ число отсчетов фазы при ЧМ равно

$$K_{\Phi} = \Delta f_{\text{ЧМ}} 2T = 4f_D T, \quad (1.55)$$

а количество отсчетов огибающей при АМ

$$K_A = \Delta f_{\text{ЧМ}} 2T = 4FT. \quad (1.56)$$

При одном и том же передаваемом сигнале (информационном сообщении) ЧМ сигнал обладает в $\mu = f_{\text{ЧМ}}/F$ раз большим числом степеней свободы, чем АМ сигнал. На приемном конце канала связи после частотного детектирования можно создать напряжение, имеющее спектр исходного сигнала. Таким образом, при одной и той же ширине спектра $2F$ информационное содержание ЧМ сигнала выше.

1.4.6. Учет погрешностей обобщенной теоремы отсчетов

Теорема отсчетов имеет дело с дискретными выборками, то в моменты взятия отсчетов численные значения ряда и сигнала должны быть равны [1, 20, 25]. На практике взятие отсчета всегда сопровождается ошибками.

Погрешности представления сигнала рядом отсчетов обуславливается следующими причинами: ошибкой измерения отсчета, квантованием по времени и уровню, искажением спектра в переходной области частотной характеристики, а также пренебрежением спектральными составляющими, частоты которых превышают значение ω_s .

Оценим влияние погрешности взятия отсчетов при представлении сигнала рядом Котельникова.

Пусть сигнал $u(t)$ с неограниченным спектром $S(\omega)$ задан на отрезке $[t_0, t_0 + T]$. Справедливо соотношение

$$U_K(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(n\Delta t) \prod_{j=1}^{\infty} \text{sinc} \left(\frac{\omega_c \pi}{\Delta a^{j-1}} (t - n\Delta t) \right), \quad (1.57)$$

где $U_K(t)$ - интерполирующая функция, ω_c - частота среза, $U(n\Delta t)$ - дискретные значения сигнала $U(t)$, определяемые через интервалы времени $\Delta t = \pi/\omega_c$.

Таким образом, погрешности представления сигнала рядом (1.57) обуславливается следующими причинами: ошибками измерения отсчета, квантованием по времени и уровню, искажением спектра в переходной области частотной характеристики $[-\omega_s, -\omega_c) \cup (\omega_c, \omega_s]$, а также пренебрежением спектральными составляющими вне полосы пропускания $(-\infty, -\omega_s) \cup (\omega_s, \infty)$.

Представим $U(n\Delta t)$ в виде суммы

$$U(n\Delta t) = \varphi_0(n\Delta t) + \varphi_{cs}(n\Delta t) + \varphi_s(n\Delta t),$$

где $\varphi_0(n\Delta t)$ - дискретные отсчеты, функции со спектром строго ограниченной полосой частот $[-\omega_c, \omega_c]$, $\varphi_1(n\Delta t)$ - дискретные отсчеты, функции со спектром ограниченным частотами $[-\omega_s, -\omega_c) \cup (\omega_c, \omega_s]$, $\varphi_2(n\Delta t)$ - дискретные отсчеты, функции со спектром строго ограниченной полосой частот $(-\infty, -\omega_s) \cup (\omega_s, \infty)$, причем

$$U(t) = \varphi_0(t) + \varphi_{cs}(t) + \varphi_s(t).$$

Выражение (67) примет вид

$$U_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\varphi_0(n\Delta t) + \varphi_{cs}(n\Delta t) + \varphi_s(n\Delta t)) \prod_{j=1}^{\infty} \text{sinc} \left(\frac{\omega_c \pi}{\Delta a^{j-1}} (t - n\Delta t) \right). \quad (1.58)$$

Пусть значения дискретных выборок $U(n\Delta t)$ определены с ошибкой $\Delta U(n\Delta t)$ и составляет величину $U^*(n\Delta t)$

$$U^*(n\Delta t) = U(n\Delta t) + \Delta U(n\Delta t). \quad (1.59)$$

Тогда функция, восстановленная с помощью обобщённого ряда (1.57) с учетом (1.58) и (1.59) запишется так

$$\begin{aligned} U_2(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\varphi_0(n\Delta t) + \varphi_{cs}(n\Delta t) + \varphi_s(n\Delta t) + \Delta U(n\Delta t)) \times \\ &\quad \times \prod_{j=1}^{\infty} \text{sinc} \left(\frac{\omega_c \pi}{\Delta a^{j-1}} (t - n\Delta t) \right) = \\ &= U_1(t) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta U(n\Delta t) \prod_{j=1}^{\infty} \text{sinc} \left(\frac{\omega_c \pi}{\Delta a^{j-1}} (t - n\Delta t) \right) = U_1(t) + N(t), \end{aligned}$$

где $N(t)$ - погрешность, учитывающая ошибку взятия отсчета. Вычислив среднюю квадратичную ошибку восстановления $U(t)$ после пренебрежение

малыми величинами получим выражение

$$\delta^2 = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} U^2(t) dt} \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_0(t) - U_1(t))^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{cs}^2(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_s^2(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} N^2(t) dt.$$

Здесь учитываются основные ошибки, возникающие при использовании обобщенной теоремы отсчетов на практике.

Используя приведенные выше результаты, можно рассмотреть другие подходы к построению функции ядра ряда отсчетов ψ .

1.4.7. Ядро ряда отсчетов Кравченко-Левитана

Как показано в [20] в качестве ядра разложения ряда отсчетов может быть выбрано представление полиномов Левитана [25]

$$S_n(f; z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(z + k\Delta) \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi}{\Delta} (z + k\Delta) \right], \quad (1.60)$$

где $\Delta = \frac{1}{F} = \frac{2\pi}{\Omega}$. В (1.60) в качестве базисных функций фигурируют сдвиги-сжатия ядер Фейера. Обобщенные многочлены Левитана [2,4] для функций $f(z) \in \mathbf{W}_\sigma^{(r)}$ ($\sigma \geq 0, r = 0, 1, 2, \dots$), таких, что $f(x)/|x - i|^{2r+1} \in \mathbf{L}_2(\mathbf{R})$, строятся на основе ядер типа Фейера (Джексона). Они имеют вид

$$S_n^{(r)}(f; z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(z + k\Delta) \operatorname{sinc}^{2r+2} \left[\frac{\pi}{\Delta} (z + k\Delta) \right]. \quad (1.61)$$

По аналогии с (1.29) вводим весовую функцию (окно) Кравченко-Левитана

$$w_{KL}(t) = \prod_{j=1}^M \left(\operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta 2^{j-1}} t \right) \right)^{2r+2}. \quad (1.62)$$

Весовая функция $w_{KL}(t)$ также как и $w_{KK}(t)$ зависит от трех параметров: M, r, Δ , входящих в (1.62). Изменяя их последовательно, получим весовые функции (окна) с различными физическими характеристиками. На рис. 1.21 представлены весовые функции Кравченко-Левитана для разных значений M и r при $\Delta = 0.5$.

Ряд (1.61) имеет несколько лучшую сходимость по сравнению с (1.23). Это объясняется тем, что в (1.61) функция $\operatorname{sinc}(t)$ возводится в степень $2r + 2$, $r = 0, 1, 2, \dots$. В табл. 1.5 приведены физические характеристики весовых функций Кравченко-Котельникова и Кравченко-Левитана, из которых видно, что они обладают хорошими временными и частотными свойствами.

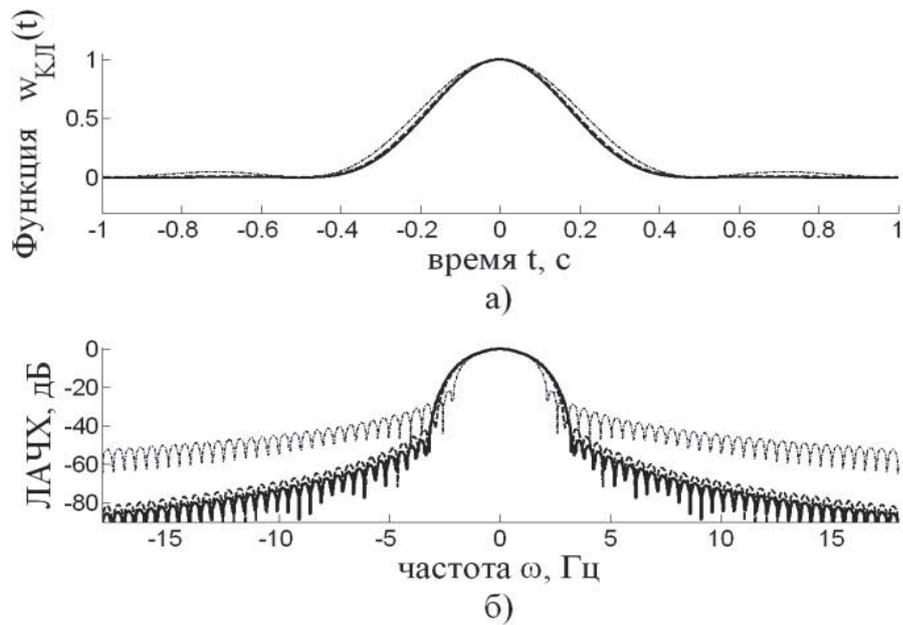


Рис. 1.21. Весовая функция КЛ: $M=1$ (пунктир), $M=2$ (штрих-пунктир), $M=3$ (сплошная линия) ($r=0$, $\Delta = 0,2$ с) (а), а также их ЛАЧХ (б).

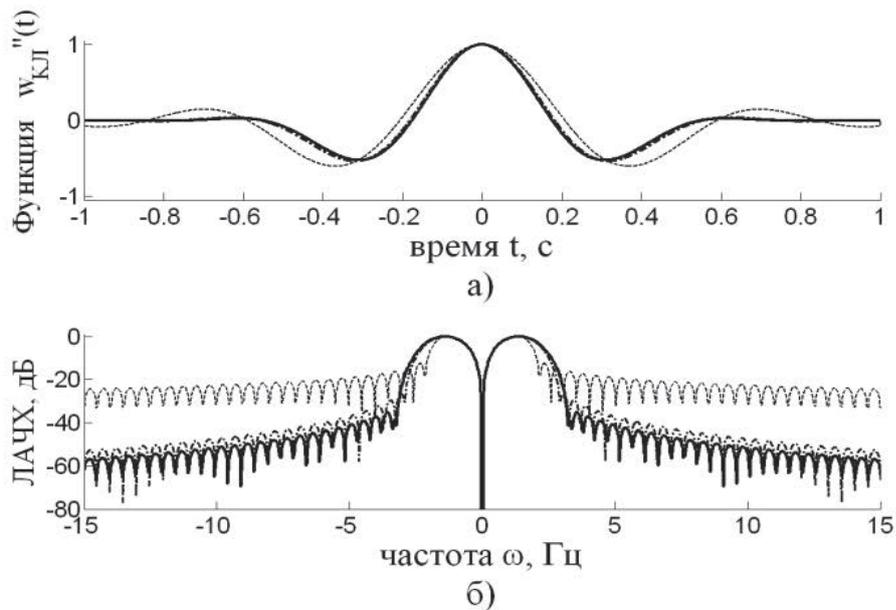


Рис. 1.22. Вторая производная весовых функций КЛ: $M=1$ (пунктир), $M=2$ (штрих-пунктир), $M=3$ (сплошная линия) (а), а также их ЛАЧХ (б).

Вторая производная весовой функции Кравченко-Левитана. Рассмотрим поведение второй производной весовой функции Кравченко-Левитана

$$w_{2ПКК}(t) = -\frac{d^2}{dt^2} \left(\prod_{j=1}^M \left(\text{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta 2^{j-1}} t \right) \right)^{2r+2} \right). \quad (1.63)$$

Графики этой функции для различных значений параметра M при $r=0$, $\Delta = 0.5$ представлены на рис. 1.22.

**Таблица 1.5. Физические характеристики
весовых функций Кравченко-Левитана**

М	а	Δ	η	μ	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9
1	0	0.20	6.36	2.00	0.00	1.61	0.79	1.17	-30.20	-8.89	51.03	34.72	-25.00
2		0.20	6.91	2.00	0.00	2.15	0.84	1.17	-52.00	-8.76	60.00	43.33	-47.60
3		0.20	7.09	2.00	0.00	2.40	0.83	1.15	-68.41	-8.81	61.38	44.35	-65.01
1	1	0.20	8.54	2.00	0.00	2.32	0.84	1.16	-60.66	-8.53	75.00	53.93	-53.08
2		0.20	9.45	2.00	0.00	3.13	0.84	1.16	-106.20	-8.43	83.09	59.56	-102.30
3		0.20	9.63	2.00	0.00	3.49	0.83	1.17	-139.50	-8.37	84.94	60.82	-134.00
1	0	0.50	2.54	2.00	0.00	1.71	0.82	1.18	-24.36	-9.01	21.05	14.77	-21.72
2		0.50	2.73	2.00	0.00	2.13	0.83	1.17	-42.16	-8.76	24.02	17.36	-37.35
3		0.50	2.82	2.00	0.00	2.29	0.84	1.16	-50.30	-8.90	24.56	17.75	-47.46
1	1	0.50	3.36	2.00	0.00	2.32	0.84	1.16	-46.81	-8.46	30.01	21.59	-41.67
2		0.50	3.73	2.00	0.00	3.07	0.83	1.17	-83.75	-8.37	33.23	23.82	-77.85
3		0.50	3.82	2.00	0.00	3.36	0.83	1.17	-99.16	-8.38	33.98	24.33	-94.99

1.5. Непараметрическое оценивание функции плотности вероятности последовательности случайных величин

Пусть X_1, X_2, \dots, X_n – выборка из n независимых наблюдений случайной величины X с неизвестной функцией плотности вероятности (ФПВ) $f(x)$. Непараметрическая оценка [41-46] определяется так

$$f_n(x) = \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^n K\left(\frac{X_j - x}{h}\right), \quad (1.64)$$

где $h=h(n)$ — некоторая последовательность положительных чисел. При этом $\lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = 0$, $K(x)$ — четная функция, удовлетворяющая условию нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx = 1$ и $K(x) \in L_2$. Весовая функция $K(x)$ называется допустимой, если её преобразование Фурье (ПФ) неотрицательно и не превосходит 1 для всех вещественных частот. Тогда возможно следующее определение.

Определение 1. Непараметрическая задача оценивания неизвестных распределений — это задача нахождения процедуры оценивания непараметризованные распределения из некоторого класса распределений. Для первых моментов функции H от статистики x_n в случае, когда характеристики моментов статистик находятся, как моменты предельного распределения оценки (среднее, дисперсия, СКО) в условиях слабой сходимости.

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Если распределения последовательности s -мерных случайных величин при $n \rightarrow \infty$ сходится к s -мерному нормальному распределению $N_s\{\mu, \sigma\}$ с вектором средних $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_s)$ и ковариационной матрицей σ ($0 < \sigma_{jj} = \sigma_{jj}(x) < \infty, j = \overline{1, s}$), т.е. $d_n(x_n - x) \Rightarrow N_s\{\mu, \sigma\}$, $H(x) \in \mathcal{N}_{1,s}$ и $\nabla H(x) \neq 0$, то имеем

$$\begin{aligned} d_n(H(x_n) - H(x)) &\Rightarrow N_1 \left\{ \sum_{j=1}^s H_j(x) \mu_j, \sum_{j,p=1}^s H_j(x) H_p(x) \sigma_{j,p} \right\} = \\ &= N_1 \left\{ \nabla H(x) \mu^T, \nabla H(x) \sigma \nabla^T H(x) \right\}. \end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{N}_{\nu,s}$ — класс функций, для которых существуют все частные производные до ν -го порядка включительно, $d_n \rightarrow \infty$. Пусть $\nabla^2 H(x)$ — матрица вто-

рых производных с элементами $\left. \frac{\partial^2 H(z)}{\partial z_i \partial z_j} \right|_{z=x}$, $i, j = \overline{1, s}$; $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_s)$ — s -

мерная случайная величина; X^2 — одномерная случайная величина, имеющая χ^2 -распределение с одной степенью свободы, N — случайная величина, распределенная по стандартному нормальному закону $N_1\{0, 1\}$.

Возможны три случая [37-42].

- Если $d_n(x_n - x) \Rightarrow \eta = (\eta_1, \dots, \eta_s)$, $H(x) \in \mathcal{N}_{1,s}$, $\nabla H(x) \neq 0$, то

$$d_n(H(x_n) - H(x)) \Rightarrow \sum_{j=1}^s H_j(x) \eta_j = \nabla H(x) \eta^T.$$

- Если $d_n(x_n - x) \Rightarrow \eta = (\eta_1, \dots, \eta_s)$, $H(x) \in \mathcal{N}_{2,s}$, $\nabla H(x) = 0$, а $\nabla^2 H(x) \neq 0$, то

$$d_n^2(H(x_n) - H(x)) \Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s H_{i,j}(x) \eta_i \eta_j = \frac{1}{2} \eta \nabla^2 H(x) \eta^T.$$

- Если $d_n(x_n - x) \Rightarrow N_s\{0, I_s\}$, где I_s — единичная диагональная матрица порядка s , то $d_n^2(H(x_n) - H(x))$ сходится по распределению к сумме взвешенных сумм s случайных величин X^2 и $s(s-1)$ произведений независимых стандартных нормальных случайных величин, т.е. $H(x) \in \mathcal{N}_{2,s}$, $\nabla H(x) = 0$, а $\nabla^2 H(x) \neq 0$, то

$$d_n^2(H(x_n) - H(x)) \Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s H_{j,j}(x) X_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^s H_{i,j}(x) N_i N_j. \quad (1.65)$$

Критерием качество оценки $f_n(x)$ является интегральная среднеквадратичная ошибка (ИСКО), определяемая так

$$E = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} (f_n(x) - f(x))^2 dx \right\rangle.$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по ансамблю. В том случае, если ВФ является допустимой, то ИСКО получаемой с её помощью оценки не может быть уменьшена одновременно для всех плотностей вероятности $f(x)$.

1.5.1. Допустимые оценки функции плотности вероятности и её производных

Рассмотрим на примере АФ $h_a(x)$ построение конструкций допустимых ВФ [37-42]. С помощью свойства 4 (раздел 1.1) можно записать функцию $h_a(x)$

на интервале $x \in \left[-\frac{1}{(a-1)}, \frac{1}{(a-1)} \right]$ в виде

$$h_a(x) = (a-1) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_a((a-1)\pi k) \cos((a-1)\pi kx) \right), \quad (1.66)$$

где $\varphi_a(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(x/a^k)}{x/a^k}$.

Введем функцию $ch_a(x) = h_a(x) * h_a(x)$. Она четная, бесконечно дифференцируемая с носителем $[-2(a-1)^{-1}, 2(a-1)^{-1}]$. Повторяя операцию

свертки $(l-1)$ -раз, получим $ch_{a,l}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_a(\omega)]^l \exp(i\omega x) d\omega$, $l = 1, 2, \dots$,

$\text{supp} ch_{a,l}(x) = [-l(a-1)^{-1}, l(a-1)^{-1}]$, $\int_{-l(a-1)^{-1}}^{l(a-1)^{-1}} ch_{a,l}(x) dx = 1$. Её ПФ для четного ин-

декса $\int_{-\infty}^{\infty} ch_{a,2l}(x) \exp(-i\omega x) dx = [\varphi_a(\omega)]^{2l}$ неотрицательно и не превосходит 1. До-

пустимые ВФ строятся в частотном пространстве $\Psi_r(\omega) = 1 - (1 - \varphi_a(\omega))^{r/2}$,

$r = 2, 4, \dots$. Они положительны и не превосходят 1. Допустимая ВФ вычисляется так

$$K_{a,r}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - (1 - \varphi_a^2(\omega))^{r/2} \right\} \exp(i\omega x) d\omega, \quad r = 2, 4, \dots \quad (1.67)$$

Например, получим $K_{a,2}(x) = ch_{a,1}(x)$, $K_{a,4}(x) = 2ch_{a,1}(x) - ch_{a,2}(x)$, $K_{a,6}(x) = 3ch_{a,1}(x) - 3ch_{a,2}(x) + ch_{a,3}(x)$. Вид весовых функций $K_{a,r}(x)$, а также их производных представлен на рис. 1.23.

Оценку величины $f'(x)$ запишем в следующей форме:

$$Df_n(x) = \frac{1}{nh^2} \sum_{j=1}^n N\left(\frac{X_j - x}{h}\right), \quad (1.68)$$

где $h = h(n)$ — убывающая последовательность положительных чисел,

$N(x)$ — четная функция $\left(\int_{-\infty}^{\infty} N(x)dx = 1\right)$ и $N(x) \in L_2$. Если взять $N_r(x) = -K'_{r-1}(x)$,

$r = 3, 5, \dots$, то получим допустимые весовые функции порядков r .

Таблица 1.6. Физические характеристики ВФ $K_{a,r}(x)$

r	a	γ_3	γ_4 / γ_3	γ_9	P	Δ	supp	supp _E
2	2	1.720	1.391	-46.59	0.945	0.502	4	2.029
	3	2.693	1.444	-34.03	0.735	0.508	2	1.233
	4	3.815	1.412	-30.49	0.622	0.513	4/3	0.898
	5	4.787	1.375	-28.99	0.549	0.518	1	0.708
	6	5.610	1.467	-28.21	0.496	0.522	4/5	0.587
	7	6.732	1.400	-27.76	0.456	0.525	2/3	0.501
4	2	2.581	1.232	-40.59	0.883	0.544	8	2.669
	3	4.114	1.236	-28.09	0.682	0.560	4	1.662
	4	5.610	1.240	-24.60	0.573	0.574	8/3	1.218
	5	7.181	1.229	-23.12	0.503	0.585	2	0.964
	6	8.602	1.239	-22.36	0.454	0.593	8/5	0.796
	7	10.098	1.222	-21.91	0.416	0.599	4/3	0.682
6	2	3.017	1.182	-37.08	0.852	0.588	12	2.669
	3	4.837	1.186	-24.66	0.654	0.614	6	1.674
	4	6.583	1.182	-21.21	0.547	0.638	4	1.225
	5	8.378	1.167	-19.76	0.478	0.656	3	0.972
	6	10.098	1.173	-19.01	0.429	0.670	12/5	0.805
	7	11.819	1.165	-18.57	0.393	0.680	2	0.687

Аналогично для второй производной ФПВ имеем

$$D^2 f_n(x) = \frac{1}{nh^3} \sum_{j=1}^n M\left(\frac{X_j - x}{h}\right), \quad (1.69)$$

где $h = h(n)$ — убывающая последовательность положительных чисел,

$M(x)$ — четная функция $\left(\int_{-\infty}^{\infty} M(x) dx = 1 \right)$, $M(x) \in L_2$. Если взять $M_r(x) = -K''_{r-2}(x)$, $r = 3, 5, \dots$, то получим допустимые весовые функции порядков r . В табл. 1.6 приведены физические характеристики ВФ $K_{a,r}(x)$.

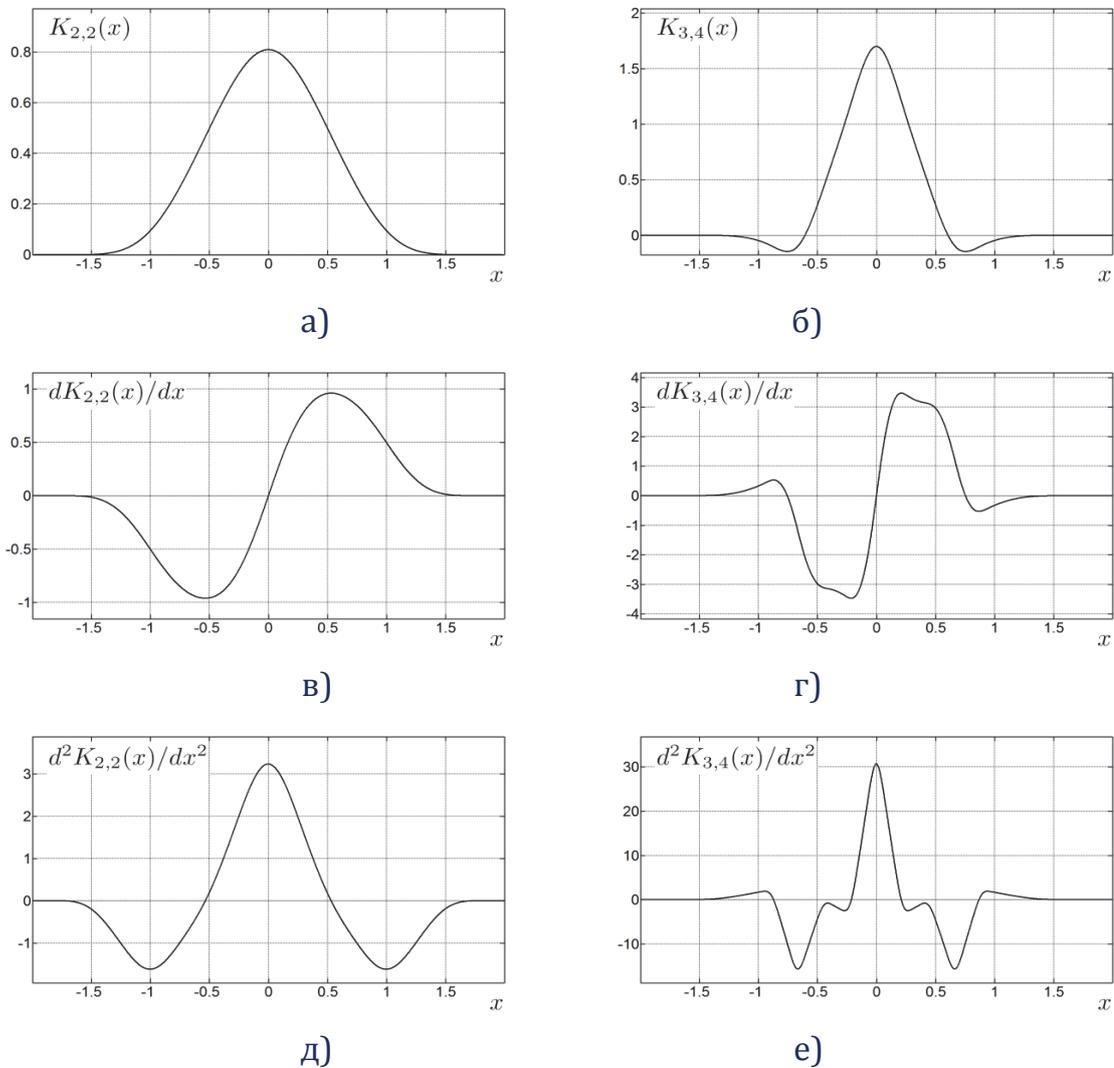


Рис. 1.23. Вид весовых функций $K_{a,r}(x)$, а также их первой и второй производных для $a=2, r=2$ (а, в, д); $a=3, r=4$ (б, г, е).

1.5.2. Численный эксперимент

Рассмотрим оценку функции плотности вероятности [42-46] последовательности случайных величин X_n с нормальным законом распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1.70)$$

где математическое ожидание $\mu = 0.25$, среднеквадратическое отклонение $\sigma = 0.5$ (рис. 1.24а). На рис. 1.24б-г и рис. 1.25 представлены результаты оцен-

ки функции плотности распределения $f(x)$, а также её первых двух производных для разных значений a , r и $n=2500$.

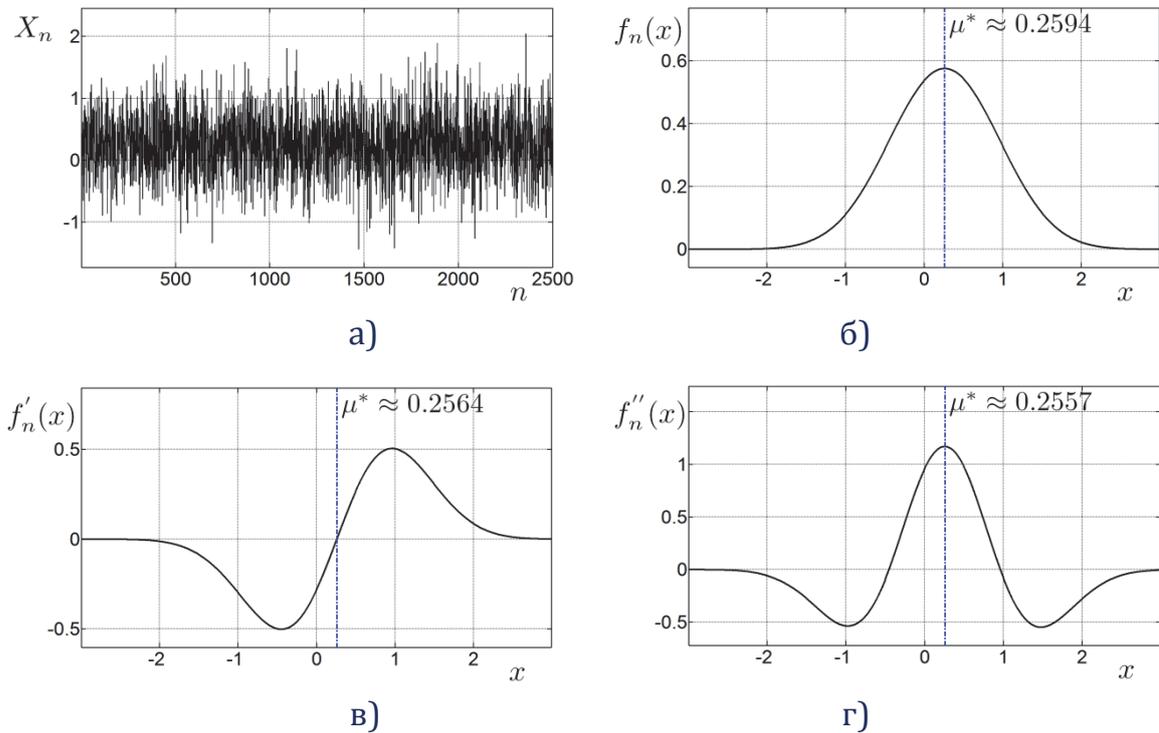


Рис. 1.24. Последовательность случайных величин X_n , $n=2500$ (а) и оценка $f_n(x)$, $Df_n(x)$, $D^2f_n(x)$ для $a=2$, $r=2$ (б)-(г).

Проведем сравнение характеристик распределения, вычисленных по последовательности, а также из оценок. На рис. 1.26 приведены графики $(\mu^* - \mu_n)$ и $(\sigma^* - \sigma_n)$, где

$$\mu^* = \frac{1}{\|f(x)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} x |f_n(x)|^2 dx, \quad \sigma^* = \frac{1}{\|f_n(x)\|} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu^*)^2 |f_n(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (1.71)$$

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k, \quad \sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu_n)^2}. \quad (1.72)$$

Как видно из графиков, при увеличении порядка ВФ, получаем более гладкую функцию плотности вероятности, а при уменьшении более точное вычисление математического ожидания. Рисунок 1.27 иллюстрирует изменение $(\sigma^* - \sigma_n)$ от параметров a и r . При возрастании a или r наблюдается более точное вычисление σ^* . Для анализа полученных оценок вычислим моменты функции плотности распределения $m_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu^*)^k f_n(x) dx$, асимметрию

$A = \frac{m_3}{\sigma^3}$, а также эксцесс $E = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3$. Соответствующие величины приведены в табл. 1.7.

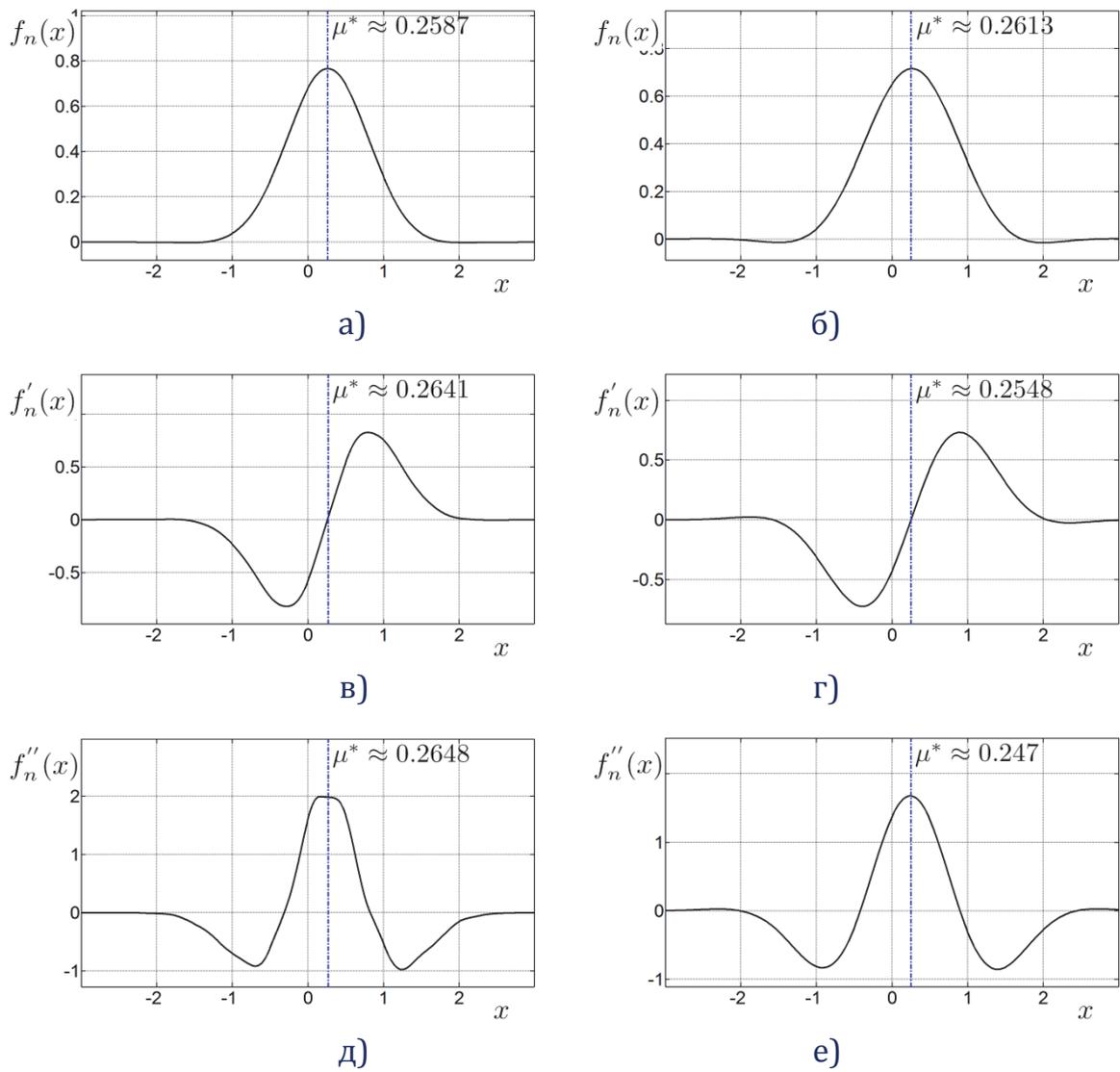


Рис. 1.25. Оценка $f_n(x)$, $Df_n(x)$ $D^2f_n(x)$: $a=3, r=4$ (а, в, д); $a=2, r=6$ (б, г, е).

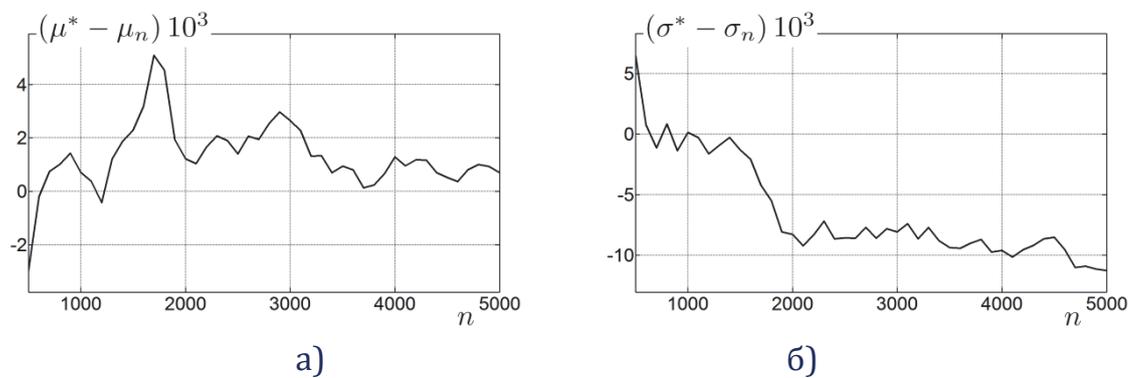


Рис. 1.26. Изменение $(\mu^* - \mu_n)$ (а) и $(\sigma^* - \sigma_n)$ (б) при изменении n ($a=2, r=2$).

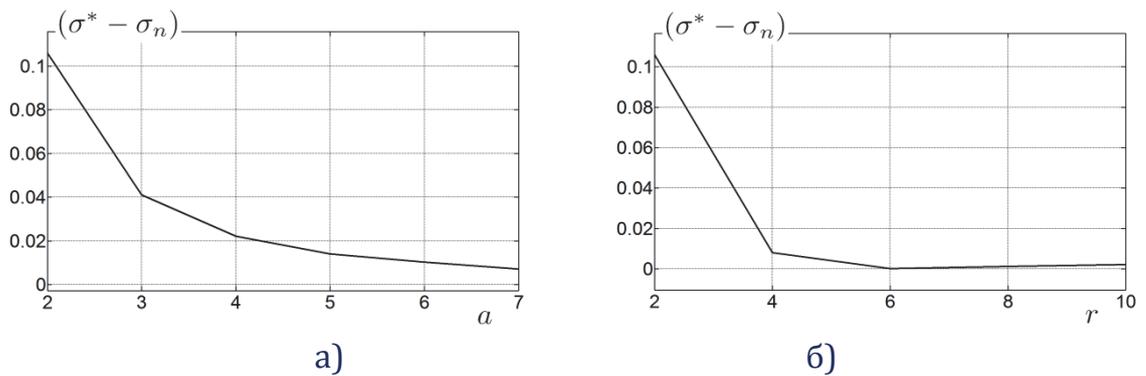


Рис. 1.27. Зависимость $(\sigma^* - \sigma_n)$ от a ($r=2$) (а) и от r ($a=2$) (б), $n=2500$.

Таблица 1.7. Характеристики оценок функции плотности вероятности последовательности случайных величин X_n , $n=2500$

r	a	μ^*	σ^*	$m_1 \times 10^3$	m_2	$m_3 \times 10^3$	m_4	$A \times 10^3$	$E \times 10^3$
2	2	0.524	1.103	-4.78	1.218	-32.41	4.437	-24.13	-6.68
	3	0.524	1.039	-5.49	1.079	-32.72	3.495	-29.20	3.94
	4	0.525	1.020	-5.77	1.040	-32.93	3.250	-31.06	6.24
	5	0.525	1.011	-5.96	1.023	-33.23	3.148	-32.11	7.18
	5	0.525	0.999	-6.32	0.995	-33.81	2.975	-33.95	-7.30
6	2	0.525	0.998	-5.95	0.995	-32.71	2.980	-32.94	8.01
	3	0.525	0.999	-5.99	0.995	-32.83	2.980	-32.94	-6.56
	4	0.525	0.999	-6.24	0.995	-33.57	2.980	-33.69	-6.15
	5	0.525	0.999	-6.47	0.995	-34.24	2.980	-34.37	-5.11
8	2	0.525	0.999	-5.99	0.995	-32.82	2.980	-32.94	-5.83
	4	0.525	0.999	-6.32	0.995	-33.82	2.979	-33.92	-8.45
	5	0.525	0.999	-6.56	0.995	-34.52	2.980	-34.63	-7.30

ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ 1

В данной главе на основе теории атомарных функций предложены новые конструкции весовых функций с компактным носителем для цифровой обработки радиофизических сигналов и оценки спектральной плотности временных рядов. Синтезированы цифровые фильтры с конечной импульсной характеристикой на основе атомарных функций, обладающие хорошими частотно-временными свойствами. Построены допустимые непараметрические оценки плотности вероятности и её производных 1- и 2-го порядков последовательности случайных величин. Наличие параметров функции позволяет расширить применимость предложенных оценок к случайным процессам различной физической природы. Проведенный физический анализ подтверждает эффективность новых непараметрических оценок функции плотности вероятности.

ГЛАВА 2. ПРИМЕНЕНИЕ WA-СИСТЕМ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ РАДИОФИЗИКИ

Вторая глава диссертационной работы посвящена применению WA-систем функций к различным физическим приложениям [8,26,29,47-58]. Благодаря локальным свойствам как в пространственной, так и в частотной области, ортогональности, нулевым моментам и кратномасштабному анализу (КМА) вычислительные алгоритмы на основе вейвлетов обладают существенными преимуществами перед Фурье-преобразованиями. Так, применение WA-систем функций для анализа сверхширокополосных (СШП) сигналов интересно тем, что вейвлеты и атомарные функции, как и СШП сигналы, являются локализованными во времени, чем отличаются от неограниченных во времени базисных функций преобразования Фурье. Поэтому большой научный и практический интерес представляет построение новых классов ортогональных, а также аналитических WA-систем функций на основе атомарных функций. Эффективность этого подхода показана на конкретных физических примерах, относящихся к цифровой обработке сигналов и изображений.

2.1. Построение ортогональных WA-систем функций

2.1.1. Ортогональные WA-системы функций $\{\widetilde{up}(t)\}$

Пусть требуется построить такую конструкцию WA-систем функций [8,26,49-51], чтобы масштабирующая функция $\varphi(x)$ образовывала совокупность замкнутых вложенных друг в друга подпространств $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{Z}$, порождающих кратномасштабный анализ (КМА) [8,26], который обладает следующими свойствами:

1. $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$.
2. $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.
3. $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$.

4. Существует масштабирующая функция $\varphi(x) \in V_0$, сдвиги которой образуют базис Рисса пространства V_0 .

Согласно [6-8, 26], в качестве масштабирующей функции $\varphi(x)$ можно взять функцию, преобразование Фурье $\hat{\varphi}(\omega)$ которой является четной и фи-

нитной функцией. Процесс построения WA-системамы функций рассмотрим с использованием АФ $up(t)$, так как основные элементы алгоритма переносятся на другие семейства АФ. Пусть V_0 подпространство в $L^2(\mathbb{R})$, порожденное сдвигами функции $\varphi(x)$. Чтобы функции $\varphi_n(x) = \varphi(x - n)$ образовывали базис Рисса [6-8,26] подпространства V_0 , необходимо выполнение теорем.

Теорема 2.1. Система $\{\varphi(x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, полученная сдвигами некоторой функции $\varphi(x) \in L^2(\mathbb{R})$, образует базис Рисса подпространства $V_0 \subset L^2(R)$ тогда и только тогда, когда существуют положительные постоянные A и B такие, что

$$A \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi n)|^2 \leq B. \quad (2.1)$$

Теорема 2.2. Функции $\varphi_n(x) = \varphi(x - n)$ образуют ортонормированный базис подпространства $V_0 \subset L^2(R)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi n)|^2 = 1. \quad (2.2)$$

Будем искать сначала функцию $\chi(\omega) = |\hat{\varphi}(\omega)|^2$, сдвиги которой $\chi_n(\omega) = \chi(\omega + 2\pi n)$ образуют разложение единицы

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(\omega + 2\pi n) = 1 \quad (2.3)$$

и удовлетворяет условиям $\text{supp}(\hat{f}(\omega)) = \left[-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$; $\hat{f}(\omega) = 1$ при $\omega \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$;

$\hat{f}(\omega) = 0.5$ при $\omega = \pi$, Согласно [2]

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} up(t + n) = 1. \quad (2.4)$$

Чтобы ширина плоской вершины была больше или равна половине носителя функции, рассмотрим частичную сумму

$$up_1^{\text{sum}}(t) = up(t + 1) + up(t) + up(t - 1). \quad (2.5)$$

Перейдя от носителя $\text{supp}(up_1^{\text{sum}}(t)) = [-2, 2]$ к $\left[-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ имеем

$$up_2^{\text{sum}}(t) = up\left(\frac{3}{2\pi}t + 1\right) + up\left(\frac{3}{2\pi}t\right) + up\left(\frac{3}{2\pi}t - 1\right). \quad (2.6)$$

Получим модифицированную АФ $up_2^{\text{sum}}(t)$, удовлетворяющую всем условиям, которыми должна обладать функция $\chi(\omega)$. Осуществим замену аргу-

мента $t \rightarrow \omega - \chi(\omega) = \text{up}_2^{\text{sum}}(\omega)$. Для определения преобразования Фурье масштабирующей функции $\hat{\varphi}(\omega)$ необходимо извлечь квадратный корень из $\chi(\omega)$

$$\hat{\varphi}(\omega) = \widetilde{\text{up}}(\omega) = \sqrt{\text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega + 1\right) + \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega\right) + \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega - 1\right)}. \quad (2.7)$$

Условие *Теоремы 2* выполняется по построению. Для доказательства достаточно проверить равенство (2.2), которое выполняется, если

$$\left|\widetilde{\text{up}}(\omega)\right|^2 + \left|\widetilde{\text{up}}(\omega - 2\pi)\right|^2 = 1 \quad (2.8)$$

на промежутке $\omega \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$. Докажем *Теорему 2* для случая WA-системы функций $\{\widetilde{\text{up}}(\omega)\}$. Разложим левую часть (2.8) в сумму $\text{up}(\bullet)$

$$\begin{aligned} \left|\widetilde{\text{up}}(\omega)\right|^2 + \left|\widetilde{\text{up}}(\omega - 2\pi)\right|^2 &= \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega\right) + \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega + 1\right) + \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega - 1\right) + \\ &+ \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}(\omega - 2\pi)\right) + \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}(\omega - 2\pi) + 1\right) + \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}(\omega - 2\pi) - 1\right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Раскрывая скобки в аргументе $\text{up}(\bullet)$, получим

$$\begin{aligned} \left|\widetilde{\text{up}}(\omega)\right|^2 + \left|\widetilde{\text{up}}(\omega - 2\pi)\right|^2 &= \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega\right) + \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega + 1\right) + \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega - 1\right) + \\ &+ \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega - 3\right) + \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega - 2\right) + \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega - 4\right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Формулу (2.10) запишем так

$$\left|\widetilde{\text{up}}(\omega)\right|^2 + \left|\widetilde{\text{up}}(\omega - 2\pi)\right|^2 = \sum_{n=-1}^4 \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega - n\right). \quad (2.11)$$

Согласно свойству АФ $\text{up}(\bullet)$ (2.8)

$$\left|\widetilde{\text{up}}(\omega)\right|^2 + \left|\widetilde{\text{up}}(\omega - 2\pi)\right|^2 = \sum_{n=-1}^4 \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega - n\right) \Big|_{\omega \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]} = 1. \quad (2.12)$$

$$\text{Тогда} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}(\omega + 2\pi n)\right|^2 \Big|_{\omega \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]} = \sum_{n=-1}^4 \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}\omega - n\right) \Big|_{\omega \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]} = 1, \quad (2.13)$$

что и требовалось доказать.

Для выполнения третьего свойства КМА необходимо, чтобы выполнялось масштабирующее уравнение

$$\hat{\varphi}(\omega) = H_0\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \Leftrightarrow \hat{\varphi}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} H_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right). \quad (2.14)$$

Из (2.14) определим частотную функцию отклика масштабирующей функции $H_0(\omega)$. Поскольку $\hat{\varphi}(\omega/2) = 1$ на промежутке $[-4\pi/3, 4\pi/3]$, а $\hat{\varphi}(\omega)$ обращается в ноль вне промежутка $[-4\pi/3, 4\pi/3]$, то $H_0(\omega) = \hat{\varphi}(2\omega)$ при $\omega \in [-2\pi/3, 2\pi/3]$ и нулю при $\omega \in [-\pi, -2\pi/3] \cup [2\pi/3, \pi]$. Далее $H_0(\omega)$ продолжим периодически с периодом 2π

$$H_0(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2(\omega + 2\pi n)). \quad (2.15)$$

При подстановке (2.15) в (2.14) убеждаемся, что масштабирующее уравнение выполняется

$$H_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(\omega + 2\pi n) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \hat{\varphi}(\omega). \quad (2.16)$$

Тогда для функции $H_0(\omega)$ справедлива следующая теорема [5].

Теорема 2.3. Если сдвиги $\varphi_n(x) = \varphi(x - n)$ масштабирующей функции $\varphi(x)$ образуют ортонормированный базис подпространства V_0 , то частотная функция $H_0(\omega)$ обладает следующим свойством:

$$|H_0(\omega)|^2 + |H_0(\omega + \pi)|^2 = 1. \quad (2.17)$$

Доказательство Теоремы 2.3 следует из (2.15) и (2.13). Согласно [6-8,26] первые два свойства КМА, сформулированные ниже в виде теорем, выполняются.

Теорема 2.4. Если сдвиги $\varphi_n(x) = \varphi(x - n)$ масштабирующей функции $\varphi(x)$ образуют базис Рисса пространства V_0 , то $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.

Теорема 2.5. Пусть масштабирующая функция $\varphi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию (1). Здесь $\hat{\varphi}(\omega)$ ограничена для всех ω и непрерывна в окрестности $\omega=0$. Тогда $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$.

Таким образом, построено преобразование Фурье $\hat{\varphi}(\omega)$ (рис. 2.1а) функции $\varphi(x)$ (рис. 2.1б, пунктирная линия), порождающей КМА

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\omega) \exp(i\omega x) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{-4\pi/3} \hat{\varphi}(\omega) \cos \omega x d\omega. \quad (2.18)$$

Следовательно, можно определить ортогональный базис, полученный посредством сжатий и сдвигов вейвлета

$$\psi(x) \in W_0 \quad (V_{j+1} = V_j \oplus W_j, W_j \perp V_j, W_j \perp W_k \text{ для всех } j, k \in \mathbb{Z}, k \neq j),$$

который обладает схожими свойствами с $\varphi(x)$.

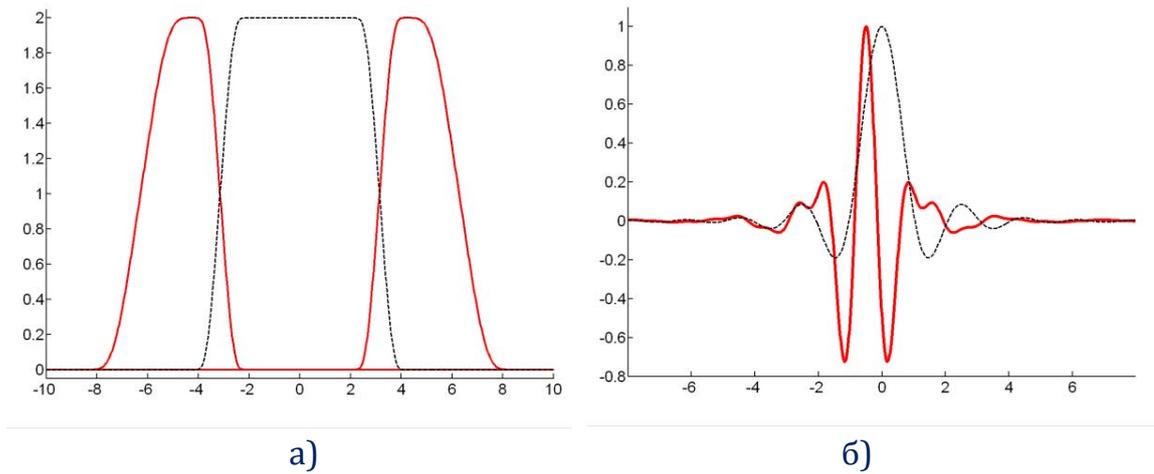


Рис. 2.1. Спектры масштабирующей функции (пунктир) вейвлета (сплошная линия) (а) WA-системы $\{\tilde{\psi}_p(\omega)\}$, их графики (б)

Согласно [1-7] преобразование Фурье функции $\hat{\psi}(\omega)$ определяется так

$$\hat{\psi}(\omega) = \exp(i\omega/2) H_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \exp(i\omega/2) (\hat{\varphi}(\omega - 2\pi) + \hat{\varphi}(\omega + 2\pi)) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (2.19)$$

Сдвиги $\psi_n(x) = \psi(x - n)$ [6-8, 26] образуют ортонормированный базис

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\omega + 2\pi n)|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\omega + 4\pi n)|^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\omega + 2\pi + 4\pi n)|^2 = \\ &= \left| H_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi n\right) \right|^2 + \left| H_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi n\right) \right|^2 = \\ &= \left| H_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 + \left| H_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 = 1. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Из (2.14), (2.17) и (2.19) следует свойство квадратов преобразования Фурье вейвлета и масштабирующей функции

$$|\hat{\psi}(2\omega)|^2 = |H_0(\omega + \pi)|^2 |\hat{\varphi}(\omega)|^2 = (1 - |H_0(\omega)|^2) |\hat{\varphi}(\omega)|^2 = |\hat{\varphi}(\omega)|^2 - |\hat{\varphi}(2\omega)|^2,$$

которое имеет вид
$$|\hat{\varphi}(\omega)|^2 + |\hat{\psi}(\omega)|^2 = \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2. \quad (2.21)$$

Подставив в (2.21) преобразование Фурье масштабирующей функции $\hat{\varphi}(\omega)$ и вейвлета $\hat{\psi}(\omega)$, убедимся в том, что оно выполняется. Это обстоятельство позволяет сделать вывод о том, что с помощью WA-системы функций $\{\tilde{\psi}_p(\omega)\}$ и масштабирующей функции уровня j можно получить масштабирующую функцию уровня $j+1$ (принцип вложенности подпространств соблюдается).

Выполнив обратное преобразование Фурье для $\hat{\psi}(\omega)$, получим вейвлет в пространственной области $\psi(x)$ (см. рис. 2.1б)

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega/2) \hat{\varphi}(\omega/2) (\hat{\varphi}(\omega-2\pi) + \hat{\varphi}(\omega+2\pi)) \exp(i\omega x) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{2\pi/3}^{-8\pi/3} \hat{\varphi}(\omega/2) \hat{\varphi}(\omega-2\pi) \cos\omega(x+0.5) d\omega.\end{aligned}\quad (2.22)$$

Функция $\psi(x)$ обладает всеми свойствами, которыми должен обладать вейвлет-базис. Они состоят в следующем:

- 1) $\psi_{jn}(x) \in L^2(\mathbb{R})$, $\|\psi_{jn}(x)\| = 1$;
- 2) нулевое среднее: $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{jn}(x) dx = 0$ или, что эквивалентно, $\hat{\psi}(0) = 0$;
- 3) сдвиги $\psi_{jn}(x) = \psi_j(x-n)$, $\forall j$ образуют ортонормированный базис.

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют масштабированным уравнениям

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \varphi(2x-n), \quad \psi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \varphi(2x-n), \quad g_n = (-1)^{n+1} \bar{h}_{-n-1}, \quad (2.23)$$

где $\{h_n\}$ — элементы фильтра низких частот разложения $H(\omega) = \sqrt{2} H_0(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \exp(-in\omega)$, которые находятся так

$$h_n = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_0(\omega) \exp(in\omega) d\omega. \quad (2.24)$$

Для коэффициентов фильтра $\{h_n\}$ выполняется условие

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n = H_0(0) = 1. \quad (2.25)$$

Через $H(\omega)$ фильтры определяются следующим образом (рис. 2.2):

$$G(\omega) = \exp(i\omega) \overline{H(\omega + \pi)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \exp(-in\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n+1} \bar{h}_{-n-1} \exp(-in\omega)$$

— фильтр высоких частот (ФВЧ) разложения,

$$\tilde{H}(\omega) = \overline{H(\omega)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_n \exp(-in\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{h}_{-n} \exp(-in\omega)$$

— низкочастотный фильтр восстановления,

$$\tilde{G}(\omega) = \exp(-i\omega) H(\omega + \pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_n \exp(-in\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n-1} h_{n-1} \exp(-in\omega)$$

— высокочастотный фильтр восстановления.

Системы функции $\{\widetilde{\text{up}}(\omega)\}$ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не являются финитными, но быстро убывают (в силу бесконечной дифференцируемости). Определим эффективный носитель $\text{supp}(\varphi_{\vartheta}(x))$ и $\text{supp}(\psi_{\vartheta}(x))$

$$\|\varphi - \varphi_{\vartheta}\|100\% \leq 0.001\%, \quad \|\psi - \psi_{\vartheta}\|100\% \leq 0.001\%. \quad (2.26)$$

Носитель WA-систем функций $\{\widetilde{\text{up}}(\omega)\}$ такой $\text{supp}(\psi_{\vartheta}(x)) = [-8, 8]$.

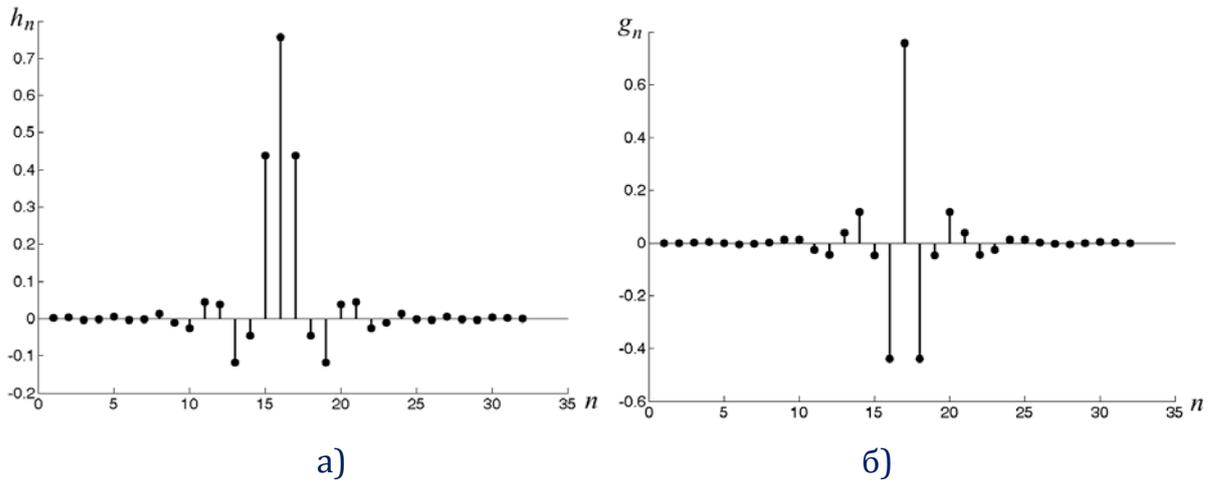


Рис. 2.2. Низкочастотный $\{h_n\}$ (а) и высокочастотный $\{g_n\}$ (б) фильтры разложения.

Тогда количество коэффициентов фильтра $\{h_n\}$ ограничивается $n=1...32$. Полученные WA-системы функций $\{\widetilde{\text{up}}(\omega)\}$ своими свойствами напоминают вейвлеты Мейера и Котельникова-Шеннона, так как их алгоритмы построения аналогичны. Они обладают следующими достоинствами: симметрией и убывают быстрее вейвлетов Мейера. Однако, для WA-системы $\{\widetilde{\text{up}}(\omega)\}$ функции $\widehat{\varphi}(\omega)$ и $\widehat{\psi}(\omega)$ по сравнению с системой вейвлетов Мейера, записываются в виде единого аналитического выражения и принадлежат к классу бесконечно дифференцируемых функций. Локализация WA-системы функций $\{\widetilde{\text{up}}(\omega)\}$ по времени и частоте значительно лучше вейвлетов Котельникова-Шеннона. Дальнейшее сравнение необходимо осуществлять по величине эффективного носителя (2.26) и константам неопределенности $\Delta_{\varphi}\Delta_{\widehat{\varphi}}$, $\Delta_{\psi}\Delta_{\widehat{\psi}}$, которые для функции $f(t)$ [8,26] определяются так

$$t_f^* = \frac{1}{\|f(t)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |f(t)|^2 dt, \quad \Delta_f = \frac{1}{\|f(t)\|} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_f^*)^2 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2},$$

$$\omega_f^* = \frac{1}{\|\hat{f}(\omega)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega, \quad \Delta_f = \frac{1}{\|\hat{f}(\omega)\|} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_f^*)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}.$$

Константы неопределенности являются одной из главных физических характеристик вейвлетов [6-8, 26], так как дают полную информацию о пространственно-частотном разрешении функции и распределении ее энергии.

Важнейшим их свойством является инвариантность к сдвигам, сжатию и масштабированию функции. Это делает такую оценку эффективной при анализе конкретных схем КМА. В табл. 2.1 приведены сравнительные физические характеристики для WA-систем функций $\{\widetilde{up}(\omega)\}$, Мейера, Котельникова-Шеннона.

Таблица 2.1. Физические характеристики систем вейвлетов

Вейвлеты	Выражение для спектра $\hat{\varphi}(\omega)$	$\text{supp}(\varphi_3(x)),$ $\text{supp}(\psi_3(x))$	$\Delta_\varphi \Delta_{\hat{\varphi}}$	$\Delta_\psi \Delta_{\hat{\psi}}$
$\{\widetilde{up}(\omega)\}$	$\sqrt{\sum_{n=-1}^1 up\left(\frac{3}{2\pi}\omega + n\right)}$	$[-8, 8]$	0.8726	2.8301
Мейера	$\begin{cases} 1, & -\frac{2\pi}{3} \leq \omega \leq \frac{2\pi}{3}, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{2\pi} \omega - 1\right)\right), & \frac{2\pi}{3} \leq \omega \leq \frac{4\pi}{3}, \\ 0 & \text{для остальных } \omega, \end{cases}$ $\nu(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3),$ $x \in [0, 1], \nu(x) + \nu(1-x) = 1$	$[-8, 8]$	1.0115	3.2780
Котельникова-Шеннона	$\begin{cases} 1, & -\pi \leq \omega \leq \pi, \\ 0 & \text{для остальных } \omega \end{cases}$	$[-10^4, 10^4]$	∞	∞

2.1.2. Алгоритм построения ортогональных WA-систем функций

Алгоритм построения ортогональных WA-систем функций [26] состоит в следующем.

1. Строим частичную сумму $\sum_{n=-k}^k f(t+n)$, удовлетворяющую свойствам:

$$\text{носитель} \left[-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right], \sum_{n=-k}^k f(t+n) = 1 \text{ при } t \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right], \sum_{n=-k}^k f(t+n) = 0.5, t = \pi.$$

2. Получаем $\hat{\varphi}(\omega)$ следующим образом: а) производим формальную замену аргумента функции частичной суммы $t \rightarrow \omega$; б) извлекаем квадратный корень из суммы.
3. Проверяем условие *Теоремы 2.2*.
4. Определяем функцию $H_0(\omega)$ и проверяем справедливость масштабирующего уравнения (14).
5. Проверяем условие *Теоремы 2.3*.
6. Находим $\hat{\psi}(\omega)$ по формуле (2.19).
7. Проверяем равенство (2.21).
8. Находим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, выполнив обратное преобразование Фурье.
9. Определяем размеры эффективных носителей.
10. Вычисляем коэффициенты фильтров $H(\omega)$, $G(\omega)$, $\tilde{H}(\omega)$, $\tilde{G}(\omega)$ и проверяем условие (2.25).
11. Находим константы неопределенности $\Delta_\varphi \Delta_{\hat{\varphi}}$ и $\Delta_\psi \Delta_{\hat{\psi}}$, а также проводим сравнение с известными аналогами.

2.1.3. Построение ортогональных WA-систем функций на основе атомарных функций $h_a(x)$

Ортогональные WA-системы функций $\{\hat{h}_{a,m}\}$, построенные на основе АФ $h_a(x)$ обладают гладким преобразованием Фурье [6-8, 26]. Это позволяет обеспечить лучшую временную локализацию по сравнению с вейвлетами Котельникова-Шеннона. Их построение осуществляется с помощью сопряженных зеркальных фильтров (см. (2.2)), с нормировкой $\hat{m}_0(0) = \sqrt{2}$ принадлежащих C^n . Учитывая свойства АФ $h_a(x)$, можно упростить вывод функции масштабирования $\hat{m}_0(\omega)$. Для этого модифицируем функцию $h_a(x)$ согласно условиям.

2.1. Носителем функции должен быть отрезок $x = \left[-\frac{2}{3}\pi; \frac{2}{3}\pi \right]$.

2.2. Функция должна иметь постоянное значение (плоскую вершину)

$$\tilde{h}_a(x) = \sqrt{2} \text{ на отрезке } x = \left[-\frac{1}{3}\pi; \frac{1}{3}\pi \right].$$

2.3. Для сопряжения спектров в переходной области:

$$\tilde{h}_a\left(\frac{1}{2}\pi\right)=1 \text{ (точка перегиба функции).}$$

Как следует из этих свойств, модифицированная функция $h_a^*(x)$ проходит через следующие шесть ключевых точек:

$$T_1 = \left(-\frac{2}{3}\pi; 0\right), \quad T_2 = \left(-\frac{\pi}{2}; 1\right), \quad T_4 = \left(-\frac{\pi}{3}; \sqrt{2}\right),$$

$$T_5 = \left(\frac{\pi}{3}; \sqrt{2}\right), \quad T_5 = \left(\frac{\pi}{2}; 1\right), \quad T_6 = \left(\frac{2}{3}\pi; 0\right).$$

Вне интервала $[T_1, T_6]$ она равна нулю, а на интервале $[T_3, T_4]$ принимает постоянное значение (имеет плоскую вершину). В общем случае для выполнения условий 2.1-2.3 используются линейные комбинации сдвигов и сжатий АФ $h_a(x)$ для разложения единицы на заданном интервале. Кроме того, в частном случае можно применить модифицированную функцию $h_a(x)$ без дополнительных преобразований, как это делается, например, в случае с вейвлетами Мейера [3,4,8]. Для формирования функции $\hat{\varphi}(\omega)$, удовлетворяющей условиям 2.1-2.3 и Теоремам 2.1–2.3, воспользуемся общим подходом. Частичная сумма ряда разложения единицы по функциям $h_a(x)$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_a\left(x - \frac{2k}{a}\right) \equiv 1, \quad h_{a,M}^{sum}(\omega) = \sum_{k=-M}^M h_a\left(\omega - \frac{2k}{a}\right).$$

В этом случае необходимо выполнение условий 2.1-2.3 для линейной комбинации функций $h_a(x)$. Для случая формирования частичной суммы для произвольного M носителем является отрезок

$$\left[-\frac{2M(a-1)+a}{a(a-1)}; \frac{2M(a-1)+a}{a(a-1)} \right],$$

её плоская вершина определена на отрезке

$$\left[-\frac{2M(a-1)+a-2}{a(a-1)}; \frac{2M(a-1)+a-2}{a(a-1)} \right],$$

а точки перегиба $x = \pm \frac{2M+1}{a}$. Введя нормировку $b = \frac{1}{\pi} \frac{a}{2N+1}$, получим

$$\widetilde{h_{a,M}}(\omega) = \sum_{k=-M}^M h_a\left(\frac{1}{\pi} \frac{a}{2N+1} \left(\omega - \frac{2k}{a}\right)\right).$$

Модифицированная функция удовлетворяет условиям 1-3. Получаем выражения спектров для масштабирующей и вейвлетных функций

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{2}{\sqrt{a}} \sqrt{\sum_{k=-M}^M h_a \left(\frac{1}{\pi} \frac{a\omega}{2N+1} - \frac{2k}{a} \right)},$$

$$\hat{\psi}(\omega) = \exp(-i\omega) \frac{2\sqrt{2}}{a} \sqrt{\sum_{k=-M}^M h_a \left(\frac{1}{\pi} \frac{a(\omega + \pi)}{2N+1} - \frac{2k}{a} \right) \sum_{k=-M}^M h_a \left(\frac{1}{\pi} \frac{a\omega}{2N+1} - \frac{2k}{a} \right)}.$$

В табл. 2.4 приведены результаты вычисления констант неопределенности построенных WA-систем функций для различных значений a , а также вейвлетов Мейера, Котельникова-Шеннона на носителе $[-8;8]$. Более подробный их анализ дан в [8,26].

Таблица. 2.4. Значения констант неопределенности

Параметр a	Константы неопределенности		
	Вейвлет $\{\widetilde{h}_{a,M}\}$	Вейвлет Мейера	Вейвлет Котельникова-Шеннона
4	0.9270	<u>1.1459</u>	1.6864
5	1.0267		
6.64	<u>1.1459</u>		
10	1.3499		
$a \rightarrow \infty$	1.6864		

2.2. Ортогональные WA-системы функций в цифровой обработке сигналов и изображений

2.2.1. Удаление шума и компрессия одномерных сигналов

Известно, что базисные вейвлет-функции обладают широкими возможностями как в цифровой обработке данных, так и в задачах физического моделирования. Однако наибольшее распространение вейвлет-анализ получил в цифровой обработке сигналов (сжатие, кодирование, фильтрация, контурный анализ, распознавание, обнаружение и т.д.). Рассмотрим применение построенных ортогональных вейвлетов для удаления шума из сигнала. Он позволяет выявить преимущества и недостатки базисных вейвлет-функций. Модель зашумленного сигнала имеет вид

$$s(n) = f_s(n) + \sigma e(n), \tag{2.27}$$

где $f_s(n)$ — полезный сигнал; σ — уровень шума; $e(n)$ — шум.

Задача состоит в том, чтобы подавить шумовую часть $e(n)$ и восстановить $f_s(n)$. Для анализа сигнала необходимо осуществить вейвлет преобразование зашумленных данных. При этом сигналы раскладываются по вейвлет-базисам на аппроксимирующие коэффициенты cA_j , которые представляют собой сглаженный сигнал и детализирующие коэффициенты cD_j , описывающие колебания и неоднородности. Следовательно, шумовая составляющая больше отражается в cD_j , поэтому при удалении шума необходимо обрабатывать детализирующие коэффициенты. Как правило, шумовая компонента представляет собой сигнал меньший по модулю, чем основной. Простейший способ удаления шума состоит в том, чтобы сделать нулевыми значения коэффициентов, которые меньше некоторого порогового значения τ_0 . Следовательно, осуществляется пороговая обработка коэффициентов – трешолдинг. Различают жесткий и мягкий трешолдинг.

При решении задачи шумоподавления необходимо оценить спектральный состав шумовой компоненты, выбрать тип пороговой обработки и критерий расчета самого порога τ_0 . От выбора порогового уровня зависит качество удаления шума в данных, оцениваемое в виде отношения сигнал/шум. При малых значениях порога в коэффициентах детализации сохраняется шум, что приводит к незначительному увеличению отношения сигнал/шум. При больших значениях порога теряются коэффициенты, несущие важную информацию, поэтому необходимо найти такое значения τ_0 , которое при наименьшем смещении восстановленного сигнала обеспечивает наибольшее значение отношения сигнал/шум. Качество шумоподавления зависит от способа применения пороговой обработки: значение τ_0 используется на всех уровнях разложения; τ_0 изменяется от уровня к уровню; τ_0 не только изменяется в зависимости от уровня разложения, но и зависит от позиции коэффициентов детализации.

Пример 2.1. Рассмотрим характерный пример фильтрации сильнозашумленного сигнала с помощью вейвлетов $\{\widetilde{h}_{a,m}\}$ и Мейера. Полезный сигнал представляет собой сумму двух гармонических колебаний $y(x) = \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{7}{10} \sin\left(\frac{3\pi x}{5}\right)$. На вход фильтра подается смесь полезного сигнала с шумом $y_1(x) = y(x) + n(x)$, причем мощность шума составляет 121 % от мощности полезного сигнала. На рис. 2.3 представлены входной и эталонный

сигналы. Для фильтрации применялась 10 каскадная схема с мягким порогом 2.5. Результаты фильтрации приведены на рис. 2.3 и в табл. 2.6, жирным шрифтом выделены лучшие результаты.

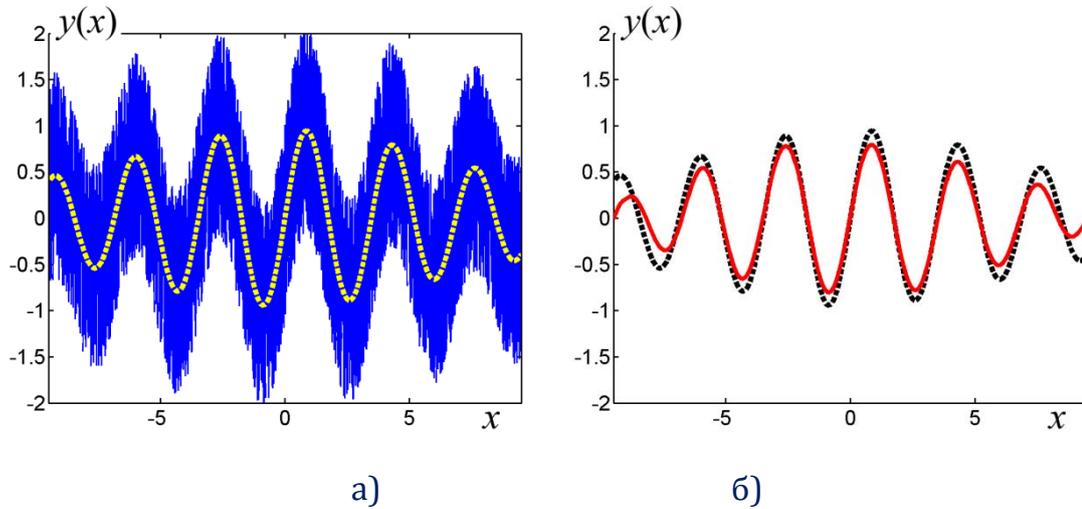


Рис. 2.3. Входной (сплошная линия) и эталонный (пунктирная линия) сигналы (а), результат фильтрации для вейвлетов $\{\widetilde{h}_{6,0}\}$ (сплошная линия) (б)

Примеры использования WA-систем функций для обработки различных сигналов представлены в [26]. Вейвлет-преобразование может использоваться для первичной обработки сигналов для повышения коэффициента сжатия за счет увеличения нулевых и малозначимых компонент.

Таблица 2.6. Показатели качества фильтрации сильнозашумленного тестового сигнала ($\varepsilon = 2.5\%$)

a	M	PSNR, дБ
Вейвлет $\{\widetilde{h}_{a,M}\}$		
4	0	62.125
5	0	60.428
2	1	60.782
3	1	59.174
4	1	59.475
5	1	59.044
2	2	59.236
3	2	59.237
Вейвлет Мейера		
—	—	59.511

2.2.3. Удаление шума и компрессия изображений

Двумерное вейвлет-преобразование осуществляется по следующей схеме: двумерный сигнал раскладывается по базисным в $L_2(\mathbf{R}_2)$ функциям $\varphi_{j,n}(x)\varphi_{j,m}(y)$, $\varphi_{j,n}(x)\psi_{j,m}(y)$, $\psi_{j,n}(x)\varphi_{j,m}(y)$, $\psi_{j,n}(x)\psi_{j,m}(y)$. В итоге получаем один набор аппроксимирующих (низкочастотных) коэффициентов cA и три набора детализирующих коэффициентов (высокочастотных), каждый из которых отвечает за направление обработки: вертикальное cV , горизонтальное cH , диагональное cD (см. рис. 2.4).

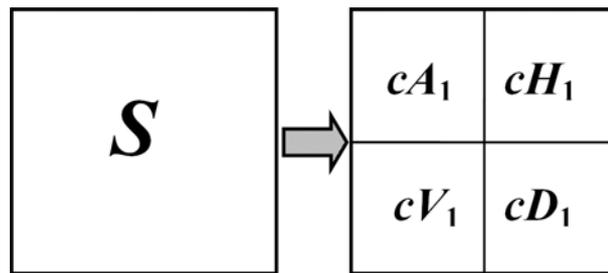


Рис. 2.4. Схема двумерного вейвлет-преобразования.

Техника пороговой обработки коэффициентов вейвлет-преобразования переносится на анализ более сложных данных. Например, очистка от шумов изображений служит для улучшения визуального и компьютерного восприятия, повышения четкости и качества предварительной обработки для анализа и распознавания образов. Рассмотрим приложения ДВП WA-системами функций. Для определения качества очищенного сигнала воспользуемся относительной погрешностью $\varepsilon = (\|f - f_t\| / \|f\|)100\%$ ($\|f\| = \sqrt{\sum_{ij} (f(i,j))^2}$) и «пиковым

отношением сигнал/шум» (PSNR) (в децибелах) $PSNR = 10\lg(b^2MN\|f - f_t\|^{-2})$.

Здесь

M, N — число строк и столбцов в изображении; b — пиковое значение сигнала;

$\|f - f_t\| = \sqrt{\sum_{ij} (f(i,j) - f_t(i,j))^2}$ — норма расстояния между $f_t(n_1, n_2)$, $f(n_1, n_2)$.

Пример 2.2. На рис. 2.5а показано тестовое изображение «Вертолет». Результаты его разложения с помощью WA-систем функций $\{\widetilde{h}_{2,1}\}$ для двухуровневого разложения представлены на рис. 2.5б.

В табл. 2.11 приведены некоторые численные результаты сжатия с помощью WA-систем функций $\{\widetilde{h}_{a,M}\}$ и вейвлета Мейера. В табл. 2.11-2.14 приведены численные характеристики [8,26] качества восстановления тестовых изображений для одного и двух уровней вейвлет-преобразования.

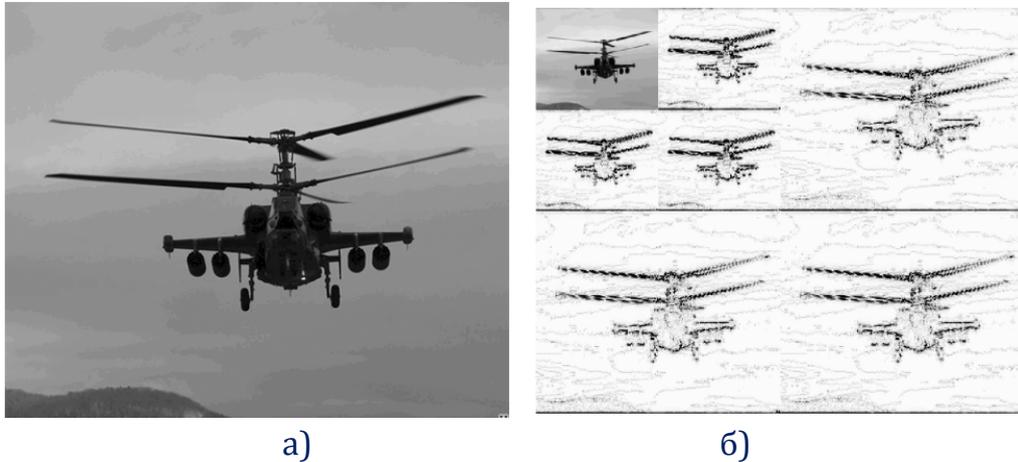


Рис. 2.5. Изображение «Вертолет» (а), двухуровневое вейвлет-разложение с помощью системы вейвлетов $\{\widetilde{h}_{2,1}\}$ (а).

Таблица 2.11. Результаты сжатия для тестового изображения «Вертолет» (Порог зануления: 0.03157)

Тип вейвлета	a	M	N	$\varepsilon, \%$	PSNR, дБ	Доля нулевых компонент, %
$\{\widetilde{h}_{a,M}\}$	4	0	1	0.923	99.008	72.142
	5	0		0.929	98.945	72.054
	6	0		1.005	98.267	71.959
	2	1		0.910	99.129	72.080
	4	0	3	1.205	96.691	91.883
	5	0		1.225	96.549	91.680
	6	0		1.469	94.965	91.394
	2	1		1.164	96.990	91.824
	3	1		1.212	96.641	91.312
	2	2		1.200	96.726	91.367
	4	0	5	1.266	96.258	92.424
	5	0		1.306	95.992	92.194
	2	1		1.182	96.853	92.361
Мейера	–	–	1	0.922	99.014	71.959
	–	–	3	1.178	96.888	91.571
	–	–	5	1.193	96.773	92.056

Примечание: жирным шрифтом выделены наилучшие результаты

Пример 2.3. На рис. 2.6а показано тестовое индексированное изображение «Клоун» с палитрой. Результаты его разложения с помощью WA-систем функций $\{\widetilde{h}_{2,2}\}$ для двухуровневого разложения представлены на рис. 2.6б.

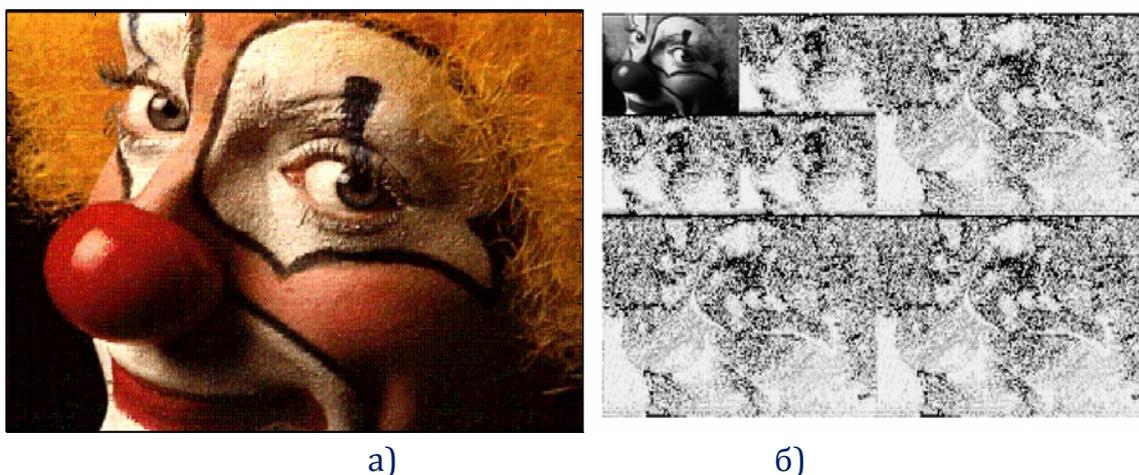


Рис. 2.6. Изображение «Клоун» (а), двухуровневое вейвлет-разложение с помощью системы вейвлетов $\{\widetilde{h}_{2,2}\}$ (а).

Таблица 2.12. Результаты сжатия для тестового изображения «Клоун» (Порог зануления – 0.0375)

Тип вейвлета	a	M	N	$\varepsilon, \%$	PSNR, дБ	Доля нулевых компонент, %
$\{\widetilde{h}_{a,M}\}$	4	0	1	2.621	86.711	36.472
	5	0		2.619	86.718	36.267
	6	0		2.646	86.628	36.222
	7	0		2.636	86.661	36.192
	2	1		2.621	86.711	36.320
	3	1		2.623	86.706	35.997
	2	2		2.625	86.698	35.989
	4	0	3	2.961	85.653	46.594
	5	0		2.964	85.643	46.320
	2	1		2.954	85.672	46.492
	3	1		2.948	85.689	45.744
	4	0	5	2.980	85.598	46.652
	5	0		2.985	85.583	46.364
	2	1		2.958	85.661	46.536
	3	1		2.956	85.666	45.807
	2	2		2.951	85.680	45.832
Мейера	–	–	1	2.625	86.698	36.116
	–	–	3	2.954	85.674	46.142
	–	–	5	2.959	85.659	46.211

Примечание: жирным шрифтом выделены наилучшие результаты

В табл. 2.12 приведены численные результаты сжатия с помощью WA-систем функций $\{\widetilde{h}_{a,M}\}$ и вейвлета Мейера. Обработка проведена для градаций серого, а затем добавлена цветность на основе палитры цветов.

Пример 2.4. На рис. 2.7а показано тестовое зашумленное изображение «Вертолеты» (PSNR = 75 дБ, $\varepsilon = 23\%$).



(а)

(б)

Рис. 2.7. Зашумленное тестовое изображение «Вертолеты» (а), восстановленное изображением системой $\{\widetilde{h}_{2,1}\}$ (трешхолдинг 0.25) (б).

Таблица 2.13. Результаты сжатия для тестового изображения «Вертолеты» (Порог зануления 0.25)

Тип вейвлета	a	M	N	$\varepsilon, \%$	PSNR, дБ	Доля нулевых компонент, %
$\{\widetilde{h}_{a,M}\}$	4	1	1	13.311	79.065	74.335
	3	2	1	13.336	79.048	74.333
	4	2	1	13.362	79.032	74.334
	5	2	1	13.410	79.001	74.337
	4	0	3	9.784	81.738	96.420
	5	0	3	9.908	81.629	96.421
	2	1	3	9.884	81.651	96.424
	2	2	3	10.086	81.475	96.409
	4	0	5	9.826	81.702	97.455
	5	0	5	9.967	81.578	97.452
	6	0	5	10.208	81.370	97.406
	7	0	5	10.222	81.358	97.410
	8	0	5	10.554	81.081	97.337
2	1	5	9.899	81.637	97.455	
Мейера	–	–	1	13.263	79.096	74.318
	–	–	3	9.988	81.560	96.417
	–	–	5	10.053	81.504	97.425

Примечание: жирным шрифтом выделены наилучшие результаты

Результаты его фильтрации с помощью WA-систем функций $\{\widetilde{h}_{2,1}\}$ для двухуровневого разложения представлены на рис. 2.7б. В табл. 2.13 приведены численные результаты сжатия с помощью WA-систем функций $\{\widetilde{h}_{a,M}\}$ и вейвлета Мейера.

Пример 2.5. На рис. 2.8а показано тестовое зашумленное изображение «Танк Т72» (PSNR = 75 дБ, $\varepsilon = 16\%$). Результаты его двухуровневого разложения с помощью WA-систем функций $\{\widetilde{h}_{2,1}\}$ представлены на рис. 2.8б.



Рис. 2.8. Зашумленное изображение «Танк Т72» (а), восстановленное изображение системой $\{\widetilde{h}_{2,1}\}$ (трешхолдинг 0.25) (б).

Таблица 2.14. Результаты сжатия для тестового изображения «Танк Т72» (Порог зануления 0.25)

Тип вейвлета	a	M	N	$\varepsilon, \%$	PSNR, дБ	Доля нулевых компонент, %
$\{\widetilde{h}_{a,M}\}$	2	1	1	10.191	77.486	74.073
	3	1	1	10.200	77.479	74.094
	4	1	1	10.220	77.462	74.091
	2	2	1	10.198	77.481	74.094
	4	0	3	10.602	77.143	94.083
	5	0	3	10.616	77.131	94.077
	2	1	3	10.575	77.165	94.080
	2	2	3	10.702	77.061	94.083
	4	0	5	10.713	77.053	94.576
	5	0	5	10.744	77.027	94.562
Мейера	2	1	5	10.689	77.072	94.563
	–	–	1	10.190	77.487	74.092
	–	–	3	10.658	77.098	94.086
–	–	5	10.766	77.009	94.550	

Примечание: жирным шрифтом выделены наилучшие результаты

В табл. 2.14 приведены численные результаты сжатия с помощью системы $\{\widetilde{h}_{a,M}\}$ и вейвлета Мейера. Как следует из полученных результатов, для данных тестовых изображений лучшие результаты дают вейвлеты $\{\widetilde{h}_{4,0}\}$, $\{\widetilde{h}_{2,1}\}$. Выбор вейвлета определяется конкретной задачей. Это подтверждают результаты цифровой обработки изображений для разных уровней разложения.

2.3. Аналитические WA-системы функций

2.3.1. Построение комплексных WA-систем функций

Рассмотрим комплексные WA-системы функций [8,26,52-58] $\psi(x)$, для которых строго выполняется условие нулевого среднего. Выражение для определения вейвлет-функции имеет вид

$$\psi(x) = \frac{1}{b} w(qx) \left\{ \exp(i\eta x) - \frac{1}{q} A\left(\frac{\eta}{q}\right) \right\}, \quad (2.28)$$

где $w(x)$ — атомарная функция, η — параметр модулирования, b, q — параметры масштабирования, $A(\eta) = \hat{w}(\eta)$. Тогда имеет место теорема.

Теорема 2.6. Пусть функция $\psi(x) = w(x) \{ \exp(i\eta x) - A(\eta) \}$, где $w(t)$ — атомарная функция ($\text{supp}(w(t)) = [-b, b]$), η — параметр модулирования. Если

$$A(\eta) = \int_{-b}^b w(x) \exp(i\eta x) dx, \quad (2.29)$$

то $\psi(x)$ является комплексным вейвлетом с компактным носителем $[-b, b]$.

Доказательство. Подставив выражение (2.29) в (2.28) ($b = q = 1$), получим

$$\psi(x) = w(x) \left\{ \exp(i\eta x) - \int_{-b}^b w(\xi) \exp(i\eta \xi) d\xi \right\}. \quad (2.30)$$

Преобразование Фурье функции $\psi(x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \exp(-i\omega x) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \left\{ w(x) \exp(i\eta x) - w(x) \int_{-b}^b w(\xi) \exp(i\eta \xi) d\xi \right\} \exp(-i\omega x) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b w(x) \exp(i\eta x) \exp(-i\omega x) dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b w(x) \left(\int_{-b}^b w(\xi) \exp(i\eta \xi) d\xi \right) \exp(-i\omega x) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b w(x) \exp(i\eta x) \exp(-i\omega x) dx - \left(\int_{-b}^b w(\xi) \exp(i\eta \xi) d\xi \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b w(x) \exp(-i\omega x) dx. \end{aligned}$$

При нулевой частоте

$$\hat{\psi}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b w(x) \exp(i\eta x) dx - \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-b}^b w(\xi) \exp(i\eta \xi) d\xi \right) \int_{-b}^b w(x) dx.$$

Используя свойство нормировки АФ $\int_{-b}^b w(x) dx = 1$, получим $\hat{\psi}(0) = 0$ и

$$\int_{-b}^b \psi(x) dx = 0.$$

Теорема доказана.

Выбирая АФ, можно записать выражение (2.30) в конкретной форме.

Если $w(t) = h_a(t)$, то $A(\eta) = \prod_{k=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\eta}{a^k}\right)$. Тогда

$$\psi(x) = h_a(x) \left\{ \exp(i\eta x) - \prod_{k=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\eta}{a^k}\right) \right\}. \quad (2.31)$$

При численных экспериментах ограничимся небольшим числом множителей бесконечного произведения. Это следует из быстрой сходимости

$$A_M^*(\eta) = \prod_{k=1}^M \text{sinc}\left(\frac{\eta}{a^k}\right), \quad A(\eta) = \lim_{M \rightarrow \infty} A_M^*(\eta).$$

Определим относительную ошибку вычислений так

$$E(M) = 100\% \frac{\|A(\eta) - A_M^*(\eta)\|_{L_2}}{\|A(\eta)\|_{L_2}} = 100\% \frac{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{x}{a^k}\right) - \prod_{k=1}^M \text{sinc}\left(\frac{x}{a^k}\right) \right)^2 dx}}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{x}{a^k}\right) \right)^2 dx}}.$$

Проанализируем результаты численного эксперимента. В табл. 2.15 представлены значения $E(M)$, откуда следует, что процент ошибки становится меньше одной десятитысячной для $a = 2$ на 10-й, а при $a = 5$ на 5-й итерации. Поведение действительной и мнимой частей аналитического вейвлета и их спектры представлены на рис. 2.9. Преимуществом комплексных WA-систем функций по сравнению с вейвлетом Морле [6-8] является точное выполнение условия нулевого среднего для любого значения параметра модулирования, даже в том случае, если он меньше максимальной частоты материнской АФ. При этом наблюдается искажение спектра действительной части вейвлета. Так как материнская АФ является финитной, то при масштабировании аргумента вид $A(\eta)$ не изменяется. Если положить $\eta = \nu_i$, $i = 1, 2, 3, \dots$

где ν_i — нули $A(\eta)$, то (2.31) упрощается. Кроме того, преобразование это не влияет на ширину носителя ВФ.

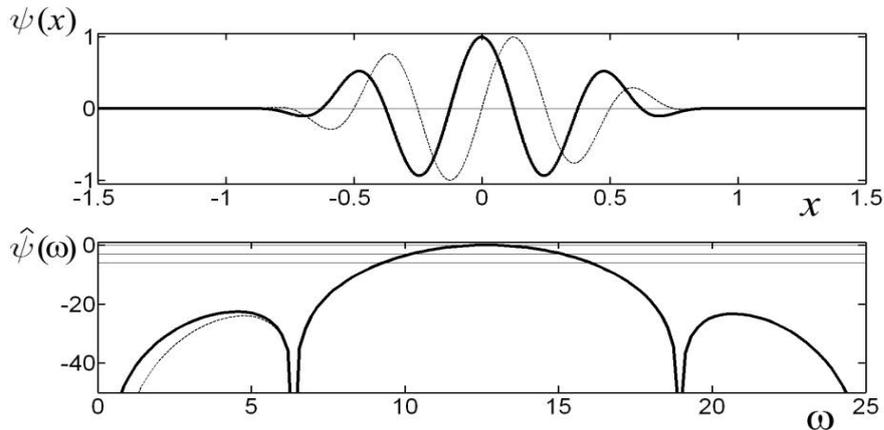


Рис. 2.9. Поведение действительной (сплошная линия) и мнимой (пунктирная линия) частей и спектры аналитического вейвлета для $a = 2$ и $\eta = 4\pi$.

Таблица 2.15. Расчет нормы относительной ошибки при увеличении M

M	Ошибка, %	
	$a=2$	$a=5$
1	32.3451	17.4366
2	3.7063	0.4098
3	0.7265	0.0136
4	0.1752	0.0005
5	0.0435	—
6	0.0109	—
7	0.0027	—
8	0.0007	—
9	0.0002	—
10	—	—

2.3.2. Функционал качества выбора вейвлетного базиса

Для повышения качества физического анализа сигналов следует выбрать наиболее подходящую систему вейвлетов. Вейвлет-функция должна обладать характеристиками, согласованными с анализируемым сигналом.

Введем [8,26] функционал качества

$$J(\psi, y) = \sum_{k=0}^4 \left| \frac{\gamma_k^\psi - \gamma_k^y}{\gamma_k^y} \right|^2, \quad (2.32)$$

где $\psi(x)$ — вейвлет-функция, $y(x)$ — сигнал, а γ_k^ψ и γ_k^y физические характеристики. Здесь $\gamma_0 = \mu$. Оптимальному выбору базиса будет соответствовать минимальное значение функционала. Для достижения лучших результатов

вейвлет-функция и сигнал должны иметь близкие друг к другу показатели широкополосности: $\mu^\psi \approx \mu^y$. Запишем

$$\mu^\psi = 2 \frac{f_{\max}^\psi - f_{\min}^\psi}{f_{\max}^\psi + f_{\min}^\psi} = 2 \frac{(f_{\max}^w + \eta) - (\eta - f_{\max}^w)}{(f_{\max}^w + \eta) + (\eta - f_{\max}^w)} = f_{\max}^w \frac{2}{\eta}, \quad (2.33)$$

здесь f_{\max}^w — максимальная частота функции спектральной плотности $w(x)$.

Таким образом, получаем $\eta = f_{\max}^w \frac{2}{\mu^\psi}$. При численных экспериментах имеет

место приближенное равенство $\eta \approx f_{\max}^w \frac{2}{\mu^\psi}$. После преобразований (2.31)

принимает следующий вид:

$$\psi(x) = w(x) \left\{ \exp \left(i \frac{2f_{\max}^w}{\mu'} x \right) - A(\eta) \right\}. \quad (2.34)$$

Здесь μ' — задаваемый показатель широкополосности, f_{\max}^w — максимальная частота функции спектральной плотности $\hat{w}(\omega)$. Таким образом, получена модифицированная вейвлет-модулированная функция, согласованная с анализируемым сигналом. Условие нулевого среднего для (2.34) выполняется точно.

2.3.3. Анализ временных рядов комплексными WA-системами функций

Аналитические вейвлеты можно применить к анализу временных рядов различной физической природы [8,26,52-58]. Примерами такой задачи являются, например, исследование космических тел.

Пример 6. Применим WA-системы функций для исследования такого космического тела [26,55,56] как квазар. Квазар – это класс небесных объектов, которые в оптическом диапазоне похожи на звезду, но имеющие малые угловые размеры (меньше $10''$). Их излучение изменчиво во всех диапазонах длин волн. Ближайший и наиболее яркий к Земле квазар 3C273 имеет красное смещение $z = 0.158$ (расстояние около 2 млрд. световых лет). Его фотография, сделанная телескопом «Хаббл» [34,38], представлена на рис. 2.10. Изучим поведение функции его блеска в зависимости от времени. Экспериментальные данные взяты из открытого источника (<http://isdc.unige.ch/3c273/>). Блеск – это безразмерная звездная величина [26,59], определяемая так

$$V = -\frac{5}{2} \lg(F) + C, \quad (2.35)$$

где F — световой поток от объекта, C — постоянная.

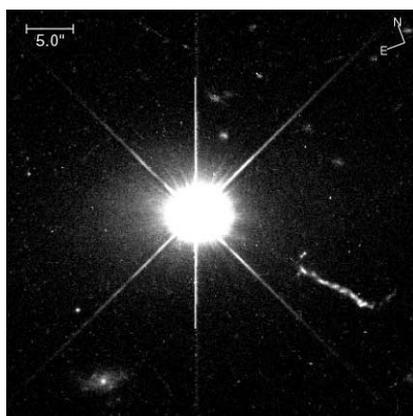


Рис. 2.10. Изображение квазара 3С273, полученное телескопом «Хаббл».

Поведение изменения светового потока F в период времени с 1968 по 2000 гг. представлено на рис. 2.35а. Средняя квадратичная относительная ошибка измерений составляет 2%. График изменения блеска V ($C = 16.5$) приведен на рис. 2.35б.

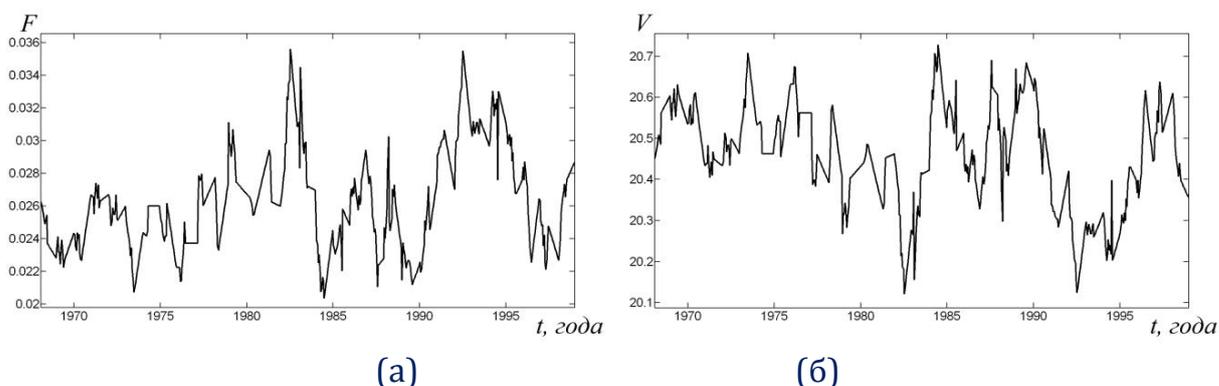


Рис. 2.11. Изменения светового потока F в период времени с 1968 по 2000 гг. (а) кривая блеска (б).

Исключим из ряда V линейный тренд ($-4.85 \cdot 10^{-3}$ в год) и вычислим ПФ. Результаты показаны на рис. 2.12.

Оценка спектральной плотности мощности (СПМ) (периодограмма) основана на вычислении квадрата модуля преобразования Фурье последовательности данных с использованием статистического усреднения

$$S_T(\omega) = E\left(|\hat{y}(\omega)|^2 / T\right), \quad (2.36)$$

где T — интервал финитности, $E(*)$ — оператор статистического усреднения (математическое ожидание). Результаты непрерывного вейвлет-преобразования представлены на рис. 2.13. Из физического анализа результатов вейвлет-преобразования следует, что четко выделяются как периодические так и случайные составляющие сигналов. Кроме того, можно проследить динамику изменения частотных свойств и последствия локальных событий.

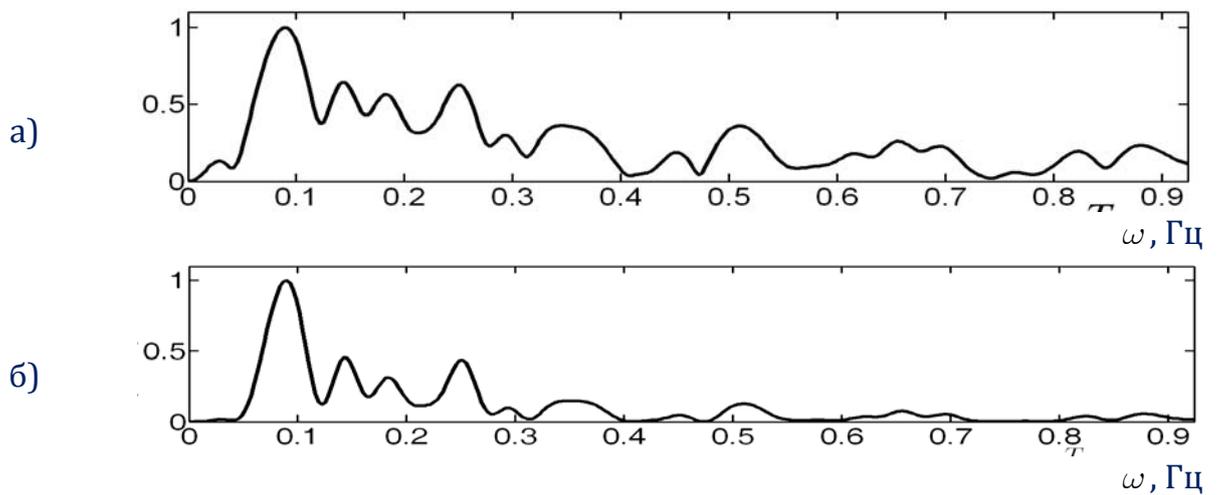


Рис. 2.12. Спектр (а) и периодограмма (б) функции блеска V .

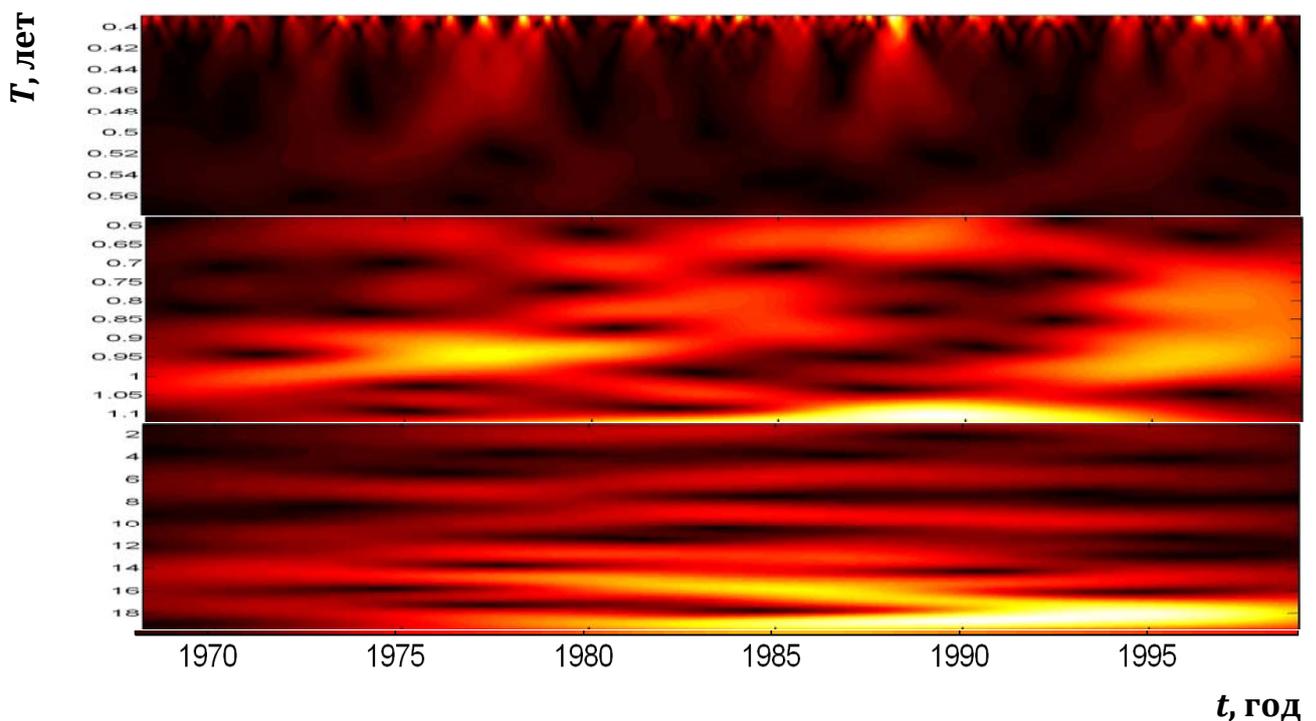


Рис. 2.13. Непрерывное вейвлет-преобразование кривой блеска с вычетом линейного тренда для диапазонов периодов (а, б, в) для $a = 2$.

Наиболее устойчивыми являются 6, 15 и 18 летние циклы. Умеренная активность квазара 3С273, зафиксированная в 1977 г., повлияла на изменение спектрального состава светового потока больше, чем «всплеск» в 1983 г.

Пример 7. Для исследования активности Солнца [26,59] используется характеристика, учитывающая количество пятен – число Вольфа

$$W = k(f + 10g), \quad (2.37)$$

где k — коэффициент, f — количество пятен, g — количество групп пятен. Воспользуемся данными бельгийского Solar Influences Data Analysis Center

(SIDC) (<http://sidc.oma.be/sunspot-data/>). Графики изменения числа Вольфа с 1749 по 2010 гг. представлен на рис. 2.14а.

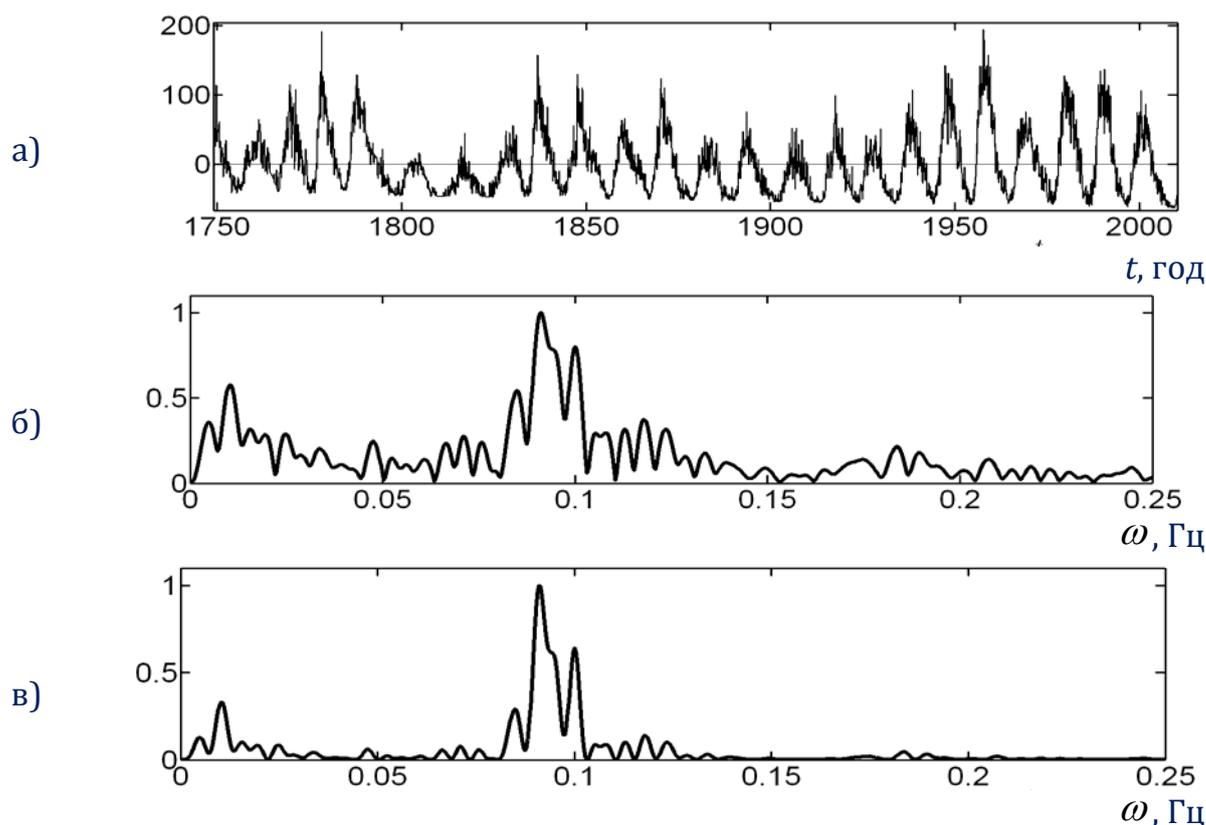


Рис. 2.14. Поведение кривой изменения числа Вольфа с вычетом линейного тренда (а), спектр (б), периодограмма (в).

Эксперимент показывает (рис. 2.14, 2.15), что основными являются 10, 12, 24 и 100 летние циклы. Кроме того прослеживаются и другие частотные компоненты, как устойчивые, так и изменяющиеся во времени.

Пример 8. В качестве примера рассмотрим вейвлет-анализ временных рядов изменения влажности и атмосферного давления в Москве за период с марта по ноябрь 2013 г. Для исследования локальных изменений из сигналов исключена линейная составляющая. Вид сигналов, а также их периодограммы представлены на рис. 2.16, а результаты частотно-временного вейвлет-преобразования на рис. 2.17. Физический анализ результатов позволяет сделать вывод о хорошей частотной и временной избирательности.

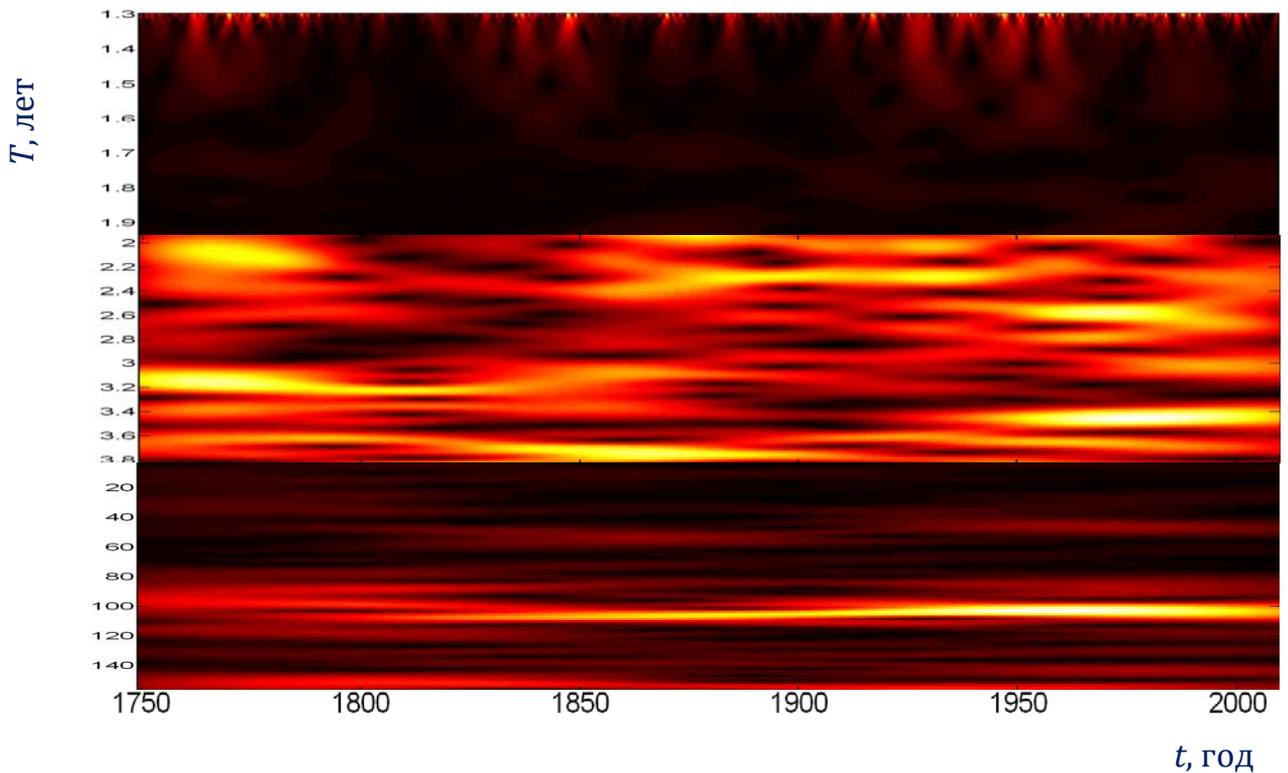


Рис. 2.15. Непрерывное вейвлет-преобразование кривой блеска с вычетом линейного тренда для диапазонов периодов (а, б, в) для $a = 2$.

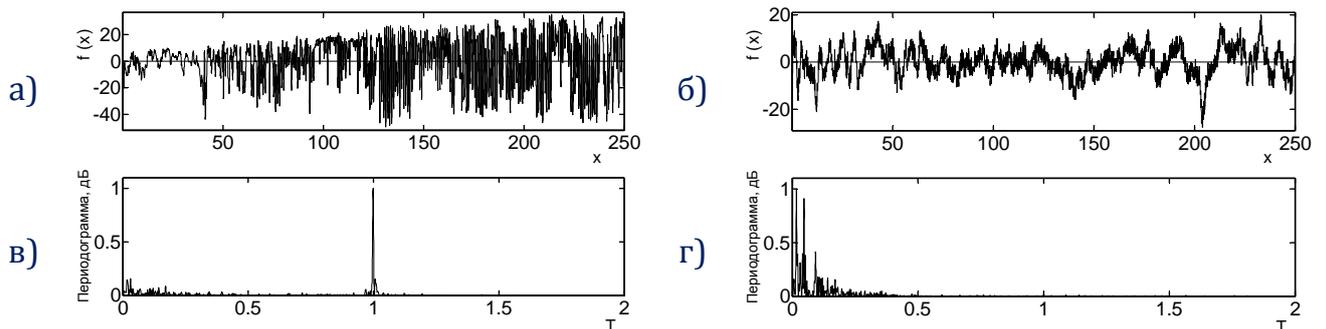


Рис. 2.16. Изменение влажности (а) и атмосферного давления (б) в Москве с марта по ноябрь 2013 года (ось проградуирована в днях), а также их периодограммы (в, г).

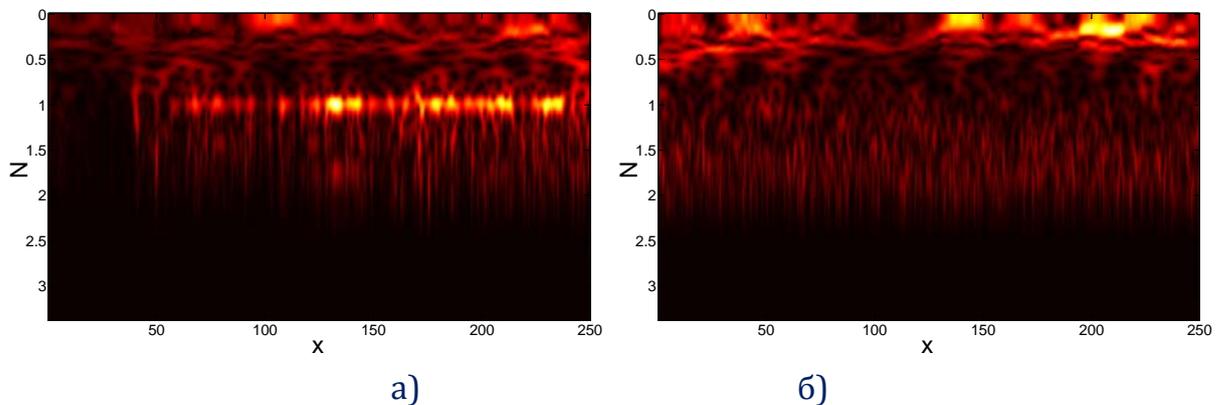


Рис. 2.17. Результаты частотно-временного преобразования для изменение влажности (а), атмосферного давления (б) (горизонтальная ось проградуирована в днях, вертикальная соответствует уровням декомпозиции).

ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ 2

Во второй главе диссертационной работы рассмотрено применение WA-систем функций к различным физическим приложениям. Благодаря локальным свойствам как в пространственной, так и в частотной области, ортогональности, нулевым моментам и кратномасштабному анализу вычислительные алгоритмы на основе вейвлетов обладают существенными преимуществами перед Фурье-преобразованиями. Так, применение WA-систем функций для анализа сверхширокополосных сигналов интересно тем, что вейвлеты и атомарные функции, как и сверхширокополосные сигналы, являются локализованными во времени, чем выгодно отличаются от неограниченных во времени базисных функций преобразования Фурье. Поэтому большой научный и практический интерес представляет построение новых классов ортогональных, а также аналитических WA-систем функций на основе атомарных функций. Эффективность этого подхода показана на конкретных физических примерах, относящихся к цифровой обработке сигналов и изображений.

ГЛАВА 3. СИНТЕЗ МНОГОМЕРНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

В третьей главе диссертационной работы рассмотрено применение атомарных и R- функций к задачам описания локусов, контурному и структурному анализу изображений [8,19-22,28,60-65].

3.1. Теория R-функций и обратная задача аналитической геометрии

Методы построения функции $\omega(x,y)$, описывающую локусы сложной формы основаны на теории R-функций [8,19-22,28]. Для построения уравнения границы некоторой области, необходимо на первом этапе написать логическую формулу (предикатное уравнение) для нее. Пусть в \mathbb{R}^2 задана область S с кусочно-гладкой границей ∂S . Необходимо построить функцию $\omega(x,y)$ положительную внутри S , отрицательную вне S и равную нулю на ∂S . Полученное уравнение $\omega(x,y)=0$ будет в неявной форме определять геометрическое место точек, представляющих границу области. Обозначив характеристическую функцию, соответствующую области S , через $\chi_i = [\omega_i(x,y) \geq 0]$ и располагая некоторой системой $\chi_i = [\omega_i(x,y) \geq 0]$ характеристических функций и булевым выражением $Y = F(x_1 \dots x_m)$, можно построить предикат $\chi = F(\chi_1, \dots, \chi_m) = F([\omega_1(x,y) \geq 0], \dots, [\omega_m(x,y) \geq 0])$, определяющий область S построенную из вспомогательных областей $S_1 \dots S_m$ с известными уравнениями границ по логическим правилам определяемым булевой функцией F . Обозначив логические операции над множествами “ \cap ” — пересечение, “ \cup ” — объединение “ \neg ” — дополнение запишем

$$S = F([S_1, \dots, S_m], [\cap, \cup, \neg]).$$

Метод R-функций [8,19-22,28] позволяет на теоретико-множественного описания области S получить в аналитическом виде уравнение ее границы $\omega(x,y)=0$. Согласно [4-6] приведем определения.

Определение 3.1. R-функцией (функцией В.Л. Рвачева) соответствующей разбиению числовой оси на интервалы $(-\infty, 0)$ и $[0, \infty)$, называется такая функция, знак которой вполне определяется знаками ее аргументов.

Определение 3.2. Функция $z = f(x, y)$ называется R-функцией, если существует такая булева функция Φ , что $S[z(x, y)] = \Phi[S(x), S(y)]$, где предикат

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Каждой R-функции соответствует единственная сопровождающая булева функция. Обратное неверно. Одной и той же булевой функции соответствует бесконечное множество (ветвь) R-функций.

Определение 3.3. Система функций H , составленная из R-функций, называется достаточно полной, если множество всех суперпозиций элементов H (множество H -реализуемых функций), имеет непустое пересечение с каждой ветвью множества R-функций. Достаточным условием полноты системы H является полнота системы H^* , соответствующих сопровождающих булевых функций.

Рассмотрим примеры описания опорных областей (см. рис. 3.1, 3.2).

Опорная область 1. Гексагональная опорная область описывается следующей логической формулой

$$\omega_1(x_1, x_2) = \omega_{11} \wedge \omega_{12} \wedge \omega_{13} \wedge \omega_{14} \wedge \omega_{15} \wedge \omega_{16},$$

где

$$\omega_{11} = 1 - \frac{x_1}{2}, \quad \omega_{12} = 1 + \frac{x_1}{2},$$

$$\omega_{13} = 1 - \frac{x_1 + x_2 \sqrt{3}}{4}, \quad \omega_{14} = 1 + \frac{x_1 + x_2 \sqrt{3}}{4}, \quad \omega_{15} = 1 + \frac{x_1 + x_2 \sqrt{3}}{4}, \quad \omega_{16} = 1 - \frac{x_1 - x_2 \sqrt{3}}{4}.$$

Опорная область 2. Логическая формула для описания звездообразной опорной области имеет следующий вид:

$$\omega_2(x_1, x_2) = [\omega_{21} \wedge \omega_{22} \wedge \omega_{23}] \vee [\omega_{24} \wedge \omega_{25} \wedge \omega_{26}],$$

где

$$\omega_{21} = \frac{-1}{\sqrt{3}}(x_1 - \sqrt{3}), \quad \omega_{22} = 1 + \frac{1}{3}(x_1 + x_2 \sqrt{3}), \quad \omega_{23} = 1 + \frac{1}{3}(x_1 - x_2 \sqrt{3}),$$

$$\omega_{24} = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + \sqrt{3}), \quad \omega_{25} = 1 + \frac{-1}{3}(x_1 - x_2 \sqrt{3}), \quad \omega_{26} = 1 + \frac{-1}{3}(x_1 + x_2 \sqrt{3}).$$

Опорная область 3. Крестообразная опорная область описывается так

$$\omega_3(x_1, x_2) = [\omega_{31} \wedge \omega_{32} \wedge \omega_{33} \wedge \omega_{34}] \vee [\omega_{35} \wedge \omega_{36} \wedge \omega_{37} \wedge \omega_{38}],$$

где

$$\omega_{31} = -\frac{x_1 - 1.5}{1.5}, \quad \omega_{32} = \frac{x_1 + 1.5}{1.5}, \quad \omega_{33} = \frac{x_2 + 2.5}{2.5},$$

$$\omega_{34} = -\frac{x_2 - 2.5}{2.5}, \quad \omega_{35} = -\frac{x_2 - 1.5}{1.5}, \quad \omega_{36} = \frac{x_2 + 1.5}{1.5}, \quad \omega_{37} = \frac{x_1 + 2.5}{2.5}, \quad \omega_{38} = -\frac{x_1 - 2.5}{2.5}.$$

Опорная область 4. Сложная опорная область, получаемая объединением окружности и креста, описывается выражением

$$\omega_4(x_1, x_2) = [\omega_{41} \wedge \omega_{42} \wedge \omega_{43} \wedge \omega_{44}] \vee [\omega_{45} \wedge \omega_{46} \wedge \omega_{47} \wedge \omega_{48}] \vee \omega_{49},$$

где

$$\omega_{41} = -2x_1 + 1, \omega_{42} = 2x_1 + 1, \omega_{43} = 0.4x_2 + 1,$$

$$\omega_{44} = -0.4x_2 + 1, \omega_{45} = -2x_2 + 1, \omega_{46} = 2x_2 + 1,$$

$$\omega_{47} = 0.4x_1 + 1, \omega_{48} = -0.4x_1 + 1, \omega_{49} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Опорная область 5. Треугольная опорная область описывается выражением

$$\omega_5(x_1, x_2) = \omega_{51} \wedge \omega_{52} \wedge \omega_{53},$$

где

$$\omega_{51} = \frac{a\sqrt{3}x_1 - ax_2 + a^2/\sqrt{3}}{a^2/\sqrt{3}},$$

$$\omega_{52} = \frac{-a\sqrt{3}x_1 - ax_2 + a^2/\sqrt{3}}{a^2/\sqrt{3}}, \omega_{53} = \frac{2x_2 + a/\sqrt{3}}{a/\sqrt{3}}, a = 5.$$

Опорная область 6. Сложную опорную область, получаемую объединением окружности и треугольника можно описать так

$$\omega_6(x_1, x_2) = (\omega_{61} \wedge \omega_{62} \wedge \omega_{63}) \vee \omega_{64},$$

где

$$\omega_{61} = \frac{a\sqrt{3}x_1 - ax_2 + a^2/\sqrt{3}}{a^2/\sqrt{3}}, \omega_{62} = \frac{-a\sqrt{3}x_1 - ax_2 + a^2/\sqrt{3}}{a^2/\sqrt{3}},$$

$$\omega_{63} = \frac{2x_2 + a/\sqrt{3}}{a/\sqrt{3}}, \omega_{64} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, a = 5.$$

Опорная область 7. Ромбообразная опорная область имеет выражение

$$\omega_7(x_1, x_2) = \omega_{71} \wedge \omega_{72} \wedge \omega_{73} \wedge \omega_{74},$$

где

$$\omega_{71} = \frac{2\sqrt{2} - x_1 - x_2}{2\sqrt{2}}, \omega_{72} = \frac{2\sqrt{2} + x_1 + x_2}{2\sqrt{2}},$$

$$\omega_{73} = \frac{2\sqrt{2} - x_1 + x_2}{2\sqrt{2}}, \omega_{74} = \frac{2\sqrt{2} + x_1 - x_2}{2\sqrt{2}}.$$

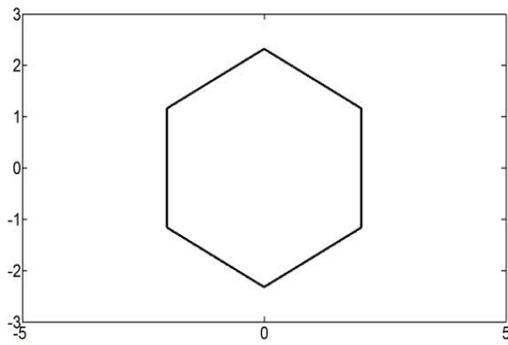
Опорная область 8. Опорная область в виде волновода Майнке.

$$\omega_8(x_1, x_2) = \omega_{81} \wedge \omega_{82} \wedge \omega_{83} \wedge \omega_{84},$$

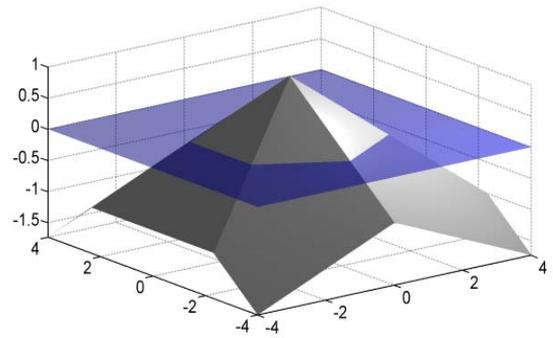
где

$$\omega_{81} = \frac{1}{6}(-x_1^2 + 3^2), \omega_{82} = \frac{1}{4}(-x_2^2 + 2^2),$$

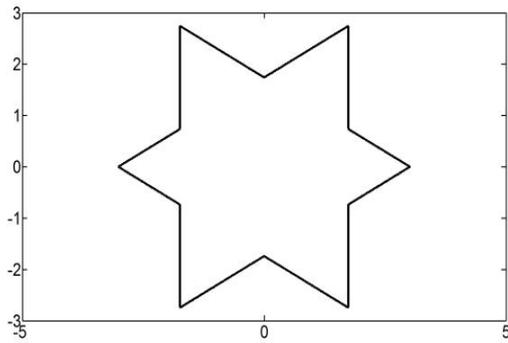
$$\omega_{83} = \frac{1}{2}(x_1^2 + (x_2 + 2)^2 - 1), \omega_{84} = \frac{1}{2}(x_1^2 + (x_2 - 2)^2 - 1).$$



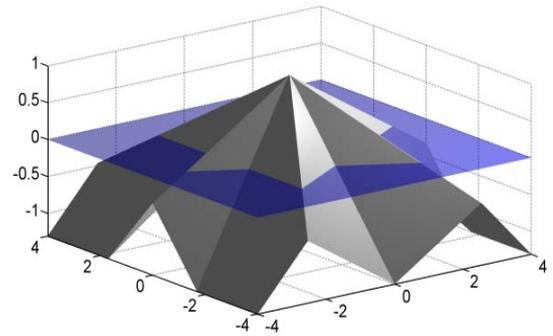
а)



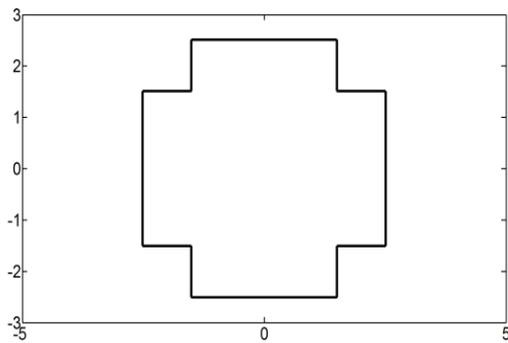
б)



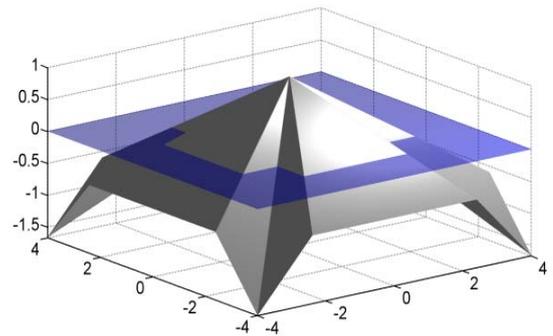
в)



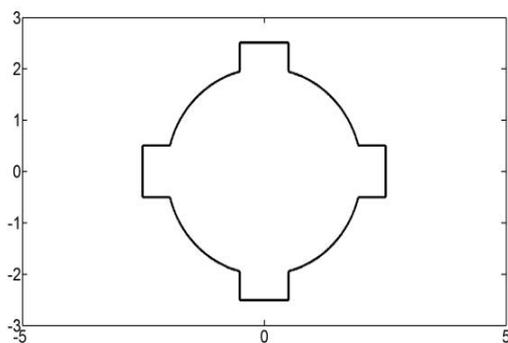
г)



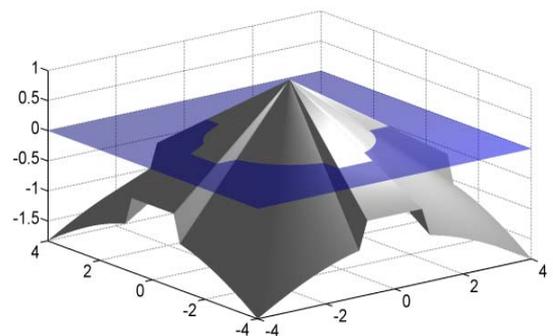
д)



е)

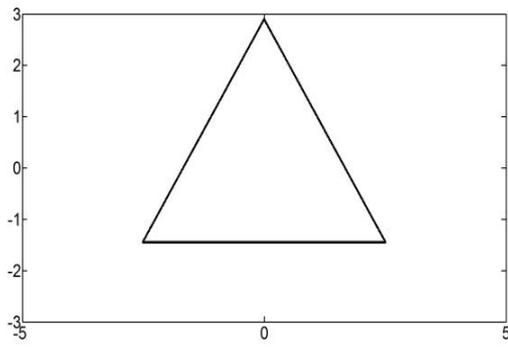


ж)

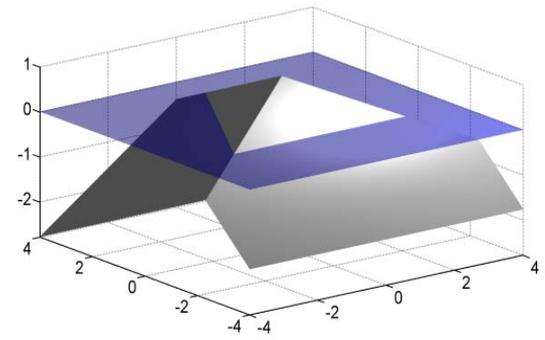


з)

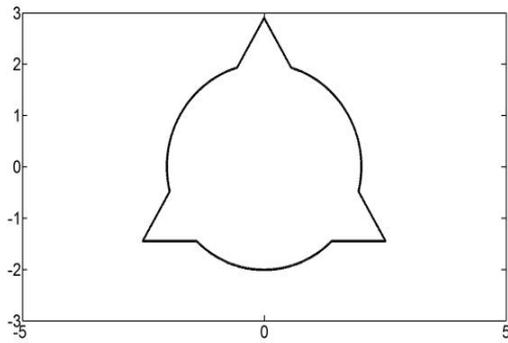
Рис. 3.1. Опорные области 1-4 со сложной геометрией (а, в, д, ж), соответствующие им R-функции плоскости $y = 0$ (б, г, е, з).



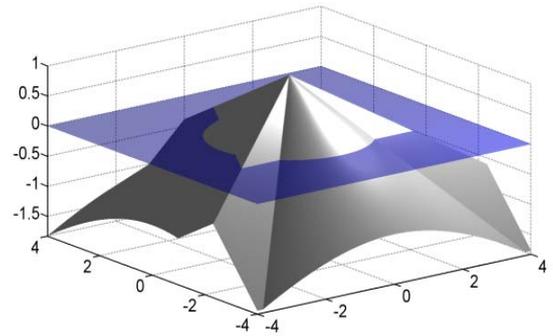
а)



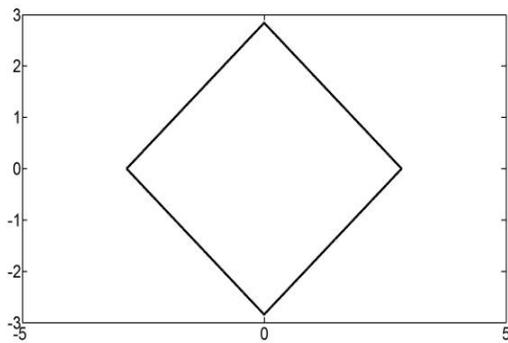
б)



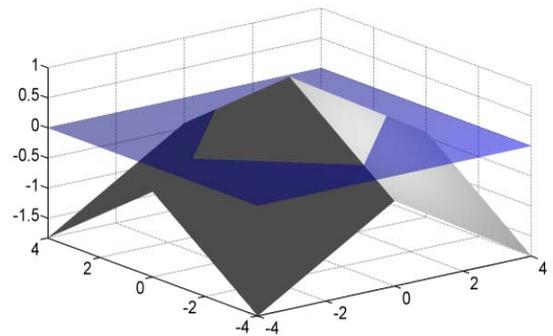
в)



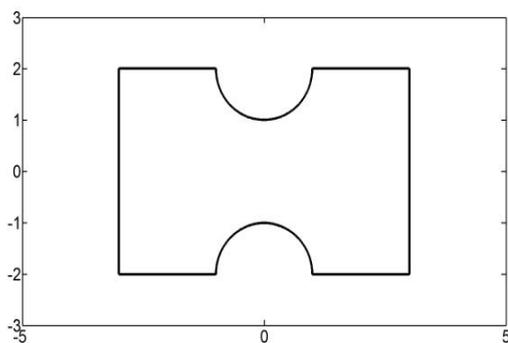
г)



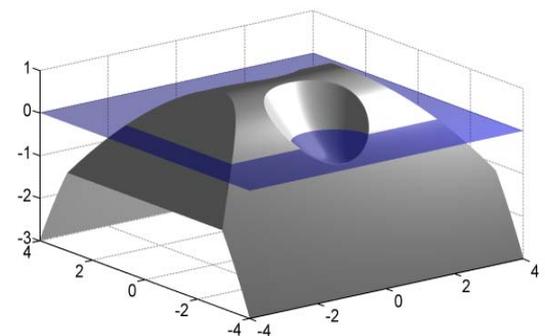
д)



е)



ж)



з)

Рис. 3.2. Опорные области 5-8 со сложной геометрией (а, в, д), соответствующие им R-функции плоскости $y = 0$ (б, г, е)

4.2. Синтез двумерных цифровых фильтров с нестандартной геометрией опорной области

Синтез фильтров с различными геометриями опорных областей является актуальным во многих прикладных областях физики и техники. В первую очередь это относится к радиолокации, связи, передачи цифровой информации, прямым и обратным задачам обработки сигналов, передаваемых с помощью распространяющихся в пространстве волн и т.д. При этом особое внимание разработчиками аппаратуры уделяется спектральным свойствам этих устройств. Наиболее распространенными формами опорных областей [3-5,8] являются: круглая, прямоугольная и гексагональная. В связи с активным развитием вычислительной техники и специализированных процессоров имеется интерес к синтезу фильтров со сложной геометрией опорной области. Целью данного раздела является развитие, обоснование и применение теории R-функций (функций В.Л. Рвачева) [8,19-22,28] к рассматриваемым проблемам.

4.2.1. Двумерные цифровые фильтры с конечной импульсной характеристикой

На практике при синтезе двумерных цифровых фильтров с конечной импульсной характеристикой (КИХ) особое внимание уделяется их спектральным и конструктивным свойствам [1-4,8]. Обычно синтезируются фильтры с круглой, прямоугольной или гексагональной формой области пропускания в частотном пространстве [3,4] (рис. 3.3 а,б,в).

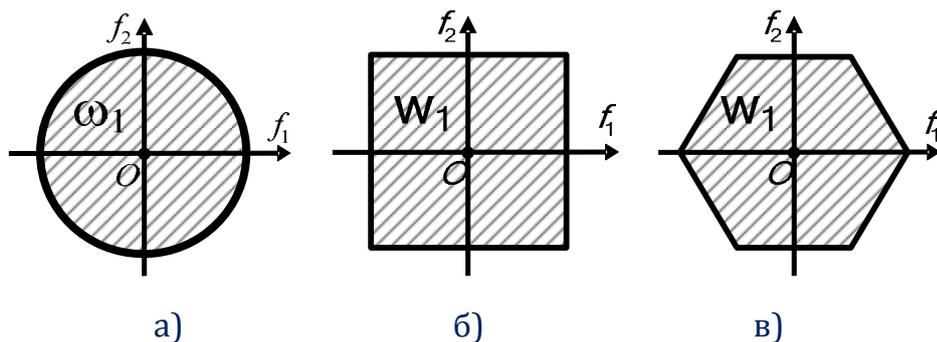


Рис. 3.3. Примеры простых областей: круглая (а), прямоугольная (б) и гексагональная (в).

Пример сложной геометрии опорной области показан на рис. 3.4а. Блок-схема процедуры обработки представлена на рис. 3.5а. Эта область может быть реализована как суперпозиция простых (см. рис. 3.4б). Импульсные характеристики (ИХ) каждой из простых областей известны: $h_1(f_1, f_2)$ и $h_2(f_1, f_2)$. Отметим то обстоятельство, что в месте сопряжения спектральных компо-

нент необходимо учитывать их взаимное наложение (область ω_E на рис. 3.4б), которое приводит к неточностям расчета требуемой ИХ. Кроме того усложняется и сама процедура обработки (см. рис. 3.5б). Теория R-функций [8,19-22,28] позволяет на аналитическом уровне без аппроксимаций описать геометрию сложной области пропускания идеального фильтра.

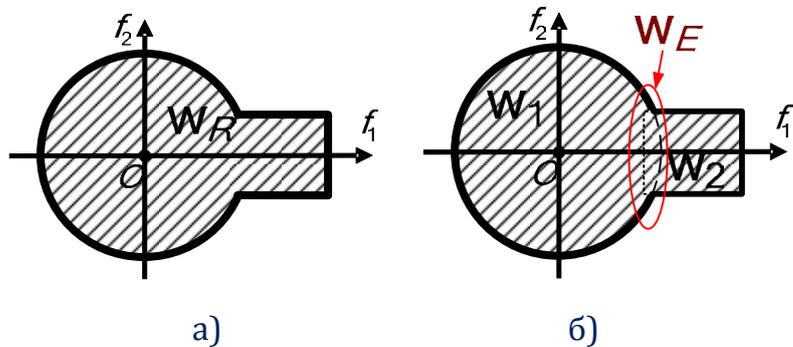


Рис. 3.4. Сложная геометрия (а) и её аппроксимация в виде комбинации двух простых (б).

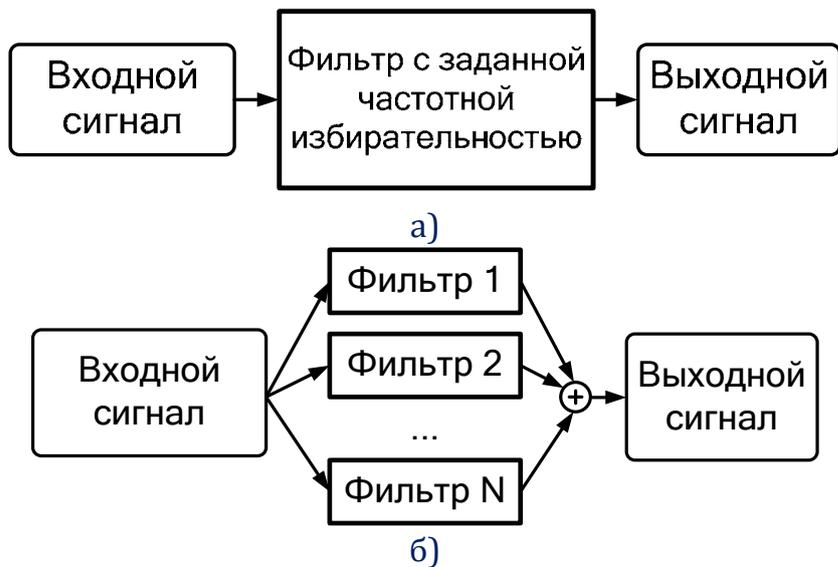


Рис. 3.5. Блок схемы обработка сигнала для случаев реализации желаемого фильтра со сложной геометрией опорной области (а) и аппроксимации простыми (б).

3.2.2. Локусы сложной формы и опорные области двумерных цифровых фильтров с конечной импульсной характеристикой

Описание локусов сложной формы согласно [8,19-22,28] основано на теориях R-функций и атомарных функций (АФ). Необходимо ввести определения.

Определение 3.4. Множество всех точек пространства E^n , в которых функция $y = f(x)$, $x = x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принимает значения равные нулю, называется локусом, описываемым уравнением $f(x) = 0$. Уравнение $f(x) = 0$ называется непрерывным, если функция $f(x)$ является непрерывной.

Определение 3.5. Множество всех точек пространства E^n , в которых функция $f(x)$ принимает неотрицательные значения, называется областью, описываемой неравенством $f(x) \geq 0$. Сложные геометрические объекты можно рассматривать как некоторым образом организованные системы более простых объектов. При этом приходим к системе объектов, которые рассматриваются как простейшие. Они образуют систему опорных геометрических объектов. Для каждого опорного объекта имеется уравнение $f = 0$ (или неравенство $f \geq 0$) его определяющее. В связи с этим справедлива теорема.

Теорема 3.1. Если f – непрерывная функция, определенная в пространстве E^n , то чертеж $f = 0$ и область $f \geq 0$ представляют собой замкнутые множества (пустое множество и все пространство считаются открытыми и замкнутыми одновременно).

Таким образом, имеется некоторая конечная система опорных объектов $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ и $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ – произвольная булева функция. Функцию $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ можно представить в виде суперпозиции операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, которым в алгебре множеств соответствуют операции пересечения, объединения и дополнения. Таким образом, полученный объект $\Sigma(x)$ можно рассматривать как результат применения к опорным объектам $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ некоторого набора операций $X_1 \cap X_2$, $X_1 \cup X_2$ и \bar{X} . Следовательно, в цифровой системе может быть решена обратная задача аналитической геометрии без вмешательства оператора.

3.2.2. Построение двумерного фильтра с конечной импульсной характеристикой

Для обработки сигналов и изображений выбор ВФ обусловлен определенными требованиями [8, 15-20]. Весовая функция должна иметь опорную область в R , а также обеспечивать нулевой сдвиг фазы $H(f_1, f_2) = H^*(f_1, f_2)$, т.е. его импульсная характеристика симметрична относительно начала координат $h[x_1, x_2] = h^*[x_1, x_2]$. Двумерная частотная характеристика фильтра $H_0(\omega_1, \omega_2)$ представляется рядом Фурье вида

$$H_0(f_1, f_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} h_0[x_1, x_2] \exp(-j(f_1 x_1 + f_2 x_2)), \quad (3.1)$$

где коэффициенты ряда $h_0[x_1, x_2]$ определяются так

$$h_0[x_1, x_2] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_0(f_1, f_2) \exp(j(f_1 x_1 + f_2 x_2)) df_1 df_2. \quad (3.2)$$

Здесь $h_0[x_1, x_2]$ — коэффициенты бесконечной импульсной характеристики двумерного фильтра, соответствующего заданной частотной характеристике $H_0(f_1, f_2)$. Для реализации двумерного КИХ-фильтра пределы суммирования в (3.2) должны быть ограничены. Для улучшения сходимости усеченного ряда (3) коэффициенты $h_0[x_1, x_2]$ следует умножить на двумерную ВФ $w[x_1, x_2]$

$$h[x_1, x_2] = w[x_1, x_2] \cdot h_0[x_1, x_2]. \quad (3.3)$$

Для фильтров с нулевым фазовым сдвигом ВФ также должна удовлетворять условию $w[x_1, x_2] = w^*[-x_1, -x_2]$. Таким образом,

$$\tilde{h}_0[x_1, x_2] = \frac{w[x_1, x_2]}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_0(f_1, f_2) \exp(j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)) df_1 df_2, \quad (3.4)$$

а для частотной характеристики

$$\tilde{H}_0(f_1, f_2) = \sum_{n_1=N_{11}}^{N_{12}} \sum_{n_2=-N_{21}}^{N_{22}} \tilde{h}_0[x_1, x_2] \exp(-j(f_1 x_1 + f_2 x_2)). \quad (3.5)$$

Здесь $N_{11}, N_{12}, N_{21}, N_{22}$ — некоторые пределы суммирования. Двумерная ВФ $w[x_1, x_2]$ [8] на основе одномерного прототипа $w[n]$ синтезируется следующим образом. С помощью полной системы R-функций [8,19-22,28] составляется уравнение опорной области $\omega(x_1, x_2) \geq 0$ такое, что $\max \omega(x_1, x_2) = \omega(0, 0) = 1$. Выбор опорной области основывается на физических характеристиках фильтра и конкретной задачи. Если рассматривается N -мерная ВФ, то её выражение записывается так

$$w[x_1, x_2, \dots, x_N] = w(1 - \omega[x_1, x_2, \dots, x_N]). \quad (3.6)$$

Алгоритм синтеза двухмерного цифрового КИХ фильтра. Алгоритм построения КИХ фильтра со сложной областью пропускания спектральной характеристики [8,19-22,28,60-65] состоит из следующих этапов.

1. Задается область пропускания спектральной характеристики, которая описывается функцией $\omega(f_1, f_2)$ такой, что $\omega(f_1, f_2) \geq 0, f_1, f_2 \in \Omega$ (Ω – область пропускания фильтра).
2. Идеальная частотная характеристика низкочастотного фильтра определяется соотношением

$$H_0(f_1, f_2) = \begin{cases} 1, & \omega(f_1, f_2) \geq 0, \\ 0, & \omega(f_1, f_2) < 0. \end{cases}$$

3. Рассчитывается импульсная характеристика идеального фильтра

$$h_0(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_0(f_1, f_2) \exp(j(f_1 x_1 + f_2 x_2)) df_1 df_2.$$

Для реализации двумерного КИХ фильтра пределы суммирования в (3) должны быть конечными, что приводит к ухудшению его сходимости [8,19-22,28]. В этом случае от выбора ВФ зависят характеристики синтезируемых фильтров.

4. Для улучшения сходимости ряда коэффициенты $h_0(x_1, x_2)$ умножаются на финитную двумерную ВФ $w(x_1, x_2)$: $h(x_1, x_2) = w(x_1, x_2) h_0(x_1, x_2)$ (формулы (7), (8)). ВФ $w(x_1, x_2)$ (см. рис. 3б) задается так: $w(x_1, x_2) = w_1(1 - \omega_{WF}(x_1, x_2))$, где $w_1(x)$ – одномерный прототип [8,19-22,28], а $\omega_{WF}(x_1, x_2)$ – опорная область для 2D ВФ. Для фильтров с нулевым фазовым сдвигом ВФ должна удовлетворять условию нулевого фазового сдвига $w(x_1, x_2) = w^*(-x_1, -x_2)$.

Для исследования вейвлет-функций используются модифицированные физические характеристики, подробно рассмотренные в [25]. Учитывая особенности вейвлет-анализа, проведена нормировка положения первого нуля и ширины по уровню -6 дБ. а так же использован модуль функции при интегрировании.

3.2.4. Численная реализация алгоритма и анализ физических результатов

В качестве ВФ рассмотрим следующие [8,19-22,28]:

$$w_1(x) = \text{fup}_2(2x) / \text{fup}_2(0), \quad w_2(x) = h_{3/2}(x), \quad \text{Хемминга.}$$

Они удовлетворяют условиям нормировки

$$w(x) = 0 \text{ для } |x| > 1, \quad w(0) = 1, \quad w(-x) = w(x).$$

Пример 3.1. Реализуем КИХ фильтр с опорной областью (рис. 3.4а). В качестве ВФ выберем $w_1(x)$ [8,19-22,28]. Здесь функция $\omega_{WF}(x_1, x_2)$ представляет собой конусоидальную поверхность, образующую окружность радиуса R_{WF} при пересечении с плоскостью $x_1 0 x_2$. Изменяя R_{WF} , варьируем степень гладкости АЧХ синтезируемого фильтра и временную локализацию ИХ. На рис. 3.6а,б представлена ИХ и её линии уровней КИХ фильтра, аппроксимированного суммой двух ИХ фильтров с простыми опорными областями

$h_{12}(f_1, f_2) = h_1(f_1, f_2) + h_2(f_1, f_2)$. Поведение АЧХ и её линий уровней синтезированного фильтра показано на рис. 3.6в,з. ИХ фильтра, реализованного с помощью R-функций $h_R(f_1, f_2)$ [8,19-22,28], приведена на рис. 3.6д, АЧХ и линии уровней синтезированного КИХ фильтра изображены на рис. 3.6е,ж,з.

В табл. 3.1 представлены средние значения физических характеристики эталонных и синтезированных фильтров для сечений плоскостями $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_1 = f_2$, $f_1 = -f_2$. Оценка качества проводилась путем анализа изменения физических характеристик синтезированных фильтров по отношению к эталонным

$$b_k = 100\% \cdot (\gamma_k^* - \gamma_k) / \gamma_k^*, \quad (3.7)$$

где γ_k^* — эталонная характеристика. Знак «-» означает ухудшение. В табл. 3.2 приведены следующие физические параметры: относительное изменение положения первого нуля; ширина по уровню -3 дБ; относительное изменение ширины по уровню -6 дБ; максимальный уровень боковых лепестков; доля энергии идущая на переусиление сигнала

$$P = 100\% \cdot \frac{\sum_{\forall f_1, f_2: |H(f_1, f_2)| > 1} |H(f_1, f_2)| - 1}{\sum |H(f_1, f_2)|}; \quad (3.8)$$

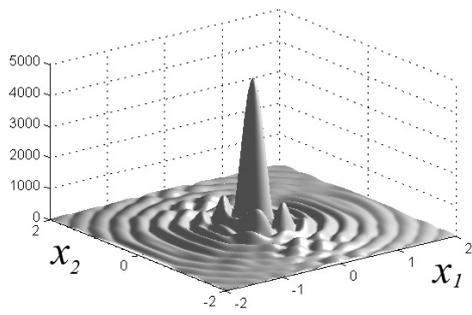
относительное изменение константы неопределенности по времени

$$D_t^* = 100\% \cdot (D_t^* - D_t) / D_t^* \quad (3.9)$$

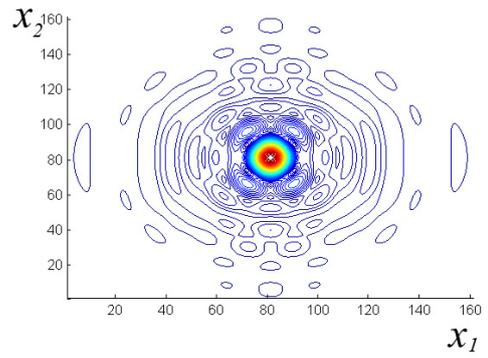
(характеризует улучшение временного разрешения).

Таблица 3.1. Физические характеристики эталонного и синтезированных фильтров

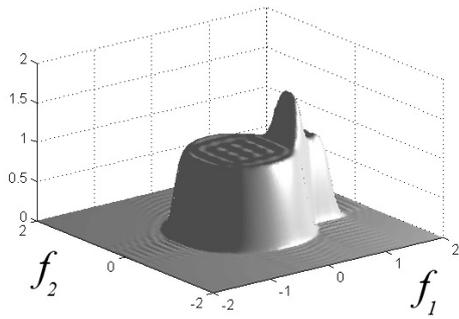
ИХ	R_{WF}	γ_2	γ_3	γ_4	γ_9	γ_7	D_t	γ_8	γ_{10}	γ_{11}
эталон	6	0.444			–	0.065	0.806	5.921	0.514	8.205
$h_{12}(f_1, f_2)$	6	0.569	0.444	0.475	-54.37	0.052	0.724	7.210	0.190	8.730
$h_R(f_1, f_2)$	6	0.569	0.444	0.475	-55.19	0.051	0.721	7.303	0.182	8.769
эталон	8	0.444			–	0.065	0.806	5.921	0.514	8.205
$h_{12}(f_1, f_2)$	8	0.522	0.444	0.469	-46.01	0.055	0.752	6.745	0.273	8.525
$h_R(f_1, f_2)$	8	0.528	0.444	0.469	-47.00	0.054	0.747	6.847	0.259	8.569
эталон	10	0.444			–	0.065	0.806	5.921	0.514	8.205
$h_{12}(f_1, f_2)$	10	0.519	0.444	0.463	-39.11	0.057	0.769	6.466	0.339	8.409
$h_R(f_1, f_2)$	10	0.519	0.444	0.463	-39.84	0.056	0.764	6.572	0.321	8.454



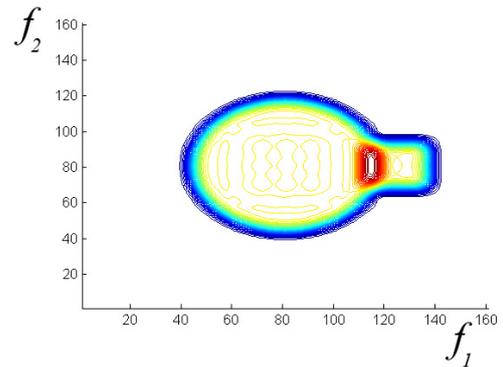
а)



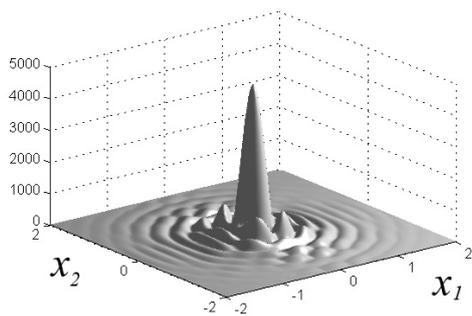
б)



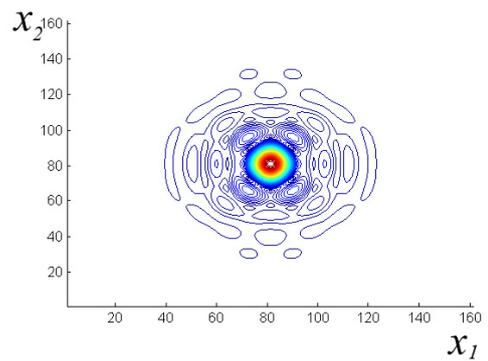
в)



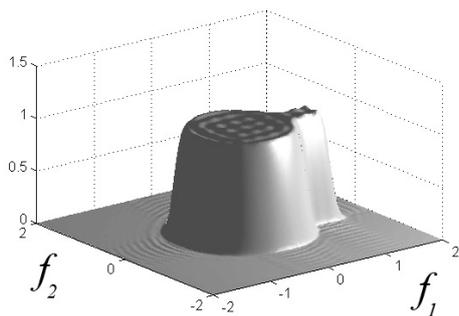
г)



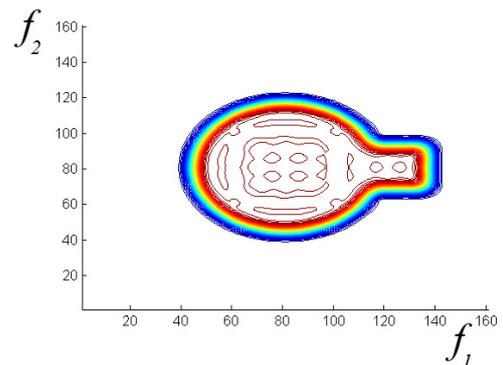
д)



е)



ж)



з)

Рис. 3.6. Импульсная характеристика (а), АЧХ (в), линии уровней (б, г) составного фильтра; Импульсная характеристика (д), АЧХ (ж), линии уровней (е, з).

Таблица 3.2. Сравнение физических характеристик эталонного и синтезированных фильтров

ИХ	R_{WF}	$b_2, \%$	$b_4, \%$	$\gamma_9, \text{дБ}$	$P, \%$	$D_t^*, \%$
$h_{12}(f_1, f_2)$	6	-22.973	-7.042	-54.371	1.756	20.436
$h_R(f_1, f_2)$	6	-22.973	-7.042	-55.195	0.054	21.031
$h_{12}(f_1, f_2)$	8	-12.838	-5.634	-46.016	2.080	15.333
$h_R(f_1, f_2)$	8	-14.189	-5.634	-47.003	0.132	16.372
$h_{12}(f_1, f_2)$	10	-12.162	-4.225	-39.110	2.451	11.339
$h_R(f_1, f_2)$	10	-12.162	-4.225	-39.839	0.350	12.812

Пример 3.2. Крестообразная опорная область 3. Построение приведено на рис. 3.7-3.11, а физические характеристики и сравнение с эталоном в табл. 3.3, 3.3.

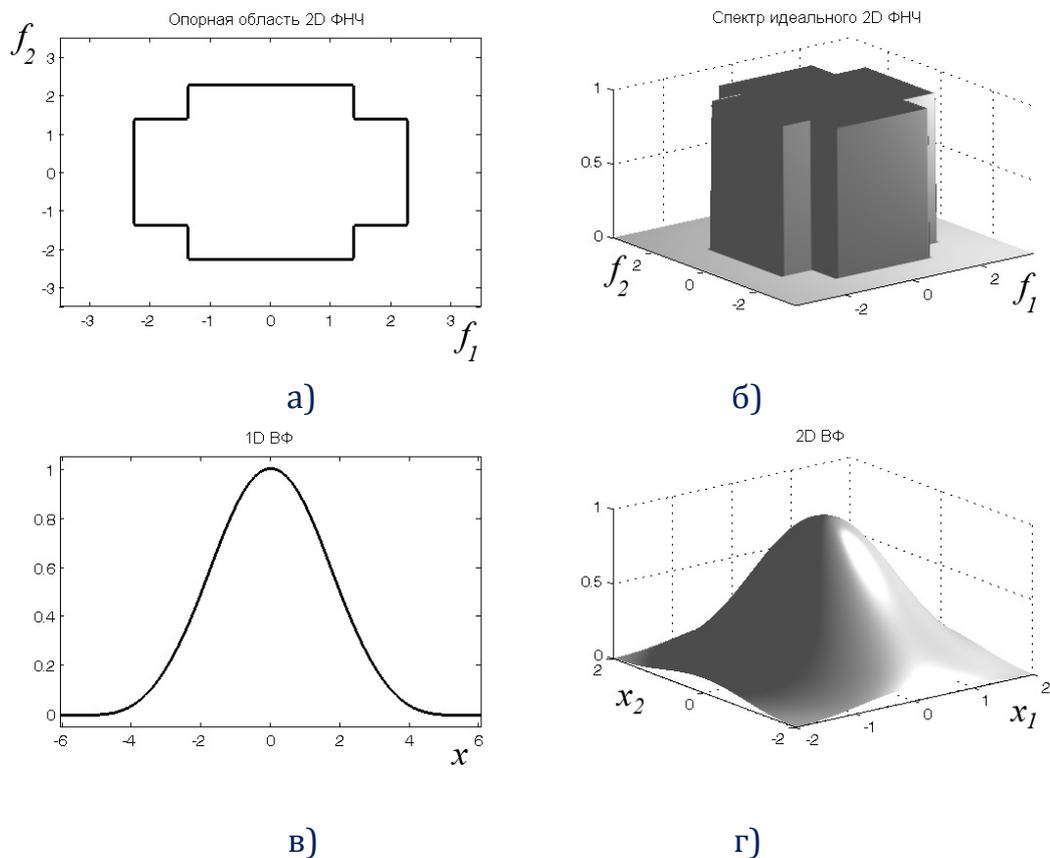
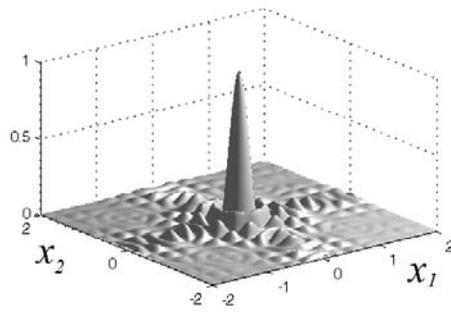
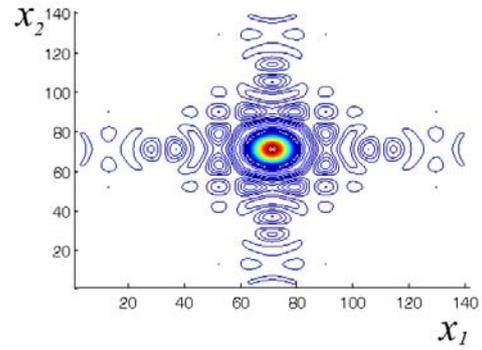


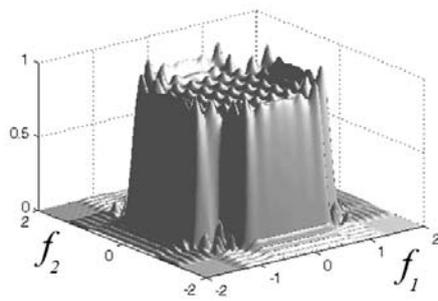
Рис. 3.7. Вид опорной области (а), АЧХ эталонного фильтра (б), одномерная (в) и двумерная (г) весовые функции.



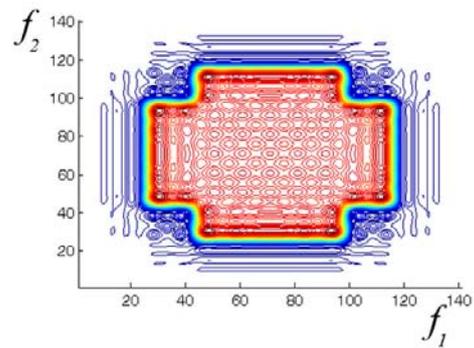
а)



б)

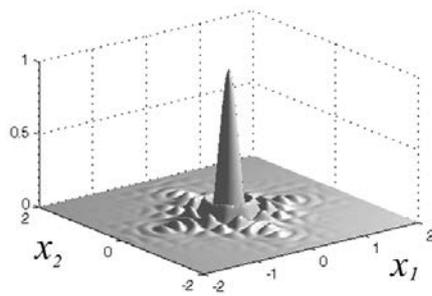


в)

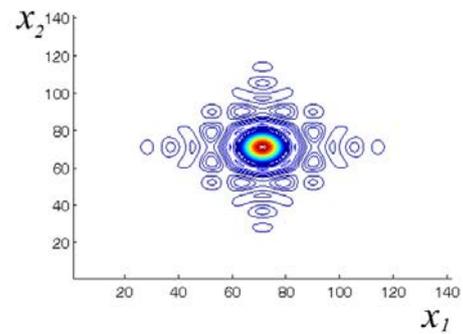


г)

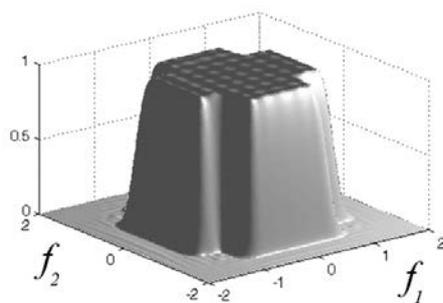
Рис. 3.8. Импульсные характеристики, АЧХ, линии уровней КИХ фильтров без весовой обработки (а,б,в,г).



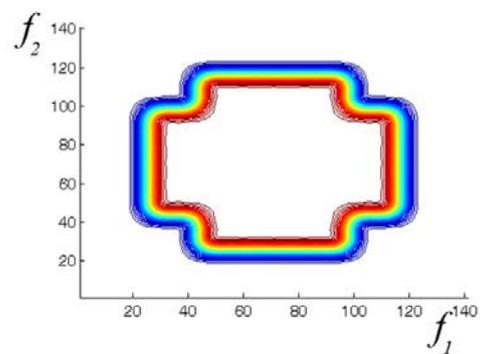
д)



е)



ж)



з)

Рис. 3.9. Импульсные характеристики, АЧХ, линии уровней КИХ фильтров с весовой обработкой (а,б,в,г).

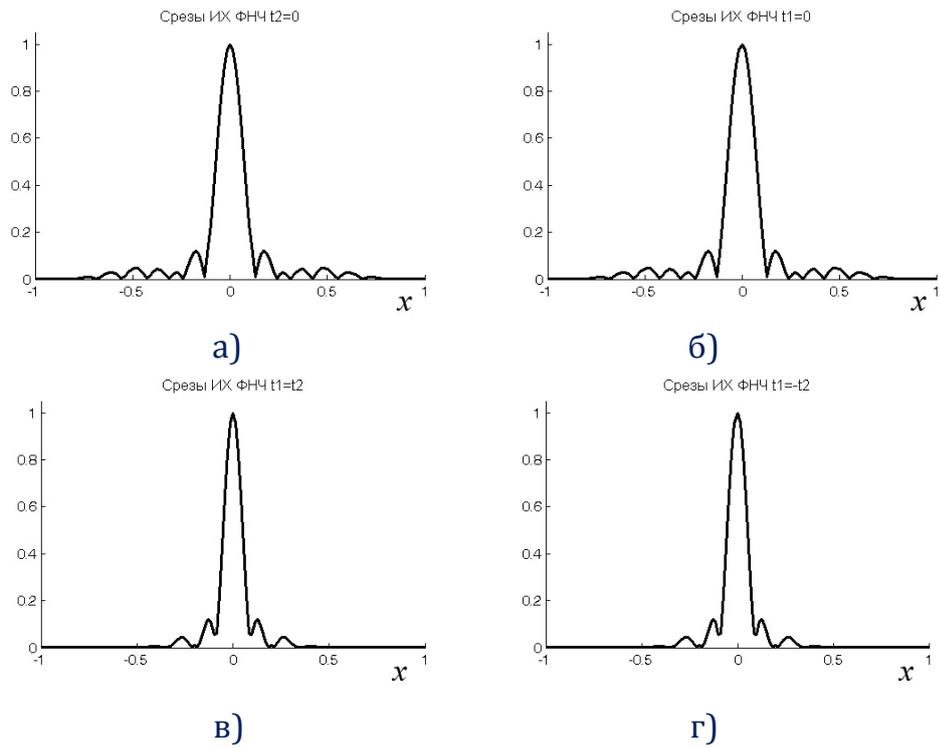


Рис. 3.10. Сечения плоскостями $f_2 = 0$ (а), $f_1 = 0$ (б), $f_1 = f_2$ (в), $f_1 = -f_2$ (г) импульсной характеристики синтезированного фильтра

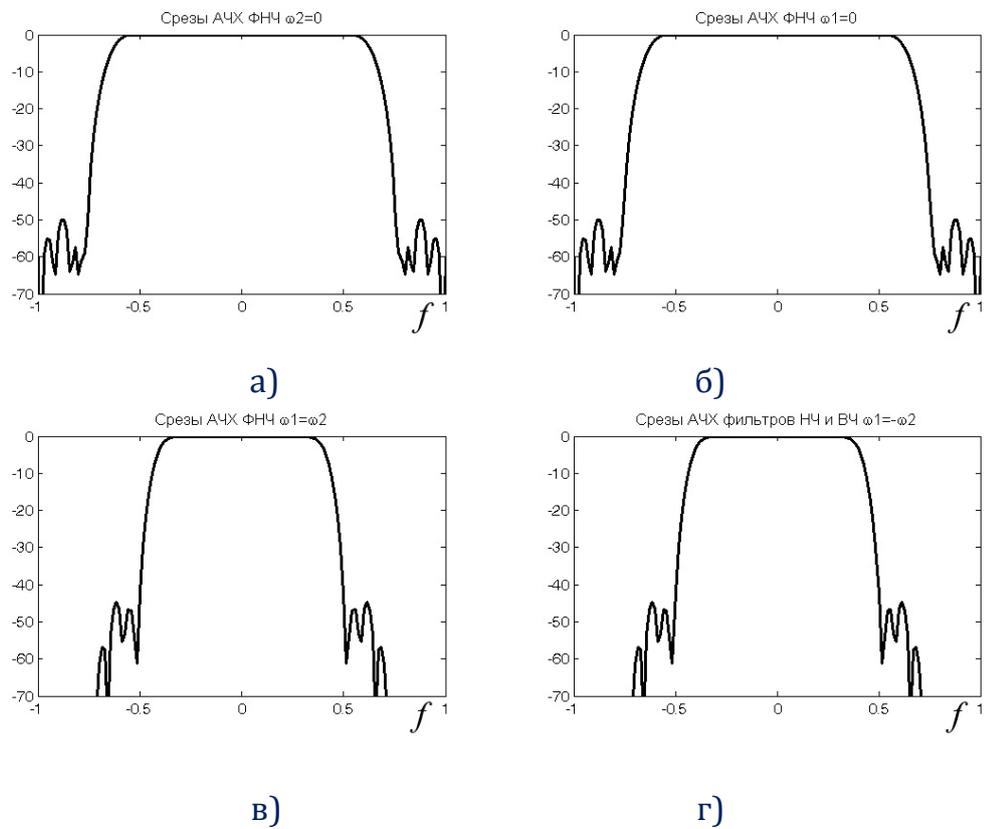


Рис. 3.11. Сечения плоскостями $f_2 = 0$ (а), $f_1 = 0$ (б), $f_1 = f_2$ (в), $f_1 = -f_2$ (г) АЧХ синтезированного фильтра.

**Таблица 3.3. Физические характеристики эталонного
и синтезированного с помощью весовой функции фильтров**

Номер среза	γ_2	γ_3	γ_4	γ_9	D_t	γ_7	γ_8	γ_{10}	γ_{11}
Эталонный фильтр									
1	0.59			0.56	0.56	0.00	0.08	0.84	5.32
2	0.59			0.56	0.56	0.00	0.08	0.84	5.32
3	0.35			0.34	0.34	0.00	0.04	0.53	9.39
4				0.34	0.34	0.00	0.04	0.53	9.39
Синтезированный КИХ-фильтр с помощью весовой функции w_1 ($R_{WF} = 6$)									
1	0.70	0.56	0.60	-53.48	0.06	0.73	6.84	0.31	8.66
2	0.70	0.56	0.60	-53.48	0.06	0.73	6.84	0.31	8.66
3	0.50	0.36	0.39	-50.60	0.04	0.49	10.55	0.08	10.32
4	0.50	0.36	0.39	-50.60	0.04	0.49	10.55	0.08	10.32
Синтезированный КИХ-фильтр с помощью весовой функции w_1 ($R_{WF} = 8$)									
1	0.65	0.56	0.59	-42.06	0.06	0.76	6.28	0.45	8.43
2	0.65	0.56	0.59	-42.06	0.06	0.76	6.28	0.45	8.43
3	0.43	0.36	0.38	-36.59	0.04	0.50	10.16	0.11	10.18
4	0.43	0.36	0.38	-36.59	0.04	0.50	10.16	0.11	10.18
Синтезированный КИХ-фильтр с помощью весовой функции w_2 ($R_{WF} = 6$)									
1	0.63	0.56	0.59	-28.01	0.07	0.80	5.74	0.61	8.20
2	0.63	0.56	0.59	-28.01	0.07	0.80	5.74	0.61	8.20
3	0.40	0.35	0.38	-20.70	0.04	0.52	9.78	0.15	10.05
4	0.40	0.35	0.38	-20.70	0.04	0.52	9.78	0.15	10.05
Синтезированный КИХ-фильтр с помощью весовой функции w_2 ($R_{WF} = 8$)									
1	0.61	0.56	0.58	-24.71	0.08	0.82	5.56	0.68	8.13
2	0.61	0.56	0.58	-24.71	0.08	0.82	5.56	0.68	8.13
3	0.39	0.35	0.36	-17.39	0.04	0.52	9.62	0.17	10.00
4	0.39	0.35	0.36	-17.39	0.04	0.52	9.62	0.17	10.00
Синтезированный КИХ-фильтр с помощью весовой функции Хемминга ($R_{WF} = 6$)									
1	0.64	0.56	0.59	-33.93	0.07	0.78	6.02	0.52	8.32
2	0.64	0.56	0.59	-33.93	0.07	0.78	6.02	0.52	8.32
3	0.41	0.36	0.38	-27.12	0.04	0.51	9.99	0.12	10.12
4	0.41	0.36	0.38	-27.12	0.04	0.51	9.99	0.12	10.12
Синтезированный КИХ-фильтр с помощью весовой функции Хемминга ($R_W = 8$)									
1	0.63	0.56	0.59	-27.76	0.07	0.80	5.73	0.62	8.20
2	0.63	0.56	0.59	-27.76	0.07	0.80	5.73	0.62	8.20
3	0.40	0.35	0.36	-20.40	0.04	0.52	9.76	0.15	10.05
4	0.40	0.35	0.36	-20.40	0.04	0.52	9.76	0.15	10.05

Таблица 3.4. Сравнение физических характеристик эталонного и синтезированного с помощью весовой функции фильтров

Номер среза	$b_2, \%$	$b_3, \%$	$b_4, \%$	$\gamma_9, \text{дБ}$	$D_t^*, \%$	$b_7, \%$	$b_8, \%$	$b_{10}, \%$	$b_{11}, \%$
Синтезированный КИХ-фильтр с помощью весовой функции w_1 ($R_{WF} = 6$)									
1	-19.15	0.00	-6.67	-53.48	34.88	-12.81	-28.46	59.21	-7.88
2	-19.15	0.00	-6.67	-53.48	34.88	-12.81	-28.46	59.21	-7.88
3	-42.86	-7.41	-14.81	-50.60	11.33	-6.33	-12.36	61.39	-3.79
4	-42.86	-7.41	-14.81	-50.60	11.33	-6.33	-12.36	61.39	-3.79
Синтезированный КИХ-фильтр с помощью весовой функции w_1 ($R_{WF} = 8$)									
1	-10.64	0.00	-4.44	-42.06	25.56	-8.62	-17.89	41.56	-4.93
2	-10.64	0.00	-4.44	-42.06	25.56	-8.62	-17.89	41.56	-4.93
3	-21.43	-7.41	-11.11	-36.59	7.88	-4.27	-8.21	50.07	-2.39
4	-21.43	-7.41	-11.11	-36.59	7.88	-4.27	-8.21	50.07	-2.39
Синтезированный КИХ-фильтр с помощью весовой функции w_2 ($R_{WF} = 6$)									
1	-6.38	0.00	-4.44	-28.01	13.09	-4.09	-7.89	20.25	-2.17
2	-6.38	0.00	-4.44	-28.01	13.09	-4.09	-7.89	20.25	-2.17
3	-14.29	-3.70	-11.11	-20.70	4.29	-2.16	-4.08	30.42	-1.10
4	-14.29	-3.70	-11.11	-20.70	4.29	-2.16	-4.08	30.42	-1.10
Синтезированный КИХ-фильтр с помощью весовой функции w_2 ($R_{WF} = 8$)									
1	-4.26	0.00	-2.22	-24.71	7.91	-2.40	-4.51	11.92	-1.24
2	-4.26	0.00	-2.22	-24.71	7.91	-2.40	-4.51	11.92	-1.24
3	-10.71	-3.70	-7.41	-17.39	2.73	-1.30	-2.42	19.13	-0.64
4	-10.71	-3.70	-7.41	-17.39	2.73	-1.30	-2.42	19.13	-0.64
Синтезированный КИХ-фильтр с помощью весовой функции Хемминга ($R_{WF} = 6$)									
1	-8.51	0.00	-4.44	-33.93	19.95	-6.55	-13.05	31.76	-3.60
2	-8.51	0.00	-4.44	-33.93	19.95	-6.55	-13.05	31.76	-3.60
3	-17.86	-7.41	-11.11	-27.12	6.29	-3.37	-6.35	42.35	-1.79
4	-17.86	-7.41	-11.11	-27.12	6.29	-3.37	-6.35	42.35	-1.79
Синтезированный КИХ-фильтр с помощью весовой функции Хемминга ($R_{WF} = 8$)									
1	-6.38	0.00	-4.44	-27.76	12.69	-3.99	-7.63	19.47	-2.11
2	-6.38	0.00	-4.44	-27.76	12.69	-3.99	-7.63	19.47	-2.11
3	-14.29	-3.70	-7.41	-20.40	4.21	-2.13	-3.96	29.17	-1.08
4	-14.29	-3.70	-7.41	-20.40	4.21	-2.13	-3.96	29.17	-1.08

Пример 3.3. Звездообразная опорная область 2. На рис. 3.12 представлены: опорная область (а), вид эталонной АЧХ фильтра (б), одномерный прототип (в) и двумерная ВФ (г). Результаты построения представлены на рис. 3.12–3.16. Физические характеристики и сравнение с эталоном приведены в табл. 3.5, 3.6.

**Таблица 3.5. Физические характеристики эталонного
и синтезированного с помощью весовой функции фильтров**

Номер среза	γ_2	γ_3	γ_4	γ_9	D_t	γ_7	γ_8	γ_{10}	γ_{11}
Эталонный фильтр									
1	0.40			0.00	0.07	0.81	5.94	0.40	8.14
2	0.70			0.00	0.12	1.06	3.76	0.99	6.75
3	0.40			0.00	0.04	0.54	9.58	0.26	10.07
4				0.00	0.04	0.54	9.58	0.26	10.07
Синтезированный КИХ-фильтр с помощью весовой функции w_1 ($R_{WF} = 6$)									
1	0.54	0.41	0.45	-49.42	0.06	0.75	6.78	0.21	8.53
2	0.81	0.61	0.66	-66.81	0.07	0.89	5.10	0.40	7.48
3	0.55	0.39	0.43	-57.14	0.03	0.49	11.15	0.09	10.57
4	0.55	0.39	0.43	-57.14	0.03	0.49	11.15	0.09	10.57
Синтезированный КИХ-фильтр с помощью весовой функции w_1 ($R_{WF} = 8$)									
1	0.49	0.40	0.44	-40.62	0.06	0.77	6.46	0.27	8.37
2	0.78	0.64	0.66	-57.10	0.08	0.94	4.60	0.57	7.20
3	0.48	0.39	0.41	-43.21	0.04	0.51	10.62	0.13	10.40
4	0.48	0.39	0.41	-43.21	0.04	0.51	10.62	0.13	10.40
Синтезированный КИХ-фильтр с помощью весовой функции w_2 ($R_{WF} = 6$)									
1	0.46	0.40	0.43	-25.56	0.06	0.79	6.17	0.33	8.24
2	0.73	0.64	0.66	-39.98	0.10	1.00	4.13	0.78	6.94
3	0.45	0.39	0.41	-26.45	0.04	0.52	10.07	0.19	10.22
4	0.45	0.39	0.41	-26.45	0.04	0.52	10.07	0.19	10.22
Синтезированный КИХ-фильтр с помощью весовой функции w_2 ($R_{WF} = 8$)									
1	0.45	0.40	0.41	-22.02	0.07	0.80	6.07	0.36	8.19
2	0.71	0.65	0.68	-34.16	0.10	1.02	3.97	0.87	6.86
3	0.44	0.39	0.41	-23.07	0.04	0.53	9.87	0.22	10.16
4	0.44	0.39	0.41	-23.07	0.04	0.53	9.87	0.22	10.16
Синтезированный КИХ-фильтр с помощью весовой функции Хемминга ($R_{WF} = 6$)									
1	0.48	0.40	0.43	-32.17	0.06	0.78	6.32	0.30	8.31
2	0.78	0.64	0.66	-49.35	0.09	0.97	4.37	0.67	7.08
3	0.45	0.39	0.41	-33.23	0.04	0.51	10.36	0.16	10.31
4	0.45	0.39	0.41	-33.23	0.04	0.51	10.36	0.16	10.31
Синтезированный КИХ-фильтр с помощью весовой функции Хемминга ($R_W = 8$)									
1	0.45	0.40	0.43	-25.31	0.06	0.79	6.17	0.34	8.24
2	0.73	0.65	0.66	-39.36	0.10	1.00	4.12	0.79	6.94
3	0.45	0.39	0.41	-26.13	0.04	0.52	10.05	0.19	10.22
4	0.45	0.39	0.41	-26.13	0.04	0.52	10.05	0.19	10.22

Таблица 3.6. Сравнение физических характеристик эталонного и синтезированного с помощью атомарных весовых функций фильтров

Номер среза	$b_2, \%$	$b_3, \%$	$b_4, \%$	$\gamma_9, \text{дБ}$	$D_t^*, \%$	$b_7, \%$	$b_8, \%$	$b_{10}, \%$	$b_{11}, \%$
Синтезированный КИХ-фильтр с помощью весовой функции w_1 ($R_W = 6$)									
1	-34.38	-6.45	-16.13	-49.42	13.72	-7.38	-14.27	46.75	-4.82
2	-16.07	9.26	3.64	-66.81	35.07	-15.96	-35.66	59.96	-10.80
3, 4	-37.50	0.00	-9.68	-57.14	17.78	-7.99	-16.43	63.31	-4.94
Синтезированный КИХ-фильтр с помощью весовой функции w_1 ($R_W = 8$)									
1	-21.88	-3.23	-12.90	-40.62	8.93	-4.72	-8.86	33.34	-2.89
2	-10.71	5.56	3.64	-57.10	26.65	-10.85	-22.33	42.86	-6.66
3, 4	-18.75	0.00	-6.45	-43.21	13.05	-5.43	-10.84	47.82	-3.21
Синтезированный КИХ-фильтр с помощью весовой функции w_2 ($R_W = 6$)									
1	-12.50	-3.23	-9.68	-25.31	4.25	-2.16	-3.87	16.08	-1.24
2	-3.57	3.70	3.64	-39.36	13.98	-5.09	-9.46	20.33	-2.82
3, 4	-12.50	0.00	-6.45	-26.13	6.58	-2.61	-4.96	25.25	-1.44
Синтезированный КИХ-фильтр с помощью весовой функции w_2 ($R_W = 8$)									
1	-12.50	-3.23	-6.45	-22.02	2.59	-1.27	-2.29	9.91	-0.72
2	-1.79	3.70	1.82	-34.16	8.85	-3.07	-5.58	12.48	-1.65
3, 4	-9.38	0.00	-6.45	-23.07	4.13	-1.58	-3.00	16.11	-0.86
Синтезированный КИХ-фильтр с помощью весовой функции Хемминга ($R_W = 6$)									
1	-18.75	-3.23	-9.68	-32.17	6.84	-3.59	-6.55	25.89	-2.11
2	-10.71	5.56	3.64	-49.35	21.41	-8.31	-16.29	33.04	-4.85
3, 4	-12.50	0.00	-6.45	-33.23	10.23	-4.20	-8.15	38.51	-2.39
Синтезированный КИХ-фильтр с помощью весовой функции Хемминга ($R_W = 8$)									
1	-12.50	-3.23	-9.68	-25.31	4.25	-2.16	-3.87	16.08	-1.24
2	-3.57	3.70	3.64	-39.36	13.98	-5.09	-9.46	20.33	-2.82
3, 4	-12.50	0.00	-6.45	-26.13	6.58	-2.61	-4.96	25.25	-1.44

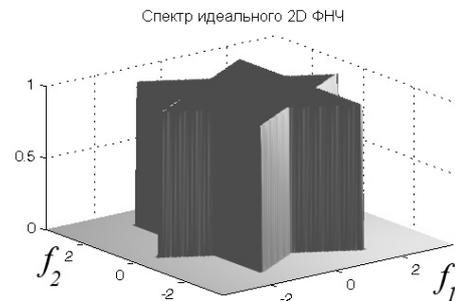
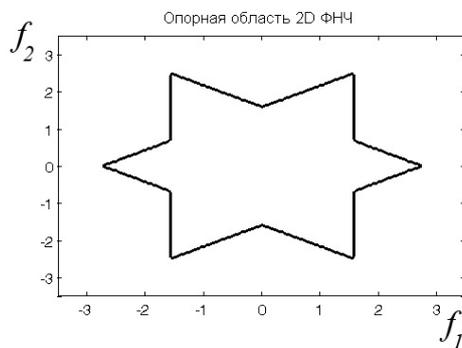
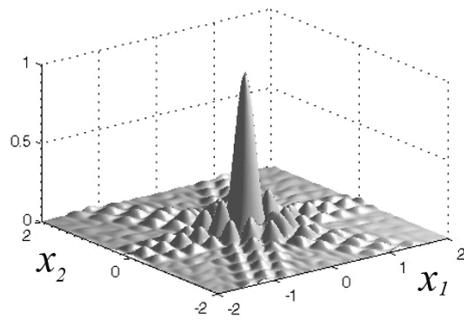
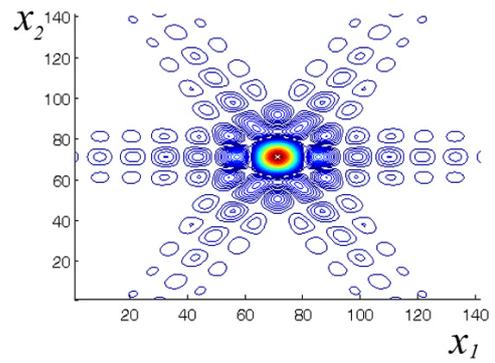


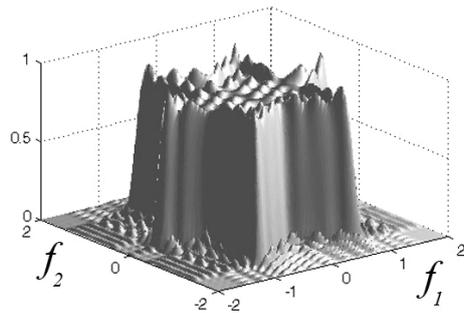
Рис. 3.12. Вид опорной области (а), АЧХ эталонного фильтра (б).



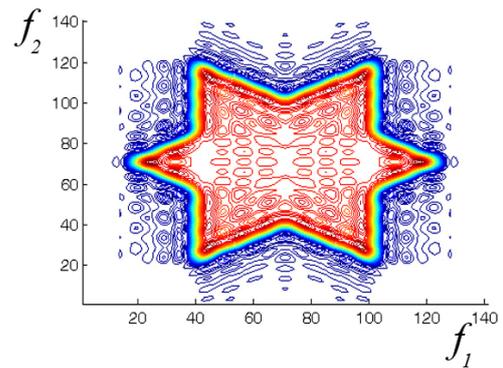
а)



б)

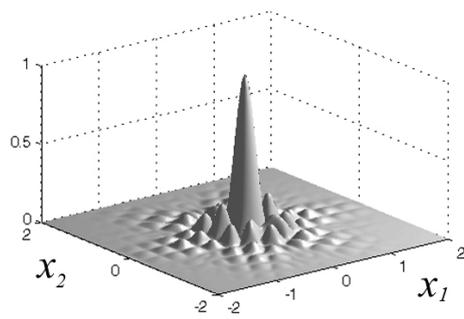


в)

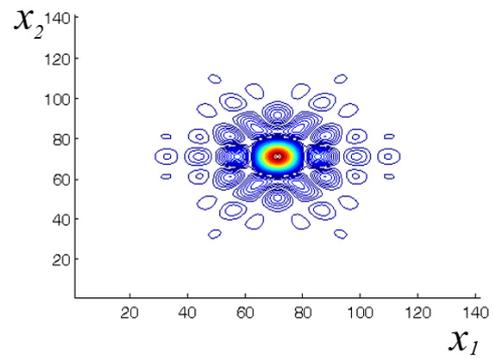


г)

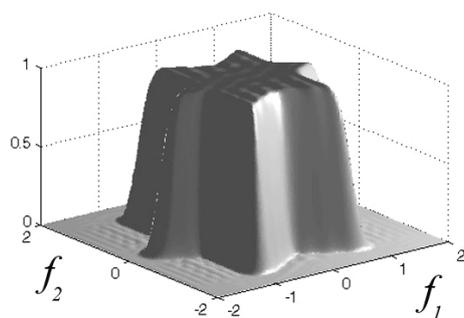
Рис. 3.13. Импульсные характеристики, АЧХ, линии уровней КИХ фильтров без весовой обработки (а,б,в,г).



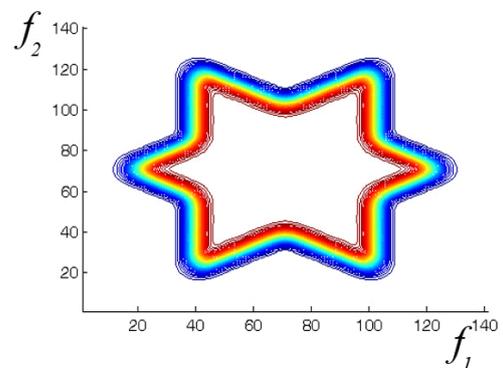
а)



б)



в)



г)

Рис. 3.14. Импульсные характеристики, АЧХ, линии уровней КИХ фильтров с весовой обработкой (а,б,в,г).

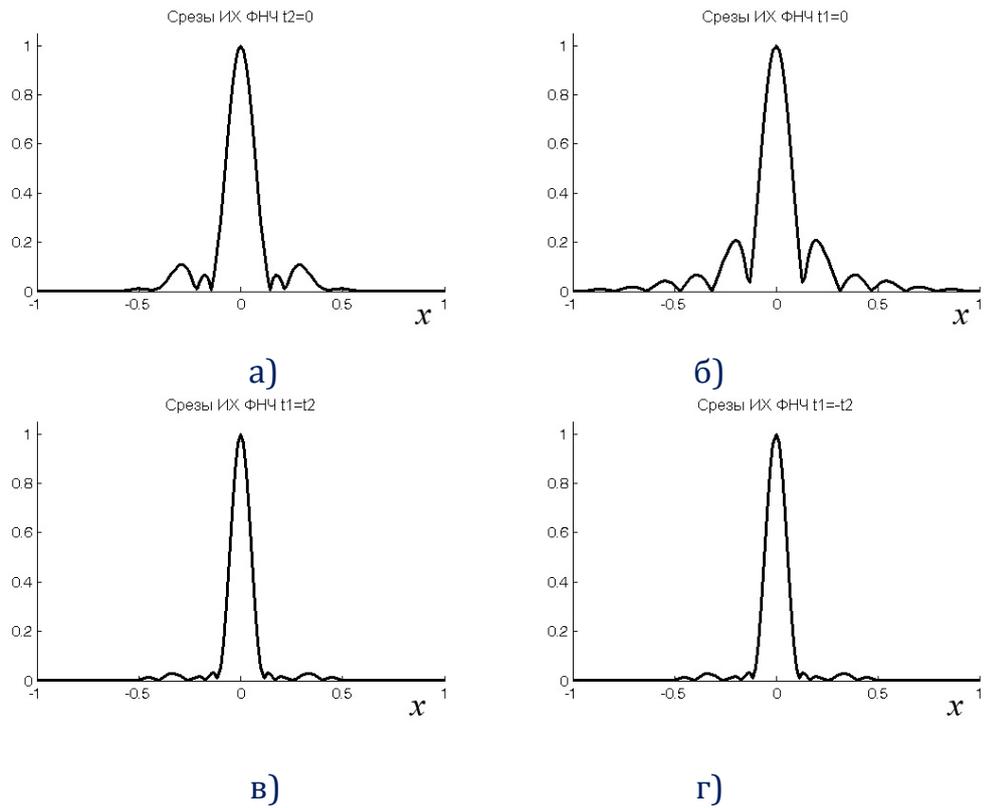


Рис. 3.15. Сечения плоскостями $f_2 = 0$ (а), $f_1 = 0$ (б), $f_1 = f_2$ (в), $f_1 = -f_2$ (г) импульсной характеристики синтезированного фильтра

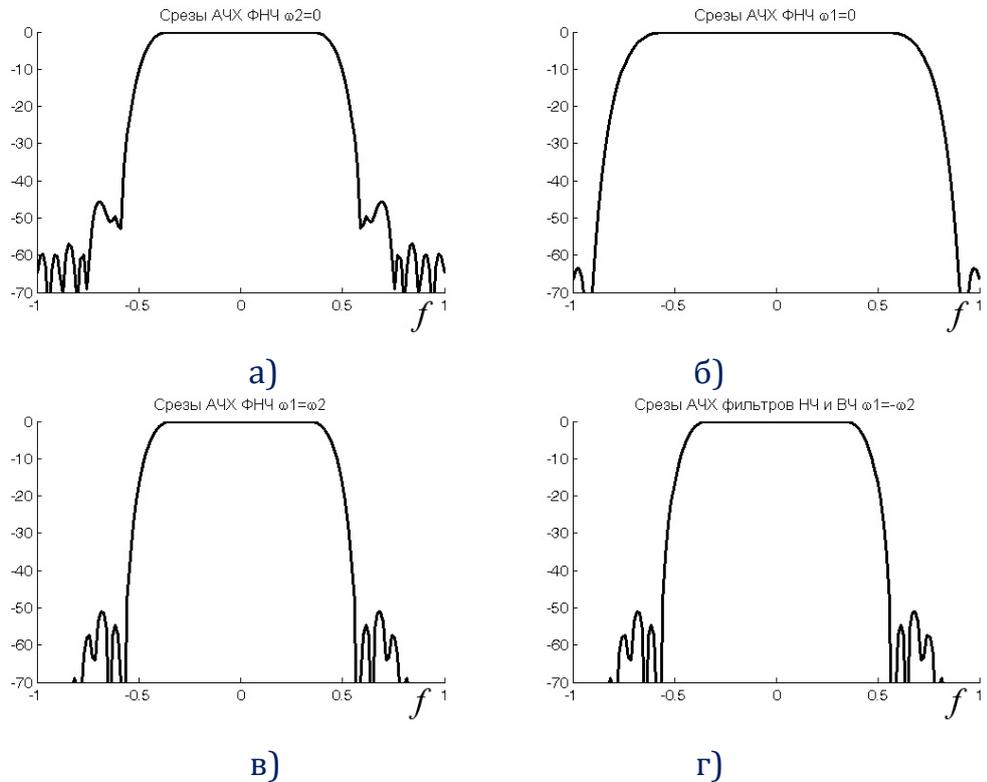


Рис. 3.16. Сечения плоскостями $f_2 = 0$ (а), $f_1 = 0$ (б), $f_1 = f_2$ (в), $f_1 = -f_2$ (г) АЧХ синтезированного фильтра

3.3. Аналитические двумерные WA-системы функций и их физические свойства

3.3.1. Построение двумерных WA-систем функций

Гибкость теории R-функций позволяет строить двумерные функции со сложной геометрией опорной области, как во временном, так и в частотном пространствах. Рассмотрим соответствующие алгоритмы построения двумерных аналитических вейвлет-функций. Алгоритм синтеза аналитических WA-систем функций (2DWA) со сложной геометрией опорной области в пространстве частот состоит из следующих этапов [8,28,60-65].

Шаг 1. Задается locus опорной области Ω в частотном пространстве и с помощью полной системы R-функций составляется уравнение области

$$\omega(f_1, f_2) \geq 0 \text{ для } (f_1, f_2) \in \Omega \text{ (max } \omega(f_1, f_2) = 1).$$

Шаг 2. Частотная характеристика 2D функции определяется так

$$S(f_1, f_2) \equiv bw(c[1 - \omega(f_1, f_2)]), \quad (3.10)$$

где $w(x)$ — одномерная весовая функция (ВФ), а величины b, c служат для нормировки ($\max bw(cx) = bw(0) = 1, bw(c) = 0.5$) и для некоторых АФ приведены в табл. 3.7. Графики нормализованных АФ fup_3, Ξ_3, h_2, h_4 [20] представлены на рис. 3.17.

Таблица 3.7. Нормировка некоторых атомарных функций

АФ	c	b	$\text{supp } w(x)$	$E = \ f(x)\ _{L_2}$
fup_3	0.746	1.557	3.351	0.8665
fup_4	0.819	1.718	3.663	0.8676
fup_5	0.887	1.864	3.946	0.8673
Ξ_2	0.373	0.755	2.681	0.8517
Ξ_3	0.326	0.682	3.067	0.8729
Ξ_4	0.294	0.612	3.401	0.8652
h_2	0.500	1.000	2.000	0.8997
h_3	0.333	0.667	1.502	0.9401
h_4	0.250	0.500	1.333	0.9564

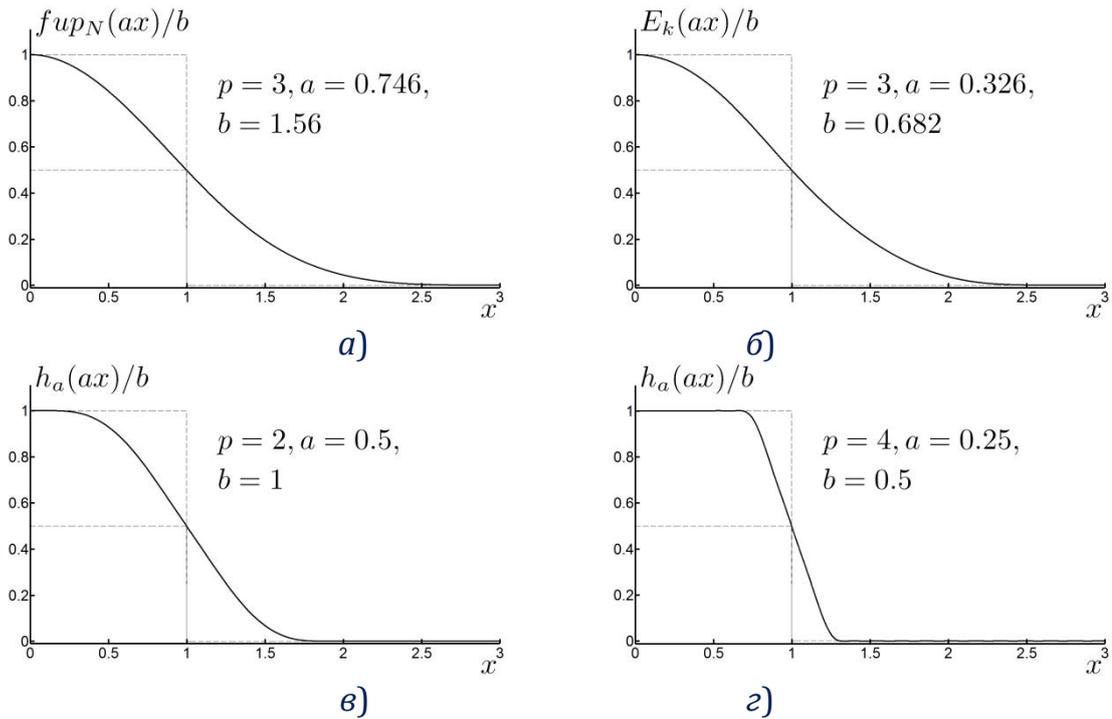


Рис. 3.17. Нормализованные атомарные функции fup_3 (а), Ξ_3 (б), h_2 (в), h_4 (г).

Шаг 3. Координата максимума спектра $S(f_1, f_2)$ смещается в точку (η_1, η_2) $S_M(f_1, f_2) = S(f_1 - \eta_1, f_2 - \eta_2)$. Параметры η_1, η_2 выбираются исходя из требуемых частотных свойств синтезируемого вейвлета.

Шаг 4. Находится импульсная характеристика

$$h_M(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_M(f_1, f_2) \exp(j(f_1 x_1 + f_2 x_2)) df_1 df_2.$$

Блок-схема алгоритма приведена на рис. 3.18а.

Алгоритм синтеза аналитических 2DWA со сложной геометрией опорной области в временном пространстве отличается от предыдущего и включает в себя следующие этапы.

Шаг 1. Задается локус опорной области Ω во временном пространстве и с помощью полной системы R-функций составляется уравнение области

$$\omega(x_1, x_2) \geq 0 \text{ для } (x_1, x_2) \in \Omega \text{ (max } \omega(x_1, x_2) = 1).$$

Шаг 2. Финитная 2D ВФ определяется так

$$S(x_1, x_2) \equiv bw(c[1 - \omega(x_1, x_2)]). \quad (3.11)$$

Здесь $w(x)$ – одномерный прототип, а b, c – нормировочные коэффициенты (см. табл. 3.7).

Шаг 3. На заключительном этапе полученная функция $w(x_1, x_2)$ модулируется комплексной экспонентой

$$\varphi(x_1, x_2) = w(x_1, x_2) \exp(i\eta_1 x_1, i\eta_2 x_2).$$

Параметры модуляции η_1, η_2 выбираются исходя из требуемых частотных свойств синтезируемого вейвлета.

Блок-схема алгоритма приведена на рис. 3.18б. Таким образом, получены аналитические 2DWA с опорной областью сложной геометрии в временном или частотном пространстве.

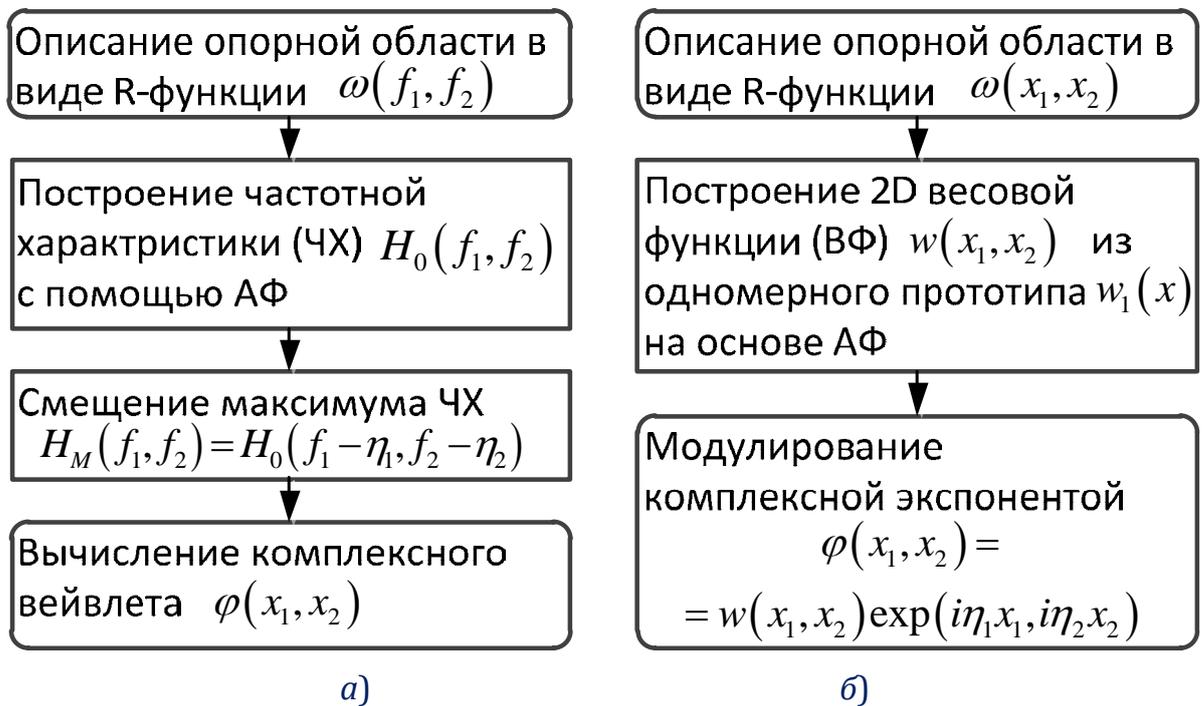


Рис. 3.18. Блок-схемы алгоритмов синтеза аналитических 2DWA со сложной геометрией опорной области в частотном (а) и временном (б) пространствах.

Таким образом, получены аналитические 2DWA с опорной областью сложной геометрии [39-41]. В качестве примера (рис. 3.19) приведена функция для области 1. Опорные области 2-5, а также изолинии спектров соответствующих вейвлетов представлены на рис. 3.20. Аналитические 2DWA могут найти широкое применение в задачах анализа интерференционных эффектов со сложной формой геометрии, фильтрации сигналов и распознавания образов. Рассмотрим несколько примеров.

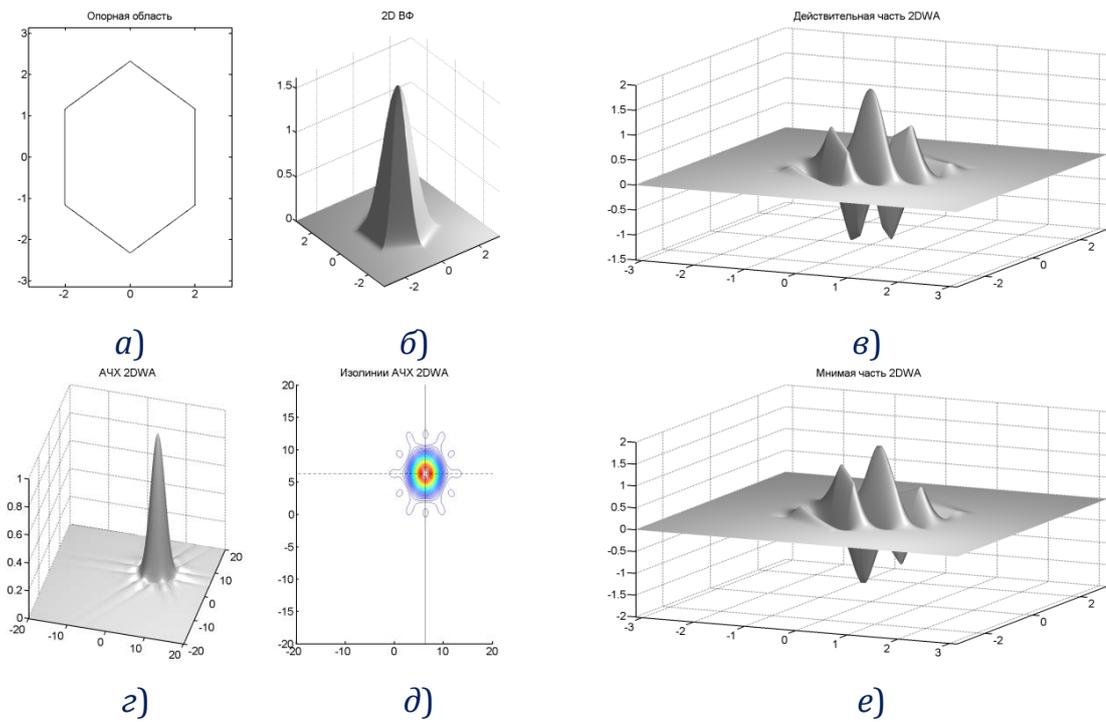


Рис. 3.19. Опорная область 1 (а), 2D ВФ $s(x, y)$ (б), действительная (в) и мнимая (е) части построенного вейвлета, спектр вейвлета (г) и его изолинии (д) ($\eta_1 = \eta_2 = 2\pi$).

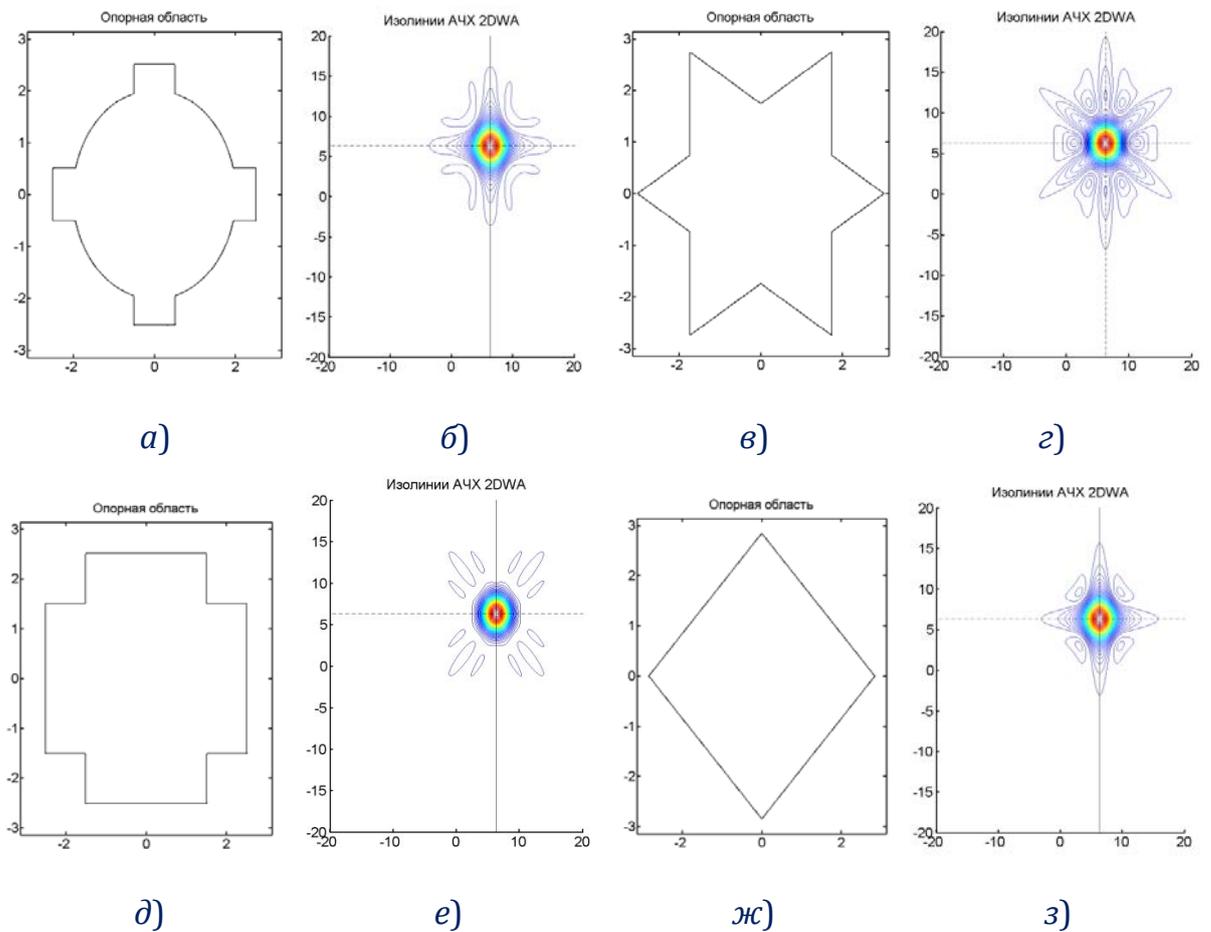


Рис. 3.20. Опорные области 2-5 (а),(в),(д),(ж), а также изолинии спектров соответствующих вейвлетов (б),(г),(е),(з) ($\eta_1 = \eta_2 = 2\pi$).

3.3.2. Физические свойства аналитических двумерных WA-систем функций

Для исследования двумерных функций будем использовать модифицированные физические характеристики [8,28,60-65]. Относительная ширина функции спектральной плотности (ФСП) по уровню -6 дБ ($\gamma_{4/3} = \gamma_4/\gamma_3$), где γ_3 — ширина ФСП по уровню -3 дБ для одной из размерностей. Относительное положение первого нуля ФСП ($\gamma_{2/3} = \gamma_2/\gamma_3$). Когерентное усиление задается соотношением

$$\gamma_7 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x_1, x_2)| dx_1 dx_2 \right)^{-1}.$$

Эквивалентная шумовая полоса определяется так

$$\gamma_8 = \gamma_7^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2.$$

Максимальный уровень боковых лепестков (в дБ) вычисляется с помощью выражения

$$\gamma_9 = 20 \lg \max_k \left| \frac{\hat{\varphi}(f_{1m,k}, f_{2m,k})}{\hat{\varphi}(f_{1\max}, f_{2\max})} \right|,$$

где $(f_{1m,k}, f_{2m,k})$ — координата k -ого локального максимума ФСП, отличная от главного максимума $(f_{1\max}, f_{2\max})$. Значения эталонных характеристик

$$\gamma_{4/3}^* = 1, \gamma_{2/3}^* = 1, \gamma_7^* = 1, \gamma_8^* = 0.1.$$

Функционал близости фильтра к идеальному. Используя [39-41], построим функционал качества выбора аналитических 2DWA. Анализ изменения физических характеристик двумерных функций по отношению к эталонным. Функционал близости фильтра к идеальному запишется так

$$J = \sqrt{\left| \frac{\gamma_{4/3}^* - \gamma_{4/3}}{\gamma_{4/3}^*} \right|^2 + \left| \frac{\gamma_{2/3}^* - \gamma_{2/3}}{3\gamma_{2/3}^*} \right|^2 + \left| \frac{\gamma_7^* - \gamma_7}{5\gamma_7^*} \right|^2 + \left| \frac{\gamma_8^* - \gamma_8}{\gamma_8^*} \right|^2 + \left| \frac{10}{\gamma_9} \right|^2} + \Delta^2, \quad (3.12)$$

где γ^* — эталонная характеристика. В табл. 3.8 приведены физические характеристики и значения функционала близости фильтра к идеальному для 2DWA с опорными областями 1-5 и синтезированными для АФ

$$fup_3(x), \Xi_3(x), h_3(x).$$

Таблица 3.8. Физические характеристики 2DWA

с опорной областью, заданной в частотном пространстве ($\eta_1 = \eta_2 = 2\pi$)

Атомарная функция (или АФ)	Номер опорной области	γ_4/γ_3	γ_2/γ_3	γ_7	γ_8	γ_9	Δ	J
$fup_3(x)$	1	1.375	2.875	0.326	0.312	-33.436	0.204	1.855
	2	1.429	2.286	0.308	0.295	-30.503	0.268	1.922
	3	1.429	2.857	0.261	0.250	-21.543	0.310	2.309
	4	1.500	2.667	0.215	0.206	-30.542	0.187	2.224
	5	1.429	2.143	0.282	0.270	-27.838	0.202	1.919
$\Xi_3(x)$	1	1.429	3.000	0.634	0.271	-32.059	0.175	1.780
	2	1.286	2.000	0.600	0.256	-29.046	0.236	1.660
	3	1.500	3.000	0.507	0.217	-20.995	0.267	2.202
	4	1.333	2.333	0.418	0.179	-29.911	0.161	1.915
	5	1.500	2.167	0.549	0.235	-26.663	0.174	1.829
$h_3(x)$	1	1.200	2.000	0.215	0.121	-20.365	0.092	2.344
	2	1.500	2.000	0.203	0.114	-17.362	0.150	2.728
	3	1.500	2.750	0.172	0.097	-15.036	0.144	3.197
	4	1.250	2.000	0.142	0.080	-21.662	0.087	3.011
	5	1.500	2.000	0.186	0.104	-16.463	0.092	2.827

Пример 3.4. Для иллюстрации применения 2DWA рассмотрим задачу анализа суммы двух пространственных линейно частотно-модулированных (ЛЧМ) сигналов (рис. 3.46а). Результаты двумерного вейвлет преобразования представлены на рис. 46б-г.

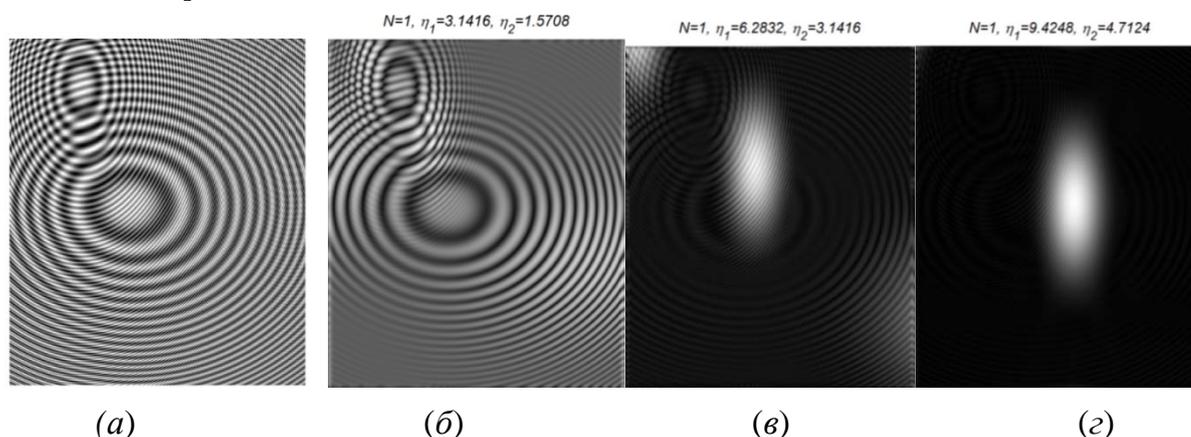


Рис. 3.21. Сумма двух пространственных ЛЧМ сигналов (а), результаты вейвлет преобразования для 2DWA $\eta_1 = \pi$, $\eta_2 = \pi/2$ (б), $\eta_1 = 2\pi$, $\eta_2 = \pi$ (в), $\eta_1 = 3\pi$, $\eta_2 = 3\pi/2$ (г).

Пример 3.5. Вейвлет-обработка тестового радиолокационного изображения (рис. 3.22) с помощью 2DWA. Результаты двумерного вейвлет преобразования для опорных областей 1-7 в временном пространстве представлены на рис. 3.23.

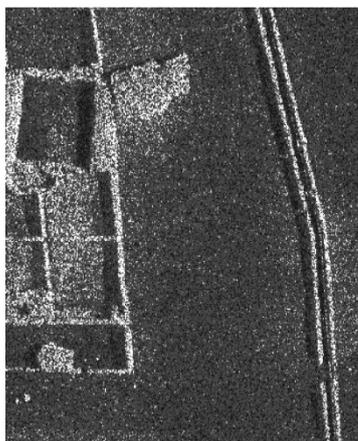


Рис. 3.22. Тестовое радиолокационное изображение.

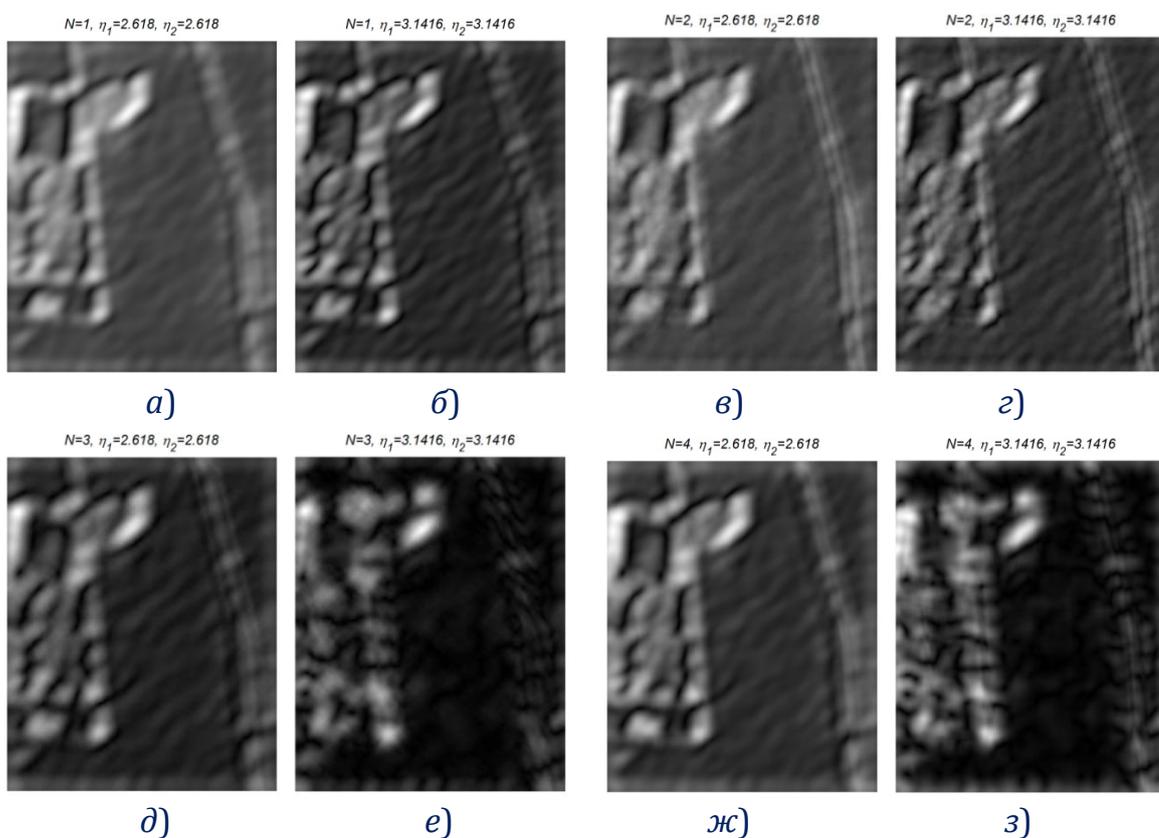


Рис. 3.23. Результаты вейвлет преобразования с помощью 2DWA для двух наборов (η_1, η_2) , N – номер опорной области.

Как видно из экспериментов, выбор параметров (η_1, η_2) позволяет анализировать соответствующие частотные диапазоны сигналов, а подбор опорной области в частотном пространстве конкретизирует границы этих диапазонов. При определении опорной области во временном пространстве появляется возможность ориентировать вейвлет-обработку на геометрические особенности изображения и учитывать форму объектов. Это позволяет существенно расширить область применения вейвлет-анализа, а также оптимизировать цифровую обработку многомерных сигналов за счет одновременного выполнения нескольких операций (фильтрация, выделение контуров и другие).

ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ 3

Третья глава диссертационной работы посвящена применению теории R-функций к синтезу многомерных цифровых фильтров со сложной геометрией опорных областей. Рассмотрено описание на аналитическом уровне без аппроксимаций геометрии сложных областей. Предложен алгоритм, а так же построены двумерные фильтры с конечной импульсной характеристикой и аналитические двумерные WA-системы функций. Дан их физический анализ и примеры использования для цифровой обработки изображений.

ГЛАВА 4. ОБРАБОТКА РАДИОЛОКАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ И СИНТЕЗИРОВАНИЕ АПЕРТУРЫ АНТЕННЫ АТОМАРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

4.1. Обработка сигналов в радиоприемном устройстве

Основная функция обработки сигналов в радиоприемных устройствах [8-19, 66-83] заключается в линейной фильтрации сигналов в усилителях высокой и промежуточной частот, преобразовании несущих частот, а также амплитудном, фазовом или амплитудно-фазовом детектировании. При математическом описании [8-19] эти процессы можно свести к линейной фильтрации аддитивной смеси сигнала и приведенных ко входу приемного устройства внешних и внутренних шумов, а также дальнейшему выделению огибающей и фазы результирующего сигнала.

Одиночный радиолокационный сигнал [16] на входе радиоприемного устройства можно записать в виде

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \sqrt{E} \operatorname{Re}(s(t)) \exp(-i\omega_0 t) = \\ &= \sqrt{E} \operatorname{Re}(S(t)) \exp(-i[\omega_0 t + \varphi(t) + \varphi_0]), \\ &0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

где T — время наблюдения одиночного сигнала, $E = \int_0^T s_0^2(t) dt$ — энергия сигнала, $S(t)$ — функция амплитудной модуляции, $\omega_0 t + \varphi(t) + \varphi_0$ — мгновенная фаза, ω_0 — несущая частота, $\varphi(t)$ — фазовая модуляция, φ_0 — начальная фаза, $s(t)$ — комплексная огибающая сигнала.

Для импульсной характеристики линейного фильтра имеем

$$h_0(t) = \operatorname{Re}(h(t)) \exp(-i\omega_0 t) = \operatorname{Re}(H(t)) \exp(-i[\omega_0 t + \psi(t) + \psi_0]),$$

где $H(t)$ — огибающая импульсной характеристики, $\omega_0 t + \psi(t) + \psi_0$ — мгновенная фаза, ω_0 — собственная частота фильтра, $\psi(t)$ — фазовая модуляция импульсной характеристики, $h(t)$ — комплексная огибающая импульсной характеристики фильтра. Сигнал на выходе фильтра запишется так

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_0(\tau) h_0(t - \tau) d\tau.$$

Выделяя комплексные огибающие сигнала и фильтра получим

$$r(t) = \frac{\sqrt{E}}{2} \operatorname{Re} \left(\exp(-j\omega_0 t) \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(t-\tau) d\tau \right) = r_c(t) \cos(\omega_0 t) + r_s(t) \sin(\omega_0 t),$$

где
$$r_c(t) = \frac{\sqrt{E}}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(t-\tau) d\tau, \quad r_s(t) = \frac{\sqrt{E}}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(t-\tau) d\tau.$$

Рассмотрим белый нормальный шум $n(t)$ с нулевым математическим ожиданием и спектральной плотностью шума n_0 . При пропускании его через линейный фильтр получим нормальный случайный процесс

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau) h_0(t-\tau) d\tau$$

с нулевым средним и корреляционной функцией

$$K_M(t_1, t_2) = n_0 \int_{-\infty}^{\infty} h_0(\tau) h_0(\tau + t_2 - t_1) d\tau.$$

Рассматривая комплексные огибающие

$$K_M(\tau) = \frac{1}{2} n_0 \operatorname{Re} \left(\exp(j\omega_0 \tau) \int_{-\infty}^{\infty} h(t) h^*(t-\tau) dt \right),$$

где $\tau = t_1 - t_2$, * - символ комплексного сопряжения. Таким образом, для двух независимых реализаций случайного процесса получим

$$M(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\exp(-j\omega_0 t) \int_{-\infty}^{\infty} n_1(\tau) h(t-\tau) d\tau \right] + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\exp(-j\omega_0 t) \int_{-\infty}^{\infty} n_2(\tau) h(t-\tau) d\tau \right].$$

Зашумленный полезный сигнал $r(t)$ после прохождения через линейный фильтр

$$y(t) = r(t) + M(t) = Y_c(t) \cos(\omega_0 t) + Y_s(t) \sin(\omega_0 t) = Y(t) \cos[\omega_0 t - \theta(t)],$$

где $Y(t) = \sqrt{Y_c^2(t) + Y_s^2(t)}$, $\theta(t) = \arctg[Y_s(t)/Y_c(t)]$ - комплексная огибающая и фазовая модуляция процесса на выходе фильтра $y(t)$.

Здесь $Y_c(t) = r_c(t) + M_c(t)$, $Y_s(t) = r_s(t) + M_s(t)$.

Таким образом, сигнал и шум, прошедший через фильтр определяется следующим образом:

$$r_c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_c(\tau) H_c(t-\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} S_s(\tau) H_s(t-\tau) d\tau,$$

$$r_s(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} S_s(\tau) H_c(t-\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} S_c(\tau) H_s(t-\tau) d\tau,$$

$$M_c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} n_1(\tau) H_c(t-\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} n_2(\tau) H_s(t-\tau) d\tau,$$

$$M_s(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} n_2(\tau) H_c(t-\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\tau) H_s(t-\tau) d\tau.$$

Здесь $S_c(t) = \sqrt{E/2S(t)} \cos(\varphi(t) + \varphi_0)$, $S_s(t) = \sqrt{E/2S(t)} \sin(\varphi(t) + \varphi_0)$,

$$H_c(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} H(t) \cos(\psi(t) + \psi_0), \quad H_s(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} H(t) \sin(\psi(t) + \psi_0).$$

Переходя к дискретному представлению сигналов (используя обобщенную теорему отсчетов Кравченко-Котельникова) запишем аналоговый сигнал $s(t)$ с ограниченной полосой $\hat{s}(\omega)$ в виде

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta) \prod_{j=1}^{\infty} \text{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta a^{j-1}} (t - k\Delta) \right).$$

Ограничиваясь конечным числом членов произведения в правой части, имеет место точное разложение

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta) \prod_{j=1}^M \text{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta a^{j-1}} (t - k\Delta) \right), \quad a(1+a^{-M}) > 2, \quad \Delta = \frac{\pi}{\Omega} \cdot \frac{a(1+a^{-M})-2}{a-1}.$$

Дискретная свертка функций $x(t)$, ограниченной отрезком $[0, T_x]$, и $h(t)$, ограниченной отрезком $[0, T_h]$ выражается так

$$y(\Delta n) = \Delta \sum_{k=\max(0, n-N_h)}^{\min(N_x, n)} x(k\Delta) h(n\Delta - k\Delta), \quad (4.1)$$

где $N_x = T_x/\Delta$, $N_h = T_h/\Delta$. Полагая, что $x(t)$ и $h(t)$ равны нулю вне заданных интервалов, выражение (4.1) для удобства можно записать в следующем виде:

$$y(\Delta n) = \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) h(n\Delta - k\Delta).$$

Учитывая конечность временной выборки и, как следствие, бесконечным пределам существования ненулевого спектра проведем оценку погрешности усеченного ряда. Алгоритм блока линейной фильтрации и детектирования для цифровой модели запишется так

$$\frac{1}{\Delta} Y_c(\Delta n) = \sum_{k=n-N_h}^n X_c(\Delta k) H_c(\Delta n - \Delta k) - \sum_{k=n-N_h}^n X_s(\Delta k) H_s(\Delta n - \Delta k),$$

$$\frac{1}{\Delta} Y_s(\Delta n) = - \sum_{k=n-N_h}^n X_s(\Delta k) H_c(\Delta n - \Delta k) - \sum_{k=n-N_h}^n X_c(\Delta k) H_s(\Delta n - \Delta k),$$

$$Y(\Delta n) = \operatorname{arctg} \frac{Y_s(\Delta n)}{Y_c(\Delta n)}, \quad n = -N_h \dots N_h.$$

Определим погрешность в точках отсчетов. Для этого рассмотрим сигнал $S(t)$ до и после

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (4.2)$$

прохождения фильтра. В дискретном случае

$$Z_{\Delta}(\Delta n) = \Delta \sum_{k=\max(0, n-N_h)}^{\min(N_s, n)} S(k\Delta) h(n\Delta - k\Delta),$$

$$Z_{\Delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_{\Delta}(k\Delta) \prod_{j=1}^M \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta a^{j-1}} (t - k\Delta) \right).$$

Дискретизируя выражение в непрерывной форме (4.2)

$$Z(\Delta n) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) h(\Delta n - \tau) d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} s(\tau) h(n\Delta - \tau) d\tau \right) \quad (4.3)$$

Получим значение ошибки

$$\delta(\Delta n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\Delta s(k\Delta) h(\Delta n - \Delta k) - \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} s(\tau) h(n\Delta - \tau) d\tau \right). \quad (4.4)$$

тогда $Z_{\Delta}(\Delta n) = Z(\Delta n) + \delta(\Delta n)$.

Рассматривая квадрат среднеквадратической погрешности

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |Z(t) - Z_{\Delta}(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{Z}(\omega) - \tilde{Z}_{\Delta}(\omega)|^2 d\omega = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{-\pi/\Delta} |\tilde{Z}(\omega)|^2 d\omega + 2\pi \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} |\tilde{Z}(\omega) - \tilde{Z}_{\Delta}(\omega)|^2 d\omega + 2\pi \int_{\pi/\Delta}^{\infty} |\tilde{Z}_{\Delta}(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

Отсюда видно, что ошибка не может быть менее

$$\rho_{\min}^2 = 2\pi \left\{ \int_{-\infty}^{-\pi/\Delta} |\tilde{Z}(\omega)|^2 d\omega + \int_{-\pi/\Delta}^{\infty} |\tilde{Z}_{\Delta}(\omega)|^2 d\omega \right\}.$$

Во многих приложениях оценка погрешности сверху зависит от характера убывания спектра $\tilde{Z}(\omega)$. На практике она не превосходит значения $4\rho_{\min}^2$.

Корреляционные функции шумов можно определить так

$$\begin{aligned}
 R(t_2 - t_1) &= \overline{P(t_1)P(t_2)} = n_0 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)h(\tau + t_2 - t_1)d\tau, \\
 R_{\Delta}(\Delta m - \Delta n) &= \overline{P_{\Delta}(\Delta n)P_{\Delta}(\Delta m)} = \\
 &= \Delta^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \overline{n(\Delta k)n(\Delta l)} h(\Delta n - \Delta k)h(\Delta m - \Delta l) = \\
 &= D\Delta^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(\Delta n - \Delta k)h(\Delta m - \Delta k) = D\Delta^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(\Delta k)h(\Delta k + \Delta m - \Delta n). \\
 R_{\Delta}(t_2, t_1) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{P_{\Delta}(\Delta n)P_{\Delta}(\Delta m)} \times \\
 &\times \prod_{j=1}^M \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta a^{j-1}}(t_1 - k\Delta)\right) \prod_{j=1}^M \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta a^{j-1}}(t_2 - k\Delta)\right) = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{\Delta}(\Delta n) \prod_{j=1}^M \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta a^{j-1}}(t_2 - t_1 - k\Delta)\right).
 \end{aligned}$$

Аналогично (4.2) и (4.3) можно записать $D_n = n_0/\Delta$,

$$R_{\Delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{\Delta}(k\Delta) \prod_{j=1}^M \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta a^{j-1}}(t - k\Delta)\right).$$

Здесь $R_{\Delta}(k\Delta) = R(k\Delta) + \delta(\Delta n)$, $\delta(\Delta n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{nk}$,

$$\delta_{nk} = \Delta h(\Delta k)h(\Delta n - \Delta k) - \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} h(\tau)h(\Delta n - \tau)d\tau.$$

Таким образом, для дискретной фильтрации получим

$$\begin{aligned}
 r_{\Delta c}(0) &= \frac{\Delta\sqrt{E}}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S^2(\Delta k), \quad r_{\Delta s}(0) = 0, \\
 R_{\Delta}(0) &= n_0 \frac{\Delta\sqrt{E}}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S^2(\Delta k), \quad q_{\Delta}^2 = \frac{r_{\Delta}^2(0)}{2R_{\Delta}(0)} = \frac{\Delta\sqrt{E}}{4n_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S^2(\Delta k).
 \end{aligned}$$

Итоговые формулы для дискретной фильтрации с учетом применения обобщенной теоремы отсчетов запишутся так

$$\begin{aligned}
 r_{\Delta c}(0) &= \frac{\Delta\sqrt{E}}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S^2(\Delta k), \quad r_{\Delta s}(0) = 0, \\
 R_{\Delta}(0) &= n_0 \frac{\Delta\sqrt{E}}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S^2(\Delta k), \quad q_{\Delta}^2 = \frac{r_{\Delta}^2(0)}{2R_{\Delta}(0)} = \frac{\Delta\sqrt{E}}{4n_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S^2(\Delta k).
 \end{aligned}$$

4.2. Цифровая обработка сигналов в антеннах с синтезированной апертурой при боковом обзоре

Радиолокационные станции с синтезированием апертуры получили широкое распространение. Это обуславливается возможностью обеспечения высокой разрешающей способностью по углу, используя ограниченные по размерам фюзеляжные антенны на борту летательного аппарата.

4.2.1. Геометрия синтезирования апертуры

Предполагаем, что ЛА перемещается с постоянной скоростью по прямой траектории, которая не меняет своей высоты над поверхностью Земли. Схема представлена на рис. 4.1.

Передатчик излучает гармонический зондирующий сигнал, который можно описать функцией времени

$$u_0(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (4.5)$$

где U_0 — амплитуда, ω_0 — угловая частота, φ_0 — начальная фаза сигнала.

Обычно используется моностатический радар, антенна которого используется для передачи и приема электромагнитных сигналов. Кроме этого, существуют и бистатические радары, отличающиеся от моностатических наличием двух разделенных передающей и принимающей антенн.

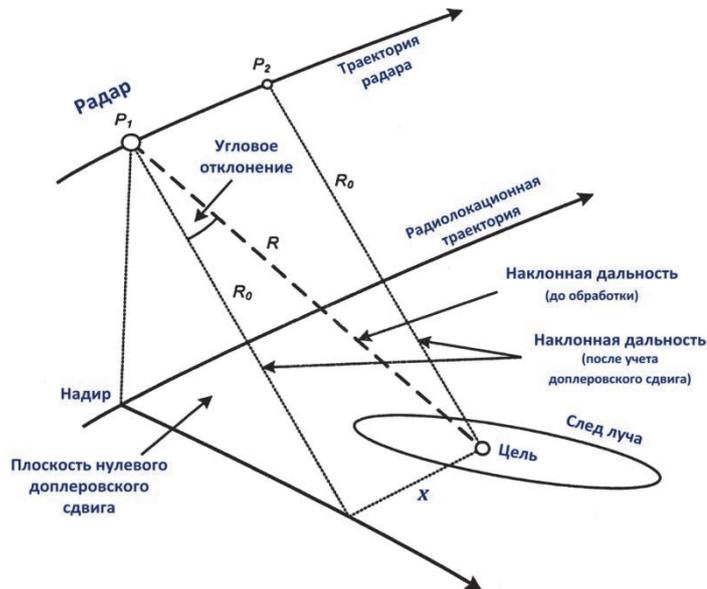


Рис. 4.1. Геометрия синтезирования апертуры радара.

Рассмотрим геометрию синтезирования апертуры с учетом формы земной поверхности

$$\frac{R_e}{\sin \theta_n} = \frac{R_e + h}{\sin \theta_i} = \frac{R_0}{\sin \beta_e}, \quad \cos \beta_e = \frac{R_e^2 + (R_e + h)^2 - R_0^2}{2R_e(R_e + h)}, \quad G = R_e \beta_e. \quad (4.6)$$

Здесь угол падения θ_i больше угла между надиром и зондирующим лучом θ_n на величину угла β_e . Для спутника это различие составляет несколько градусов. Период обращения спутника вокруг земли определяется радиусом его орбиты и составляет $T = \sqrt{4\pi^2 R_s^3 / \mu_e}$, где $\mu_e = 3.9860 \cdot 10^{14}$ м³/с² — гравитационная постоянная Земли. Тогда угловая скорость составит $\omega_s = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\mu_e / R_s^3}$, а линейная скорость $V_s = R_s \omega_s = \sqrt{\mu_e / R_s}$.

4.2.2. Формула дальности

В простом случае расстояние до цели определяется теоремой Пифагора $R^2(\eta) = R_0^2 + V_r^2 \eta^2$, где R_0 — наименьшее расстояние от радара до цели. Линейную скорость для прямоугольной модели [14] можно оценить так $V_r \approx \sqrt{V_s V_g}$. Используя свойства малых углов, заменить синус угла, на его значение в радианах следующим образом:

$$\sin \theta_{sq} = \frac{X_g}{R(\eta)} = -\frac{V_g \eta}{R(\eta)}, \quad \sin \theta_g = \frac{X_s}{R(\eta)} = -\frac{V_s \eta}{R(\eta)}, \quad \sin \theta_r = \frac{X_r}{R(\eta)} = -\frac{V_r \eta}{R(\eta)}.$$

Справедлива пропорция $\theta_{sq} : \theta_r : \theta_g = V_g : V_r : V_s = X_g : X_r : X_s$.

Таким образом, угол отклонения для прямоугольной аппроксимации можно выразить через действительный угол отклонения так

$$\theta_r = \frac{V_r}{V_g} \theta_{sq} = \frac{V_s}{V_r} \theta_{sq}, \quad \cos \theta_r = \sqrt{1 - \left(\frac{V_r \eta}{R(\eta)} \right)^2},$$

откуда $R_0 = R(\eta) \cos \theta_r$ или $R_0 = \sqrt{R^2(\eta) - V_r^2 \eta^2} = R(\eta) \sqrt{1 - \left(\frac{V_r \eta}{R(\eta)} \right)^2}$.

4.2.3. Сигналы в системах синтезирования апертуры

Радар посылает частотно модулированные импульсы вида

$$s_p(\tau) = w_r(\tau) \cos \left(2\pi \sum_{n=0}^N P_n \tau^n \right),$$

где τ — время, P_n — фазовые коэффициенты. Простейшая огибающая импульса имеет прямоугольную форму $w_r(\tau) = \text{rect}(\tau / T_r)$, где T_r — длительность импульса.

В первых радарных системах импульсы генерировались аналоговым устройством, однако в настоящее время для этих целей используются цифровые синтезаторы. Наиболее распространёнными зондирующими сигналами являются линейно частотно-моделированные (ЛЧМ) импульсы

$$s_p(\tau) = w_r \cos(2\pi f_0 \tau + \pi K_r \tau^2),$$

где K_r — степень частотной модуляции.

В этой форме фазовые коэффициенты имеют следующие значения:

$$P_0 = 0, P_1 = f_0, P_2 = K_r/2, P_n = 0 \text{ для } n > 2.$$

Задача синтеза сводится к тому, что оптимальное устройство должно формировать сигнал, соответствующий радиолокационному изображению (РЛИ), посредством процедуры обработки принимаемого сигнала радара с синтезированием апертуры (РСА) с точностью до постоянного множителя

$$J_i(\eta) = |j(\eta)| = \left| \int_{-T/2}^{T/2} \dot{\xi}_i(t + \eta) \dot{h}(t) dt \right|, \quad (4.7)$$

где $J_i(\eta) = J_i(\chi/V_n)$ — сигнал, соответствующий РЛИ; $j(\eta)$ — сигнал на выходе линейной части системы обработки; $\dot{h}(t)$ — опорная функция, с точностью до начальной фазы комплексно-сопряженная с сигналом, отраженным от одиночной точечной цели

$$\dot{h}(t) = H(t) \exp(j\Phi_{on}(t)), \quad \Phi_{on}(t) = 2\pi V_n^2 t^2 / (\lambda r_0). \quad (4.8)$$

Здесь $H(t)$ — действительная весовая функция, вид которой зависит от выбранного подхода к синтезу системы обработки; $\Phi_{on}(t)$ — закон изменения фазы опорной функции. Выражение (4.8) при $H(t) = 1$ описывает работу корреляционного приемника, обеспечивающего оптимальный прием сигнала $\dot{\xi}_i(t)$ на фоне белого шума $\dot{h}(t)$. Реакция РСА на одиночную цель во времени, называемая сигнальной функцией (СФ), имеет вид

$$I_i(\eta) = \left| \int_{-T/2}^{T/2} \dot{\xi}_i(t + \eta) \dot{h}(t) dt \right|. \quad (4.9)$$

Если произвести замену переменных $t = x/V_n$, $\eta = \chi/V_n$, то реакцию РСА можно записать в пространственных координатах

$$I_i(\chi) = \left| \int_{-T/2}^{T/2} \dot{\xi}_i(x + \chi) \dot{h}(x) dx \right|. \quad (4.10)$$

Реакцию РСА на одиночную точечную цель в пространстве называют синтезированной диаграммой направленности (СДН).

Для обеспечения высокой разрешающей способности по дальности РСА, вместо непрерывного зондирующего сигнала используют импульсный [1,30-32]. В РСА с цифровой обработкой принятый сигнал после преобразования его к комплексной форме дискретизируется во времени

$$\dot{s}_i[p] = \dot{s}_i(pT_3) = U_i G(pT_3) \exp(-j\mu(pT_3)^2 - \psi_i), \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.11)$$

где T_3 — период зондирования.

В результате получаем дискретный аналог непрерывного сигнала $\dot{s}_i(t)$ в форме (3.8). Принятый дискретный сигнал $\dot{\xi}_i[p]$ в этом случае представляет собой сумму вида $\dot{\xi}_i[p] = \dot{s}_i[p] + \dot{n}[p]$, где $\dot{n}[p]$ - дискретный белый шум. Поскольку принятый сигнал становится дискретным, опорная функция также представляется в дискретизированном виде

$$\begin{aligned} \dot{h}[q] &= \dot{h}(qT_3) = H(qT_3) \exp\{j\mu(qT_3)^2\}, \\ q &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N/2, \end{aligned}$$

где $N = \text{int}\{T/T_3\}$ — число периодов зондирования на интервале синтеза. Процесс обработки дискретных сигналов и получения дискретного РЛИ описывается дискретным аналогом (4.7)

$$J_i[q] = |J[q]| = \left| \sum_{p=-N/2}^{N/2} \dot{\xi}_i[p+q] \dot{h}[p] \right|.$$

2.2.4. Двухэтапная цифровая обработка сигналов РСА

При восстановлении радиолокационного изображения (РЛИ) возникает проблема согласования частот дискретизации входного сигнала цифровой системы обработки (ЦСО) и сигнала РЛИ [10-18]. На практике удобно понижение частоты дискретизации на входе ЦСО с частоты зондирования $f_3 = 1/T_3$ до частоты дискретизации РЛИ f_u без энергетических потерь. Использование весовой обработки повышает качество результирующего изображения.

На первом этапе происходит понижение частоты отсчетов сигнала с f_3 до f_u при возможно меньших энергетических потерях и одновременном сужении ширины спектра обрабатываемого сигнала.

Наиболее эффективным является метод «частичного суммирования»

$$\dot{\xi}[p_1] = \sum_{k=0}^{N_1} \dot{\xi}[p_1 N_1 + k], \quad (4.12)$$

где N_1 — число отсчетов, накапливаемых в «частичной сумме».

На втором на основе выражения (4.12) для меньшего числа отсчетов цифрового сигнала на частоте дискретизации f_u формируется сигнал РЛИ

$$J_i[q] = \left| \sum_{p_1=0}^{N_2-1} \dot{\xi}_1[p_1 + q] \dot{h}_2[p_1] \right|, \quad (4.13)$$

где $N_2 = N / N_1$ — число частичных сумм на интервале синтезирования; $\dot{h}_2[p_1]$ — опорная функция, формируемая частичным суммированием

$$\dot{h}_2[p_1] = \sum_{i=0}^{N_1-1} h[p_1 N_1 + i], \quad p_1 = 0, 1, 2, \dots, N_2 - 1. \quad (4.14)$$

Выражение (4.12) реализуется в фильтре синтезирования (ФС). Комплексная частотная характеристика ФС $F_s(\omega)$ отличается от аналогичной характеристики системы обработки $F_h(\omega)$ частотой f_d

$$\dot{F}_s(\omega) = 1 / T_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{F}_h(\omega + 2\pi n f_d), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.15)$$

где $F_h(\omega)$ — преобразование Фурье функции $h(t)$. ФС по ширине полосы пропускания Δf_s соответствует входному и выходному сигналам, значение Δf_s определяется только разрешающей способностью:

$$\Delta f_s = 2f_{\max} = V / \rho_x, \quad f_{\max} = V / (2\rho_x),$$

где f_{\max} — максимальная частота полезного траекторного сигнала.

При описании процесса синтезирования в двухступенчатой схеме в непрерывном виде, сигнал при частичном суммировании можно записать в виде

$$\dot{\xi}_1(t) = \int_t^{t+T_1} \dot{\xi}(t_1) h_1(t_1) dt_1, \quad (4.16)$$

где $\dot{\xi}(t_1)$ — принятый сигнал, $h_1(t_1)$ — весовая функция. Использование весовых функций [70-83] на основе АФ позволяет существенно улучшать обработку сигналов при синтезировании апертуры.

4.3. Применение функций Кравченко-Кайзера к задачам весового усреднения разностной частоты

Рассмотрим обработку сигнала разностной частоты (СРЧ) дальногомера с частотной модуляцией (ЧМ) с использованием метода весового усреднения, который позволяет существенно уменьшить влияние помех и повысить точность определения величины сдвига частоты. Определение весовой оценки частоты разностного сигнала [49] имеет вид

$$S = \int_0^{T_a} \alpha(x) F(x) dx, \quad (4.17)$$

где T_a — интервал анализа частоты, $\alpha(x)$ — нормированная весовая функция

$$\int_0^{T_a} \alpha(x) dx / T_a = 1, \quad F(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi_p(x)}{dx} = \frac{x_3}{2\pi} \frac{d\omega(x)}{dx} = x_3 f'(x).$$

Таким образом, $S = x_3 \int_0^{T_a} \alpha(x) f'(x) dx$. На практике часто используется симметричная треугольная функция модуляции с периодом $T_{\text{мод}}$. Тогда $T_a = T_{\text{мод}}/2$, а

$$S = x_3 \int_0^{T_{\text{мод}}/2} \alpha(x) f'(x) dx = 2x_3 \Delta F K_{MB}, \quad (4.18)$$

где $K_{MB} = \frac{1}{2\Delta F T_{\text{мод}}} \int_0^{T_{\text{мод}}/2} \alpha(x) f'(x) dx$ — коэффициент, зависящий от формы ВФ и

функции ЧМ. Используя линейную ЧМ и, учитывая условие нормировки, имеем $K_{MB} = 1$. Тогда измеряемое расстояние определяется так $R = \delta_R S / K_{MB}$.

При численной реализации оценки имеем $\hat{S} = \sum_{k=1}^N \alpha(x_k) F(x_k) \Delta_k$. Если шаг интерполяции принять равным половине мгновенного значения периода СРЧ, то в качестве точек интерполяции выберем нули СРЧ и получим

$$\hat{S} = \sum_{k=1}^N \alpha(x_k), \quad (4.19)$$

где x_k — положение k -го нуля СРЧ, N — число нулей СРЧ на половине периода модуляции. Основные погрешности возникающие при измерении физических величин следующие:

1. оценка величины отсчета по дискретизованному сигналу,
2. отличие реального закона модуляции частоты от заданного из за нелинейности модуляционной характеристики,

3. погрешность оценки моментов перехода через ноль разностного сигнала из за шумов,
4. погрешность определения отсчетов ВФ.

Анализ методической погрешности. Рассмотрим представление ВФ с помощью тригонометрического ряда

$$\alpha(x) = K_B \sum_{m=0}^K A_m \cos(4\pi mx/T_{\text{мод}}),$$

где $A_m = \frac{2}{T_{\text{мод}}} \int_0^{T_{\text{мод}}/2} \alpha(x) \cos(4\pi mx/T_{\text{мод}}) dx$, K_B — нормирующий множитель.

Для выполнения условия равенства нулю значения ВФ на границах интервала анализа необходима нормировка $\sum_{m=0}^K A_m = 0$. Таким образом, (4.19) преобразуем к виду

$$\hat{S} = K_B \sum_{m=0}^K A_m \sum_{k=1}^N \cos(4\pi mx_k/T_{\text{мод}}). \quad (4.20)$$

Учитывая [10] свойство

$$\sum_{m=1}^N \cos(x + 2(m-1)y) = \cos(x + (N-1)y) \frac{\sin(Ny)}{\sin(y)},$$

имеем $\hat{S} = N + K_B \sum_{m=1}^K A_m \cos[\pi m \eta (2(1-\varepsilon - \varphi_c/\pi) + N - 1)] \frac{\sin(N\pi m \eta)}{\sin(\pi m \eta)}$.

Проведя анализ полученных соотношений, запишем

$$\hat{S} = \begin{cases} M - K_B \sum_{m=1}^K A_m G_1(m\eta) & \text{при } 1 - \varepsilon \geq \chi, \\ 1 + M - K_B \sum_{m=1}^K A_m G_2(m\eta) & \text{при } 1 - \varepsilon < \chi. \end{cases}$$

Здесь

$$G_1(\eta) = \cos(\pi\eta(1 - 2\varepsilon - \chi)) \frac{\sin(\pi\eta\chi)}{\sin(\pi\eta)}, \quad G_2(\eta) = \cos(\pi\eta(2 - 2\varepsilon - \chi)) \frac{\sin(\pi\eta(1 - \chi))}{\sin(\pi\eta)}.$$

Тогда выражение для ошибки имеет следующий вид:

$$\Delta_S = \begin{cases} -\chi - K_B \sum_{m=1}^K A_m G_1(m\eta) & \text{при } 1 - \varepsilon \geq \chi, \\ 1 - \chi + K_B \sum_{m=1}^K A_m G_2(m\eta) & \text{при } 1 - \varepsilon < \chi. \end{cases}$$

Оно определяется через коэффициенты Фурье-преобразования весовой функции Кравченко-Кайзера (Глава 1, (1.10)).

4.4. Обобщение функции неопределенности по времени и частоте на основе семейства атомарных функций применительно к цифровой обработке сигналов в антенных системах

Проблемы, связанные с синтезом функции неопределенности (ФН) и автокорреляционной функции (АвФ) в задачах синтеза апертуры антенн рассматривались в [1–4] на основе семейства атомарных функций [4–8]. Известно, что практическая реализация современных радиолокационных систем (РЛС) представляет собой сложную задачу [8–15]. При их разработке и проектировании необходимо учитывать различные физические характеристики с целью улучшения качества работы систем. Поэтому основу цифровой обработки многомерных сигналов должны составлять многопараметрические алгоритмы, позволяющие варьировать физическими характеристиками и режимом работы РЛС в целом. Эффективность РЛС в основном определяется видом используемых в ней зондирующих сигналов (ЗС), выбор которых зависит от конкретных требований к системе по дальности действия, разрешающей способности, качеству обнаружения, а также точности оценивания координат и параметров целей. Одной из таких физических характеристик ЗС РЛС является ФН, впервые введенная Вилле [10]. Ее также называют ФН Вудворда, так как ему принадлежат первые работы, в которых были рассмотрены основные свойства ФН [11]. Затем функция неопределенности получила широкое развитие в работах как отечественных, так и зарубежных специалистов.

Для повышения надежности обнаружения слабых сигналов на фоне помех используются сложные ЗС. При этом они должны обладать ФН определенного вида, а также обеспечивать низкий уровень боковых лепестков и высокую разрешающую способность по задержке и частоте. Применение теории АФ позволяет проводить многопараметрический анализ и синтез ЗС, в частности получить обобщение ФН по времени и частоте на основе АФ [4–7].

Функция неопределенности (ФН) по времени и частоте является двумерной автокорреляционной функцией ЗС. Ее основные свойства приведены в [8–11]. Запишем ее следующим образом:

$$\chi(\tau, F) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \tilde{f}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \exp(i2\pi Ft) dt, \quad (4.21)$$

где символ « \sim » означает комплексное сопряжение.

Используя [5–6], введем в подынтегральное выражение (4.21) весовую функцию (ВФ) (окно) Кравченко, построенную на основе АФ.

Тогда получим функцию неопределенности Кравченко (ФНК)

$$\chi_K(\tau, F, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t-a) f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \times \\ \times \tilde{f}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \exp(i2\pi Ft) dt. \quad (4.22)$$

Здесь функцией $\theta(t)$ может быть любая из семейства АФ [4–7].

Рассмотрим следующие основные свойства этой ФНК.

Свойство 1. Центральная симметрия

$$\chi_K(\tau, F, a) = \chi_K(-\tau, -F, a). \quad (4.23)$$

В этом можно убедиться, заменяя τ , F в числителе на $-\tau$, $-F$, а также проведя замену переменной интегрирования $s = t - \tau$. Вынося после этого множитель $\exp(i2\pi F\tau)$ с единичным модулем за знак интеграла, мы перейдем от функции $\chi_K(-\tau, -F, a)$ к функции $\chi_K(\tau, F, a)$.

Свойство 2. Единичный объем тела неопределенности

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_K^2(\tau, F, a) d\tau dF = 1, \quad (4.24)$$

причем, имея в виду измерения, это свойство называют *принципом неопределенности в радиолокации*.

При заданном параметре обнаружения q степень спадания функции $\chi_K(\tau, F, a)$ в окрестности максимума $\tau = 0$, $F = 0$ характеризует точность измерения времени задержки t_3 и девиацию частоты F_d . Боковые выбросы определяют возможную неоднозначность измерения. Согласно (4.24) уменьшить объем тела неопределенности нельзя.

Свойство 3. Вертикальное сечение ФНК плоскостью нулевого временного рассогласования характеризует модуль оконного фурье-преобразования квадрата огибающей амплитуд $|f(t)|^2$ сигнала

$$\chi_K(\tau, F, a) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t-a) |f(t)|^2 \exp(-i2\pi Ft) dt \right|. \quad (4.25)$$

Свойство 4. Вертикальное сечение ФНК плоскостью нулевого частотного рассогласования является автокорреляционной функцией с весовым окном

$$\chi_K(\tau, 0, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t-a) f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \tilde{f}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) dt. \quad (4.26)$$

Свойство 5. Масштабирование функции $f(t)$ приводит к соответствующему изменению масштаба ФН. Если $f(t) \sim \chi_K(\tau, F, a)$, то

$$\sqrt{\beta} f(\beta t) \sim \chi_K\left(\beta\tau, \frac{F}{\beta}, a\right), \beta > 0.$$

Таким образом, получено новое пространственно-временное преобразование: функция неопределенности по времени и частоте Кравченко, которое дополнительно зависит от весовой функции $\theta(t)$ и параметра a . Проведенный численный эксперимент, а также анализ физических результатов для различных весовых функций [7, 9, 10] показал, что для анализа и синтеза радиолокационных сигналов ФНК является эффективной.

Рассмотрим влияние АФ $\text{fup}_N(t)$ и параметра a на формирование ФНК на следующих примерах.

Пример 4.1. Прямоугольный импульс без частотной модуляции. Сигнал $f(t) = \text{step}(t)$ – прямоугольный импульс, а $\theta(t) = \text{fup}_3(t)$,

$$\text{step}(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } |t| \leq 1, \\ 0, & \text{при } |t| > 1. \end{cases} \quad (4.27)$$

На рис. 4.2 приведены графики функций $f(t)$ (сплошная линия) и $\theta(t)$ (пунктирная линия), а на рис. 4.3а-в поведение ФНК для разных значений параметра a . ФН сигнала $f(t)$ изображены на рис. 2,2.

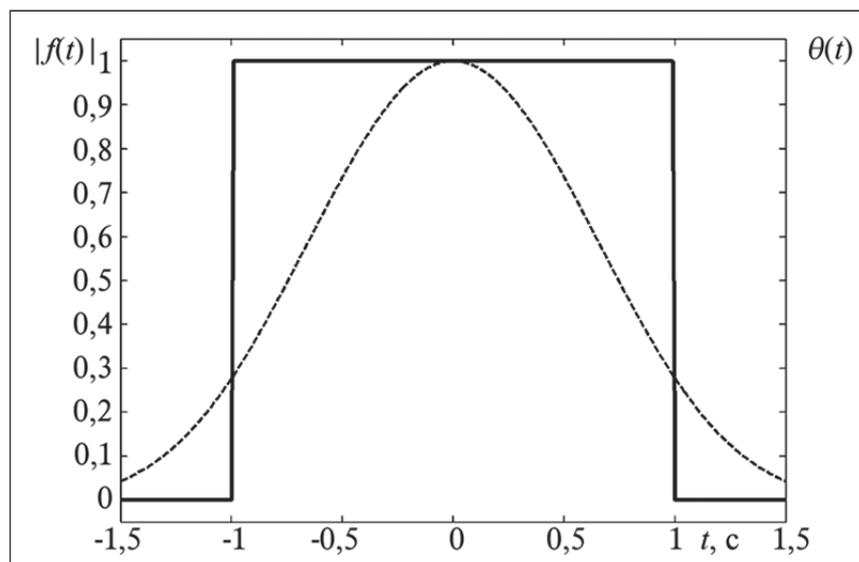


Рис. 4.2. Графики временной зависимости функции $|f(t)|$ (сплошная линия) и $\theta(t) = \text{fup}_3(t)$ (пунктирная линия).

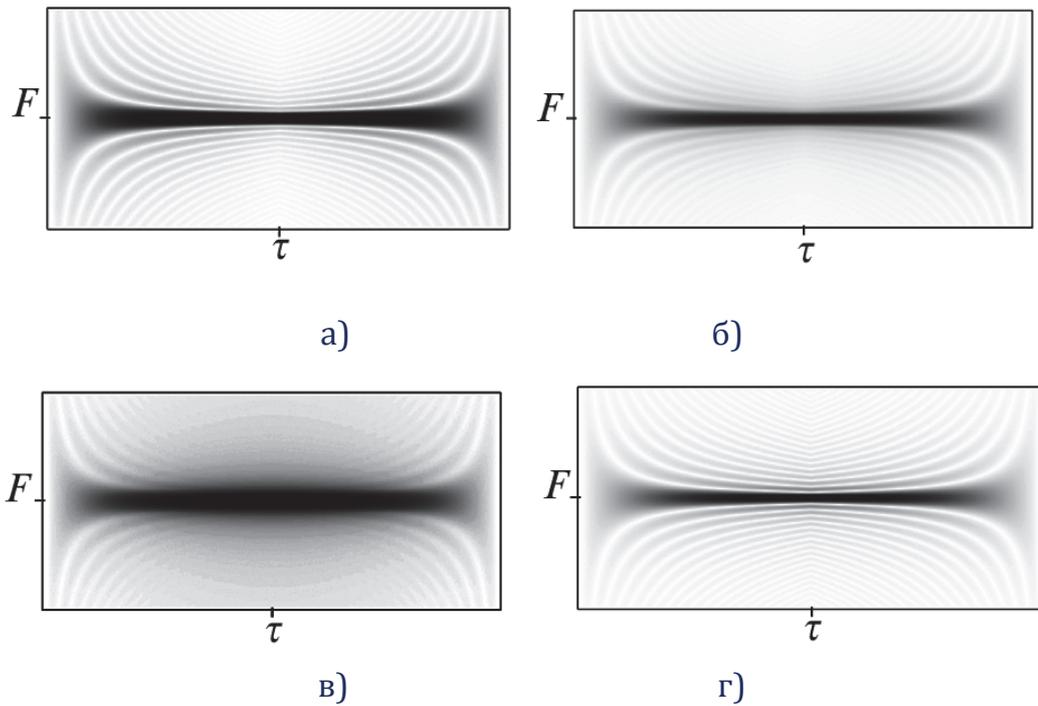


Рис. 4.3. Срезы ФН $\chi_K(\tau, F, a)$ плоскостями:

а) $a=0$; б) $a=0,5$; в) $a=1$; г) $\theta_1(t) \equiv 1$.

Пример 4.2. Прямоугольный импульс с линейной частотной модуляцией. Сигнал $f(t) = \text{step}(t) \exp(i5\pi t^2)$. На рис. 4.4 изображены графики изменения закона модуляции, а также действительной (сплошная линия) и мнимой (пунктирная линия) частей сигнала с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ).

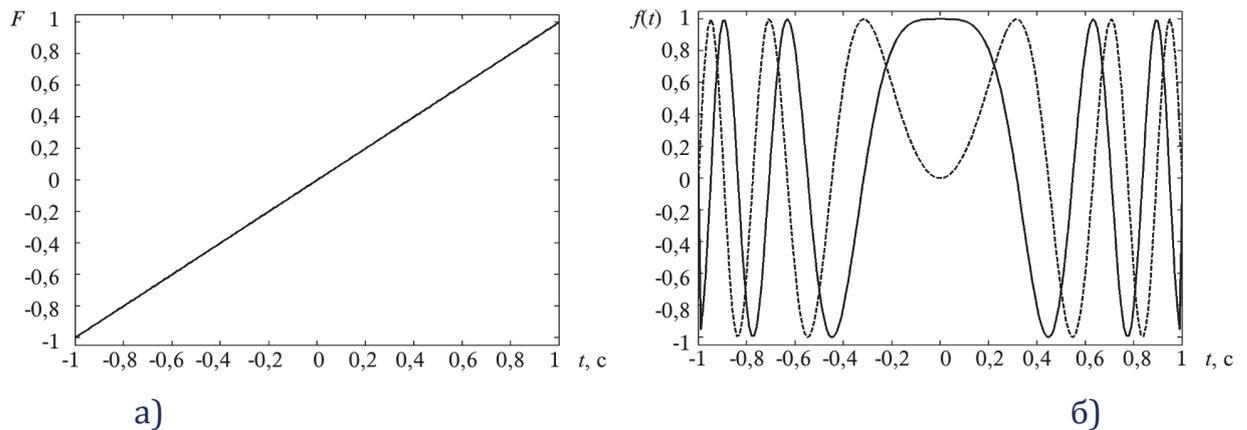


Рис. 4.4. Графики временной зависимости закона частотной модуляции (а) и частотно-модулированного сигнала (б)

На рис. 4.5а-г приведены срезы ФНК плоскостями $a=0; 0.5; 1$. Функция неопределенности сигнала $f(t)$ изображена на рис. 4.5г.

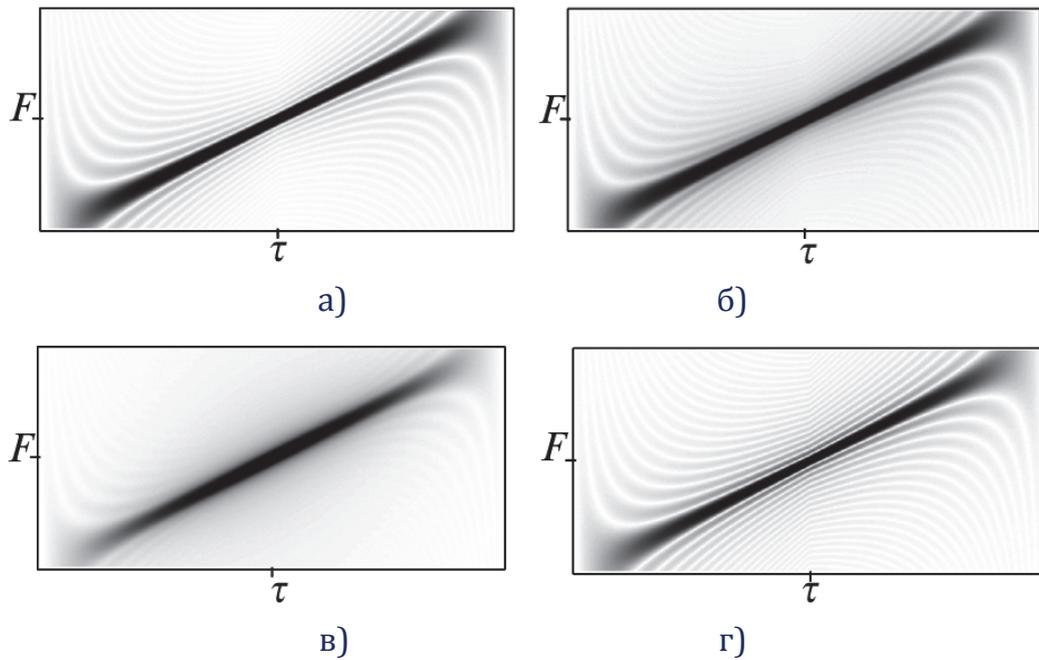


Рис. 4.5. Срезы ФН $\chi_K(\tau, F, a)$ плоскостями:

а) $a=0$; б) $a=0.5$, в) $a=1$; г) $\theta_1(t) \equiv 1$.

Пример 4.3. Прямоугольный импульс с нелинейной частотной модуляцией

$$f(t) = \text{step}(t) \exp\left(i5\pi t \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right).$$

Здесь период закона изменения модуляции в два раза больше периода огибающей. На рис. 4.6 изображены графики изменения закона модуляции, а также действительной (сплошная линия) и мнимой (пунктирная линия) частей ЛЧМ-сигнала с нелинейной частотной модуляцией.

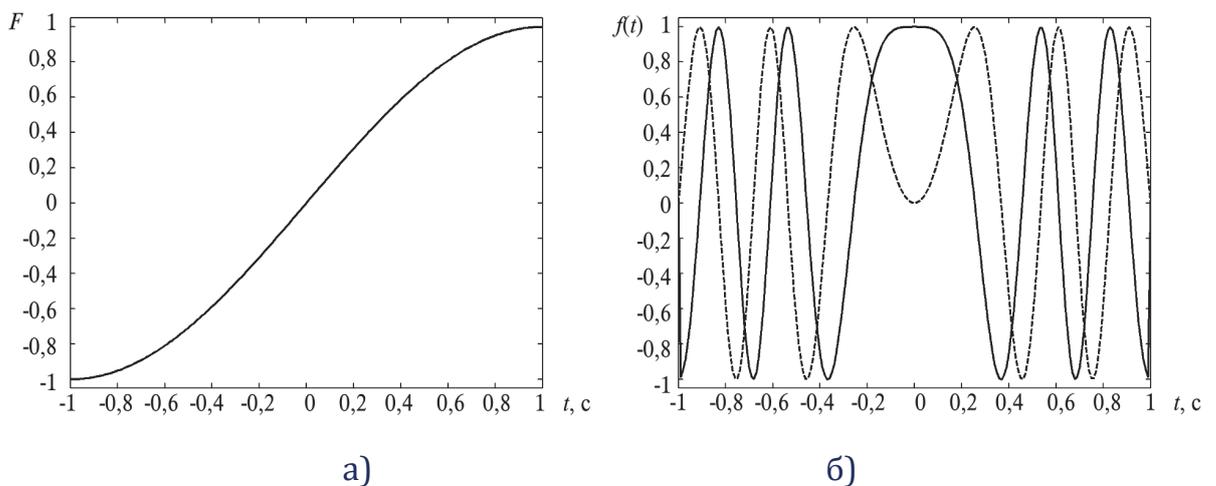


Рис. 4.6. Графики временной зависимости частотной модуляции (а) и частотно-модулированного сигнала (б)

На рис. 4.7 *а-г* приведены срезы ФНК плоскостями $a=0, 0.25, 0.5$. ФНК сигнала $f(t)$ изображена на рис. 4.7 *г*.

Полученная функция неопределенности по времени и частоте эффективна для анализа сложных ЗС. В этом случае варьирование третьей координаты преобразования (a) позволяет выбирать пространственно-временные характеристики отдельных частей сложного сигнала. На следующих примерах показаны эти возможности. В качестве моделей сложных сигналов взяты последовательности двух видеоимпульсов с частотной модуляцией.

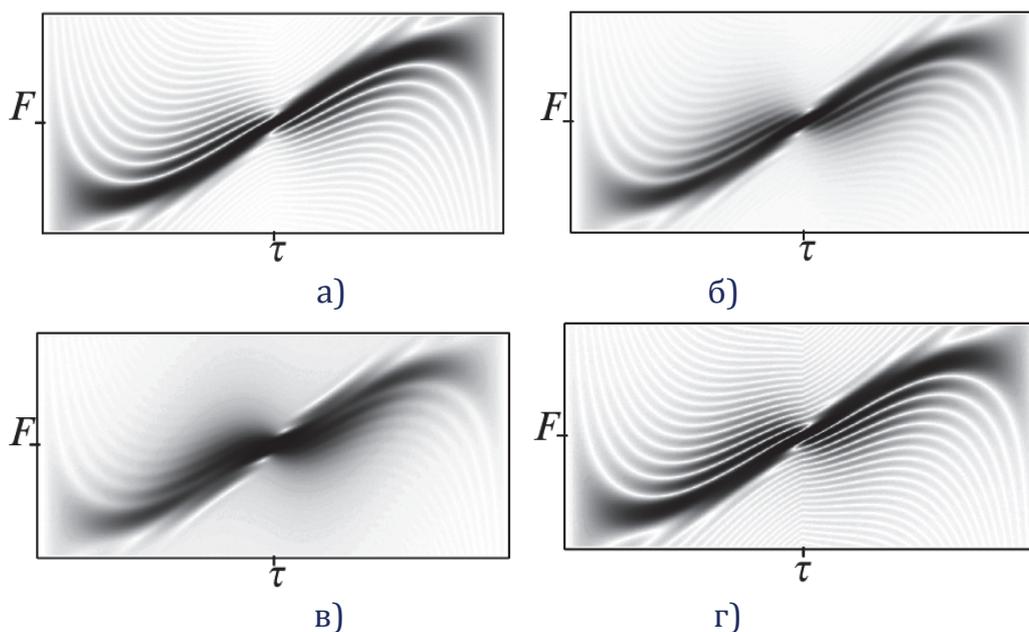


Рис. 4.7. Срезы ФН $\chi_k(\tau, F, a)$ плоскостями:

а) $a = 0$; б) $a = 0.5$; в) $a = 1$; г) $\theta_1(t) \equiv 1$.

Пример 4.4. Прямоугольные импульсы с линейной частотной модуляцией. Анализируемый сигнал представляет собой последовательность двух видеоимпульсов прямоугольной формы с линейной частотной модуляцией. В качестве ВФ выбрана $\theta(t) = \text{fup}_3(3.5t)$.

На рис. 4.8 изображены графики функций $f(t)$ (сплошная линия) и $\theta(t)$ (пунктирная линия). Графики временной зависимости закона частотной модуляции, а также действительная (сплошная линия) и мнимая (пунктирная) части сигнала изображены на рис. 4.9. На рис. 4.10*а-в* изображены срезы ФНК для $a=0; 0.25; 0.5$. Видно, что происходит подавление интерференционного эффекта (центральная часть рис. 4.10, *а*) по сравнению с классической ФН, которая может быть получена в частном случае при $\theta_1(t) \equiv 1$ (см. рис. 4.10,*г*).

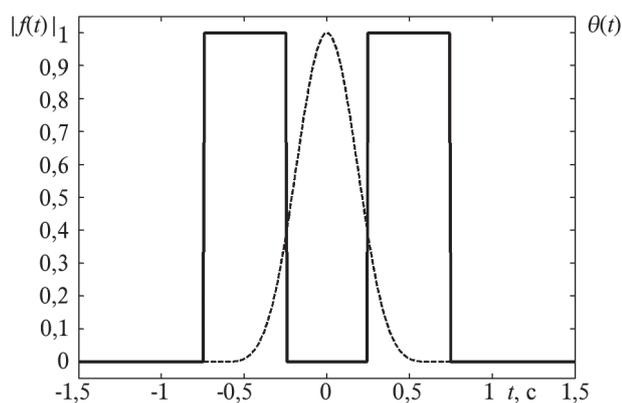


Рис. 4.8. Графики временной зависимости функций $|f(t)|$ и $\theta(t) = \text{fup}_3(3.5t)$.

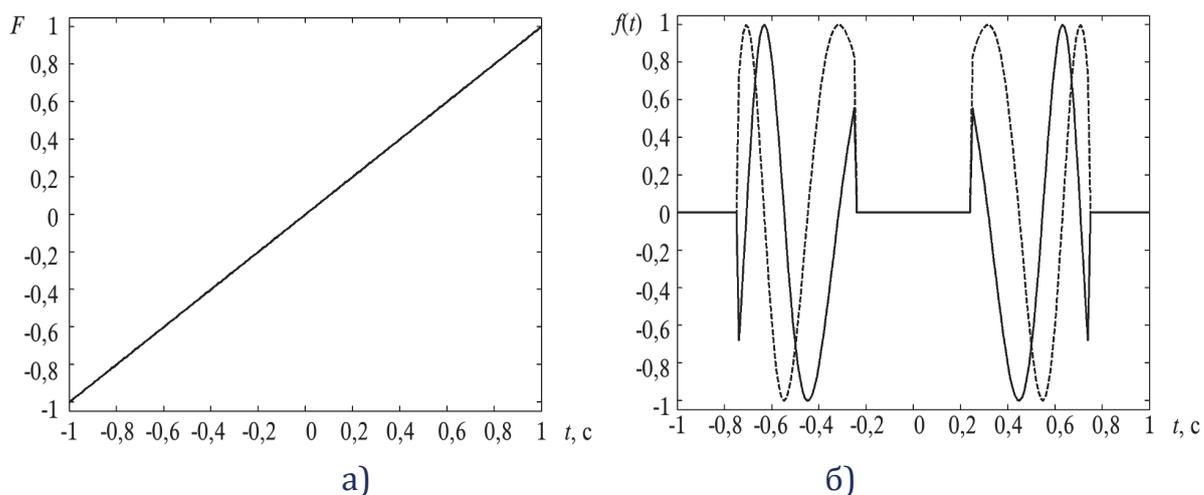


Рис. 4.9. Графики временной зависимости частотной модуляции (а) и частотно-модулированного сигнала (б).

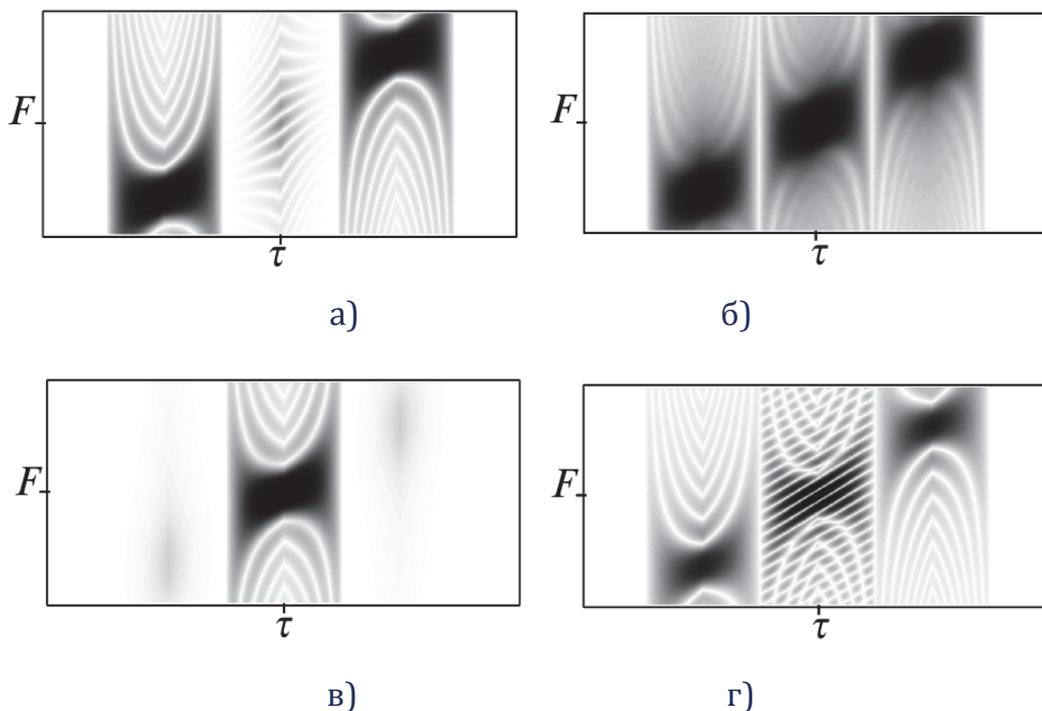


Рис. 4.10. Срезы ФН $\chi_k(\tau, F, a)$ плоскостями:
а) $a = 0$; б) $a = 0.25$; в) $a = 0.5$; г) $\theta_1(t) \equiv 1$.

Кроме того, модифицированная ФН позволяет «фокусироваться» на отдельные фрагменты сложного сигнала. В плоскости $a = 0.5$ получаем ФН прямоугольного импульса.

Пример 4.5. Импульсы треугольной и прямоугольной форм с линейной частотной модуляцией. Анализируемый сигнал представляет собой последовательность видеоимпульсов треугольной и прямоугольной форм с линейной частотной модуляцией. В качестве ВФ выбрана $\theta(t) = h_4(4t)$. На рис. 4.11 приведены графики временной зависимости функций $f(t)$ (пунктирная линия) и $\theta(t) = h_4(4t)$ (сплошная линия).

Графики временной зависимости закона частотной модуляции, а также действительная (сплошная линия) и мнимая (пунктирная линия) части сигнала изображены на рис. 4.12. На рис. 4.13 представлены срезы ФНК для $a = -0.5, -0.25, 0.5$. Здесь в плоскости $a = -0.5$ получаем ФН треугольного, импульса в плоскости $a = 0.5$ прямоугольного импульсов.

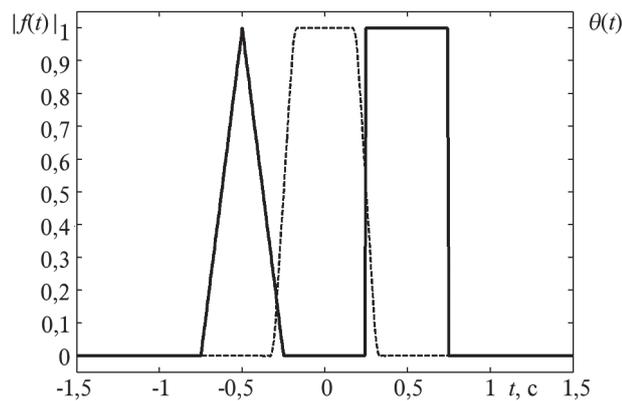


Рис. 4.11. Графики временной зависимости функций $f(t)$ и $\theta(t) = h_4(4t)$.

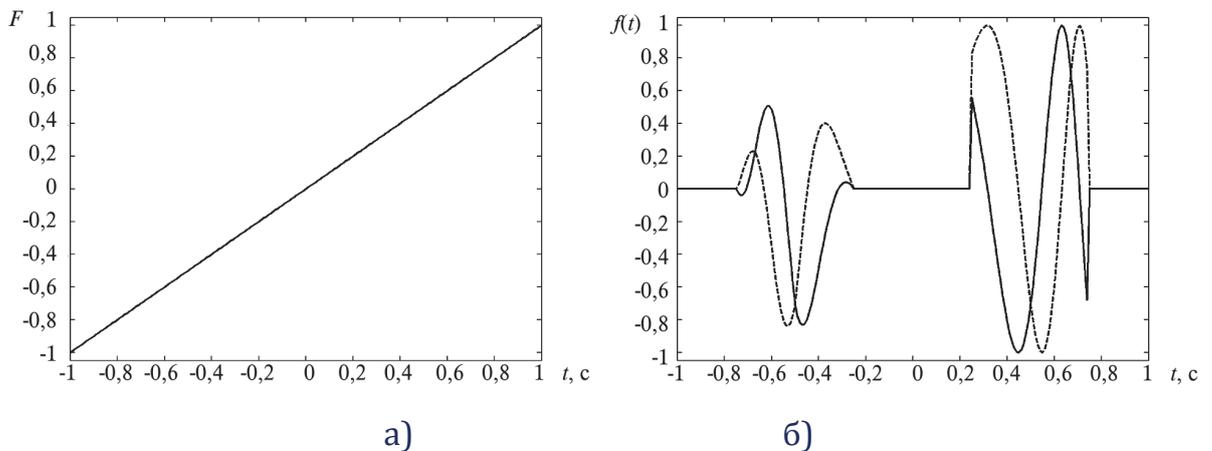


Рис. 4.12. Графики временной зависимости частотной модуляции (а) и частотно-модулированного сигнала (б).

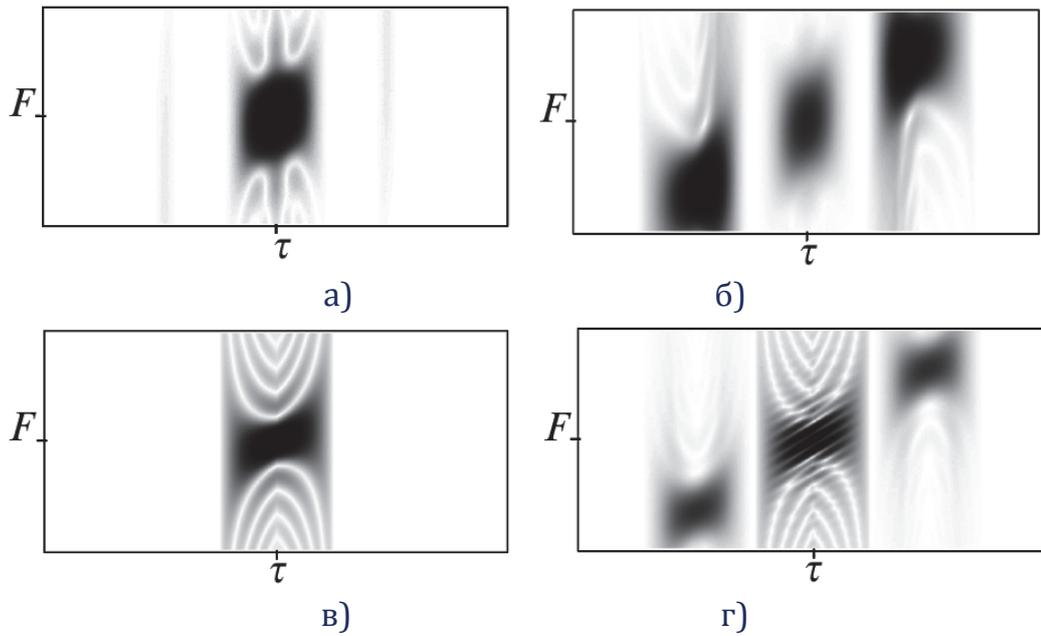


Рис. 4.13. Срезы ФН $\chi_k(\tau, F, a)$ плоскостями:

а) $a = -0.5$; б) $a = -0.25$; в) $a = 0.5$; г) $\theta_1(t) \equiv 1$.

Пример 4.6. Импульсы прямоугольной формы с нелинейной частотной модуляцией. Анализируемый сигнал представляет собой последовательность двух видеоимпульсов прямоугольной формы (см. рис. 4.14, сплошная линия) с нелинейной частотной модуляцией (рис. 4.15б). В качестве ВФ выбрана $\theta(t) = h_4(4t)$ (см. рис. 4.14, пунктирная линия).

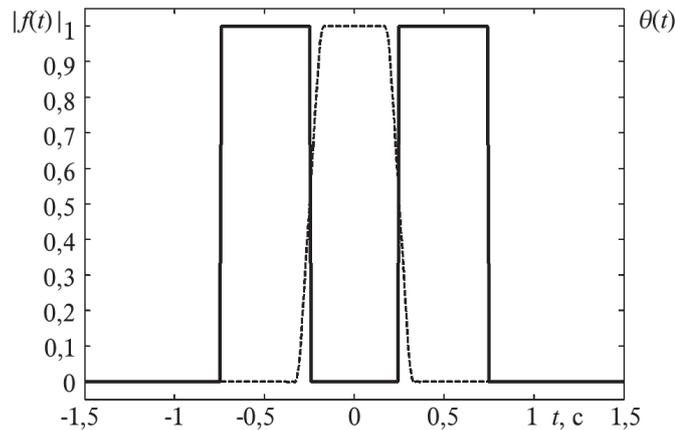


Рис. 4.14. Графики функций $|f(t)|$ и $\theta(t) = h_4(4t)$.

Графики временной зависимости закона частотной модуляции, а также действительная (сплошная линия) и мнимая (пунктирная линия) части сигнала изображены на рис. 4.15. На рис. 4.16 приведены сечения ФНК для $a = -0.5, -0.25, 0.5$. Из рис. 4.16а,в следует что в областях $t = -0.5$ и $t = 0.5$ расположены прямоугольные импульсы.

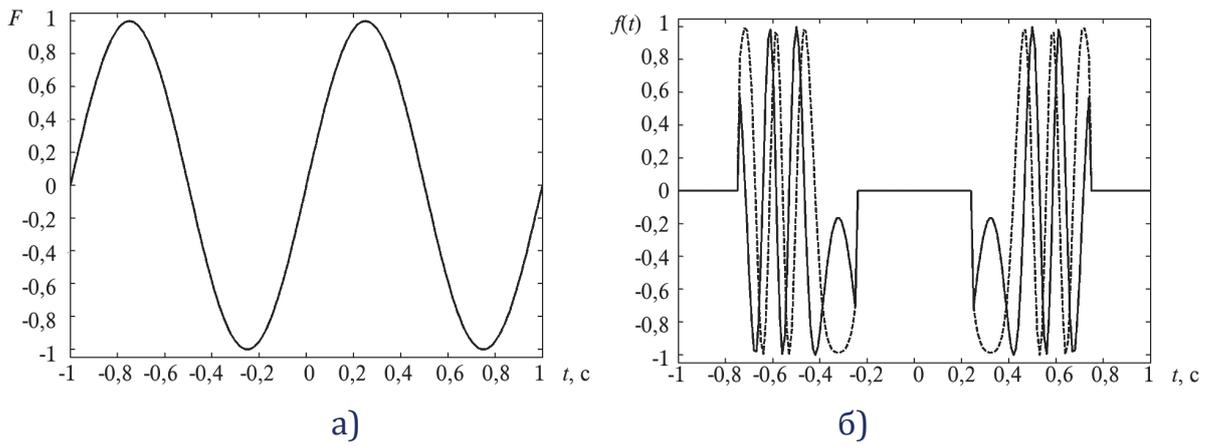


Рис. 4.15. Графики частотной модуляции (а) и частотно-модулированного сигнала (б)

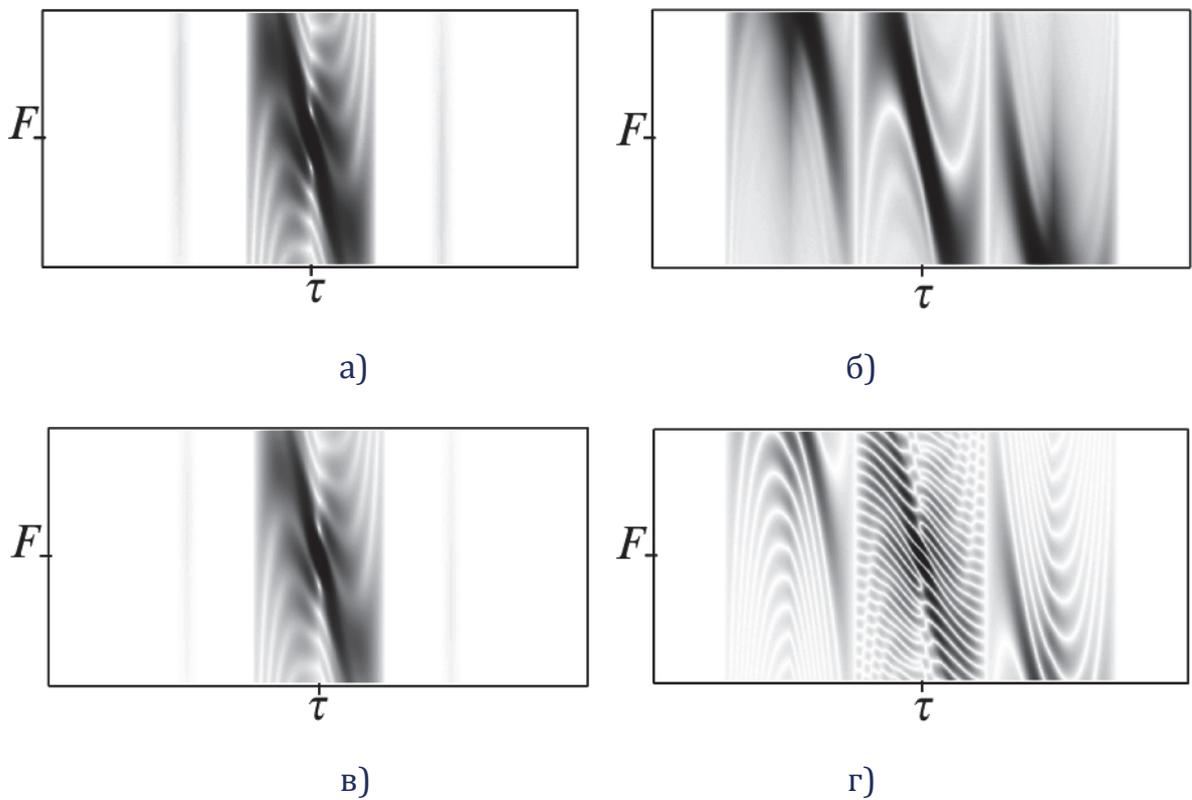


Рис. 4.16. Срезы ФН $\chi_k(\tau, F, a)$ плоскостью:
а) $a = -0.5$; б) $a = -0.25$; в) $a = 0.5$; г) $\theta_1(t) \equiv 1$.

Пример 4.7. Импульсы треугольной и прямоугольной форм с нелинейной частотной модуляцией. Анализируемый сигнал представляет собой последовательность видеоимпульсов треугольной и прямоугольной форм (см. рис. 4.17, сплошная линия) с нелинейной частотной модуляцией (см. рис. 4.18б). В качестве ВФ выбрана $\theta(t) = \text{fup}_3(3.5t)$ (см. рис. 4.17, пунктирная линия).

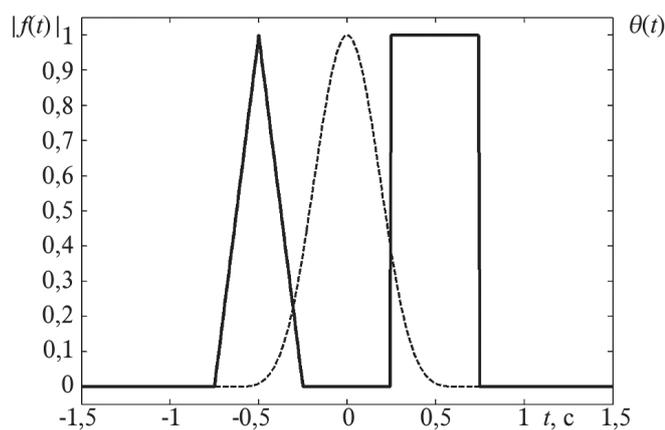


Рис. 4.17. Графики функций $|f(t)|$ и $\theta(t) = \text{sup}_3(3.5t)$.

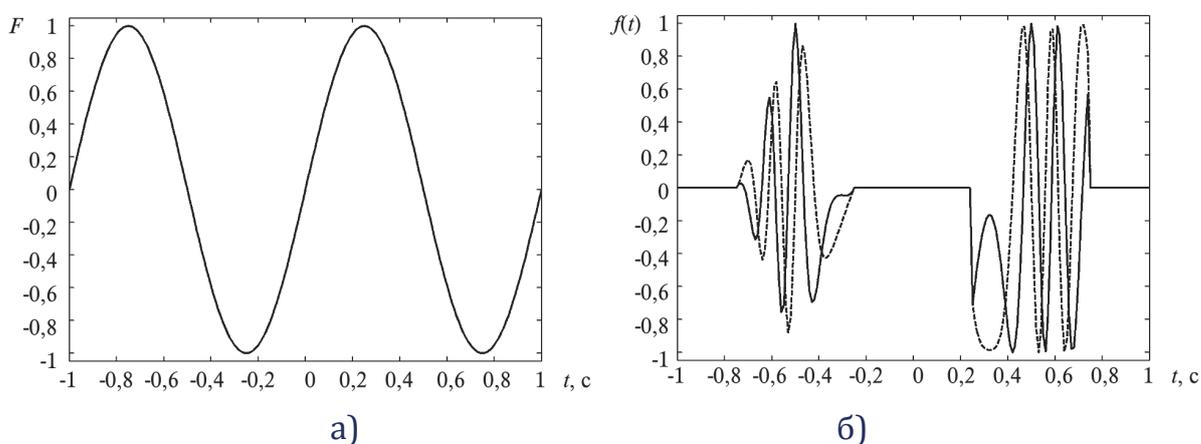


Рис. 4.18. Графики частотной модуляции (а) и частотно-модулированного сигнала (б).

Графики временной зависимости закона частотной модуляции, а также действительная (сплошная линия) и мнимая (пунктирная линия) части сигнала представлены на рис. 4.18. На рис. 4.19 а–г приведены сечения ФНК для $a = -0.5, -0.25, 0.5$.

Предложен и обоснован на основе АФ новый подход, позволяющий варьировать физические параметры цифровой обработки сигналов, обеспечивая наилучшее время-частотное разрешение цели. Это позволяет, определяя ФНК, получать трехмерное изображение, сечения которого плоскостями ($a = \text{const}$) представляют собой пространственно-временные характеристики конкретных областей исследуемых сигналов. Следовательно, благодаря ВФ наблюдается подавление «интерференционного эффекта», а также появляются возможности «фокусировки» на отдельные фрагменты сложных сигналов. В предельном переходе при $\theta(t) \equiv 1$, получаем классическую ФН.

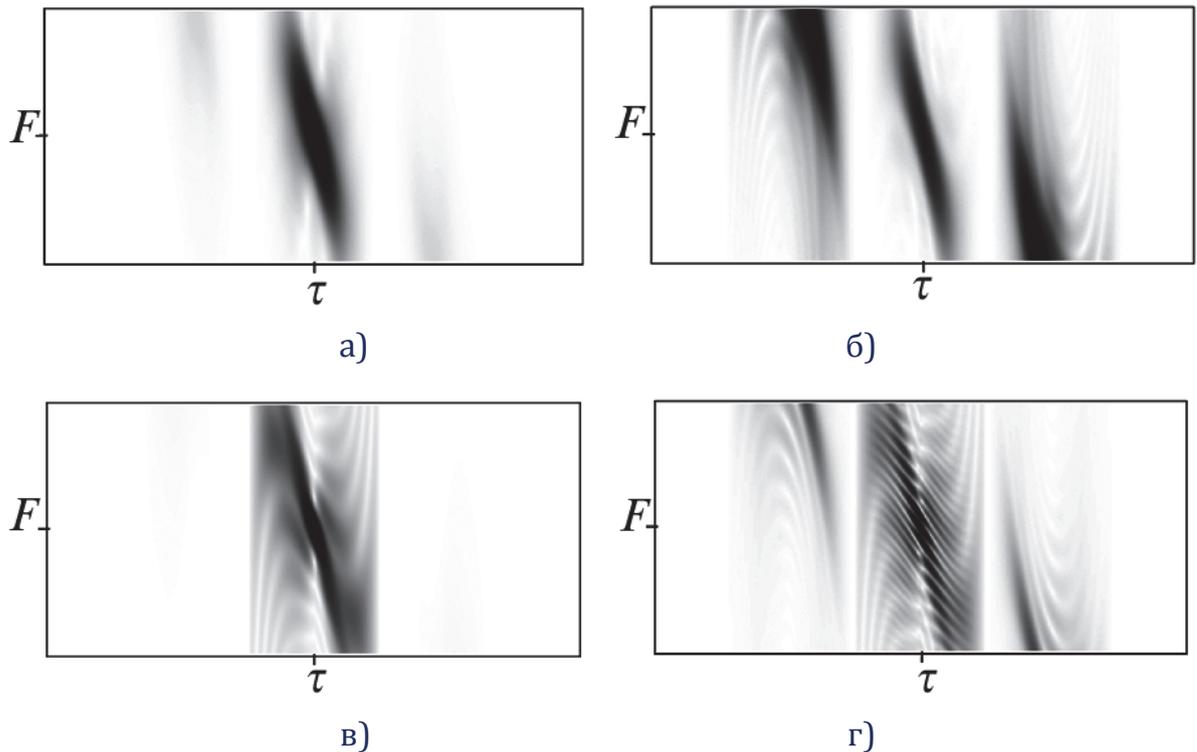


Рис. 4.19. Срезы ФН $\chi_k(\tau, F, a)$ плоскостями:
а) $a = -0.5$; б) $a = -0,25$; в) $a = 0.5$; г) $\theta_1(t) \equiv 1$.

4.5. Атомарные и WA-системы функций в корреляционной обработке радиолокационных сигналов

Известно [1,2], что в радиолокационных системах и устройствах для оптимальной обработки сигналов используются додетекторная и последетекторная фильтрация. Додетекторная фильтрация использует когерентную пару сигналов: опорного и входного. Такое устройство когерентной фильтрации (КФ) выполняет следующую операцию

$$|Y(x, p)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} S_x(t) S_0^*(t-x) \exp(-jpt) dt \right|, \quad (4.28)$$

где $S_x(t)$ и $S_0(t)$ — комплексные огибающие входного колебания и опорного сигнала соответственно, x — время запаздывания сигнала относительно момента зондирования, p — доплеровский сдвиг частоты сигнала относительно нулевой доплеровской частоты. Если у принятого и опорного сигналов частоты совпадают, то

$$|Y(\tau)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} S_x(t) S_0^*(t-\tau) dt \right|. \quad (4.29)$$

Согласно [1] использование сложных зондирующих сигналов в радиолокационных устройствах обусловлено большей помехозащищенностью с учетом их широкополосности и существенным уменьшением энергопотребления устройств по сравнению с использованием видеоимпульсов с частотной модуляцией. Однако при КФ возникают интерференционные эффекты и дополнительные осцилляции результатов обработки. С ними можно бороться путем введения в корреляционный интеграл весовой функции (ВФ) $w(t)$. Для этого используется выражение

$$|Y(x,p)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} w(t) S_x(t) S_0^*(t-x) \exp(-jpt) dt \right|, \quad (4.30)$$

где ВФ $w(t)$ отвечает за пространственную фильтрацию и время-частотное разрешение преобразования. Будем применять, построенные на основе АФ [2-8] в сочетании с [9] вероятностными распределениями, следующие классы весовых функций:

Кравченко-Коши

$$w_1(t) = \frac{g}{c\pi(g^2 + t^2)} h_a\left(\frac{t}{b}\right), \quad (4.31)$$

Кравченко-Лапласа

$$w_2(t) = \frac{2}{2} \lambda \exp(-\lambda|t|) h_a\left(\frac{t}{b}\right), \quad (4.32)$$

модифицированного логистического распределения

$$w_3(t) = \frac{1}{4\lambda \operatorname{ch}\left[\left(\frac{t}{2\lambda}\right)^2\right]} h_a\left(\frac{t}{b}\right), \quad (4.33)$$

Кравченко-Чемпернауна

$$w_4(t) = \frac{\alpha}{\pi \operatorname{ch}(\alpha t)} h_a\left(\frac{t}{b}\right). \quad (4.34)$$

В (4.31)–(4.34) g , b , λ , α — параметры масштаба.

Поведение этих функций, а также их функция неопределенности (ФН)

$$\left(\chi(x,p) \equiv Y(x,p) \Big|_{S_1(t)=S_0(t)} \right)$$

и её линии уровней представлены на рис. 4.20-4.23.

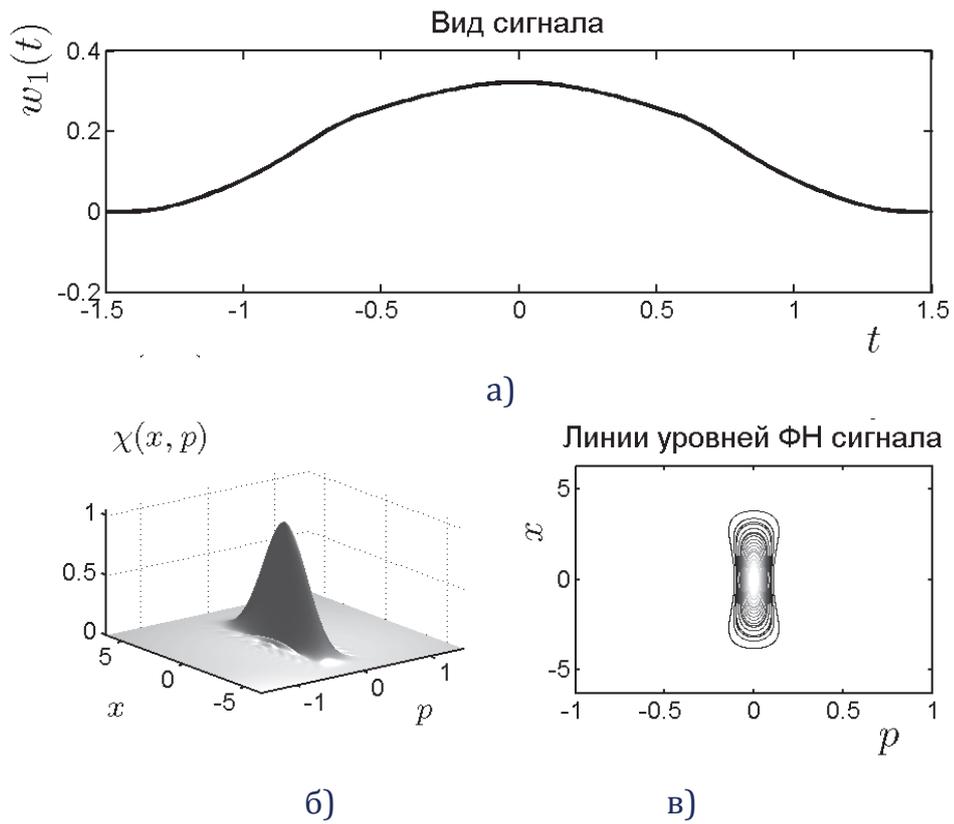


Рис. 4.20. Поведение $w_1(t)$ (а), функции неопределенности (б) и её линий уровней (в) ($a = 3, b = 3, g = 1$).

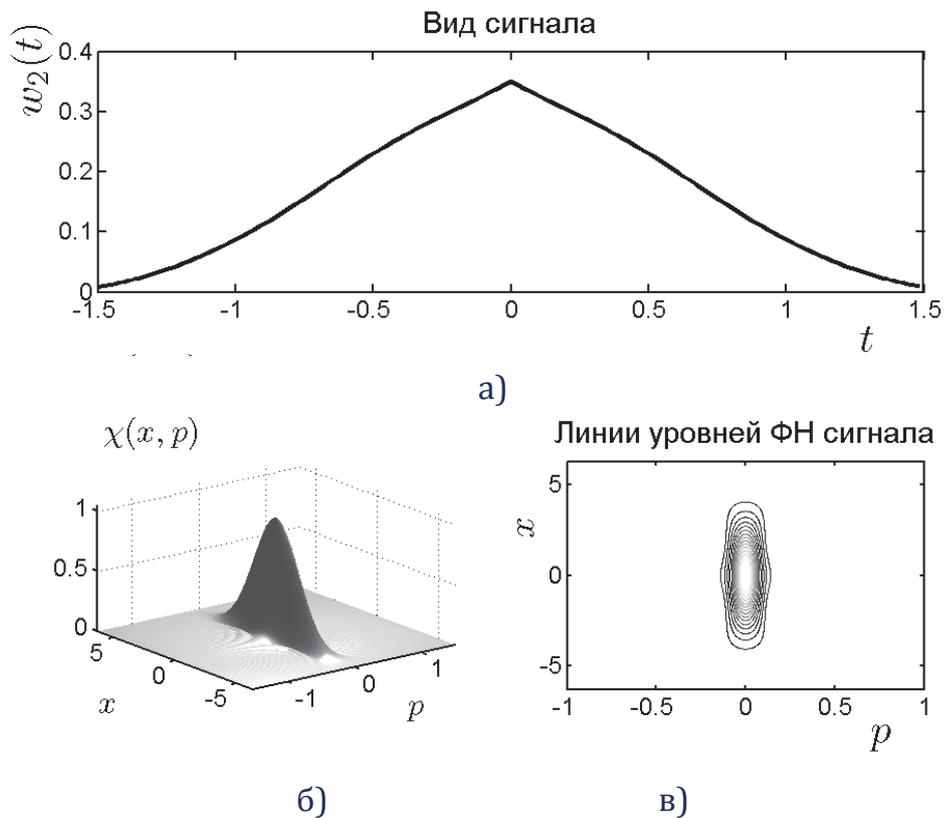


Рис. 4.21. Поведение $w_2(t)$ (а), функции неопределенности (б) и её линий уровней (в) ($a = 2, b = 2, \lambda = 0.7$).

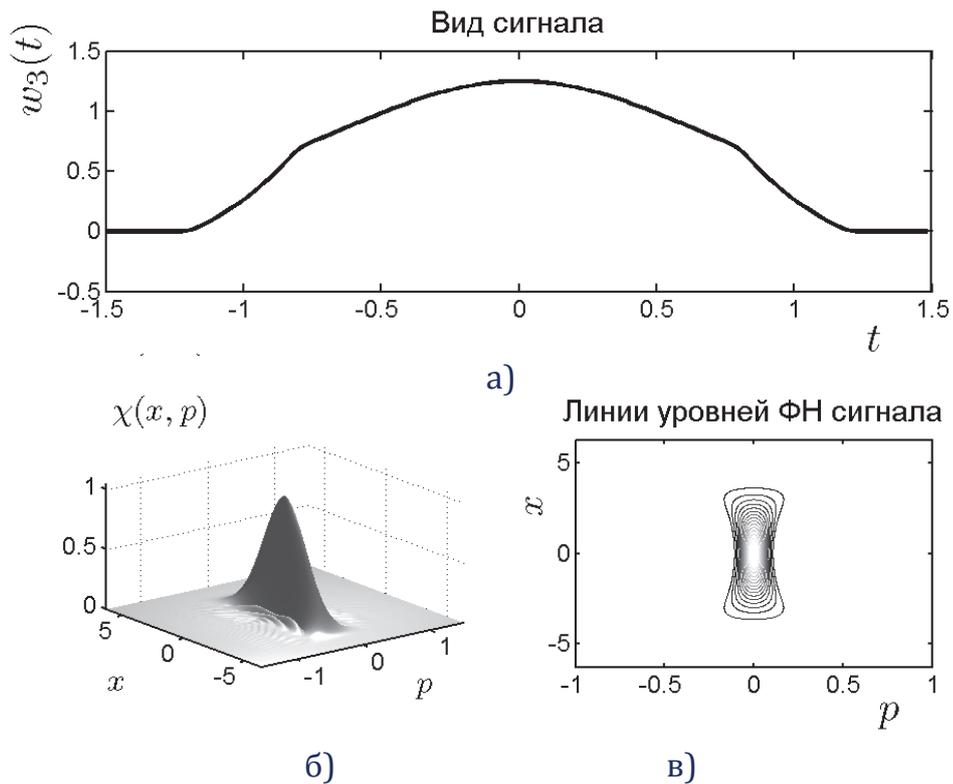


Рис. 4.22. Поведение $w_3(t)$ (а), функции неопределенности (б) и её линий уровней (в) ($a = 5$, $b = 5$, $\lambda = 0.5$).

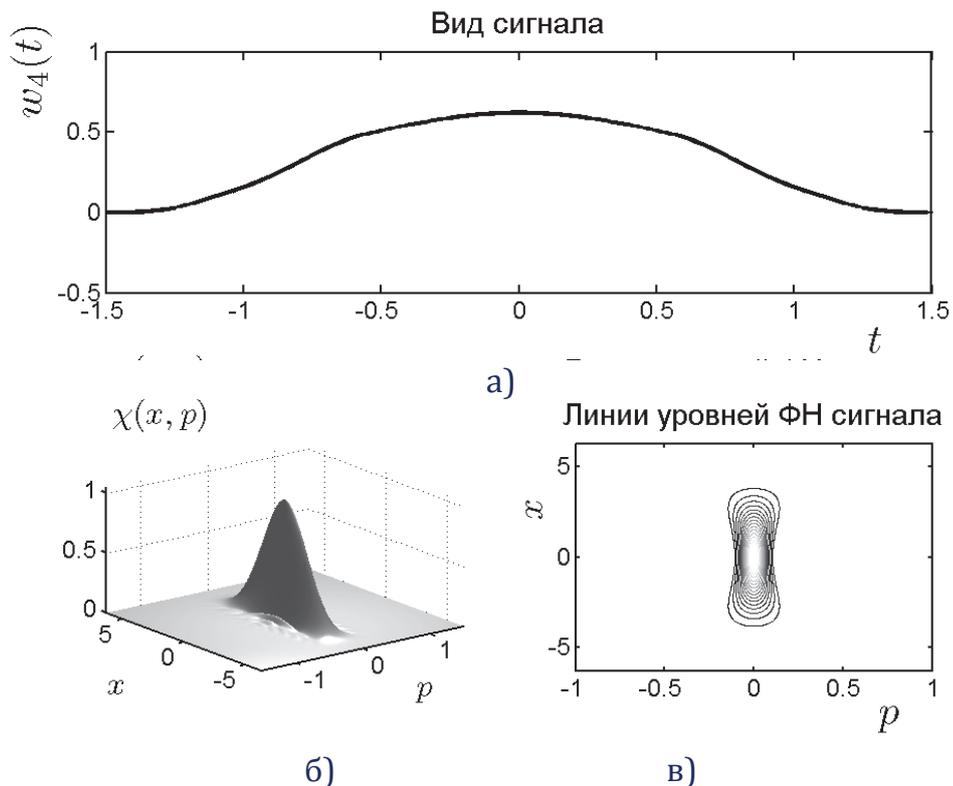


Рис. 4.23. Поведение $w_4(t)$ (а), функции неопределенности (б) и её линий уровней (в) ($a = 3$, $b = 3$, $\alpha = 1.3$).

Структурная схема модифицированного алгоритма дискретной когерентной фильтрации радиолокационного сигнала приведена на рис. 4.24.

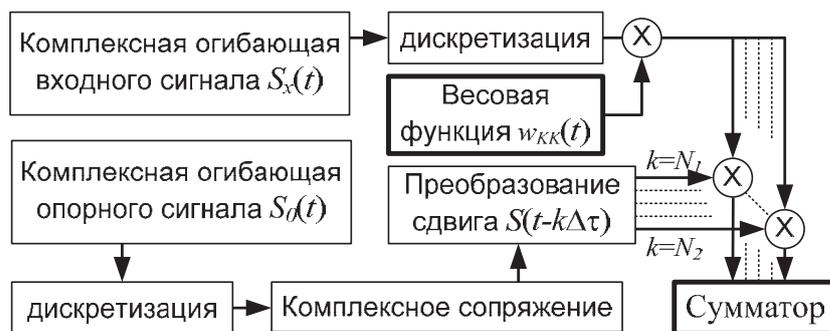


Рис. 4.24. Структурная схема модифицированного алгоритма дискретной когерентной фильтрации радиолокационного сигнала.

Блок-схема алгоритма определения доплеровской частоты с уточнением приведена на рис. 4.25. Здесь происходит корреляционная обработка входного и опорного сигналов. Далее определяются частотные каналы с максимальным и следующим за ним значением сигнала. Для их определения комплексная огибающая проходит через систему фильтров. На заключительном этапе вычисляется величина доплеровского сдвига (относительно опорного сигнала) и уточнение по формуле

$$p_{ym} = \frac{|Y(p)|_{\max} - |Y(p)|_{\max-1}}{|Y(p)|_{\max} + |Y(p)|_{\max-1}}, \quad (4.35)$$

а уточненное значение доплеровского сдвига так

$$p_{ym} = (p_{\max} - p_{\max0}) + p_{ym}, \quad (4.36)$$

где $p_{\max0}$ — положение максимума автокорреляционной функции опорного сигнала. Применение весовой функции позволяет снизить уровень боковых лепестков, расположенных вблизи главного максимума. Поэтому при наложении нескольких сигналов наблюдается улучшение разрешения их максимумов. При этом ограничением является уширение главного лепестка. Это согласно критерию Релея приводит к увеличению минимального частотного сдвига (доплеровской частоты), который может быть определен.

В качестве тестового сигнала выбран полином Эрмита 6-го порядка. Его график, функция неопределенности, а также её линии уровней представлены на рис. 4.26. На рис. 4.27а представлен результаты когерентной фильтрации без весовой обработки сигнала со сдвигом по фазе. Введение весовой обработки РС с помощью функции Кравченко-Коши изменяет структуру результата корреляционной обработки (см. рис. 4.28б).

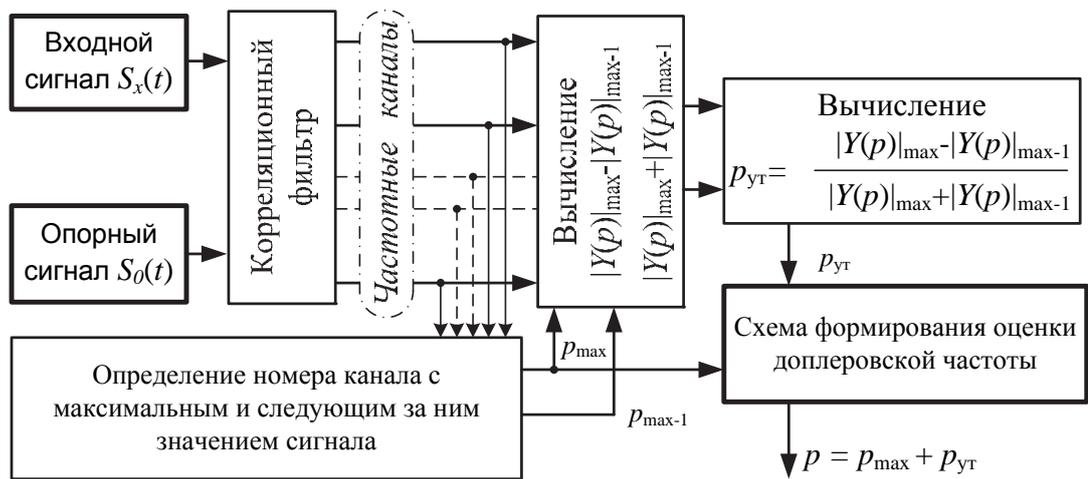


Рис. 4.25. Блок-схема определения доплеровской частоты с оценкой.

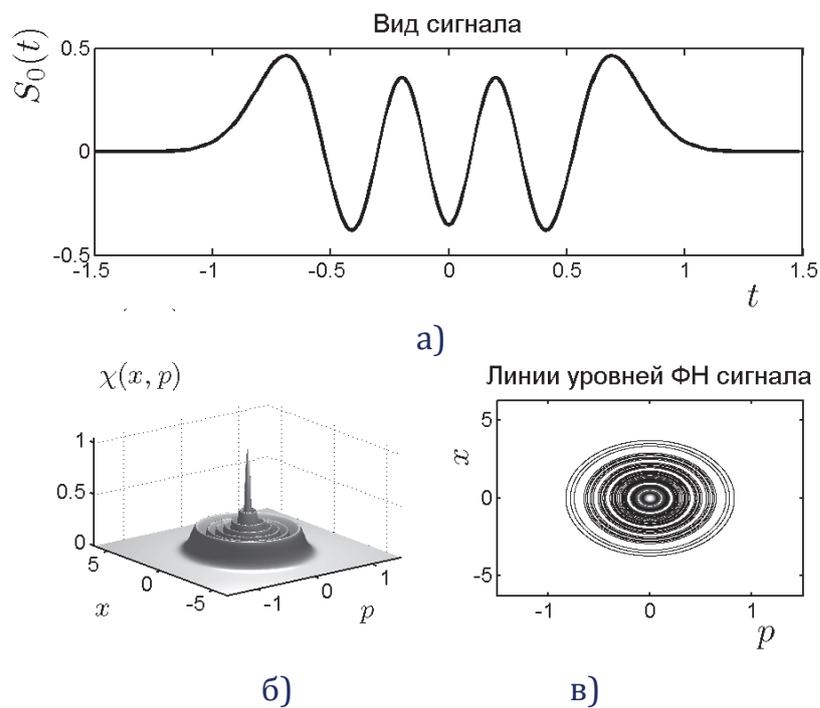


Рис. 4.26. График полинома Эрмита 6-го порядка (а), функция неопределенности (б) и её линии уровней (в).

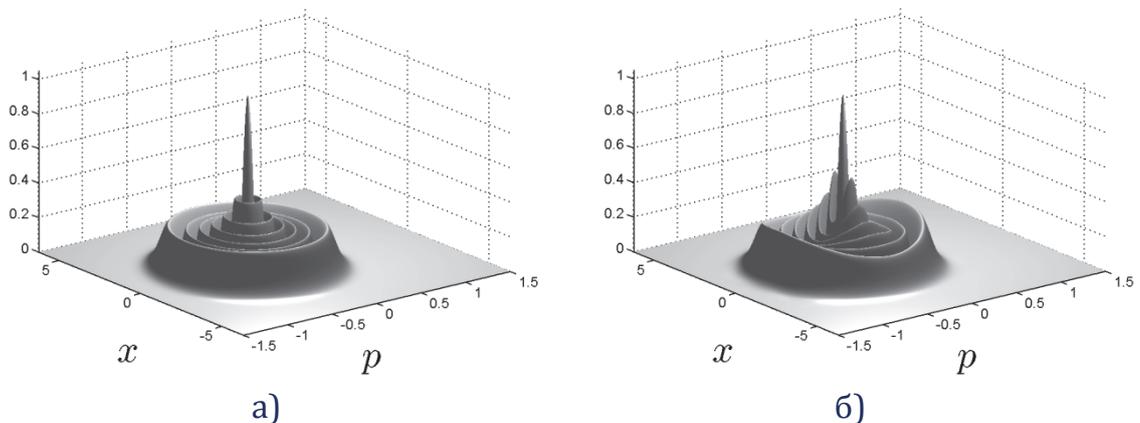


Рис. 4.27. Когерентная фильтрация радиолокационного сигнала со сдвигом фазы без весовой обработки (а) и с весовой обработкой (б).

4.5.1. Фильтрация корреляционной функции с помощью атомарных и WA-систем функций

Когда результаты корреляционной обработки подвержены воздействию помех, стандартная схема разностного дифференцирования может стать причиной существенных ошибок. Для поиска локальных максимумов целесообразно предварительно провести фильтрацию сигналов фильтрами [4-6] и WA-системами функций [6-8]. Определение максимума осуществляется по алгоритму, блок-схема которого представлена на рис. 4.28.

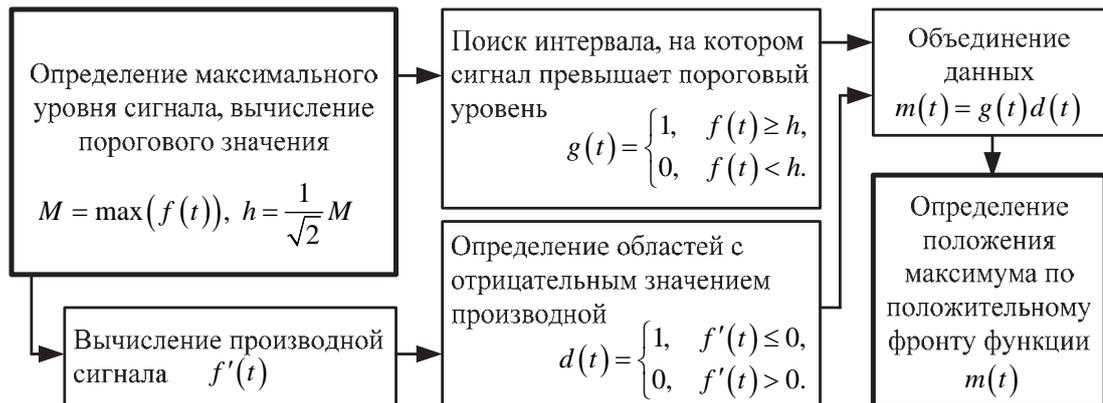


Рис. 4.28. Блок-схема поиска максимума функции.

Зашумленный срез ($x=0$) корреляционной функции нормальным шумом с дисперсией $D=0.25$ приведен на рис. 4.29а. На рис. 4.29б,в,г приведены примеры фильтрационной обработки системой $\{\tilde{h}_a\}$ и вейвлет-модулированной ВФ $\psi_1(t)$ зашумленного среза ($x=0$) КФ.

Как следует из рис. 4.29, фильтрация, основанная на применении АФ и WA-систем функций, является эффективной при обработке зашумленных сигналов. Особенность применения вейвлет-модулированных ВФ состоит в том, что отфильтровывается постоянная составляющая сигнала. Этот физический эффект может оказаться полезным при анализе РС.

Функционал качества когерентной обработки радиолокационных сигналов. Для оценки качества обработки РС используем следующие физические параметры: относительное уширение главного лепестка по уровню -3 дБ ($\Delta_3, \%$), максимальный уровень боковых лепестков (УБЛ) (γ_1), положение бокового лепестка с максимальным уровнем (γ_2), относительное уменьшение уровня первого бокового лепестка (γ_3). Доплеровская частота определяется предложенным алгоритмом (см. рис. 4.25).

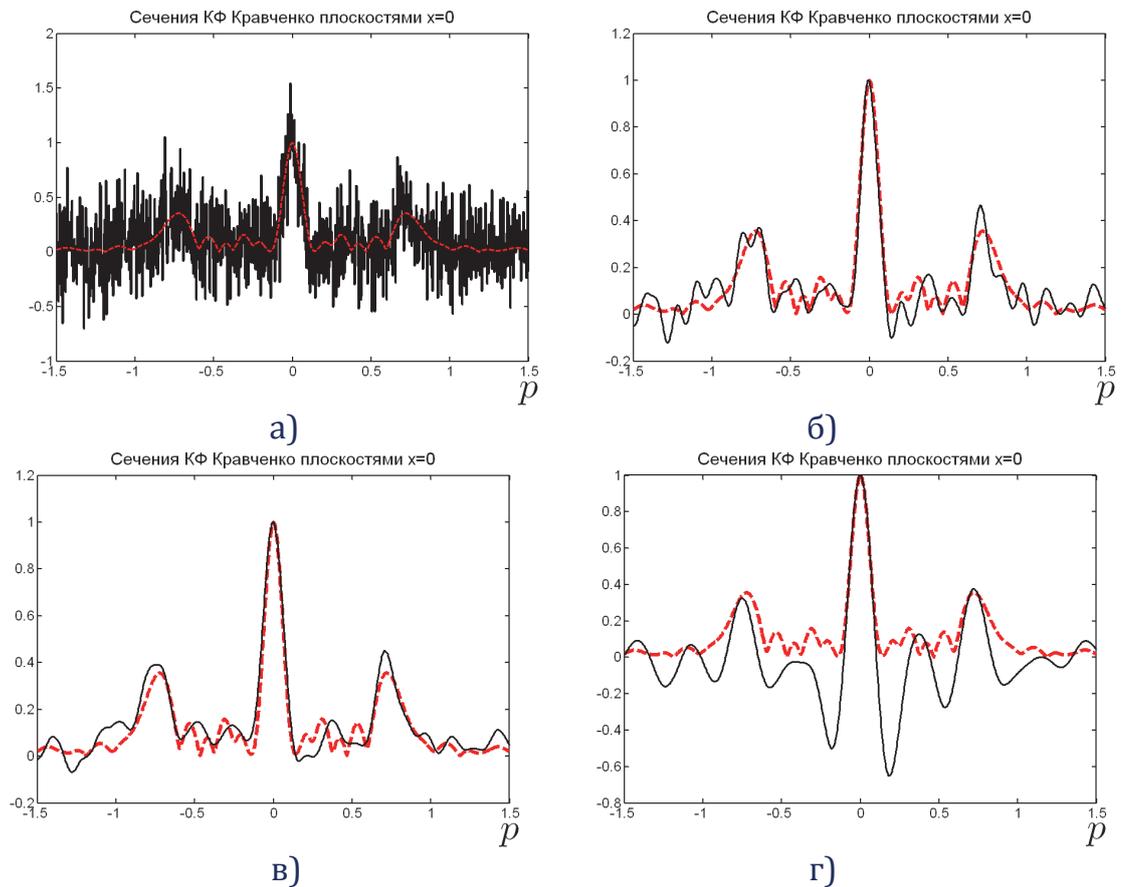


Рис. 4.29. Зашумленный срез ($x = 0$) КФ (а), фильтрационная обработка системой $\{\tilde{h}_4\}$ (б), весовой функцией $w_1(t)$ ($a = 3, b = 1, g = 0.5$) (в) и вейвлет-модулированной ВФ $\psi_1(t)$ ($\eta \approx 3.8878, a = 3, b = 3, g = 1$) (г) (сплошная линия – результат фильтрации, пунктирная – эталонный сигнал).

Функционал качества запишем в виде

$$J = \frac{1}{4} \left(\sqrt{2\Delta_3} + (12 + \gamma_1) - 100(\gamma_2 - 0.69) - 3\gamma_3 \right). \quad (4.37)$$

Коэффициенты подбираются, исходя из соображений физической интерпретации оценки качества корреляционной обработки. Проведем анализ следующих слагаемых выражения (4.37): $\sqrt{2\Delta_3}$ — учитывает нелинейный вклад уширения главного лепестка, $(12 + \gamma_1)$ — эталонное значение максимального УБЛ выбрано эмпирически и равняется 12-ти, в выражении $(\gamma_2 - 0.69)$ значение 0.69 — положение бокового лепестка с максимальным уровнем среза КФ без весовой обработки. Значения функционала качества для конкретных весовых окон приведены в табл. 4.1-4.7.

Численный эксперимент. Рассмотрим следующие примеры для исследования качества когерентной обработки РС.

Пример 4.8. В качестве опорного сигнала выбран полином Эрмита 6-го порядка (см. рис. 16 а). Входной сигнал получается

$$S_1(t) = \frac{1}{2} S_0(t) \exp(-i0.3\pi t).$$

Произведена коррекция времени запаздывания для анализа частотных изменений. Действительная и мнимая части входного сигнала показаны на рис. 4.30 б. Срез корреляционной функции без весовой обработки представлен на рис. 4.32.

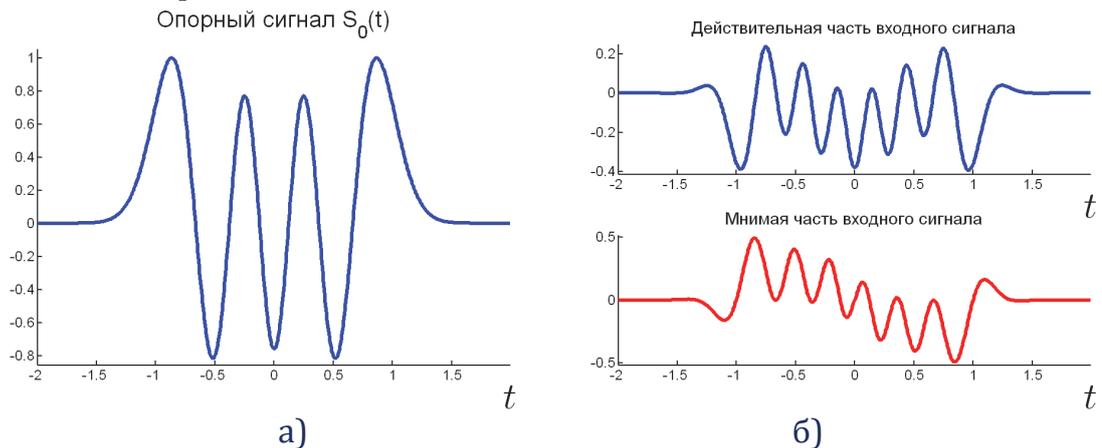


Рис. 4.30. Опорный сигнал (а), его действительная и мнимая части (б).

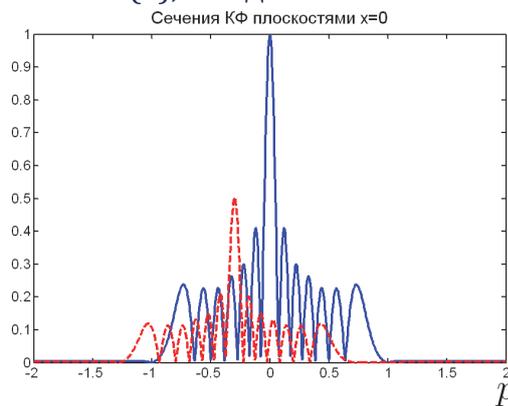


Рис. 4.31. Срез корреляционной функции без весовой обработки.

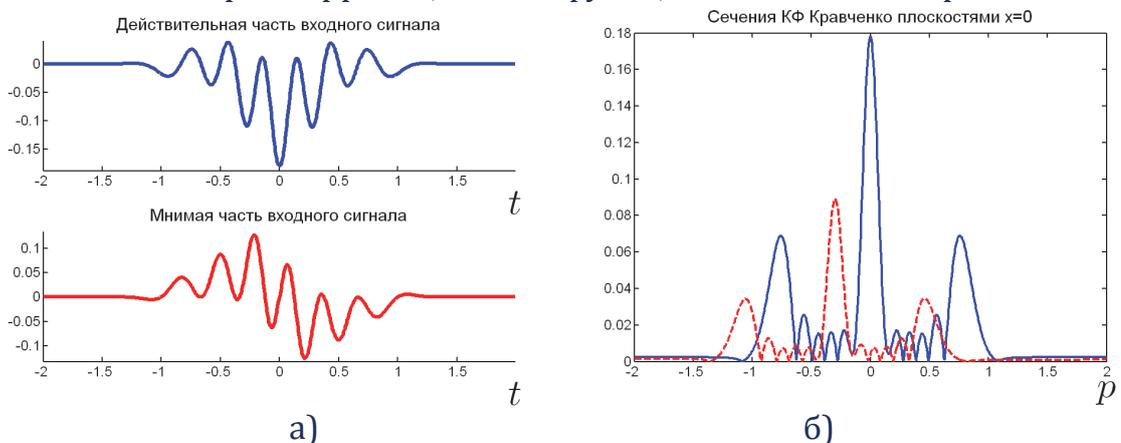


Рис. 4.32. Действительная и мнимая части входного сигнала (а) и срезы корреляционной функции плоскостью $x=0$ (б) с весовой обработкой для $w_1(t)$ ($a=2, b=2, g=0.5$).

Входные сигналы с весовой обработкой, а также результаты их когерентной фильтрации (см. рис. 4.32-4.35). Физические характеристики и значение функционала качества представлены в табл. 4.1-4.7.

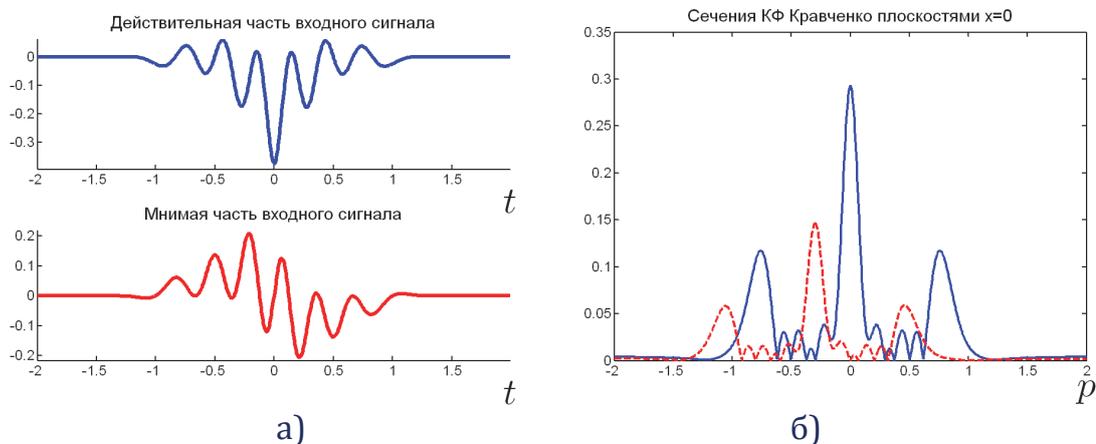


Рис. 4.33. Действительная и мнимая части входного сигнала (а) и срезы корреляционной функции плоскостью $x=0$ (б) с весовой обработкой для $w_2(t)$ ($a=2, b=2, \lambda=2$).

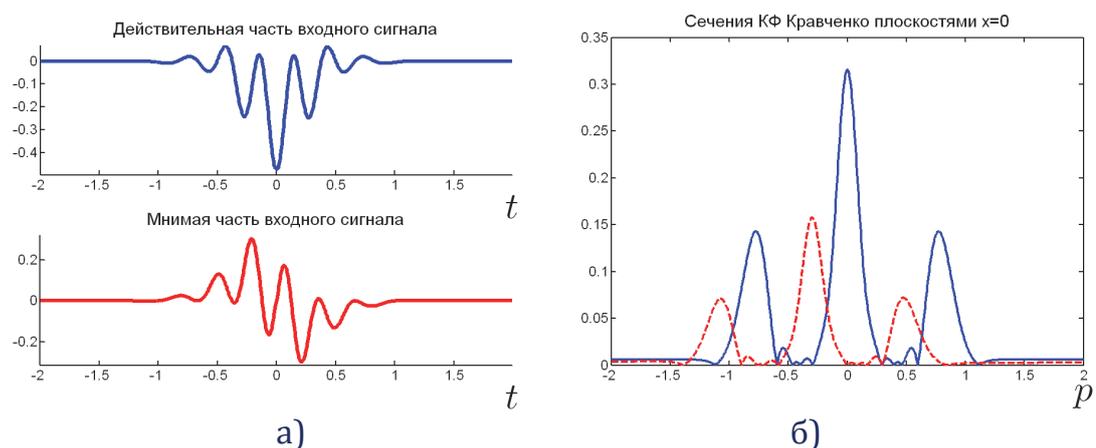


Рис. 4.34. Действительная и мнимая части входного сигнала (а) и срезы корреляционной функции плоскостью $x=0$ (б) с весовой обработкой для $w_3(t)$ ($a=2, b=2, \lambda=0.2$).

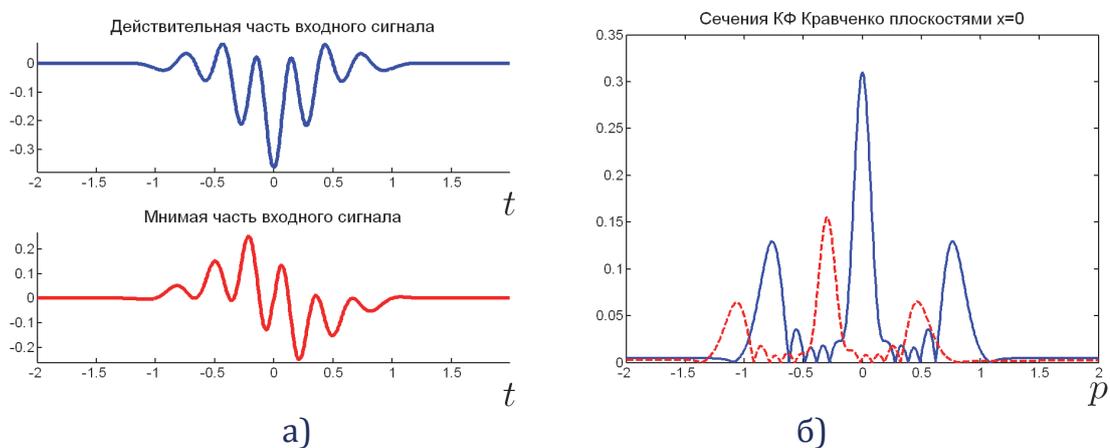


Рис. 4.35. Действительная и мнимая части входного сигнала (а) и срезы корреляционной функции плоскостью $x=0$ (б) с весовой обработкой для $w_4(t)$ ($a=2, b=2, \alpha=3$).

Таблица 4.1. Физические параметры когерентной обработки радиолокационных сигналов для весовой функции $w_1(t)$ ($b = a$)

a	g	$\Delta_3, \%$	γ_1	γ_2	γ_3	J
2	0.6	27.650	-9.310	0.702	1.260	1.287
2	0.7	22.923	-9.609	0.702	0.960	1.271
2	0.8	19.628	-9.852	0.699	0.778	1.295
2	0.9	17.192	-10.054	0.699	0.655	1.236
2	1	15.330	-10.220	0.696	0.568	1.253
3	0.6	23.209	-9.609	0.699	0.982	1.340
3	0.7	18.911	-9.921	0.696	0.735	1.356
3	0.8	15.903	-10.174	0.696	0.581	1.281
3	0.9	13.610	-10.383	0.693	0.475	1.277
3	1	11.891	-10.554	0.693	0.399	1.207
4	0.6	20.917	-9.915	0.699	0.900	1.239
4	0.7	16.762	-10.251	0.696	0.665	1.236
4	0.8	13.754	-10.527	0.693	0.516	1.218
4	0.9	11.605	-10.753	0.693	0.414	1.131
5	0.6	20.201	-10.007	0.699	0.882	1.200
5	0.7	16.046	-10.362	0.699	0.651	1.113
5	0.8	13.037	-10.650	0.696	0.502	1.088
5	0.9	10.888	-10.890	0.693	0.401	1.068

Таблица 4.2. Физические параметры когерентной обработки радиолокационных сигналов для весовой функции $w_2(t)$ ($b = a$)

a	g	$\Delta_3, \%$	γ_1	γ_2	γ_3	J
2	0.4	11.175	-10.685	0.693	0.414	1.125
2	0.5	12.464	-10.540	0.696	0.480	1.103
2	0.6	14.040	-10.395	0.696	0.551	1.163
2	0.7	15.473	-10.254	0.696	0.628	1.206
2	0.8	17.049	-10.116	0.696	0.711	1.248
3	0.6	10.458	-10.743	0.693	0.381	1.097
3	0.7	11.891	-10.597	0.693	0.445	1.161
3	0.8	13.324	-10.453	0.693	0.515	1.216
4	0.8	11.318	-10.833	0.690	0.449	1.144
5	0.8	10.458	-10.974	0.693	0.433	1.000

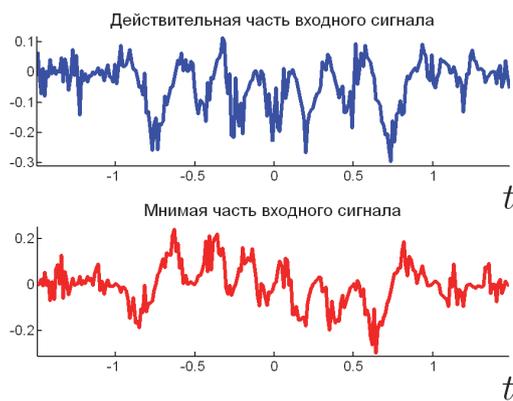
Таблица 4.3. Физические параметры когерентной обработки радиолокационных сигналов для весовой функции $w_3(t)$ ($b = a$)

a	g	$\Delta_3, \%$	γ_1	γ_2	γ_3	J
2	0.4	23.496	-9.516	0.702	0.928	1.339
2	0.5	17.192	-10.036	0.696	0.629	1.336
2	0.6	13.754	-10.365	0.696	0.484	1.207
2	0.7	11.605	-10.586	0.693	0.400	1.183
3	0.4	19.484	-9.818	0.696	0.715	1.420
3	0.5	13.467	-10.359	0.693	0.455	1.292
4	0.4	17.335	-10.138	0.696	0.647	1.302
4	0.5	11.605	-10.727	0.693	0.395	1.152
5	0.4	16.619	-10.246	0.699	0.634	1.179
5	0.5	10.745	-10.863	0.693	0.382	1.081

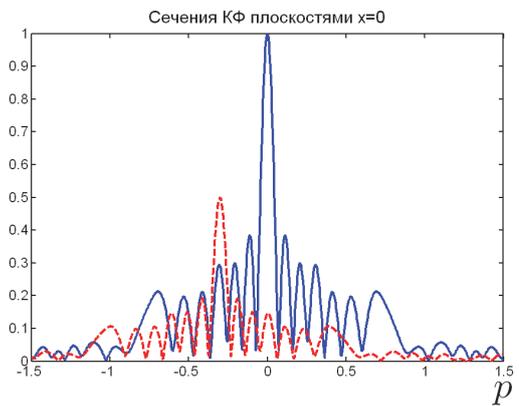
Таблица 4.4. Физические параметры когерентной обработки радиолокационных сигналов для весовой функции $w_4(t)$ ($b = a$)

a	g	$\Delta_3, \%$	γ_1	γ_2	γ_3	J
2	1	11.318	-10.630	0.693	0.388	1.166
2	1.1	12.321	-10.514	0.696	0.431	1.139
2	1.2	13.467	-10.393	0.696	0.479	1.190
2	1.3	14.756	-10.270	0.696	0.533	1.241
2	1.4	16.046	-10.146	0.696	0.589	1.288
3	1.3	11.318	-10.605	0.693	0.368	1.188
3	1.4	12.464	-10.476	0.693	0.418	1.241

Пример 4.9. Рассмотрим применение предложенной корреляционной функции при наличии шума, распределенного по нормальному закону с дисперсией $D = 0.2$. В качестве опорного сигнала выбран полином Эрмита 6-го порядка (см. рис. 4.26 а). Графики действительной и мнимой частей сигнала искаженного помехой с нормальным законом распределения приведены на рис. 4.36 а. Результат когерентной обработки входного сигнала (см. рис. 4.36б). Входные зашумленные сигналы с весовой обработкой и результаты их когерентной фильтрации показаны на рис. 4.37-4.40.

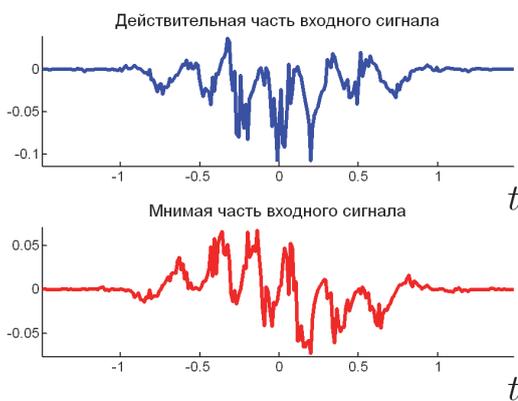


а)

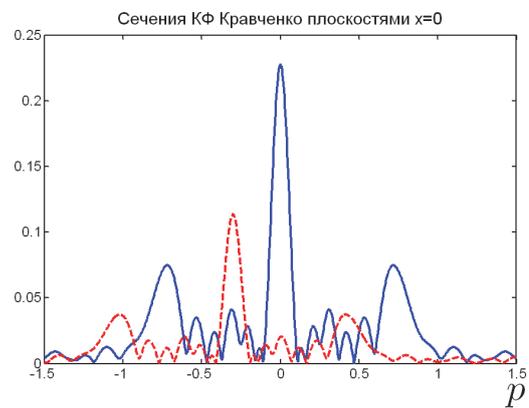


б)

Рис. 4.36. Действительная (сплошная линия) и мнимая (пунктирная линия) части зашумленного входного сигнала (а), срезы корреляционной функции (б).

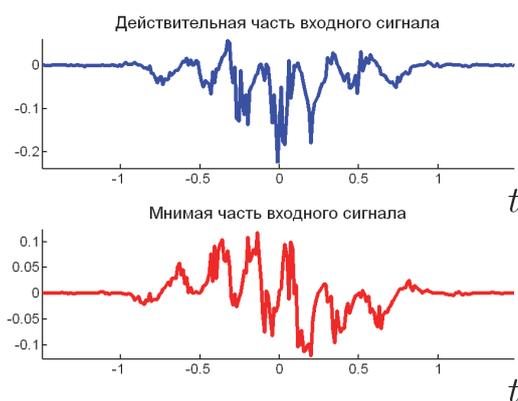


а)

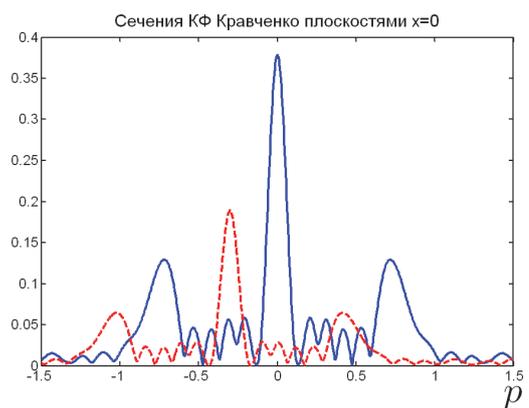


б)

Рис. 4.37. Действительная и мнимая части входного зашумленного сигнала (а) и срезы корреляционной функции плоскостью $x = 0$ (б) с весовой обработкой для $w_1(t)$ ($a = 2, b = 2, g = 0.5$).



а)



б)

Рис. 4.38. Действительная и мнимая части входного зашумленного сигнала (а) и срезы корреляционной функции плоскостью $x = 0$ (б) с весовой обработкой для $w_2(t)$ ($a = 2, b = 2, \lambda = 2$).

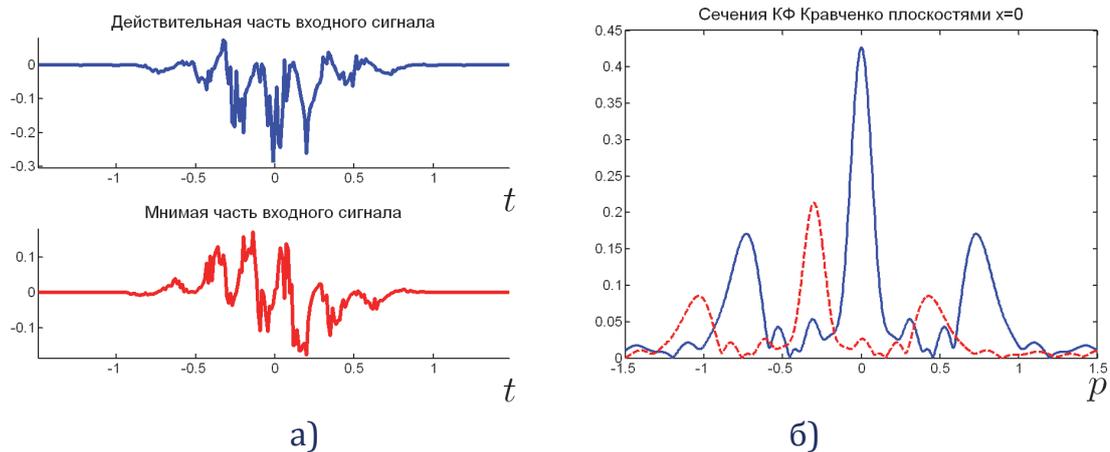


Рис. 4.39. Действительная и мнимая части входного зашумленного сигнала (а) и срезы корреляционной функции плоскостью $x=0$ (б) с весовой обработкой для $w_3(t)$ ($a=2, b=2, \lambda=0.2$).

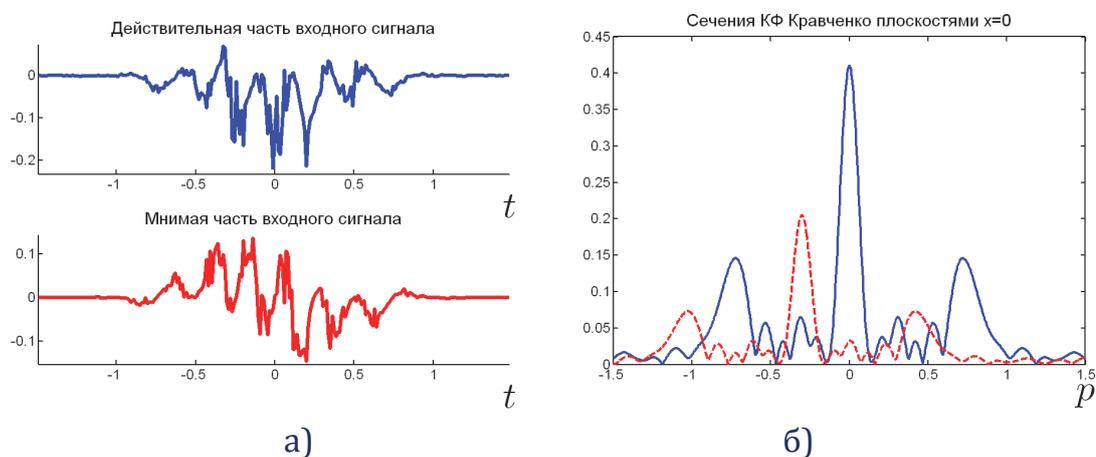


Рис. 4.40. Действительная и мнимая части входного зашумленного сигнала (а) и срезы корреляционной функции плоскостью $x=0$ (б) с весовой обработкой для $w_4(t)$ ($a=2, b=2, \alpha=3$).

Как следует из графиков, введение весовой функции существенно улучшает результаты корреляционной обработки зашумленных РС.

Обсуждение результатов. Предложен вид корреляционного фильтра с использованием новых комбинации ВФ на основе рассмотренных вероятностных распределений. Разработан алгоритм поиска доплеровского сдвига в условиях зашумления каналов связи с его уточнением на основе вейвлетов. Применение весовых функций и нового класса WA-систем функций показало, что предложенный и обоснованный алгоритм обладает достаточной гибкостью, точностью и помехозащищенностью. Численный эксперимент и физический анализ результатов позволяют сделать вывод о практической целесообразности его использования в задачах корреляционного приема информации.

ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ 4

В четвертой главе диссертационной работы рассмотрены методы цифровой обработки сигналов в радарх с синтезированной апертурой при боковом обзоре на основе предложенных весовых функций. Рассмотрено применение функций Кравченко-Кайзера к задачам весового усреднения разностной частоты. Предложено и обосновано обобщение функции неопределенности по времени и частоте на основе семейства атомарных функций применительно к цифровой обработке сигналов в антенных системах. Дан анализ ее основных физических свойств. Численный эксперимент по применению новых алгоритмов пространственно-временной цифровой обработки сигналов показал эффективность функции неопределенности Кравченко. Рассмотрены комбинированные методы корреляционной обработки радиолокационных сигналов, основанные на теории атомарных и WA-системах функций. Предложены алгоритмы их оптимальной обработки. Построен функционал качества, позволяющий оценить эффективность обработки РС для конкретных физических моделей. Рассмотрен корреляционный фильтр с использованием весовых функций на основе рассмотренных вероятностных распределений. Разработан алгоритм поиска доплеровского сдвига в условиях зашумления каналов связи с его уточнением на основе вейвлетов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе получены следующие результаты:

- новые классы весовых функций для цифровой обработки радиофизических сигналов и оценки спектральной плотности временных рядов;
- синтезированы цифровые фильтры с конечной импульсной характеристикой на основе атомарных функций, улучшающие частотно-временные свойства сигналов;
- предложены и обоснованы алгоритмы построения семейств ортогональных и аналитических вейвлет-систем на основе атомарных функций для применения к задачам анализа сигналов различной физической природы;
- предложены алгоритмы построения и реализованы двумерные весовые функции и аналитические WA-системы функций со сложной геометрией опорной области для пространственно-временной обработки сигналов;
- предложено и обосновано обобщение функции неопределенности по времени и частоте на основе семейства атомарных функций применительно к цифровой обработке зондирующих сигналов в антенных системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Котельников В.А. Собрание трудов. Т.1. Радиофизика. Информатика, телекоммуникации. М.: Физматлит, 2008.
2. Рыжак И.С. Избранные вопросы теории цепей и обработки сигналов. М.: БЛОК-Информ-Экспресс, 2003.
3. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов. М.: Мир, 1988.
4. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов. Практический подход / 2-е издание. Вильямс, 2008.
5. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971.
6. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005.
7. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005. 612с.
8. Цифровая обработка сигналов и изображений в радиофизических приложениях. Под ред. В.Ф. Кравченко. М.: Физматлит. 2007.
9. Kravchenko V.F., Perez-Meana H.M., and Ponomaryov V.I. Adaptive Digital Processing of Multidimensional Signals with Applications. Moscow, Fizmatlit. 2009.
10. Радиолокационные станции с цифровым синтезированием апертуры антенн / Под ред. В.Т. Горяинова. М.: Радио и связь, 1988
11. Слока В.К. Вопросы обработки радиолокационных сигналов. М.: Сов. радио, 1970.
12. Кук Ч., Бернфельд М. Радиолокационные сигналы. Пер. с английского под ред. В.С. Кельзона. М. Изд-во "Советское радио", 1971.
13. Бакулев П.А. Радиолокационные системы. М.: Радиотехника, 2004.
14. Skolnik M.I. Introduction to Radar Systems / 3rd ed. McGraw-Hill International Edition, 2001.
15. Ширман Я.Д. Разрешение и сжатие сигналов. М.: Сов. радио, 1974.
16. Радиоэлектронные системы: Основы построения и теория. Справочник / Под ред. Я.Д. Ширмана. М.: Радиотехника, 2007.
17. Волосюк В.К., Кравченко В.Ф. Статистическая теория радиотехнических систем дистанционного зондирования и радиолокации / Под ред. В.Ф. Кравченко. М.: Физматлит. 2008.
18. Кравченко В.Ф., Лабунько О.С., Лерер А.М., Синявский Г.П. Вычислительные методы в современной радиофизике / Под ред. В.Ф. Кравченко. М.: Физматлит. 2009.
19. Зелкин Е.Г., Кравченко В.Ф., Гусевский В.И. Конструктивные методы аппроксимации в теории антенн. М.: Сайнс-Пресс. 2005.
20. Кравченко В.Ф. Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. М.: Радиотехника. 2003.

21. Кравченко В.Ф., Басараб М.А. Булева алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики / под ред. В.Ф. Кравченко. М.: Физматлит. 2004.
22. Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. М.: Физматлит. 2006.
23. Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л., Рвачев В.А. Математические методы обработки сигналов на основе атомарных функций // Радиотехника и электроника. 1995. Т.40. № 9. С. 1385-1406.
24. Кравченко В.Ф., Кравченко О.В., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. Атомарные функции в современных проблемах радиофизики. Обзор // Физические основы приборостроения. Специальный выпуск. 2011. С. 3-48.
25. Кравченко В. Ф., Кравченко О. В., Пустовойт В. И., Чуриков Д. В. Применение семейств атомарных, WA-систем и R-функций в современных проблемах радиофизики. Часть I. Радиотехника и электроника, 2014. Т. 59. № 10. С. 949–978.
26. Кравченко В. Ф., Кравченко О. В., Пустовойт В. И., Чуриков Д. В., Юрин А.В. Применение семейств атомарных, WA-систем и R-функций в современных проблемах радиофизики. Часть II. Радиотехника и электроника. 2015. Т. 60. № 2. С. 109-148.
27. Кравченко В. Ф., Кравченко О. В., Коновалов Я. Ю., Пустовойт В.И., Чуриков Д. В. Применение семейств атомарных, WA-систем и R-функций в современных проблемах радиофизики. Часть III. Радиотехника и электроника. 2015. Т. 60. № 7. С. 663-694.
28. Кравченко В. Ф., Кравченко О. В., Пустовойт В. И., Чуриков Д. В., Юрин А.В. Применение семейств атомарных, WA-систем и R-функций в современных проблемах радиофизики. Часть IV. Радиотехника и электроника. 2015. Т. 60. № 11. С. 1113-1152.
29. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. Новый класс весовых и WA-систем функций Кравченко-Кайзера // ДАН РАН. 2014. Т. 456. № 3. С. 295-298.
30. Чуриков Д.В. Новые конструкции спектральных функций Кравченко–Чебышева–Лежандра. ЭВиЭС. 2009, т. 14. № 4. С. 44.
31. Кравченко В.Ф., Кравченко О.В., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. Новые методы цифровой обработки сигналов семейством атомарных функций. Пленарный доклад // 9-я Всероссийская конференция с иностранным участием «Радиолокация и радиосвязь». 23-25 ноября 2015.
32. Churikov D.V. Construction of New Kravchenko-Kotel'nikov-Chebyshev-Legendre Spectral Kernels and Their Application in Digital Multidimensional Signals Processing. Proc. Progress in Electromagnetics Research Symposium, August 18-21, 2009, Moscow, RUSSIA, The Electromagnetics Academy. 2009. P. 251-254.

33. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Спектральная оценка двумерных сигналов на основе ядер обобщенного ряда Кравченко-Котельникова // 3-я Международная конференция «Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации», 22-24 сентября 2009, Суздаль, Россия. 2009. С. 214-216.
34. Kravchenko V.F., Pustovoyt V.I., and Churikov D.V. Application of Generalized Kravchenko-Kotel'nikov-Levitan Sampling Theorems for Signal Filtration // Proc. Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, 17-21 September. 2012, Sevastopol, Ukraine. 2012, P. 220-222.
35. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. Цифровая обработка сигналов на основе обобщенных теорем отсчетов Кравченко-Котельникова-Левитана // Радиотехника и электроника. 2012. Т.57. №9. С. 1039-1048.
36. Атаянц Б.А., Давыдочкин В.М., Езерский В.В., Паршин В.С., Смольский С.М. Прецизионные системы ближней частотной радиолокации промышленного применения. М: Радиотехника, 2012.
37. Добровидов А.В., Кошкин Г.М. Непараметрическое оценивание сигналов. М.: Физматлит. 1997.
38. Васильев А.В., Добровидов А.В. Кошкин Г.М. Непараметрическое оценивание функционалов от распределений стационарных последовательностей. М.: Наука. 2004.
39. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Цифровая обработка и спектральное оценивание сверхширокополосных сигналов атомарными функциями и вейвлетами // Успехи современной радиоэлектроники. 2008. № 8. С.39-46.
40. Kravchenko V.F. and Churikov D.V. The Theory of Spectral Estimation of Signals and Generalized Kravchenko-Kotel'nikov-Levitan Theorems // Proc. Progress in Electromagnetics Research Symposium, August 18-21, 2009, Moscow, RUSSIA, The Electromagnetics Academy, 2009. P. 241-244.
41. Кравченко В.Ф., Кравченко О.В., Сафин А.Р. Атомарные функции в теории вероятностей и случайных процессов // Успехи современной радиоэлектроники. 2009. №5. С. 23-38.
42. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. Атомарные функции и непараметрические оценки плотности вероятности // ДАН РАН, 2011. Т. 440. № 2. С. 182-186.
43. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. Применение семейства атомарных функций к задачам непараметрической оценки плотности вероятности // ЭВиЭС, 2011. Т. 16. № 8. С. 44-51.
44. Чуриков Д.В. Атомарная функция $h_a(x)$ в задаче непараметрической оценки функции плотности вероятности. Нелинейный мир. 2012. №2. Т. 10. С. 108-109.

45. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Атомарных функции и интегральные непараметрические оценки плотности вероятности случайных процессов. Труды 67-й Научной сессии, посвященной Дню Радио 16-17 мая 2012, Москва. 2012. С. 83-86.
46. Чуриков Д.В. Интегральные непараметрические оценки плотности вероятности на основе атомарных функций // Нелинейный мир. 2013. Т. 11. № 2. С. 128-131.
47. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам / Пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
48. Чуи К. Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001.
49. Kravchenco V. F., Churikov D. V., Ponomaryov V. I., and Perez-Meana H.M. WA-Systems of Functions in Reconstruction and Visualization of 2D and 3D Images. Proc. Progress in Electromagnetics Research Symposium, August 19-23. 2012. Moscow, RUSSIA, The Electromagnetics Academy. 2012. P. 40-44.
50. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Атомарные функции $h_a(x)$ и новые ортогональные вейвлеты на их основе. Успехи современной радиоэлектроники. 2008. № 6. С. 67-88.
51. Kravchenko V.F., Churikov D.V. A new class of orthogonal Kravchenko WA-system functions $\{\widetilde{h_a(t)}\}$ // *Telecommunications and Radio Engineering*, 2009. V. 68. No. 8. P. 649-666.
52. Kravchenko V. F., Churikov D. V. Kravchenko Atomic Transforms in Digital Signal Processing // *Journal of Measurement Science and Instrumentation*. 2012. Vol. 3. No. 3. P. 228-234.
53. Гуляев Ю.В., Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И. Новый класс WA-систем функций Кравченко-Рвачева // ДАН РАН. 2007. Т. 413. №3. С. 320-328.
54. Гуляев Ю.В., Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И. Аналитические вейвлеты Кравченко-Котельникова в цифровой обработке сигналов // ДАН РАН. 2007. Т. 417. №4. С. 476-482.
55. Чуриков Д.В. Комплексные WA-системы функций Кравченко в обработке временных рядов // Нелинейный мир. 2011. Т.9. №1. С.31-32.
56. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В.. Применение комплексных WA-систем функций Кравченко к обработке временных рядов // ДАН РАН, 2011. Т. 436. № 5. С. 615–622.
57. V. F. Kravchenko and D. V. Churikov. New WA-System of Kravchenko Functions in Digital Signal Processing // *Journal of Measurement Science and Instrumentation*. 2012. Vol.3. No.4. P. 345-351.
58. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. WA-системы функций Кравченко-Рвачева и их модификации в анализе сверхширокополосных сигналов // ДАН РАН. 2013. Т. 449. №5. С. 530–534.
59. Астрономия: век XXI. Редактор-составитель В.Г.Сурдин. Фрязино: Изд. Век 2, 2007.

60. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Синтез двумерных цифровых фильтров с нестандартной геометрией опорной области // *Успехи современной радиоэлектроники*. 2009. №5. С. 3-12.
61. Kravchenko V.F., Churikov D.V. Atomic and R- functions in the synthesis of two-dimensional fir filters // *Proc. 11th Int. Conf. and exhibition on Digital Signal Processing and Its Applications*, March 25-27, Moscow, Russia, 2009. V. 1. P. 141-144.
62. Churikov D.V. Application of the Theory of R-functions to the Analysis and Synthesis of Multidimensional Signals // *Proc. Progress in Electromagnetics Research Symposium*, August 18-21, 2009, Moscow, RUSSIA, The Electromagnetics Academy, 2009. P. 245-248.
63. Kravchenko V.F., Churikov D.V., and Yurin A.V. Analytical Description of Complex Shape Locus with the Help of R-Operations and Atomic Functions // *The Digital Signal and Image Processing. Telecommunications and Radio Engineering*, 2011. Vol. 70(4). P. 283–323.
64. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В.. Аналитические двумерные WA-системы функций Кравченко-Рвачева и их физические свойства // *ДАН РАН*. 2011. Т. 439. № 3. С. 336–341.
65. Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В. Аналитические двумерные WA-системы функций Кравченко-Рвачева в задачах цифровой обработки сигналов и изображений // *ЭВиЭС*. 2011. Т. 16. № 9. С. 7-32.
66. Данилычев М.В., Кравченко В.Ф., Кутуза Б.Г., Чуриков Д.В. Спутниковые СВЧ радиометрические комплексы дистанционного зондирования Земли. Современное состояние и тенденции развития // *Физические основы приборостроения*. 2014. Т. 3. № 1 (10). С. 3-25.
67. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Математическое моделирование распространения радиоволн в анизотропной неоднородной ионосфере // *Вестник Российского нового университета*. 2009. № 2. С. 7-14.
68. Крюковский А.С., Зайчиков И.В. Особенности распространения радиоимпульсов в средах с дисперсией // *Электромагнитные волны и электронные системы*. 2008. Т. 13. № 8. С. 36-41.
69. Кирьянова К.С., Крюковский А.С. Особенности лучевого распространения радиоволн в ионосфере земли // *Т-Сотт: Телекоммуникации и транспорт*. 2012. Т. 6. № 11. С. 25-28.
70. Кравченко В.Ф. Аппроксимация диаграммы направленности и синтез линейного излучателя на основе атомарных функций // *Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники*. 1996. № 8. С. 23-28.
71. Зелкин Е.Г., Кравченко В.Ф. Атомарные функции в задачах синтеза антенн и новые синтезированные окна // *Радиотехника и электроника*. 2001. Т. 46. №8. С. 903-931.

72. Kravchenko, V.F., Volosyuk, V.K., and Pavlikov. V.V., Digital Signal Processing and Atomic Functions in Synthetic Aperture Radar // *Telecommunications and Radio Engineering*. 2007. No. 66(16). P. 1441-1452.
73. Волосюк В.К., Кравченко В.Ф., Павликов В.В. Весовые функции Кравченко-Рвачева в задачах построения радиолокационных изображений при синтезировании апертуры антенны // *Антенны*. 2008. Вып. 2(129). С.48-60.
74. Волосюк В.К., Кравченко В.Ф., Павликов В.В. Весовые функции Кравченко в задачах восстановления радиолокационных изображений при модифицированном синтезе апертуры // *ЭВ и ЭС*, 2010. Т. 15, № 8. С. 33-43.
75. Волосюк В.К., Кравченко В.Ф., Павликов В.В., Пустовойт В.И. Оптимальные оценки параметров сигналов малоразмерного источника радиотеплового излучения в двухантенном радиометре. *ДАН РАН*. 2013. Т. 449. №3. С. 281-285.
76. Волосюк В.К., Кравченко В.Ф., Павликов В.В., Пустовойт В.И. Весовые функции Кравченко в алгоритме модифицированного синтеза апертуры антенны. *ДАН РАН*. 2013. Т. 449. №4. С. 409-413.
77. Волосюк В.К., Гуляев Ю.В., Кравченко В.Ф., Кутуза Б.Г., Павликов В.В., Пустовойт В.И. Развитие теории и методов оптимальной обработки пространственно-временных сигналов в активных, пассивных и комбинированных активно-пассивных РТС радиолокации и дистанционного зондирования с использованием новых весовых и WA-систем функций Кравченко // *Труды 15-й международной конференции и выставки Цифровая обработка сигналов и её применение*, Москва. 2013. С.3-9.
78. Волосюк В.К., Гуляев Ю.В., Кравченко В.Ф., Кутуза Б.Г., Павликов В.В., Пустовойт В.И. Современные методы оптимальной обработки пространственно-временных сигналов в активных, пассивных и комбинированных активно-пассивных радиотехнических системах. Обзор // *Радиотехника и электроника*. 2014. Т. 59. №2. С. 109-131.
79. Волосюк В.К., Кравченко В.Ф., Павликов В.В., Пустовойт В.И. Статистический синтез алгоритмов формирования радиометрических изображений в сканирующих радиометрах с весовой обработкой сигналов окнами Кравченко // *ДАН РАН*. 2014. Т. 456. № 2. С. 162-165.
80. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Новые алгоритмы пространственно-временной цифровой обработки сигналов в антенных системах // *Антенны*. 2008. Вып. 4(131). С. 47-54.
81. Kravchenko V.F., Churikov D.V., Atomic Distributions in SAR Problems // *Proc. Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals*, 6-10 September, 2010, Sevastopol, Ukraine, 2010. P. 59-61.

82. Kravchenko V.F., Churikov D.V., Correlation Radar Signal Processing on Basis of Probability Kravchenko Weight Functions // Proceedings of IEEE 10th International Conference on Signal Processing Proceedings (ICSP'10), October 24 - 28, 2010, Taiyangdao, Hotel Beijing, China. 2010. P. 1906-1909.
83. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Новые методы корреляционной обработки радиолокационных сигналов семейством атомарных функций. Пленарный доклад // Труды 3 международной конференции «Радиолокация и радиосвязь», ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, 26 - 30 октября 2009. Т. 1. С. 3-16.
84. Введение в контурный анализ. Приложения к обработке изображений и сигналов. Под ред. Я.А. Фурмана. М.: Физматлит, 2003.
85. Красильников Н.Н. Цифровая обработка изображений. М.: Вузовская книга, 2001.
86. Херн Д., Бейкер М.П. Компьютерная графика и стандарт OpenGL / Пер. с англ. М.:Издательский дом «Вильямс», 2005.
87. Форсайт Д., Понс Ж. Компьютерное зрение. Современный подход / Пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2004.
88. Чуриков Д.В. Атомарные функции и комбинированный алгоритм фильтрации изображений в условиях помехи высокой интенсивности. Радиотехника. 2004. № 9. С.69-71.
89. Кравченко В.Ф., Федоров И.Б., Чуриков Д.В. Функции В.Л. Рвачёва и атомарные функции в задачах описания сложных контурных объектов и цифровой обработке изображений // Электромагнитные волны и электронные системы. 2005. Т.10. №7. С.70-80.
90. Чуриков Д.В. Применение атомарных функций и R-функций к задаче выделения сложных контурных сигналов из зашумленных изображений. Труды РНТОРЭС Москва, 2005. Т.1. С. 236-238.
91. Чуриков Д.В. Сегментация и фильтрация радиолокационных изображений на основе нечетких отношений и атомарных функций. Нелинейный мир. №5. 2007. С. 265-266.
92. Круглов В.В. Дли М.И. Интеллектуальные информационные системы: компьютерная поддержка систем нечеткой логики и нечеткого вывода. М.: Физматлит, 2002.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. КОМБИНИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ОПИСАНИЯ СЛОЖНЫХ КОНТУРНЫХ ОБЪЕКТОВ И ФИЛЬТРАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ПОМЕХИ ВЫСОКОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

В приложении рассмотрен гибридный метод выделения контуров зашумленных изображений, основанный на применении атомарных функций, вейвлетов, контурных сигналов и функций В.Л. Рвачева. В процессе обработки изображения происходит выделение основных контуров и их корректировка. На основе информации о контурах изображения производится глубокая фильтрация и восстановление областей изображения, близких к контуру. Проведенные численные эксперименты показали эффективность и надежность его применения в условиях помехи высокой интенсивности.

Введение

В современных радиотехнических системах (управления, навигации, распознавания) обрабатываются большие объемы графической информации. Как известно [3,4,8,84-91], контуры объектов являются наиболее информативными, поэтому для реализации эффективных алгоритмов обработки и анализа изображений следует выделять границы объектов изображения (или элементов сцены). Достоинство методов анализа и обработки контуров в задачах обработки изображений и распознавания зрительных образов заключается в возможности их решения с единых теоретических позиций. При этом изменение параметров положения, поворота и масштаба изображения практически не влияет на объем вычислений. Выделение контуров изображения на статистически сложном многоградационном фоне эквивалентно задаче обнаружения двумерного сигнала на фоне шумов и других сигналов, играющих роль помех. В основе контурного анализа лежит описание границ объектов, как одномерных сигналов. Представление контурных изображений на основе функций Рвачева (R-функций) [20-22,28], рассмотренных в третьей главе, позволяет обрабатывать сложные контуры с позиций алгебры логики. При выделении контуров можно столкнуться с некоторыми проблемами. Так, нарушение односвязной структуры цифрового изображения, а также воздействие шумов и помех в области изображения приводят к тому, что вместо одного контура, описывающего форму исходного объекта, можно получить набор контуров пятен различной формы в его пределах. Существенное влия-

ние на применимость методов контурного анализа оказывает количество дискретных отсчетов (пикселей) составляющих изображение. С уменьшением числа пикселей из-за искажения формы шумами дискретизации падает отношение сигнал/шум. Маскирующее влияние шумов дискретизации приводит к потере отдельных, в первую очередь, мелких деталей изображений, то есть к потере информативных признаков формы в контурах. Необходимое количество пикселей связано с шириной спектра контура и должно выбираться исходя из условий теоремы отсчетов Котельникова. Однако, как правило, оно определяется возможностями специализированного процессора и применяемых датчиков изображений, например, шириной диаграммы направленности антенны РЛС. В том случае, когда изображение зашумлено, а количество пикселей цифрового изображения меньше необходимого для неискаженной передачи формы объекта, эффективность распознавания становится функцией количества распознаваемых классов.

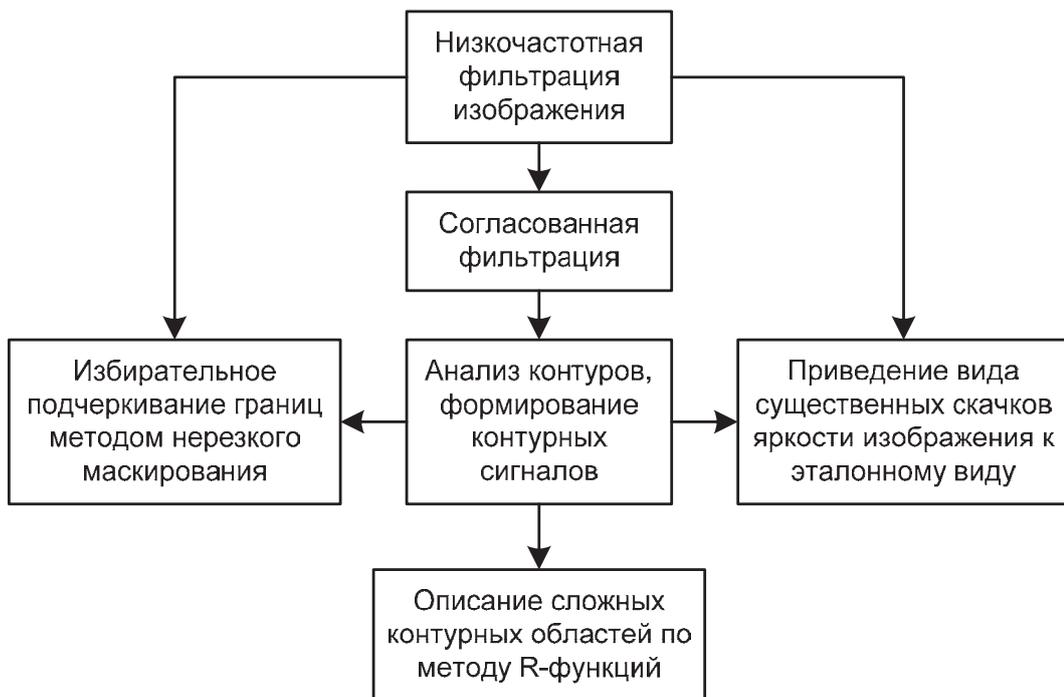


Рис. П1.1. Основные операции в обработке контурной информации.

Диапазон изменения значений яркости полезного сигнала и помехи может частично или полностью перекрываться и тогда становится невозможным различение малококонтрастных элементов изображения. Это происходит вследствие высокой чувствительности сигналообразующих элементов при работе в предельных режимах. В таких случаях прямое применение процедуры повышения контраста может только ухудшить качество изображения, поскольку повышение контрастности происходит за счет усиления высокоча-

стотных составляющих изображения. Поэтому большой интерес [1–4,8,84–91] представляют сложные контурные сигналы, формируемые по фотографическим, радиолокационным и видео изображениям и их обработка. На рис. П1.1 представлена структурная схема, описывающая основные операции, связанные с обработкой контуров изображений.

П1.1. Выделение контуров объектов из изображений

Цифровые изображения, в том числе и радиолокационные, формируются из информации, поступающей от формирующих их элементов. Из этих сигналов после дискретизации и квантования составляются матрицы растровых изображений. В общем виде цифровое изображение: это одна или несколько прямоугольных матриц, имеющие размерность $N \times M$. Каждая ячейка матрицы полностью описывает некоторую точку цифрового изображения.

На рис. П1.2 представлен фрагмент изображения и приведены соответствующими значениям яркости.

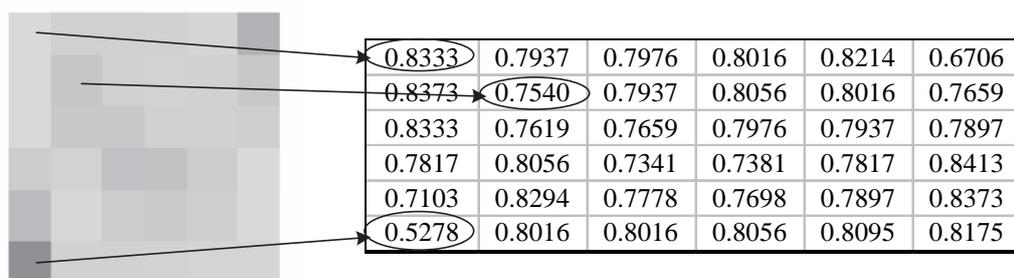


Рис. П1.2. Фрагмент изображения и соответствующая ему часть матрицы.

Исходное изображение, заданное прямоугольной матрицей, можно представить системой связанных одномерных векторов. В простейшем случае такое представление производится по одной из размерностей, например по строкам. Для удобства вычислений все формируемые вектора можно объединить в вектор \mathbf{P} размерности $1 \times (N \cdot M)$. Таким образом, полученный вектор \mathbf{P} задает дискретную функцию яркости полного изображения. Поскольку исходное изображение было подвержено влиянию помехи, то эта функция несет искаженную информацию

$$\mathbf{P}_{1 \times (N \cdot M)} = \mathbf{S}_{1 \times (N \cdot M)} + \mathbf{N}_{1 \times (N \cdot M)}, \quad (\text{П1.1})$$

где $\mathbf{S}_{1 \times (N \cdot M)}$ — дискретная функция яркости незашумленного изображения, $\mathbf{N}_{1 \times (N \cdot M)}$ — вектор помехи. Задача состоит в оценке значений эталонной функции яркости $\mathbf{S}_{1 \times (N \cdot M)}$ и построении функции $\mathbf{S}_{1 \times (N \cdot M)}^*$, близкой к ней.

Необходимо отметить [1–4], что зашумленные изображения наиболее часто описываются аддитивной $f(x, y) = s(x, y) + n(x, y)$ или мультипликативной моделью $f(x, y) = g_0 + s(x, y) + g(x, y)n(x, y)$, которая является более адекватной реальным условиям работы радиотехнических систем.

Для определенности можно предположить, что функции яркости изображения $p(k)$ является кусочно-гладкой функцией. Поэтому следует провести ее сегментацию таким образом, что бы каждый сегмент мог быть аппроксимирован полиномом невысокого порядка. Если количество сегментов равно l , то дискретная функция яркости изображения запишется так

$$s(n) = \begin{cases} s_1(n) & 1 \leq n < k_1, \\ s_2(n) & k_1 \leq n < k_2, \\ \dots & \\ s_l(n) & k_l \leq n < N \cdot M; \end{cases} \quad (\text{П1.2})$$

Для подавления помехи можно использовать КИХ фильтрацию на основе атомарных функций, которые подробно рассмотрены в первой главе. В результате получаем сглаженную версию дискретной функции яркости $p^*(k)$ исходного изображения. Её значения внутри интервалов сегментации будет приближаться к эталонным, а значительная часть шума, имеющая высокочастотный характер, будет подавлена.

Пусть длительность наименьшего сегмента равна k дискретным точкам. Тогда если выбрать длину цифрового фильтра равной $k - 1$, то значение дискретной функции яркости $p^*(k)$ в середине сегмента будет близко к эталонному. Значение шага h можно определить из соотношения $k - 1 = 2/h + 1$. Откуда следует $h = 2(k - 2)^{-1}$.

Для атомарной функции границы сегментов будут соответствовать точкам перегиба $p^*(k)$. В силу гладкости АФ, эту точку можно найти, вычислив первую разностную производную $p^*(k)$ и определив локальный максимум ее модуля. Идеальная функция яркости является кусочно-гладкой. Тогда, зная границу сегмента и его центральное значение, можно доопределить результирующую функцию яркости $s^*(n)$ на краях сегментов.

При наличии помехи высокой интенсивности целесообразно формировать дискретную функцию яркости и для других размерностей. Тогда процесс коррекции сегментов проводится после всех операций сглаживания.

В качестве примера рассмотрим изображение «Крест с областью» (см. рис. П1.3а). Помехой является двумерный случайный процесс, плотность распределения которого описывается нормальным законом

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right), \quad m_x = 0, \quad \sigma_x = 1. \quad (\text{П1.3})$$

Диапазон изменения значений яркости полезного изображения: [0.25;0.75]. Для физической реалистичности значения яркости после наложения помехи корректируются следующим образом: отрицательные значения приравниваются нулю, а превышающие единицу – единице. Зашумленное изображение представлено на рис. П1.3б.

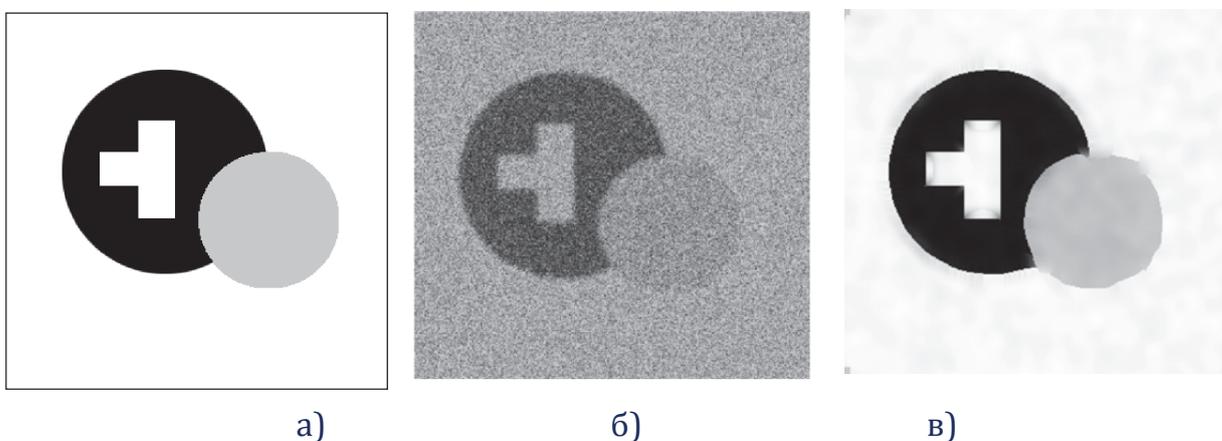


Рис. П1.3. Эталонное (а), зашумленное (б) и отфильтрованное (в) изображения

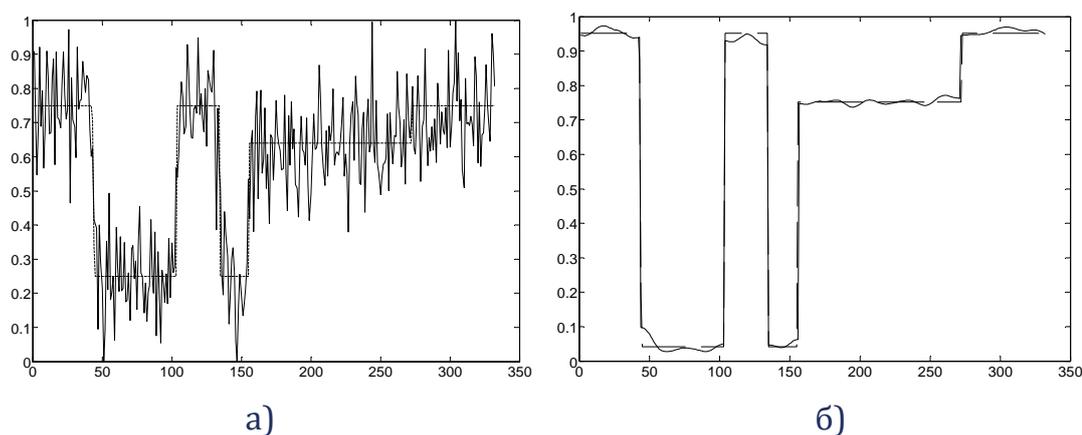


Рис. П1.4. Фрагмент функции яркости зашумленного (а) и отфильтрованного (б), пунктиром приведен фрагмент нормированной функции яркости эталонного изображения.

Результат фильтрации тестового изображения приведен на рис. П1.3в. На рис. П1.4а приведен фрагмент функции яркости исходного зашумленного изображения, а на рис. П1.4б фрагмент функции яркости отфильтрованного

изображения. На рис. П1.5 приведен результат выделения контура зашумленного изображения.

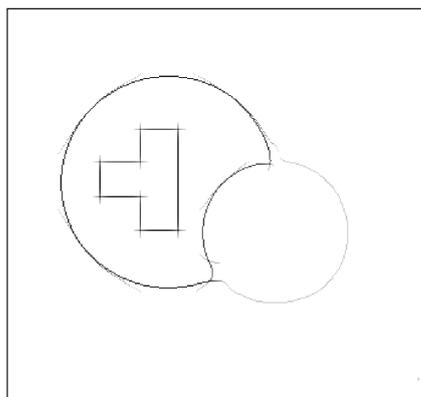


Рис.П1.5. Контур зашумленного изображения, построенный по оценке состава изображения

П1.2. Линейная фильтрация изображений в задаче выделения контуров

Важным этапом при обработке изображений является линейная фильтрация. Она позволяет проводить такие базовые операции, как сглаживание (низкочастотная фильтрация) и выделение перепадов яркости (высокочастотная фильтрация). Широкое применение методов линейной фильтрации обусловлено тем, что на их основе можно скорректировать целый ряд искажений, которые возникают при получении и передаче многомерных сигналов. К ним, в первую очередь, относятся апертурные искажения, обусловленные несовершенством устройств и условиями получения изображений (неточностью фокусировки, смаз и т.д.). Эти методы используются для ослабления заметности растровой структуры на изображениях, уменьшения ошибок интерполяции и помех, обусловленных наложением побочных спектров (при пространственной дискретизации изображений).

П1.3. Подчеркивание границ объектов на изображении

Основой зрительного распознавания семантических изображений являются контуры объектов. Достаточно распространена процедура подчеркивания границ методом нерезкого маскирования. Подчеркивание границ достигается за счет того, что из исходного изображения $L_c(x, y)$ вычитается его оператор Лапласа $\Delta(x, y)$, умноженный на весовой коэффициент b .

Распределение яркости в результирующем изображении вычисляется по формуле

$$L_{ce}(x, y) = L_c(x, y) - b\Delta(x, y). \quad (\text{П1.4})$$

Изменяя величину весового коэффициента b , можно управлять степенью подчеркивания границ.

П1.4. Выделение границ при обработке изображений.

Согласованно избирательный фильтр

Выделение контуров изображения является одной из подзадач сегментации изображений. Сегментация это один из способов группировки пикселей в сцене. Она проводится с целью её разбиения на части со сходными свойствами, например, на области с близкими значениями яркости («лес», «поле», «водоем» и др.). В ландшафтных сценах, характерной особенностью которых является сложный статистический характер яркости пикселей, сегментация проводится для разбиения сцены на статистически однородные части. Границам объектов в полутоновой продискретизованной сцене соответствуют скачки яркости, как положительные, так и отрицательные. Эти скачки вызваны разницей средних уровней яркости фона и объектов. Решение задачи выделения границы объекта состоит из последовательности операций, основными из которых являются: сканирование сцены, обнаружение контура изображения и прослеживание линии контура в условиях воздействия фоновых шумов, формирование кода контура и его предварительная обработка. Код контура представляется в виде некоторых контурных сигналов, соответствующих исходному изображению. В процессе сканирования сцены F с функцией яркости $f(x, y)$ происходит перебор по определенному закону ее пикселей. Если текущий пиксель не был отнесен к ранее обнаруженному изображению, то решается задача обнаружения начальной точки a_0 контура нового изображения. Сцена F содержит изображения фона $g(x, y)$ и объекта $s(x, y)$, а также флуктуационный шум $n(x, y)$. Изображение $s(x, y)$ имеет подмножество точек $\gamma(x, y)$, относящихся к границе $\Gamma = \{\gamma(x, y)\}$ объект/фон. Граница Γ изображения $s(x, y)$ характеризуется двумерным скачком (перепадом) с функцией яркости (рис. 2), где Δt — длительность фронта скачка яркости.

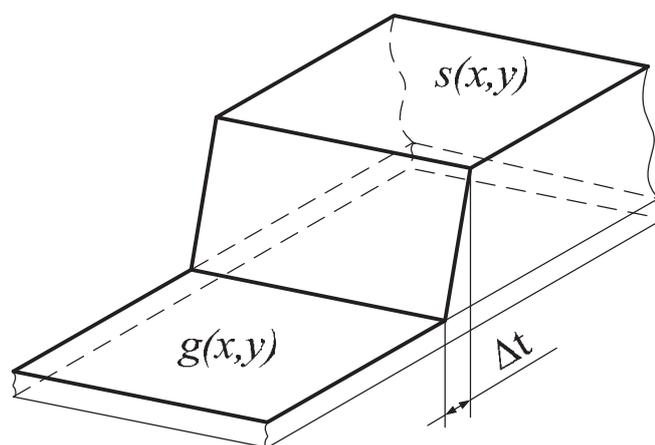


Рис. П1.6. Модель двумерного скачка функции яркости изображения.

Пространственные положения точек границы Γ сильно коррелированы. Граница реального изображения представляет непрерывную замкнутую одновитковую кривую. Каждая граничная точка имеет в качестве соседей две других граничных точки. Поэтому информация о положении в сцене F хотя бы одной граничной точки, получаемая в процессе операции обнаружения границы, в значительной степени облегчает нахождение её остальных точек. Особенно, если форма изображения априорно известна (задана в форме контурного сигнала или на основе теории R-функций). Часто переход фон/объект происходит на интервале нескольких пикселей, поэтому скачок яркости характеризуется крутым фронтом. Из-за ухудшения освещенности в пограничной части объекта он становится пологим. В ряде случаев в области границы могут находиться представляющие интерес отдельные точечные объекты. Тогда разрешение границы должно быть достаточно высоким, что приводит к увеличению протяженности скачка. Функция $s(x, y)$ изображения объекта, как и функция $g(x, y)$ фона, является детерминированной функцией или реализацией случайного поля. Эти функции всегда имеют различные первые моменты, то есть разные средние яркости. Последнее говорит о том, что переход от одной функции к другой, то есть от фона к объекту или от объекта к фону в среднем сопровождается скачком яркости, расположенным в области границы фон/объект. Основой для выделения границ изображений являются фильтры, согласованные с конкретным видом фронта двумерного скачка яркости. В основе работы положена обработка сильно зашумленных изображений, поэтому выделение контуров производится совместно с линейной фильтрацией изображения на основе АФ [8,88-91]. Таким образом, согласованный фильтр строится для сглаженного идеализированного скачка яркости. Дис-

кретные отсчеты идеализированного скачка яркости в виде прямоугольного импульса представлены на рис. П1.7. На рис. П1.7б изображена сглаженная версия прямоугольного скачка яркости.

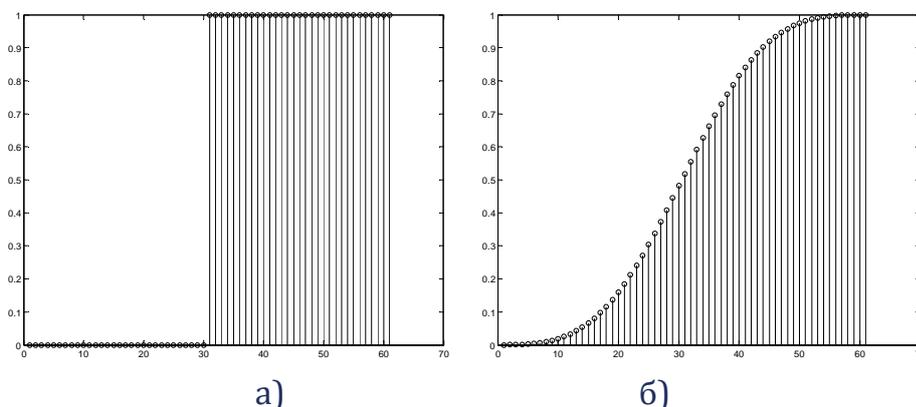


Рис. П1.7. Идеализированный скачок яркости (а) и результат его сглаживания (б).

Основные этапы работы обнаружителя границы приведены на структурной схеме (рис. П1.8).

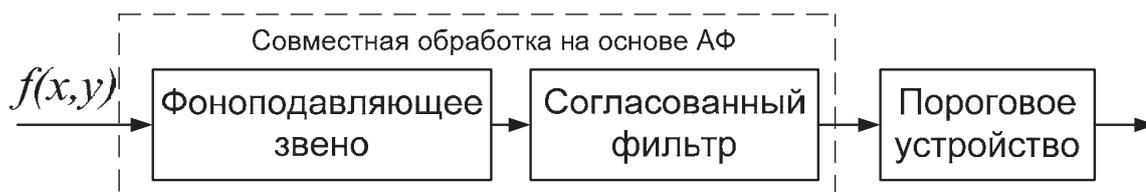


Рис. П1.8. Структурная схема обнаружителя границы изображения.

Фоноподавляющее звено является инверсным фильтром и служит для выравнивания спектра фона. Для снижения трудоемкости вычислений, возможно использование одномерных фильтров. При этом обработка производится для отсчетов яркости вдоль строк и столбцов цифрового изображения. Такое допущение позволяет наряду с незначительной потерей качества их обработки существенно повысить скорость вычислений.

Применение теории нечетких множеств [89,92] повышает точность классификации точек изображения в условиях помех и неоднородности фона.

В случаях, когда не удастся однозначно отнести точку к объекту/фону или границе фон-объект нечеткое правило позволяет сделать локальные уточнения. На рис. П1.9 приведена блок-схема, описывающая процесс выделения и классификации контуров изображения с привлечением нечеткой логики. На основании полученных данных о скачке яркости, накапливаемой информации о шумовом воздействии и других мешающих факторах нечеткий

классификатор присваивает точке изображения вероятность принадлежности её к области границы фон-объект.

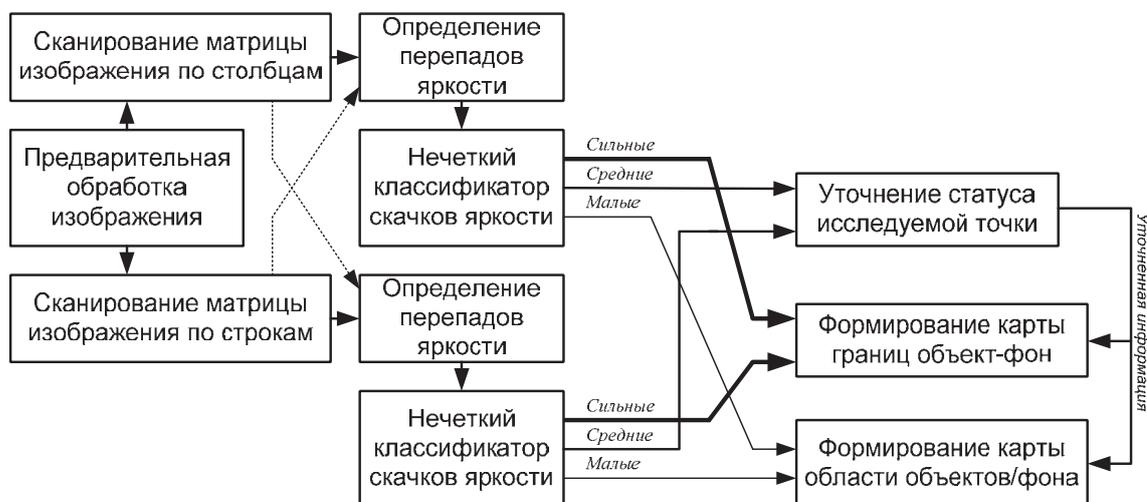


Рис. П1.9. Блок-схема, описывающая процесс выделения и классификации контуров изображения.

Для скачков яркости формируются три функции принадлежности:

- Сильные скачки яркости. В этом случае наиболее вероятно отнесение точки к области контура.
- Средние скачки яркости. Здесь возможны два варианта: скачек яркости вызван следствием фильтрации шумового воздействия или фронт скачка яркости ориентирован под острым углом к направлению сканирования.
- Малые скачки яркости. Наиболее вероятно, что они являются результатами фильтрации шумового воздействия.

Затем, сопоставляя полученные данные, происходит приведение к четкому выводу и объединение точек контуров. На заключительном этапе изображение сегментируется в соответствии с информацией о контурах и фрагментах изображения [3].

Зашумленный эталонный сигнал изображен на рис. П1.10а, а результат согласованной фильтрации скачка яркости на рис. П1.10б.

Получаемые сигналы подвергаются пороговой обработке, а затем производится поиск локальных экстремумов. В итоге формируется контурное изображение, заданное матрицей. В этой матрице точкам контура исходной сцены соответствуют отличные от нуля значения. Областям фона и объектов соответствуют нулевые элементы матрицы. Рассматриваются изображения одиночных объектов, порождающих односвязные контуры.

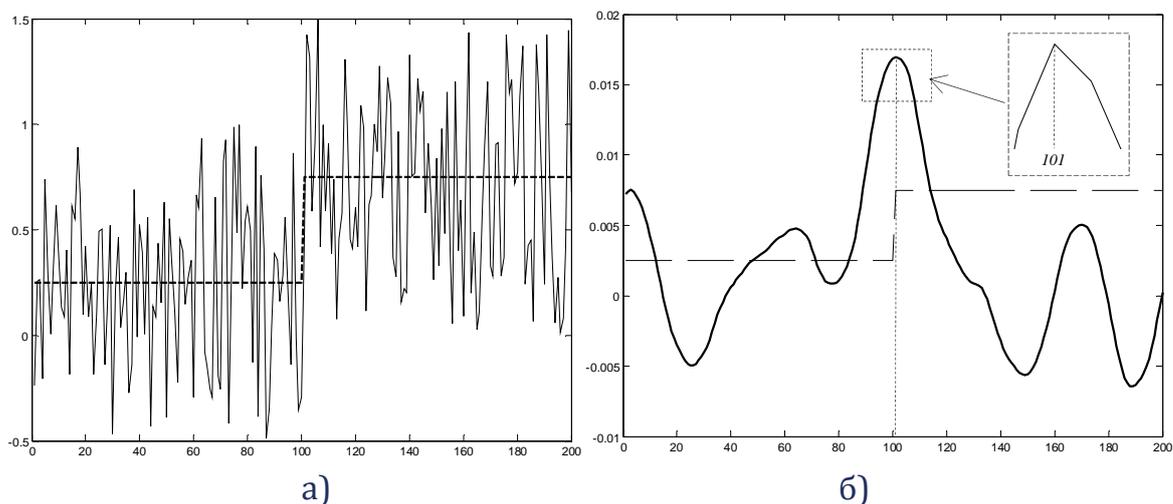


Рис. П1.10. Зашумленный эталонный сигнал (а) и результат согласованной фильтрации скачка яркости (б) (пунктирная линия – уменьшенная копия эталонного сигнала).

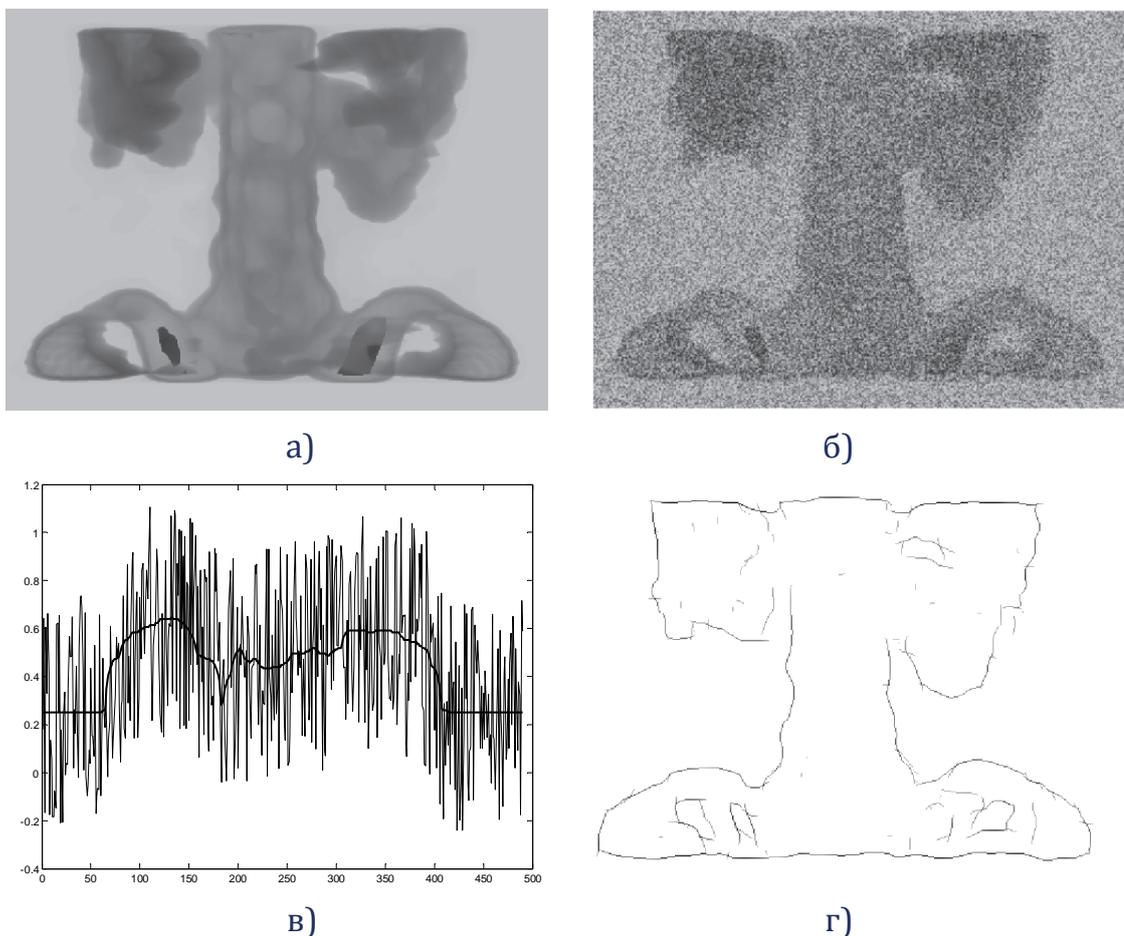


Рис. П1.11. Результаты выделения контуров зашумленного тестового изображения «spine». Исходное (а) и зашумленное (б) изображения, сечение функции яркости зашумленного изображения (в) (пунктиром изображено для незашумленного изображения), результат выделение контура (г)

В качестве шумового воздействия используется двумерный случайный процесс, плотность распределения которого описывается нормальным законом распределения (П1.3) с параметрами $m_x = 0$, а среднеквадратическим отклонением σ_x выбираемым таким образом, чтобы отношение энергии полезного сигнала и помехи было порядка нескольких децибел. Диапазон изменения значений яркости полезного изображения настраивается в пределах $[0.25; 0.75]$. Результаты выделения контуров тестовых изображений «spine» и «дорога» приведены на рис. П1.11, П1.12.

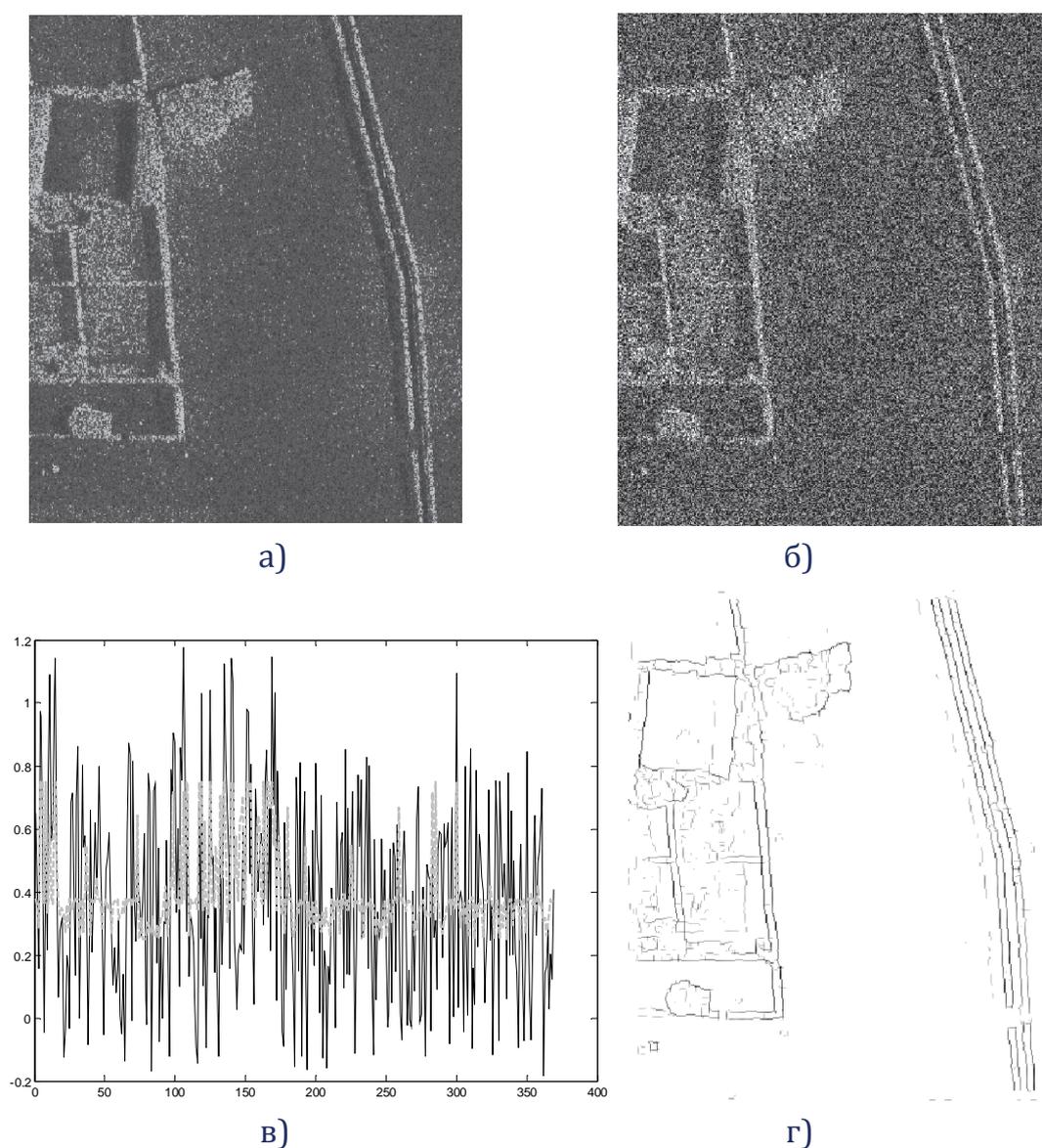


Рис. П1.12. Результаты выделения контуров зашумленного тестового изображения «дорога». Исходное (а) и зашумленное (б) изображения, сечение функции яркости зашумленного изображения (в) (пунктиром изображено для незашумленного изображения), результат выделения контура (г)

Таким образом, контурное изображение может быть описано контурными сигналами и R-функциями. Прежде чем приступить к описанию контуров объектов сложной формы на основе R-функций необходимо ввести базовые понятия для описания изображений, контуров и контурных сигналов.

П1.5. Контурные как дискретные сигналы. Уравнение чертежа

П1.5.1. Кодирование контурных бинарных изображений

Кодирование контура – это этап получения дискретного сигнала, описывающего границы оцифрованного изображения [84]. Любая область D плоскости изображения сцены содержит внутренние точки и точки контура (граничные точки). Первые из них обладают тем свойством, что не только сами, но и их некоторая окрестность целиком принадлежит области D . Точки контура не являются внутренними, но в сколь угодно малой окрестности таких точек находятся внутренние точки области D и точки, не принадлежащие области D , внешние (фоновые) точки. Область D обладает свойством связности, если любые ее точки соединятся линией, целиком находящейся внутри D . Фундаментальными свойствами контуров реальных изображений являются замкнутость и непрерывность их линий. Внутренний элемент (пиксель) оцифрованного изображения обладает свойством четырехсвязности, то есть смежные с ним элементы: верхний, нижний, левый и правый, также принадлежат изображению. Для граничных элементов изображения, образующих контур Γ , правило четырехсвязности не выполняется. Элементарный вектор (ЭВ) – это вектор, соединяющий центры или узлы соседних контурных ячеек сетчатки, проведенный в направлении обхода. Для получения контурных сигналов применяется процедура нумерации граничных точек. Наиболее часто применяемыми подходами к нумерации являются следующие.

а) Нумерация точек в системе отсчета с началом в центре тяжести. Она заключается в том, что определяется центр тяжести O множества точек контура. Затем строится пучок с полюсом, совмещенным с точкой O . Выбирается радиус вектор (РВ) с минимальным значением модуля и принимается за нулевой. В естественном порядке следования производится нумерация всех остальных радиус векторов. Выбор центра тяжести в качестве полюса зашумленного пучка оправдан тем, что дисперсия флуктуаций его положений в n раз меньше дисперсии ошибки определения любой точки контура (где n — число точек контура).

б) Алгоритм нумерации точек контура «минимальное дерево». Задачу упорядочивания множества точек контура можно рассматривать как задачу о минимизации длины сети, связывающую заданное количество точек кабелем минимальной длины. В результате наблюдения k точек производится их первичная нумерация и построена матрица расстояний $R_{k \times k}$. Элементами l -ой строки этой матрицы являются величины расстояний между l -ой и всеми остальными точками контура в первичной нумерации:

$$R_{lj} = |\xi(l) - \xi(j)|, \quad j = \overline{1, k},$$

где $\xi(j)$, $j = \overline{1, k}$ — точки контура в комплексном коде.

Построение минимального дерева может быть начато с любой точки контура. Упорядочение происходит путем поиска ближайшей точки к каждой последующей. Эта операция заключается в поиске наименьшего элемента в l -ой строке $v = \arg \left\{ \min_{j=1, k} (R_{lj}) \right\}$, где v — номер следующей точки минимального дерева. На следующем шаге полагается $l = v$ и происходит повторение цикла поиска до тех пор, пока не будут перебраны все точки контура или не будет принято решение о замыкании контура. Последняя ситуация возникает при наличии нескольких замкнутых контуров изображения. После того, как точки пронумерованы, то на основе какого-либо способа кодирования можно сформировать контурный сигнал. Отметим некоторые способы кодирования контуров изображения:

- Кодирование по трем признакам (длина текущего ЭВ, направление поворота при переходе к следующему ЭВ и углу между соседними ЭВ).
- Код Фримена.
- Двумерным кодом.
- Полигональное представление контура.
- Задание комплексными числами (обобщение кода Фримена).
- R-представление контура.
- Кодирование полярным кодом.
- Задание контура в виде функции комплексного переменного.

Наиболее часто на практике применяется комплексный код. Такое представление позволяет довольно гибко переходить от сигнальной формы к графической.

Наиболее важными свойствами комплекснозначных кодов являются следующие:

- Инвариантность к переносу изображений.
- При смещении на d элементов начальной точки контура происходит сдвиг номера ЭВ на величину d .
- При многократном обходе контура элементы его кода задают периодическую последовательность с периодом k .
- Сумма элементов кода замкнутого контура равна нулю.

Смена направления прослеживания приводит к изменению знака и порядка следования ЭВ в контуре. Понятие сигнального контура вводится, интерпретируя обработку полигональных комплекснозначных контуров, обладающих свойствами периодичности и замкнутости, как дискретных сигналов. Этот контур представляет собой исходный (эталонный) контур Γ , подвергнутый группе заданных преобразований. Наиболее распространенными преобразованиями контуров являются следующие: растяжение (масштабирование), поворот (ротация) и сдвиг начальной точки. При этих преобразованиях контур остается в плоскости сетчатки, а сигнальный контур

$$\Gamma^{(c)} = \{\gamma^{(c)}(n)\}_{0,k-1}$$

связан с эталонным контуром следующим образом:

$$\Gamma^{(c)} = \{\gamma^{(c)}(n)\}_{0,k-1} = \{|\mu|\gamma(n+d)\exp(i(\varphi(n+d) + \Delta\varphi))\}_{0,k-1}.$$

Он передается по каналу связи, где подвергается воздействию шумового контура Z . Суммарный сигнал N , (зашумленный контур), образуется как аддитивная смесь сигнального и шумового контуров $N = \Gamma^{(c)} + Z$. Основными отличительными свойствами контура изображения как сигнала является замкнутость, определяемая выражением, и комплекснозначность его ЭВ.

П1.5.2. Классификация контурных сигналов

С произвольным контуром $\Gamma = \{\gamma(n)\}_{0,k-1}$ связаны три следующих вида контуров: обратный контур $\Gamma_{\text{обр.}}$, комплексно сопряженный контур $\Gamma^{(*)}$ и модифицированный контур $\Gamma_{\text{мод.}}$. Обратный контур $\Gamma_{\text{обр.}}$ получается из исходного контура Γ следующим образом: $\gamma_{\text{обр.}}(n) = \gamma(k-n)$, $n = 0, 1, \dots, k-1$, причем $\gamma_{\text{обр.}}(0) = \gamma(k) = \gamma(0)$. Все ЭВ комплексно сопряженного контура $\Gamma^{(*)}$ равны комплексно сопряженным значениям ЭВ исходного контура

$\gamma^{(*)}(n) = \gamma^*(n)$, $n = 0, 1, \dots, k-1$. Контур Γ модифицируется добавлением одного или нескольких равных нулю ЭВ.

III.5.3. Элементарные контуры

Элементарные контуры (ЭК) $\Gamma_j = \{\gamma_j(n)\}_{0, k-1}$ порядка j , $j = 0, 1, \dots, k-1$, представляет собой правильный ориентированный k -угольник с одинаковыми по модулю ЭВ, равными $|\gamma|$ и одинаковыми по величине углами между соседними ЭВ, равными $2\pi j / k$

$$\Gamma_j = \{\gamma_j(n)\}_{0, k-1} = \left\{ |\gamma| \exp\left(i \frac{2\pi}{k} jn\right) \right\}_{0, k-1}, \quad j = 0, 1, \dots, k-1.$$

Так как $\sum_{n=0}^{k-1} \exp\left(i \frac{2\pi}{k} jn\right) = 0$, то ЭК Γ_j , $j = 1, 2, \dots, k-1$ являются замкнутыми. Элементарный контур нулевого порядка $\Gamma_0 = \{1\}_{0, k-1}$ представляет собой цепочку расположенных вдоль оси абсцисс единичных векторов и всегда разомкнут.

Дельтовидный контур $\Delta = \{\delta(n)\}_{0, k-1}$ является вырожденным k -угольником. Нулевой ЭВ $\delta(0)$ по модулю равен сумме модулей всех остальных ЭВ $\delta(1) \dots \delta(k-1)$. Эти ЭВ имеют одно и то же направление, которое противоположно ЭВ $\delta(0)$.

Сопряженно-симметрические и сопряженно-антисимметрические контуры. У СС контура $\Gamma_{c/c}$ элементарные векторы связаны условием вида $\gamma(n) = \gamma^*(-n) = \gamma^*(k-n)$, а у СА контура $\Gamma_{c/a}$ – условием вида $\gamma(n) = -\gamma^*(-n) = -\gamma^*(k-n)$. Начальный элементарный вектор $\gamma(0)$ у СС контура является чисто вещественным, так как равенство $\gamma(0) = \gamma^*(0)$ возможно только при $\text{Im}\gamma(0) = 0$. Тогда у СА контуров $\gamma(0) = -\gamma^*(0)$. Это возможно только при мнимом характере его ЭВ $\gamma(0)$. СС контуры симметричны относительно вертикальной оси, а СА контуры – горизонтальной оси, проходящих через середины ЭВ $\gamma(0)$.

Равнодолжный контур. В таком контуре ЭВ связаны соотношением вида

$$\gamma(n) = -\gamma(n+k/2), \quad n = 0, 1, \dots, k/2-1.$$

П1.5.4. Сложный геометрический объект и его аналитическое описание

Геометрические объекты [20-22,28], встречающиеся на практике, имеют произвольную форму. Некоторые из них принято называть объектами простой формы (прямая, окружность, прямоугольник, сфера, цилиндр и т.д.), а другие относятся к числу объектов сложной формы. В понятие сложности можно вкладывать различное содержание. При этом одной из важнейших задач является разработка методов, позволяющих для любого объекта S написать уравнение вида $f = 0$ либо неравенство $f \geq 0$ (где f – заданное число раз непрерывно-дифференцируемая функция) удовлетворяющееся в тех и только тех точках пространства (в двумерном случае – плоскости), которые принадлежат S . Эта задача решается на основе теории R-функций [20-22,28], подробно рассмотренной в третьей главе диссертации.

Для некоторых классов геометрических объектов процесс построения уравнений может быть формализован и его можно выполнять автоматически. Таким образом, в цифровой системе может быть решена обратная задача аналитической геометрии без вмешательства оператора. Уравнение чертежа для многоугольной области строится в наиболее простой форме. Имеется нормальное ориентированное уравнение прямой

$$f_i^0 \equiv \frac{1}{l_i} [-x(y_{i+1} - y_i) + y(x_{i+1} - x_i) - x_{i+1}y_i + x_iy_{i+1}] = 0, \quad (\text{П1.5})$$

где $l_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$. Для произвольного многоугольника [5] A_1, A_2, \dots, A_9 , представленного на рис. П1.13 можно записать:

$$F(x, y) \equiv S_3(f_1) \wedge S_3(f_2) \wedge (S_3(f_3) \vee S_3(f_4)) \wedge S_3(f_5) \wedge \\ \wedge ((S_3(f_6) \vee S_3(f_7)) \wedge (S_3(f_8) \vee S_3(f_9))), \quad (\text{П1.6})$$

где $S_3(*)$ — функция трехзначной логики, \wedge, \vee — операторы дизъюнкции и конъюнкции.

При этом символы операций дизъюнкции и конъюнкции чередуются при переходе слева направо через каждую скобку. Таким образом, задача формирования уравнения сводится к расстановке скобок. Исходный многоугольник дополняется до выпуклого многоугольника необходимым количеством отрезков. В соответствии с этим заключаются в скобки группы членов, соответствующие ломаным, опирающимся на добавленные отрезки.

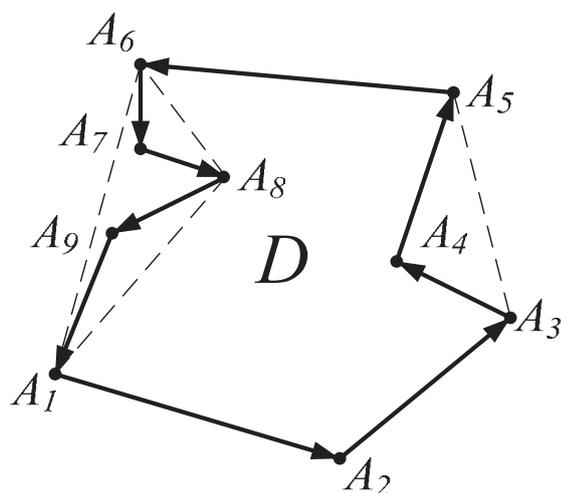


Рис. П1.13. Многоугольник A_1, A_2, \dots, A_9 .

Упомянутые ломаные также дополняются до выпуклых фигур и заключаются в скобки группы членов, соответствующие замыкаемым ломаным, и т.д. Процесс продолжается до тех пор, пока не будут исчерпаны все невыпуклые ломаные. На рис. П1.13 пунктиром показаны дополнительные отрезки, которым в (П1.6) соответствуют определенные пары открывающих и закрывающих скобок. Надо заметить, что уравнение ориентированной прямой (П1.5) легко может быть получено для всех элементарных векторов произвольного контурного сигнала. Это делает изложенную процедуру универсальной для построения уравнения чертежа произвольных объектов, заданных контурными сигналами.

П1.6. Численный эксперимент

Рассмотрим пример автоматического построения уравнения чертежа по зашумленной фотографии. В качестве тестового изображения выбран объект (см. рис. П1.14а).

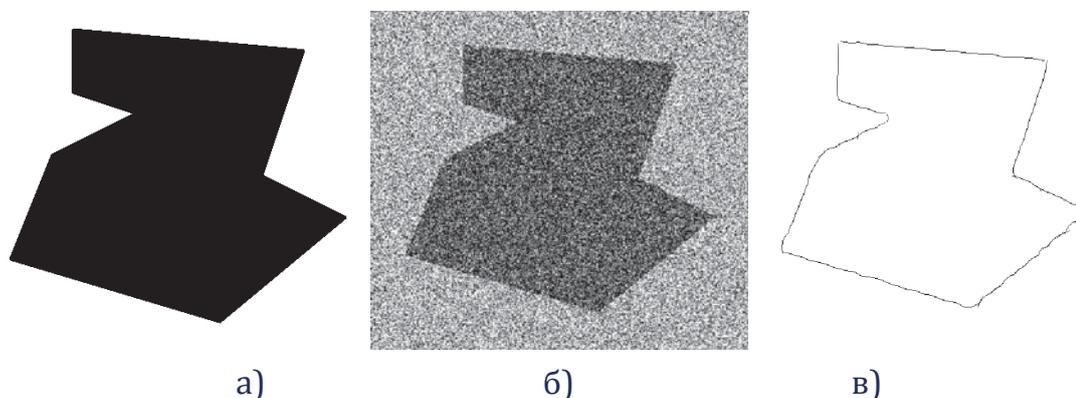


Рис. П1.14. Тестовый односвязный объект (а), его зашумленное изображение (б), результат выделения контура (в).

На вход системы поступает зашумленное тестовое изображение (рис. П1.14б). Размер его изображения 400×450 дискретных отсчетов. В качестве шумового воздействия выбран гауссовский случайный процесс (П1.3). Шумовое воздействие добавлено аддитивно, амплитуда шума в 1.5 раза превышает амплитуду полезного сигнала. Производится обработка изображения на основе АФ [6,8] и выделяется контур объекта. Результат выделения контура изображен на рис. П1.14в. Срез функции яркости цифрового изображения приведен на рис. П1.15.

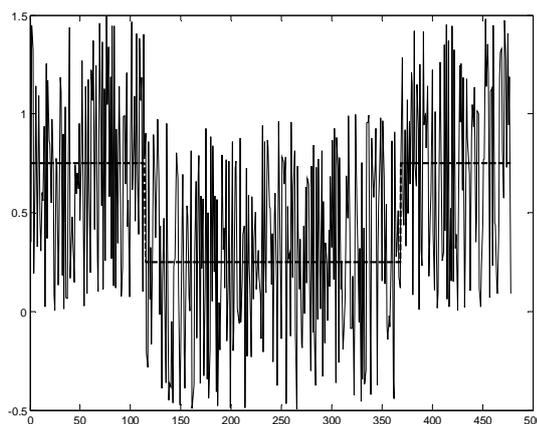


Рис. П1.15. Срез функции яркости зашумленного изображения (строка 100).

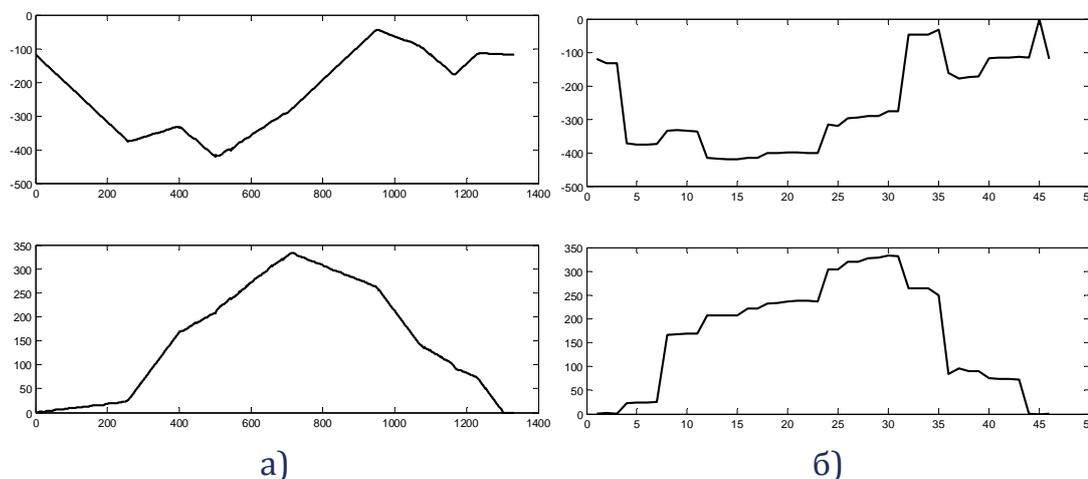
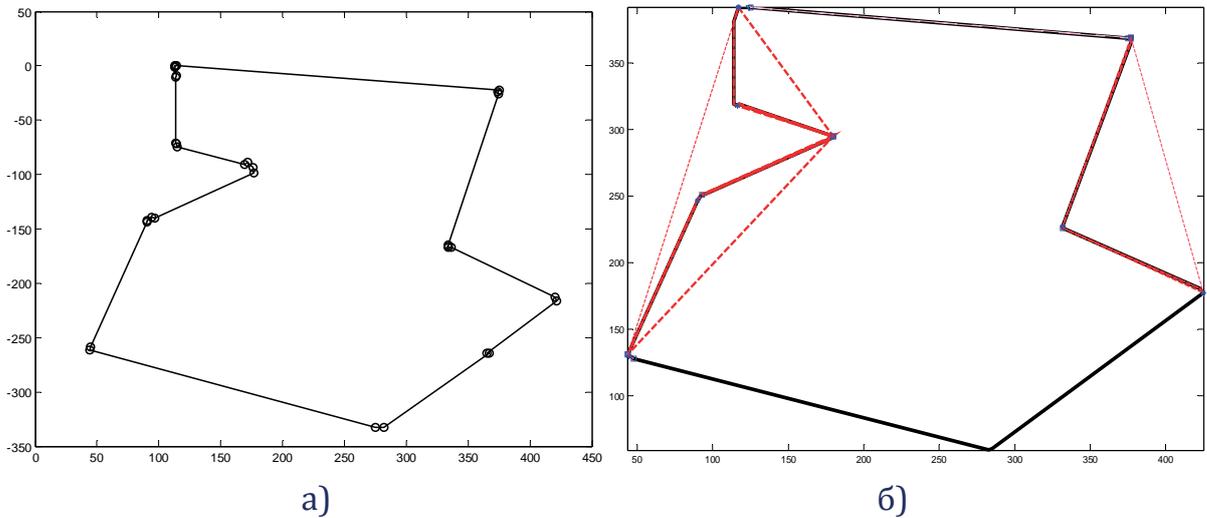


Рис. П1.16. Действительная и мнимая части контурного сигнала, сформированного по исходному контуру (а) и минимизированные действительная и мнимая части контурного сигнала (б)

На основе этой информации формируется комплексный контурный сигнал, действительная и мнимая части которого представлены на рис. П1.16а. Далее осуществлялись операции: фильтрация контурного сигнала и его минимизация. Результат представлен на рис. П1.16б. Заключительным этапом является построение предикатного уравнения с помощью теории R-функций (функций В.Л. Рвачёва) [21-22]. Вспомогательные области обозначены на

рис. П1.17б. Листинг результата выполнения программы, точно описывающего полученную область представлен на рис. 17в. Здесь обозначения «and» и «or» соответствуют логическим операциям пересечения и объединения.



```

[7*y-2744] and [y-392] and [0] and ([2322168557863/8796093022208*x+y-425] or
[23*x+249*y-13804404770611397/137438953472] or
[[-2322168557863/8796093022208*x+y-9268058388431/34359738368] and [y-369]]) and
([43918081472585/17592186044416*x+1310056407563/8796093022208*y-
8556610519505/8589934592] and [19600/141*x-6440/141*y-
2452377009827963/68719476736]) or
[26136732137369/17592186044416*x+85525955947/4398046511104*y-
4268313147551/8589934592] or ([4232/93*x+8464/93*y-1225068857389015/34359738368]
and [21239/6510*x+20497869307743/8796093022208*y-15453897321025/8589934592]))
and [117*x-140*y-1710549998456949/68719476736] and
[173135105475823/140737488355328*x-2565825371521/1099511627776*y-
7209414567493/34359738368] and [-5428/79*x-
55696/237*y+73180463255453353/2199023255552] and
([-22491275828937/17592186044416*x-
52702329500149/35184372088832*y+138559341902835/549755813888] or
[-x-2*y+304]) and
[-x-13649109862047/35184372088832*y+51914010218355/549755813888] and
([[-115*x+46*y-277794930249587/274877906944] or
[-x+4853016839839/35184372088832*y+15305486215097/274877906944]) and
[-4*x+3*y-382] and ([-11233564582579/17592186044416*x+683/332*y-
125657288966539/274877906944] or [-3444/83*x+6888/83*y-
4658916457961627/274877906944] or
[-5209/2656*x+59433239976109/35184372088832*y-314525500379/2147483648])) or
([[-24*x-62*y+361655/16] or [35/32*x-95/64*y+11045/32]) and [-x-2*y+752] and
[-x+114] and [-61*x+6954] and [-11*x+3*y+111]))

```

в)

Рис. П1.17. Минимизированный контур (опорные точки отмечены кружком) (а), Вспомогательные области (б), листинг результата выполнения программы (в).

ВЫВОДЫ К ПРИЛОЖЕНИЮ 1

Построенные на основе комбинаций АФ, R-функций, вейвлетов, контурного анализа алгоритмы, теории нечетких множеств, а также численный эксперимент показывают эффективность и надежность предложенного гибридного метода в условиях сильной зашумленности изображений объектов. За счет использования комбинированных вычислений метод хорошо работает в условиях помех, полностью перекрывающих полезный сигнал. Применение класса атомарных функций позволяет оптимизировать реализацию алгоритма к условиям задачам различной физической природы.