

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
АВТОНОМНАЯ НЕКОМЕРЧЕСКАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ НОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи



Бова Юлия Игоревна

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ
РАДИОВОЛН В ИОНОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЕ МЕТОДАМИ
БИХАРАКТЕРИСТИК И ВОЛНОВОЙ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ**

1.3.4 – Радиофизика

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор А.С. Крюковский

г. Москва, 2021 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Глава 1. Распространение частотно-модулированных сигналов в плазме	19
§ 1.1. Радиоизлучение в плазме. Постановка задачи. Основные уравнения	19
§ 1.2. Пространственно-временная геометрическая оптика	23
§ 1.3. Эффективная диэлектрическая проницаемость холодной ионосферной плазмы	27
§ 1.4. Применение символьных вычислений для решения бихарактеристических уравнений для определения лучевых траекторий	29
§ 1.5. Пространственно-временная волновая теория катастроф	33
§ 1.6. Выводы	38
Глава 2. Исследование вариаций поляризационных характеристик при распространении радиоволн дециметрового диапазона в ионосфере Земли	39
§ 2.1. Влияние регулярной структуры ночной ионосферы Земли на параметры радиосигнала	39
§ 2.2. Влияние регулярной структуры дневной ионосферы Земли на параметры радиосигналов с различными несущими частотами	51
§ 2.3. Влияние крупномасштабных неоднородностей ионосферы Земли на параметры радиосигнала	59
§ 2.4. Выводы	70
Глава 3. Математическое моделирование распространения частотно-модулированного излучения в ионосферной плазме методом бихарактеристик	72
§ 3.1. Математическое моделирование особенностей распространения частотно-модулированного излучения в анизотропной плазме без учета горизонтальных градиентов	72
§ 3.2. Математическое моделирование особенностей распространения частотно-модулированного излучения с учетом горизонтальных градиентов в движущихся нестационарных средах, эффект Доплера	79
§ 3.3. Математическое моделирование распространения радиоволн в нестационарной плазме с учетом кривизны поверхности Земли и ионосферных слоев	97
§ 3.4. Математическое моделирование распространения радиоволн в ионосфере Земли в зависимости от высоты источника излучения	106
§ 3.5. Выводы	117
Глава 4. Исследование особенностей амплитудно-фазовых структур радиосигналов в ионосферной плазме методами расширенной Бихарактеристической системы и канонического оператора	120
§ 4.1. Модель электронной концентрации ионосферы Земли, содержащая локальные неоднородности	120
§ 4.2. Расширенная бихарактеристическая система уравнений	123
§ 4.3. Лучевое распространение в фазовом пространстве	125
§ 4.4. Лучевые расходимости на канонических картах	129
§ 4.5. Численное моделирование распространения частотно-модулированного излучения электромагнитных волн в ионосфере с учетом отклоняющего поглощения и влияния внешнего магнитного поля Земли	136
§ 4.6. Численное моделирование структуры волнового поля в окрестности каустики	153
§ 4.7. Выводы	157
Глава 5. Пространственно-временная волновая теория катастроф частотно-модулированного излучения	160
§ 5.1. Применение теории катастроф для описания пространственно-временной структуры частотно-модулированного сигнала в плазме	160
§ 5.2. Численные методы и алгоритмы моделирования лучевой, каустической и	168

амплитудно-фазовой структуры на основе теории катастроф	
§ 5.3. Моделирование каустической структуры краевой катастрофы $K_{4,2}$	172
§ 5.4. Моделирование параметров универсальной деформации краевой катастрофы $K_{4,2}$ методом локальной асимптотики	182
§ 5.5. Выводы	189
Заключение	191
Список литературы	194

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая диссертация посвящена исследованию особенностей распространения радиоволн в ионосфере Земли. Актуальность диссертационной работы определяется широким использованием электромагнитных волн коротковолнового (декаметрового и дециметрового) диапазона для обеспечения дальней радиосвязи, радионавигации, радиолокации, загоризонтного радиозондирования, а также для изучения структуры верхней атмосферы Земли – ионосферы и магнитосферы. Несмотря на большой объем исследований в данной области даже в последнее время (см., например, [36, 41, 50, 53, 55, 72, 74, 79, 80, 92, 93, 104, 121, 162, 170, 172]), распространение сигналов в анизотропной ионосферной плазме изучено ещё недостаточно и требует разработки новых методов исследований и совершенствования старых подходов.

К настоящему времени выполнен большой объём теоретических исследований распространения радиоволн в ионосфере Земли. Помимо классических монографий В.Л. Гинзбурга [38], К. Дэвиса [49], Б.Н. Гершмана, Л.М. Ерухимова и Ю.Я. Яшина [37]. Из современных исследований отметим монографии [55], [169], [172], определяющий вклад в современное понимание проблемы распространения радиоволн в ионосфере Земли в разное время внесли работы профессоров Д.С. Лукина [108, 154], П.Е. Краснушкина [78], Н.Н. Зернова [52], Орлова И.И. [145], В.И. Куркина [56,144], Ю.Н. Черкашина [171], В.А. Иванова [54], В.Е. Куницына [142], Е.А Палкина [153, 154], А.В. Попова [79] и др.

Значительная часть настоящей работы посвящена развитию методов математического моделирования особенностей распространения радиоволн, в частности частотно-модулированных радиоволн (ЧМ) в ионосфере Земли. Основным инструментом для описания распространения коротких радиоволн в ионосфере Земли является лучевая теория, основанная на применении гамильтонова формализма. Было показано [65, 67], что решение уравнения эйконала сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка – канонической системе Гамильтона (бихарактеристической системы), в которой обобщенным импульсам

соответствуют волновые вектора, а самому гамильтониану – круговая частота волны. Метод бихарактеристик, описывающий траектории лучей в неоднородной магнитоактивной среде – ионосфере, был впервые предложен Д.С. Лукиным [65-67] (см. также [186]). Решение системы позволяет определить траекторию луча и волновой вектор в зависимости от времени. С помощью бихарактеристической системы при известной модели ионосферы и магнитного поля Земли определяются максимальные и минимальные применимые частоты, зоны радиосвязи и радиомолчания, рассчитываются ионограммы вертикального и наклонного зондирования и групповые задержки. Метод бихарактеристик активно применялся при решении задач возвратно наклонного зондирования [48], для исследования ионосферного и магнитосферного распространения волн ОНЧ-диапазона [165,166], связи со спутниками и другими космическими объектами [151]. Моделирование методом бихарактеристик доплеровского сдвига частоты позволило исследовать волнообразные возмущения ионосферной плазмы [40, 148] и особенности экспериментов по радиопросвечиванию атмосфер планет [151, 152]. Выполнена серия работ [57, 64, 92, 119, 120, 188, 190], реализующая метод бихарактеристик и посвященная исследованию особенностей лучевого распространения в магнитоактивной многослойной ионосферной плазме с учетом отражений от поверхности Земли при наличии искусственных неоднородностей и спорадических слоев.

Помимо расчета лучевых траекторий и волновых векторов, метод бихарактеристической системы послужил основой для определения напряженностей волновых полей. С этой целью была построена расширенная бихарактеристическая система [156], содержащая дополнительно к упомянутым выше шести уравнениям ещё 12 уравнений относительно производных по параметрам лучевого семейства, что позволило разработать алгоритмы расчета расходимости лучевого потока [104, 156]. Кроме того, расчет лучевых траекторий позволяет рассчитать фазу, учесть поглощение вдоль траекторий и вращение вектора поляризации [154].

Важной проблемой, решенной методом расширенной бихарактеристической системы, явилось определение поля на огибающих лучевых семейств – каустиках. На каустиках якобиан расходимости обращается в нуль, лучевая трубка «схлопывается», а интенсивность поля в лучевом приближении обращается в бесконечность. Однако, реальная интенсивность поля на каустике конечна, но существенно возрастает. В условиях распространения радиоволн в сложных неоднородных и магнитоактивных средах на основе расширенной бихарактеристической системы Д.С. Лукиным и Ю.Г. Спиридоновым разработан метод расчета поля на каустике и в её окрестности [67, 156].

Поскольку траектории в фазовом пространстве не пересекаются, бихарактеристическая система позволяет переходить в координатно-импульсное пространство и рассчитывать дифракционную (каустическую) структуру волнового поля, используя специальные функции волновых катастроф (СВК) или канонический оператор Маслова (КОМ).

Метод канонического оператора Маслова [157-161] является одним из наиболее эффективных методов численного анализа тонкой структуры электромагнитных полей в плазме в фокальных областях. Этой проблеме посвящены работы [60, 62, 187, 188]. Численное решение расширенной бихарактеристической системы уравнений позволяет в процессе вычислений одновременно определять положения особенностей, переходить из конфигурационного в смешанное координатно-импульсное пространство и получать решения как в регулярных, так и сингулярных областях, суммируя вклады лучей и не решая задачи пристрелки.

Развитием теории распространения коротковолнового излучения в неоднородных средах с частотной дисперсией и обобщением геометрической теории дифракции является волновая теория катастроф [98, 106, 153, 154]. Благодаря применению канонического оператора В.П. Маслова [159] и теории катастроф Р. Тома [206] и В.И. Арнольда [8,9] в работах [153, 155, 174, 175, 183] были получены результаты, позволившие обобщить некоторые известные ранее равномерные асимптотические решения волновых уравнений [75, 204, 205].

С помощью волновой теории катастроф построена геометрическая (лучевая и каустическая) интерпретация особых фокальных пространственных (или пространственно-временных) дифракционных структур электромагнитных полей. В рамках концепции волновой теории катастроф при решении задачи построения лучевого семейства, всякая особенность дифференцируемых отображений (катастрофа), возникающая при проектировании из координатно-импульсного (фазового) пространства в координатное (конфигурационное) лагранжевых многообразий, построенных на бихарактеристических решениях систем уравнений Гамильтона, соответствует эталонной амплитудно-фазовой структуре волнового поля. Такими эталонными структурами в задачах распространения волн являются области фокусировки различных порядков. Простейшей эталонной структурой является гладкая каустика, а наиболее сложной – идеальный фокус. Возможны и реально наблюдаются промежуточные случаи, то есть фокусировки, соответствующие сложным каустическим структурам: «каустическое остриё» (A_3), «ласточкин хвост» (A_4), «бабочка» (A_5), «омбилики» (D_N , E_6 , E_7 , E_8) и многие другие трёхмерные, двумерные, одномерные как «простые» (нульмодальные), так и модальные особенности [154, 174, 183]. Применение теории катастроф для построения равномерных асимптотических решений задач рассеяния, дифракции и распространения волн различной физической природы (электромагнитных, акустических, гравитационных волн и др.) и анализа особенностей этих решений является перспективным и актуальным направлением современной волновой физики. Опираясь на результаты теории катастроф, исследованы амплитудно-фазовые структуры волновых полей в окрестности структурно-устойчивых двумерных фокусировок омбилического типа [106, 108, 153, 154]. На основе теории катастроф выполнена классификация эталонных фокальных областей, составлены атласы особых каустик и разработаны методы их вычисления [68, 106, 154]. В соответствии с классификацией волновое поле является суперпозицией эталонных структур, каждая из которых описывается своей СВК. При этом возникают две проблемы: эффективный расчет СВК и их производных, образующих базис при построении равномерных асимптотических решений, и

определение коэффициентов подобия – аргументов СВК и коэффициентов асимптотических разложений.

Изучению СВК посвящен целый ряд исследований, в которых были построены представления СВК в виде степенных рядов, найдены асимптотики и системы канонических уравнений [47, 63, 106, 154]. Эти результаты легли в основу различных методов расчета СВК, таких как прямое численное интегрирование вдоль вещественной оси, метод суммирования рядов Тейлора с учетом асимптотических разложений, численное решение системы канонических уравнений, метод рекуррентных соотношений для коэффициентов рядов Тейлора, метод реперных точек и др. [63, 106, 154]. Однако наиболее перспективными являются два подхода. Это контурный метод, основанный на численном интегрировании вдоль контура в комплексной плоскости [59, 149, 184]. Второй подход – метод обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) – основан на сведении системы канонических уравнений к системе ОДУ не только для самой СВК, но и для её первых производных [45, 81, 101, 109, 196, 198, 199].

Существуют два основных метода определения параметров подобия (аргументов СВК и коэффициентов асимптотических разложений): метод седловых точек (метод глобальной асимптотики), развитый в работах [106, 109, 198] и локальный (метод локальной асимптотики) [82, 95, 96, 99, 100, 106, 109, 198, 207]. В методе глобальной асимптотики коэффициенты подобия определяются через значения амплитуд и фаз лучей (то есть в седловых точках). Серьезной проблемой здесь является применение данного метода в зонах частичной или полной тени. В методе локальной асимптотики коэффициенты подобия вычисляются относительно центра особенности (катастрофы). Значительным шагом в развитии теории построения коэффициентов подобия явился метод интерполяционной локальной асимптотики, позволивший по данным из малой области рассчитывать волновое поле в широкой окрестности особенности (катастрофы) [69].

При построении равномерной асимптотической теории, описывающей процессы распространения, дифракции и фокусировки нестационарных

электромагнитных волн (например, видео и радиоимпульсов) в неоднородных анизотропных средах с частотной дисперсией в коротковолновом приближении, традиционными методами являются пространственно-временная геометрическая оптика и пространственно-временная геометрическая теория дифракция. При этом имеют место проблемы, аналогичные тем, что возникают в задачах стационарной дифракции, и приводящие к катастрофам высокой коразмерности и кратности, поскольку начало или конец импульса можно рассматривать, по аналогии с дифракцией, как источник вторичных лучей. В работах [4, 5, 6, 164, 185, 203] рассматривались некоторые простейшие временные фокусировки нестационарного излучения. Однако для построения равномерных асимптотических решений, описывающих пространственно-временные фокусировки, применение волновой теории катастроф, является необходимым, поскольку волновая теория катастроф позволяет классифицировать особые области, обусловленные образованием общих фокальных структур [118]. Особый интерес представляет сочетание двумерных пространственных фокусировок (пространственных фокальных областей) и одномерных временных фокусировок частотно-модулированных радиоимпульсов (временной компрессии сигналов), а также пространственных фокусировок видеоимпульсов. Волновая теория катастроф в сочетании с пространственно-временной геометрической оптикой и пространственно-временной геометрической теорией дифракции позволила построить равномерное асимптотическое описание амплитудно-фазовых эталонных структур электромагнитных полей в таких областях [1, 61, 91, 97, 121, 139].

В последнее время основные исследования концентрируются на разработке программных комплексов, позволяющих применять бихарактеристические методы решения задач распространения радиоволн для глобальных моделей ионосферы Земли типа IRI, моделей, полученных методом радиотомографии, а также моделей неоднородного магнитного поля Земли (International Geomagnetic Reference Field (IGRF), World Magnetic Model (WMM)) [60, 102, 150]. Для успешного применения волновой теории катастроф в задачах радиофизики,

акустики и квантовой механики создана информационная система «wavecat.rosnou.ru», содержащая достаточно полную информацию об основных, краевых, угловых и обобщенных краевых катастрофах, их СКВ, схемах подчинений, атласах каустик, универсальных деформациях и равномерных асимптотических решениях [43, 44, 46].

Целью работы является:

– разработка новых математических методов исследования распространения радиоволн коротковолнового диапазона в ионосфере Земли, развитие методов исследования распространения частотно-модулированных сигналов на основе лучевых бихарактеристических методов, теории катастроф и канонического оператора Маслова;

– разработка и реализация новых эффективных численных методов и алгоритмов, основанных на применении символьных вычислений, в виде комплексов программ для проведения математического моделирования распространения частотно-модулированных сигналов в ионосферной холодной плазме с учетом расходимости, поглощения, анизотропии и нестационарности среды распространения;

– математическое моделирование особенностей распространения радиоволн в ионосферной плазме декаметрового и дециметрового диапазонов с учетом искусственных и естественных неоднородностей.

Задачи работы:

– исследование вариаций поляризационных характеристик при распространении радиоволн дециметрового диапазона в ионосфере Земли в различное время суток с учетом влияния крупномасштабных неоднородностей;

– математическое моделирование особенностей лучевого распространения частотно-модулированного излучения в ионосферной плазме методом бихарактеристик с учетом горизонтальных градиентов в движущихся нестационарных средах;

– математическое моделирование распространения частотно-модулированного излучения в регулярных и каустических областях методами расширенной бихарактеристической системы и канонического оператора с учетом отклоняющего поглощения и влияния внешнего магнитного поля Земли;

– моделирование распространения частотно модулированного излучения методами пространственно-временной волновой теории катастроф.

Научная новизна

1). Впервые на основе новых методов решения пространственно-временной бихарактеристической системы, использующих символьные вычисления, выполнено численного моделирование распространения частотно-модулированных сигналов в ионосферной плазме с учетом анизотропии, нестационарности среды распространения, кривизны поверхности Земли, горизонтальных градиентов и крупномасштабных неоднородностей.

2). Впервые на основе новых методов решения расширенной бихарактеристической системы Лукина выполнены расчеты амплитуды поля в регулярных и каустических областях при распространении радиоволн о- и х-поляризации в анизотропной ионосферной плазме с учетом поглощения среды распространения.

3). Впервые проведено комплексное исследование влияния анизотропной ионосферной плазмы на вариации фазы радиосигнала и фарадеевское вращение плоскости поляризации при распространении дециметрового излучения в ионосфере Земли в зависимости от времени наблюдения, широты, наличия локальных ионосферных неоднородностей и др.

4). Впервые численно исследованы проекции 6-мерного фазового пространства на смешанные координатно-импульсные подпространства (карты канонического оператора Маслова) в случае распространения излучения в ионосферной плазме с учетом спорадического слоя и локальной неоднородности и найдены каустики лучевых семейств и их особенности, возникающие в этих проекциях.

5). Развита теория краевых катастроф и пространственно-временной геометрической теории дифракции, позволяющие моделировать пространственно-временные структуры частотно-модулированных сигналов в плазменном слое с сильной частотной дисперсией.

Теоретическая и практическая значимость работы состоит в следующем:

1. С теоретической точки зрения методы и алгоритмы, развитые в диссертации, позволяют эффективно моделировать распространение стационарных и частотно-модулированных сигналов в ионосферной плазме с учётом внешнего магнитного поля, неоднородностей среды распространения и нестационарности, а также локальных возмущений.

2. С практической точки зрения разработанные в работе алгоритмы и комплексы программ могут быть использованы для радиозондирования верхней атмосферы Земли, для решения задач коротковолновой радиосвязи и радионавигации, в частности для анализа и краткосрочного прогноза условий распространения и приёма ионосферных сигналов, как в спокойных, так и в возмущённых условиях.

Методы исследования. В диссертации используются лучевые методы (метод бихарактеристик), методы волновой теории катастроф, опирающиеся на теорию особенностей дифференцируемых отображений, метод канонического оператора В.П. Маслова, а также методы математического моделирования, в частности, современный аппарат численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Достоверность научных выводов.

Представленные в диссертации научные результаты имеют строгое математическое обоснование, а результаты численных расчётов подтверждаются сопоставлением с результатами известных экспериментов и модельных расчётов.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Разработан метод численного моделирования лучевого распространения частотно-модулированных сигналов в анизотропной, неоднородной, нестационарной ионосферной плазме на основе решения пространственно-временной бихарактеристической системы с применением символьных вычислений и пакета Wolfram Mathematica, позволяющий комплексно исследовать распространение стационарных частотно-модулированных радиоволн в ионосферной плазме с учётом анизотропии, нестационарности среды распространения, кривизны поверхности Земли, горизонтальных градиентов и крупномасштабных неоднородностей.

2. Разработаны методы и алгоритмы, позволяющие прогнозировать поправки к данным фазовых и поляризационных измерений с целью компенсации вариации параметров, обусловленные рефракцией сигналов дециметрового диапазона в неоднородной ионосфере Земли. Получены результаты комплексного исследования влияния анизотропной ионосферной плазмы на вариации фазы радиосигнала, фарадеевское вращение плоскости поляризации отклонение угла прицеливания от угла прямого видения при распространении дециметрового излучения в ионосфере Земли в зависимости от времени наблюдения, широты, наличия локальных ионосферных неоднородностей и др.

3. Предложен численный метод решения расширенной бихарактеристической системы дифференциальных уравнений, разработанный на основе применения символьных вычислений, для определения характеристик лучевых траекторий, расходимости лучевых потоков, положений каустик и полей на каустиках в декартовых и сферических координатах при распространении монохроматического и частотно-модулированного излучения в анизотропной плазме – ионосфере Земли. Предложенный метод позволяет производить моделирование влияния отклоняющего поглощения и расходимости на распространение радиоволн в ионосфере с учетом магнитного поля Земли.

Разработана методика оценки абсолютных величин напряженности электромагнитного поля на каустике с учетом расходимости и поглощения.

4. Предложена и реализована методика расчета амплитудных множителей вдоль лучей для разных карт канонического оператора Маслова и анализ сингулярностей, связанных с касанием лучей каустик, позволяющая исследовать проекции шестимерного фазового пространства на смешанные координатно-импульсные подпространства в случае распространения излучения в ионосферной плазме с учетом спорадического слоя и локальной неоднородности;

5. Разработаны методы и алгоритмы моделирования пространственно-временной структуры частотно-модулированных сигналов в плазменном слое с сильной частотной дисперсией на основе теории краевых катастроф и пространственно-временной геометрической теории дифракции, описывающие совместные каспоидные пространственные и временные фокусировки электромагнитных волн в плазме. Представлены результаты математического моделирования каустической структуры, коэффициентов универсальной деформации, функционального модуля и фазы бегущей волны, амплитудных и фазовых характеристик краевой катастрофы $K_{4,2}$.

Апробация результатов исследования

Основные результаты работы были представлены на следующих научных семинарах, симпозиумах и конференциях: IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI Всероссийские Армандовские чтения (2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021 г., Муромский институт (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Владимирский государственный университет имени А. Г. и Н. Г. Столетовых», Муром); XV, XVI, XVII, XVIII, XIX международные научные конференции «Цивилизация знаний: российские реалии» (2014, 2015, 2016, 2017, 2018 г. АНО ВО РосНОУ, Москва); XXIV Всероссийская научная конференция «Распространение радиоволн» (2014 г., ИСЗФ СО РАН, Иркутск); XXV Всероссийская открытая научная конференция "Распространение радиоволн", посвященная 80-летию

отечественных ионосферных исследований. РРВ-25 (2016 г., Институт оптики атмосферы имени В.Е. Зуева СО РАН, Томск); IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV Международные конференции «Технологии информационного общества» (2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021 г., МТУСИ, Москва); V, VI, VII Всероссийские Микроволновые конференции (2018, 2019, 2020 г. ИРЭ им. Котельникова РАН, г. Москва); XXVI Всероссийская открытая научная конференция "Распространение радиоволн" (2019г., ФГАОУВО "Казанский (Приволжский) федеральный университет", Казань); XVII Всероссийская открытая конференция «Современные проблемы дистанционного зондирования земли из космоса (физические основы, методы и технологии мониторинга окружающей среды, потенциально опасных явлений и объектов)» (2019 г. Институт космических исследований российской академии наук, г. Москва); X, XI, XII, XIII Всероссийские научно-технические конференции "Радиолокация и радиосвязь" (2017, 2018, 2019, 2020 г. ИРЭ им. Котельникова РАН, г. Москва); IV, V, VI, VII, VIII Всероссийские научные конференции «Проблемы военно-прикладной геофизики и контроля состояния природной среды» (2017, 2018, 2019, 2020, 2021 г. Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского г. Санкт-Петербург).

Публикации. По теме диссертации опубликована 51 научная работа. Из них 21 статья опубликована в журналах, рекомендованных ВАК для публикации основных научных результатов (Радиотехника и электроника, Russian Journal of Mathematical Physics, Физические основы приборостроения, Известия высших учебных заведений. Физика, Электромагнитные волны и электронные системы, Телекоммуникации и транспорт (T-Comm), Вестник РосНОУ). В том числе 15 публикаций входят в библиографические и реферативные базы данных Web of Science и (или) Scopus. Исследования выполнялись при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 12-02-00413-а, 13-07-00937-а, ОФИ_М № 13-02-12121, 15-02-04206-а, № 17-02-01183, № 18-02-00544).

Личный вклад соискателя. Разработаны пакеты прикладных программ, реализующие вычислительные методы и алгоритмы, развитые в диссертации. В

большинстве работ, опубликованных с соавторами, которым соискатель глубоко благодарен за сотрудничество, вклад соискателя в постановку и решение задач, разработку компьютерных программ, проведение расчетов, анализ полученных результатов и написание текста статей в части, относящейся к теме диссертации, является основным.

Содержание диссертации. Диссертация содержит введение, пять глав, заключение и список литературы.

В первой главе рассмотрены основные аспекты проблемы распространения частотно-модулированных сигналов в плазме, относящиеся к теме диссертации. Дано описание постановки задачи, приведен вывод основных уравнений электродинамики для неоднородных, анизотропных сред. Рассмотрено лучевое приближение – пространственно-временная геометрическая оптика, и пространственно-временные лучи в ионосферной плазме.

Во второй главе выполнен анализ влияния ионосферы Земли на параметры радиосигналов (поворот вектора поляризации, фазовый сдвиг, отклонение угла прицеливания, отклонение траектории радиосигнала от прямой) в Р-диапазоне в зависимости от пространственной модели ионосферной плазмы, географических координат, ориентации магнитного поля, наличия крупномасштабных и мелкомасштабных неоднородностей. В главе рассмотрены различные модели неоднородной ионосферы: плоская, сферическая, ночная и дневная, возмущённая и невозмущённая, – с целью проведения сопоставительного анализа качества прогнозируемых результатов.

В рассматриваемом дециметровом диапазоне частот существенным вариациям в зависимости от точности восстановления ионосферного профиля подвержены такие параметры как: угол вращения вектора поляризации и фазовые вариации.

В третьей главе выполнено математическое моделирование распространения частотно-модулированного излучения в ионосферной плазме методом бихарактеристик. Выполнено исследование особенностей распространения частотно-модулированного излучения в анизотропной плазме

без учета и с учетом горизонтальных градиентов. Изучено распространение радиосигналов в движущихся нестационарных средах, рассмотрен эффект Доплера. Выполнено математическое моделирование распространения радиоволн в нестационарной плазме с учетом кривизны поверхности Земли и ионосферных слоев. Рассмотрено распространение радиоволн в ионосфере Земли в зависимости от высоты источника излучения.

В четвертой главе проведено исследование особенностей амплитудно-фазовых структур радиосигналов в ионосферной плазме методами расширенной бихарактеристической системы Д.С. Лукина и канонического оператора В.П. Маслова. Рассмотрена модель эффективной диэлектрической проницаемости ионосферы Земли, расширенная бихарактеристическая система уравнений, исследовано лучевое распространение в фазовом пространстве, лучевые расходимости, выполнено численное моделирование распространения частотно-модулированного излучения электромагнитных волн в ионосфере с учетом отклоняющего поглощения и влияния внешнего магнитного поля Земли. Разработана методика оценки абсолютных величин напряженности электромагнитного поля на каустике с учетом расходимости и поглощения.

В пятой главе разработаны новые математические методы и алгоритмы моделирования пространственно-временной структуры частотно-модулированных сигналов в плазменном слое с сильной частотной дисперсией на основе теории краевых катастроф и пространственно-временной геометрической теории дифракции.

Исследованы краевая катастрофа F_4 , а также особенности V_{N+1} и C_{N+1} , исследована каустическая структура краевой катастрофы $K_{4,2}=(A_3, A_3)$. Разработан комплекс программ для описания каустической структуры краевой катастрофы $K_{4,2}$, возникающей при совместной каспоидной пространственной и временной фокусировке электромагнитного излучения волны в плазменном слое с сильной частотной дисперсией. Приведены каустические структуры краевой катастрофы $K_{4,2}$ при различных коэффициентах универсальной деформации и функционального модуля. Развита метод локальной асимптотики, описывающий

дифракционные фокусировки электромагнитных полей в случае, когда семейство первичных и вторичных лучей образуют фокусировки каспидного типа. Выполнено математическое моделирование коэффициентов универсальной деформации, функционального модуля и фазы бегущей волны. Получены явные выражения для параметров универсальной деформации.

Список литературы содержит 207 наименований публикаций, включая 51 публикацию соискателя.

ГЛАВА 1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ В ПЛАЗМЕ

§ 1.1. Радиоизлучение в плазме. Постановка задачи. Основные уравнения.

Рассмотрим уравнения, описывающие свободное распространение электромагнитного излучения в плазме. Будем считать, что заданы источники излучения радиоволн и необходимо определить электромагнитное поле, создаваемое этими источниками. Запишем в системе СГС уравнения Максвелла для электромагнитного поля в случае немонахроматических волн [37, 49, 147]:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{st}, & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi \rho_{st}, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь c – скорость света в пустоте, t – время, $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3) = (x, y, z)$ – декартовы координаты, \vec{E} – напряженность электрического поля, \vec{H} – напряженность магнитного поля, \vec{B} – индукция магнитного поля, \vec{D} – вектор обобщенной индукции электрического поля. Внешние источники электромагнитного поля характеризуются вектором плотности сторонних электрических токов \vec{j}_{st} и плотностью сторонних электрических зарядов ρ_{st} . Вообще говоря, полная усредненная плотность тока \vec{j}_{Σ} является суммой плотности тока поляризации \vec{j}_p , плотности тока проводимости \vec{j}_{σ} и плотности сторонних электрических токов \vec{j}_{st} [37]:

$$\vec{j}_{\Sigma} = \vec{j}_p + \vec{j}_{\sigma} + \vec{j}_{st}, \quad (1.2)$$

а плотность полного усредненного заряда ρ_{Σ} – суммой плотности свободного заряда ρ_{σ} , плотности связанного заряда ρ_p и плотности сторонних электрических зарядов ρ_{st} :

$$\rho_{\Sigma} = \rho_{\sigma} + \rho_p + \rho_{st}. \quad (1.3)$$

Плотность связанного заряда ρ_p и плотности тока поляризации \vec{j}_p связаны уравнением непрерывности:

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_p = 0, \quad (1.4)$$

причем

$$\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \quad \rho_p = -\operatorname{div} \vec{P}, \quad (1.5)$$

где \vec{P} – вектор поляризации.

Учитывая, что вектор индукции электрического поля \vec{D}' равен:

$$\vec{D}' = \vec{E} + 4\pi \vec{P}, \quad (1.6)$$

находим, что

$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} \vec{D}' + 4\pi \rho_p, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t} - 4\pi \vec{j}_p. \quad (1.7)$$

Если объединить токи поляризации и токи проводимости [37]:

$$\vec{j}_t = \vec{j}_p + \vec{j}_\sigma, \quad (1.8)$$

а также связанные и свободные заряды:

$$\rho_t = \rho_p + \rho_\sigma, \quad (1.9)$$

то для суммарных токов и зарядов также справедливо уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_t = 0, \quad (1.10)$$

и поэтому можно ввести вектор \vec{D} обобщенной индукции электрического поля, такой что

$$\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} \vec{E} - 4\pi \rho_t. \quad (1.11)$$

В результате возникает система (1.1).

В настоящей работе нелинейные процессы не рассматриваются, то есть предполагается, что электрические параметры среды не зависят от величин напряженностей полей \vec{E} и \vec{H} .

Если предположить, что входящие в систему (1.1) величины меняются по гармоническому закону, то есть пропорциональны $e^{i\omega t}$, где ω – круговая частота, то систему (1.1) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= i \frac{\omega}{c} \vec{D} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{st}, & \operatorname{rot} \vec{E} &= -i \frac{\omega}{c} \vec{B}, \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi \rho_{st}, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Обычно магнитная индукция \vec{B} и напряженность магнитного поля \vec{H} пропорциональны друг другу:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (1.13)$$

где μ – магнитная проницаемость среды, или связаны тензорным соотношением:

$$B_n = \sum_{m=1}^3 \mu_{nm} H_m. \quad (1.14)$$

Поскольку работа посвящена распространению радиоволн в ионосферной плазме, будем считать, что $\mu=1$, и $\vec{B} = \vec{H}$.

Относительно обобщенной электрической индукции \vec{D} и напряженности электрического поля \vec{E} будем предполагать, что они связаны в общем случае операторным соотношением [37, 76, 154]:

$$D_n = \sum_{m=1}^3 \hat{\epsilon}_{nm} E_m. \quad (1.15)$$

В развернутом виде выражение (1.15) можно переписать как [154]

$$D_n(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t d\eta \int_Q \sum_{m=1}^3 \tilde{\epsilon}_{nm}(\vec{r} - \vec{\xi}, t - \eta, \vec{r}, t) E_m(\vec{\xi}, \eta) d\vec{\xi}, \quad (1.16)$$

где ядро интегрального оператора $\tilde{\epsilon}_{nm}$ это тензор электрической проницаемости среды [76]. Зависимость ядра $\tilde{\epsilon}_{nm}$ от разности аргументов характеризует пространственную и временную дисперсии среды распространения, зависимость от координат и времени – неоднородность и нестационарность среды. Из формулы (1.16) следует, что электрическая индукция зависит как от напряженности поля в окрестности рассматриваемой точки, так и от напряженности поля в предшествующие моменты времени.

В настоящей диссертационной работе внешние распределенные источники излучения не рассматриваются (считается, что источник излучения точечный). Поэтому вне этой точки можно считать, что \vec{j}_{st} и ρ_{st} равны нулю. Тогда система (1.1) принимает вид:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1.17-1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (1.17-2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad (1.17-3)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0. \quad (1.17-4)$$

Сведём решение системы (1.17) к решению волнового уравнения. Для этого вычислим ротор от обеих частей уравнения (1.17-2):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \operatorname{rot} \vec{H}}{\partial t}. \quad (1.18)$$

Подставим в правую часть уравнения (1.18) выражение для ротора напряженности магнитного поля из уравнения (1.17-1), и учтем, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}. \quad (1.19)$$

Тогда получим волновое уравнение

$$\Delta \vec{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}, \quad (1.20)$$

в котором для обобщенной индукции электрического поля \vec{D} справедливо выражение (1.15). Векторное уравнение (1.20) состоит из трех уравнений относительно компонент вектора напряженности электрического поля \vec{E} . Учтя соотношение (1.15), выпишем i -ое уравнение:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 E_i}{\partial r_j^2} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 E_j}{\partial r_i \partial r_j} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{j=1}^3 \hat{\varepsilon}_{ij} E_j. \quad (1.21)$$

Меняя i от 1 до 3, получаем однородную систему линейных дифференциальных уравнений относительно компонент вектора \vec{E} .

Преобразуем систему (1.21) в соответствии с процедурой, изложенной в работах [37, 76]. Представим компоненту напряженности электрического поля \vec{E} в виде:

$$E_j(\vec{r}, t) = A_j(\vec{r}, t) e^{i\Phi(\vec{r}, t)}. \quad (1.22)$$

Аналогично для компоненты напряженности магнитного поля \vec{H} имеем:

$$H_j(\vec{r}, t) = Q_j(\vec{r}, t) e^{i\Phi(\vec{r}, t)}. \quad (1.23)$$

В формулах (1.22) и (1.23) величины $A_j(\vec{r}, t)$, $Q_j(\vec{r}, t)$ и $\Phi(\vec{r}, t)$ это медленно меняющиеся функции своих аргументов. Будем считать, что фазовая функция $\Phi(\vec{r}, t)$ пропорциональна большому параметру, который явно выделять не будем. Приближенно выражение (1.22) можно представить в как:

$$E_j(\vec{\xi}, \eta) = A_j(\vec{r}, t) e^{i(\Phi(\vec{r}, t) + \omega\Delta t - \vec{k}\Delta\vec{r})}, \quad (1.24)$$

где

$$\omega = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \quad \vec{k} = \text{grad}\Phi, \quad \Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{\xi} \quad \Delta t = t - \eta. \quad (1.25)$$

Подставляя (1.24) в (1.16) и выполняя соответствующие преобразования, находим, что

$$D_i(\vec{r}, t) \cong \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij}(\vec{r}, t; \omega, \vec{k}) E_j(\vec{r}, t), \quad (1.26)$$

где

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}, t; \omega, \vec{k}) = \int_{Q=-\infty}^t \int \tilde{\varepsilon}_{ij}(\vec{r} - \vec{\xi}, t - \eta, \vec{r}, t) d\eta d\vec{\xi} \quad (1.27)$$

комплексный тензор электрической проницаемости [76] или иначе тензор эффективной диэлектрической проницаемости среды.

§ 1.2. Пространственно-временная геометрическая оптика

Выведем основные уравнения пространственно-временной геометрической оптики (см. [76, 154]). Для этого подставим (1.22) в (1.21) и учтем, что

дифференцирование по пространственной (r_j) и временной (t) координате следует заменить согласно (1.25) на умножение на ik_j и $-i\omega$ соответственно:

$$\frac{\partial E_m}{\partial r_j} \cong ik_j E_m, \quad \frac{\partial \varepsilon_{mj} E_j}{\partial t} \cong -i\omega \varepsilon_{mj} E_j, \quad \frac{\partial H_m}{\partial r_j} \cong ik_j H_m, \dots, \quad \frac{\partial H_j}{\partial t} \cong -i\omega H_j, \quad (1.28)$$

поскольку в геометрикооптическом приближении сохраняется только главный член. В результате находим:

$$\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij} + k_i k_j - \delta_{ij} |\vec{k}|^2 \right) E_j = 0, \quad j=1, 2, 3, \quad (1.29)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Алгебраическая система (1.28) является линейной и однородной, и имеет нетривиальное решение тогда, когда её определитель равен нулю, то есть:

$$\tilde{\Gamma} = \det \left\| \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij} + k_i k_j - \delta_{ij} |\vec{k}|^2 \right\| = 0. \quad (1.30)$$

Этот определитель называется Гамильтонианом.

Как хорошо известно [12], детерминант матрицы равен произведению собственных значений матрицы. Матрица, стоящая в (1.30), третьего порядка. Поэтому она имеет три собственных значения:

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3, \quad (1.31)$$

которые всегда можно найти явно благодаря формуле Кардана и которые мы также будем называть Гамильтонианами. Иногда все собственные значения различны, а иногда совпадают [76, 154]. Обращение в нуль в соответствии с (1.30) каждого собственного значения

$$\Gamma_j = 0 \quad (1.32)$$

порождает лучевое семейство и является одним из возможных решений задачи.

Если тензор эффективной диэлектрической проницаемости среды диагональный и все значения, стоящие на главной диагонали, одинаковые:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij}, \quad (1.33)$$

то

$$\Gamma_1 = \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \Gamma_2 = \Gamma_3 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (1.34)$$

Первое собственное значение описывает распространение плазменных волн (см. [76]), вторые два являются типичными Гамильтонианами волнового уравнения.

Однако для дальнейшего нам будет более полезен такой тензор эффективной диэлектрической проницаемости среды, в котором первый диагональный элемент равен нулю, а два других одинаковые:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}, \quad \varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon. \quad (1.35)$$

Тогда все три собственных значения различны:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}, \\ \Gamma_{2,3} &= \frac{1}{2} \left(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mp \\ &\mp \frac{1}{2} \sqrt{\left(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \right)^2 + 2\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \left(-k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \right) + \varepsilon^2 \frac{\omega^4}{c^4}}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Первое собственное значение описывает волноводное распространение. Что же касается двух оставшихся, то из условия (1.32) находим, что $k_2^2 + k_3^2 = 0$, то есть $k_2 = k_3 = 0$. Что же касается третьей компоненты волнового вектора, то в случае знака «минус» она может быть выбрана произвольно, а в случае знака «плюс» должно выполняться условие:

$$k_1^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} = 0.$$

Поэтому для описания распространения волн в ионосферной плазме целесообразно рассматривать первое собственное значение.

Уравнение (1.32) можно рассматривать как уравнение в частных производных первого порядка относительно неизвестной функции $\Phi(\vec{r}, t)$. В дальнейшем индекс у Гамильтониана будем опускать. Тогда в соответствии с общей теорией решения таких уравнений [169] можно перейти к бихарактеристической системе Гамильтона (см. также [10, 76, 154]):

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{k}}, \quad \frac{d\vec{k}}{d\tau} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{r}}, \quad \frac{dt}{d\tau} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \omega}, \quad \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \quad (1.37)$$

с начальными условиями, которые будут определены ниже. Решением системы являются функции (характеристики):

$$\vec{r} = \vec{r}(\alpha, \beta, t_0; \tau), \quad \vec{k} = \vec{k}(\alpha, \beta, t_0; \tau), \quad t = t(\alpha, \beta, t_0; \tau), \quad \omega = \omega(\alpha, \beta, t_0; \tau), \quad (1.38)$$

зависящие от параметров α, β, t_0 , называемых лучевыми координатами, и параметра τ вдоль траектории. Зная решение системы (1.37) нетрудно определить фазу вдоль луча Φ из уравнения:

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = \sum_{j=1}^3 k_j \frac{\partial \Gamma}{\partial k_j} + \omega \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega}, \quad (1.39)$$

откуда находим, что

$$\Phi = \int_{\tau_0}^{\tau_k} \left(\sum_{j=1}^3 k_j \frac{\partial \Gamma}{\partial k_j} + \omega \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \right) d\tau, \quad (1.40)$$

где τ_0 соответствует начальной точке выхода луча, а τ_k – конечной (точке наблюдения). Из бихарактеристической системы нетрудно определить групповую скорость по формуле [76, 154]:

$$V_g = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{k}} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega}. \quad (1.41)$$

Таим образом в нулевом приближении

$$\vec{E} = \vec{l} A \exp(i\Phi), \quad (1.42)$$

где A – амплитуда в приближении пространственно-временной геометрической оптики, а \vec{l} – вектор поляризации.

Выражения для амплитуды A для нулевого приближения определяются уравнениями переноса и согласно [76, 154] имеют вид:

$$|A(t)| = |A(t_0)| \left(\frac{b(t_0) J(t_0) \omega(t)}{b(t) J(t) \omega(t_0)} \right)^{1/2} \exp \left(- \int_{t_0}^t g(\eta) d\eta \right), \quad (1.43)$$

$$\arg A(t) = \arg A(t_0) - \int_{t_0}^t G(\eta) d\eta, \quad (1.44)$$

где введены следующие обозначения:

$$\varepsilon_{mj}^e = (\varepsilon_{mj} + \bar{\varepsilon}_{mj})/2 \quad (1.45)$$

—эрмитова часть комплексного тензора электрической проницаемости,

$$\varepsilon_{mj}^a = (\varepsilon_{mj} - \bar{\varepsilon}_{mj})/2 \quad (1.46)$$

— антиэрмитова часть комплексного тензора электрической проницаемости,

$$b(t) = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \omega^2 \varepsilon_{ij}^e}{\omega \partial \omega} \bar{l}_i l_j, \quad (1.47)$$

$$g(t) = -\frac{\omega}{2b} \sum_{m,j}^3 \left(2i\varepsilon_{mj}^a + \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{mj}^e}{\partial \omega \partial t} - \sum_{\kappa=1}^3 \frac{\partial^2 \varepsilon_{mj}^e}{\partial x_\kappa \partial k_\kappa} \right) \right) l_m \bar{l}_j, \quad (1.48)$$

$$G(t) = \frac{1}{b} \operatorname{Im} \left(c \bar{l} \operatorname{rot} \bar{h} + c \bar{h} \operatorname{rot} \bar{l} + \sum_{i,j=1}^3 \left(\bar{l}_i \frac{\partial l_j}{\partial t} \frac{\partial \omega \varepsilon_{ij}^e}{\partial \omega} - \omega \bar{l}_i \sum_{\kappa=1}^3 \frac{\partial l_j}{\partial x_\kappa} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^e}{\partial k_\kappa} \right) \right), \quad (1.49)$$

$$\bar{h} = \frac{c}{\omega} [\bar{k}, \bar{l}]. \quad (1.50)$$

Для определения вектора поляризации \bar{l} справедлива система уравнений [76]:

$$\sum_{j=1}^3 (p^2 \delta_{mj} - p_m p_j - \varepsilon_{mj}) l_j = 0, \quad \bar{p} = \bar{k}/|\bar{k}|. \quad (1.51)$$

§ 1.3. Эффективная диэлектрическая проницаемость холодной ионосферной плазмы

В данной работе мы рассматриваем особенности распространения радиоволн в ионосферной плазме с учетом магнитного поля Земли. Хорошо известно [49], что при проникновении в холодную замагниченную плазму электромагнитная волна разделяется на обыкновенную и необыкновенную волны, которые распространяются по разным траекториям. Кроме траекторий распространения, они отличаются направлением вращения вектора

напряженности электрического поля. Вектор напряженности электрического поля, также как и вектор напряженности магнитного поля, вращаются по часовой стрелке для обыкновенной волны, если смотреть с конца вектора, указывающего направление распространения волны, и против часовой стрелки для необыкновенной волны [38, 49].

Если ввести систему координат, связанную с лучевой траекторией, то можно показать [49], что тензор диэлектрической проницаемости имеет вид (1.35), где параметр ε имеет смысл квадрата показателя преломления и выражается формулой Эпплтона-Хартри:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\nu}{1 - i w - \frac{u \sin^2 \alpha}{2(1 - \nu - i w)} \pm \sqrt{\frac{u^2 \sin^4 \alpha}{4(1 - \nu - i w)^2} + u \cos^2 \alpha}}, \quad (1.52)$$

Знак « \pm » указывает на тип волны: «+» для обыкновенной волны и «-» для необыкновенной. Поэтому в дальнейшем вместо символа ε будем писать ε_{\pm} . В формуле (1.35) угол α это угол между вектором напряженности магнитного поля Земли $\vec{H}_0 = (H_{0x}, H_{0y}, H_{0z})$ и волновым вектором, параметр ν является отношением квадрата плазменной частоты к квадрату рабочей частоты:

$$\nu = \left(\frac{\omega_{\text{пл}}}{\omega} \right)^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m_e \omega^2}, \quad (1.53)$$

величина u это отношение квадрата гирочастоты частоты к квадрату рабочей частоты:

$$u = \left(\frac{\omega_H}{\omega} \right)^2 = \frac{e^2 H_0^2}{m_e^2 c^2 \omega^2}, \quad (1.54)$$

а параметр w пропорционален отношению эффективной частоты соударений электронов ν_e и рабочей частоты [38]:

$$w = \frac{\nu_e}{\omega}. \quad (1.55)$$

В формулах (1.53–1.54) e это – заряд электрона, m_e – масса электрона, H_0 – величина напряженности магнитного поля Земли, $N(\vec{r}, t)$ – величина электронной концентрации.

Если пренебречь частотой соударения электронов, то есть не рассматривать поглощение на трассе распространения, то

$$\varepsilon_{\pm} = 1 - \frac{2\nu(1-\nu)}{2(1-\nu) - u \sin^2 \alpha \pm \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u(1-\nu)^2 \cos^2 \alpha}}. \quad (1.56)$$

Если плазма не замагниченная, то есть внешнее магнитное поле отсутствует, то обыкновенная и необыкновенная волны не разделяются и:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\nu}{1 - i\nu}, \quad (1.57)$$

или без учета поглощения:

$$\varepsilon = 1 - \nu. \quad (1.58)$$

§ 1.4. Применение символьных вычислений для решения бихарактеристических уравнений для определения лучевых траекторий

Для определения лучевых траекторий, характеризующих величину и направление распространения энергии в задачах радиосвязи и радиозондирования, необходимо построение численных методов и алгоритмов решения системы бихарактеристических уравнений вида (1.37). Такая задача решалась во многих исследованиях различными способами [67, 93, 149, 156].

Главной особенностью методики, развиваемой в нашей работе, является привлечение для решения данной задачи языков программирования четвертого уровня и объединение численных и аналитических методов с помощью применения символьных вычислений. Рассмотрим основные этапы такого подхода. Остановимся на структуре бихарактеристической системы (1.37). Система состоит из восьми обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Система нелинейная. Первые три уравнения определяют производные координаты луча $\vec{r} = (x, y, z)$ относительно параметра вдоль траектории τ . Вторые

три уравнения определяют производные волнового вектора $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ относительно параметра вдоль траектории, седьмое уравнение определяет скорость изменения группового времени t вдоль траектории, а последнее восьмое уравнение – скорость изменения круговой частоты сигнала.

Если бы изучалось распространение радиоволны на плоскости, то первая и вторая группы уравнений содержали бы по два уравнения. Такие задачи могут быть поставлены, но в настоящем исследовании они не рассматривались.

В данной работе рассматривается бихарактеристическая система с Гамильтонианом вида:

$$\Gamma = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (1.59)$$

Определяющим для вычислений является вид эффективной диэлектрической проницаемости ε . Даже в простейшем случае (1.58) ε зависит как от координат (так как ε зависит от электронной концентрации, которая в свою очередь зависит от координат), так и от частоты ω . В случае магнитоактивной среды эффективная диэлектрическая проницаемость зависит от волнового вектора \vec{k} (формула (1.56)). Такой средой является ионосферная плазма, находящаяся в магнитном поле Земли [49]. Кроме того, диэлектрическая проницаемость ε может зависеть от группового времени t , поскольку в ионосфере могут распространяться гравитационные волны. Если же диэлектрическая проницаемость не зависит от группового времени, то, так как частота ω остается постоянной, можно исключить параметр t и преобразовать систему к «стационарному» виду:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{k}} \bigg/ \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{r}} \bigg/ \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega}. \quad (1.60)$$

Тогда параметром интегрирования становится групповое время t .

Прежде чем численно решать систему (1.37) необходимо определить правые части системы, то есть, зная электронную концентрацию и магнитное поле Земли, выполнить дифференцирование ε по компонентам вектора \vec{r} , круговой частоте ω , компонентам волнового вектора \vec{k} и, если это необходимо, и по групповому

времени t . Обычно для решения таких задач используются либо численные алгоритмы [11, 168], точность которых ограничена, либо, в простейших случаях, аналитическое дифференцирование, что затруднительно, когда плотность электронной концентрации задана интерполяционной функцией.

Следует подчеркнуть, что хотя в случае, когда электронная концентрация N задана аналитически, вычисление производных традиционным способом возможно, для действительно сложных зависимостей такая процедура становится не только очень трудоёмкой (выражения для производных могут занимать десятки страниц), но неизбежно приводит к ошибкам, вероятность которых возрастает с увеличением сложности вычислений. Причем даже в случае правильного решения задачи, автор не может быть уверен в своих результатах.

В данной работе для нахождения производных были применены символьные вычисления, предусмотренные в языках программирования четвёртого поколения, что в равной степени пригодно как в случае, когда электронная концентрации и магнитное поле заданы в виде формул (практически любого уровня сложности), так и случае, когда электронная концентрации и магнитное поле Земли заданы в виде интерполяционных функций.

Последним шагом, окончательно формирующим задачу Коши для бихарактеристической системы уравнений, является задание начальных условий. В настоящей работе, как правило, предполагается, что источник излучения точечный и неподвижный. По крайней мере, скорость его перемещения много меньше скорости распространения сигнала и в рамках данной задачи его движением можно пренебречь. Таким образом,

$$\vec{r}|_{\tau=0} = (x_0, y_0, z_0) \quad (1.61)$$

– начальные условия для первой группы уравнений.

Для второй группы уравнений необходимо задать начальные значения волнового вектора:

$$k_x(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \zeta \cos \eta, \quad k_y(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \zeta \cos \eta, \quad k_z(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \eta. \quad (1.62)$$

Вообще-то начальное значение эффективной диэлектрической проницаемости ε_0 само зависит от начального значения волнового вектора, но поскольку эффективная диэлектрическая проницаемость, согласно формулам (1.52), (1.56), зависит от волнового вектора через

$$\cos^2 \alpha = \frac{(H_{0x}k_x + H_{0y}k_y + H_{0z}k_z)^2}{H_0^2 |\vec{k}|^2}, \quad (1.63)$$

то это означает, что абсолютное значение волнового вектора в начальный момент в выражении для ε_0 может быть задано произвольно. Последнее замечание относится к случаю, когда источник находится в магнитоактивной плазме. Углы ζ и η задают компоненты волнового вектора в сферической системе координат.

Если бихарактеристическая система стационарная (см. (1.60)), то шести начальных условий (1.61) (1.62) оказывается достаточно. Они определяются при $t=0$. Для нестационарных задач необходимо задать ещё два условия:

$$\omega(0) = \omega_0 \quad (1.64)$$

– начальное значение круговой частоты, и

$$t(0) = t_0. \quad (1.65)$$

Последнее особенно важно для частотно-модулированных сигналов (импульсов), когда в соответствии с концепциями пространственно-временной геометрической оптики [4, 77, 97, 185, 203] каждая частота излучается в свой момент времени.

После завершения формирования системы можно перейти к численному интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, которое в языках программирования четвертого уровня выполняется стандартной хорошо отлаженной процедурой с заданной точностью. Решение получается в виде интерполяционной функции от параметра интегрирования, которое может быть использовано для построения графиков, формирования таблиц или в дальнейших вычислениях.

Преимуществом данного подхода является простота и гарантированная точность решения задачи. Недостаток также очевиден: нельзя вмешаться в процесс построения решения и получить дополнительную информацию

непосредственно в ходе интегрирования системы, а это активно используется в традиционных подходах для решения задачи пристрелки, вычисления расходимости, обнаружения каустик и т.д. Поэтому для решения всех этих задач в работе разработаны специальные алгоритмы.

§ 1.5. Пространственно-временная волновая теория катастроф

Рассмотренное в § 1.2 асимптотическое решение задачи о распространении радиоволн в лучевом (геометрооптическом – ГО) приближении это выражение (1.42) или в многолучевом случае сумма таких выражений. Однако при решении задач в лучевом приближении возникают поверхности, на которых выражения типа (1.42) обращаются в бесконечность, так как в них входит якобиан расходимости, который в случае фокусировки излучения обращается в ноль, а стоит он в знаменателе. Эти поверхности называются каустическими или просто каустиками. Каустики разделяют всё конфигурационное (трёхмерное или четырёхмерное) пространство на области с различным числом ГО решений. Поэтому лучевые асимптотики называются неравномерными. Равномерные асимптотики, не имеющие расходимостей и опирающиеся на лучевое приближение, строятся с помощью волновой теории катастроф [8, 43, 106, 154] в виде асимптотических рядов, содержащих набор специальных функций и их первых производных [81, 127]. В случае простых (нульмодальных) катастроф такая асимптотика может быть записана как:

$$U(\vec{r}, t) = e^{i\theta} \left\{ (l_1)_g I^\Sigma(\vec{\lambda}) + \sum_{k=2}^N (l_k)_g \left(\frac{\partial I^\Sigma}{\partial \lambda_{k-1}} \right) \right\}. \quad (1.66)$$

К простым катастрофам относится вся каспоидная серия A_N : гладкая каустика ($\Sigma = A_2$), каустическое остриё или cusp («клюв») ($\Sigma = A_3$), «ласточкин хвост» ($\Sigma = A_4$), «бабочка» ($\Sigma = A_5$), «вигвам» ($\Sigma = A_6$), «звезда» ($\Sigma = A_7$) и др. Также простыми являются катастрофы, принадлежащие омбилической серии D_N : эллиптическая омбилика ($\Sigma = D_4^-$), гиперболическая омбилика ($\Sigma = D_4^+$),

параболическая омбилика ($\Sigma = D_5$) и др. Простыми являются и внесерийные катастрофы: E_6 , E_7 и E_8 [43].

Перечисленные выше катастрофы описывают основные наиболее часто встречающиеся фокусировки как пространственные, возникающие в стационарных задачах, так и пространственно-временные, возникающие, например, при фокусировке частотно модулированного излучения [35,97].

Обобщением волновой теории катастроф на задачи дифракции и распространения радиоимпульсов является волновая теория краевых и угловых катастроф. В задачах дифракции помимо первичного ГО лучевого семейства возникают вторичные лучевые семейства, образующиеся при попадании волны на границы разделов сред, в том числе на границы (края) проводящих экранов [34, 189]. Вторичные лучи совместно с первичными образуют единые лучевые семейства, особыми (сингулярными) структурами которых являются не только каустики первичных лучевых семейств, но и каустики вторичных (краевых) лучевых семейств, а также границы свет-тень.

В таблицах 1.1–1.2 приведены нормальные формы и возмущения краевых катастроф, наиболее часто встречающихся при решении практических задач [8, 9, 58, 85, 98, 105]. В таблицах введены обозначения:

1). Σ – символ краевой катастрофы. Он состоит из двух символов: Σ_g – символ основной катастрофы, отвечающей фокусировке первичных лучей, и Σ_E – символ краевой катастрофы, отвечающей фокусировке вторичных лучей;

2). $N = N_g + N_E$, – кратность особенности, N_g – кратность (число лучей) ГО катастрофы Σ_g , N_E – кратность (число лучей) краевой катастрофы Σ_E ;

3). L – коразмерность особенности, M – модальность катастрофы, a – функциональный модуль,

4). $\bar{\alpha}$ – минимальная размерность быстроосциллирующего интеграла (специальной функции волновой катастрофы – СВК).

Таблица 1.1. Нормальные формы краевых катастроф

№	Σ	Σ_g	Σ_E	Особый росток φ_0^Σ	N	L	M	$\bar{\alpha}$
1	B_2	A_1	A_1	$\pm z^2$	2	2	0	1
2	C_2			$xz \pm x^2$				2
3	B_{N+1}	A_N	A_1	$\pm z^{N+1}$	$N+1$	N	0	1
4	C_{N+1}	A_1	A_N	$xz \pm x^{N+1}$	$N+1$	N	0	2
5	F_4	A_2	A_2	$\pm z^2 \pm x^3$	4	3	0	2
6	$K_{4,2}$	A_3	A_3	$z^2 + ax^2z \pm x^4$	6	4	1	2
9	$K_{1,2N-3}^\#$	A_{2N}	A_3	$(z+x^2)^2 + axz^N; N \geq 2$	$2N+3$	$2N+1$	1	2
10	$K_{1,2N-4}^\#$	A_{2N-1}	A_3	$(z+x^2)^2 + az^N; N \geq 3$	$2N+2$	$2N$	1	2
11	$K_{N,2}$	A_3	A_{N-1}	$az^2 + zx^2 \pm x^N; N \geq 5$	$N+2$	N	1	2
12	K_8^{**}	A_4	A_4	$x^5 + z + azx^3$	8	6	1	2

Таблица 1.2. Возмущения краевых катастроф

№	Σ	Возмущения: $\varphi_1^\Sigma, \dots, \varphi_L^\Sigma$	Ограничения на функциональный модуль a
1	B_2	z	–
2	C_2	$x(z)$	–
3	B_{N+1}	z, \dots, z^N	–
4	C_{N+1}	$x, \dots, x^N (x, \dots, x^{N-1}, z)$	–
5	F_4	x, z, xz	–
6	$K_{4,2}$	x, x^2, z, xz	$a^2 \neq \pm 4$
9	$K_{1,2N-3}^\#$	$z, \dots, z^N, xz^0, \dots, xz^{N-1}, x^2$	$a \neq 0$
10	$K_{1,2N-4}^\#$	$z, \dots, z^{N-1}, xz^0, \dots, xz^{N-1}, x^2$	$a \neq 0$
11	$K_{N,2}$	xz, x, \dots, x^{N-2}, z	$a \neq 0$
12	K_8^{**}	x, x^2, x^3, z, zx, zx^2	–

Из таблиц 1.1 и 1.2 можно построить универсальную деформацию F_Σ , которая связана с обобщенным эйконалом соотношением [109, 198]:

$$\Phi = F_{\Sigma} + \theta, \quad (1.67)$$

в котором θ – фаза бегущей волны. Седловые (стационарные) точки обобщённого эйконала соответствуют первичным ГО лучам, а стационарные точки сужения – вторичным (краевым) лучам. Для того чтобы построить универсальную деформацию F_{Σ} из таблиц 1.1 и 1.2 необходимо воспользоваться формулой:

$$F_{\Sigma} = \varphi_o^{\Sigma} + \sum_{j=1}^L \lambda_j \varphi_j^{\Sigma}. \quad (1.68)$$

В сложных случаях положения центров краевых катастроф можно определить, пользуясь необходимыми и достаточными условиями, сформулированными в таблице 1.3 [83, 84, 109, 126, 198].

Таблица 1.3

Σ	Σ_g, Σ_E	\bar{a}	<u>Необходимые и достаточные условия</u> Общее условие: $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0$
B_{N+1}	$A_N \ A_1$	1	$\Phi_{1^k} = 0, k = 1, \dots, N; \Phi_{1^{N+1}} \neq 0$
C_{N+1}	$A_1 \ A_N$	2	$\Phi_{2^k} = 0, k = 1, \dots, N; \Phi_{2^{N+1}} \neq 0, \Phi_{12} \neq 0$
F_4	$A_2 \ A_2$	2	$\Phi_{12} = \Phi_{22} = 0; \Phi_{11} \neq 0; \Phi_{222} \neq 0$
$K_{4,2}$	$A_3 \ A_3$	2	$\Phi_{2222} \neq 0; \Phi_{11} \neq 0$ $\Phi_{222} = \Phi_{22} = \Phi_{12} = 0;$ $\Phi_{11} \Phi_{2222} \neq 3 \Phi_{122}^2$
$K_{N,2}$	$A_3 \ A_{N-1}$	2	$\Phi_{2^k} = 0, k = 1, \dots, N-1; \Phi_{2^N} \neq 0$ $\Phi_{11} \neq 0; \Phi_{12} = 0; \Phi_{122} \neq 0; N \geq 5$
$K_{1,1}^{\#}$	$A_4 \ A_3$	2	$\Phi_{22} = \Phi_{12} = \Phi_{222} = 0; \Phi_{2222} \neq 0; \Phi_{11} \neq 0$ $\Phi_{11} \Phi_{2222} = 3 \Phi_{122}^2;$ $\Phi_{11}^2 \Phi_{22222} \neq 10 \Phi_{11} \Phi_{122} \Phi_{1222} - 15 \Phi_{112} (\Phi_{122})^2$
$K_{1,2}^{\#}$	$A_5 \ A_3$	2	$\Phi_{22} = \Phi_{12} = \Phi_{222} = 0; \Phi_{2222} \neq 0; \Phi_{11} \neq 0$ $\Phi_{11} \Phi_{2222} = 3 \Phi_{122}^2;$ $\Phi_{11}^2 \Phi_{22222} = 10 \Phi_{11} \Phi_{122} \Phi_{1222} - 15 \Phi_{112} (\Phi_{122})^2;$ $\Phi_{11}^3 \Phi_{222222} \neq 15 \Phi_{11}^2 \Phi_{12222} \Phi_{122} + 15 \Phi_{111} \Phi_{122}^3 -$ $- 45 \Phi_{11} \Phi_{1122} \Phi_{122}^2 + 10 [\Phi_{11} \Phi_{1222} - 3 \Phi_{112} \Phi_{122}]^2$
K_8	$A_4 \ A_4$	2	$\Phi_{22} = \Phi_{12} = \Phi_{222} = \Phi_{122} = \Phi_{2222} = 0; \Phi_{22222} \Phi_{11} \neq 0$

В общем случае равномерная асимптотика выражается как [109, 198]:

$$U(\vec{r}, t) = e^{i\theta} \left\{ (l_1)_g I^\Sigma(\vec{S}) + \sum_{k=2}^{N_g} (l_k)_g \frac{\partial I^\Sigma}{\partial S_{k-1}^g} + \right. \\ \left. + (l_1)_E I^{\Sigma_E}(\vec{S}^E) + \sum_{k=2}^{N_E} (l_k)_E \frac{\partial I^{\Sigma_E}}{\partial S_{k-1}^E} \right\}. \quad (1.69)$$

где:

$$I^\Sigma(a, \vec{\lambda}) = \int_0^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i F_\Sigma(z, x; a, \vec{\lambda})\} dx \quad (1.70)$$

– СВК краевой волновой катастрофы $\Sigma = (\Sigma_g, \Sigma_E)$, $\vec{S} = (\vec{S}^g, \vec{S}^E)$ – аргументы СВК, включающие коэффициенты и функциональные модули,

$$I^{\Sigma_E}(\vec{S}^E)$$

$$I^{\Sigma_E}(\vec{\lambda}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i F_\Sigma(0, x; \vec{\lambda})\} dx \quad (1.71)$$

– специальная функция сужения, то есть СВК основной волновой катастрофы типа Σ_E , l_j – асимптотически сходящиеся ряды.

В настоящей работе рассмотрено применение теории краевых катастроф для описания распространения электромагнитного излучения в нестационарном случае. Известно, что при распространении в диспергирующей среде радиоимпульс согласно пространственно-временной геометрической теории дифракции может быть представлен как суперпозиция пространственно-временных геометрооптических лучей и пространственно-временных краевых лучей, образующихся в начале и в конце радиоимпульса [4, 5, 91, 98]. Эти лучи, фокусируясь в плазме, образуют особенности типа краевых катастроф. Подробнее эти вопросы рассмотрены нами в главе 5 [128, 129, 138, 139].

§ 1.6. Выводы

На основе уравнения Максвелла рассмотрена постановка задачи о распространении радиоволн в холодной плазме. Приведено выражение для тензора эффективной диэлектрической проницаемости среды. Рассмотрены основные понятия пространственно-временной геометрической оптики и приведен вывод бихарактеристической системы уравнений. Рассмотрена модель Эплтона-Хартри эффективной диэлектрической проницаемости холодной ионосферной плазмы. Рассмотрены особенности применения символьных вычислений для построения решений бихарактеристической системы уравнений. Изложены основные понятия пространственно-временной волновой теории катастроф, такие как универсальной деформации, нормальная форма, возмущения, функциональный модуль, коразмерность. Приведены классификация краевых катастроф, необходимые и достаточные условия их образования, также выражения для равномерных асимптотик и специальных функций краевых волновых катастроф.

ГЛАВА 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ВАРИАЦИЙ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ РАДИОВОЛН ДЕЦИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА В ИОНОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

§ 2.1. Влияние регулярной структуры ночной ионосферы Земли на параметры радиосигнала.

В настоящем параграфе рассмотрена оценка влияния ионосферы Земли на работу бортовых радиолокаторов с синтезированной апертурой (РСА) [202] в высокочастотном Р-диапазоне, а также в исследовании возможности оценок параметров ионосферы методом радиотомографии [2, 3, 16, 51, 141, 142, 143] при радиопросвечивании с использованием низколетящих космических аппаратов (МКС) в сочетании с данными навигационной системы ГЛОНАС, в выработке рекомендаций по проведению космических экспериментов. При отражении от шероховатой поверхности с комплексной диэлектрической проницаемостью происходит дополнительный поворот поляризации. По измерениям основной компоненты поля и кроссполяризационной компоненты отраженного поля можно оценить угол поворота. Однако направление поворота от шероховатой земной поверхности остается неясным. Совместное влияние поворота поляризации электромагнитного поля за счет ионосферы и шероховатой поверхности представляет проблему при интерпретации получаемых радиолокационных результатов, а также развитию методики внешней калибровки изображений РСА [90, 180, 195].

Основной задачей данного параграфа является анализ системы факторов, влияющих на распространение радиосигналов с рабочей частотой 430–436 МГц через ионосферную плазму, на поворот плоскости поляризации и фазовый сдвиг.

Приведены результаты исследования влияния ионосферы Земли на параметры радиосигналов в Р-диапазоне [15, 178, 179, 201] (поворот вектора поляризации, фазовый сдвиг, отклонение угла прицеливания, отклонение траектории радиосигнала от прямой) в зависимости от пространственной модели ионосферной плазмы, географических координат, ориентации магнитного поля.

Для исследования особенностей влияния ионосферы Земли на распространение радиоволн Р-диапазона и получения оценок величин угла фарадеевского вращения в зависимости от взаимной ориентации лучевых траекторий и вектора напряженности магнитного поля Земли, набега фазы и рефракционных ошибок использован метод бихарактеристик. Траекторию луча можно рассчитать на основе решения бихарактеристической системы [22, 67, 104, 113, 131]:

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{k}}, \quad \frac{d\vec{k}}{d\tau} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{r}}, \quad \frac{dt}{d\tau} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \omega}, \quad \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \quad (2.1)$$

в которой гамильтониан имеет вид:

$$\Gamma = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\vec{r}, \vec{k}, \omega). \quad (2.2)$$

В формулах (2.1) и (2.2) $\vec{r} = (x, y, z)$ – координаты точки наблюдения, $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ – волновой вектор, $\omega = 2\pi f$ – круговая частота излучения, f – рабочая частота, $c = 2,997925 \cdot 10^8$ м/с – скорость света.

В первом приближении можно считать, что

$$\varepsilon(\vec{r}, \vec{k}, \omega) = 1 - \nu, \quad (2.3)$$

где ν – отношение квадрата плазменной частоты к квадрату рабочей:

$$\nu = \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m_e \omega^2}. \quad (2.4)$$

В формуле (2.4) $e = 4,8029 \cdot 10^{-10}$ СГСЭ – заряд электрона, $m_e = 9,108 \cdot 10^{-28}$ г – масса электрона, N (см⁻³) – величина электронной концентрации в фиксированной точке пространства.

Будем считать, что начальный волновой вектор $\vec{k}(0)$ параметрически зависит от угла выхода луча α_0 :

$$k_x(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \alpha_0, \quad k_y(0) = 0, \quad k_z(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \alpha_0, \quad (2.5)$$

источник излучения точечный, и расположен в точке с координатами:

$$\vec{r}|_{t=0} = (0, 0, z_r). \quad (2.6)$$

Величина ϵ_0 в выражениях (2.5) – это значение эффективной диэлектрической проницаемости среды в точке расположения источника излучения.

Рассмотрена модель высокоширотной ночной ионосферной плазмы с учетом горизонтальных градиентов. Профили электронной концентрации ночной высокоширотной ионосферы (см. [39]), представлены на рис. 2.1. Предполагается, что вдоль трассы распространения образуется волновой канал между слоем E и слоем F. Высотный профиль, соответствующий горизонтальной координате 0 км, на рисунке отмечен красным цветом, 400 км – зеленым цветом, а 800 км синим цветом. Кривые совпадают за исключением межслоевой долины. Таким образом, профиль электронной концентрации непрерывно меняется с расстоянием в окрестности слоя E.

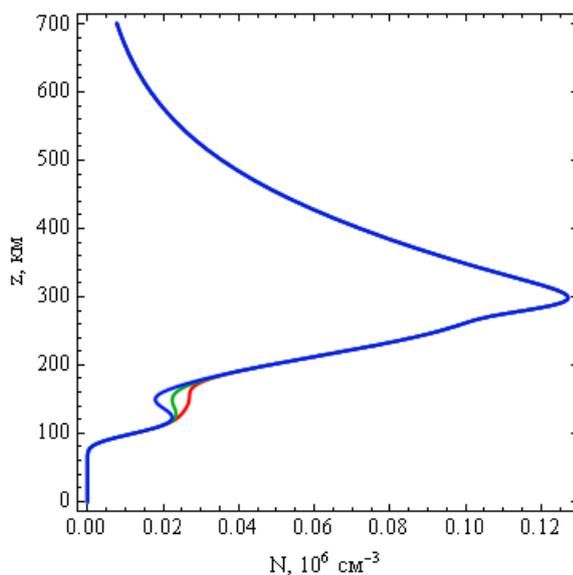


Рис. 2.1.

Зависимость электронной концентрации от высоты.

Обычно на таких высоких частотах предполагается, что траекторию луча можно считать прямой линией, соединяющей передатчик и приёмник. Однако это не совсем верно, так как влияние ионосферы на отдельные параметры может быть существенным.

На рис. 2.2 показаны лучевые траектории в плоскости (x, z) .

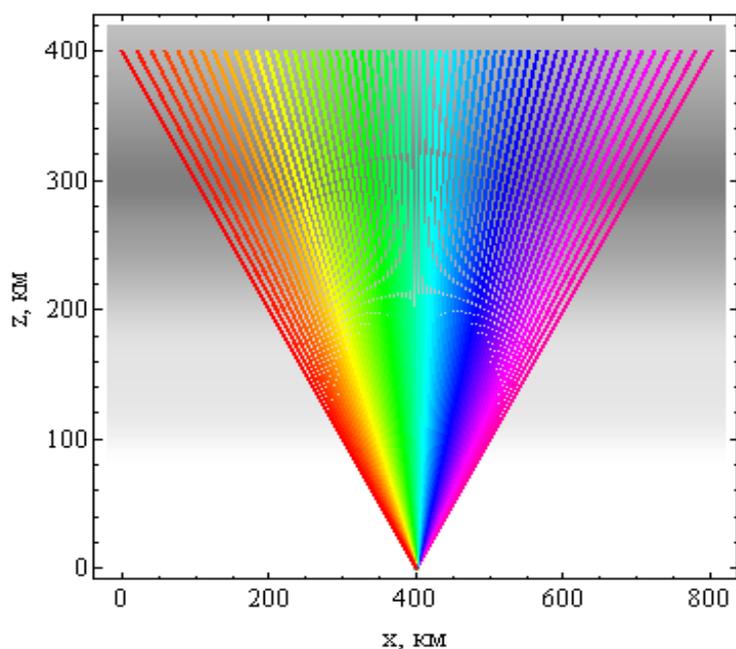


Рис. 2.2.

Лучевые траектории на фоне профиля электронной концентрации ионосферы, $f=430$ МГц.

Источник излучения (антенна космического аппарата (КА)) расположен на высоте $z_p=400$ км и горизонтально перемещается. Угол раствора конуса лучей во всех расчетах от 45 до 135 градусов. Приемник расположен на поверхности Земли на расстоянии $x_p=400$ км от начала координат. Выделены только те траектории, которые приходят в точку наблюдения. Серым цветом показано распределение электронов в ионосфере, причем более темные области соответствуют более высокой электронной концентрации.

На рис. 2.3 приведена зависимость группового времени распространения сигнала от координаты x источника излучения. Видно, что зависимость квазипараболическая, причем групповая задержка принимает минимальное значение под источником излучения (КА).

Визуально все траектории на рис. 2.2 – прямые линии. Однако на самом деле они испытывают рефракцию при распространении и отклоняются от прямой линии.

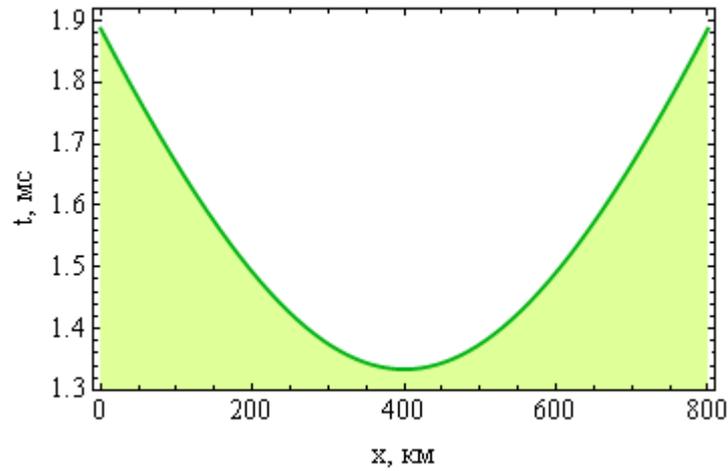


Рис. 2.3.

Зависимость группового времени t от координаты x выхода луча, $f=430$ МГц.

На рис. 2.4а и 2.4б показано отклонение луча от прямой линии вдоль траектории по вертикали:

$$\Delta z = z(t) - \frac{x(t) - x_p}{x_p - x(t_r)} z_r. \quad (2.7)$$

В формуле (2.7) величина t_r это групповое время прихода луча на высоту z_r . Видно, что вдоль траектории луч отклоняется на величину порядка длины волны, а затем в точке приёма отклонение опять становится нулевым.

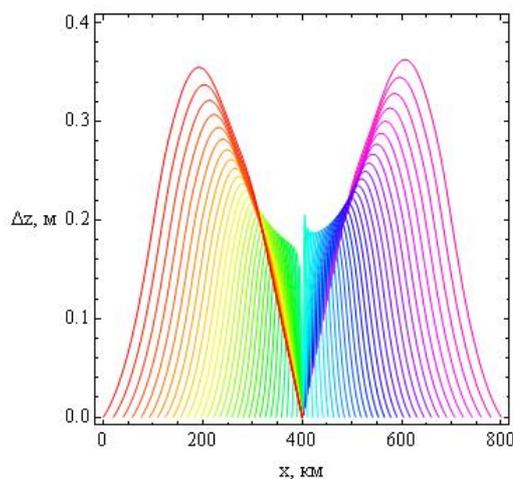


Рис. 2.4а

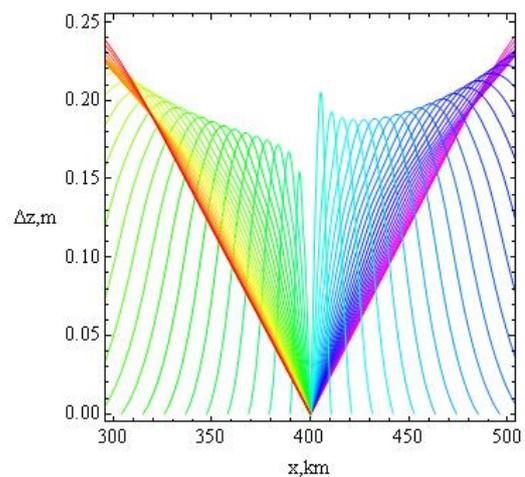


Рис. 2.4б

Отклонение лучевых траекторий по вертикали – а, фрагмент – б, $f=430$ МГц.

Несимметрия рисунка 2.4а связана горизонтальным градиентом вдоль межслоевого канала. Более подробно этот участок показан на рис. 2.4б.

На рис. 2.5 показано отклонение $\Delta\alpha$ угла прицеливания α от направления вдоль прямой линии:

$$\Delta\alpha = \alpha_n - \alpha. \quad (2.8)$$

В формуле (2.8) α_n это угол между прямой линией, соединяющей передатчик и приемник и положительным направлением оси x , а α это угол между касательной к лучу в точке приема и положительным направлением оси x . Формулу (2.8) можно переписать в виде:

$$\Delta\alpha = \pi - \alpha_t - \alpha, \quad (2.9)$$

где угол α_t , дополнительный к углу α_n , определяется из соотношений:

$$\sin \alpha_t = -z_r / R, \quad \cos \alpha_t = \frac{x_p - x(t_r)}{R}, \quad (2.10)$$

где R – расстояние между источником и приёмником по прямой:

$$R = \sqrt{z_r^2 + (x_r - x_p)^2}.$$

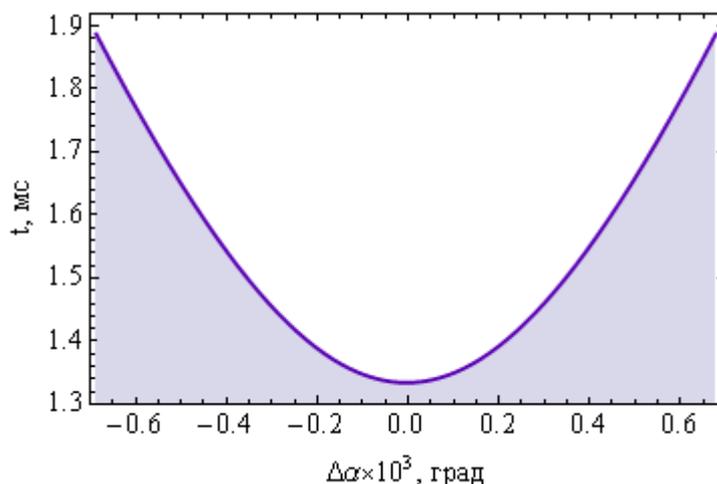


Рис. 2.5.

Отклонение угла прицеливания от прямой линии, $f=430$ МГц.

Из рисунка следует, что отклонение $\Delta\alpha$ очень незначительное по сравнению с шириной диаграммы направленности антенны и составляет менее тысячной

градуса для лучей, близких к крайним. Однако, как это будет показано ниже, это приводит к существенному изменению фазы вдоль луча и к фарадеевскому вращению вектора поляризации.

На рис 2.6а и 2.6б приведены зависимости относительной скорости изменения фазы от высоты вдоль лучей. Скорость изменения фазы отложена по горизонтали, а высота по вертикали. Относительная скорость изменения фазы с высотой определяется формулой

$$\Phi'_o(t) = \frac{dx}{dt} k_x(t) + \frac{dy}{dt} k_y(t) + \frac{dz}{dt} k_z(t) - \omega = \Phi'(t) - \omega \quad (2.11)$$

и в случае изотропной, стационарной и плоскостлой модели среды не зависит от траектории:

$$\Phi'_o(t) \cong \omega(\varepsilon(z(t)) - 1). \quad (2.12)$$

Видно, что минимумы кривой отслеживают положения максимумов ионосферных слоёв, а максимум соответствует межслоевой долине.

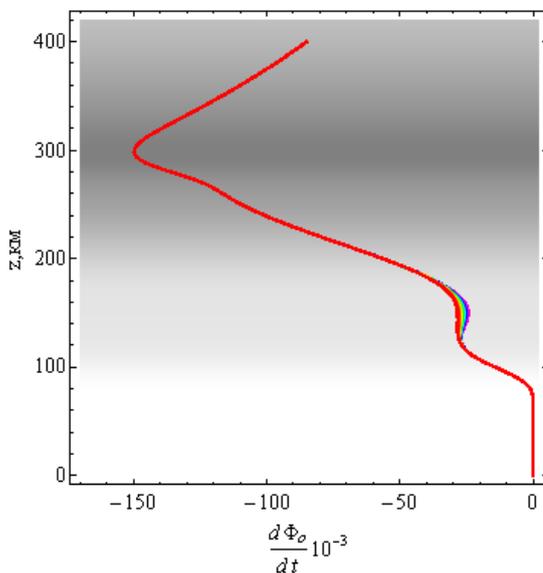


Рис. 2.6а

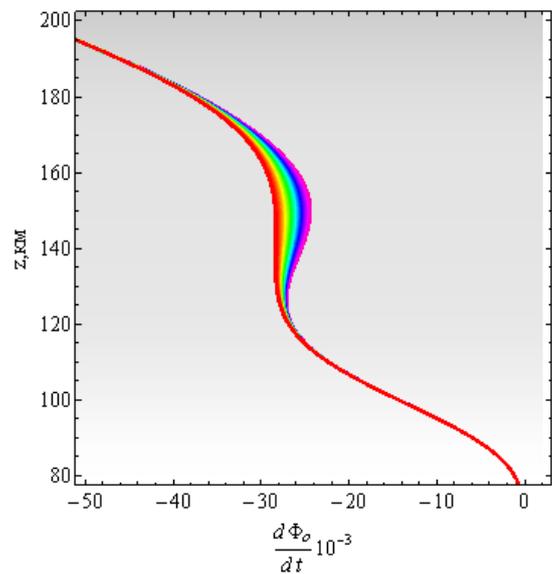


Рис. 2.6б

Зависимость скорости изменения фазы от высоты, $f=430$ МГц.

В межслоевой долине скорость изменения фазы существенно зависит от траектории луча, поскольку на этом участке значения электронной концентрации различны для каждой траектории.

На рис. 2.7 показана зависимость отклонения фазы (отложено по горизонтали) от группового времени (отложено по вертикали) в точке приема сигнала. Для вычисления фазы использовалась формула:

$$\Phi(t) = \int_0^t \Phi'(\eta) d\eta. \quad (2.13)$$

Разность фаз $\Delta\Phi$ вычислялась как

$$\Delta\Phi = \Phi - \omega R/c. \quad (2.14)$$

где $\omega R/c$ – фаза луча в пустоте вдоль прямой. Видно, что зависимость линейная, причем ионосфера вносит существенный вклад в величину фазы: в данном случае от 7 до 10 периодов. Зелёным цветом показаны расчеты для частоты 430 МГц, а фиолетовым цветом для частоты 436 МГц. Видно, что в рамках рабочей полосы отличие незначительное. Расщепление линий объясняется наличием горизонтального градиента. Правая часть рисунка соответствует расположению КА и приёмника на кратчайшем расстоянии друг от друга.

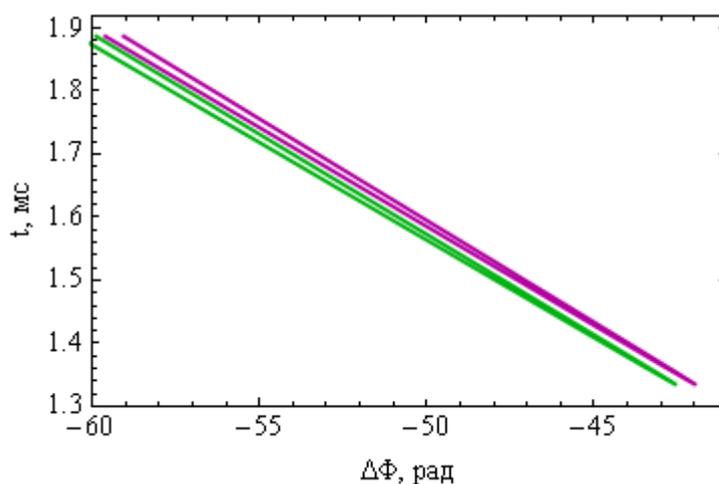


Рис. 2.7.

Зависимость отклонения фазы (по горизонтали) от группового времени (по вертикали), $f=430$ МГц – зелёные линии, $f=436$ МГц – фиолетовые линии.

Изучая рис. 2.7, можно оценить изменение отклонения фазы в рамках рабочей полосы. Оно порядка 1 радиана.

На рис. 2.8 показана зависимость отклонения фазы от горизонтальной координаты x , соответствующей координате выход луча. Форма кривой – квазипарабола. Как и следовало ожидать, наименьше отклонение фазы соответствует вертикальному лучу.

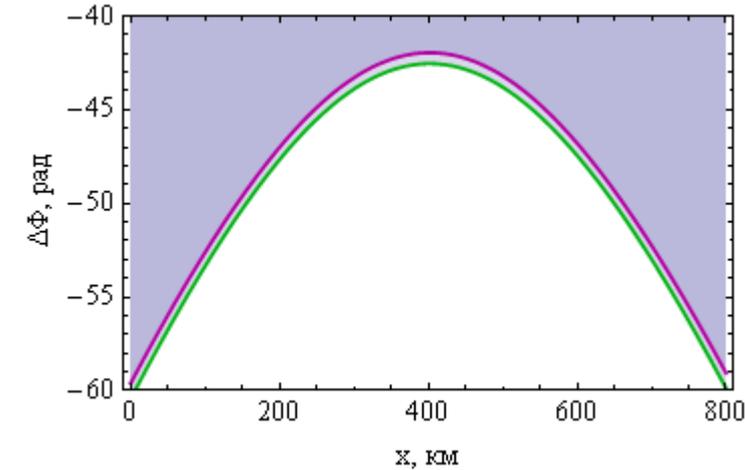


Рис. 2.8.

Зависимость отклонения фазы от фазы в пустоте от координаты x , $f=430$ МГц – зелёная линия, $f=436$ МГц – фиолетовая линия.

Теперь рассмотрим фарадеевское вращение плоскости поляризации, считая, что обыкновенная и необыкновенная волны в силу большой частоты распространяются вдоль одной лучевой траектории. Согласно [49] (см. также, [17, 18, 146]) угол фарадеевского вращения определяется формулой:

$$\Omega(t) = \frac{\omega}{2c} \int_0^t \Delta\mu \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt, \quad (2.15)$$

где

$$\Delta\mu \cong \frac{1}{2} \frac{v \sqrt{u^2 \sin^4 \theta + 4(1-v)^2 u \cos^2 \theta}}{(1-v)(1-u \cos^2 \theta) - u \sin^2 \theta} \quad (2.16)$$

разность показателей преломления обыкновенной и необыкновенной волны. В формуле (2.16) параметр u – это отношение квадрата гирочастоты к квадрату круговой частоты сигнала:

$$u = \left(\frac{\omega_H}{\omega} \right)^2 = \frac{e^2 H_0^2}{m_e^2 c^2 \omega^2}, \quad (2.17)$$

а θ это угол между вектором напряженности магнитного поля Земли \vec{H}_0 и волновым вектором \vec{k} :

$$\cos^2 \theta = \frac{(H_{0x}k_x + H_{0y}k_y + H_{0z}k_z)^2}{H_0^2 |\vec{k}|^2}. \quad (2.18)$$

В квазиизотропной среде можно приблизительно считать, что

$$\Omega(t) = \frac{\omega}{2} \int_0^t \Delta\mu \sqrt{\varepsilon(\vec{r}(t))} dt. \quad (2.19)$$

В приведённых ниже расчетах амплитуда магнитного поля предполагается постоянной, а ориентация напряжённости магнитного поля относительно локальной системы координат задается двумя углами γ и φ :

$$H_{0x} = H_0 \cos\gamma \cos\varphi, \quad H_{0y} = H_0 \cos\gamma \sin\varphi, \quad H_{0z} = H_0 \sin\gamma. \quad (2.20)$$

При вычислении применялись следующие значения параметров: $H_0 = 0,551$ Э, $\gamma = -83^\circ$.

На рис. 2.9 представлена зависимость от высоты (отложена по вертикали) квадрата косинуса угла θ (отложен по горизонтали) для различных значений угла φ . Поскольку в рамках модели магнитное поле считалось постоянным, то линии прямые, но раскраска рисунков существенно зависит от угла φ .

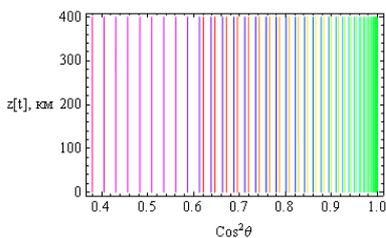


Рис. 2.9 а.

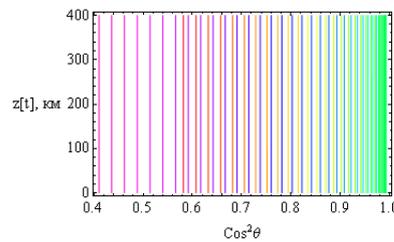


Рис. 2.9 б.

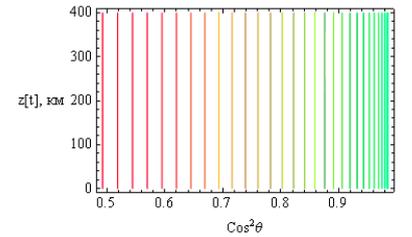


Рис. 2.9 в.

Зависимость $\cos^2 \theta$ от высоты вдоль лучей, $f=430$ МГц, $\varphi = 0$ – а, $\varphi = \pi/4$ – б, $\varphi = \pi/2$ – в.

Зависимости параметра $\Delta\mu$ (отложена по горизонтали) от высоты (отложена по вертикали) вдоль лучей при различных значениях угла φ приведены на рис. 2.10.

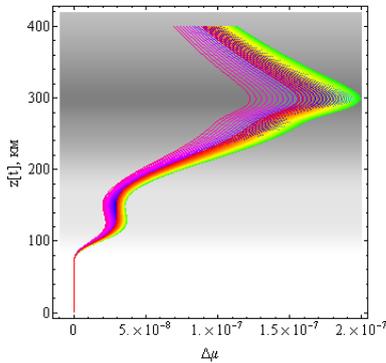


Рис. 2.10 а,

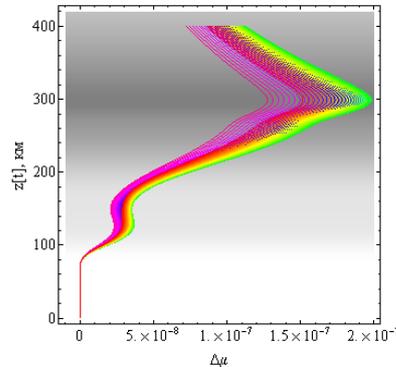


Рис. 2.10 б,

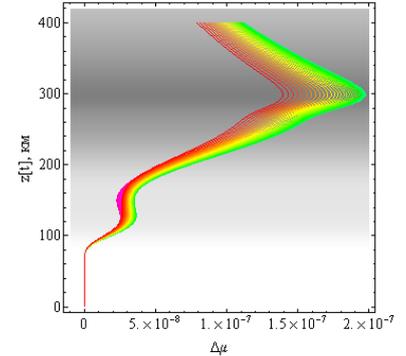


Рис. 2.10 в.

Зависимость $\Delta\mu$ от высоты, $f=430$ МГц, $\varphi=0$ – а, $\varphi=\pi/4$ – б, $\varphi=\pi/2$ – в.

Видно, что форма кривой в целом отслеживает профиль электронной концентрации.

На рис. 2.11 показана зависимость угла фарадеевского вращения Ω (отложен по горизонтали) от группового времени при различных углах φ , а на рис. 2.12 зависимость угла фарадеевского вращения от координаты x . Форма кривой на рис. 2.11 – квазипарабола.

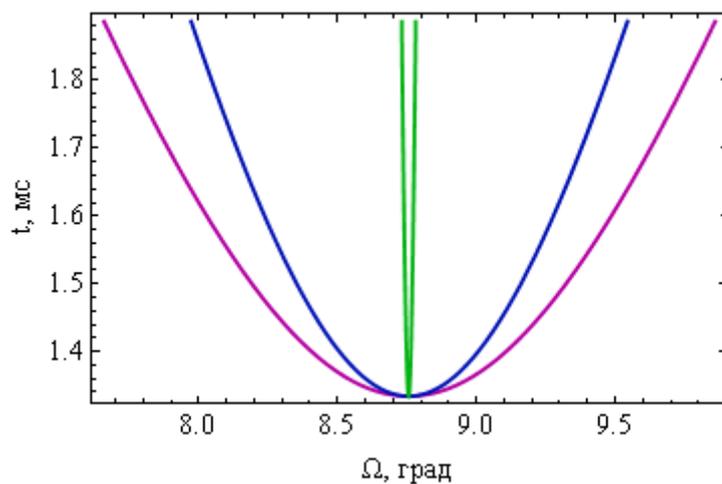


Рис. 2.11

Зависимость угла фарадеевского вращения от группового времени, $f=430$ МГц, $\varphi=0$ – фиолетовая линия, $\varphi=\pi/4$ – синяя линия, $\varphi=\pi/2$ – зелёная линия.

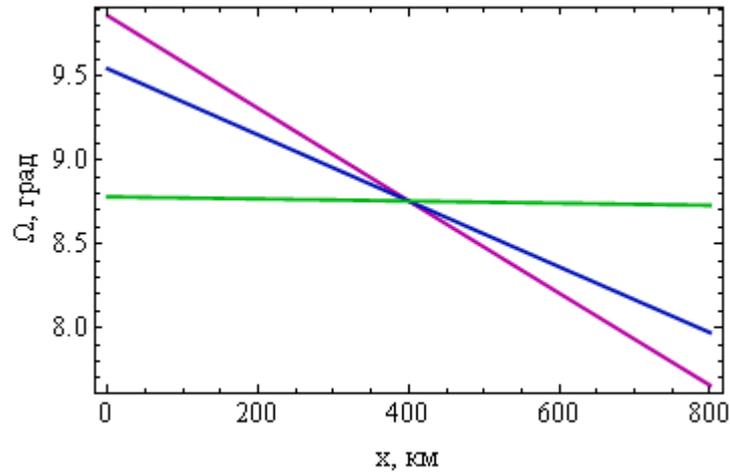


Рис. 2.12

Зависимость угла фарадеевского вращения от координаты x , $f=430$ МГц, $\varphi=0$ – фиолетовая линия, $\varphi=\pi/4$ – синяя линия, $\varphi=\pi/2$ – зелёная линия.

Из рис. 2.11 видно, что угол фарадеевского вращения достигает 10° . Это значение соответствует координате $x = 0$ км (см. рис. 2.12). Следует отметить, что угол фарадеевского вращения при дальности $x = 800$ км (групповое время порядка 1,9 мс) минимален ($\sim 7,5^\circ$).

При $\varphi=\pi/4$ диапазон изменения угла фарадеевского вращения составляет от 8 до 9,5 градусов. Если же угол $\varphi=\pi/2$, то есть магнитное поле ортогонально плоскости, в которой лежат лучевые траектории, то угол фарадеевского вращения близок к константе и составляет $\sim 8,75^\circ$. Расщепление линии целиком обусловлено наличием горизонтального градиента.

Таким образом, в данном параграфе методом бихарактеристик рассмотрены особенности влияния ионосферы Земли на распространение радиоволн Р-диапазона: отклонение лучевых траекторий от прямых линий, изменение величины набега фазы за счет влияния ионосферы и фарадеевское вращение. Получены оценки величин угла фарадеевского вращения в зависимости от взаимной ориентации лучевых траекторий и вектора напряженности внешнего магнитного поля.

Следует отметить, что при использовании плоскостойкой ночной модели ионосферы Земли при угле раствора конуса лучей от 45 до 135 градусов величина угла фарадеевского вращения не превышает 10 градусов, отклонение угла прицеливания крайне мало, влияние горизонтального градиента в области *E*-слоя составляет доли градуса. Так как рабочая полоса составляет только 6 МГц, то, как следует из рис. 2.7 и 2.8, влияние ширины полосы на отклонение фазы и фарадеевское вращение незначительное.

§ 2.2. Влияние регулярной структуры дневной ионосферы Земли на параметры радиосигналов с различными несущими частотами

В предыдущем параграфе рассмотрено влияние ионосферы на радиоволны *P*-диапазона (430 МГц). В данном параграфе рассмотрено влияние ионосферы Земли на распространение радиоволн различных частотных диапазонов. Сопоставлено влияние ионосферной плазмы на параметры радиосигналов для трёх различных частот: 200 МГц, 430 МГц и 1200 МГц [32, 33, 180].

Рассмотрена модель дневной (12 час) ионосферной плазмы относительно точки с координатами, 40 град с. ш., 30 град в. д. Профиль электронной концентрации (см. [39]), представлен на рис. 2.13.

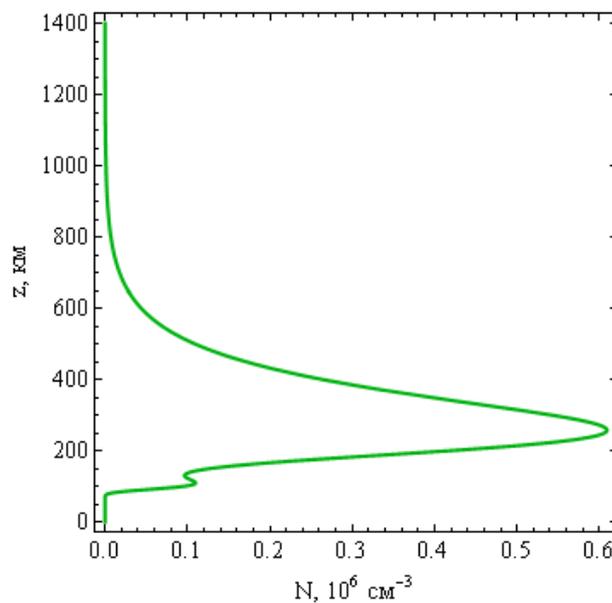


Рис. 2.13.

Зависимость электронной концентрации от высоты, 40 град с. ш., 30 град в. д.

На рисунке хорошо виден главный максимум, соответствующий слою F на высоте чуть меньше 300 км и максимум, соответствующий слою E на высоте порядка 100 км. Отметим, что значение электронной концентрации в главном максимуме существенно превышает аналогичное значение для ночной ионосферы (рис. 2.1).

На рис. 2.14 показаны лучевые траектории в плоскости (x, z) .

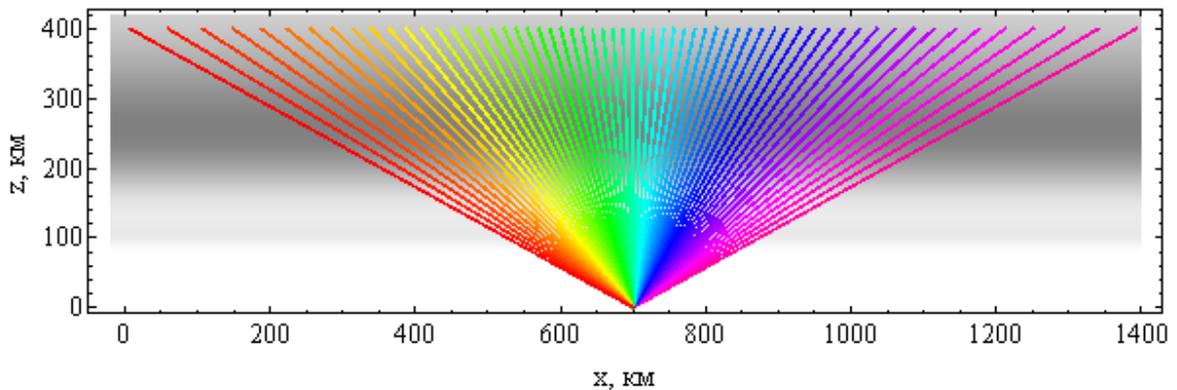


Рис. 2.14.

Лучевые траектории на фоне профиля электронной концентрации ионосферы.

Как и в предыдущем параграфе предполагается, что на таких высоких частотах траекторию луча можно считать прямой линией, соединяющей передатчик и приёмник, и визуально это действительно так. Однако влияние ионосферы на отдельные параметры радиосигнала является весьма существенным.

Предполагается, что источник излучения расположен на высоте $z_r=400$ км и горизонтально перемещается. При этом угол наклона лучей меняется от 150 до 30 градусов относительно положительного направления горизонтальной оси. Приемник расположен на поверхности Земли на расстоянии $x_p=700$ км от начала координат. На рисунке выделены только те траектории, которые приходят в точку наблюдения. Серым цветом показано распределение электронов в ионосфере. Более темные области соответствуют более высокой электронной концентрации.

На рис. 2.15 приведена зависимость группового времени от координаты x источника излучения. Из рисунка следует, что зависимость квази-параболическая.

Групповая задержка принимает минимальное значение под источником излучения (КА).

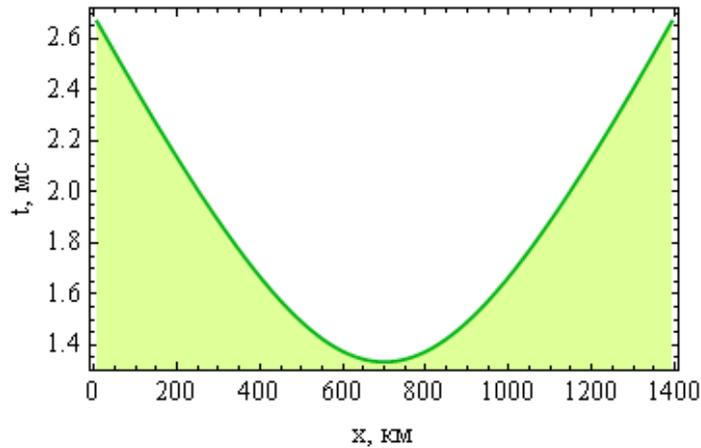


Рис. 2.15.

Зависимость группового времени t от координаты x выхода луча.

Необходимо отметить, что рис. 2.14 и 2.15 практически одинаковы для всех трёх рассматриваемых частот и визуально не различаются. Хотя все траектории на рис. 2.14 кажутся прямыми линиями, на самом деле они испытывают рефракцию при распространении в ионосфере и поэтому отклоняются от прямой линии.

На рис. 2.16–2.18 показано отклонение лучей Δz вдоль траекторий по вертикали, рассчитанное по формуле (2.7). Видно, что вдоль траектории луч отклоняется на величину порядка длины волны, а затем в точке приёма отклонение опять становится нулевым. Рисунки симметричны, так как в данном разделе (в отличие от параграфа 2.1) горизонтальные градиенты в окрестности слоя E не рассматриваются.

Видно, что если на частоте 1200 МГц (длина волны ~ 25 см) максимальное отклонение не превышает 46 см, то на частоте 430 МГц (длина волны ~ 63 см) – 3,6 м, а на частоте 200 МГц (длина волны $\sim 1,5$ м) максимальное отклонение не превышает 17 м.

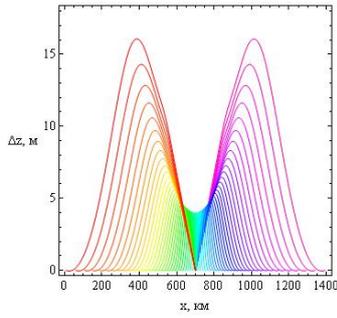


Рис. 2.16
Отклонение лучей по
вертикали, $f=200$ МГц.

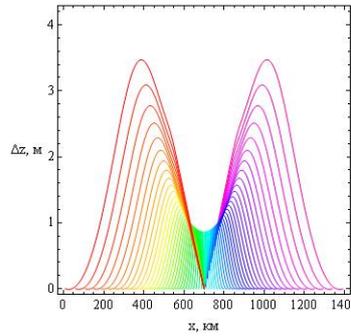


Рис. 2.17
Отклонение лучей по
вертикали, $f=430$ МГц.

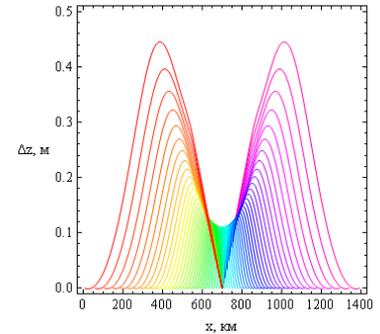


Рис. 2.18
Отклонение лучей по
вертикали, $f=1200$ МГц.

Рассмотрим теперь (рис. 2.19–2.21) отклонение $\Delta\alpha$ угла прицеливания от прямой линии (2.8)–(2.10). Из рис. 2.19–2.21 следует, что отклонение $\Delta\alpha$ незначительное и составляет для лучей, близких к крайним 30×10^{-3} град на частоте 200 МГц, 6×10^{-3} град на частоте 430 МГц и 10^{-3} град на частоте 1200 МГц. Хотя такое небольшое отклонение экспериментально непосредственно не наблюдаемо, оно, безусловно, связано с существенным изменением фазы вдоль луча и фарадеевским вращением вектора поляризации.

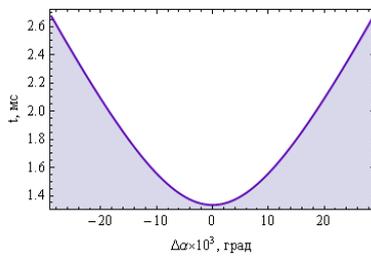


Рис. 2.19.
Отклонение угла
прицеливания от прямой
линии, $f=200$ МГц

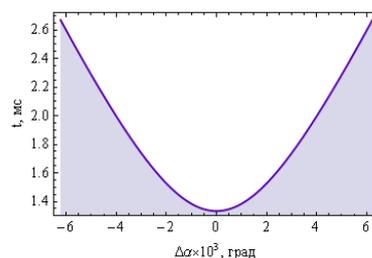


Рис. 2.20.
Отклонение угла
прицеливания от прямой
линии, $f=430$ МГц.

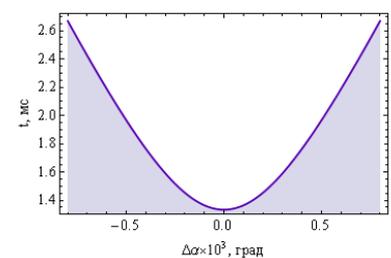


Рис. 2.21.
Отклонение угла
прицеливания от прямой
линии, $f=1200$ МГц.

Рассмотрим зависимость относительной скорости изменения фазы от высоты (рис. 2.22–2.24). Производная фазы по групповому времени определяется формулой (2.11) и в случае изотропной среды и плоскостистой модели не зависит от траектории (2.12).

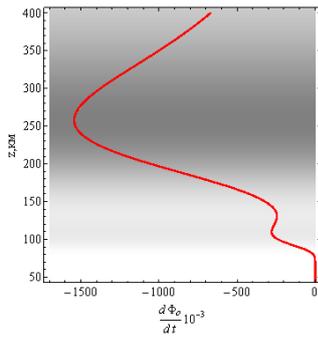


Рис. 2.22.
Зависимость скорости
изменения фазы от высоты,
 $f=200$ МГц.

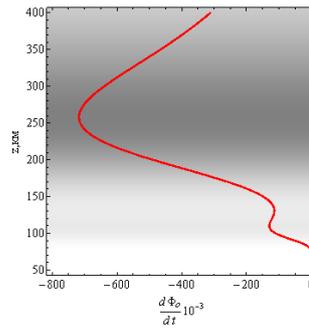


Рис. 2.23.
Зависимость скорости
изменения фазы от высоты,
 $f=430$ МГц

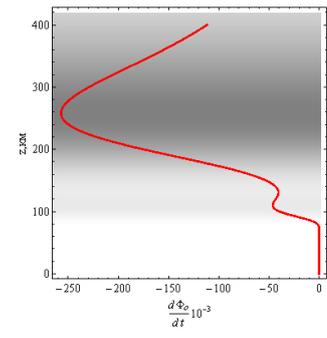


Рис. 2.24.
Зависимость скорости
изменения фазы от высоты,
 $f=1200$ МГц.

На рис. 2.22–2.24 видно, что минимумы кривой коррелируют с положениями максимумов ионосферных слоёв. Локальный максимум соответствует межслоевой долине. Минимальное значение производной составляет порядка $-1500 \times 10^3 \text{ с}^{-1}$ на частоте 200 МГц, $-700 \times 10^3 \text{ с}^{-1}$ на частоте 430 МГц и порядка $-260 \times 10^3 \text{ с}^{-1}$ на частоте 1200 МГц.

На рис. 2.25–2.27 показана зависимость отклонения фазы (отложена по горизонтали) от группового времени (отложено по вертикали) в точке приема сигнала. Для вычисления фазы применялась формула (2.13). Разность фаз $\Delta\Phi$ находилась как $\Delta\Phi = \Phi - \omega R/c$, где $\omega R/c$ – фаза луча в пустоте вдоль прямой, соединяющей источник и приёмник.

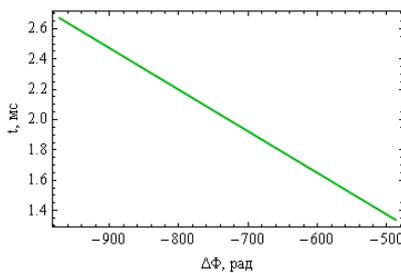


Рис. 2.25.
Зависимость отклонения фазы
(по отношению к фазе в
невозмущенной среде) от
высоты, $f=200$ МГц.

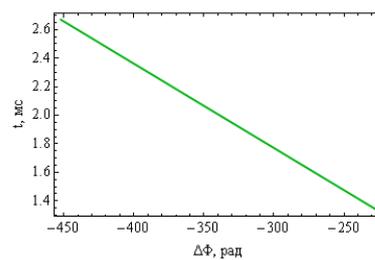


Рис. 2.26.
Зависимость отклонения
фазы (по отношению к фазе в
невозмущенной среде) от
высоты, $f=430$ МГц.

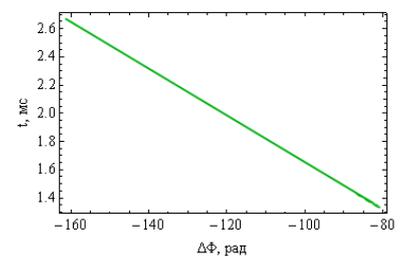


Рис. 2.27.
Зависимость отклонения фазы
(по отношению к фазе в
невозмущенной среде) от
высоты, $f=1200$ МГц.

Видно, что зависимость линейная, причем ионосфера вносит существенный вклад в величину фазы: на частоте 200 МГц это от 83 до 167 периодов, на частоте 430 МГц – от 46 до 75 периодов, а на частоте 1200 МГц от 13 до 27 периодов.

Зависимость отклонения фазы от горизонтальной координаты x , соответствующей координате выход луча представлена на рис. 2.28–2.30. Форма кривой является квази-параболой. Наименьше отклонение фазы соответствует вертикальному лучу.

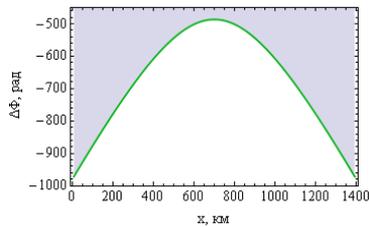


Рис. 2.28.

Зависимость отклонения фазы (по отношению к фазе в невозмущенной среде) от высоты, $f=200$ МГц.

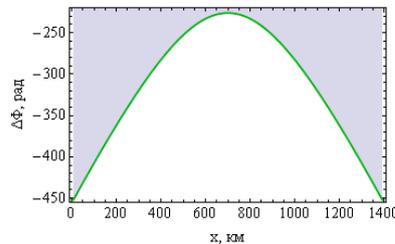


Рис. 2.29.

Зависимость отклонения фазы (по отношению к фазе в невозмущенной среде) от высоты, $f=430$ МГц.

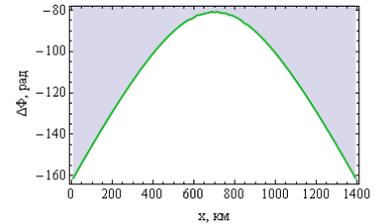


Рис. 2.30.

Зависимость отклонения фазы (по отношению к фазе в невозмущенной среде) от высоты, $f=1200$ МГц.

Диапазоны отклонения разности фаз те же, что и на рис. 2.25–2.27.

Рассмотрим фарадеевское вращение плоскости поляризации, считая, что обыкновенная и необыкновенная волны в высокочастотном диапазоне распространяются вдоль одной и той же лучевой траектории. Угол фарадеевского вращения определяется формулой (2.15), в которой $\Delta\mu$ это разность показателей преломления обыкновенной и необыкновенной волны (2.16). В приведённых ниже расчетах амплитуда магнитного поля предполагалась постоянной, а ориентация напряжённости магнитного поля относительно локальной системы координат задавалась углами γ и φ . При вычислении применялись следующие значения параметров: $H_0 = 0,465$ Э, $\gamma = -57^\circ$, $\varphi = 45^\circ$.

Зависимости разности $\Delta\mu$ показателей преломления обыкновенной и необыкновенной волны от высоты вдоль лучей при различных частотах приведены на рис. 2.31–2.33.

Видно, что форма кривой отслеживает профиль электронной концентрации. Хотя форма кривых сохраняется для разных частот, при изменении частоты существенно меняется диапазон значений $\Delta\mu$: на частоте 200 МГц достигает $7,5 \times 10^{-6}$, на частоте 430 МГц – $0,75 \times 10^{-6}$, а на частоте 1200 МГц – $0,035 \times 10^{-6}$.

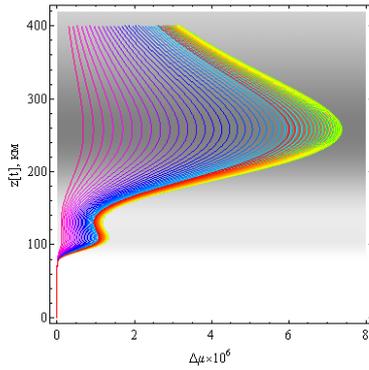


Рис. 2.31.
Зависимость разности показателей преломления обыкновенно и необыкновенной волны от высоты вдоль лучей, $f=200$ МГц.

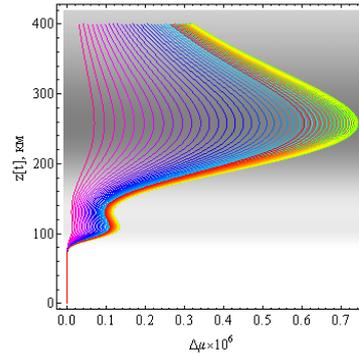


Рис. 2.32.
Зависимость разности показателей преломления обыкновенно и необыкновенной волны от высоты вдоль лучей, $f=430$ МГц.

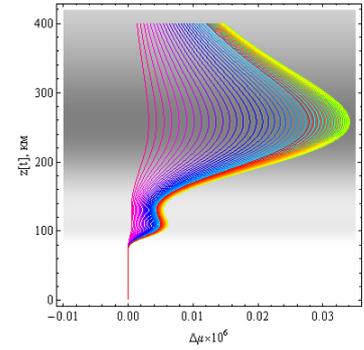


Рис. 2.33.
Зависимость разности показателей преломления обыкновенно и необыкновенной волны от высоты вдоль лучей, $f=1200$ МГц.

На рис. 2.34–2.36 показана зависимость угла фарадеевского вращения Ω (по горизонтали) от группового времени при различных частотах, а на рис. 2.37–2.39 зависимость угла фарадеевского вращения от координаты x . Форма кривой на рис. 2.34–2.36 – квазипарабола.

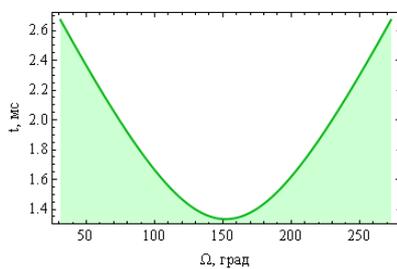


Рис. 2.34.
Зависимость угла фарадеевского вращения от группового времени, $f=200$ МГц.

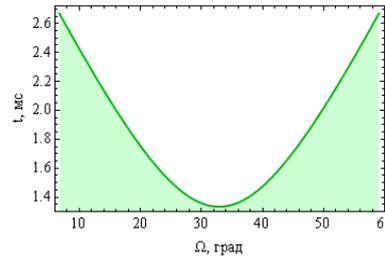


Рис. 2.35.
Зависимость угла фарадеевского вращения от группового времени, $f=430$ МГц.

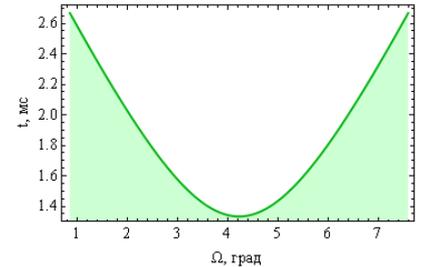


Рис. 2.36.
Зависимость угла фарадеевского вращения от группового времени, $f=1200$ МГц.

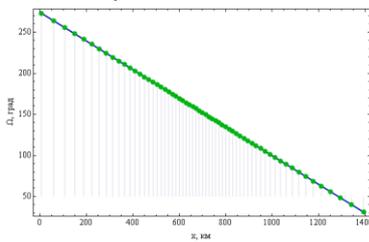


Рис. 2.37.
Зависимость угла фарадеевского вращения от расстояния по горизонтали, $f=200$ МГц.

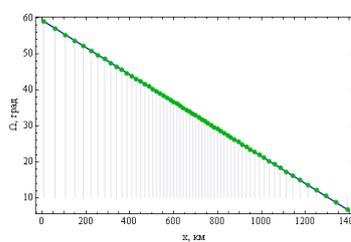


Рис. 2.38.
Зависимость угла фарадеевского вращения от расстояния по горизонтали, $f=430$ МГц.

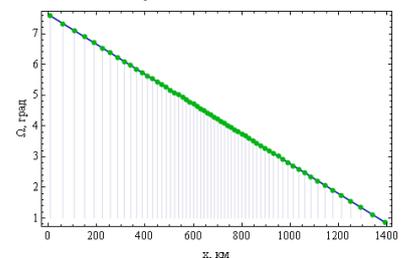


Рис. 2.39.
Зависимость угла фарадеевского вращения от расстояния по горизонтали, $f=1200$ МГц.

Из рис. 2.34–2.36 следует, что при $\varphi = \pi/4$ угол фарадеевского вращения достигает 270° на частоте 200 МГц, 60° на частоте 430 МГц и 8° на частоте 1200 МГц. Эти значения соответствуют координате $x = 0$ км (см. рис. 2.37–2.39). Следует отметить, что угол фарадеевского вращения при дальности $x = 1400$ км (групповое время порядка 2,64 мс) минимален и составляет 30° на частоте 200 МГц, $7,5^\circ$ на частоте 430 МГц и $0,8^\circ$ на частоте 1200 МГц.

На рис. 2.40 и 2.41 приведены соответственно зависимости угла фарадеевского вращения и разности фаз от частоты в случае, когда угол выхода луча из источника в приёмник с положительным направлением оси x составляет 140° .

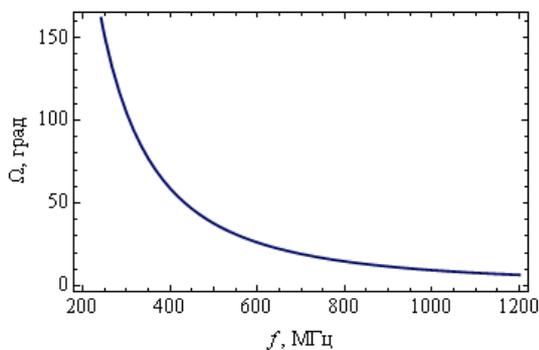


Рис. 2.40

Зависимость угла фарадеевского вращения от частоты.

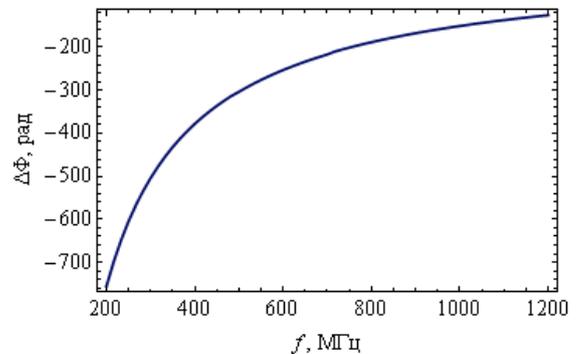


Рис. 2.41

Зависимость разности фаз от частоты.

Таким образом, в настоящем параграфе методом бихарактеристик рассмотрены особенности влияния ионосферы Земли на распространение высокочастотных радиоволн: отклонение лучевых траекторий от прямых линий, изменение величины набега фазы за счет влияния ионосферы и фарадеевское вращение. Сопоставлены оценки величин угла фарадеевского вращения на различных частотах: 200 МГц, 430 МГц, 1200 МГц.

Итоговые результаты, полученные здесь, приведены в таблице.

Таблица. Предельные значения параметров на различных частотах.

f , МГц	λ , м	Δz , м	$\Delta\alpha \cdot 10^3$, град	$\Phi'_o(t)$, с ⁻¹	$\Delta\Phi$, периоды	$\Delta\mu$	$\Omega(t)$, град	
							max	min
1	2	3	4	5	6	7	8	9
200	1,5	16,5	30	-1500×10^3	от 77 до 166	$7,5 \times 10^{-6}$	270	30
430	0,63	3,5	6	-700×10^3	от 36 до 73	$7,5 \times 10^{-7}$	60	7,5
1200	0,25	0,46	1	-260×10^3	от 13 до 26	$3,5 \times 10^{-8}$	8	0,8

Примечание:

1. f – рабочая частота, МГц;
2. λ – длина волны, м;
3. Δz – максимальное отклонение, м;
4. $\Delta\alpha$ – отклонение угла прицеливания, 10^{-3} град;
5. $\Phi'_o(t)$ – минимальное значение производной фазы, с⁻¹;
6. $\Delta\Phi$ – вклад ионосферы в величину фазы, периоды;
7. $\Delta\mu$ – максимальное значение разности показателей преломления обыкновенной и необыкновенной волны;
8. $\Omega(t)$ – значение угла фарадеевского вращения, град.

§ 2.3. Влияние крупномасштабных неоднородностей ионосферы Земли на параметры радиосигнала

В параграфах 2.1 и 2.2 рассмотрено влияние ионосферы на величину угла фарадеевского вращения и на набег фазы без учета влияния кривизны Земли [31-33, 94]. В настоящем параграфе рассмотрены сферические модели ионосферы и

учтены возможные крупномасштабные неоднородности плазмы на пути распространения радиосигнала (рис. 2.42).

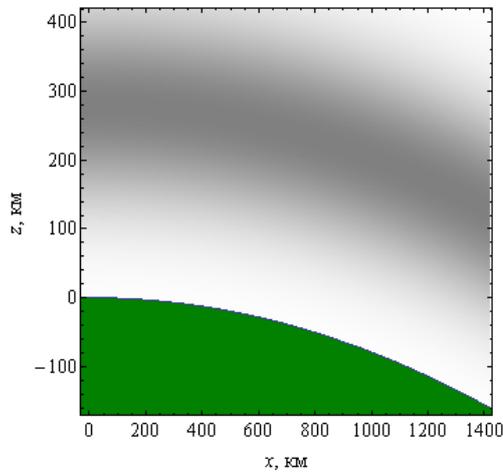


Рис. 2.42а.

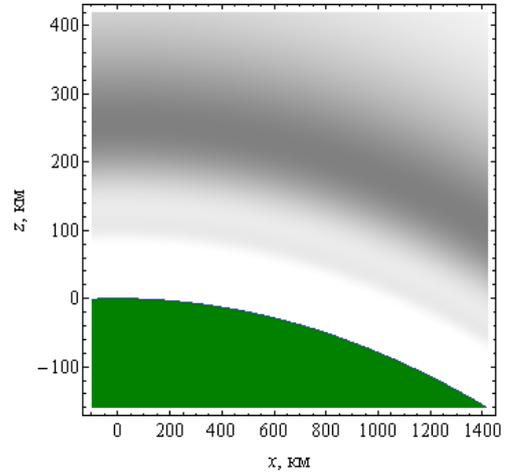


Рис. 2.42б

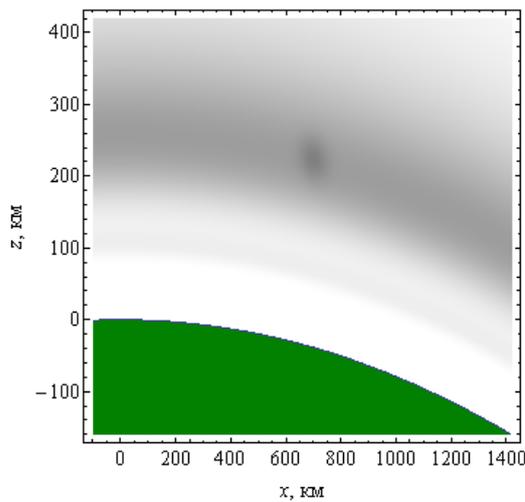


Рис.2.42в.

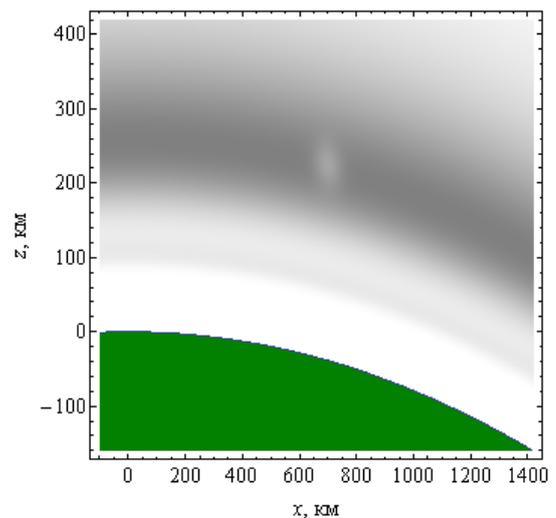


Рис.2.42г.

Распределение электронной концентрации (серый цвет) в ионосфере. Экспоненциальная модель – а; двухслоевая модель – б; двухслоевая модель с локальной неоднородностью с повышенной электронной концентрацией – в; двухслоевая модель с локальной неоднородностью с пониженной электронной концентрацией – г.

Рассмотрены четыре модели [14], которые согласованы с моделью дневной (12 час) ионосферной плазмы относительно точки с координатами 40 град с. ш., 30 град в. д., а именно:

- экспоненциальная модель;
- двухслоевая модель;

- двухслойная модель с локальной неоднородностью с повышенной электронной концентрацией;
- двухслойная модель с локальной неоднородностью с пониженной электронной концентрацией,

которые в дальнейшем будем обозначать как модели 1, 2, 3 и 4 соответственно.

Зеленым цветом на рис.2.42 обозначена поверхность Земли. Серым цветом показано распределение электронов в ионосфере. Более тёмные области соответствуют более высокой электронной концентрации. На рис. 2.43 показана зависимость электронной концентрации от высоты для точки наблюдения с координатой $x = 700$ км, относительно которой проведены все дальнейшие расчеты.

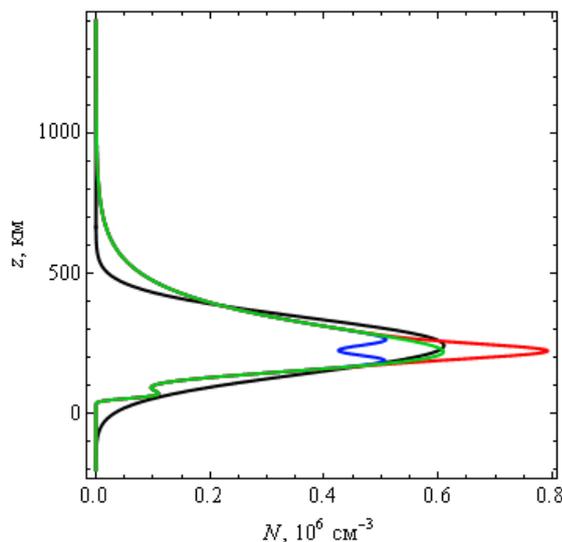


Рис. 2.43

Зависимость электронной концентрации от высоты вдоль оси z .

Здесь и на других рисунках (за исключением рис. 2.44, 2.46, 2.48, 2.50) черным цветом представлена модель 1, зеленым – модель 2, красным – модель 3 и синим – модель 4.

Для нахождения лучевых траекторий, как и в предыдущих разделах, используем бихарактеристическую систему [67, 104], модифицированную для сферической системы координат. Выражения для эффективной диэлектрической проницаемости и плазменной частоты определяются формулами (1.3)–(1.4).

На рис. 2.44 показаны лучевые траектории в плоскости (x, z) . Предполагается, что точечный источник излучения (КА) расположен на расстоянии 400 км от поверхности Земли и перемещается по орбите. При этом угол наклона лучей меняется от 150 до 30 градусов относительно положительного направления горизонтальной оси. Приёмник расположен на поверхности Земли на расстоянии $x_p=700$ км от начала координат как показано на рисунке. На рисунке выделены только те траектории, которые приходят в точку наблюдения.

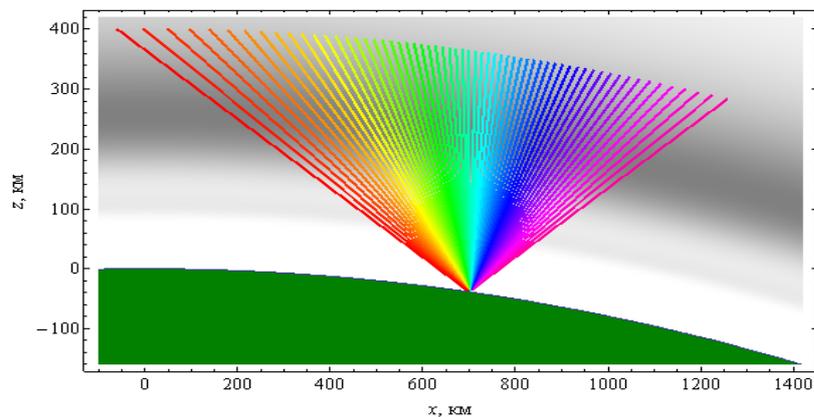


Рис.2.44

Лучевые траектории на фоне профиля электронной концентрации ионосферы.

На рис. 2.45 приведена зависимость группового времени от координаты x источника излучения. Зависимость квази-параболическая. По сравнению с рис. 2.3 кривая несимметрична в силу сферической геометрии задачи.

Визуально кривая, представленная на рис. 2.45, одинакова для всех 4-х моделей, поскольку отличия во временных задержках невелики.

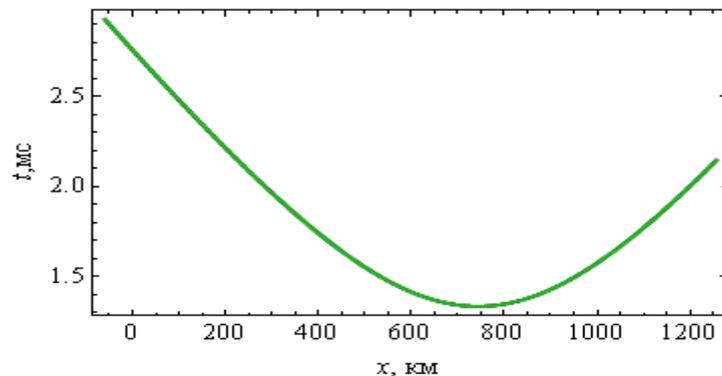


Рис. 2.45

Зависимость группового времени t от координаты x выхода луча.

На рис. 2.46а-г показано отклонение луча вдоль траектории по вертикали для всех четырех моделей. Максимальное отклонение в правой части рисунков (красные линии) согласуется с отклонениями в плоском случае (см. рис. 2.4). Максимальное отклонение в правой части рисунков (фиолетовые линии) меньше в силу геометрии задачи.

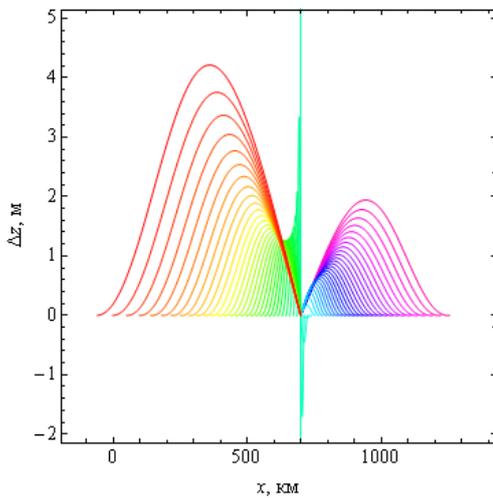


Рис. 2.46а

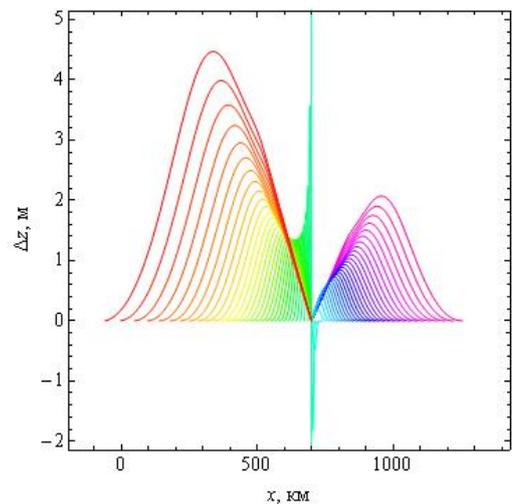


Рис. 2.46б

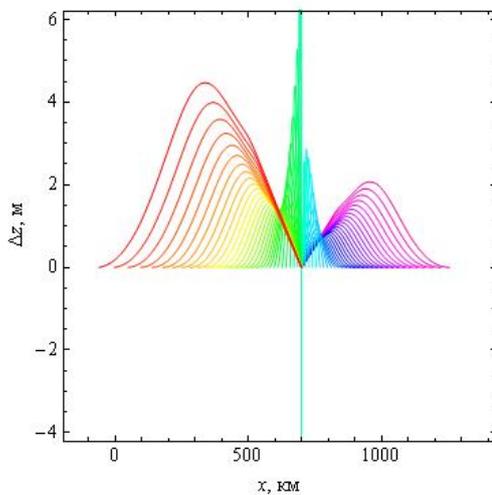


Рис. 2.46в

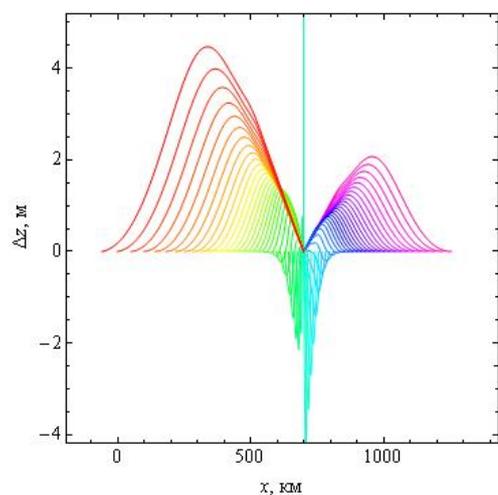


Рис. 2.46г

Отклонение луча от прямой из-за влияния рефракции; а – модель 1, б – модель 2; в – модель 3; г – модель 4.

На рис. 2.46. и 2.47 видны существенные «выбросы» в окрестности 700 км в центральной части рисунков, что связано с наличием локальной крупномасштабной неоднородности в максимуме ионосферного слоя F . В случае неоднородности с повышенной электронной концентрацией это положительные

отклонения (рис. 2.46в), а в случае с пониженной электронной концентрацией – отрицательные (рис. 2.46г).

На рис. 2.47а-г показаны зависимости от группового времени отклонения угла прицеливания $\Delta\alpha$ (отложены по горизонтальной оси) от направления вдоль прямой линии, соединяющей источник и приёмник. Как и в плоскостлой модели (§ 2.1), отклонение очень незначительное, хотя и несколько больше как из-за геометрии задачи, так и из-за того, что угол раствора лучей шире (30÷150 градусов против 45÷135 градусов). Для моделей 1 и 2 зависимость имеет форму квази-параболы.

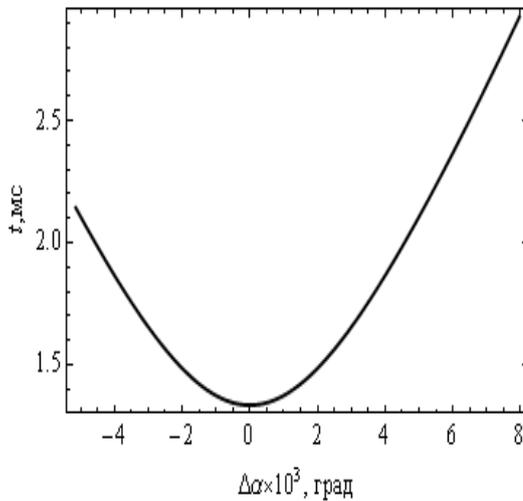


Рис. 2.47а

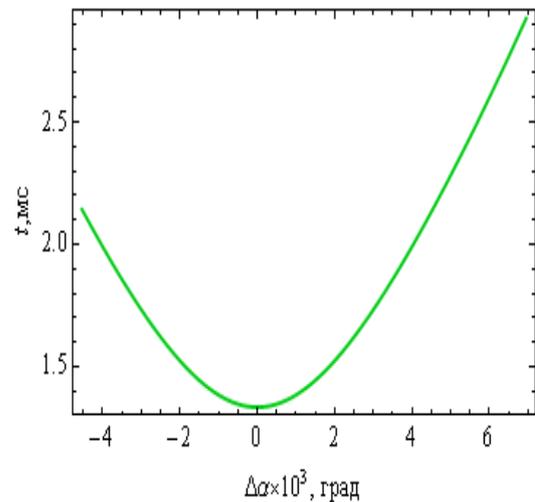


Рис. 2.47б

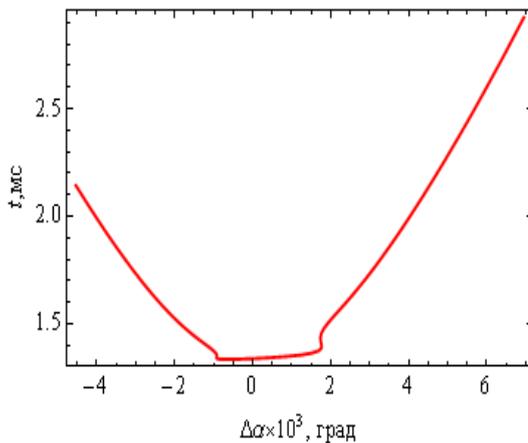


Рис. 2.47в

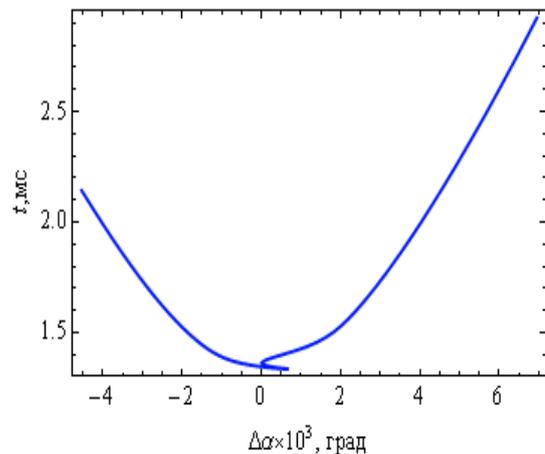


Рис. 2.47г

Зависимость отклонения угла прицеливания от группового времени; а – модель 1, б – модель 2; в – модель 3; г – модель 4.

Для моделей 3 и 4 наблюдаются характерные изменения структуры кривых в области минимумов, причем для модели с повышенной электронной концентрацией локальной неоднородности ветви параболы в нижней части как бы раздвигаются, а для модели с пониженной электронной концентрацией ветви параболы как бы надвигаются друг на друга.

Рассмотрим зависимость относительной скорости изменения фазы от высоты (рис. 2.48). Производная фазы по групповому времени определяется формулой (2.11).

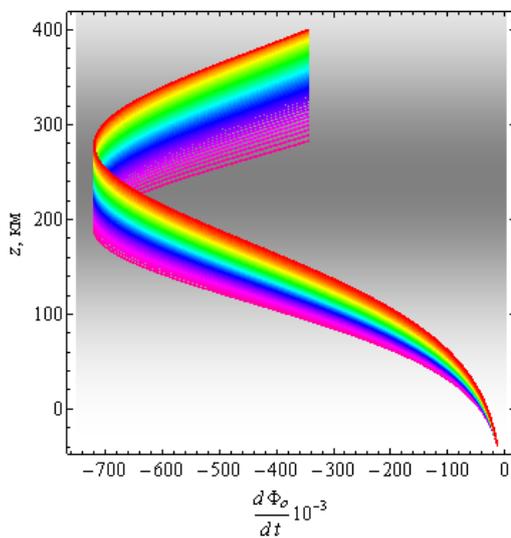


Рис. 2.48а.

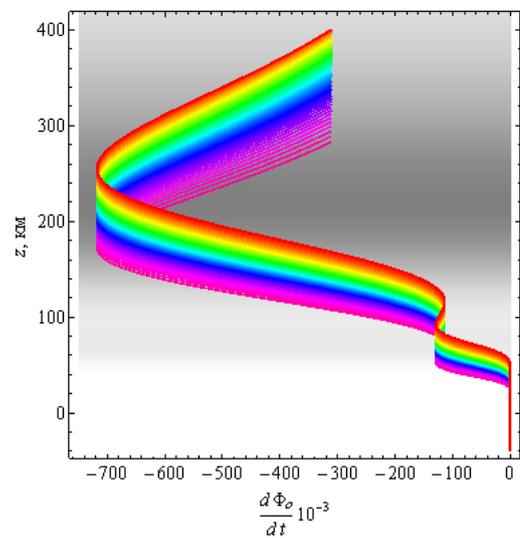


Рис. 2.48б.

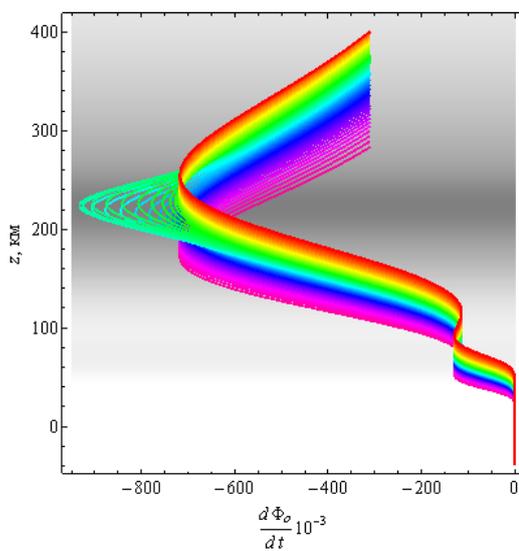


Рис. 2.48в.

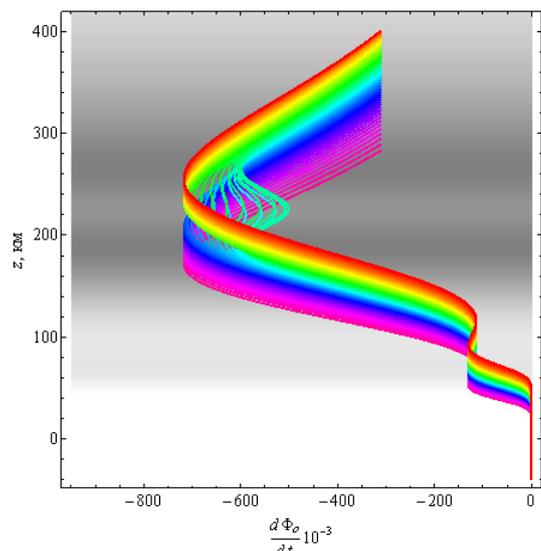


Рис. 2.48г.

Зависимость скорости изменения фазы от высоты; а – модель 1, б – модель 2; в – модель 3; г – модель 4.

Как и в случае плоскостойкой модели, минимумы кривой коррелируют с положениями максимумов ионосферных слоёв. Локальный максимум соответствует межслоевой долине. На рис. 2.48а видим один минимум, что соответствует однослоевой модели 1. На рис. 2.48б, соответствующем двухслоевой модели 2, внизу появляется дополнительный минимум, происхождение которого объясняется слоем E , и максимум, который соответствует межслоевой долине. В моделях 3 и 4 в районе главного максимума электронной концентрации расположена неоднородность с повышенной или пониженной электронной концентрацией. Поэтому на рис. 2.48в и 2.48г возникают характерные выбросы на лучах, проходящих эти неоднородности (салатовый цвет). Главным отличием рис. 2.48 от рис. 2.6а является расщепление графика на лучевые составляющие на всем его протяжении, что объясняется сферичностью модели ионосферы.

На рис. 2.49 показана зависимость отклонения фазы (отложена по горизонтали) от группового времени (отложено по вертикали) в точке приема сигнала. Для вычисления фазы применялась формула (2.13). Разность фаз $\Delta\Phi$ находилась как $\Delta\Phi = \Phi - \omega R / c$, где $\omega R / c$ – фаза луча в пустоте вдоль прямой, соединяющей источник и приёмник. В случае модели 1 зависимость линейная, причем ионосфера вносит существенный вклад в величину фазы. Если модель двухслоевая (модель 2), кривая перестает быть прямой линией. Возникают небольшие отклонения, определяемые слоем E (зелёный цвет). В случае возмущённых моделей образуются петли на конце линии, лежащие по разные стороны от невозмущённой линии.

Зависимость отклонения фазы от горизонтальной координаты x , соответствующей координате выход луча, представлена на рис. 2.50. Форма кривой для модели 1 это квазипарабола (чёрный цвет). Для модели 2 кривая претерпевает небольшую деформацию (помимо сдвига). Наконец для возмущённых моделей на кривой образуется либо дополнительное возвышение (в случае возмущения с пониженной электронной концентрацией – модель 4), либо

небольшой провал (в случае возмущения с повышенной электронной концентрацией – модель 3).

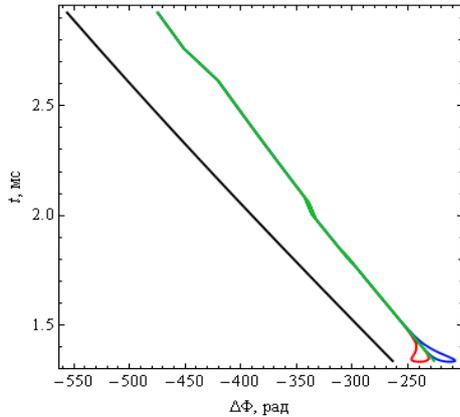


Рис. 2.49

Зависимость отклонения фазы $\Delta\Phi$ (по отношению к фазе в невозмущенной среде) от группового времени t .

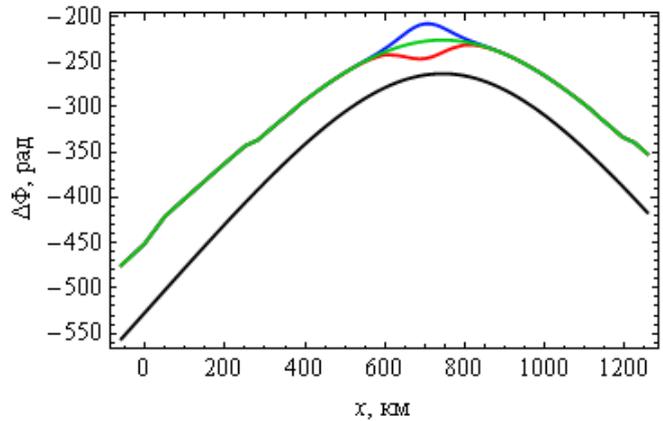


Рис. 2.50

Зависимость разности фаз $\Delta\Phi$ (по отношению к невозмущенной среде) от расстояния по горизонтали x .

Рассмотрим фарадеевское вращение плоскости поляризации, считая, что обыкновенная и необыкновенная волны в высокочастотном диапазоне распространяются вдоль одной и той же лучевой траектории. Согласно [14-18] угол фарадеевского вращения определяется формулой (2.15), в которой $\Delta\mu$ это разность показателей преломления обыкновенной и необыкновенной волны (2.16).

В приведённых ниже расчетах амплитуда магнитного поля предполагается постоянной, а ориентация напряжённости магнитного поля относительно локальной системы координат задается углами γ и φ [14-16]: $H_0 = 0,465 \text{ Э}$, $\gamma = -57^\circ$, $\varphi = 90^\circ$.

Зависимости разности $\Delta\mu$ показателей преломления обыкновенной и необыкновенной волны от высоты вдоль лучевых траекторий приведены на рис. 2.51. Видно, что форма кривой отслеживает профиль электронной концентрации (ср. рис. 2.43 и рис. 2.51). Отметим, что в возмущенном случае (рис. 2.51в и 2.51г) поведение части графиков (салатового цвета) отклоняется от общей тенденции, характерной для других кривых. Для модели 3 ими образован главный максимум,

который вытягивается, а для модели 4 эти лучи образуют минимум на фоне других лучей.

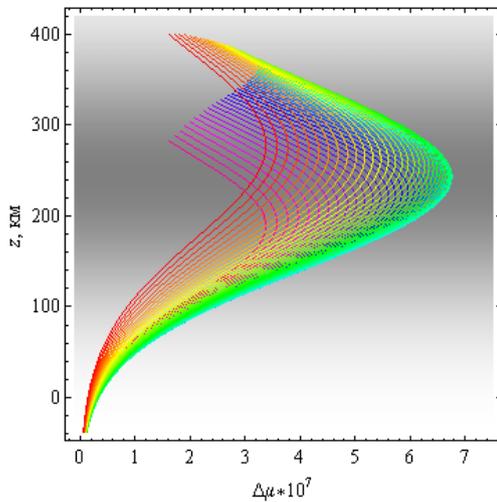


Рис. 2.51а.

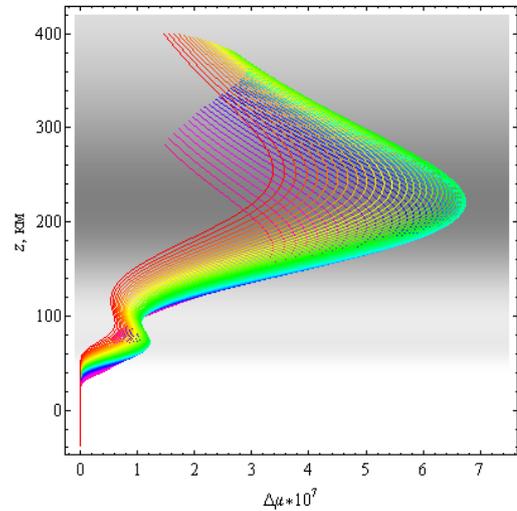


Рис. 2.51б

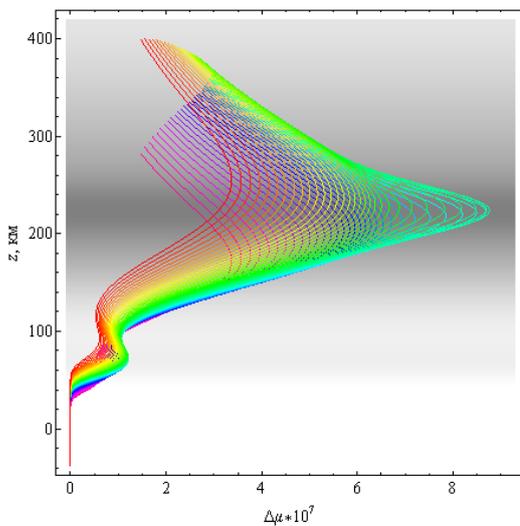


Рис. 2.51в.

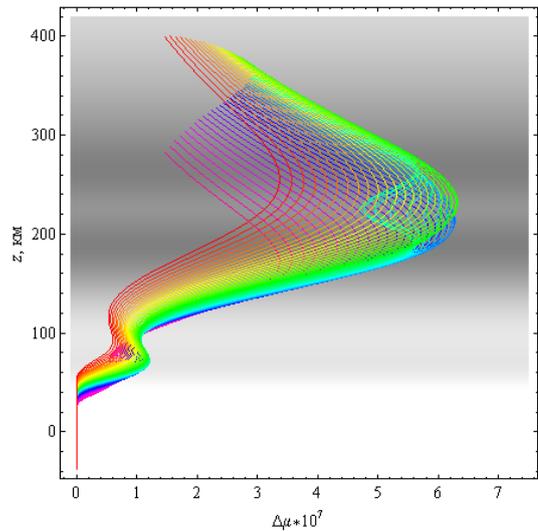


Рис. 2.51г

Зависимость разности показателей преломления обыкновенной и необыкновенной волны от высоты вдоль лучей; а – модель 1, б – модель 2; в – модель 3; г – модель 4.

На рис. 2.52 показана зависимость угла фарадеевского вращения Ω от группового времени. Из результатов расчётов видно, что слой E практически не сказывается на характере (гладкости) кривой (ср. черную линию (модель 1) и зелёную линию (модель 2)). Но локальные возмущения максимума слоя (модели 3

и 4) приводят к существенным отклонениям – своеобразным выбросам в разные стороны от зелёной кривой.

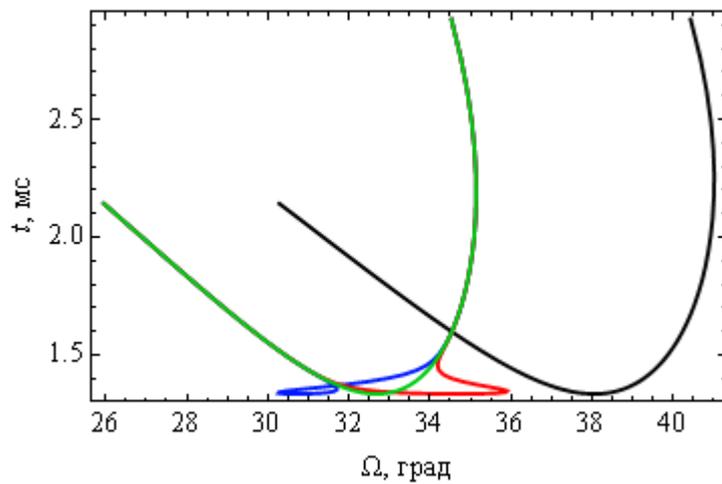


Рис. 2.52

Зависимость угла фарадеевского вращения Ω от группового времени t .

На рис. 2.53 показана зависимость угла фарадеевского вращения от координаты x . Невозмущенные кривые ведут себя как гладкие параболы, и влияние слоя E сказывается слабо (черная и зеленая кривые). Возмущения приводят к отклонениям от зеленой кривой, причем в отличие от рис. 2.50, область с повышенной электронной концентрацией теперь создаёт максимум (красная линия), а с пониженной – минимум (синяя линия).

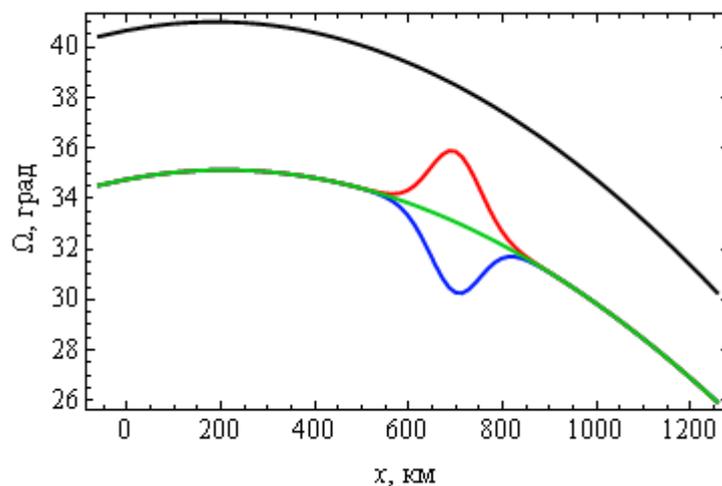


Рис. 2.53.

Зависимость угла фарадеевского вращения Ω от расстояния по горизонтали x .

Таким образом, в данном параграфе методом бихарактеристик рассмотрены особенности влияния ионосферы Земли на распространение высокочастотных радиоволн Р-диапазона (430 МГц). Сопоставлены четыре сферические модели: однослойная модель ионосферы без возмущений, двухслойная модели ионосферы без возмущений, двухслойная модель с локальным образованием с повышенной электронной концентрацией в окрестности максимума *F*-слоя, двухслойная модель с локальным образованием с пониженной электронной концентрацией в окрестности максимума *F*-слоя. Исследованы величины набега фазы за счет влияния ионосферы и угла фарадеевского вращения. Установлено, что величина угла фарадеевского вращения в случае сферической модели дневной среднеширотной ионосферы несколько больше, чем в случае плоскостойкой высокоширотной ночной ионосферы и может достигать 40 градусов. Это не удивительно, поскольку значение электронной концентрации в главном максимуме ионосферного слоя отличается примерно 5 раз. Во столько же отличается и значение угла.

Таким образом при обработке результатов РСА необходимо учитывать ионосфере как минимум на уровне модели IRI. Следует отметить, что угол фарадеевского вращения отличается (на 4÷6 градусов) для моделей 1 и 2, которые примерно совпадают. Если такое отличие существенно для обработки результатов эксперимента, то учет ионосферы на уровне модели IRI окажется недостаточным. Необходимо иметь модель ионосферы в реальном времени на полосе вдоль трассы, для которой проводится эксперимент. Крупномасштабные неоднородности, даже такие значительные, какие были рассмотрены в данном разделе, дают небольшой вклад в величину угла фарадеевского вращения (порядка 2 градусов). Однако на фоне гладкой зависимости угла фарадеевского вращения от группового времени (расстояния) они могут быть обнаружены таким способом. Влияние слоя *E* несущественно.

§ 2.4 Выводы

Настоящая глава включает результаты численного моделирования характеристик радиосигналов Р-диапазона, учёт которых существенен для

корректной обработки данных в космических экспериментах. Были исследованы вариации и характерные значения таких параметров как:

- отклонение угла прицеливания от угла прямого видения;
- отклонение лучевой траектории от прямой линии на различных участках трассы;
- вариации фазы сигнала;
- вариации угла фарадеевского вращения вектора поляризации в магнитоактивной ионосферной плазме.

В представленной главе использовались различные модели неоднородной ионосферы: плоская, сферическая, ночная и дневная, возмущённая и невозмущённая, – с целью проведения сопоставительного анализа качества прогнозируемых результатов.

Показано, что в рассматриваемом диапазоне частот существенным вариациям в зависимости от точности восстановления ионосферного профиля подвержены такие параметры как: угол вращения вектора поляризации и фазовые вариации. При этом компенсировать вариации параметров, обусловленные рефракцией сигналов данного диапазона в неоднородной ионосфере Земли, можно лишь при точном (в пределах точности восстановления профиля электронной концентрации) воспроизводстве текущего состояния ионосферы, особенно в зоне нахождения КА.

При использовании актуальных (текущих) данных о состоянии ионосферы, предложенные методы и алгоритмы расчетов указанных параметров позволяют прогнозировать поправки к данным фазовых и поляризационных измерений.

ГЛАВА 3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ИОНОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЕ МЕТОДОМ БИХАРАКТЕРИСТИК

§ 3.1. Математическое моделирование особенностей распространения частотно-модулированного излучения в анизотропной плазме без учета горизонтальных градиентов

Настоящая глава посвящена изучению распространения частотно-модулированного излучения в магнитоактивной ионосферной плазме. Актуальность исследования определяется активным использованием электромагнитных волн декаметрового диапазона для обеспечения дальней радиосвязи, радионавигации, радиолокации, загоризонтного радиозондирования, а также изучения структуры верхней атмосферы Земли – ионосферы. В основе лежат лучевые методы, являющиеся традиционными при исследовании процессов распространения коротких волн в различных средах.

Известно, что при моделировании лучевых траекторий гамильтонову бихарактеристическую систему уравнений с гамильтонианом:

$$\Gamma = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \quad (3.1)$$

в неоднородной, анизотропной и нестационарной среде можно представить в виде [25, 27, 114, 128]:

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{k}}, \quad \frac{d\vec{k}}{d\tau} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{r}}, \quad \frac{dt}{d\tau} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \omega}, \quad \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}. \quad (3.2)$$

Буквами v и u обозначены отношения квадратов плазменной частоты и гирочастоты к квадрату рабочей частоты:

$$v = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{4\pi e^2 N}{m_e \omega^2}, \quad u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} = \frac{e^2 H_0^2}{m_e^2 c^2 \omega^2}. \quad (3.3)$$

В качестве модели эффективной диэлектрической проницаемости среды рассмотрим модель неоднородной анизотропной ионосферы [49, 117].

$$\varepsilon_{\pm} = 1 - \frac{2\nu(1-\nu)}{2(1-\nu) - u \sin^2 \alpha \pm \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u(1-\nu)^2 \cos^2 \alpha}}, \quad (3.4)$$

в которой знак «+» соответствует обыкновенной волне, а знак «-» – необыкновенной волне. Выражение для квадрата косинуса угла α имеет вид:

$$\cos^2 \alpha = \frac{H_{0x}k_x + H_{0y}k_y + H_{0z}k_z}{H_0^2 |\vec{k}|^2}. \quad (3.5)$$

Предполагается, что источник излучения расположен в точке с координатами:

$$\vec{r}|_{t=0} = (x_0, y_0, z_0), \quad (3.6)$$

а начальный волновой вектор $\vec{k}(0)$ параметрически зависит от углов выхода луча:

$$k_x(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \zeta \cos \eta, \quad k_y(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \zeta \cos \eta, \quad k_z(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \eta, \quad (3.7)$$

где ε_0 значение эффективной диэлектрической проницаемости среды в источнике. Кроме того, предполагается, что сигнал линейно частотно-модулированный (ЛЧМ), то есть:

$$\omega(0) = \omega_0(1 + \delta \tau_0), \quad t(0) = \tau_0 \quad (3.8)$$

В приведённых ниже расчетах амплитуда магнитного поля предполагается постоянной, а ориентация напряжённости магнитного поля относительно локальной системы координат задается двумя углами γ и φ :

$$H_{0x} = H_0 \cos \gamma \cos \varphi, \quad H_{0y} = H_0 \cos \gamma \sin \varphi, \quad H_{0z} = H_0 \sin \gamma. \quad (3.9)$$

Рассмотрим распространение частотно-модулированного радиосигнала в неоднородной, анизотропной среде с учётом влияния магнитного поля Земли. Предположим, что изначально распространение осуществляется в плоскости (x, z) . Источник излучения расположен в начале координат $(x_0=y_0=z_0=0)$ и находится вне магнитоактивной плазмы. Рассмотрим модель двухслойной ионосферной плазмы, для которой профиль электронной концентрации имеет вид [104, 116, 117]:

$$N(\vec{r}) = N_0 \left\{ \exp \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{z - z_{01}}{z_{m1}/2} \right) - \frac{\exp \left(- \left(\frac{z - z_{01}}{z_{m1}/2} \right) \right)}{\cos \chi} \right] + \beta \exp \left[- \left(\frac{z - z_{02}}{z_{m2}} \right)^2 \right] \right\}, \quad (3.10)$$

где N_0 – электронная концентрация в максимуме основного слоя $F2$, z_{01} – высота максимума слоя $F2$, z_{m1} – условная полутолщина слоя $F2$, β – безразмерный коэффициент, характеризующий степень ионизации нижнего слоя по отношению к основному, z_{02} – высота максимума нижнего слоя E , z_{m2} – условная полутолщина нижнего слоя E .

На рис. 3.1а и 3.1б в разных масштабах показана лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в случае распространения обыкновенной волны в плоскости (x, z) при $\beta=0,1$. При вычислении применялись следующие значения перечисленных выше параметров: $N_0 = 2 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}$, $H_0 = 0,36 \text{ Э}$, $z_{m1} = 140 \text{ км}$, $z_{01} = 300 \text{ км}$, $z_{m2} = 40 \text{ км}$, $z_{02} = 100 \text{ км}$, $\zeta = 0$, $\eta = 89,6^\circ$, $f_0 = \omega_0 / (2 \pi) = 12,5 \text{ МГц}$, $\delta = 1$, $\gamma = 3\pi/4$, $\varphi = \pi/2$, $0 \leq \tau_0 \leq 90 \text{ мс}$.

Следует подчеркнуть, что в данном параграфе рассмотрено лучевое распространение с углом падения $\eta = 89,6^\circ$, очень близким к вертикальному.

Сначала все частоты идут по одной траектории, но, попадая в плазменный слой, их пути разделяются: высокие частоты просачиваются, а низкие частоты возвращаются на землю. Формально правее мертвой зоны всюду на земле может быть принят сигнал, однако за исключением небольшой области, близкой к границе, интенсивность его (в силу расходимости) ничтожна (см. рис. 3.1 б). Густота лучей наглядно иллюстрирует интенсивность поля.

Следует отметить, что угол наклона траектории на начальном отрезке и угол наклона предельного луча после выхода из слоя совпадают, поскольку на этих участках волна распространяется со скоростью света. Процесс перехода в прямую линию при $\tau_0 \rightarrow \infty$ довольно сложен.

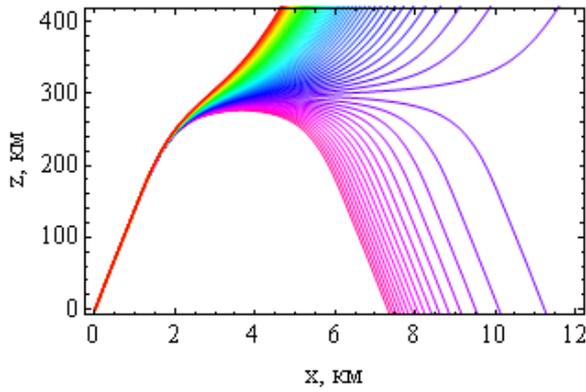


Рис. 3.1 а.

Лучевая структура в плоскости (x, z) .

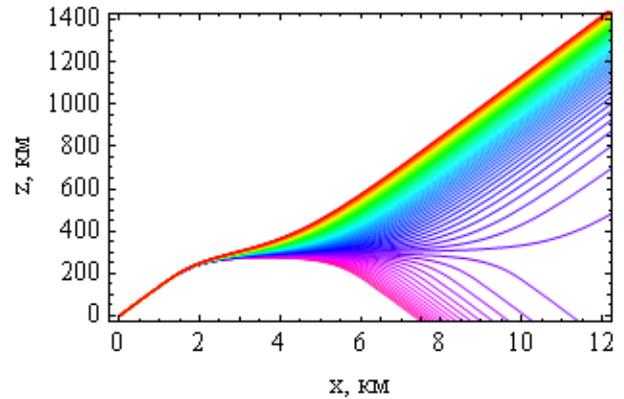


Рис. 3.1 б.

Обыкновенная волна.

На рис. 3.2 приведены проекции лучевых траекторий в плоскости (y, z) . При отсутствии магнитного поля все проекции лучей соответствовали бы линии $y=0$.

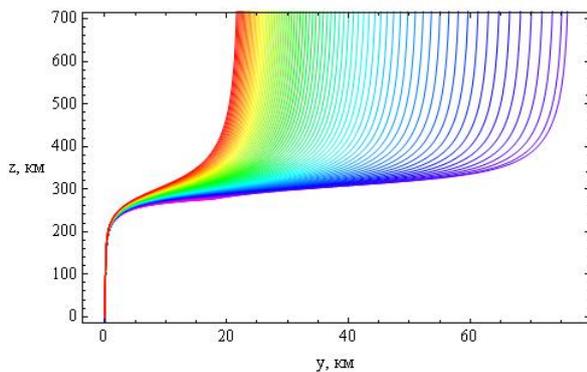


Рис. 3.2.

Лучевая структура в плоскости (y, z)

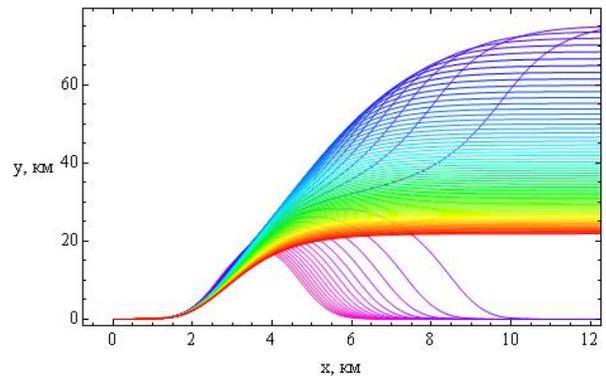


Рис.3.3.

Лучевая структура в плоскости (x, y) .

Поскольку горизонтальные градиенты в данных расчетах отсутствуют, лучи, возвращающиеся на землю после отражения от слоя, на этом рисунке не видны, так как идут назад по первоначальным траекториям. Проходящие же лучи ионосфера «сдвигает» в положительном направлении оси y . При этом наибольшие сдвиги y меньших частот, соответствующих так называемым «лучам Педерсена». В принципе можно подобрать такую частоту, для которой сдвиг будет любой наперед заданной величиной. Другое дело, что в силу расходимости лучевого потока интенсивность поля, образованного такими лучами, будет ничтожна.

На рис. 3.3 показана проекция лучевой структуры на землю, то есть распространение лучей в плоскости (x, y) . Здесь уже хорошо видны лучи,

отраженные от ионосферы и вернувшиеся на землю, а также семейство лучей, прошедших ионосферный слой и распространяющихся вдоль оси x .

На рис. 3.4 представлено распространение обыкновенной волны в плоскости (t, z) . Видно, что семейство пространственно-временных лучей, отражающихся от ионосферы и имеющих огибающую, образует пространственно-временную каустику с краем (краевая катастрофа \mathbf{B}_3) (подробнее см. в [35, 85, 98, 139], а также работу [198] и ссылки в ней). Необходимо отметить, что для наглядности при расчете было взято в 2 раза больше лучей, чем на всех других рисунках.

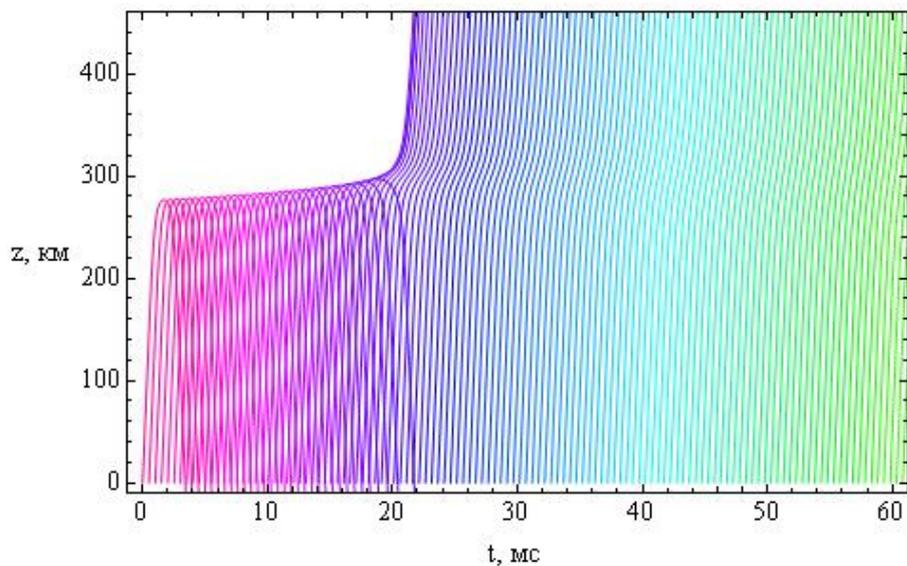


Рис. 3.4.

Лучевая структура в плоскости (t, z) .

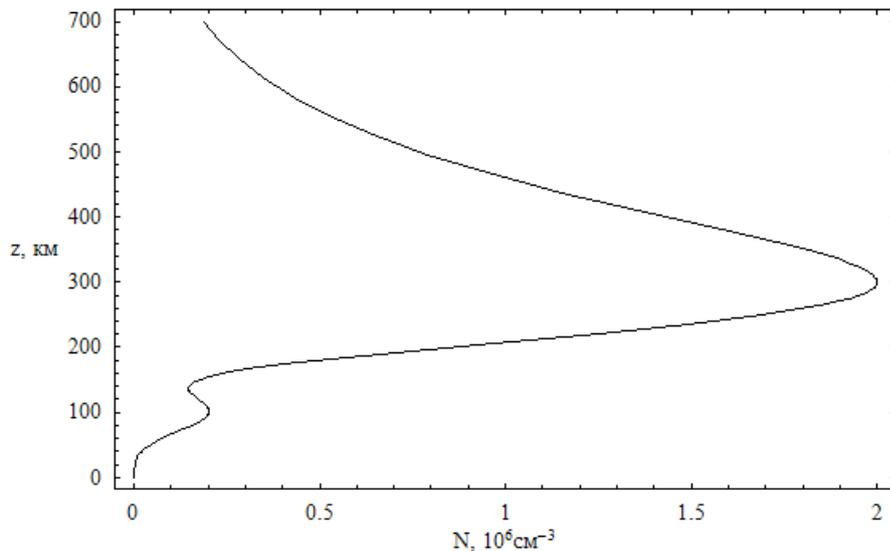


Рис. 3.5.

Профиль электронной концентрации.

На рис. 3.1–3.4 влияние второго нижнего слоя (слоя E , см. рис. 3.5) в силу достаточно высокой начальной частоты ничтожно. Однако, если понизить начальную частоту, то лучевая структура существенно дополнится. На рис. 3.6, соответствующим плоскости (x,z) , видно, что с ростом частоты лучи сначала отражаются от слоя E , потом идёт переходная область (по углам). При этом лучи, отраженные от слоя E , засвечивают на земле всю область справа, но с минимальной интенсивностью, а далее формируется структура, описанная выше.

На рис. 3.7 показана лучевая структура в плоскости (y,z) . Следует обратить внимание на характерный «выброс вправо», описывающий выход из основной плоскости распространения лучей в результате взаимодействия со слоем E . При расчетах предполагалось, что $\beta = 0,1$; $f_0 = \omega_0 / (2 \pi) = 3,5$ МГц; $0 \leq \tau_0 \leq 2790$ мс.

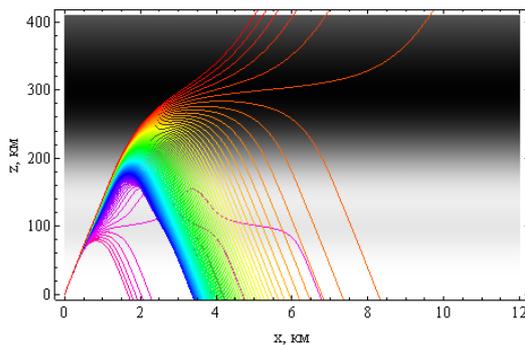


Рис. 3.6.

Лучевая структура в плоскости (x,z) .

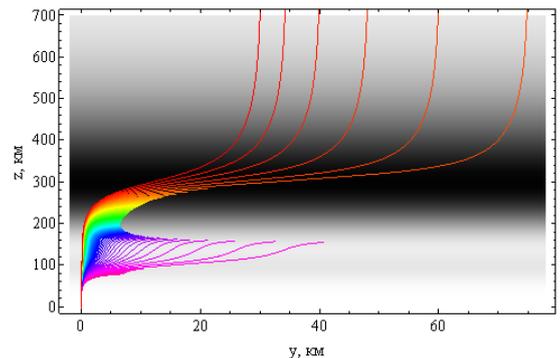


Рис. 3.7.

Лучевая структура в плоскости (y,z) .

При построении лучевой структуры необыкновенной волны использованы те же параметры, что и в случае обыкновенной волны (до уменьшения начальной частоты сигнала). Сопоставим полученные результаты. Сравнивая рис. 3.1 а и 3.8, описывающие лучевое распространение в плоскости (x,z) , видим, что число лучей, прошедших ионосферный слой, существенно уменьшилось.

Сопоставляя рис. 3.3 и рис. 3.10 видим, что лучевая структура, опять-таки став более компактной, как бы зеркально отразилась относительно горизонтальной оси.

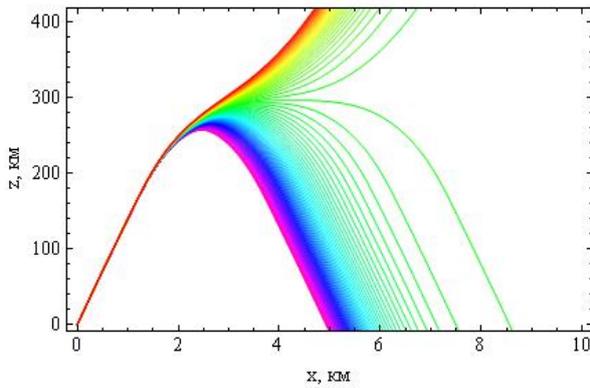


Рис. 3.8.
Лучевая структура в плоскости (x, z) .
Необыкновенная волна.

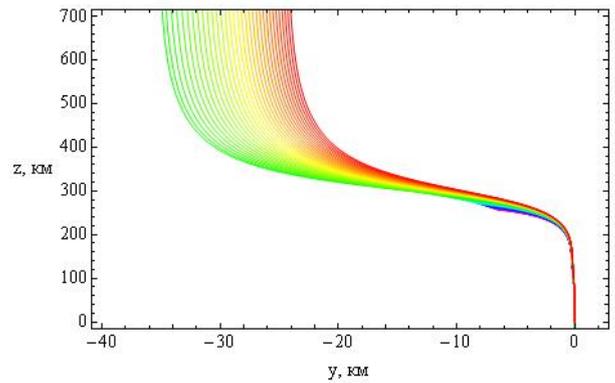


Рис. 3.9.
Лучевая структура в плоскости (y, z) .
Необыкновенная волна.

Ширина мертвой зоны (куда не приходят ионосферные лучи) также уменьшилась с 7,3 км до 5 км. Более компактно выглядит боковое отклонение лучей (ср. рис. 3.2 и рис. 3.9).

Причем если в случае обыкновенной волны прошедшие ионосферу лучи параллельно сдвигаются вправо по оси y , то в случае необыкновенной волны они сдвигаются влево.

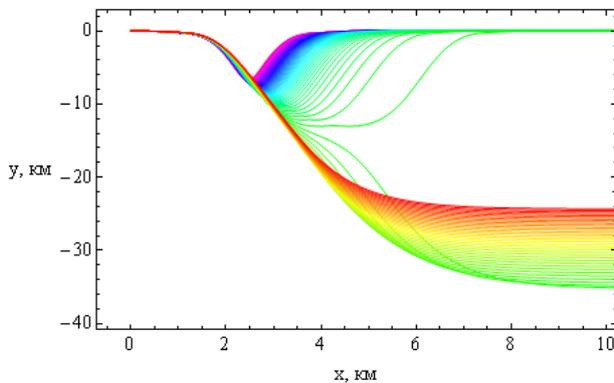


Рис. 3.10.
Лучевая структура в плоскости (x, y) .
Необыкновенная волна.

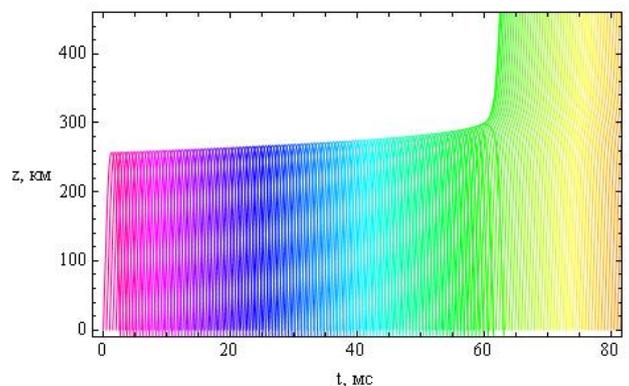


Рис. 3.11.
Лучевая структура в плоскости (t, z) .
Необыкновенная волна.

На рис. 3.11 представлено распространение необыкновенной волны в плоскости (t, z) . При сравнении с рис. 3.4 видим, что число пространственно-временных лучей, отражающихся от ионосферы и касающихся огибающей (каустики), существенно возросло.

Таким образом, в данном параграфе выполнено численное моделирование распространения частотно-модулированных сигналов в анизотропной ионосферной плазме как в случае обыкновенной, так и в случае необыкновенной электромагнитной волны. Основным инструментом исследования являлась бихарактеристическая система дифференциальных уравнений (3.1)–(3.2), неизвестным в которой являются не только координаты и компоненты волнового вектора, но также частота и время. Исследовано распространение декаметровых радиоволн в случае двухслоевой модели ионосферы Земли.

Проведено моделирование характерных особенностей распространения излучения в магнитоактивной среде: выхода как обыкновенной, так и необыкновенной волны из плоскости распространения, а также образование каустики пространственно-временных геометрооптических лучей. Показано, что в отсутствии горизонтальных градиентов отраженные волны возвращаются в боковой проекции на землю по тем же траекториям, а направление бокового отклонения зависит от типа волны. Показано, что лучевая структура обыкновенной волны в боковой проекции и в проекции «вид сверху» является зеркально симметричной по отношению к лучевой структуре необыкновенной волны, причем лучевая структура необыкновенной волны является более компактной по сравнению с лучевой структурой обыкновенной волны.

§ 3.2. Математическое моделирование особенностей распространения частотно-модулированного излучения с учетом горизонтальных градиентов в движущихся нестационарных средах, эффект Доплера

Данный параграф посвящен изучению распространения частотно-модулированных сигналов в магнитоактивной ионосферной плазме с учетом горизонтальных градиентов электронной концентрации. Целью данного параграфа является исследование особенностей распространения в движущихся нестационарных средах обыкновенных и необыкновенных радиоволн для однослоевой и двухслоевой моделей. Рассмотрено как односкачковое, так и двухскачковое распространение.

Рассмотрим распространение ЛЧМ-сигнала в неоднородной, анизотропной среде (ионосферной плазме) с учётом влияния магнитного поля Земли. Как и в предыдущем случае распространение волны изначально осуществляется в плоскости (x,z) , а источник излучения расположен в начале координат ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$). Рассмотрим модель двухслойной ионосферной плазмы, для которой профиль электронной концентрации имеет вид [104, 116, 117]:

$$N(\vec{r}) = N_0 g \left\{ \exp \frac{1}{2} \left[1 - \theta - \frac{\exp(-\theta)}{\cos \chi} \right] + \beta \exp \left[- \left(\frac{z - z_{02}}{z_{m2}} \right)^2 \right] \right\}, \quad (3.11)$$

$$\theta = \frac{z - z_{01}}{z_{m1}/2} \quad g = 1 - \gamma_x \frac{x}{x_g} \sin \left(2\pi(x - Vt) / \lambda_g \right), \quad (3.12)$$

От модели (3.10) выражение (3.11) отличается множителем g . Коэффициент g описывает влияние горизонтального градиента (глубина γ_g , масштаб x_g) и волнообразного возмущения в плазме. В формуле (3.12) V – скорость гравитационной волны, а λ_g – длина гравитационной волны.

Как и в § 3.1 при вычислении применялись следующие значения параметров: $N_0 = 2 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}$, $H_0 = 0,36 \text{ Э}$, $z_{m1} = 140 \text{ км}$, $z_{01} = 300 \text{ км}$, $z_{m2} = 40 \text{ км}$, $z_{02} = 100 \text{ км}$, $\zeta = 0$, $\chi = 0$, $\gamma = 3\pi/4$, $\varphi = \pi/2$. Кроме того, предполагалось, что, $V = 200 \text{ м/с}$, $\lambda_g = 50 \text{ км}$, $x_g = 500 \text{ км}$. Рассмотрено наклонное падение волны на плазменный слой.

На рис. 3.10 показана лучевая структура ЛЧМ-радиосигнала в случае распространения обыкновенной волны в плоскости (x,z) при $\beta = 0,1$ [129]. При вычислении применялись следующие значения: $\eta = 80^\circ$, $f_0 = \omega_0/(2\pi) = 12,5 \text{ МГц}$, $\delta = 1 \text{ с}^{-1}$, $0 \leq \tau_0 \leq 90 \text{ мс}$, $\gamma_x = 0$. Тёмным цветом на жёлтом фоне показана электронная концентрация. Сначала лучи, соответствующие всем частотам, идут по одной траектории, но, попадая в плазменный слой, их пути разделяются: высокие частоты просачиваются, а низкие частоты возвращаются на землю. Сравнивая рис. 3.1 и рис. 3.10, видим, что с качественной точки зрения

изображения лучевых траекторий отличаются не сильно, однако масштаб по горизонтальной оси существенно иной.

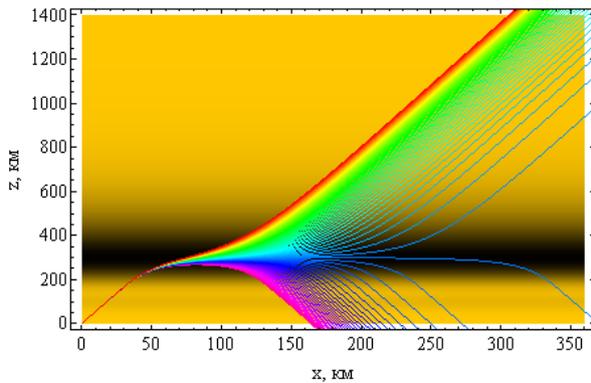


Рис. 3.10.

Лучевая структура обыкновенной волны в плоскости (x, z) без учета влияния слоя E .

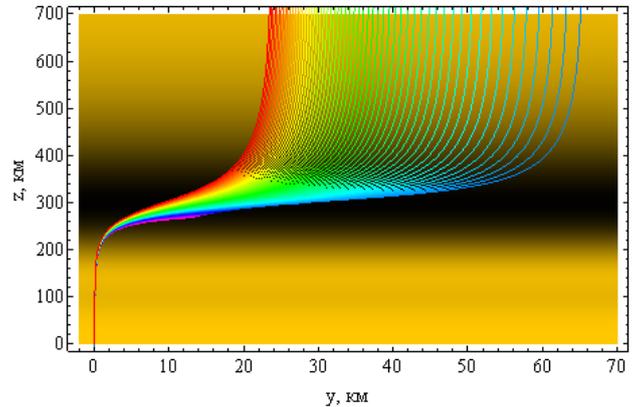


Рис. 3.11

Лучевая структура в плоскости обыкновенной волны (y, z) без учета влияния слоя E .

Как и на рис. 3.1, угол наклона траектории на начальном отрезке и угол наклона предельного луча после выхода из слоя совпадают, поскольку на этих участках волна распространяется со скоростью света.

На рис. 3.11 показаны проекции лучевых траекторий на плоскость (y, z) . Сравнивая рис. 3.2 и 3.11, видим, что масштаб бокового отклонения лучей не изменился.

На рис. 3.12 показано лучевое распространение в плоскости (x, y) то есть проекция лучевой структуры на землю. Выделяются две группы лучей: семейство лучей, отраженных от ионосферы и вернувшихся на землю, и семейство лучей, прошедших ионосферный слой.

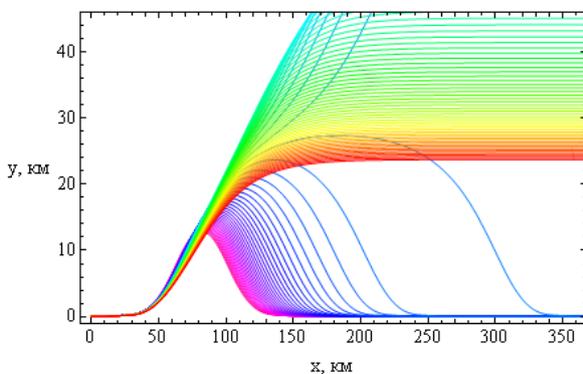


Рис. 3.12.

Лучевая структура обыкновенной волны в плоскости (x, y) без учета влияния слоя E .

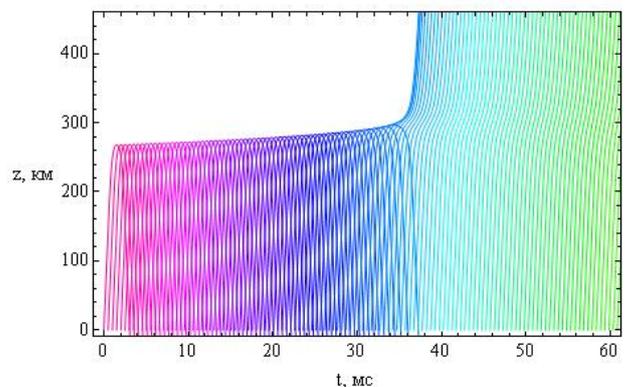


Рис.3.13.

Лучевая структура обыкновенной волны в плоскости (t, z) .

На рис. 3.13 представлено распространение обыкновенной волны в плоскости (t, z) . Как и на рис. 3.4 семейство пространственно-временных лучей, отражающихся от ионосферы, и имеет огибающую, и, следовательно, образует пространственно-временную каустику с краем (краевая катастрофа \mathbf{B}_3) [85, 110, 139]. Масштаб по горизонтальной оси отличается вдвое, так как путь, который проходит каждый отраженный луч, длиннее. Как и в § 3.1 при расчете рис. 3.13 было взято в два раза больше лучей (180), чем на рисунках 3.10–3.12.

На рис. 3.10–3.13 видно, что, как и в случае квазивертикального падения, влияние нижнего слоя E (см. рис. 3.5) на выбранных начальных частотах незначительно. Однако при понижении начальной частоты лучевая структура меняется. В плоскости (x, z) (рис. 3.14), видно, что с ростом частоты лучи сначала отражаются от слоя E . Потом возникает переходная область. Очевидно, что волна частично попадает в волновой канал между слоями E и F . При этом лучи, отраженные от слоя E , засвечивают на земле всю область справа, но с минимальной интенсивностью. С ростом частоты формируется группа проходящих лучей.

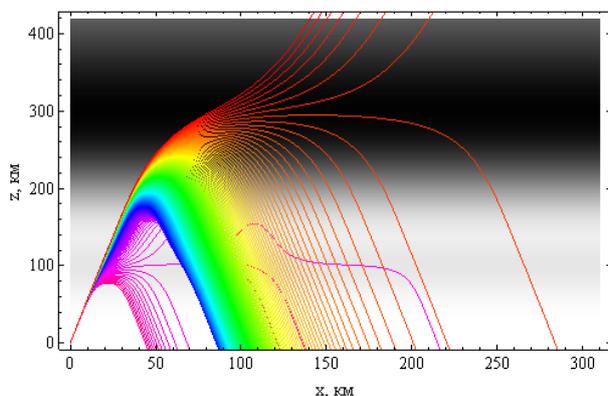


Рис. 3.14.

Лучевая структура обыкновенной волны в плоскости (x, z) с учетом влияния слоя E .

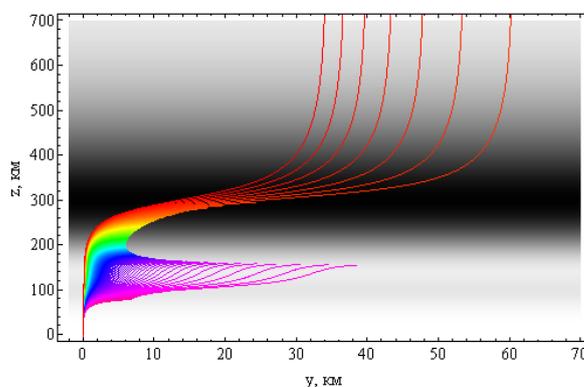


Рис. 3.15.

Лучевая структура обыкновенной волны в плоскости (y, z) с учетом влияния слоя E .

На рис. 3.15 показана лучевая структура в плоскости (y, z) . Помимо бокового отклонения лучей на уровне слоя F , следует отметить боковое отклонение лучей (характерный «выброс вправо»), на уровне слоя E . При расчетах предполагалось, что $f_0 = \omega_0 / (2 \pi) = 3,5$ МГц; $0 \leq \tau_0 \leq 2790$ мс. Число лучей при построении рис. 3.14 и

3.15, использовалось такое же, как и при построении рис. 3.13 – 180. Тёмным цветом на белом фоне показана электронная концентрация.

Рассмотрим лучевую структуру необыкновенной волны. Для этого вернемся к начальному значению частоты $f_0 = \omega_0 / (2 \pi) = 12,5$ МГц. Сопоставим результаты, полученные для обыкновенной и необыкновенной волны. Как и в случае квазивертикального падения волны, видим, что в плоскости (x, z) по сравнению с обыкновенной волной число лучей, прошедших ионосферный слой, в случае необыкновенной волны существенно уменьшилось. (См. рис. 3.10 и 3.16).

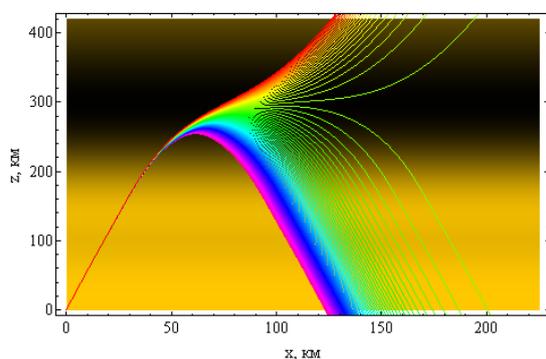


Рис. 3.16.

Лучевая структура необыкновенной волны в плоскости (x, z) без учета влияния слоя E.

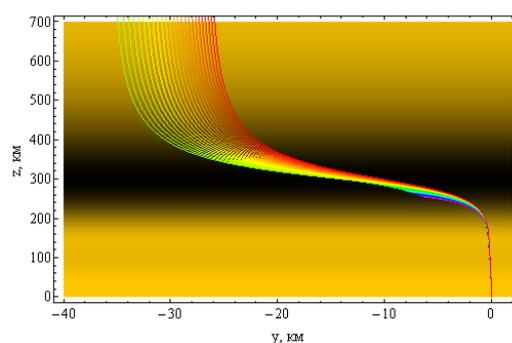


Рис.3.17.

Лучевая структура необыкновенной волны в плоскости (y, z) без учета влияния слоя E.

Ширина мертвой зоны (куда не приходят ионосферные лучи) также уменьшилась с 163 км до 122 км. Более компактно выглядит боковое отклонение лучей (сравните рис. 3.11 и рис. 3.17). Стоит ещё раз отметить, что при выбранной нами ориентации магнитного поля в случае обыкновенной волны прошедшие ионосферу лучи параллельно сдвигаются вправо по оси y , а в случае необыкновенной волны они сдвигаются влево.

На рис. 3.18 показана лучевая структура в плоскости (x, y) . Сопоставляя рис. 3.12 и рис. 3.18 видим, что лучевая структура, стала более компактной, как бы зеркально отразилась относительно горизонтальной оси по сравнению с лучевой структурой обыкновенной волны.

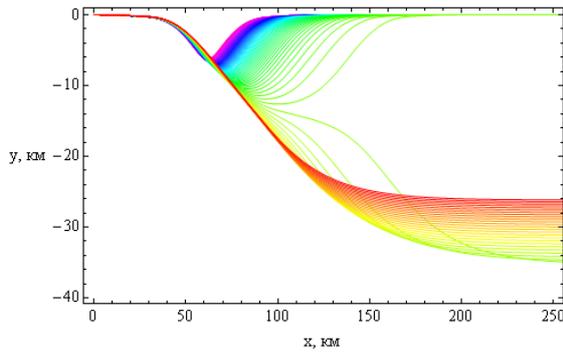


Рис. 3.18.

Лучевая структура необыкновенной волны в плоскости (x, y) без учета влияния слоя E .

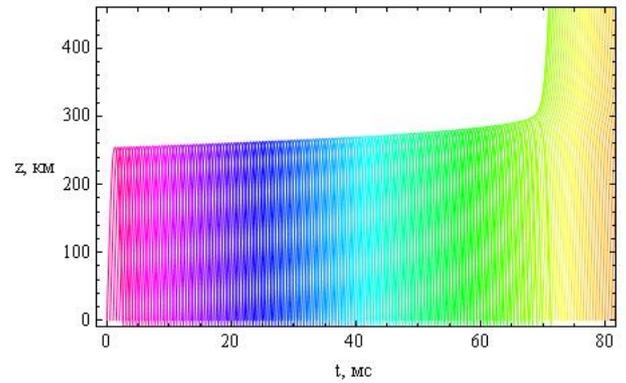


Рис. 3.19.

Лучевая структура необыкновенной волны в плоскости (t, z) .

На рис. 3.19 представлено распространение необыкновенной волны в плоскости (t, z) . При сравнении с рис. 3.13 видим, что число пространственно-временных лучей, отражающихся от ионосферы и касающихся огибающей (каустики), существенно возросло. На всех рисунках, кроме рис. 3.13 и рис. 3.19, число лучей – 90.

Рассмотрим двухскачковое распространение [137]. На рис. 3.20 и 3.21 показана лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в случае распространения необыкновенной волны в плоскости (x, z) при отсутствии и наличии горизонтальных градиентов, то есть при $\gamma_x = 0$ и $\gamma_x = 0,15$ соответственно. При расчетах предполагалось, что, в отличие от предыдущего раздела, угол $\eta = 64^\circ$, $f_0 = \omega_0 / (2\pi) = 3$ МГц, $0 \leq \tau_0 \leq 1$ с, $\delta = 5$ с⁻¹.

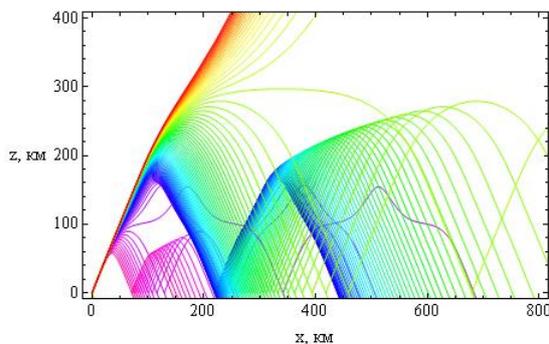


Рис.3.20.

Лучевая структура в плоскости (x, z) , $\gamma_x = 0$.

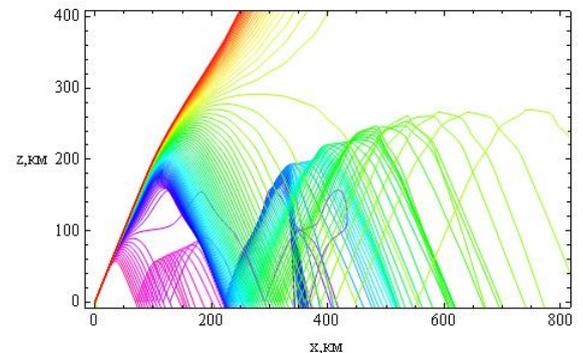


Рис.3.21.

Лучевая структура в плоскости (x, z) , $\gamma_x = 0,15$.

Лучи, не прошедшие ионосферных слоев, возвращаются на землю, отражаются от земли, возвращаются в ионосферу, а затем еще раз отражаются от ионосферных слоев E или F , возвращаются на землю и т.д. На всех рисунках показано только одно отражение от Земли.

Лучевые траектории на рис. 3.20 и 3.21 в целом похожи. Однако следует обратить внимание на характерные искажения лучевых траекторий на рис. 3.21 под действием волнообразного возмущения. Видно, что каустика (огибающая лучей второго скачка) промодулирована волнообразным возмущением, возникают точки заострения (точки возврата траекторий). Эти эффекты еще более заметны при увеличении угла η .

На рис. 3.22 и 3.23 приведены проекции лучевых структур на землю, то есть показано распространение лучей в плоскости (x, y) без учёта и с учётом горизонтальных градиентов.

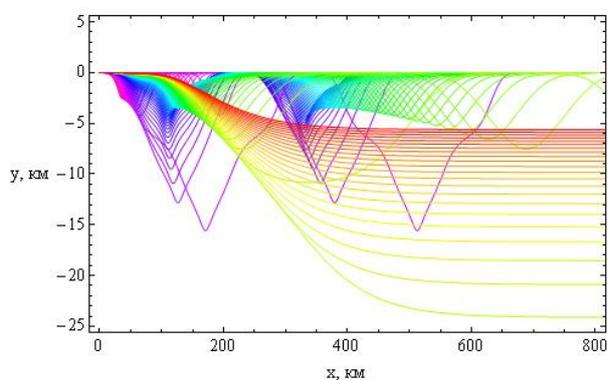


Рис. 3.22.

Лучевая структура в плоскости (x, y) ,
 $\gamma_x = 0$.

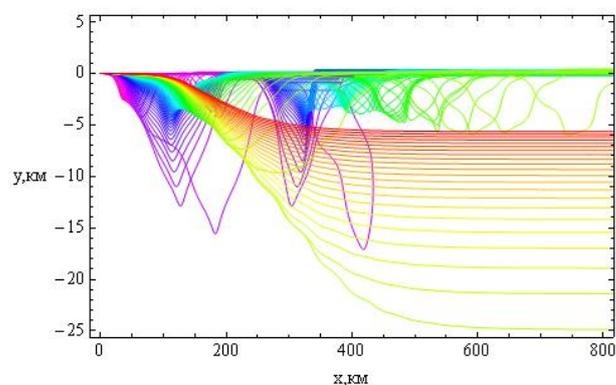


Рис.3.23.

Лучевая структура в плоскости (x, y) ,
 $\gamma_x = 0,15$.

Лучи, отраженные от ионосферы и вернувшиеся на землю как после первого, так и после второго скачка, образуют сложные каустические структуры, а семейство лучей, прошедших ионосферный слой, распространяется вдоль оси x . Сравнивая рис. 3.22 и 3.23 видим, как сильно искажает волновое возмущение лучевые траектории.

На рис. 3.24 и 3.25 показаны проекции лучевых траекторий на плоскость (y, z) без учета и с учетом горизонтальных градиентов соответственно.

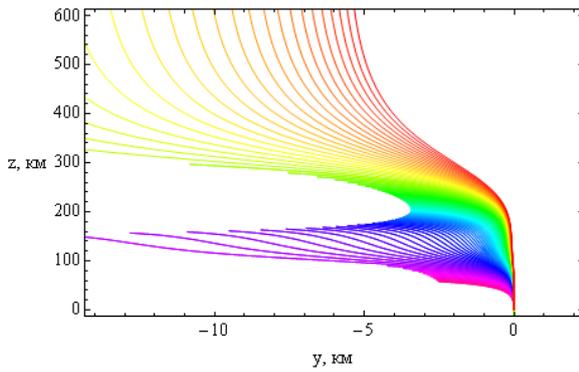


Рис. 3.24.

Лучевая структура в плоскости (y, z) ,
 $\gamma_x = 0$.

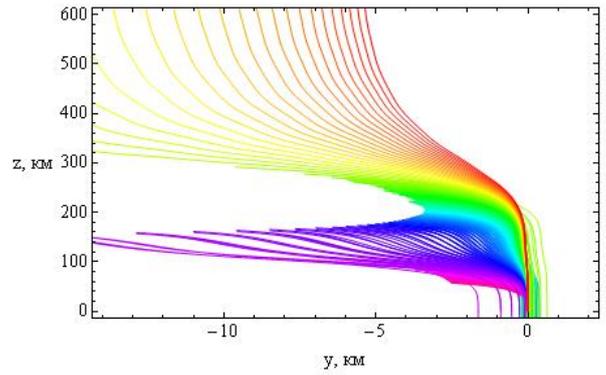


Рис. 3.25.

Лучевая структура в плоскости (y, z) ,
 $\gamma_x = 0,15$.

Хорошо различимо влияние слоёв E и F на лучевую структуру. Если бы магнитное поле Земли отсутствовало, все проекции лучей соответствовали бы линии $y = 0$. На рис. 3.24 лучи, возвращающиеся на землю после отражения от слоя, не видны, так как идут назад по первоначальным траекториям, поскольку горизонтальные градиенты в данном расчете отсутствуют. Проходящие же лучи ионосферы «сдвигает» в положительном направлении оси y . При этом наибольшие сдвиги у меньших частот, соответствующих так называемым «лучам Педерсена» [49]. На рис. 3.25 лучи, возвращаются на землю после отражения от слоя по разным траекториям из-за наличия горизонтальных градиентов. В этой проекции лучевые структуры первого и второго скачка сильно перекрываются. На рис. 3.20–3.25 единицы измерений – километры.

На рис.3.26-3.28 представлено распространение необыкновенной волны в плоскости (t, z) .

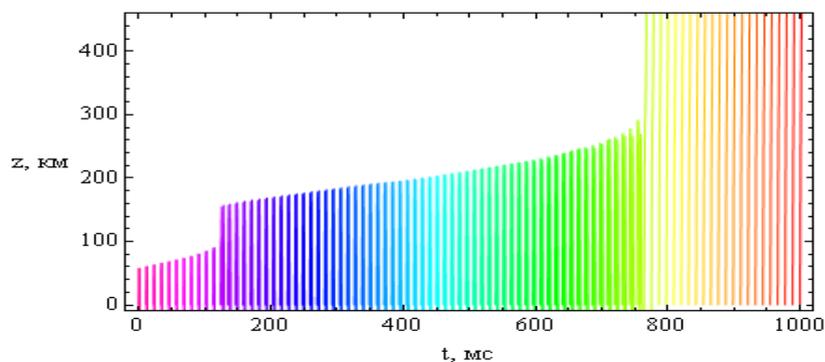


Рис. 3.26.

Лучевая структура в плоскости (t, z) , $\gamma_x = 0,15$.

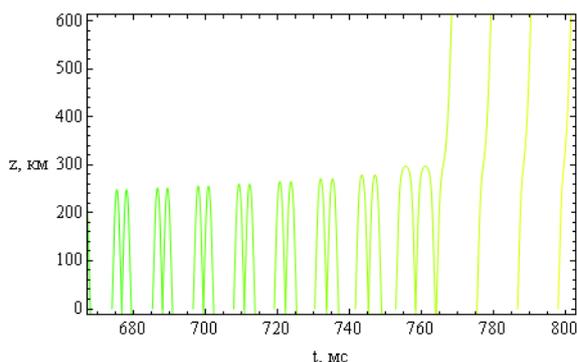


Рис. 3.27.

Лучевая структура в плоскости (t, z) ,
 $\gamma_x = 0$

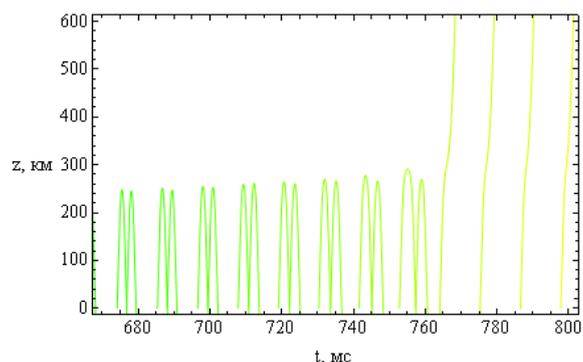


Рис. 3.28.

Лучевая структура в плоскости (t, z) ,
 $\gamma_x = 0,15$. Фрагмент рис. 3.26.

На рис. 3.26 показана полная пространственно-временная лучевая структура для двух скачков и с учетом горизонтальных градиентов. Видно, что семейство пространственно-временных лучей, отражающихся от ионосферы и имеющих огибающую, образует пространственно-временную каустику с краем (краевая катастрофа \mathbf{B}_3) (см. [58, 117], а также работы [85, 110, 139]). На рис. 3.27 и 3.28 та же структура показана подробнее как без учета (рис. 3.27), так и с учетом волнообразного возмущения (рис. 3.28). Пары лучей (экстремумов) соответствуют двум скачкам.

На рис. 3.29 и рис. 3.30 показано доплеровское изменение частоты луча вдоль оси x , возникающее при прохождении области ионосферы, содержащей волнообразное возмущение.

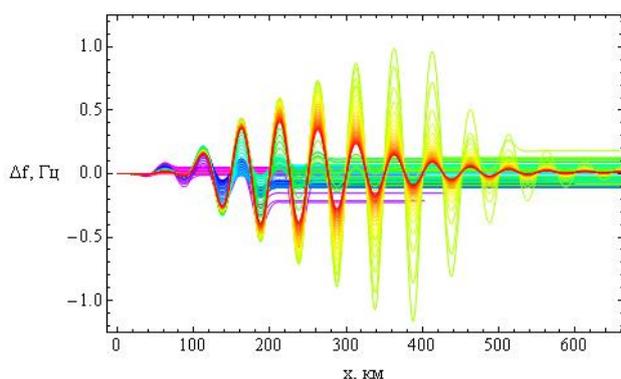


Рис. 3.29.

Доплеровское изменение частоты
 $(x, \Delta f)$, один скачок.

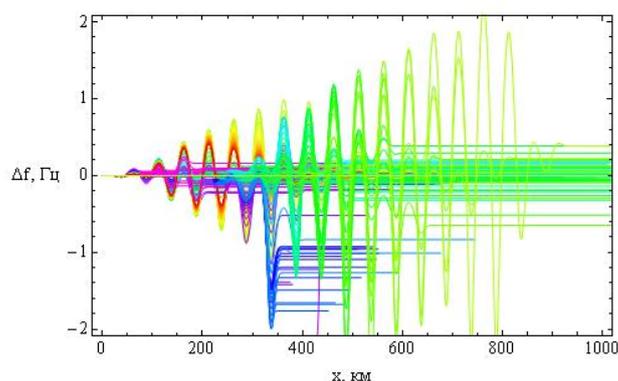


Рис. 3.30.

Доплеровское изменение частоты
 $(x, \Delta f)$, два скачка.

Видно, что при рассматриваемых параметрах изменение частоты может достигать 2 Гц, хотя для большинства лучей это отклонение на порядок меньше.

Для большей наглядности на рис. 3.31 и 3.32 приведены линии равного уровня электронной концентрации на момент времени $t=0$.

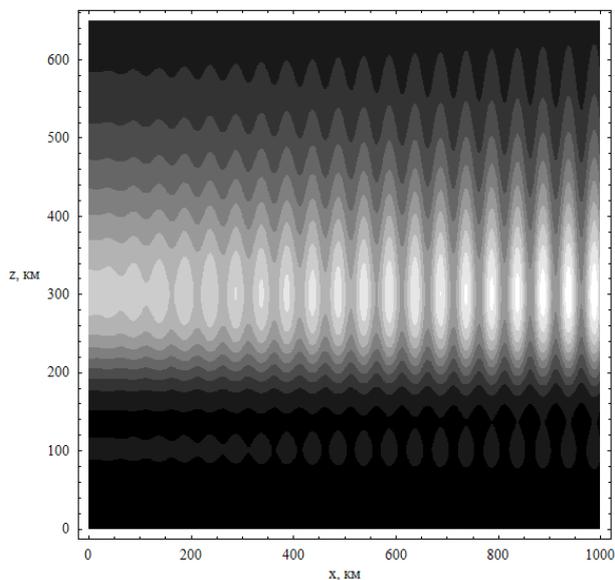


Рис.3.31.
Линии равного уровня электронной концентрации

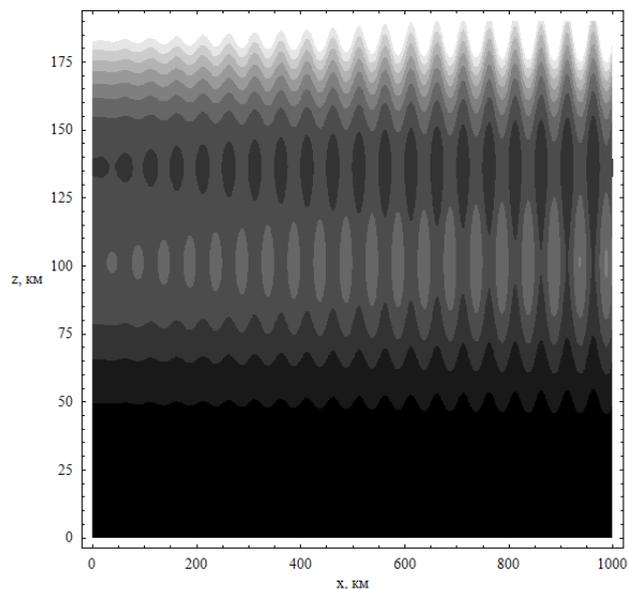


Рис. 3.32.
Линии равного уровня электронной концентрации. Фрагмент рис. 3.31.

На рисунке рис. 3.31 слой E не виден. Поэтому на рис. 3.32 область нижней ионосферы показана отдельно.

Рассмотрим результаты численного моделирования распространения обыкновенной волны в двухслойной ионосферной плазме при наличии горизонтальных градиентов в виде волнообразного возмущения. В отличие от выше изложенного, а также работ [73, 113, 128, 129, 137], в которых рассматривалось распространение частотно-модулированного сигнала, излучаемого под определенным углом к горизонту, в данном разделе исследуется распространение сигналов под разными углами и сопоставляются случаи, когда частота излучения составляет 9 МГц, 12 МГц и 15 МГц [132]. В первом случае практически все лучи отражаются от ионосферного слоя (рис. 3.33 а), во втором случае (рис. 3.33 б) уже имеет место частичное просачивание сигнала, и, наконец, в третьем случае (рис. 3.33 в) значительная часть лучей проходит ионосферные слои.

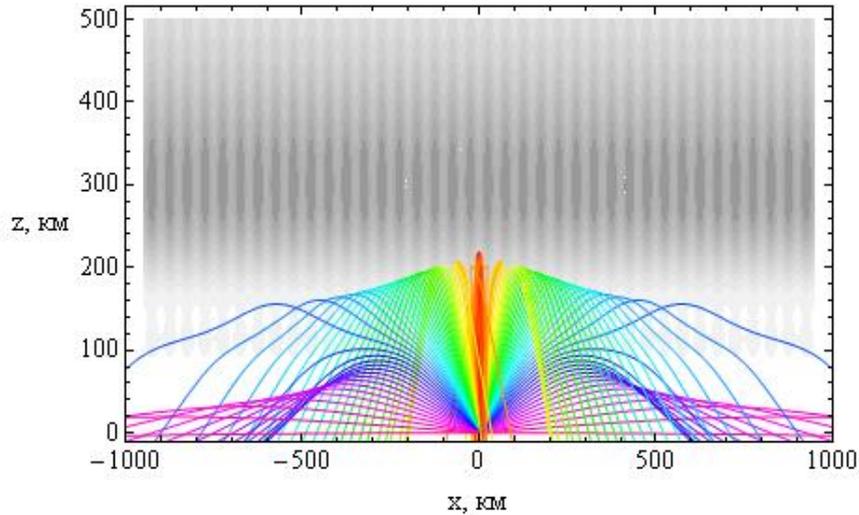


Рис. 3.33 а.

Лучевая структура в плоскости (x, z) ; частота 9 МГц.

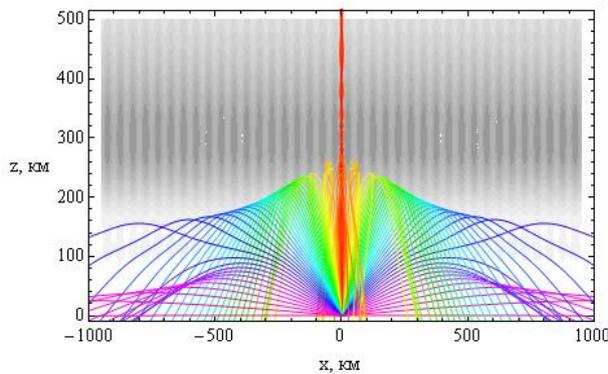


Рис. 3.33 б.

Лучевая структура в плоскости (x, z) ; частота 12 МГц.

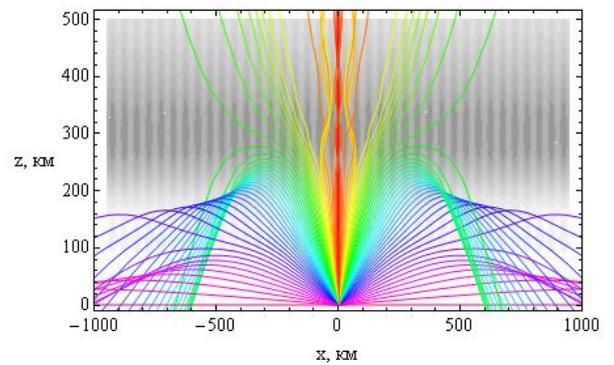


Рис. 3.33 в.

Лучевая структура в плоскости (x, z) ; рис. 3.33 в; частота 15 МГц.

Серым фоном на рисунках показано распределение электронной концентрации. Как и в предыдущих параграфах (см. также [113, 122, 137]) здесь использовалась модель двухслойной ионосферной плазмы, для которой профиль электронной концентрации имеет вид (3.11), однако теперь [140]:

$$g = 1 - \gamma_x \cos\left(2\pi(x - V \cdot t) / \lambda_g\right), \quad (3.13)$$

В данном параграфе в отличие от предыдущего применялись следующие значения параметров: $z_{02} = 110$ км, $\gamma = -72^\circ$, $\varphi = \pi/2$, $V = 230$ м/с, $\lambda_g = 50$ км, $\beta = 0,11$.

Поскольку возмущение (3.13) зависит от времени, среда является не только неоднородной и анизотропной, но и нестационарной.

Так как скорость света много больше скорости гравитационной волны (даже с учетом уменьшения групповой скорости сигнала в плазме), за время прохождения сигнала (а это миллисекунды) структура ионосферы не успевает существенно измениться. Основное влияние нестационарность среды окажет на изменение частоты излучения (доплеровский сдвиг), что будет рассмотрено ниже в данном разделе. На лучевую структуру в первую очередь оказывает влияние неоднородность ионосферы по вертикали и периодическая неоднородность по горизонтали. Возвращаясь к рис. 3.33, видим, что волнообразное возмущение фокусирует вертикально проходящее излучение. Рис. 3.34, являющийся фрагментами рис. 3.33, более подробно показывает лучевую структуру фокусировки. Серым фоном на рисунках показано распределение электронной концентрации.

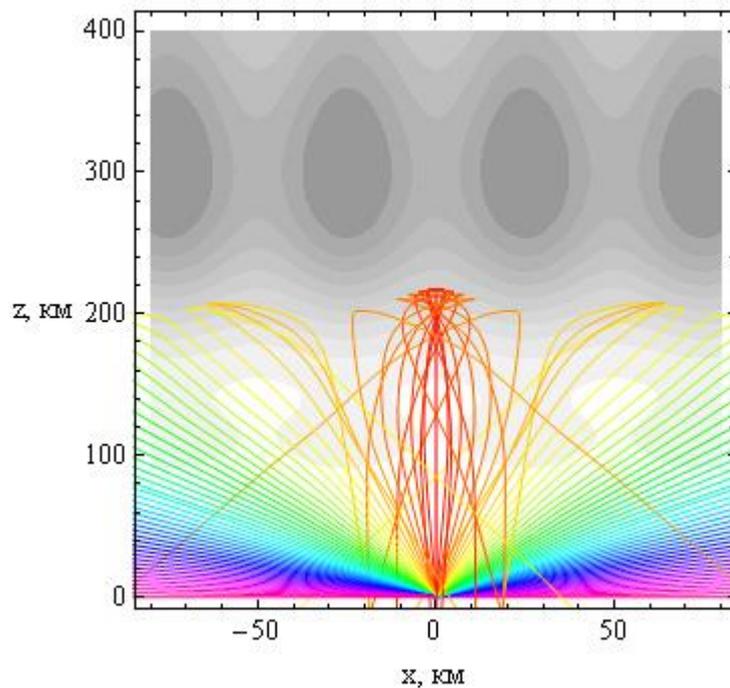


Рис. 3.34 а.

Лучевая структура в плоскости (x, z) ; частота 9 МГц

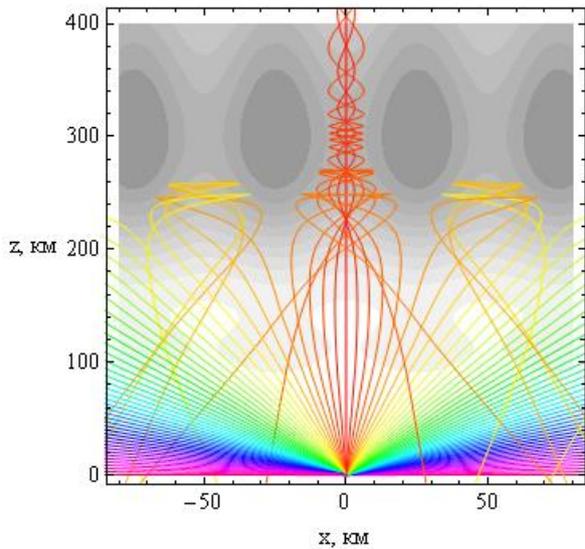


Рис. 3.34 б.

Лучевая структура в плоскости (x, z) ; частота 12 МГц

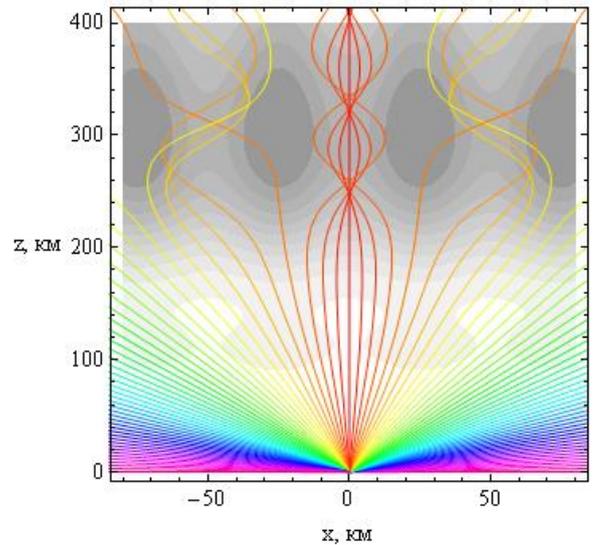


Рис. 3.34 в.

Лучевая структура в плоскости (x, z) ; частота 15 МГц.

При частоте 9 МГц (рис. 3.34 а) энергии волны недостаточно для проникновения в волновод. Поэтому после центральной фокусировки волна рассеивается в разные стороны, причем следует отметить характерные точки возврата на лучевых траекториях. При частоте 12 МГц (рис. 3.34 б) видим, как волноводы слева и справа запирают излучение и рассеивают его назад. Проходит только хорошо сфокусированная центральная волна. При частоте 15 МГц (рис. 3.35 в) волна чувствует себя достаточно свободно и проходит все три волновода. Похожие задачи рассматривались в работах [70-73, 92, 104, 116, 120, 189].

Помимо центральной фокусировки на рис. 3.33 (а-в) хорошо видны каустики (оггибающие лучевых семейств) и по два каустических острия (слева и справа). Нижнее острие формируется слоем E , а верхнее слоем $F2$. Аналогичные структуры формируются и в волноводах (рис. 3.34) и соответствуют волновым катастрофам [85, 98, 110, 139, 154].

На рис. 3.35 представлены проекции лучевых траекторий в плоскости (y, z) . При отсутствии магнитного поля и поперечных градиентов электронной концентрации, луч не выходит из плоскости первоначального распространения, то есть в этом случае все проекции лучей соответствовали бы линии $y=0$. В нашей задаче для лучей, отражающихся от ионосферного слоя, лучи сначала

отклоняются вправо, а после точки отражения в обратную сторону и величина отклонения полностью или частично компенсируется. В случае проходящих лучей компенсации не происходит.

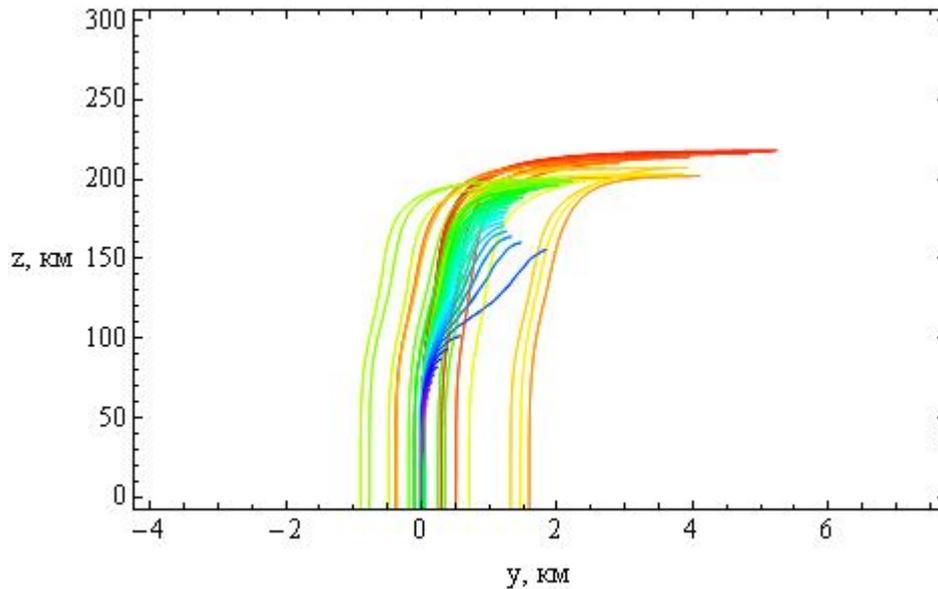


Рис. 3.35 а.

Лучевая структура в плоскости (y, z) , частота 9 МГц.

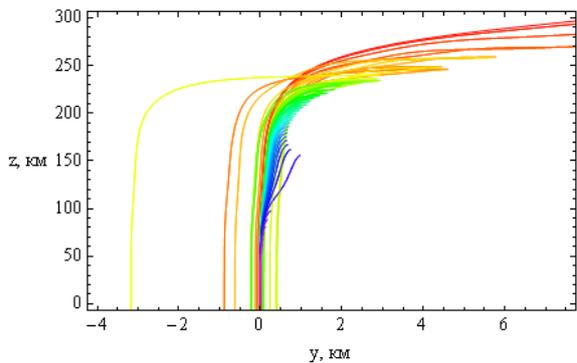


Рис. 3.35 б.

Лучевая структура в плоскости (y, z) , частота 12 МГц.

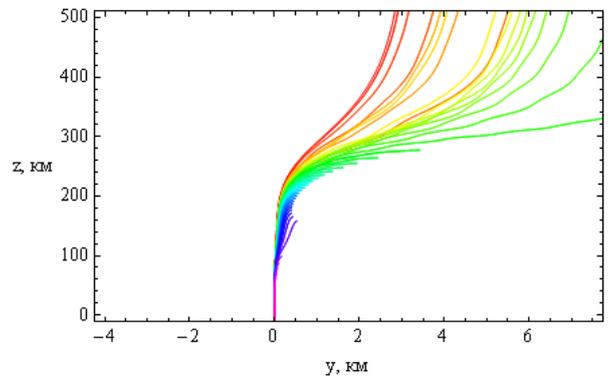


Рис. 3.35 в.

Лучевая структура в плоскости (y, z) , частота 15 МГц.

На рис. 3.36 представлено распространение обыкновенной волны в плоскости (x, y) . Как и в случае рис. 3.33, эта проекция содержит каустические структуры. Следует отметить, что нижние строго горизонтальные линии не имеют физического смысла, так как описывают луч, распространяющийся при отрицательных значениях z , то есть под землей. Напротив, верхние

горизонтальные лучи имеют физический смысл, так как соответствуют лучам, прошедшим ионосферный слой.

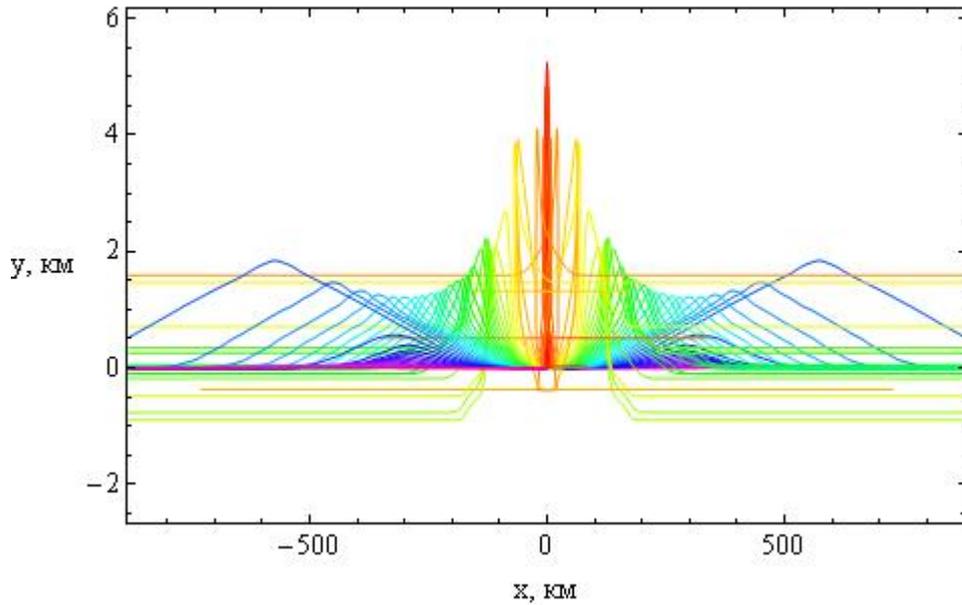


Рис. 3.36 а. Лучевая структура в плоскости (x,y) , частота 9 МГц.

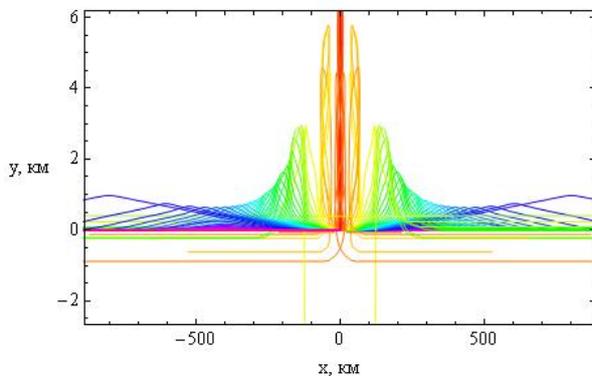


Рис. 3.36 б.

Лучевая структура в плоскости (x,y) , частота 12 МГц.

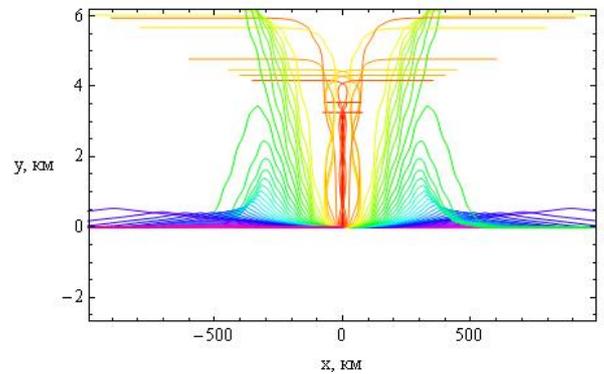


Рис. 3.36 в.

Лучевая структура в плоскости (x,y) , частота 15 МГц.

На рис. 3.37 показана зависимость координаты z от группового времени t вдоль луча. По сравнению с рис. 3.33, при таком представлении лучевые траектории перепутываются в меньшей степени, так как групповое время вдоль луча всегда возрастает в отличие от горизонтальной координаты x . Следует обратить внимание на наложение каустического острия на гладкую каустику в

нижней части рисунков. Это структурно не связанные каустики, поскольку каустическое острие образуется слоем E , а каустика слоем $F2$, и их разделяет перегиб волнового фронта [34].

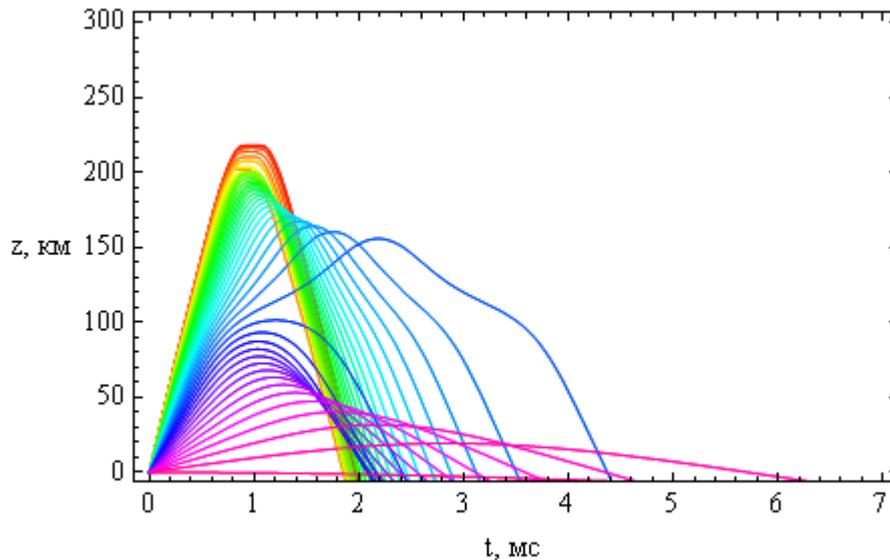


Рис. 3.37 а. Лучевая структура в плоскости (t,z) , частота 9 МГц.

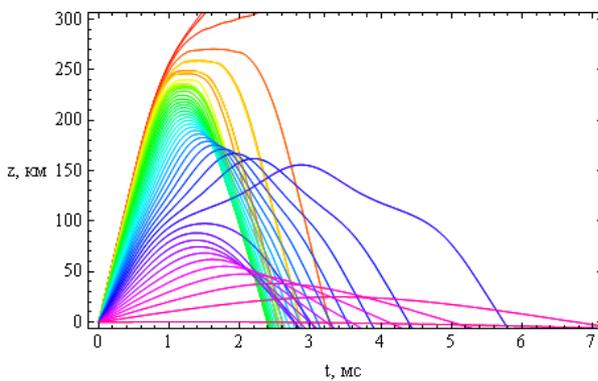


Рис. 3.37 б.

Лучевая структура в плоскости (t,z) , частота 12 МГц.

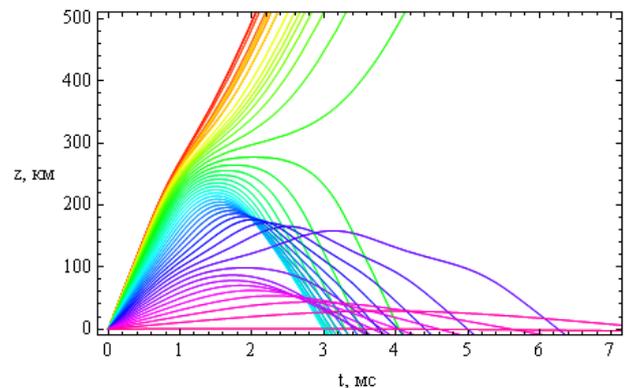


Рис. 3.37 в.

Лучевая структура в плоскости (t,z) , частота 15 МГц.

Перейдем теперь к доплеровскому смещению частоты, возникающему из-за нестационарности среды распространения (см. [77, 112]). На рис. 3.38 показан доплеровский сдвиг сигнала $\Delta f = f - f_0$ вдоль луча от координаты x . Чем глубже проникает луч в ионосферный слой, тем эта величина (по амплитуде) больше и достигает нескольких герц. Вдоль луча величина Δf осциллирует. Как и на рис. 3.36 строго горизонтальные линии не имеют физического смысла, так как описывают лучи, якобы распространяющиеся под землей.

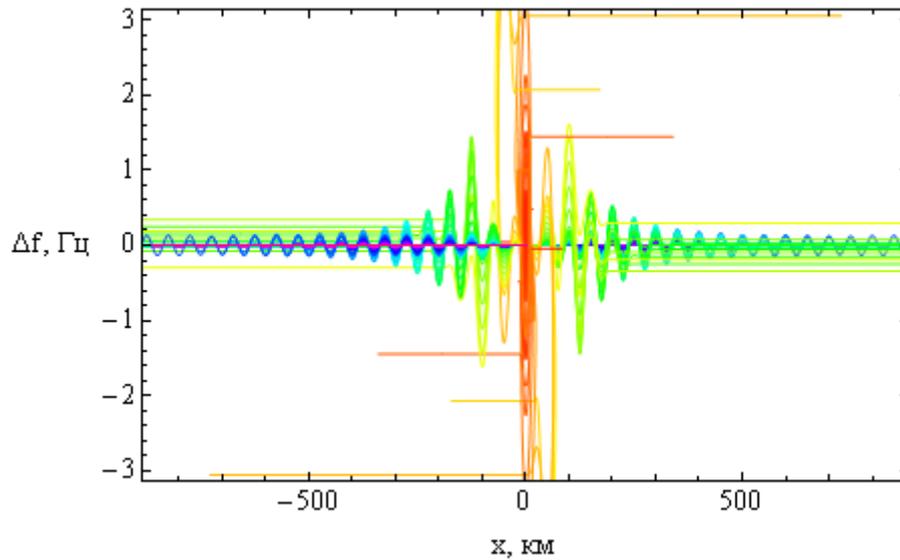


Рис. 3.38 а. Доплеровское изменение частоты Δf вдоль лучей в зависимости от x . Начальная частота $f_0 = 9$ МГц

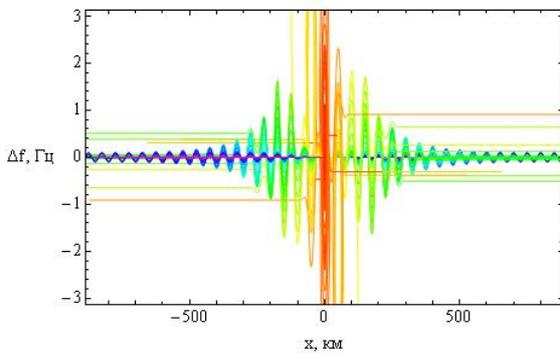


Рис. 3.38 б.

Доплеровское изменение частоты Δf вдоль лучей в зависимости от x . Начальная частота $f_0 = 12$ МГц

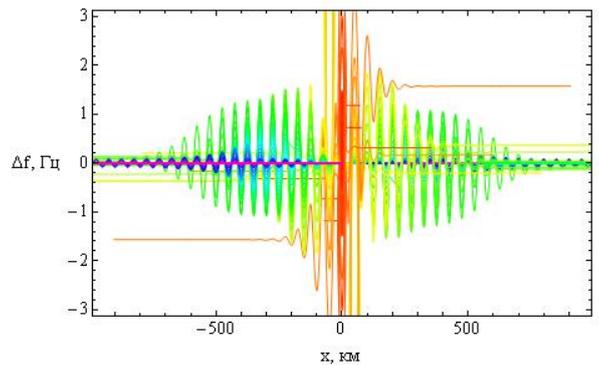


Рис. 3.38 в.

Доплеровское изменение частоты Δf вдоль лучей в зависимости от x . Начальная частота $f_0 = 15$ МГц

На рис. 3.39, а также на рис. 3.40 и 3.41, которые являются фрагментами рис. 3.39 б и 3.39 в соответственно, показана зависимость доплеровского сдвига сигнала Δf вдоль луча от координаты z . Чем ближе первоначальное направление луча к вертикальному, тем больше доплеровский сдвиг. Как показывает рис. 3.41, он может достигать 7 Гц. Видно, что и вдоль координаты z зависимость является осциллирующей функцией.

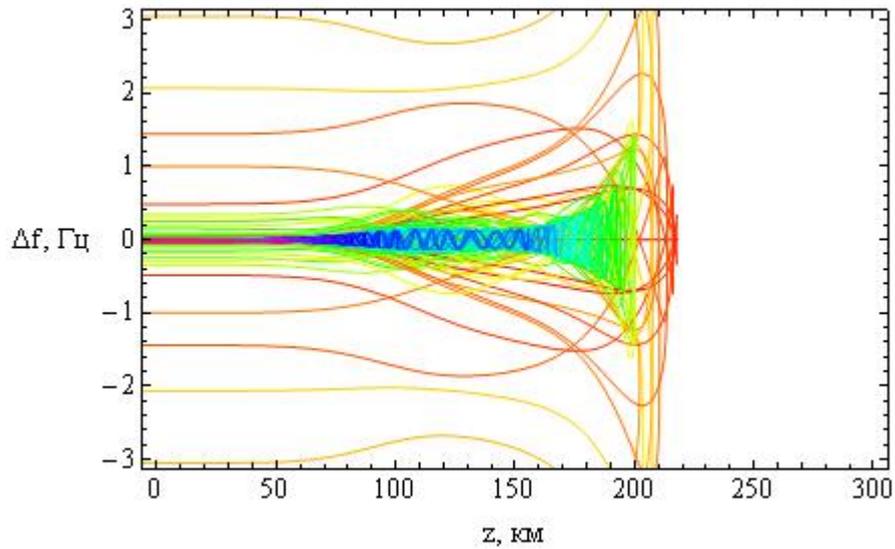


Рис. 3.39 а. Доплеровское изменение частоты Δf вдоль лучей в зависимости от z . Начальная частота 9 МГц

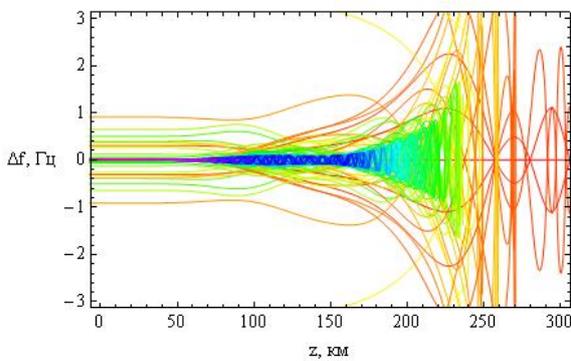


Рис. 3.39 б.

Доплеровское изменение частоты Δf вдоль лучей в зависимости от z . Начальная частота 12 МГц

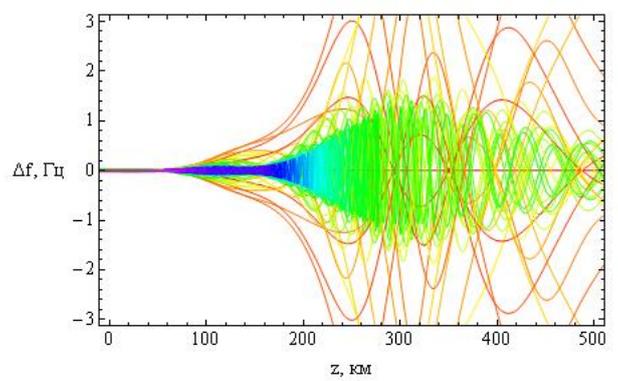


Рис. 3.39 в.

Доплеровское изменение частоты Δf вдоль лучей в зависимости от z . Начальная частота 15 МГц

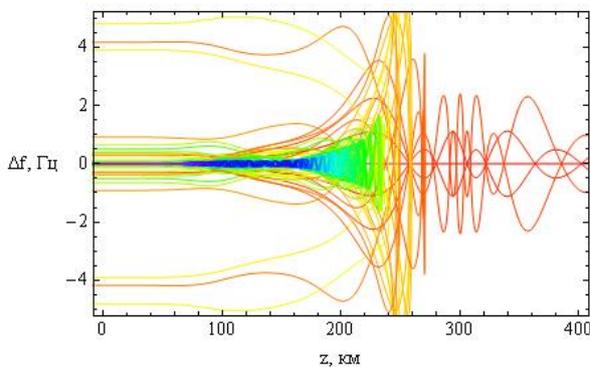


Рис. 3.40.

Доплеровское изменение частоты Δf вдоль лучей в зависимости от z (фрагменты). Начальная частота 12 МГц.

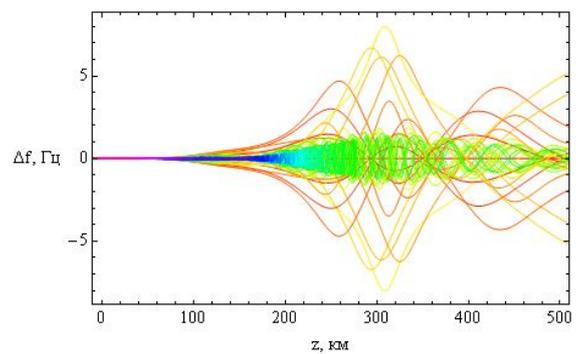


Рис. 3.41.

Доплеровское изменение частоты Δf вдоль лучей в зависимости от z (фрагменты). Начальная частота 15 МГц.

Таким образом, в параграфе на основе бихарактеристической системы дифференциальных уравнений, включающей в себя в качестве переменных координаты луча, компоненты волнового вектора, частоту и групповое время, выполнено численное моделирование особенностей распространения обыкновенной волны в двухслоевой анизотропной, нестационарной ионосферной плазме при наличии волнообразных горизонтальных возмущений.

Рассмотрены особенности распространения частотно-модулированных сигналов в двухслоевой анизотропной ионосферной плазме как в случае обыкновенной, так и необыкновенной электромагнитной волны при наличии и отсутствии горизонтальных градиентов и волнообразного возмущения.

Исследовано распространение декаметровых радиоволн в случае односкачкового и двухскачкового распространения. Проанализированы особенности выхода как обыкновенной, так и необыкновенной волны из плоскости распространения, а также образование каустики пространственно-временных геометрооптических лучей. Показано, что при наличии горизонтальных градиентов отраженные волны возвращаются в боковой проекции на землю по разным траекториям.

Проанализированы доплеровские сдвиги частоты, для различных начальных частот сигналов и для различных углов выхода лучей. Показано, что изменение частоты вдоль луча носит осциллирующий характер и может достигать 2 Гц, а в вертикальных направлениях при некоторых значениях параметров 7 Гц.

Исследованы каустические структуры типа катастроф.

§ 3.3. Математическое моделирование распространение радиоволн в нестационарной плазме с учетом кривизны поверхности Земли и ионосферных слоев

Настоящий параграф посвящен распространению радиоволн декаметрового диапазона в ионосфере Земли. В отличие от [70, 72, 73, 104, 113, 119, 122, 128, 129, 137], в данном параграфе учтена кривизна поверхности Земли и

ионосферных слоев [131, 136]. Рассмотрена нестационарная модель однослойной ионосферы, в которой предусматривается образование за очень короткое время (несколько долей секунды) дополнительного спорадического слоя:

$$N(\vec{r}) = N_0 \left\{ \exp \left[- \left(\frac{r - R_z - z_{01}}{z_{m_1}} \right)^2 \right] + \beta t \exp \left[- \left(\frac{r - R_z - z_{02}}{z_{m_2}} \right)^2 \right] \right\}. \quad (3.14)$$

Как и в предыдущих формулах, N_0 – электронная концентрация в максимуме слоя $F2$ в начальный момент времени, z_{01} – высота максимума слоя $F2$ над поверхностью Земли, z_{m_1} – условная полутолщина слоя $F2$. В выражении (3.14) β – коэффициент, характеризующий скорость ионизации спорадического слоя, z_{02} – высота максимума спорадического слоя, z_{m_2} – условная полутолщина спорадического слоя, а R_z – радиус Земли. В данном разделе рассматривается распространение радиоволн в сферической системе координат, связанной с декартовой соотношениями:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (3.15)$$

Здесь и декартовая, и сферическая система координат привязаны к центру Земли. В формулах (3.15) r – расстояние от центра Земли до точки наблюдения, ϕ – долгота, а $\theta = -\theta_s + \pi/2$, где θ_s – широта (знак «+» – северная, знак «-» – южная). При выполнении расчетов предполагалось, что: $N_0 = 2 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}$, $z_{m_1} = 100 \text{ км}$, $z_{01} = 300 \text{ км}$, $z_{m_2} = 10 \text{ км}$, $z_{02} = 200 \text{ км}$, $R_z = 6378 \text{ км}$, $\beta = 100$.

Напомним, что выражение для эффективной диэлектрической проницаемости в анизотропной плазме (см., например, [49, 70–73, 154]) определяется формулой (3.4), а отношения квадрата плазменной частоты и квадрата гирочастоты к квадрату круговой рабочей частоты ($\omega = 2\pi f$ – круговая частота) формулами (3.3). Входящий в формулу (3.3) угол α между внешним магнитным полем Земли \vec{H} и волновым вектором \vec{k} определяется формулой

(3.5). Предполагалось, что амплитуда магнитного поля постоянная ($H = 0,36 \text{ Э}$), а ориентация напряжённости магнитного поля относительно локальной системы координат задается двумя постоянными углами γ и ψ :

$$H_x = H \cos \gamma \cos \psi, \quad H_y = H \cos \gamma \sin \psi, \quad H_z = H \sin \gamma. \quad (3.16)$$

При вычислениях считалось, что $\gamma = 45^\circ$, $\psi = 90^\circ$.

Известно, что для построения лучевых траекторий в произвольной ортогональной системе координат бихарактеристическая система уравнений с гамильтонианом [76, 154]:

$$\Gamma = \sum_{j=1}^3 \frac{p_j^2}{h_j^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(t, \omega, \vec{q}, \vec{p}), \quad (3.17)$$

имеет вид:

$$\frac{d\vec{q}}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{k}}, \quad \frac{d\vec{p}}{d\tau} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{q}}, \quad \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \quad \frac{dt}{d\tau} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \omega}, \quad (3.18)$$

где $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ – обобщенный волновой вектор, $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ – обобщенные координаты, h_1, h_2, h_3 – коэффициенты Ламе. Поделив уравнения системы (3.18) на последнее уравнение, получим бихарактеристическую систему

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = -\frac{\partial \Gamma / \partial \vec{p}}{\partial \Gamma / \partial \omega} \equiv \vec{A}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\partial \Gamma / \partial \vec{q}}{\partial \Gamma / \partial \omega} \equiv \vec{B}, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\partial \Gamma / \partial t}{\partial \Gamma / \partial \omega} \equiv D, \quad (3.19)$$

параметром вдоль траектории, у которой является групповое время t . Если от обобщенного волнового вектора \vec{p} перейти к волновому вектору \vec{k} в криволинейной системе координат [76]:

$$k_j = \frac{p_j}{h_j} \quad (3.20)$$

и подставить (3.20) в (3.19), то получим:

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{A}, \quad \frac{dk_j}{dt} = \frac{1}{h_j} \left(B_j - k_j \sum_{i=1}^3 A_i \frac{\partial h_j}{\partial q_i} \right), j=1, 2, 3; \quad \frac{d\omega}{dt} = D. \quad (3.21)$$

В сферической системе координат (3.2) $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$, $k_1 = k_r$, $k_2 = k_\theta$, $k_3 = k_\varphi$, а коэффициенты Ламе имеют вид:

$$h_1 = h_r = 1, \quad h_2 = h_\theta = r, \quad h_3 = h_\varphi = r \sin \theta. \quad (3.22)$$

Учитывая (3.22), дифференциальные уравнения для определения компонент волнового вектора несколько упрощаются:

$$\begin{aligned} \frac{d k_r}{d t} &= B_1, & \frac{d k_\theta}{d t} &= \frac{1}{r} (B_2 - k_\theta A_1), \\ \frac{d k_\varphi}{d t} &= \frac{1}{r \sin \theta} (B_3 - k_\varphi (A_1 \sin \theta + A_2 r \cos \theta)). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Для определения лучевых траекторий в сферической системе координат необходимо дополнить бихарактеристическую систему (3.21) начальными условиями:

$$r(0) = R_z, \quad \theta(0) = \frac{\pi}{2} - \theta_{s0}, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \omega(0) = f_0 / (2\pi),$$

$$k_r(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \zeta \cos \eta, \quad k_\theta(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \zeta \cos \eta, \quad k_\varphi(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \eta. \quad (3.24)$$

В расчетах предполагалось, что $\eta = 0$, $\varepsilon_0 = 1$, $\varphi_0 = 1 \text{ рад} = 57,3 \text{ град}$, $\theta_{s0} = 0$, $f_0 = 13,75 \text{ МГц}$, угол ζ меняется в диапазоне от -89 , до 89 градусов. Для вычисления угла α по формуле (3.3) необходимо знать компоненты вектора \vec{k} в декартовой системе координат. Их можно найти по формулам:

$$\begin{aligned} k_x &= k_r \sin \theta \cos \varphi + k_\theta \cos \theta \cos \varphi - k_\varphi \sin \varphi, \\ k_y &= k_r \sin \theta \sin \varphi + k_\theta \cos \theta \sin \varphi - k_\varphi \cos \varphi, \\ k_z &= k_r \cos \theta - k_\theta \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Рассмотрим результаты численного моделирования. На рис. 3.42 а, б представлено лучевое распространение в плоскости (r, φ) , то есть в плоскости, перпендикулярной первоначальному направлению распространения радиоволны. Рис. 3.42 а иллюстрирует лучевое распространение обыкновенной волны, рис. 3.42 б – необыкновенной.

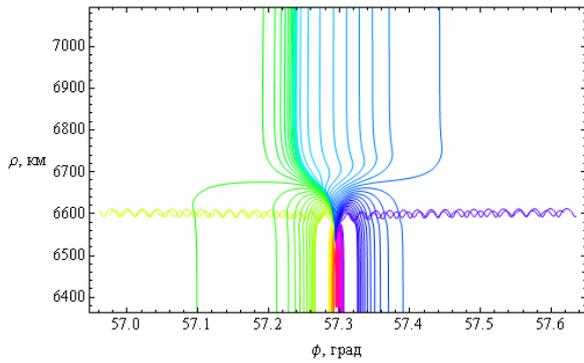


Рис. 3.42 а.

Лучевая структура в плоскости (r, φ) ;
обыкновенная волна.

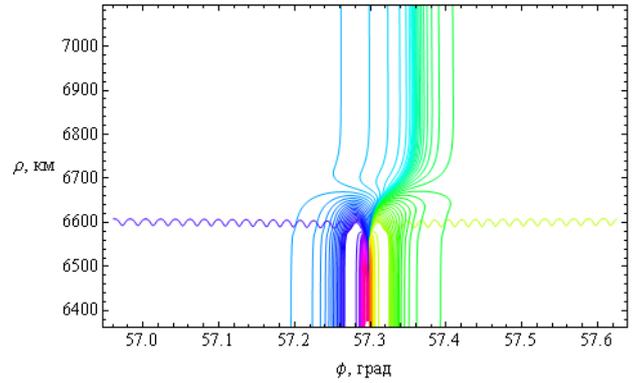


Рис. 3.42 б.

Лучевая структура в плоскости (r, φ) ;
необыкновенная волна.

Хорошо видно, что часть лучевых траекторий проходит ионосферный слой, а другая часть отражается и возвращается на землю. Некоторая часть лучевых траекторий распространяется в волноводе, возникающем между спорадическим и основным ионосферными слоями. Сравнивая рис. 3.42 а и рис. 3.42 б, по-прежнему видим, что рис. 3.42 б является как бы зеркальным отображением рис. 3.42 а относительно вертикальной оси, но более компактным. Кроме того, интенсивность излучения в межслоевом волноводе в случае обыкновенной волны значительно выше.

На рис. 3.43 а, б показано распространение в плоскости (θ, φ) , то есть в координатах «широта–долгота» (относительно широты угол θ сдвинут на 90°).

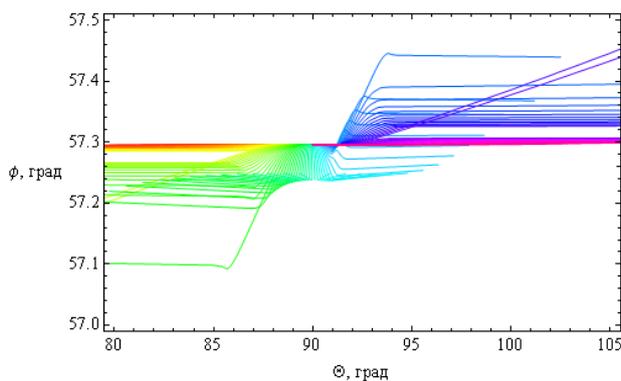


Рис. 3.43 а.

Лучевая структура в плоскости (θ, φ) ;
обыкновенная волна.

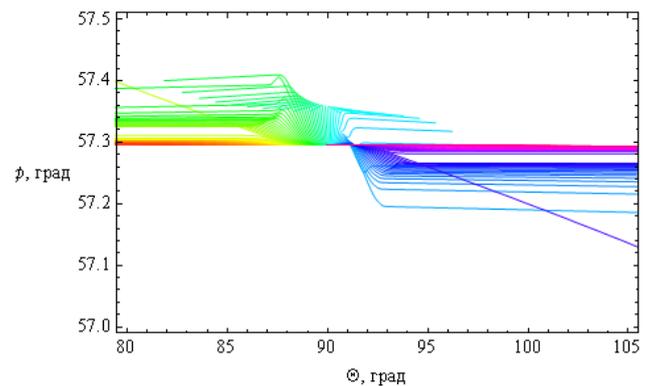


Рис. 3.43 б.

Лучевая структура в плоскости (θ, φ) ;
необыкновенная волна

Это как бы взгляд на лучевые траектории сверху. Как и в предыдущем случае, рис. 3.43 а описывает распространение обыкновенной волны, а рис. 3.43 б – необыкновенной. Под действием магнитного поля Земли (внешнего по отношению к источнику излучения) лучевые траектории покидают плоскость первоначального распространения. Если они проходят ионосферу насквозь, то их суммарное отклонение стабилизируется. Если лучи отражаются от ионосферы, то после отражения они стремятся вернуться в плоскость первоначального распространения. Особняком стоят лучи, распространяющиеся в волновом канале. На рис. 3.43 а и б это косые линии. Боковое отклонение таких лучей непрерывно увеличивается при прохождении волнового канала. Сопоставляя рис. 3.43 а и 3.43 б, видим, что рис. 3.43 б является как бы компактным отражением рис. 3.43 а относительно горизонтальной оси.

На рис. 3.44 а, б представлены проекции лучевых траекторий в плоскости (r, θ) , то есть в плоскости первоначального распространения.

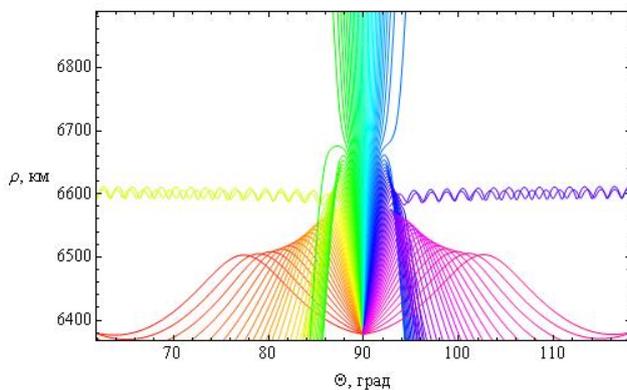


Рис. 3.44 а.

Лучевая структура в плоскости (r, θ) ;
обыкновенная волна.

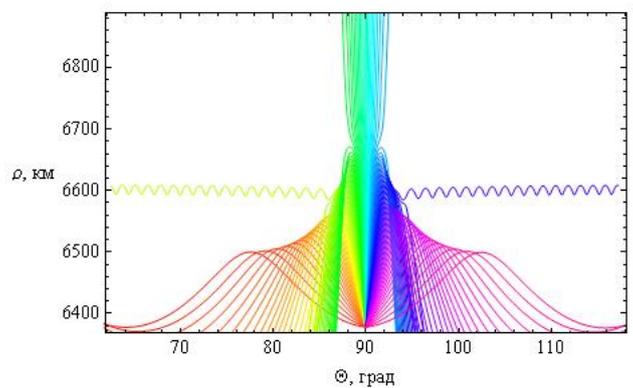


Рис. 3.44 б.

Лучевая структура в плоскости (r, θ) ;
необыкновенная волна.

Рис. 3.44 а описывает распространение обыкновенной волны, а рис. 3.44 б – необыкновенной. В этой плоскости лучи образуют по два каустических острия (слева справа относительно источника излучения). Одно выше, а другое ниже волнового канала. Видно, что область многолучевости на поверхности земли имеет ограниченный размер: область радиосвязи, образовавшаяся благодаря отражению от ионосферы, охватывает зону по 30 градусов с каждой стороны от

вертикального луча. Хорошо видно распространение волны в ионосферном канале.

На рис. 3.45 а, б показаны проекции бихарактеристик в плоскости (k_r, θ) . Рис. 3.45 а соответствует обыкновенной волне, а рис. 3.45 б – необыкновенной волне.

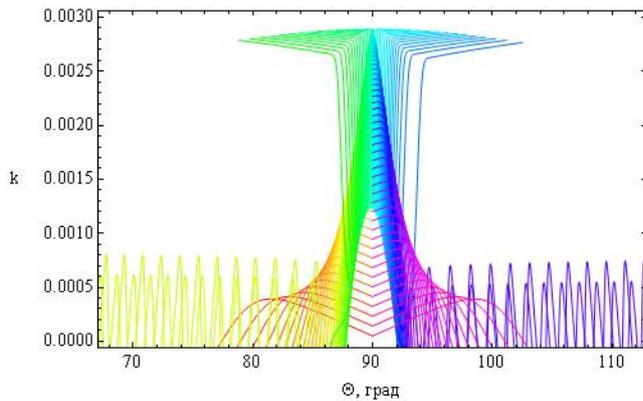


Рис. 3.45 а.

Лучевая структура в плоскости (k_r, θ) ;
обыкновенная волна.

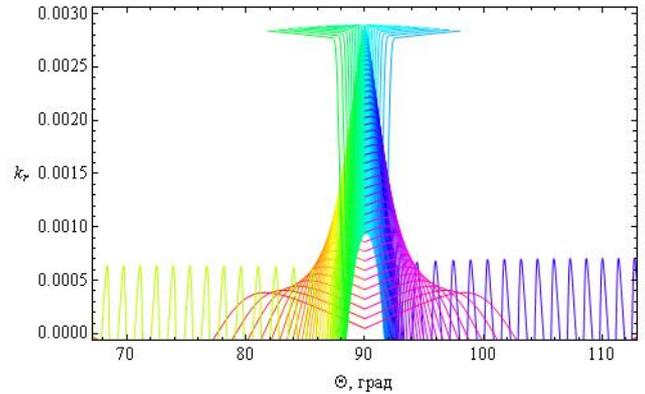


Рис. 3.45 б.

Лучевая структура в плоскости (k_r, θ) ;
необыкновенная волна.

На рисунках можно выделить три группы кривых:

1. линии, поднимающиеся вверх с небольшим отклонением от вертикали, имеющие излом и образующие «шапочку» рисунка, соответствуют лучам, проходящим ионосферный слой;
2. линии, образующие пирамиду, соответствуют отраженным от ионосферы лучам;
3. осциллирующие кривые соответствуют волнам, распространяющимся в волноводе.

Как обычно, рисунок, соответствующий необыкновенной волне, выглядит компактнее.

На рис. 3.46 а, б показана зависимость частоты сигнала вдоль лучей от угла θ . Рис. 3.46 а соответствует обыкновенной волне, а рис. 3.46 б соответствует необыкновенной волне.

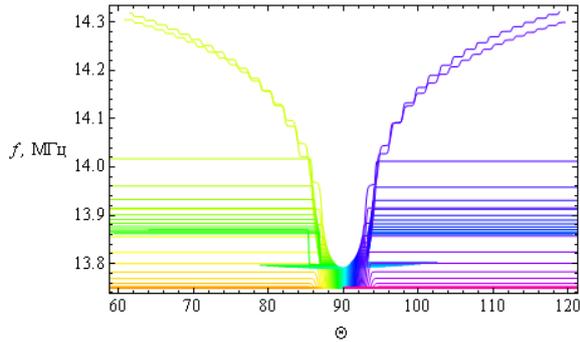


Рис. 3.46 а.

Зависимость частоты сигнала f_ω от угла θ ;
обыкновенная волна.

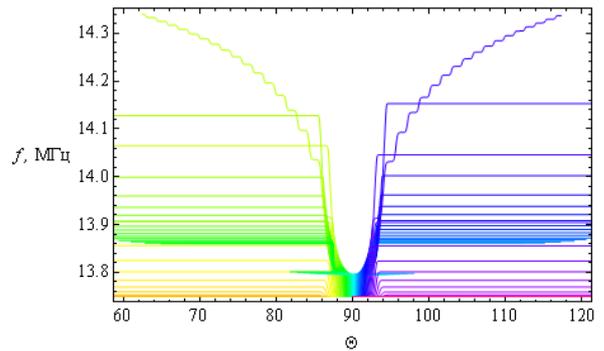


Рис. 3.46 б.

Зависимость частоты сигнала f_ω от угла θ ;
необыкновенная волна.

Для проходящих лучей изменение частоты распространения происходит на очень небольшом участке, соответствующем спорадическому слою, который образуется, в силу модели, очень быстро. На рисунках это горизонтальные линии, отделяющиеся от общей образующей. Отраженные лучи заполняют нижнюю часть рисунков, а левую и правую ветви формируют лучи, распространяющиеся в волноводе.

На рис. 3.47 а, б приведена зависимость частоты сигнала f_ω от группового времени t . Рис. 3.47 а соответствует обыкновенной волне, а рис. 3.47 б – необыкновенной. В значительной степени рисунки 3.47 повторяют правые половины рисунков 3.46. Отметим, что наибольшие временные задержки при одной и той же дальности распространения характерны для сигналов, распространяющихся в ионосферном волноводе.

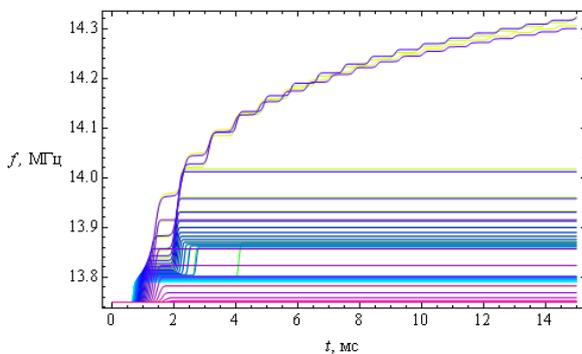


Рис. 3.47 а.

Зависимость частоты сигнала f_ω от группового
времени t ; обыкновенная волна.

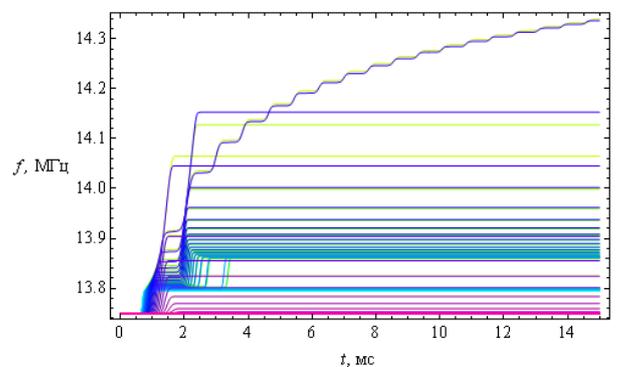


Рис. 3.47 б.

Зависимость частоты сигнала f_ω от группового
времени t ; необыкновенная волна.

В заключение параграфа приведем рис.3.48 и 3.49, на которых изображены лучевые траектории в декартовой системе координат, построенной в соответствии с формулами (3.15).

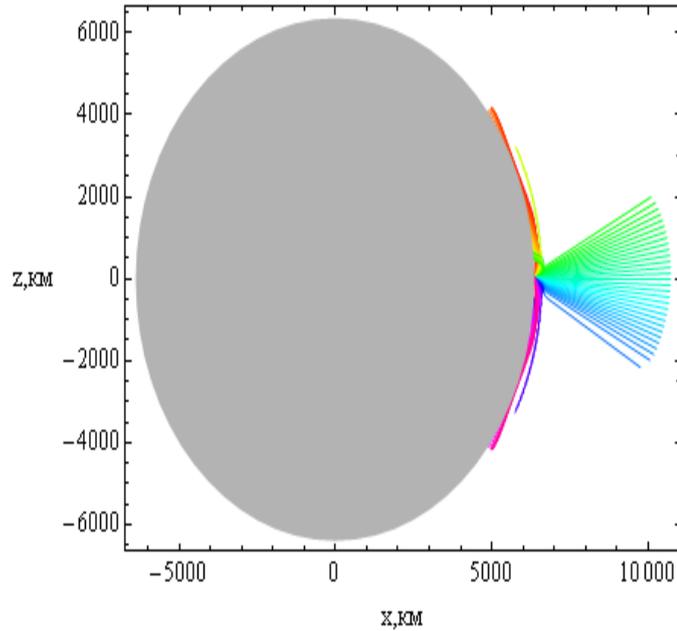


Рис. 3.48

Лучевая структура в плоскости (x,z) ; обыкновенная волна; серый цвет – поверхность Земли.

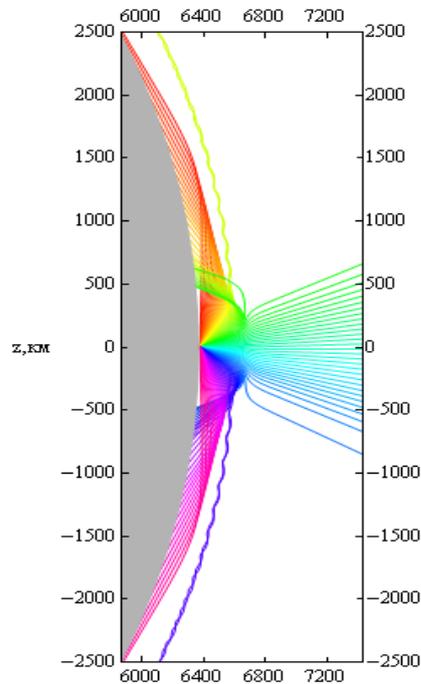


Рис. 3.49

Лучевая структура в плоскости (x,z) ; фрагмент рис. 3.48; серый цвет – поверхность Земли.

Рис. 3.48 иллюстрирует общее положение источника излучения на поверхности Земли (экваторе), а рис. 3.49 показывает ход лучевых траекторий в плоскости (x, z) более детально.

Таким образом, в параграфе рассмотрены особенности распространения электромагнитного излучения в неоднородной, анизотропной, нестационарной ионосферной плазме при условии образования спорадического волнового возмущения. Расчеты проведены как в случае обыкновенной волны, так и для необыкновенной волны. При изучении лучевой структуры нами применялась бихарактеристическая система дифференциальных уравнений в сферических координатах, неизвестным в которой являлись сферические координаты луча, компоненты волнового вектора, а также частота (меняющаяся в условиях нестационарности среды распространения) и групповое время.

На рисунках видно, что при распространении формируются сложные каустические структуры, соответствующие волновым катастрофам [139].

§ 3.4. Математическое моделирование распространения радиоволн в ионосфере земли в зависимости от высоты источника излучения

В настоящем параграфе рассмотрено распространение частотно-модулированных сигналов в зависимости от высоты источника излучения как в случае анизотропной ионосферной плазмы, то есть учтено магнитное поле Земли [13, 19, 197].

В основе нашего подхода лежат лучевые методы, являющиеся традиционными при описании процессов распространения дециметровых радиоволн в различных средах. Поэтому, как и в предыдущих разделах, при моделировании лучевых траекторий в анизотропной, неоднородной, нестационарной среде бихарактеристическая система уравнений с гамильтонианом (3.1) имеет вид [104, 113] (3.2).

Эффективная диэлектрическая проницаемость среды для неоднородной анизотропной ионосферы имеет вид (3.4), параметр ν является отношением

квадрата плазменной частоты к квадрату рабочей частоты, а величина u это отношение квадрата гирочастоты частоты к квадрату рабочей частоты: (3.3).

В приведённых ниже расчетах амплитуда магнитного поля предполагается постоянной, а ориентация напряжённости магнитного поля относительно локальной системы координат задается двумя углами γ и φ (формула (3.9)).

Предположим, что начальный волновой вектор $\vec{k}(0)$ параметрически зависит от углов выхода луча α_0 :

$$k_x(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \alpha_0, \quad k_y(0) = 0, \quad k_z(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \alpha_0, \quad (3.26)$$

источник излучения точечный, находится вне магнитоактивной плазмы и расположен в точке с координатами (x_0, y_0, z_0) :

$$\vec{r}|_{t=0} = (0, 0, z_0). \quad (3.27)$$

Величина ε_0 в выражениях (3.26) – это значение эффективной диэлектрической проницаемости среды в источнике излучения.

Предположим, что сигнал линейно частотно-модулированный, то есть формула для мгновенной частоты заполнения имеет вид [128]:

$$\omega(0) = \omega_0(1 + \delta \eta), \quad t(0) = \eta \quad (3.28)$$

$$f(t) = f_0(1 + \delta t), \quad \delta = \frac{2f_\delta}{f_0 T_u}$$

где η – начальное время выхода луча, f_0 – начальная частота (Гц), f_δ – девиация частоты (Гц), T_u – длительность импульса. В данной работе были приняты следующие значения параметров $f_0 = 3,5$ МГц, $f_\delta = 4,8825$ МГц, $T_u = 2,79$ с, $\delta = 1$ с⁻¹. При этом максимальная частота равна приблизительно 13,265 МГц. Распространение электромагнитной волны изначально осуществляется в плоскости (x, z) .

Модель ионосферной плазмы двухслойная. Профиль электронной концентрации имеет вид [13]:

$$N(\vec{r}) = N_0 \left\{ N_r \exp \frac{1}{2} \left[1 - \theta - \frac{\exp(-\theta)}{\cos \chi} \right] + \beta \exp \left[- \left(\frac{z - z_{02}}{z_{m2}} \right)^2 \right] \right\},$$

$$N_r = 1 + \rho \sin \left(\frac{x}{x_r} \right), \quad \theta = \frac{z - z_{01}}{z_{m1}/2}. \quad (3.29)$$

В выражении (3.29) z_{01} – высота максимума слоя $F2$, z_{m1} – условная полутолщина слоя $F2$, β – безразмерный коэффициент, характеризующий степень ионизации нижнего слоя по отношению к основному, z_{02} – высота максимума нижнего слоя E , z_{m2} – условная полутолщина нижнего слоя E , N_0 – электронная концентрация в максимуме основного слоя $F2$ если $\beta = 0$. Максимум ионосферного слоя $F2$ модулируется периодической функцией N_r .

При вычислении применялись следующие значения параметров: $N_0 = 2 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}$, $H_0 = 0,36\text{Э}$, $Z_{m1} = 140 \text{ км}$, $Z_{01} = 300 \text{ км}$, $Z_{m2} = 40 \text{ км}$, $Z_{02} = 100 \text{ км}$, $\zeta = 0$, $\gamma = 135^\circ$, $\varphi = 90^\circ$, $\beta = 0,1$, $\chi = 0$, $\rho = 0,1$, $x_r = 25 \text{ км}$.

На рисунке 3.50 показана лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в случае распространения в плоскости (x, z) , когда источник находится на земле (высота источника излучения 0 км). Угол выхода лучей 90° . Линиями равного уровня на рисунках показана электронная концентрация ионосферы. В районе 100 км по высоте просматривается слой E . На высоте 300 км хорошо виден слой $F2$ и его пространственная модуляция. Лучи показаны цветными линиями. Каждый луч соответствует определенной частоте излучения. Сначала все лучи идут по общей вертикальной траектории. В диспергирующей среде (ионосфере) они расходятся. Низкочастотные лучи отражаются от слоя $F2$ и возвращаются на землю, а высокочастотные просачиваются сквозь слой. Чем выше частота, тем глубже проникает луч в ионосферный слой. В этом сечении (плоскости (x, z)) влияние слоя E незначительно, лучевая структура обыкновенной волны аналогична лучевой структуре необыкновенной волны. Следует отметить (и это видно из рисунков), что обыкновенная волна легче проходит слой $F2$, чем необыкновенная.

Благодаря небольшому возмущению слоя $F2$ (не более 10%), вся лучевая структура оказывается отраженной влево.

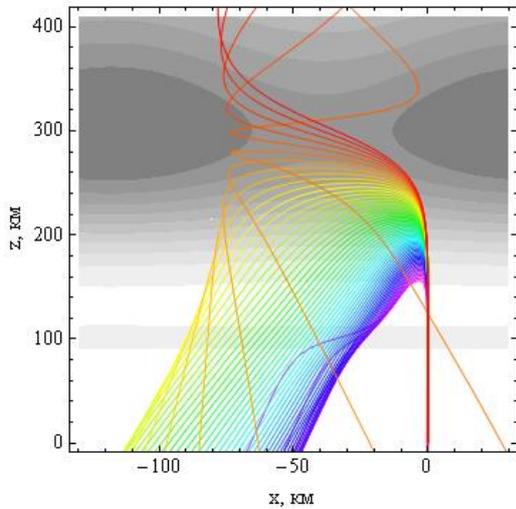


Рис. 3.50 а.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения $z_0=0$ км в плоскости (x, z) . Обыкновенная волна. Угол выхода 90° .

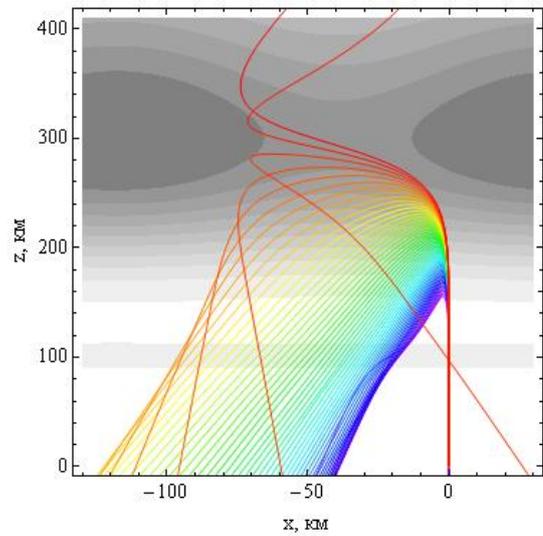


Рис. 3.50 б.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения $z_0=0$ км в плоскости (x, z) . Необыкновенная волна. Угол выхода 90°

На рисунке 3.51 а и 3.51 б показана лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в плоскости (y, z) . Лучи, проходящие ионосферный слой $F2$, выше 400 км развертываются параллельно оси z и уходят вверх.

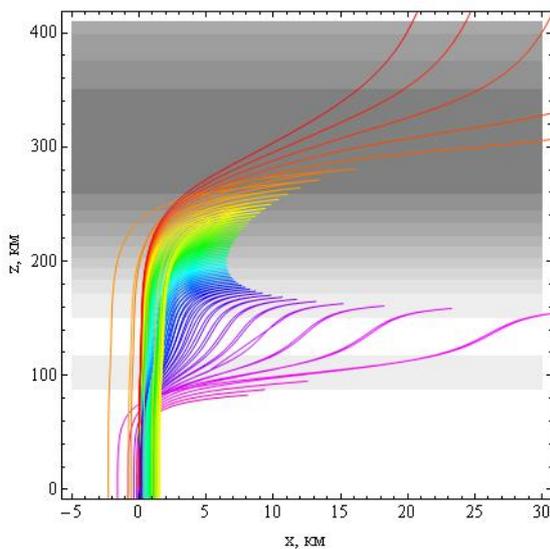


Рис. 3.51 а.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения $z_0=0$ км в плоскости (y, z) . Обыкновенная волна. Угол выхода 90°

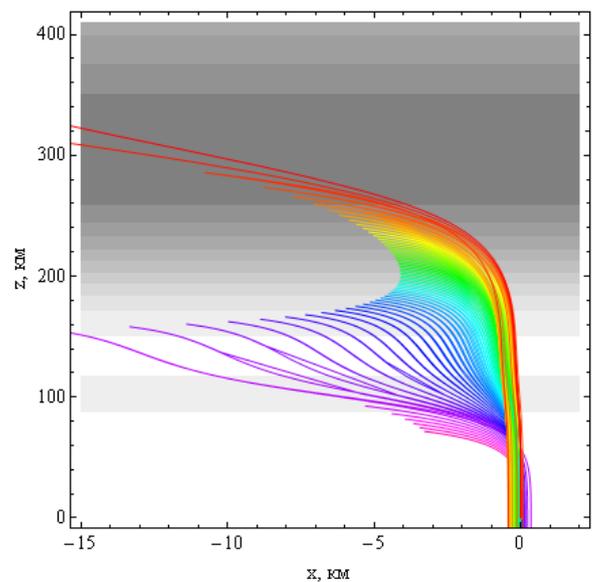


Рис. 3.51 б.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения $z_0=0$ км в плоскости (y, z) . Необыкновенная волна. Угол выхода 90°

Отражённые лучи возвращаются на землю по близким траекториям. Нижние лучи соответствуют отражению от слоя E . Они плохо видны на рис. 3.50, так в плоскости (x, z) практически не отклоняются. Средняя группа лучей соответствует отраженным лучам от слоя $F2$. Следует отметить, что структура необыкновенной волны в этой плоскости является как бы несколько «усохшим» зеркальным отражением от вертикальной оси структуры обыкновенной волны.

На рисунке 3.52 а и 3.52 б показана лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в плоскости (x, y) . Это вид на лучевую структуру сверху.

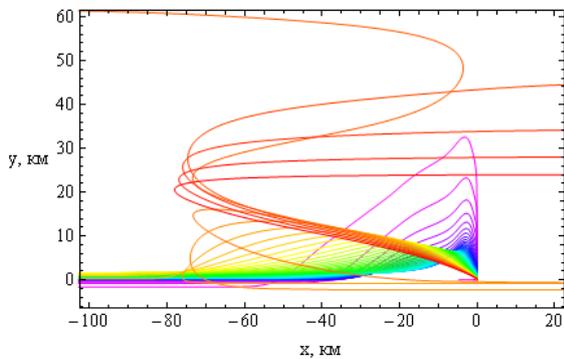


Рис.3.52 а.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения $z_0=0$ км в плоскости (x,y) . Обыкновенная волна. Угол выхода 90°

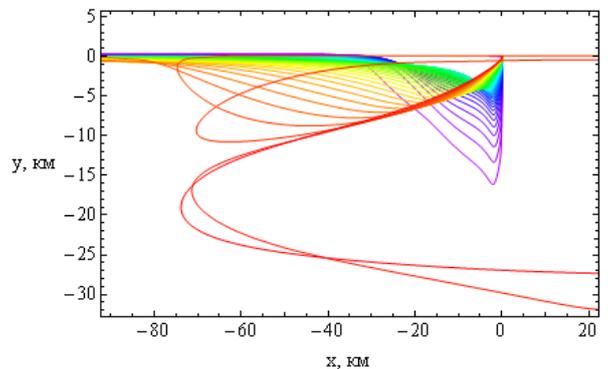


Рис. 3.52 б.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения $z_0=0$ км в плоскости (x,y) . Необыкновенная волна. Угол выхода 90°

Следует отметить, что структура необыкновенной волны в этой плоскости похожа на «усохшее» зеркальное отражение от горизонтальной оси структуры обыкновенной волны. В случае необыкновенной волны распространение сигнала вдоль оси y существенно «компактнее».

Рассмотрим теперь случай, когда источник излучения находится в межслоевом канале на высоте 142 км. На рисунке 3.53 показана лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в случае распространения в плоскости (x,z) .

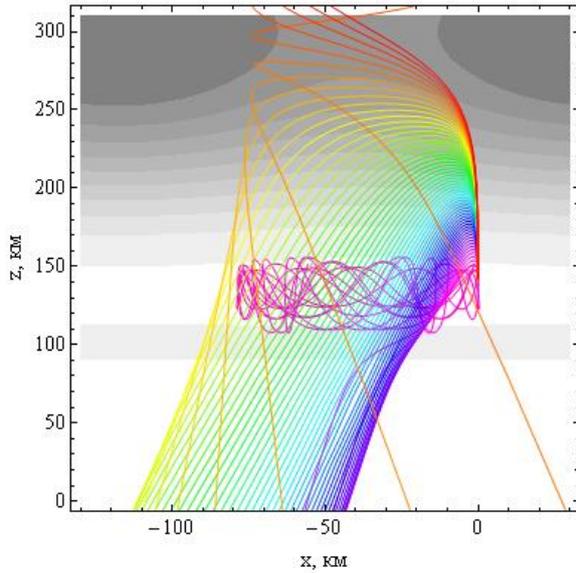


Рис.3.53 а.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения $z_0=142$ км в плоскости (x,z) . Обыкновенная волна. Угол выхода 90°

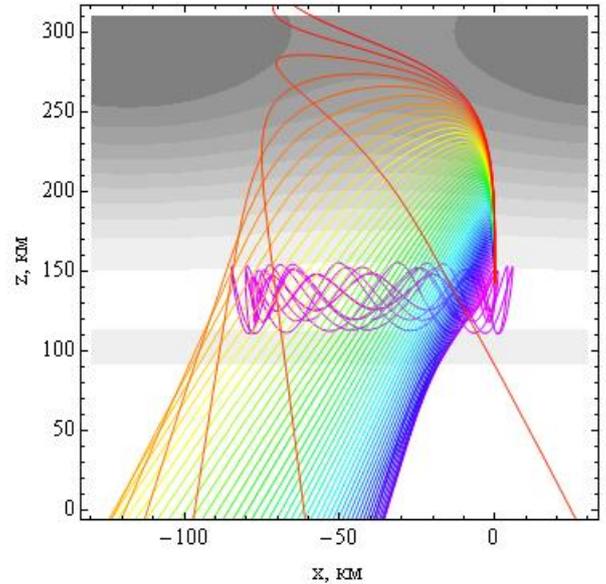


Рис. 3.53 б.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения $z_0=142$ км в плоскости (x,z) . Необыкновенная волна. Угол выхода 90°

Сравнивая рис. 3.50 и рис. 3.53, видим, что в целом лучевая структура сохранилась, однако в межслоевом канале образовался волновод, причем в силу пространственной модуляции волна оказалась запертой в этом волноводе. Этот эффект характерен как для обыкновенной, так и для необыкновенной волны. Большая часть стоячей волны оказалась левее источника излучения, но в случае необыкновенной волны небольшой отрезок структуры наблюдается и справа от источника.

На рисунках 3.54 а и 3.54 б представлена лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в плоскости (y,z) .

Видно, что лучи, возвращающиеся на землю, движутся по существенно разным траекториям, а лучи, распространяющиеся в волноводе, возвращаются к источнику по близким траекториям. При сравнении рис. 3.51 и рис. 3.54 видно, что верхние части рисунков аналогичны.

На рисунке 3.55 а и 3.55 б показана лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в плоскости (x,y) .

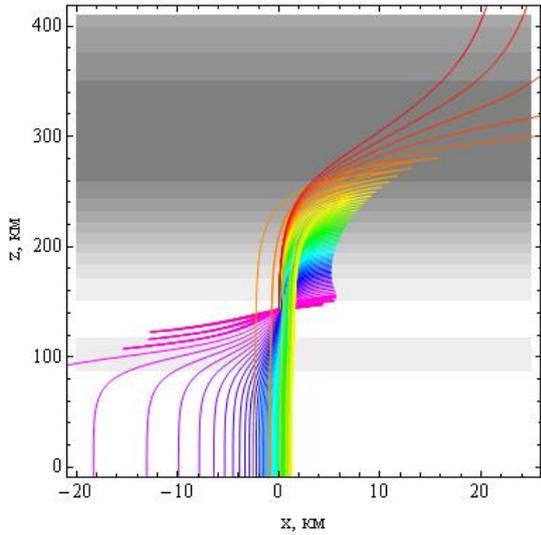


Рис. 3.54 а.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения $z_0=142$ км в плоскости (y,z) . Обыкновенная волна. Угол выхода 90°

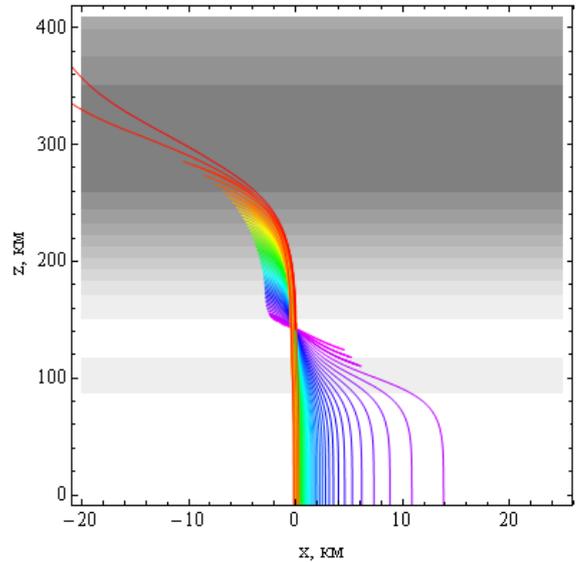


Рис. 3.54 б.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения $z_0=142$ км в плоскости (y,z) . Необыкновенная волна. Угол выхода 90°

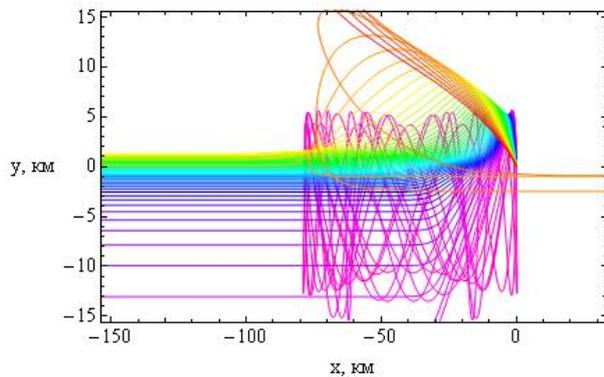


Рис. 3.55 а.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения $z_0=142$ км в плоскости (x,y) . Обыкновенная волна. Угол выхода 90°

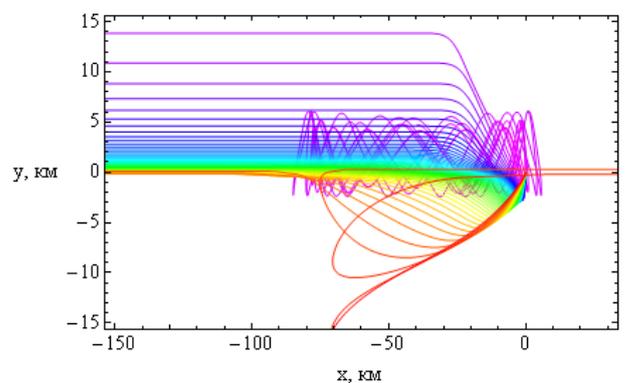


Рис. 3.55 б.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения $z_0=142$ км в плоскости (x,y) . Необыкновенная волна. Угол выхода 90°

Как и на рис. 3.53, в этой плоскости хорошо видно волноводное распространение, отсутствующее на рис. 3.52, когда источник излучения располагался на земле. Однако размах осцилляций в случае необыкновенной волны существенно меньше. В остальном структуры рис. 3.55 а и б аналогичны структурам рис. 3.52 а и б.

Теперь рассмотрим случай, когда угол выхода лучей составляет 60° с положительным направлением оси x . На рисунке 3.56 показана лучевая структура в случае распространения в плоскости (x, z) .

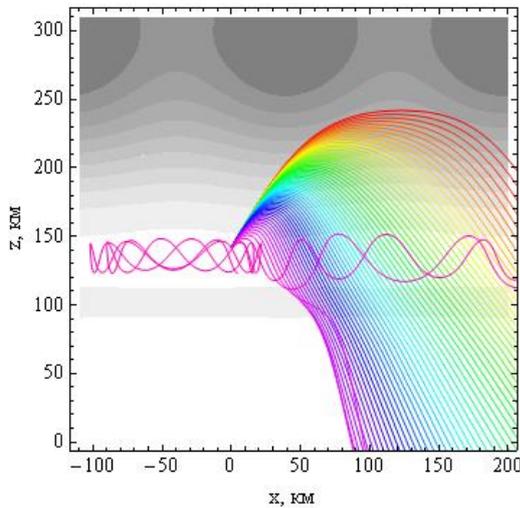


Рис. 3.56 а.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения $z_0=142$ км в плоскости (x, z) . Обыкновенная волна. Угол выхода 60°

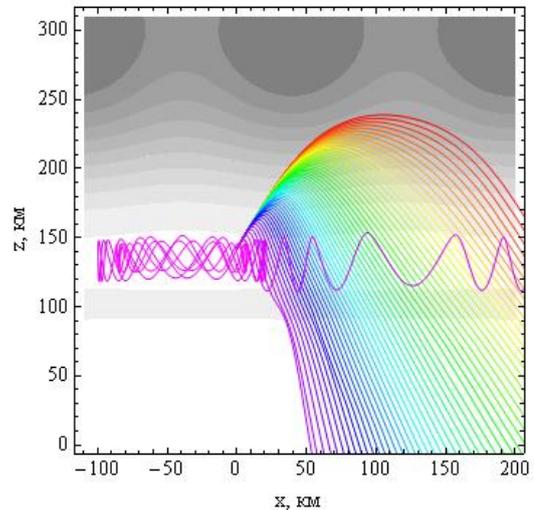


Рис. 3.56 б.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения $z_0=142$ км в плоскости (x, z) . Необыкновенная волна. Угол выхода 60°

Лучи, проходящие все ионосферные слои, как в случае обыкновенной, так и в случае необыкновенной волны, отсутствуют. В волноводном канале часть лучей оказывается запертой, а часть лучей распространяется в положительном направлении оси x , причем в случае необыкновенной волны запертых лучей в волноводе оказывается больше, а распространяющихся меньше.

На рисунках 3.57 а и 3.57 б приведена лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в плоскости (y, z) .

Если сравнить рис. 3.57 и рис. 3.54, видно, что, поскольку лучи, проходящие ионосферу, отсутствуют, то все верхние лучи в этой плоскости возвращаются в источник.

На рисунке 3.58 а и 3.58 б показана лучевая структура радиосигнала в плоскости (x, y) . Анализируя рис. 3.58 а и рис. 3.58 б, видим, что, как и на рис. 3.56, наблюдается волноводное распространение в правой части рисунков в волноводном канале, а также лучи, запертые волноводе слева от источника.

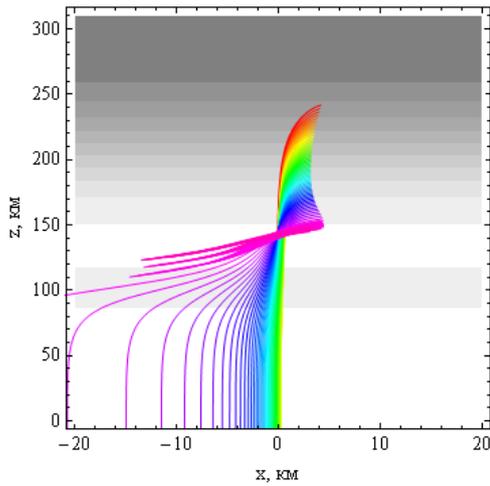


Рис. 3.57 а.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения $z_0=142$ км в плоскости (y,z) . Обыкновенная волна. Угол выхода 60°

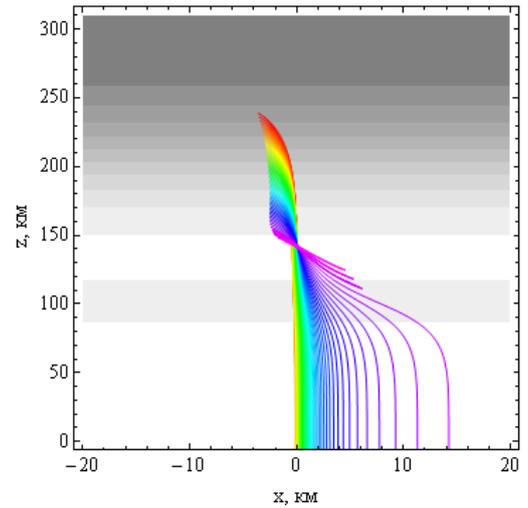


Рис. 3.57 б.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения $z_0=142$ км в плоскости (y,z) . Необыкновенная волна. Угол выхода 60°

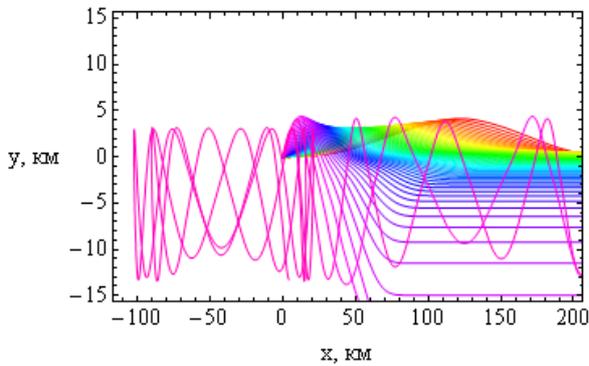


Рис. 3.58 а.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения $z_0=142$ км в плоскости (x,y) . Обыкновенная волна. Угол выхода 60°

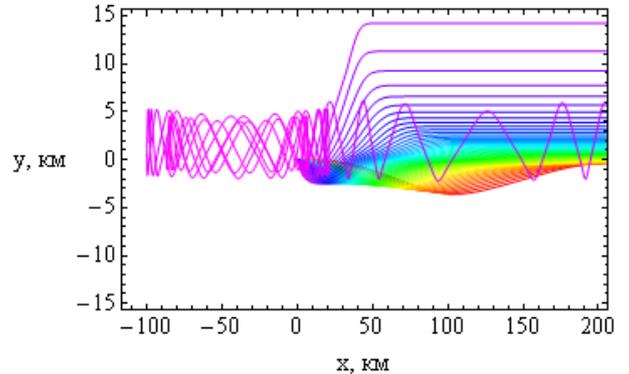


Рис. 3.58 б.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения $z_0=142$ км в плоскости (x,y) . Необыкновенная волна. Угол выхода 60°

Ситуация, когда угол выхода лучей ещё меньше – составляет 40° с положительным направлением оси x , показана на рисунках 3.59 в случае лучевого распространения в плоскости (x,z) .

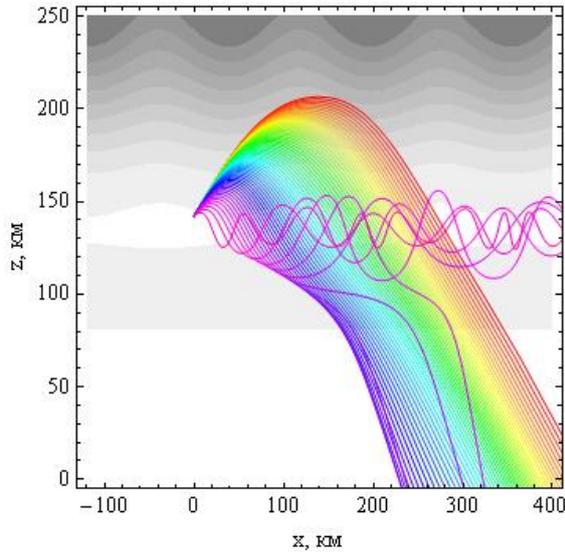


Рис. 3.59 а.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения $z_0=142$ км в плоскости (x,z) . Обыкновенная волна. Угол выхода 40° .

Видно, что при этом градусе выхода лучей в случае обыкновенной волны стоячая волна в левой части волновода исчезла, а в случае необыкновенной волны ещё сохранилась.

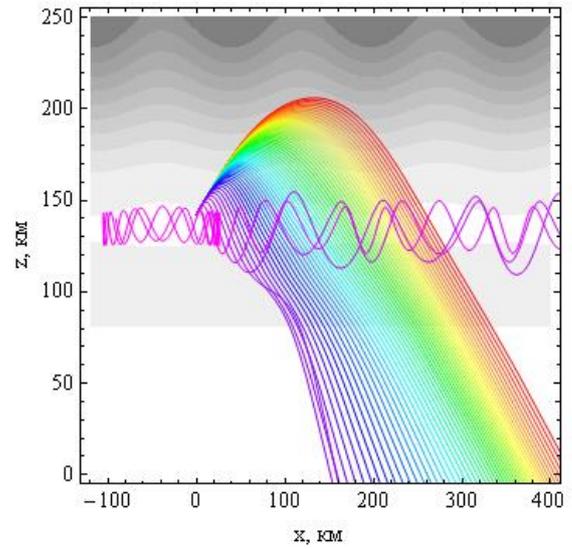


Рис. 3.59 б.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения $z_0=142$ км в плоскости (x,z) . Необыкновенная волна. Угол выхода 40° .

На рис. 3.60 рассмотрен случай, когда угол выхода луча 20° , а источник излучения расположен на высоте максимума слоя E – 100 км.

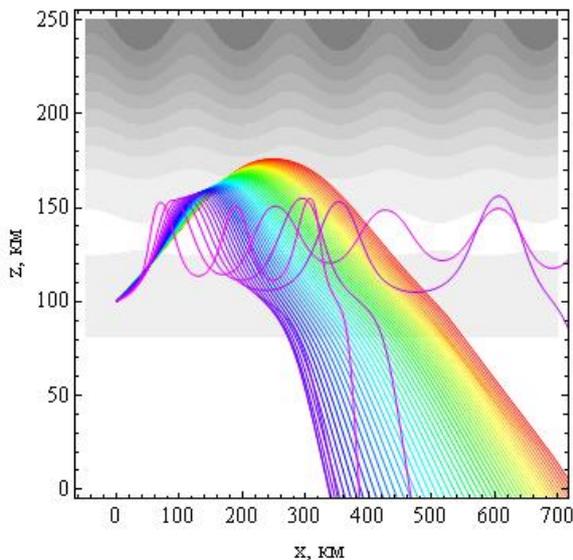


Рис. 3.60 а.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения $z_0=100$ км в плоскости (x,z) . Обыкновенная волна. Угол выхода 20° .

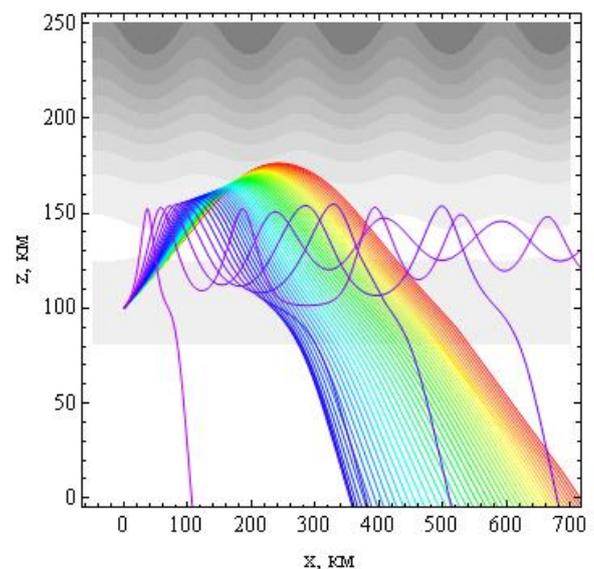


Рис. 3.60 б.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала при высоте источника излучения $z_0=100$ км в плоскости (x,z) . Необыкновенная волна. Угол выхода 20° .

Показана плоскость распространения (x, z) . Источник излучения, находясь в максимуме слоя, запитывает волновой межслоевой канал, причем лучи после нескольких колебаний высвечиваются из канала и уходят в направление земли.

В заключение приведем пример, соответствующий случаю исчезновения слоя E и соответственно межслоевого канала. Для этого в формуле (3.29) заменим коэффициент β на $0,1(1 + 0,02x/x_r)$. На рис. 3.61 показана лучевая структура радиоволны в плоскости (x, z) .

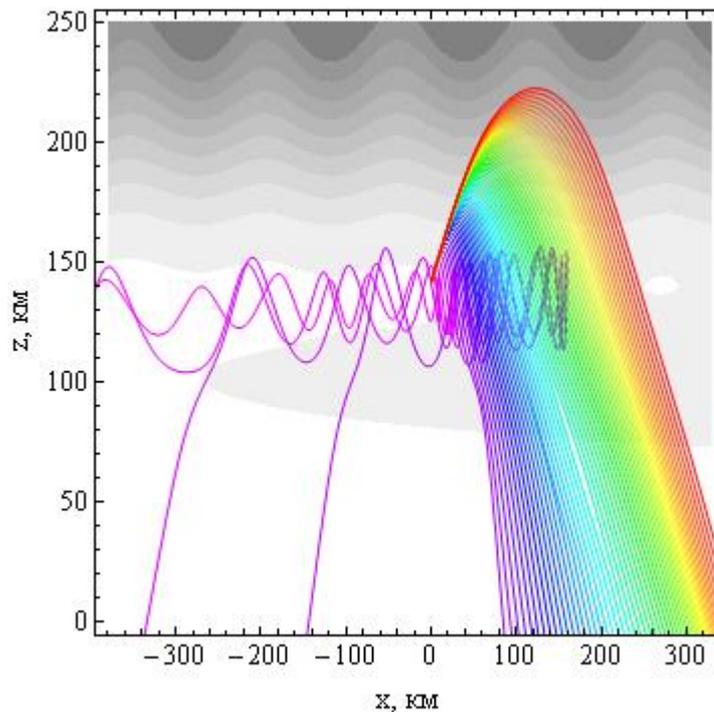


Рис. 3.61

Лучевая структура радиосигнала при высоте источника излучения $z_0=142$ км в плоскости (x, z) . Необыкновенная волна. Угол выхода 50° .

Видно, что лучи, отражаясь от правого конца волновода, уходят влево и постепенно высвечиваются на землю.

Таким образом, в настоящем параграфе на основе бихарактеристической системы дифференциальных уравнений выполнено математическое моделирование распространения радиоволн в ионосфере Земли с учетом магнитного поля в зависимости от высоты источника излучения и угла выхода сигнала.

Сопоставлены особенности распространения ЛЧМ сигналов в двухслоевой анизотропной ионосфере при наличии горизонтальных градиентов в случае обыкновенной и необыкновенной волны с учетом изменения высоты источника. Использована двухслоевая модель ионосферной плазмы, описывающая слои E и $F2$, максимумы которых соответствуют высотам 100 км и 300 км. Экспонента, описывающая слой $F2$, модулируется периодической функцией с характерным масштабом 25 км.

Рассмотрены проекции лучей на разные координатные плоскости: на плоскость распространения, боковую плоскость и «вид сверху». Рассмотрены углы выхода сигнала 90° , 60° , 40° и 20° с положительным направлением горизонтальной оси. Следует отметить, что обыкновенная волна легче проходит слой $F2$, чем необыкновенная. При вертикальном угле выхода сигнала благодаря небольшому возмущению слоя $F2$ (не более 10%), вся лучевая структура оказывается отраженной влево.

Изучено распространение излучения в межслоевом канале и эффект запирания излучения в канале для определенных частот источника излучения. Сопоставлены результаты вычислений в случае обыкновенной и необыкновенной волны. При угле выхода луча 40° в случае обыкновенной волны стоячая волна в левой части межслоевого волновода исчезла, а в случае необыкновенной волны ещё сохранилась. При больших углах выхода лучей стоячая волна возникает как в случае обыкновенной, так и в случае необыкновенной волны. Показано, что лучевая структура необыкновенной волны повторяет лучевую структуру обыкновенной волны в плоскости распространения, и является отраженной структурой относительно вертикальной оси в боковой плоскости и относительно горизонтальной оси в плоскости «вид сверху». Приведен пример, соответствующий случаю исчезновения слоя E и соответственно межслоевого канала.

§ 3.5 Выводы

1. На основе применения символьных вычислений разработаны численные методы и алгоритмы решения пространственно-временной бихарактеристической

системы дифференциальных уравнений для определения характеристик лучевых траекторий в декартовых и сферических координатах при распространении монохроматического и частотно-модулированного излучения в анизотропной плазме – ионосфере Земли.

2. Выполнено численное моделирование распространения обыкновенной и необыкновенной волн в однослойной и двухслойной модели. Показано, что лучевая структура обыкновенной волны в боковой проекции и в проекции «вид сверху» является зеркально симметричной по отношению к лучевой структуре необыкновенной волны, причем лучевая структура необыкновенной волны является более компактной по сравнению с лучевой структурой обыкновенной волны.

3. Выполнено численное моделирование однокачкового и двухкачкового распространения частотно-модулированных сигналов в анизотропной ионосферной плазме на основе численного решения пространственно-временной бихарактеристической системы Гамильтона, неизвестными в которой являются компоненты волнового вектора, координаты, а также частота и время.

4. Рассмотрена модель двухслойной ионосферной плазмы с волнообразным возмущением. Проанализировано доплеровское изменение частоты и показано, что изменение частоты вдоль луча носит осциллирующий характер и может достигать 2 Гц, а в вертикальных направлениях при некоторых значениях параметров 7 Гц.

5. Проанализированы особенности выхода обыкновенной и необыкновенной волны из плоскости распространения и образование каустик пространственно-временных геометрооптических лучей. Показано, что при поперечном распространении в отсутствие горизонтальных градиентов отраженные волны возвращаются в боковой проекции на землю по тем же траекториям, а направление бокового отклонения зависит от типа волны.

6. На основе бихарактеристической системы уравнений в сферической системе координат выполнено математическое моделирование распространения

радиоволн декаметрового диапазона в нестационарной ионосфере с учетом кривизны поверхности Земли и ионосферных слоев.

7. Рассмотрено распространение обыкновенной и необыкновенной электромагнитных волн в условиях быстрого образования спорадического слоя.

8. Построены проекции лучей и компонент волнового вектора в сферической системе координат, исследованы зависимости частоты сигнала от группового времени и широты.

9. Выполнено математическое моделирование распространения радиоволн в ионосфере с учетом магнитного поля Земли в зависимости от высоты источника излучения и угла выхода сигнала. Рассмотрены проекции лучей на разные координатные плоскости. Исследовано распространение излучения в межслоевом канале и эффект запирания излучения в канале для определенных частот источника излучения.

ГЛАВА 4

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫХ СТРУКТУР РАДИОСИГНАЛОВ В ИОНОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЕ МЕТОДАМИ РАСШИРЕННОЙ БИХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И КАНОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

§ 4.1. Модель электронной концентрации ионосферы Земли, содержащая локальные неоднородности

В последнее время для расчета амплитудно-фазовых структур электромагнитных полей в ионосфере Земли активно применяется канонический оператор В.П. Маслова (КОМ) [60, 62, 187, 188]. В отличие от лучевых методов, например метода геометрической оптики, КОМ позволяет получить равномерные асимптотические решения волновых уравнений не только в регулярных, но и в сингулярных областях, которым соответствуют каустики (огибающие лучевых семейств) и их особенности [85, 108, 154, 163]. Как известно, на каустиках расходимость лучевого потока, описываемая якобианом расходимости, обращается в нуль, что и приводит к бесконечностям для лучевых решений. Основная идея метода КОМ [106, 153, 154, 157, 158, 161] состоит в том, что в силу теоремы Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений при выполнении необходимых условий относительно гладкости правых частей решения бихарактеристической системы Гамильтона в фазовом пространстве однозначно параметризуются и не пересекаются. Каустики возникают лишь при проектировании фазового пространства в конфигурационное. Если же выбрать другое подпространство фазового пространства (импульсное или смешанное), то в нем лучевые траектории могут не пересекаться, а якобиан расходимости не будет обращаться в нуль. Конечно, такое лучевое представление не будет являться решением исходной задачи, но, как показано в работах [154, 157–161], его Фурье-образ является искомым решением. В результате получается быстроосциллирующий интеграл (предканонический оператор), кратность

которого определяется числом импульсов (волновых векторов), участвующих в формировании координатно-импульсного подпространства.

В общем случае можно показать (см., например, [107]), что всегда существует такая проекция фазового пространства в координатно-импульсное подпространство, в котором отсутствуют каустики и их особенности. Но это утверждение справедливо только локально. Поэтому для построения глобального решения задачи необходимо сшивать различные «карты», переходя от одного координатно-импульсного представления к другому.

Необходимо отметить, что лучевая структура и каустические особенности, возникающие в импульсных или смешанных подпространствах в случае ионосферного распространения радиоволн изучены недостаточно подробно, в отличие от аналогичных результатов (например, [92, 104, 116, 128, 129, 139, 197]), полученных для конфигурационного (координатного) пространства. Стремясь восполнить этот пробел, в настоящей главе выполнено исследование лучевых и каустических структур в координатно-импульсных подпространствах предканонического оператора Маслова (см. [115, 124, 133, 135, 200]). В данном разделе рассмотрено распространение монохроматического сигнала как основа для более общего подхода. Изучены две ситуации: распространение в возмущенном и невозмущенном ионосферном слое и изучены особенности, возникающие в координатно-импульсных пространствах при возмущении ионосферной плазмы.

В ходе вычислений рассмотрена изотропная модель эффективной диэлектрической проницаемости ионосферной плазмы, то есть модель, не учитывающая магнитное поле Земли:

$$\varepsilon = 1 - \nu, \quad (4.1)$$

$$\nu = \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m_e \omega^2}. \quad (4.2)$$

Модель электронной концентрации ионосферы представим в виде

$$N(\vec{r}) = N_0 \left\{ \exp \frac{1}{2} \left[1 - \theta - \frac{\exp(-\theta)}{\cos \chi} \right] + \frac{\beta}{2} \exp \left[- \left(\frac{z - z_{02}/2}{z_{m2}} \right)^2 \right] + N_s + N_p \right\},$$

$$\theta = \frac{z - z_{01}}{z_{m1}/2}, \quad (4.3)$$

где

$$N_s = \beta \sin \left[\frac{\pi}{2} \frac{x}{x_s} \exp \left[- \left(\frac{z - z_{02}}{z_{m2}} \right)^2 \right] \right] \quad (4.4)$$

относительная частота спорадического слоя, а

$$N_p = \beta_p \exp \left[- \left(\frac{x_n - x_{n3}}{x_{m3}} \right)^2 - \left(\frac{y - y_{03}}{y_{m3}} \right)^2 - \left(\frac{z_n - z_{n3}}{z_{m3}} \right)^2 \right] \quad (4.5)$$

относительная частота возмущения.

В формулах (4.3-4.4) введены параметры: z_{01} – высота максимума слоя $F2$, z_{m1} – условная полутолщина слоя $F2$, β – безразмерный коэффициент, характеризующий степень ионизации спорадического слоя и слоя E по отношению к основному, z_{02} – высота максимума спорадического слоя, $z_{02}/2$ – высота максимума нижнего слоя E , z_{m2} – условная полутолщина нижних слоев, величина N_0 это электронная концентрация в максимуме основного слоя $F2$. При вычислении применялись следующие значения этих параметров: $N_0 = 2 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}$, $z_{m1} = 100 \text{ км}$, $z_{01} = 300 \text{ км}$, $z_{m2} = 10 \text{ км}$, $z_{02} = 200 \text{ км}$, $\chi=0$. Характерный горизонтальный размер спорадического слоя $x_s = 600 \text{ км}$.

В формуле (4.5), описывающей эллиптическое возмущение, $x_{m3} = 15 \text{ км}$, $y_{m3} = 10 \text{ км}$, $z_{m3} = 10 \text{ км}$, причем эллипсоид повернут:

$$\begin{cases} x_n = x \cos(\theta_\lambda) - z \sin(\theta_\lambda) \\ z_n = x \sin(\theta_\lambda) + z \cos(\theta_\lambda) \end{cases}, \quad \begin{cases} x_{n3} = x_3 \cos(\theta_\lambda) - z_3 \sin(\theta_\lambda) \\ z_{n3} = x_3 \sin(\theta_\lambda) + z_3 \cos(\theta_\lambda) \end{cases}. \quad (4.6)$$

В выражениях (4.6) $x_3 = 75$ км, $z_3 = 290$ км, а угол поворота θ_λ равен 10° . Параметр β_p это безразмерный коэффициент, характеризующий степень ионизации возмущения.

Ниже сопоставлены два случая: $\beta=0, \beta_p=0$ и $\beta=0,3, \beta_p=-0,3$.

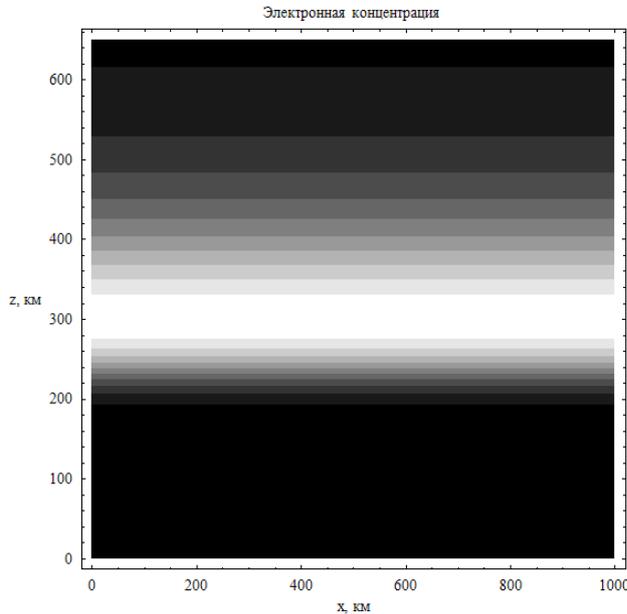


Рис. 4.1

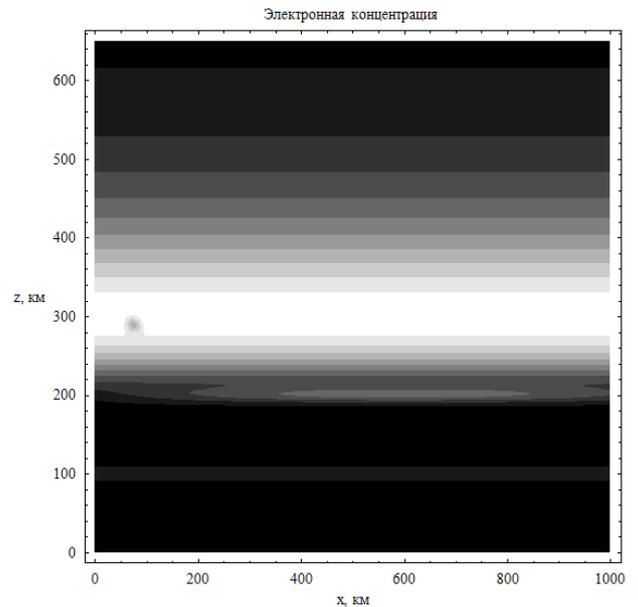


Рис. 4.2

Электронная концентрация ионосферы. $\beta=0, \beta_p=0$ – рис. 4.1 и $\beta=0,3, \beta_p=-0,3$ – рис. 4.2.

На рис. 4.1 и 4.2 показаны линии равного уровня электронной концентрации ионосферной плазмы в невозмущенном (рис. 4.1) и в возмущенном случае. На рис. 4.2 помимо слоя $F2$, представленного также и на рис. 4.1, мы видим слой E на высоте 100 км, спорадический слой на высоте 200 км и локальное возмущение (понижение электронной концентрации) эллиптической формы на высоте 290 км.

§ 4.2. Расширенная бихарактеристическая система уравнений

Для вычисления лучевых траекторий в фазовом пространстве координат и волновых векторов в данном разделе применена бихарактеристическая система уравнений в виде (1.60):

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{k}} \bigg/ \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{r}} \bigg/ \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega}, \quad (4.7)$$

с гамильтонианом:

$$\Gamma = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\vec{r}, \omega) \quad (4.8)$$

где $\vec{r} = (x, y, z)$ – координаты точки наблюдения, $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ – волновой вектор, $\omega = 2\pi \times 13,25 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ – круговая частота излучения, t – групповое время, $\varepsilon(\vec{r}, \omega)$ – эффективная диэлектрическая проницаемость среды распространения.

Систему (4.7–4.8) необходимо дополнить начальными условиями. Предположим, что начальный волновой вектор $\vec{k}(0)$ параметрически зависит от углов выхода луча:

$$k_x(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \zeta \cos \eta, \quad k_y(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \zeta \cos \eta, \quad k_z(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \eta, \quad (4.9)$$

величина ε_0 это значение эффективной диэлектрической проницаемости среды в источнике, а точечный источник излучения находится вне ионосферной плазмы и расположен в начале координат ($x_0=y_0=z_0=0$):

$$\vec{r}|_{t=0} = (x_0, y_0, z_0), \quad (4.10)$$

Однако, для вычисления расходимости лучевых потоков необходимо перейти к расширенной бихарактеристической системе [67, 104, 156], дополнив формулы (7–8) уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_\zeta}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{k}} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \right), & \frac{d\vec{k}_\zeta}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{r}} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \right), \\ \frac{d\vec{r}_\eta}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{k}} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \right), & \frac{d\vec{k}_\eta}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{r}} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \right), \end{aligned} \quad (4.11)$$

с соответствующими начальными условиями:

$$\begin{aligned} k'_{x\zeta}(0) &= -\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \zeta \cos \eta, & k'_{x\eta}(0) &= -\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \zeta \sin \eta, \\ k'_{y\zeta}(0) &= -\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \zeta \sin \eta, & k'_{y\eta}(0) &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \zeta \cos \eta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k'_{z\zeta}(0) &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \zeta, & k'_{z\eta}(0) &= 0, \\
 \vec{r}'_{\zeta}(0) &= 0, & \vec{r}'_{\eta}(0) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

Предположим, что распространение электромагнитной волны изначально осуществляется в плоскости (x, z) , то есть $\zeta = 0$.

§ 4.3. Лучевое распространение в фазовом пространстве

Рассмотрим структуру лучевых траекторий в различных двумерных проекциях фазового пространства, сопоставляя невозмущенный и возмущенный случаи.

На рис. 4.3 показана лучевая структура радиосигнала в случае распространения волны в плоскости (x, z) в невозмущенном случае, а на рис. 4.4 такая же структура показана для возмущенного случая. Рис. 4.3 типичен для однослойной модели. С ростом угла выхода луча (η) лучи, отражаясь от ионосферного слоя F , образуют верхнюю каустику, затем точку возврата (каустическое острие), нижнюю каустику и, наконец, начинают просачиваться через ионосферный слой.

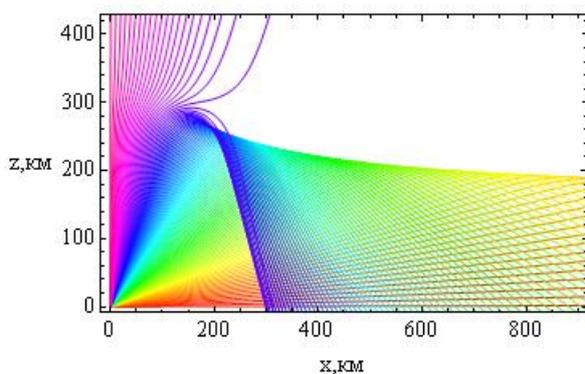


Рис. 4.3.

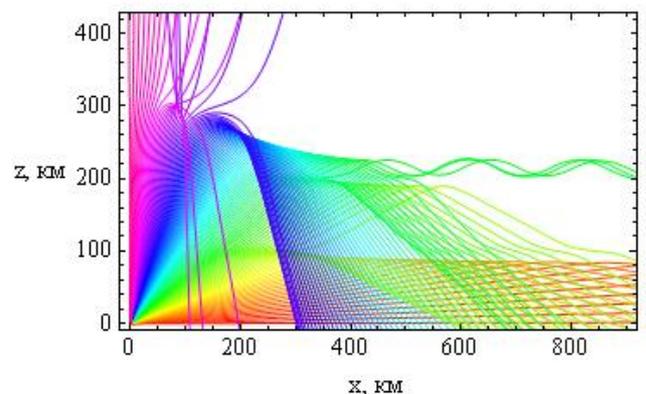


Рис. 4.4.

Лучевая структура в плоскости (x, z) ; невозмущенный случай – рис. 4.3; возмущенный случай – рис. 4.4.

На рис. 4.4 лучевая структура существенно сложнее. С ростом угла выхода лучи сначала образуют каустическое острие, связанное с нижним слоем E (см.

рис. 4.2), затем возникает острие, вызванное спорадическим слоем, и только потом образуется каустическое острие слоя F , причем между двумя последними топологическими структурами возникает волновой канал, в котором на рис. 4.4 находится несколько лучей. Что касается локальной неоднородности, о которой шла речь выше, то ей соответствует фокусировка лучей выше и левее каустического острия слоя F .

В отсутствии магнитного поля и поперечных горизонтальных градиентов луч не выходит из плоскости первоначального распространения. Поэтому проекции лучевых траекторий в плоскостях (y, z) и (x, y) ниже не приводятся.

Перейдем теперь к смешанным координатно-импульсным подпространствам фазового пространства и рассмотрим плоскость $(x, k_z/k)$ (см. рис. 4.5 и 4.6). Величина $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0}$ введена для нормировки.

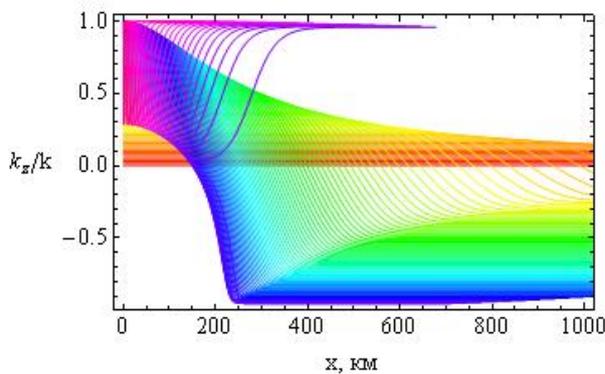


Рис. 4.5.

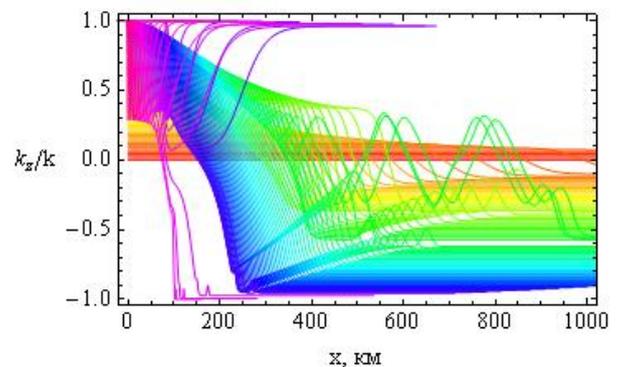


Рис. 4.

Лучевая структура в плоскости $(x, k_z/k)$; невозмущенный случай – рис. 4.5; возмущенный случай – рис. 4.6.

Рассмотрим сначала рис. 4.5 и проследим изменение характера лучевой траектории с ростом угла выхода луча η . Все лучи выходят из точки с координатой $x=0$. Луч с $\eta = 0$ идет строго горизонтально. Далее с увеличением начального значения k_z (и соответственно η) лучи на рис. 4.5 поднимаются (относительно друг друга) и образуют верхнюю каустику, аналогичную верхней каустики рис. 4.3, но смещенную относительно неё. Отражаясь от ионосферного слоя, лучи выходят из плазмы и далее распространяются с постоянным k_z . В

верхней части рисунка видны лучи, прошедшие ионосферный слой. Следует отметить нижнюю каустику, образованную лучами, у которых сначала сильно уменьшилась компонента волнового вектора k_z , а потом, после прохождения максимумом слоя, опять возросла.

В возмущенном случае (рис. 4.6) лучевая картина принципиально похожа на структуру рис. 4.5, но, во-первых, в правой части рисунка мы наблюдаем сильные (но редкие) осцилляции, соответствующие распространению лучей в волновом канале и прерывающие каустику, во-вторых, имеют место и более слабые осцилляции, соответствующие внутренним каустическим структурам рис. 4.4. И, наконец, следует отметить почти вертикальные лучи, не прошедшие ионосферного слоя и опустившиеся на землю, что вызвано локальной неоднородностью. В целом каустическая структура рис. 4.6 весьма запутанная. Напрашивается вывод, что такая карта плохо пригодна построения предканонического оператора, поскольку на ней трудно выбрать участок, не содержащий как свои особенности, так и особенности предыдущей карты.

Рассмотрим теперь плоскость $(z, k_x/k)$ (см. рис. 4.7 и 4.8).

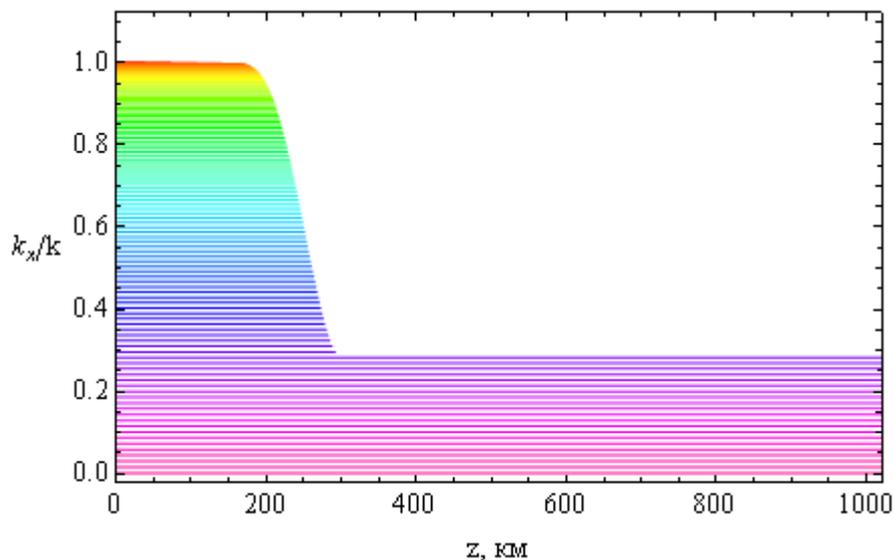


Рис. 4.7.

Лучевая структура в плоскости $(z, k_x/k)$; невозмущенный случай

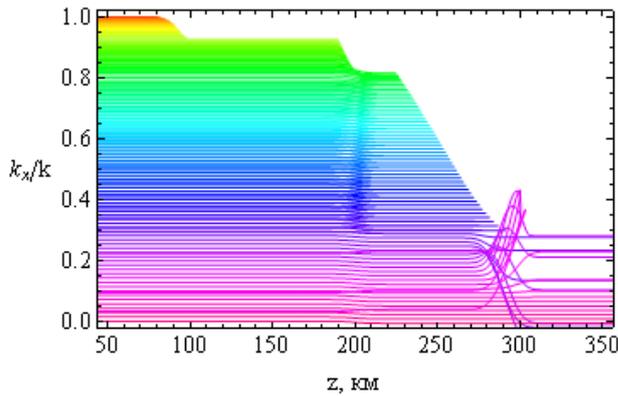


Рис. 4.8 а.

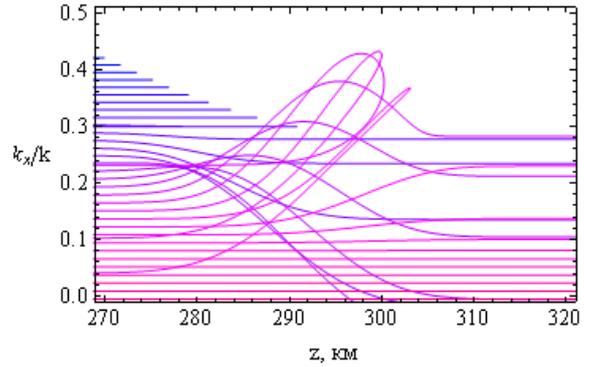


Рис. 4.8 б.

Лучевая структура в плоскости $(z, k_x/k)$; возмущенный случай; рис. 4.8 б – фрагмент рис. 4.8 а.

На рис. 4.7 показан невозмущенный случай. Здесь все просто. Нижние линии соответствуют лучам рис. 4.3, проходящим ионосферный слой, а выше мы видим лучи, отразившиеся от ионосферы. Причем, так как горизонтальные градиенты отсутствуют, лучи на этом рисунке возвращаются по тем же траекториям. Правая граница этих лучей – каустика. В возмущенном случае (рис. 4.8) возникают вертикальные полосы, ограниченные каустическими линиями (рис. 4.8 а). Особый интерес представляет проявление локальной неоднородности в этом подпространстве (на этой карте) (см. фрагмент на рис. 4.8 б). Один из лучей даже делает петлю, охватывая неоднородность. Однако в целом лучевая структура на этой карте более регулярна, чем в предыдущем случае.

Перейдем теперь к чисто импульсному подпространству фазового пространства и рассмотрим плоскость $(k_x/k, k_z/k)$ (см. рис. 4.9 и 4.10).

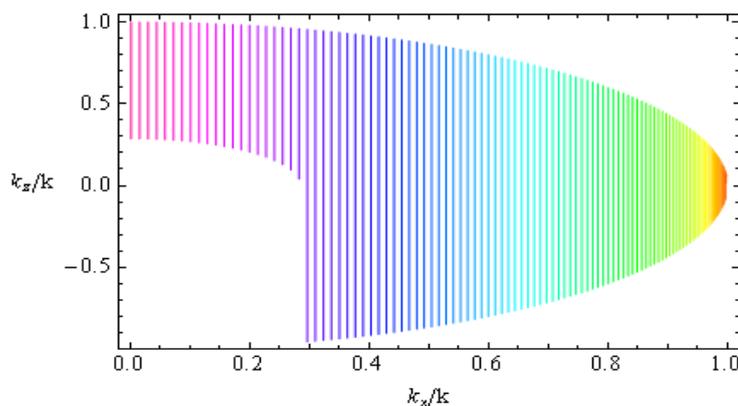


Рис. 4.9.

Лучевая структура в плоскости $(k_x/k, k_z/k)$; невозмущенный случай.

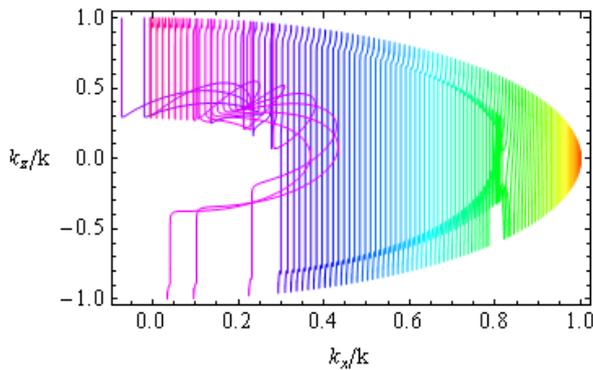


Рис. 4.10 а.

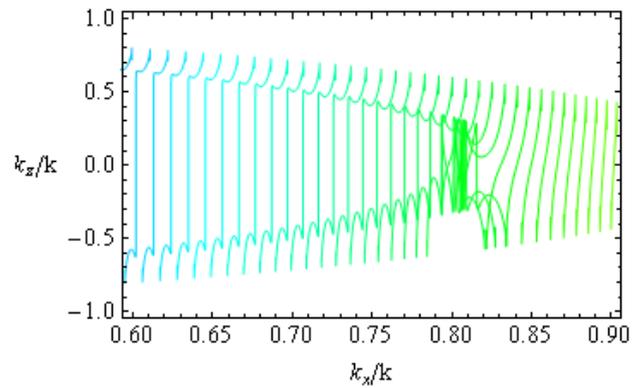


Рис. 4.10 б.

Лучевая структура в плоскости $(k_x/k, k_z/k)$; возмущенный случай;
рис. 4.10 б – фрагмент рис. 4.10 а.

В невозмущенном случае (рис. 4.9) лучами являются прямые линии, поскольку для каждого угла η выхода луча k_x является константой. Лучи, отражающиеся от ионосферы, идут сверху вниз и показаны в правой части рисунка. Проходящие лучи (слева) также идут сначала вниз, затем «отражаются» от уровня, соответствующего минимальной диэлектрической проницаемости среды (возникает каустика), и затем возвращаются обратно. Это наиболее удачная карта, поскольку справа каустик нет, а слева справедлива геометрическая оптика: у проходящих лучей в плоскости (x, z) нет каустики.

Хуже обстоит дело в возмущенном случае (рис. 4.10). Во-первых, обращает на себя внимание локальная неоднородность в виде некоторой области слева, откуда во все стороны расходятся лучи (рис. 4.10 а), образующие без сомнения каустик. Во-вторых, в правой области имеется сложная лучевая, а следовательно, и каустическая структура, фрагмент которой показан на рис. 4.10 б.

§ 4.4. Лучевые расходимости на канонических картах

Наличие каустик и их особенностей приводит к сингулярностям лучевых решений или подынтегральных выражений (для предканонического оператора Маслова). На рис. 4.11 и 4.12 показано ослабление электромагнитного поля вдоль лучей за счет расходимости лучевого потока.

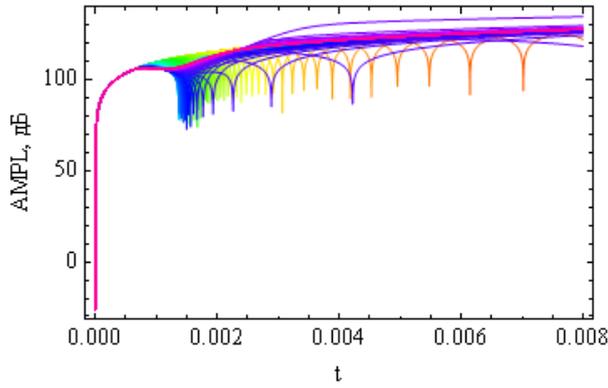


Рис. 4.11.

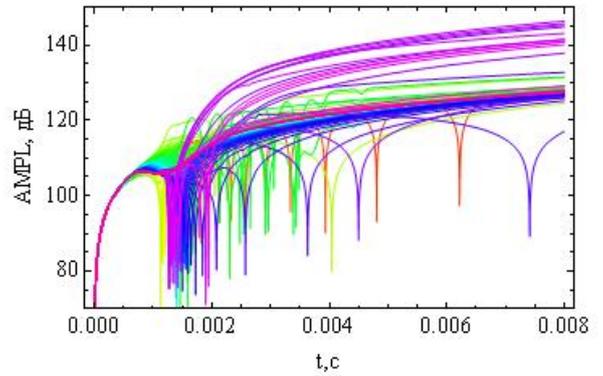


Рис. 4.12.

Зависимость расходимости сигнала от времени; невозмущенный случай – рис. 4.11; возмущенный случай – рис. 4.12.

По горизонтальной оси отложено групповое время в секундах, а по вертикальной:

$$AMPL = -20 \lg \sqrt{\left| \frac{J_0}{J(\vec{r})} \right|} \quad (4.13)$$

в децибелах. В формуле (13) введены обозначения:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & -\frac{\partial \Gamma}{\partial k_x} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial \Gamma}{\partial k_y} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & -\frac{\partial \Gamma}{\partial k_z} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \end{vmatrix}, \quad J_0 = J|_{t=100/c}. \quad (4.14)$$

Таким образом, начальное значение якобиана вычисляется на расстоянии 1 м от изотропного передатчика.

Из рис. 4.11 видно, что интенсивность излучения вдоль луча сначала резко падает (для всех лучей), а потом выходит на относительно стабильный уровень (ослабление увеличивается, но медленно). При этом, поскольку каждый луч касается каустики, в её окрестности интенсивность сигнала резко возрастает (в лучевом приближении до бесконечности), и на графике возникают характерные «провалы». Самая большая расходимость у луча, близкого к «лучу Педерсена» (верхний луч).

В возмущенном случае (рис. 4.12) общая структура остается той же, но самыми слабыми сигналами являются не только сигналы, передаваемые «лучами Педерсена», но и рассеянные локальной неоднородностью.

Рассмотрим теперь карту (z, k_x) и соответствующий коэффициент пропорциональный квадрату подынтегрального выражения для предканонического оператора, выраженный в децибелах:

$$AKX = -20 \lg \sqrt{\left| \frac{J_{k_x 0}}{J_{k_x}(\vec{r})} \right|} \quad (4.15)$$

где

$$J_{k_x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial k_x}{\partial \zeta} & \frac{\partial k_x}{\partial \eta} & \frac{\partial \Gamma}{\partial x} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial \Gamma}{\partial k_y} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & -\frac{\partial \Gamma}{\partial k_z} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \end{vmatrix}, \quad J_{k_x 0} = J_{k_x} \Big|_{t=100/c}. \quad (4.16)$$

На рис. 4.13 приведен график коэффициента (4.15) в зависимости от группового времени в невозмущенном случае.

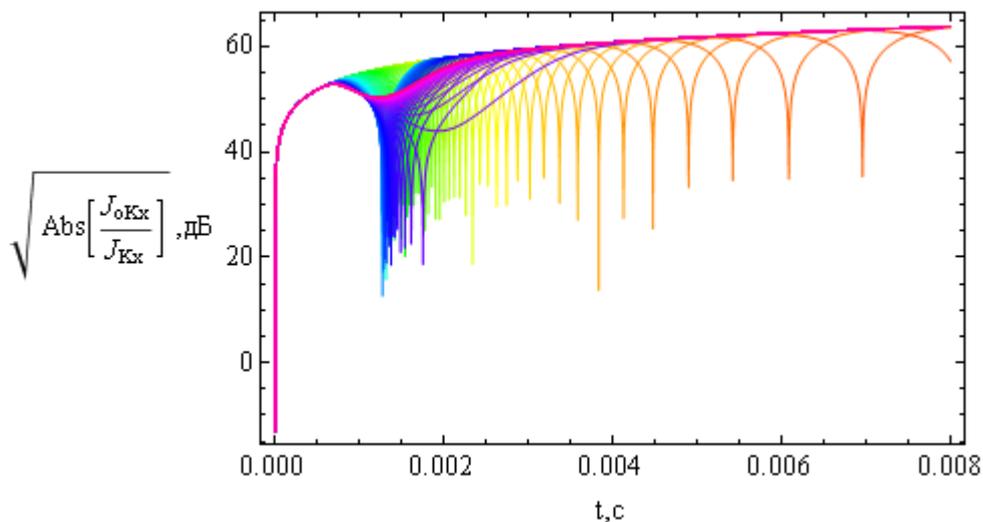


Рис. 4.13.

Амплитудный коэффициент $\sqrt{\left| \frac{J_{k_x 0}}{J_{k_x}} \right|}$; невозмущенный случай.

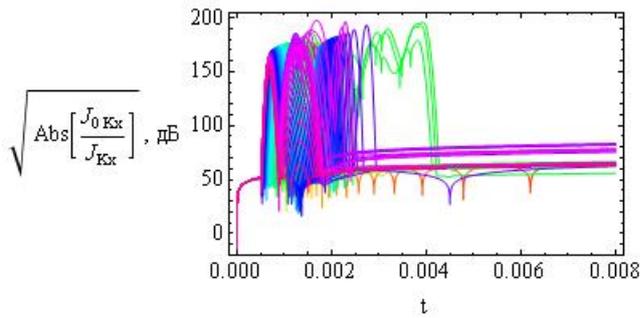


Рис. 4.14 а.

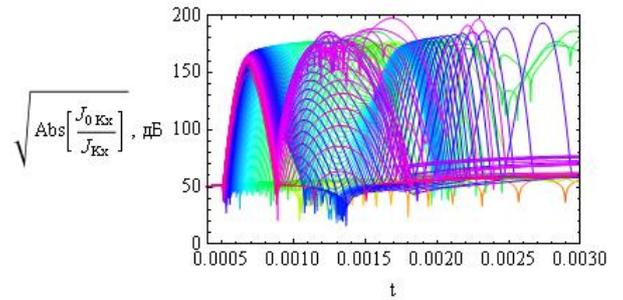


Рис. 4.14 б.

Амплитудный коэффициент $\sqrt{\left| \frac{J_{k_x 0}}{J_{k_x}} \right|}$; возмущенный случай; рис. 4.14 б – фрагмент рис. 4.14 а.

Хотя абсолютные значения по вертикальной оси в два раза меньше чем на рис. 4.11, структуры в целом похожи. Также имеют место провалы, обозначающие положение каустики или её особенности. На рис. 4.14 представлен возмущенный случай. Следует отметить, что хотя со временем все лучи выходят по этому коэффициенту на уровень 60-70дБ (рис. 4.14 а), при прохождении возмущенной области они имеют значительные (до 200 дБ) колебания по ослаблению. Дольше всех на этом уровне сохраняются лучи в волновом канале (рис. 4.14 б), однако после выхода из него коэффициент подает. Провалы в виде «бахромь» показывают положения каустик.

На рис. 4.15, 4.16 приведены в децибелах графики зависимости коэффициента:

$$AKZ = -20 \lg \sqrt{\left| \frac{J_{k_z 0}}{J_{k_z}(\vec{r})} \right|}, \quad (4.17)$$

пропорционального квадрату подынтегрального выражения для предканонического оператора, для карты (x, k_z) вдоль лучей в зависимости от группового времени в невозмущенном и возмущенном случае. В выражении (4.17).

Изучая рис. 4.15 и 4.16 видим, что коэффициент (4.17) увеличивается с ростом угла выхода луча η . Самые верхние лучи соответствуют рассеянию на локальной неоднородности, а наиболее тёмная часть в правых областях рисунков

лучам, образующим каустическое остриё слоя F . Как и в предыдущем слое свисающая вниз «бахрома» обозначает положение каустик.

$$J_{k_z} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & -\frac{\partial \Gamma}{\partial k_x} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial \Gamma}{\partial k_y} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \\ \frac{\partial k_z}{\partial \zeta} & \frac{\partial k_z}{\partial \eta} & \frac{\partial \Gamma}{\partial z} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \end{vmatrix}, \quad J_{k_z 0} = J_{k_z} \Big|_{t=100/c}. \quad (4.18)$$

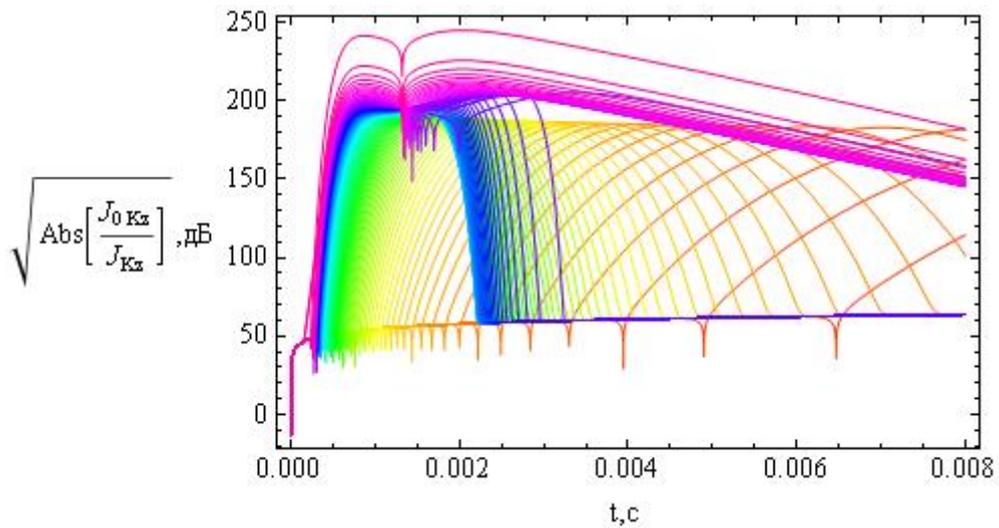


Рис. 4.15.

Амплитудный коэффициент $\sqrt{|J_{k_z 0} / J_{k_z}|}$; невозмущенный случай.

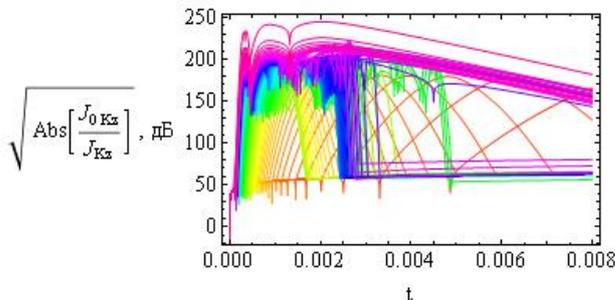


Рис. 4.16 а.

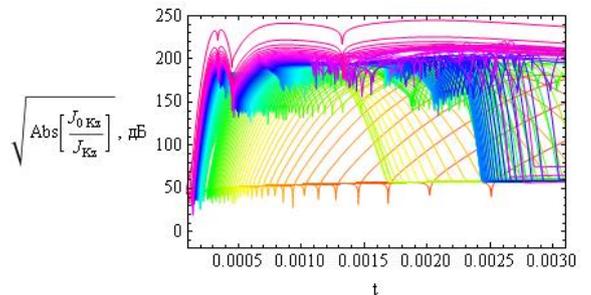


Рис. 4.16 б.

Амплитудный коэффициент $\sqrt{|J_{k_z 0} / J_{k_z}|}$; возмущенный случай;
рис. 4.16 б – фрагмент рис. 4.16 а.

Перейдем теперь к последнему случаю – карте (k_x, k_z) . Коэффициент, пропорциональный квадрату подынтегрального выражения для предканонического оператора, для этой карты (x, k_z) в зависимости от группового времени имеет вид:

$$AKXZ = -20 \lg \sqrt{\left| \frac{J_{k_x k_z 0}}{J_{k_x k_z}(\vec{r})} \right|}, \quad (4.19)$$

где

$$J_{k_x k_z} = \begin{vmatrix} \frac{\partial k_x}{\partial \zeta} & \frac{\partial k_x}{\partial \eta} & \frac{\partial \Gamma}{\partial x} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial \Gamma}{\partial k_y} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \\ \frac{\partial k_z}{\partial \zeta} & \frac{\partial k_z}{\partial \eta} & \frac{\partial \Gamma}{\partial z} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \end{vmatrix}, \quad J_{k_x k_z 0} = J_{k_x k_z} \Big|_{t=100/c}. \quad (4.20)$$

На рис. 4.17 и 4.18 последовательно представлены невозмущенный и возмущенный случаи.

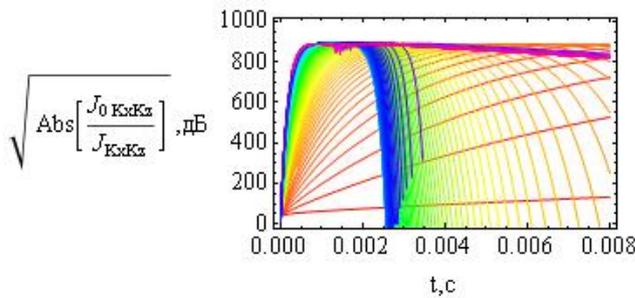


Рис. 4.17.

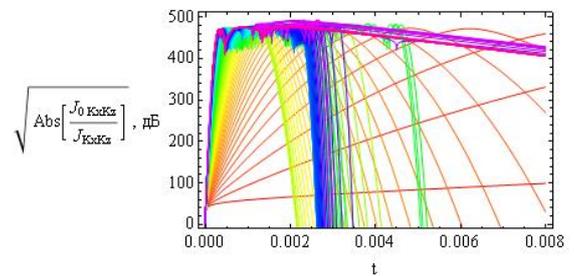


Рис. 4.18.

Амплитудный коэффициент $\sqrt{\left| \frac{J_{k_x k_z 0}}{J_{k_x k_z}} \right|}$; невозмущенный случай – рис. 4.17; возмущенный случай – рис. 4.18; рис. 4.18 б – фрагмент рис. 4.18 а.

Анализируя рис. 4.17, видим, что с увеличением угла выхода луча угол первоначального наклона траектории на рисунке растет, коэффициент вдоль траектории первоначально растет, а затем резко падает, и, наконец, крайний левый нисходящий луч соответствует каустическому острию. «Бахрома» отсутствует, зато коэффициент вдоль каждого луча стремится к $-\infty$. Роль возмущений хорошо видна на рис. 4.18. Появляется «бахрома», так как возникают

дополнительные каустики. Несколько круто спадающих траекторий справа соответствуют лучам из волнового канала. Верхние косые траектории связаны с рассеяние на локальной неоднородности.

Таким образом, в § 4.1–4 сопоставлены проекции 6-мерного фазового пространства в двумерные подпространства, соответствующие различным картам канонического оператора Маслова, в невозмущенном и возмущенном случаях. Рассмотрены особенности (оггибающие) лучевых семейств (каустики), возникающие в этих проекциях. С этой же целью рассчитаны амплитудные множители вдоль лучей для разных карт и проанализированы сингулярности, связанные с касанием лучей каустик. В качестве возмущений ионосферного слоя F рассмотрены три дополнительные структуры: слой E , спорадический слой и локальное эллиптическое возмущение в окрестности максимума главного ионосферного слоя F . Необходимо подчеркнуть, что переход от классического представления решения в лучевой форме в конфигурационном пространстве к интегральному представлению (в частности в виде канонического оператора Маслова) осуществляется ради построения равномерно асимптотического решения и наличие каустик на канонических картах вблизи каустик конфигурационного пространства нежелательно. Рассмотренные подпространства даже в невозмущенном случае содержат каустики, а в ведение таких не очень сложных возмущений делает лучевую и каустическую картину весьма запутанной. Предпочтительнее всего в этом смысле выглядит переход в импульсное подпространство по двум переменным (координату u в данной задаче можно особо не выделять), но при этом увеличивается кратность интеграла. Поэтому остается актуальной проблема тщательного анализа лучевых и каустических структур в конкретных задачах и перехода от интегрального описания к волновой теории катастроф [45, 60, 84, 85, 96, 106, 108, 110, 154, 199], хотя следует отметить, что сшивка различных канонических карт и непосредственное интегрирование также приводит к успешному решению [60, 62, 107, 187, 188].

§ 4.5. Численное моделирование распространения частотно-модулированного излучения электромагнитных волн в ионосфере с учетом отклоняющего поглощения и влияния внешнего магнитного поля Земли

В данном параграфе выполнено моделирование распространения линейно частотно-модулированного сигнала в ионосферной анизотропной плазме и анализ его ослабления за счет расходимости и отклоняющего поглощения [20, 21, 23, 24, 26, 28, 167]. Актуальность данной задачи определена широким использованием электромагнитных волн декаметрового диапазона для обеспечения дальней радиосвязи, радионавигации, радиолокации, загоризонтного радиозондирования, а также для изучения структуры ионосферы – верхней атмосферы Земли. Несмотря на значительный объем исследований в данной области (см., например, [50, 53–55, 72, 91, 104, 121, 191]), распространение частотно модулированных сигналов в ионосферной плазме с учетом магнитного поля Земли изучено ещё недостаточно.

В работах [13, 113, 123, 128, 130, 136] нами рассмотрены особенности лучевого распространения частотно-модулированного излучения в ионосферной плазме. В данном разделе основное внимание уделено исследованию ослабления радиосигнала за счет отклоняющего поглощения и расходимости на примере моделей электронной концентрации и частоты соударений электронов для высокоширотной ночной и дневной ионосферы.

Известно, что эффективная диэлектрическая проницаемость среды для неоднородной анизотропной ионосферы описывается формулой Эпплтона [49]:

$$\varepsilon = 1 - \nu \left(1 - iZ - \frac{u \sin^2 \alpha}{2(1 - \nu - iZ)} \pm \sqrt{\frac{u^2 \sin^4 \alpha}{4(1 - \nu - iZ)^2} + u \cos^2 \alpha} \right)^{-1}, \quad (4.21)$$

в которой параметры ν и u по-прежнему являются отношениями квадрата плазменной частоты и квадрата гирочастоты к квадрату рабочей частоты, соответственно, то есть:

$$v = \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m_e \omega^2}, \quad u = \left(\frac{\omega_H}{\omega} \right)^2 = \frac{e^2 H_0^2}{m_e^2 c^2 \omega^2}. \quad (4.22)$$

В формуле (4.21) как и в предыдущем параграфе, знак плюс соответствует обыкновенной волне, а знак минус – необыкновенной волне. Параметр Z это отношение частоты соударений электронов к круговой рабочей частоте

$$Z = \frac{v_e}{\omega}. \quad (4.23)$$

Величина α – это угол между напряженностью магнитного поля Земли $\vec{H}_0 = (H_{0x}, H_{0y}, H_{0z})$ и волновым вектором \vec{k} . Для применения формулы (4.21) необходимо знать лишь $\cos^2 \alpha$. Квадрат косинуса угла α , определяется выражением:

$$\cos^2 \alpha = \frac{(H_{0x}k_x + H_{0y}k_y + H_{0z}k_z)^2}{H_0^2 |\vec{k}|^2}. \quad (4.24)$$

В расчетах, приведённых ниже, амплитуда магнитного поля считается постоянной. Ориентация напряжённости магнитного поля относительно локальной системы координат задается углами γ и φ :

$$H_{0x} = H_0 \cos \gamma \cos \varphi, \quad H_{0y} = H_0 \cos \gamma \sin \varphi, \quad H_{0z} = H_0 \sin \gamma. \quad (4.25)$$

В случае, когда частотой соударения электронов можно пренебречь и положить $Z=0$, формула для эффективной диэлектрической проницаемости имеет вид (1.56):

$$\varepsilon_{\pm} = 1 - \frac{2\nu(1-\nu)}{2(1-\nu) - u \sin^2 \alpha \pm \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u(1-\nu)^2 \cos^2 \alpha}} \quad (4.26)$$

Примененный в данной работе подход опирается на лучевые методы, являющиеся основными при описании процессов распространения дециметровых радиоволн в различных средах. Основным лучевым методом нахождения лучевых траекторий в анизотропной, неоднородной среде является метод бихарактеристик, опирающийся на систему дифференциальных уравнений (см. [104, 154]):

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{k}}, \quad \frac{d\vec{k}}{d\tau} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{r}}, \quad \frac{dt}{d\tau} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \omega}, \quad \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \quad (4.27)$$

с гамильтонианом:

$$\Gamma = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r(\vec{r}, \vec{k}, \omega) \quad (4.28)$$

Поскольку рассматривается поглощение излучения в среде распространения, то $\varepsilon_r(\vec{r}, \vec{k}, \omega)$ это действительная часть эффективной диэлектрической проницаемости среды распространения.

Для применения системы (4.27)–(4.28), необходимо выделить из диэлектрическую проницаемость (4.21) действительную часть, то есть представить диэлектрическую проницаемость в виде суммы действительной и мнимой части:

$$\varepsilon = \varepsilon_r + i \varepsilon_i. \quad (4.29)$$

Анализируя выражение (4.21), находим что:

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{v(z_\varepsilon + r_\varepsilon \cos \varphi_\varepsilon)}{(z_\varepsilon + r_\varepsilon \cos \varphi_\varepsilon)^2 + (u_\varepsilon + r_\varepsilon \sin \varphi_\varepsilon)^2} \quad (4.30)$$

$$\varepsilon_i = \frac{v(u_\varepsilon + r_\varepsilon \sin \varphi_\varepsilon)}{(z_\varepsilon + r_\varepsilon \cos \varphi_\varepsilon)^2 + (u_\varepsilon + r_\varepsilon \sin \varphi_\varepsilon)^2}. \quad (4.31)$$

В формулах (4.30) и (4.31) введены обозначения:

$$z_\varepsilon = 1 - \frac{(1-v)u \sin^2 \alpha}{2((1-v)^2 + Z^2)}, \quad u_\varepsilon = -Z - \frac{Z u \sin^2 \alpha}{2((1-v)^2 + Z^2)}, \quad (4.32)$$

$$r_\varepsilon = \pm (x_\varepsilon^2 + y_\varepsilon^2)^{1/4}, \quad \varphi_\varepsilon = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{x_\varepsilon}{y_\varepsilon} \right), \quad (4.33)$$

$$x_\varepsilon = \frac{(1-v)Z u^2 \sin^4 \alpha}{2((1-v)^2 + Z^2)^2}, \quad y_\varepsilon = u \cos^2 \alpha + \frac{((1-v)^2 - Z^2) u^2 \sin^4 \alpha}{4((1-v)^2 + Z^2)^2}. \quad (4.34)$$

Если внешнее магнитное поле отсутствует ($H_0 = 0$), то формула для диэлектрической проницаемости (4.31) имеет вид [49]:

$$\varepsilon = 1 - \frac{v}{1+Z^2} - i \frac{vZ}{1+Z^2}. \quad (4.35)$$

Будем считать, что начальный волновой вектор $\vec{k}(0)$ параметрически зависит от угла выхода луча α_0 ($\beta_0=0$):

$$k_x(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \alpha_0 \cos \beta_0, \quad k_y(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \alpha_0 \sin \beta_0, \quad k_z(0) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \alpha_0, \quad (4.36)$$

источник излучения точечный, находится вне магнитоактивной плазмы и расположен в точке с координатами $(0,0,0)$:

$$\vec{r}|_{\tau=0} = (0,0,0). \quad (4.37)$$

Распространение электромагнитной волны изначально осуществляется в плоскости (x, z) . Значение эффективной диэлектрической проницаемости среды в источнике излучения обозначим как ε_0 . Предположим, что сигнал линейно частотно-модулированный, то есть формула для мгновенной частоты заполнения имеет вид [123, 128]:

$$\omega(t) = \omega_0(1 + \delta \eta), \quad t(0) = \eta, \quad f(t) = f_0(1 + \delta t), \quad \delta = \frac{2f_\delta}{f_0 T_u} \quad (4.38)$$

где η – начальное время выхода луча, $f_0 = \omega_0/(2\pi)$ – начальная рабочая частота (Гц), f_δ – девиация частоты (Гц), T_u – длительность импульса (с). В данной работе были приняты следующие значения параметров $f_0=2,5$ МГц, $f_\delta= 3,75$ МГц, $T_u=3$ с, $\delta=1$ с⁻¹. При таких параметрах максимальная частота излучения равна 10 МГц.

В работе рассмотрены две модели высокоширотной ионосферной плазмы: ночная и дневная. Профили электронной концентрации имеют вид, представленный на рис. 4.19 а,б.

Профиль электронной концентрации ночной ионосферы имеет традиционный вид: слой E слабо просматривается, максимум слое F значительно меньше, чем в случае дневной ионосферы. Напротив, профиль дневной ионосферы нетипичен, поскольку в максимуме слоя E значение электронной концентрации выше, чем в слое F .

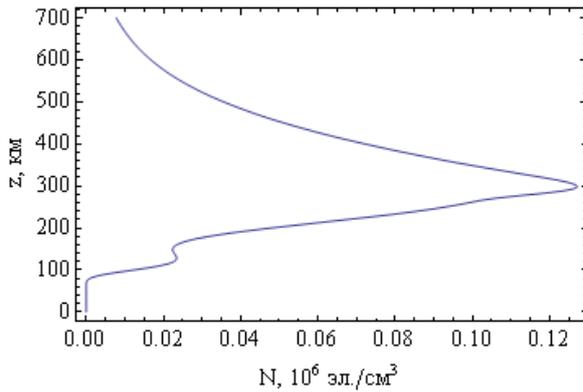


Рис. 4.19 а.

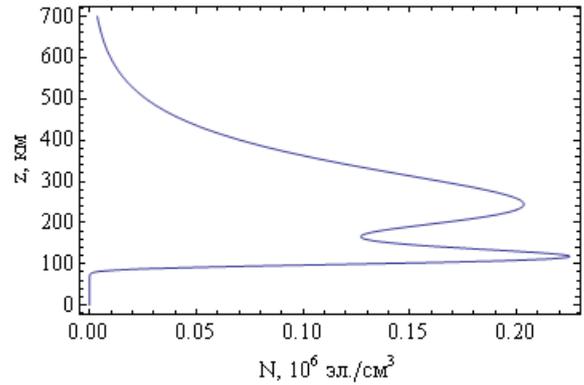


Рис. 4.19 б.

Зависимость электронной концентрации от высоты, рис. 4.19 а – ночная ионосфера, рис. 4.19 б – дневная ионосфера.

На рис. 4.20 приведены зависимости от высоты электронной частоты соударений для ночной и дневной ионосферы.

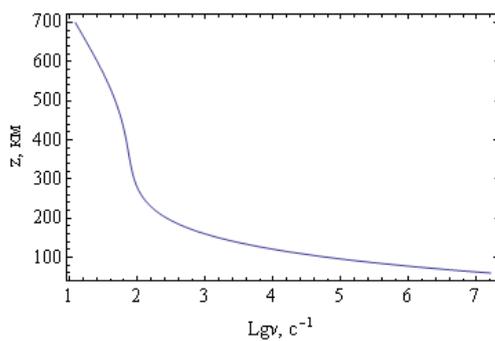


Рис. 4.20 а.

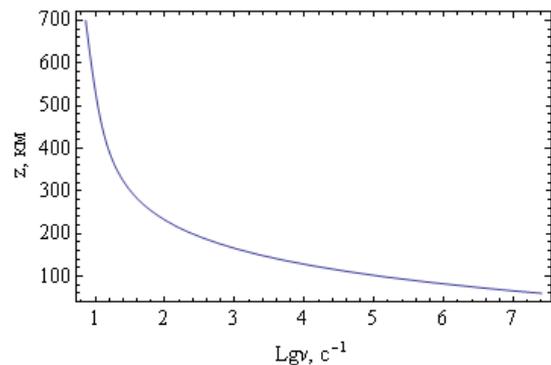


Рис. 4.20 б.

Зависимость электронной частоты соударений от высоты, рис. 4.20 а – ночная ионосфера, рис. 4.20 б – дневная ионосфера.

На небольших высотах эти графики практически совпадают. Существенные отличия начинаются на высотах более 110 км, где роль электронной частоты соударений в поглощении (а тем более в отклонении траектории) невелика.

Представленные на рис. 4.19 и 4.20 профили согласуются с данными, приведенными в [39] (80° с.ш., 30° в.д., март). При вычислении применялись следующие значения параметров: $H_0 = 0,551$ Э, $\zeta = 0$, $\gamma = -83^\circ$.

Рассмотрим последовательно результаты численного моделирования в случае ночной и дневной ионосферы.

На рисунках 4.21 а и б показана лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в плоскости (x, z) , когда источник излучения находится на земле. Угол выхода лучей 45° . В виде фона показана электронная концентрация ионосферы. В районе высоты 115 км просматривается слой E . На высоте порядка 290 км хорошо виден слой $F2$. Сначала все лучи идут по общей траектории. Потом в ионосфере (диспергирующей среде) они расходятся. Низкочастотные лучи отражаются от слоев E и $F2$ и возвращаются на землю, а высокочастотные просачиваются сквозь слой. С увеличением частоты траектории выпрямляются.

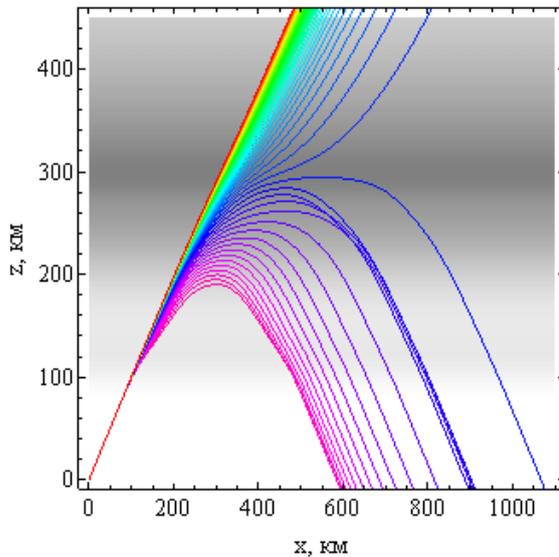


Рис. 4.21 а.

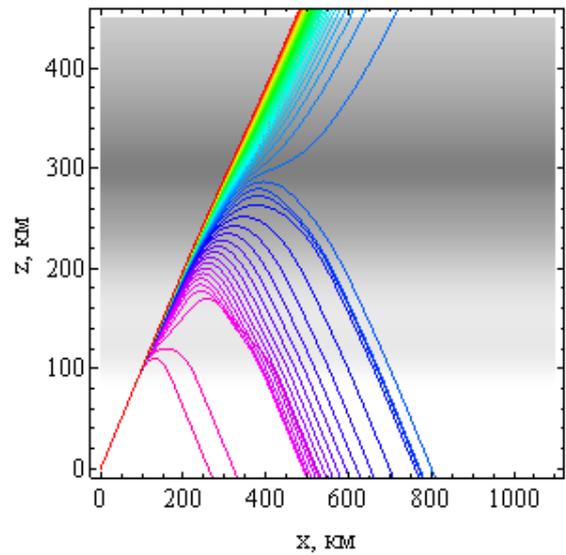


Рис. 4.21 б.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала в плоскости (x, z) . Рис. 4.21 а – обыкновенная волна, рис. 4.21 б – необыкновенная волна.

Лучевые структуры обыкновенной и необыкновенной волны отличаются незначительно, однако, для необыкновенной волны просачивание сквозь ионосферу наступает при более высоких частотах, чем для обыкновенной.

На рисунке 4.22 а и 4.22 б показана лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в плоскости (y, z) .

Лучи, проходящие ионосферный слой $F2$, выше 400 км развертываются параллельно оси z и уходят вверх (высокие частоты). Отражённые лучи (низкие частоты) возвращаются на землю по близким траекториям, так как горизонтальные градиенты (в рамках модели) отсутствуют. Следует отметить, что лучевая структура необыкновенной волны в этой плоскости выглядит компактнее,

чем структура обыкновенной волны и является как бы её зеркальным отражением относительно вертикальной оси.

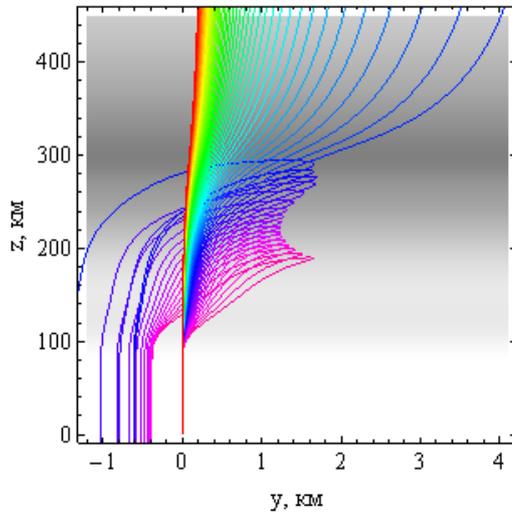


Рис. 4.22 а.

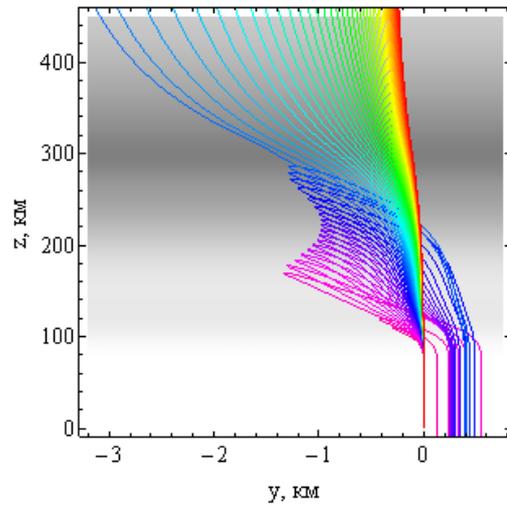


Рис. 4.22 б.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала в плоскости (y, z) . Рис. 4.22 а – обыкновенная волна, рис. 4.22 б – необыкновенная волна.

На рисунке 4.23 а и б показана лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в плоскости (x, y) . Это вид на лучевую структуру сверху.

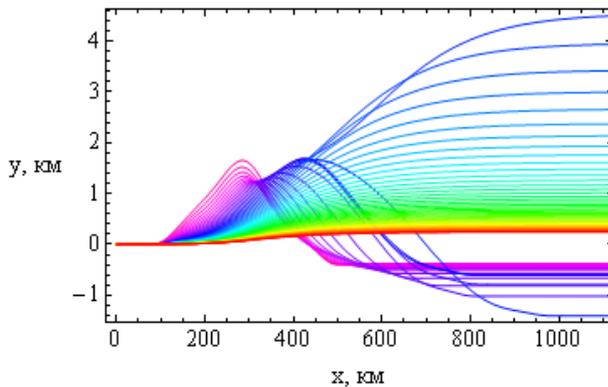


Рис. 4.23 а.

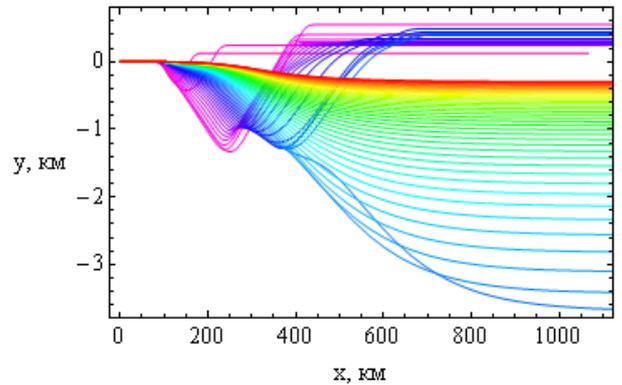


Рис. 4.23 б.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала в плоскости (x, y) . Рис. 4.23 а – обыкновенная волна, рис. 4.23 б – необыкновенная волна.

Структура необыкновенной волны в этой плоскости похожа на «зеркальное отражение» от горизонтальной оси структуры обыкновенной волны. В случае необыкновенной волны распространение сигнала вдоль оси y существенно «компактнее». В этой проекции хорошо видна каустическая структура и её

особенность – катастрофа A_3 . Структура волнового поля в окрестности каустики рассмотрена в [95, 111, 125, 126].

Рассмотрим теперь поглощение вдоль траекторий. Для вычисления поглощения, связанного с частотой соударения электронов, справедлива формула:

$$\frac{d\Psi}{d\tau} = -\varepsilon_i \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (4.39)$$

Следует отметить, что при малых значениях отношения эффективной частоты соударения электронов к круговой рабочей частоте ($Z \ll 1$) мнимая часть эффективной диэлектрической проницаемости пропорциональна произведению частоты соударений на квадрат электронной концентрации: $\varepsilon_i \sim \nu Z \sim N^2 \nu_e$. С уменьшением высоты ниже слоя E электронная концентрация падает, а частота соударений растет (см. рис. 4.19, 4.20), поэтому наибольшее поглощение происходит вблизи нижней границы ионосферы, что и видно на рис. 4.24 и 4.25. На рис. 4.24 а и б приведены зависимости от высоты поглощения Ψ (в Неперах) вдоль траекторий.

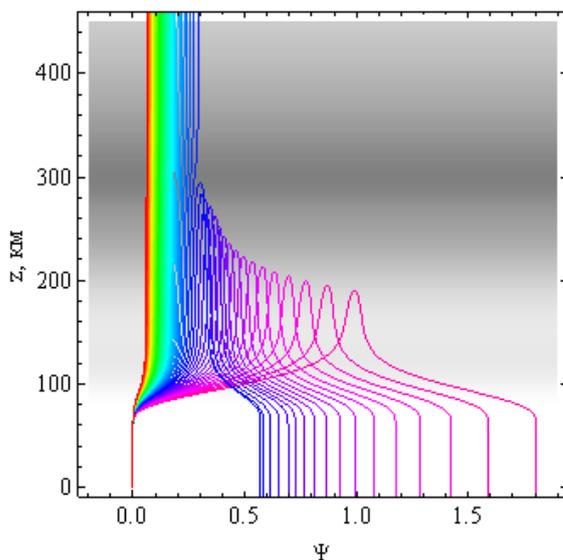


Рис. 4.24 а.

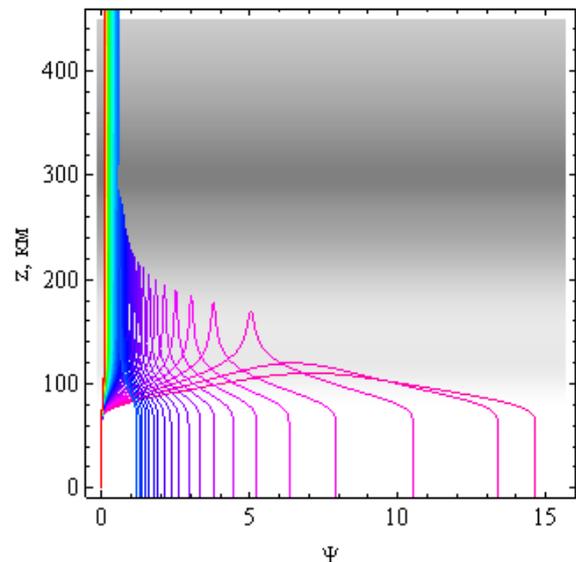


Рис. 4.24 б.

Зависимости поглощения Ψ (в Неперах) вдоль траекторий от высоты. Рис. 4.24 а – обыкновенная волна, рис. 4.24 б – необыкновенная волна.

На рис. 4.24 можно выделить две группы кривых. Для более высоких частот, проходящих ионосферу, поглощение мало. Более низкие частоты

отражаются от слоя. Характерный максимум на кривых — это точка отражения. Эти лучи много времени проводят в нижней ионосфере и испытывают активное поглощение. Естественно, с уменьшением частоты поглощение растет, причем, сопоставляя рис. 4.24 а и 4.24 б, видим, что необыкновенная волна поглощается сильнее обыкновенной.

На рисунках 4.25 а и 4.25 б показано локальное поглощение вдоль лучевых траекторий.

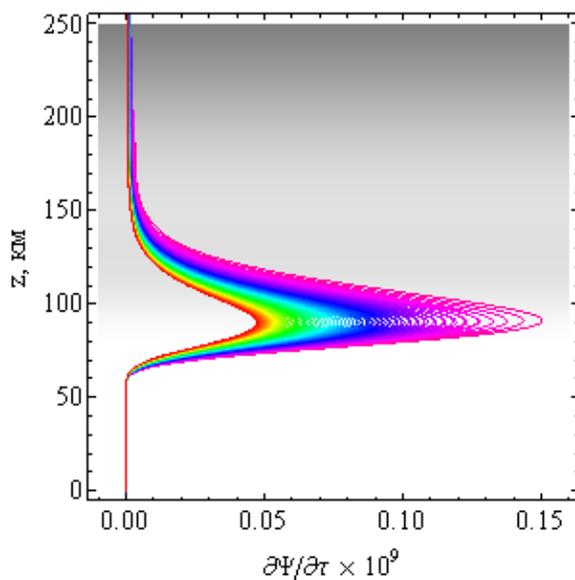


Рис. 4.25 а.

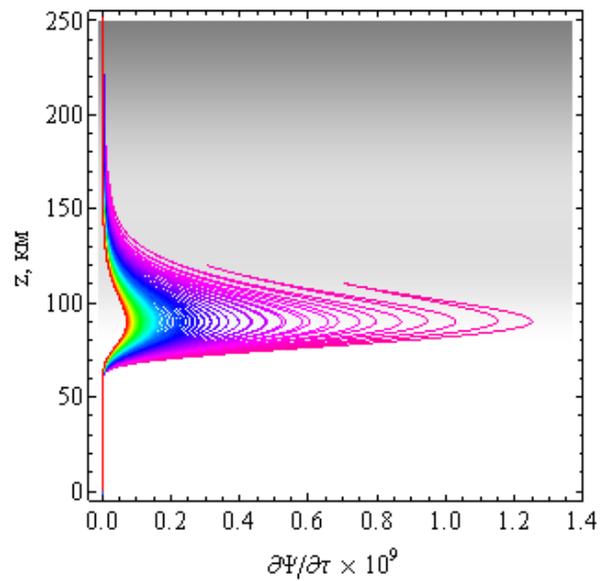


Рис. 4.25 б.

Зависимости локального поглощения вдоль лучевых траекторий от высоты.

Рис. 4.25 а – обыкновенная волна, рис. 4.25 б – необыкновенная волна.

Графики на рис. 4.25 строились в соответствии с формулой (4.39). На рисунках хорошо виден рост поглощения с уменьшением частоты, причем на поглощение влияет небольшая область вдоль нижней границы ионосферы. Если иметь в виду, что ниже 65 км в общепринятых моделях данные о частоте соударений и электронной концентрации обычно не приводятся, то понятно, что эта область изучена недостаточно. Графики для мнимой части эффективной диэлектрической проницаемости мы не приводим, поскольку в силу (4.39) они аналогичны рис. 4.25.

На рисунках 4.26 а и 4.26 б показаны зависимости от высоты действительной части эффективной диэлектрической проницаемости среды вдоль лучевых траекторий.

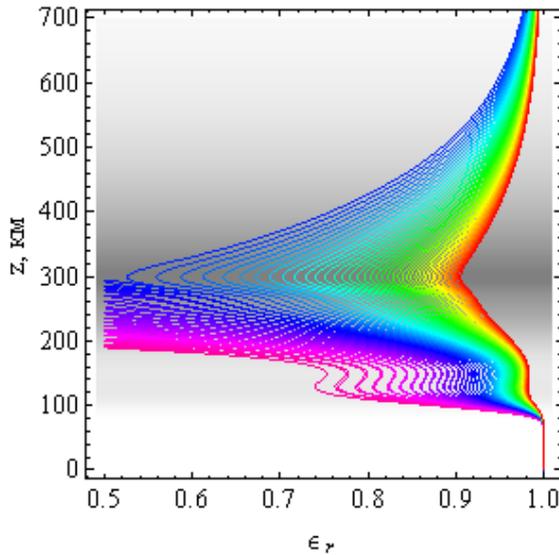


Рис. 4.26 а.

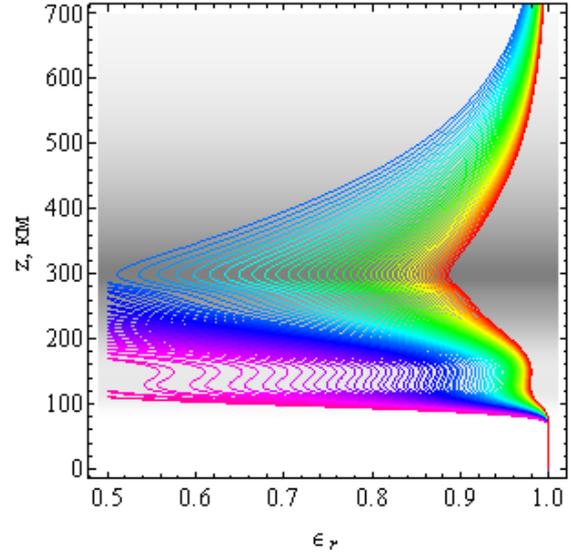


Рис. 4.26 б.

Зависимости действительной части эффективной диэлектрической проницаемости среды вдоль лучевых траекторий от высоты. Рис. 4.26 а – обыкновенная волна, рис. 4.26 б – необыкновенная волна.

Правая часть рисунков ограничена значением 1 (диэлектрическая проницаемость в пустоте), а левая – значением 0,5, что определяется углом выхода лучей α_0 . Поскольку эффективная диэлектрическая проницаемость зависит от координат, а также волнового вектора и частоты сигнала, для каждого луча получается своя зависимость от высоты. Минимумы соответствуют слоям *E* и *F*. Рисунки 4.26 а и 4.26 б для обыкновенной и необыкновенной волн очень похожи. Следует отметить, что, как следует из расчетов, учет эффективной частоты соударений существенно не влияет на траекторию луча. Это понятно, если учесть, что поправка к ε_r пропорциональна $\nu Z^2 \sim N^2 \nu_e^2$.

На рис. 4.27 а и 4.27 б показаны зависимости расходимости вдоль лучевых траекторий от высоты в дБ.

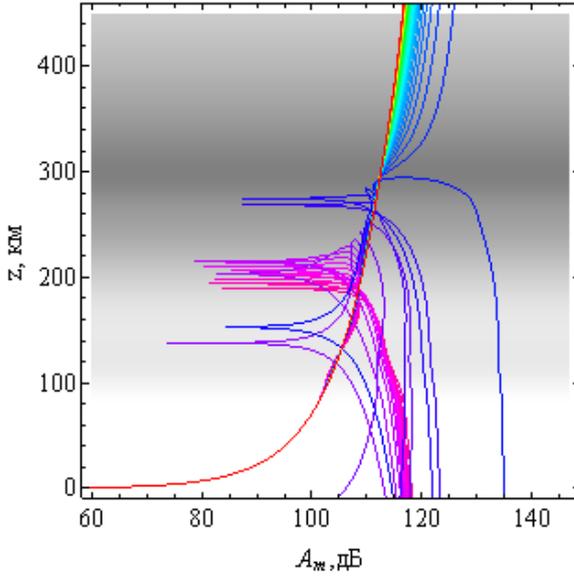


Рис. 4.27 а.

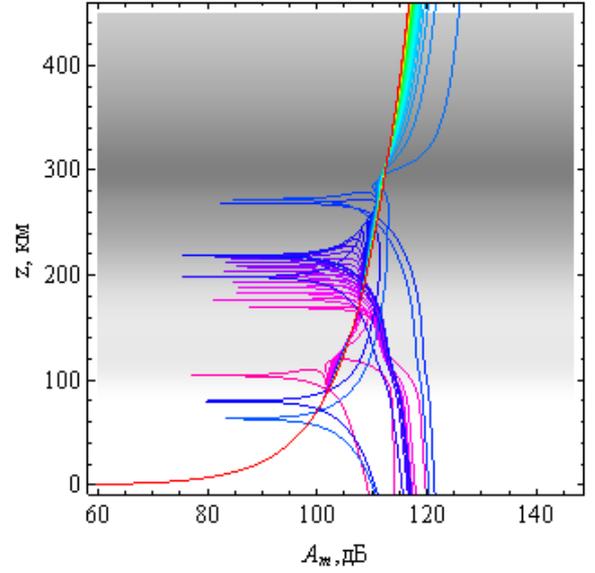


Рис. 4.27 б.

Зависимости расходимости вдоль лучевых траекторий от высоты в дБ. Рис. 4.27 а – обыкновенная волна, рис. 4.27 б – необыкновенная волна.

Для определения расходимости необходимо преобразовать бихарактеристическую систему (4.27) к виду

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \vec{r}} \bigg/ \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(2c^2 \vec{k} - \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \vec{k}} \right) \bigg/ \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega}, \quad (4.40)$$

известному как бихарактеристическая система Д.С. Лукина [65–66], и дополнить её системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{k}_{\alpha_0}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_0} \left(\frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \vec{r}} \bigg/ \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega} \right), & \frac{d\vec{r}_{\alpha_0}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_0} \left(\left(2c^2 \vec{k} - \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \vec{k}} \right) \bigg/ \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega} \right), \\ \frac{d\vec{k}_{\beta_0}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \beta_0} \left(\frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \vec{r}} \bigg/ \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega} \right), & \frac{d\vec{r}_{\beta_0}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \beta_0} \left(\left(2c^2 \vec{k} - \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \vec{k}} \right) \bigg/ \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega} \right), \end{aligned} \quad (4.41)$$

с начальными данными

$$\begin{aligned} k'_{x\alpha_0}(\eta) &= -\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \alpha_0 \cos \beta_0, & k'_{x\beta_0}(\eta) &= -\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \alpha_0 \sin \beta_0, \\ k'_{y\alpha_0}(\eta) &= -\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \alpha_0 \sin \beta_0, & k'_{y\beta_0}(\eta) &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \alpha_0 \cos \beta_0, \\ k'_{z\alpha_0}(\eta) &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \alpha_0, & k'_{z\beta_0}(\eta) &= 0, \end{aligned}$$

$$\vec{r}'_{\zeta}(\eta) = 0, \quad \vec{r}'_{\beta_0}(\eta) = 0. \quad (4.42)$$

то есть решить расширенную бихарактеристическую систему [67, 104, 156].

Получив решение бихарактеристической системы (4.41) можно вычислить якобиан J расходимости лучевой трубки

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha_0} & \frac{\partial x}{\partial \beta_0} & T_1 \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha_0} & \frac{\partial y}{\partial \beta_0} & T_2 \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha_0} & \frac{\partial z}{\partial \beta_0} & T_3 \end{vmatrix}, \quad \vec{T} = \left(2c^2 \vec{k} - \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \vec{k}} \right) / \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega} \quad (4.43)$$

и найти расходимость поля в каждой точке пространства:

$$A_m = 10 \cdot \lg \left| \frac{J_0}{J(\vec{r})} \right|. \quad (4.44)$$

В формуле (4.44) J_0 – якобиан расходимости на условном расстоянии от источника (в расчетах был условно выбран 1 м). Величина $\varepsilon = \varepsilon_r$.

На рис. 4.27 в первую очередь следует отметить траекторию, соответствующую высокочастотному сигналу. Она имеет небольшой излом в окрестности максимума слоя F, что связано с дефокусировкой сигнала. Горизонтальные линии соответствуют каустикам. Это области усиления поля (фокусировки). Из рисунка 4.27 следует, что лучи, соответствующие дальнему распространению, иногда называемые лучами Педерсена, испытывают очень большую расходимость.

С помощью рис. 4.21, 4.24 и 4.27 можно оценить амплитуду сигнала в точке приёма. Как известно, действующая напряжённость электрического поля изотропного излучателя в пустоте определяется формулой:

$$E_{\partial 0} = \frac{\sqrt{30W}}{r} \text{ В/м}, \quad (4.45)$$

где W – мощность в Ваттах, а r – расстояние до источника излучения в метрах. Тогда действующую напряжённость электрического поля в некоторой точке пространства можно оценить по формуле:

$$E_{\partial} = E_{\partial 0} e^{-\psi} 10^{-A_m/20} \text{ В/м}. \quad (4.46)$$

Например, для ночной ионосферы для сигнала с частотой ~ 4 МГц на земле (расстояние 800 км от источника) поглощение будет порядка одного Непера, а расходимость около 120 дБ. Если предположить, что мощность источника 1 кВт, то напряженность поля в этой точке составит 64 мкВ/м.

Рассмотрим теперь аналогичные графики для дневной ионосферы. Угол выхода лучей 30° . На рисунках 4.28 а и б показана лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в плоскости (x, z) .

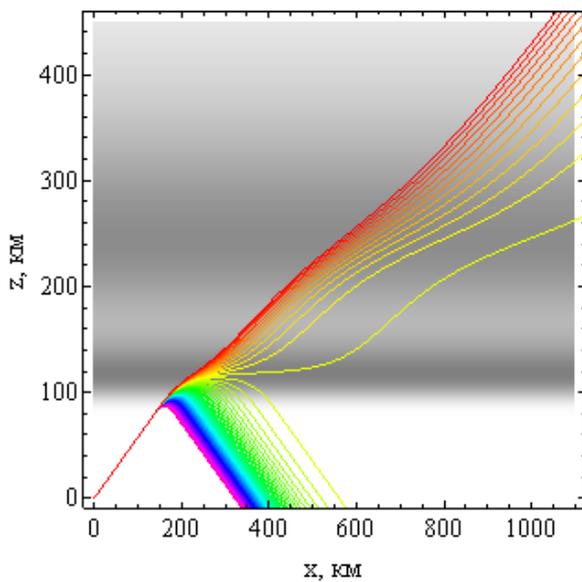


Рис. 4.28 а.

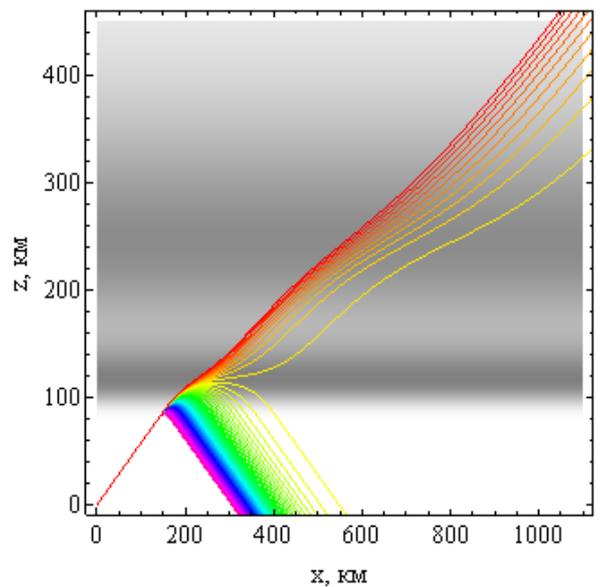


Рис. 4.28 б.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала в плоскости (x, z) . Рис. 4.28 а – обыкновенная волна, рис. 4.28 б – необыкновенная волна.

Поскольку в данном случае максимум слоя E больше максимума слоя F , что является аномалией, лучи отражаются только от слоя E (сравните с рис. 4.21). Если сравнивать с лучевой структурой ночной ионосферы, то дальность связи на одной и той же частоте при фиксированном угле выхода луча заметно уменьшилась (более чем вдвое) и структура стала более упорядоченной.

На рисунке 4.29 а и 4.29 б показана лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в боковой плоскости (y, z) .

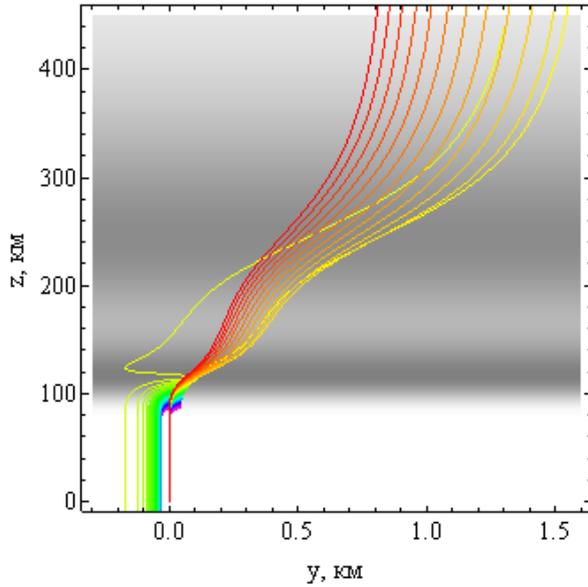


Рис. 4.29 а.

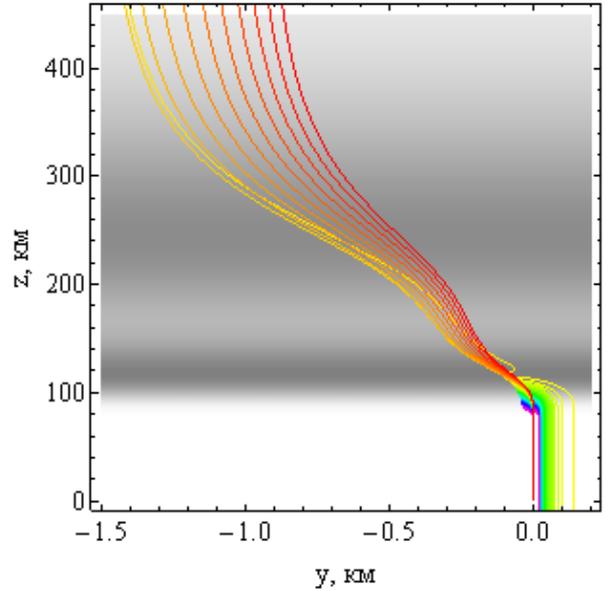


Рис. 4.29 б.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала в плоскости (y, z) . Рис. 4.29 а – обыкновенная волна, рис. 4.29 б – необыкновенная волна.

Главным отличием от ночной ионосферы (см. рис. 4.22) является то, что лучи слабее отклоняются от первоначальной плоскости распространения.

На рисунке 4.30 а и б показан вид «сверху» на лучевую структуру, то есть лучевая структура ЛЧМ радиосигнала в плоскости (x, y) .

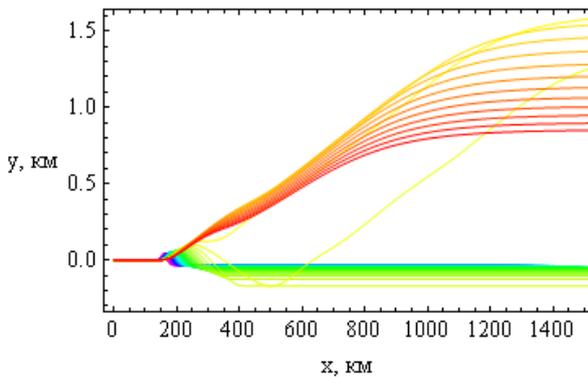


Рис. 4.30 а.

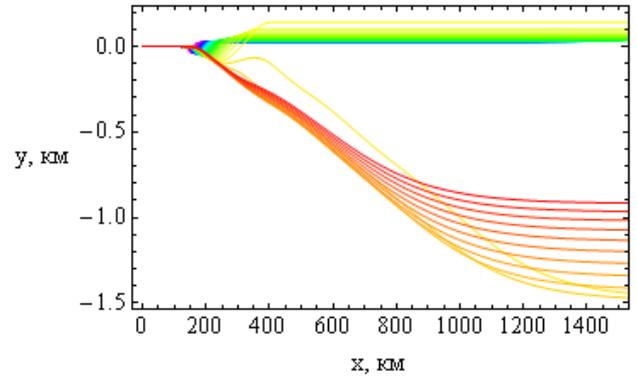


Рис. 4.30 б.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала в плоскости (x, y) . Рис. 4.30 а – обыкновенная волна, рис. 4.30 б – необыкновенная волна.

Если сравнивать траектории в этой плоскости для дневной и ночной ионосферы (см. рис. 4.23) то, опять-таки видим, что отраженные лучи слабее отклоняются от первоначальной плоскости распространения, что согласуется с рис. 4.29.

На рис. 4.31 а и б приведены зависимости от высоты поглощения Ψ вдоль траекторий.

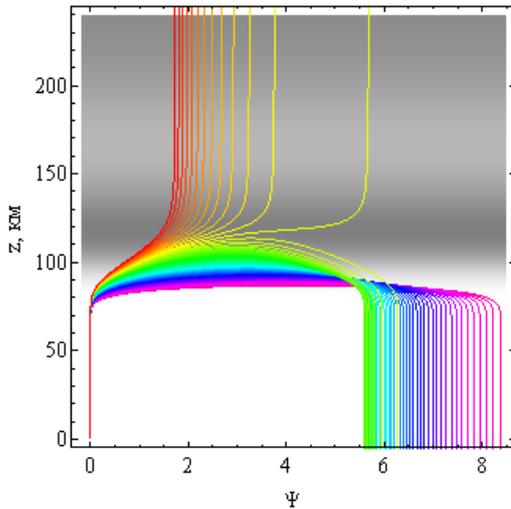


Рис. 4.31 а.

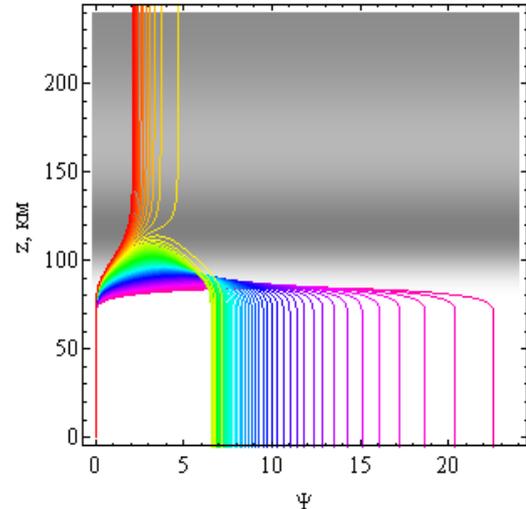


Рис. 4.31 б.

Зависимости поглощения Ψ (в Неперах) вдоль траекторий от высоты. Рис. 4.31 – обыкновенная волна, рис. 4.31 – необыкновенная волна.

Сравнивая поглощение в дневной и ночной ионосфере (рис. 4.31), видим, что оно существенно возросло. Максимальное поглощение для обыкновенной волны приблизительно 8,5 Нп, а для необыкновенной волны $\sim 22,5$ Нп. Для частоты ~ 4 МГц поглощение ~ 7 Нп для обыкновенной волны и ~ 10 Нп для необыкновенной волны.

На рисунках 4.32 а и 4.32 б представлено локальное поглощение вдоль лучевых траекторий.

Если сравнивать ночную (рис. 4.25) и дневную ионосферы, то видно, что пики стали уже и значительно длиннее. Они по-прежнему располагаются вблизи нижней границы ионосферы.

На рисунках 4.33 а и 4.33 б показаны зависимости от высоты действительной части эффективной диэлектрической проницаемости среды вдоль лучевых траекторий.

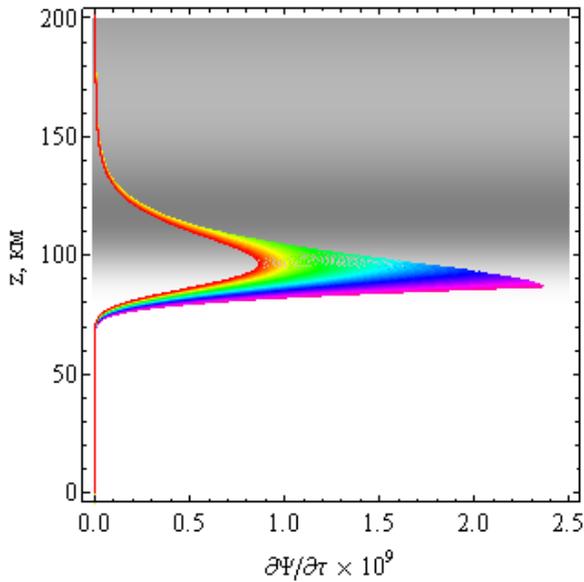


Рис. 4.32 а.

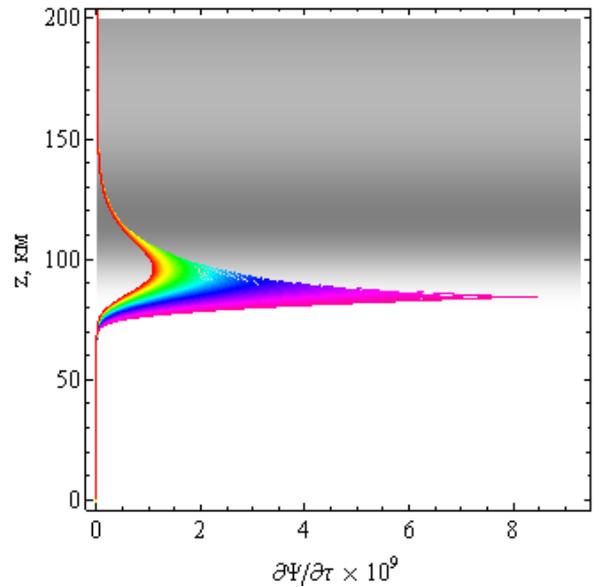


Рис. 4.32 б.

Зависимости локального поглощения вдоль лучевых траекторий от высоты.

Рис. 4.32 а – обыкновенная волна, рис. 4.32 б – необыкновенная волна.

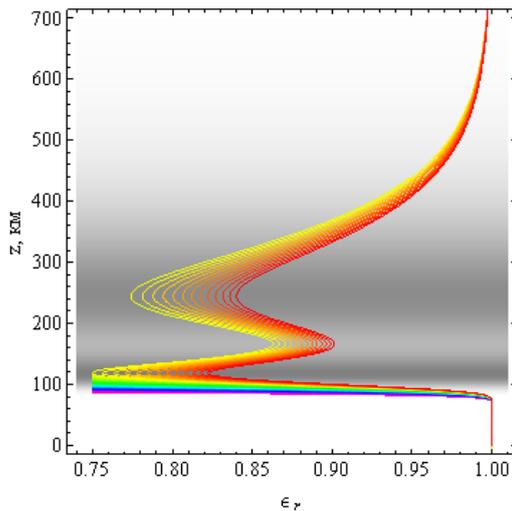


Рис. 4.33 а.

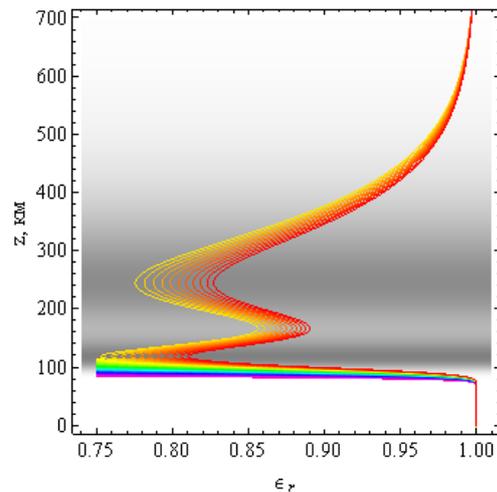


Рис. 4.33 б.

Зависимости действительной части эффективной диэлектрической проницаемости среды вдоль лучевых траекторий от высоты. Рис. 4.33 а – обыкновенная волна,

рис. 4.33 б – необыкновенная волна.

По сравнению с рис. 4.26 характер кривых существенно изменился. Кривые стали компактнее, так как поведение кривых отслеживает поведение электронной концентрации (ср. рис. 4.19 а и 4.19 б).

На рис. 4.34 а и 4.34 б показаны зависимости расходимости вдоль лучевых траекторий от высоты в дБ.

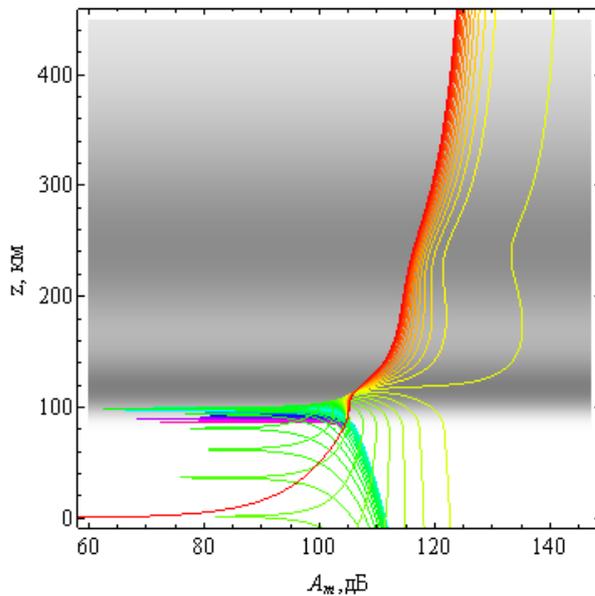


Рис. 4.34 а.

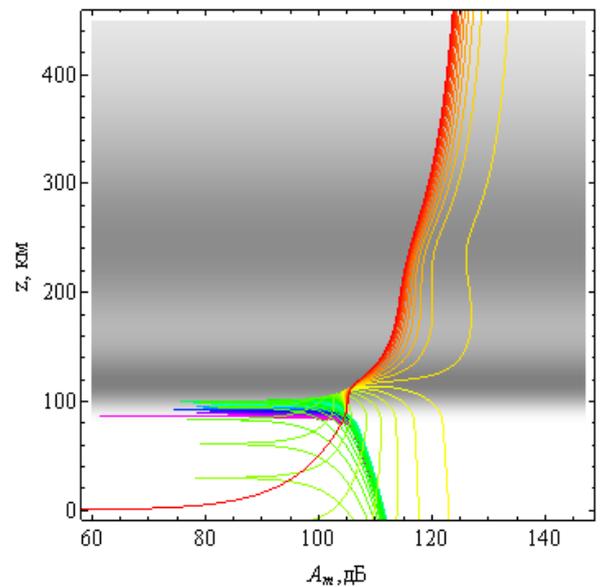


Рис. 4.34 б.

Зависимости расходимости вдоль лучевых траекторий от высоты в дБ.
Рис. 4.34 а – обыкновенная волна, рис. 4.34 б – необыкновенная волна.

Как и в случае ночной ионосферы с помощью рис. 4.28, 4.31 и 4.34 можно оценить амплитуду сигнала в точке приема. Для лучей с частотой ~ 4 , МГц на земле (расстояние ~ 350 км от источника) поглощение будет порядка одного 7 Нп для обыкновенной волны и 10 Нп для необыкновенной волны, а расходимость около 115 или 110 дБ соответственно. Если предположить, что мощность источника 1 кВт, то напряженность поля в этой точке составит 0,28 мкВ/м для обыкновенной волны и 0,025 мкВ/м для необыкновенной волны.

Таким образом, в настоящем параграфе выполнено математическое моделирование распространения радиоволн в ионосфере с учетом магнитного поля Земли, частотной модуляции и влияния частоты соударений электронов на отклоняющее поглощение. Сопоставлены особенности распространения ЛЧМ сигналов в двухслойной анизотропной ионосфере в случае обыкновенной и необыкновенной волны. Исследованы поглощение радиоволны, расходимость вдоль лучей и влияние этих факторов на ослабление амплитуды радиосигнала. Расчеты выполнены для дневной и ночной моделей электронной концентрации высокоширотной ионосферной плазмы. Рассмотрены проекции лучей на разные

координатные плоскости: на плоскость распространения, боковую плоскость и «вид сверху». Для расчетов лучевых характеристик применена бихарактеристическая система дифференциальных уравнений, неизвестными в которой являются координаты луча, компоненты волнового вектора, а также частота и время. Для определения ослабления напряженности электрического поля вдоль траектории рассчитана расходимость лучевого потока на основе расширенной бихарактеристической системы уравнений.

§ 4.6. Численное моделирование структуры волнового поля в окрестности каустики

В настоящем разделе рассмотрена структура волнового поля в окрестности каустики, возникающей в ионосфере вблизи поверхности земли без учета радиоволн, отраженных от поверхности. Актуальность исследования каустических структур и полей на каустиках определяется тем, что огибающие лучевых семейств (каустики) разделяют всё пространство на области с различным характером распространения. Кроме того, поле на каустике заметно возрастает. Моделирование выполнено с учетом поглощения и расходимости радиосигнала в ионосферной изотропной плазме [29, 103, 177].

В работе рассмотрена модель изотропной ионосферной плазмы. Если внешнее магнитное поле отсутствует, то выражение для эффективной диэлектрической проницаемости (4.47) имеет вид [49]:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\nu}{1 + Z^2} - i \frac{\nu Z}{1 + Z^2}. \quad (4.47)$$

В формуле (4.1) которой параметры ν это отношение квадрата плазменной частоты к квадрату рабочей частоты, а параметр Z это отношение частоты соударений электронов к круговой рабочей частоте, то есть:

$$\nu = \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 = \frac{4\pi e^2 N(\vec{r})}{m_e \omega^2}, \quad Z = \frac{\nu_e}{\omega}. \quad (4.48)$$

Выражение (4.47) можно представить в виде:

$$\varepsilon = \varepsilon_r + i\varepsilon_i \quad (4.49)$$

где

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\nu}{1 + Z^2}, \quad \varepsilon_i = -\frac{\nu Z}{1 + Z^2} \quad (4.50)$$

действительная и мнимая части эффективной диэлектрической проницаемости.

Для описания распространения декаметровых радиоволн в ионосфере Земли в данной работе применен лучевой подход – метод бихарактеристик Гамильтона-Лукина. Распространение электромагнитной волны изначально осуществляется в плоскости (x, z) . Источник излучения точечный, находится вне ионосферной плазмы и расположен в начале координат.

Рассмотрена модель высокоширотной ночной ионосферной плазмы (80° с.ш., 30° в.д., март). Профиль электронной концентрации имеет вид, представленный на рис.4.19 а. На рис. 4.20 б приведена зависимость электронной частоты соударений от высоты

Приведём результаты численного моделирования. Рассмотрим распространение монохроматического сигнала с рабочей частотой $f=3,3$ МГц. На рис. 3 показана лучевая структура радиосигнала в плоскости (x, z) , когда источник излучения находится на земле. Угол выхода лучей меняется от 0° до 90° . В виде фона показана электронная концентрация ионосферы. В районе высоты 115 км находится слой E . На высоте порядка 300 км хорошо виден слой F . Лучи с небольшим углом выхода отражаются от слоев E и F и возвращаются на землю, а лучи с большими углами выхода просачиваются сквозь ионосферу.

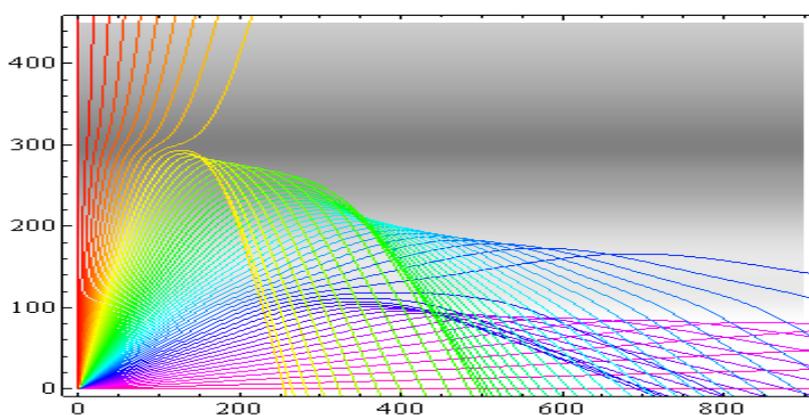


Рис. 4.35. Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала в плоскости (x, z) .

Анализируя рис. 4.35, видим, что семейство лучей образует сложную каустическую структуру, содержащую три каустических острия (волновая катастрофа A_3 [95, 154]). Нижнее каустическое острие связано со слоем E , а два верхних определяются ионосферными слоями, образующими главный максимум. Нижние ветви каустик, формирующих особенности A_3 , опускаются на землю на расстояниях ~ 256 км, ~ 500 км и ~ 770 км. Проанализируем структуру волнового поля в окрестности первой каустики без учета поверхностной волны, влиянием которой на таких расстояниях при выбранной частоте передатчика можно пренебречь. Рассмотрим изотропный излучатель, который на расстоянии r_0 от источника создает электрическое поле E_0 , определяемое формулой:

$$E_0 = \frac{\sqrt{30W}}{r_0} \text{ (В/м)}, \quad (4.51)$$

где W – мощность излучения в Ваттах, а r_0 расстояние в метрах. В данной работе предполагалось, что $W = 1$ кВт, а $r_0 = 1$ м.

Поле правее каустики определяется как сумма вкладов двух лучей:

$$u_g \cong b_1 \cdot \exp(i(\Phi_1 - \pi/2)) + b_2 \cdot \exp(i\Phi_2). \quad (4.52)$$

В формуле (4.52) амплитудные коэффициенты b_j имеют вид:

$$b_j = E_0 \exp[-\psi_j] \sqrt{\left| \frac{J_0}{J_j} \right|}, \quad (4.53)$$

где ψ_j поглощение, определяемое частотой соударения электронов (3), J_j – якобиан расходимости, вычисленный в точке наблюдения, а J_0 – якобиан расходимости, вычисленный на расстоянии r_0 от источника. Величина Φ_j – это фаза, вычисленная, как и поглощение, вдоль лучевой траектории. В наших обозначениях первый луч, это луч, уже коснувшийся каустики. Якобиан расходимости определяется с помощью расширенной бихарактеристической системы Лукина [104].

На каустике лучевое решение обращается в бесконечность, поскольку якобиан J_j обращается в нуль вследствие лучевой фокусировки. Хорошо известно (см., например, [75, 154]), что поле на каустике и её окрестности определяется с помощью функции Эйри и её производной:

$$u_c \cong \exp(i\theta) \left(l_1 \cdot Ai(\lambda) - i l_2 \cdot \frac{dAi(\lambda)}{d\lambda} \right), \quad (4.54)$$

В выражении (4.54) фаза бегущей волны θ и аргумент функции Эйри λ в области двухлучёвости определяются как:

$$\theta = \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2), \quad \lambda = -\frac{3}{2^{4/3}} |\Phi_1 - \Phi_2|^{2/3}, \quad (4.55)$$

а коэффициенты l_1 и l_2 в первом приближении имеют вид:

$$l_1 \cong \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (b_1 + b_2) \sqrt[4]{-3\lambda}, \quad l_2 \cong \frac{3}{2\sqrt{\pi}} (b_1 - b_2) \frac{1}{\sqrt[4]{-3\lambda}}. \quad (4.56)$$

Основная проблема определения поля на каустике связана с необходимостью вычисления в одной точке двух лучей, пришедших по разным траекториям, то есть с решением задачи «пристрелки». Для нижних ветвей каустики это особенно сложно, так как каустика и лучи в её окрестности идут квазипараллельно друг другу и под большим углом к поверхности земли.

Поэтому в работе был реализован иной алгоритм. Сначала определялся угол луча, образующего каустик, лучевое семейство разделялось на два потока: лучи коснувшиеся каустики и не коснувшиеся. Для каждого луча находилась точка его пересечения с поверхностью земли и все его параметры в этой точке. Далее методом наименьших квадратов для каждого потока определялись интерполяционные формулы для фаз и амплитудных коэффициентов, после чего без труда в каждой точке находились два луча и вычислялись лучевое и каустическое поля. Реализация данного алгоритма являлась центральной частью данной работы.

На рис. 4.36 показаны результаты вычислений. Точкой на горизонтальной оси показано положение каустики. Выполнено сравнение поля на каустике (амплитуды), вычисленного по формулам метода равномерной асимптотики с

помощью функции Эйри и её производной (4.54), и с помощью лучевого приближения (4.52). Как и следовало ожидать, лучевое приближение совпадает с равномерной асимптотикой вплоть до склона главного максимума, причем максимальное значение смещено в область света относительно положения каустики. На каустике же амплитуда поля близка по значению к среднему значению амплитуды поля в области света.

Видно, что для оценки поля в максимуме в окрестности каустики с помощью лучевого приближения достаточно найти место на графике, где кривая образует «полочку», прежде чем устремится на бесконечность.

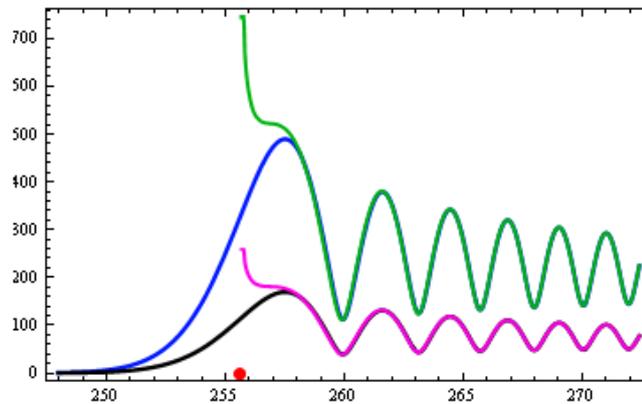


Рис. 4.36. Амплитуда модуля напряжённости электрического в МкВ/м от расстояния вдоль горизонтальной оси в км. Равномерная асимптотика (4.54) – черная и синяя линии, ГО приближение (4.52) – зелёная и фиолетовая линии. Нижний рисунок выполнен с учетом поглощения.

Таким образом, можно оценить поле на каустике по геометрическому (лучевому) приближению, не прибегая к равномерным асимптотикам.

§ 4.7. Выводы

Таким образом, в **главе 4** получены следующие результаты:

1. На основе применения символьных вычислений разработаны численные методы и алгоритмы решения расширенной бихарактеристической системы дифференциальных уравнений для определения расходимости лучевых потоков и положения каустик. Создан комплекс программ, реализующий численные методы

и алгоритмы решения (расширенной бихарактеристической системы) и вычисления необходимых характеристик радиосигналов.

2. Впервые исследованы проекции 6-мерного фазового пространства на смешанные координатно-импульсные подпространства в случае распространения излучения в ионосферной плазме с учетом спорадического слоя и локальной неоднородности. Сопоставлены проекции фазового пространства в двумерные подпространства, соответствующие различным картам канонического оператора Маслова, в невозмущенном и возмущенном случаях. Рассмотрены особенности (огнивающие) лучевых семейств (каустики), возникающие в этих проекциях.

3. Разработана методика расчета амплитудных множителей вдоль лучей для разных карт, выполнены вычисления и проанализированы сингулярности, связанные с касанием лучей каустик. В качестве возмущений ионосферного слоя F рассмотрены три дополнительные структуры: слой E , спорадический слой и локальное эллиптическое возмущение в окрестности максимума главного ионосферного слоя F .

4. Показано, что переход от классического представления решения в лучевой форме в конфигурационном пространстве к интегральному представлению (в частности, в виде канонического оператора Маслова) осуществляющийся ради построения равномерно асимптотического решения, в сложных случаях приводит к образованию каустик на канонических картах вблизи каустик конфигурационного пространства, что нежелательно. Установлено, что смешанные координатно-импульсные подпространства даже в невозмущенном случае содержат каустики, а в ведение даже не очень сложных возмущений делает лучевую и каустическую картину весьма запутанной. Предпочтительнее в этом смысле выглядит переход в чисто импульсное подпространство по двум переменным, но при этом увеличивается кратность интеграла.

5. Выполнено математическое моделирование влияния отклоняющего поглощения на распространение радиоволн в ионосфере с учетом магнитного поля Земли, частотной модуляции и частоты соударений электронов.

Сопоставлены особенности распространения ЛЧМ сигналов в двухслоевой анизотропной ионосфере в случае обыкновенной и необыкновенной волны. Исследованы поглощение радиоволны и расходимость вдоль лучей и влияние этих факторов на ослабление амплитуды радиосигнала. Расчеты выполнены для дневной и ночной моделей электронной концентрации высокоширотной ионосферной плазмы. Для расчетов лучевых характеристик применялась бихарактеристическая система дифференциальных уравнений, а для определения ослабления напряженности электрического поля вдоль траектории рассчитывалась расходимость лучевого потока на основе расширенной бихарактеристической системы уравнений. Разработана методика оценки абсолютных величин напряженности электромагнитного поля на каустике с учетом расходимости и поглощения.

ГЛАВА 5. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ВОЛНОВАЯ ТЕОРИЯ КАТАСТРОФ ЧАСТОТНО МОДУЛИРОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Настоящая глава посвящена применению теории краевых катастроф для описания распространения электромагнитного излучения в нестационарном случае [87, 89, 138, 139]. Известно, что при распространении в диспергирующей среде радиоимпульс согласно пространственно-временной геометрической теории дифракции может быть представлен как суперпозиция пространственно-временных геометрооптических лучей и пространственно-временных краевых лучей, образующихся начале и конце радиоимпульса [5, 7, 98]. Эти лучи, фокусируясь в плазме, образуют особенности типа краевых катастроф.

§ 5.1. Применение теории катастроф для описания пространственно-временной структура частотно-модулированного сигнала в плазме

Рассмотрим условия образования простых краевых особенностей: \mathbf{V}_{N+1} , \mathbf{C}_{N+1} , \mathbf{F}_4 [9] при распространении частотно-модулированного радиоимпульса в однородной диспергирующей среде (холодной плазме с плазменной частотой ω_p). Будем считать, что источник излучения помещен в начало координат. Тогда решение задачи может быть представлено в виде интеграла (см., например, [85, 98, 112])

$$U(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\omega) U_o(\eta) \exp \left[i\omega \left(t - \eta - \frac{R}{c} (\varepsilon(\omega))^{1/2} \right) \right] d\omega d\eta, \quad (5.1)$$

где $\vec{r} = (X, Y, Z)$; $R = |\vec{r}|$; c – скорость света; $\varepsilon(\omega) = 1 - (\omega_p / \omega)^2$ – эффективная диэлектрическая проницаемость;

$$U(\vec{r}, t) \Big|_{R=R_o, t=\eta} = U_o(\eta) = \frac{1}{R_o} B(\eta) \exp \{ i\omega (\eta + f(\eta)) \};$$

$$R_o \rightarrow 0, \quad \omega_o \gg \omega_p; \quad (5.2)$$

а

$$K(\omega) = |K(\omega)| \exp \{ i\psi(\omega) \} \quad (5.3)$$

частотная характеристика фильтра приемного устройства. Для простоты рассмотрим полубесконечный радиосигнал. Тогда

$$B(\eta) = \chi(\eta)A(\eta), \quad \chi(\eta) = 1, \eta \geq 0; \quad \chi(\eta) = 0, \eta < 0; \quad (5.4)$$

$A(\eta)$ – огибающая радиосигнала; ω_o – несущая частота; $f(\eta)$ – гладкая функция, характеризующая частотную модуляцию радиосигнала.

Критическими точками интеграла (5.1) являются седловые точки фазовой функции, а также, в силу (5.4), её сужения. Фазовая функция, определяющая совместно со своими сужениями лучевые семейства, описывающие распространение радиосигнала в пространстве-времени (ПВ), имеет вид:

$$\Phi(\eta, \omega, \vec{r}, t) = \psi(\omega) + \omega \left(t - \eta - \frac{R}{c} (\varepsilon(\omega))^{1/2} \right) + \omega_o (\eta + f(\eta)). \quad (5.5)$$

Семейство ПВ геометрооптических (ГО) лучей определяется системой уравнений:

$$\partial\Phi/\partial\eta = \Phi_1 = -\omega + \omega_o + \omega_o f_1(\eta) = 0, \quad (5.6)$$

$$\partial\Phi/\partial\omega = \Phi_2 = t - \eta - \frac{R}{c} (\varepsilon(\omega))^{-1/2} + \psi_1(\omega) = 0, \quad (5.7)$$

где $\psi_j = \partial\psi/\partial\omega_j$, $f_j = \partial f/\partial\eta_j$. Функция $f(\eta)$ с физической точки зрения характеризует компрессию и декомпрессию радиосигнала, а с точки зрения теории катастроф она ответственна за ПВ каустическую фокусировку ГО лучей. Выпишем вторые производные фазовой функции Φ :

$$\partial^2\Phi/\partial\eta^2 = \Phi_{11} = \omega_o f_2(\eta) = 0, \quad (5.8)$$

$$\partial^2\Phi/\partial\eta\partial\omega = \Phi_{12} = -1 \neq 0, \quad (5.9)$$

$$\partial^2\Phi/\partial\omega^2 = \Phi_{22} = \frac{R}{c} \frac{\omega_p^2}{\omega^3} (\varepsilon(\omega))^{-3/2} + \psi_2(\omega) = 0. \quad (5.10)$$

Кроме того, учтем, что

$$\Phi_{1^k 2^n} = 0, \quad n > 1, \quad k \geq 1; \quad \Phi_{1^n} = \omega_o f_n(\eta), \quad n \geq 2. \quad (5.11)$$

Из (4.9) следует, что максимальный коранг матрицы Гесса вторых производных функции Φ равен 1. Поэтому в данной задаче возможны только одномерные каспоидные ($\Sigma = A_N$) фокусировки ПВ ГО лучей [112]. Если функция f зависит от начального времени выхода сигнала η линейно, а $\psi = 0$, фокусировки ПВ ГО лучей не возникает. Если

$$f(\eta) = \frac{1}{2} a \eta^2, \quad \psi = 0,$$

то положение каустики R_c , t_c как функции параметра η определяются равенствами:

$$R_c = \frac{c}{a} (\varepsilon_c)^{3/2} \frac{\omega_c^3}{\omega_o \omega_p^2}; \quad t_c = \eta + \frac{R_c}{c} (\varepsilon_c)^{-1/2}; \quad \varepsilon_c = \varepsilon(\omega_c); \quad \omega_c = \omega_o (1 + a\eta).$$

Гладкая каустика ПВ ГО лучей рассмотрена в различных работах (см., например, в [38, 76, 77, 182, 185, 203]). На рис. 5.1 показаны ПВ ГО лучи (тонкие линии) и каустика с краем (толстая линия).

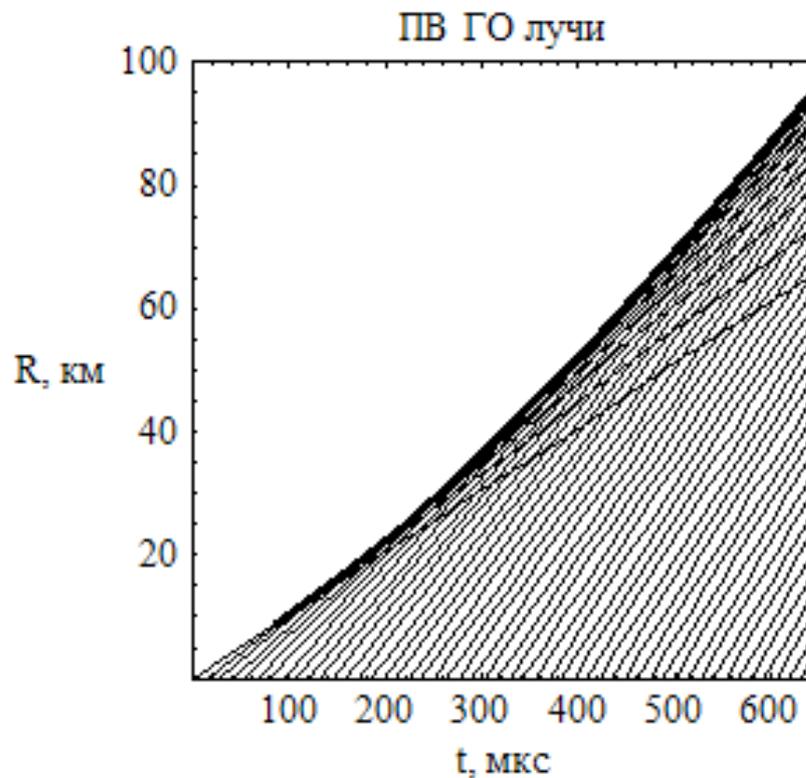


Рис. 5.1. Пространственно-временные лучи и каустика.

Параметры, выбранные при расчёте: $a=1500 \text{ c}^{-1}$, $\omega_0=2\pi f_0$, $f_0=13,5 \text{ МГц}$, $\omega_p=2\pi f_p$, $f_p \approx 12,7 \text{ МГц}$. Особенность соответствует катастрофе \mathbf{B}_3 . ПВ краевые лучи на рис. 5.1 не показаны.

Рассматривая ПВ фокусировку ГО лучей, мы игнорировали вклад ПВ краевых лучей (см., например, [4, 77, 185]), порождаемых начальной точкой полубесконечного радиоимпульса. Это возможно либо, когда $B(\eta)$ гладкая плавная функция и краевые лучи отсутствуют, либо, с некоторой степенью точности, вдали от границы "свет-тьнь" ПВ ГО лучей, поскольку вклад краевых лучей обычно существенно меньше вклада ГО лучей.

Семейство краевых лучей определяется из сужения функции Φ на границу $\eta=0$ (то есть на начало радиоимпульса):

$$\partial\Phi|_{\eta=0}/\partial\omega = t - \frac{R}{c\sqrt{\varepsilon}} + \psi_1 = 0.$$

Очевидно, что при $\psi_2(\omega)=0$ краевые лучи не фокусируются ($\Sigma_E = A_1$). Равномерный учет вклада краевых лучей был рассмотрен, например, в [5, 173]. В терминах волновой теории катастроф особенности, возникающие в окрестности границы "свет-тьнь" принадлежат серии $\mathbf{B}_{N+1}=(A_N, A_1)$, и поэтому равномерная асимптотика выражается по формуле:

$$U(\vec{r}, t) = e^{i\theta} \left\{ (l_1)_g I^{\mathbf{B}_{N+1}}(\vec{\lambda}) + \sum_{k=2}^N (l_k)_g \left(\frac{\partial I^{\mathbf{B}_{N+1}}}{\partial \lambda_{k-1}} \right) + (l_1)_E \right\}.$$

Здесь и ниже θ – фаза бегущей волны, $(l_j)_g$ и $(l_j)_E$ ГО и краевые коэффициенты асимптотического разложения, λ_j – коэффициенты универсальной деформации, а

$$I^{\mathbf{B}_{N+1}}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \int_0^{+\infty} \exp\{i(z^{N+1} + \lambda_N z^N + \dots + \lambda_1 z)\} dz$$

специальная функция (СВК) краевой волновой катастрофы \mathbf{B}_{N+1} .

Если теперь наоборот частотная модуляция отсутствует ($f(\eta)=0$), а $\psi(\omega)$ – фазовая характеристика фильтра не равна нулю, то может возникнуть фокусировка краевых лучей каспоидной серии, а поскольку ПВ ГО лучи не

фокусируются, краевая особенность будет типа $C_{N+1}=(A_1, A_N)$. В частности,

если $\psi(\omega)=\frac{1}{2}a(\omega-\omega_o)^2$, уравнение каустики в параметрической форме (параметр ω) имеет вид [112]:

$$R=-ca\frac{\omega^3}{\omega_p^2}(\varepsilon)^{3/2}, \quad \omega_p < \omega < +\infty, \quad \omega_p < \omega_o; \quad t=-a\left(\omega-\omega_o+\varepsilon\frac{\omega^3}{\omega_p^2}\right), \quad a < 0.$$

ПВ краевые лучи в отсутствии влияния фильтра приемного устройства показаны на рис. 5.2. Видно, что все лучи выходят из точки, соответствующей началу радиоимпульса, и не образуют каустики. На рис. 4.3 показаны лучи и их огибающая (каустика) в случае, когда фазовая характеристика фильтра не равна нулю. ПВ ГО лучи на этих рисунках не показаны. Такой тип фокусировки является результатом взаимодействия сигнала с фильтром.

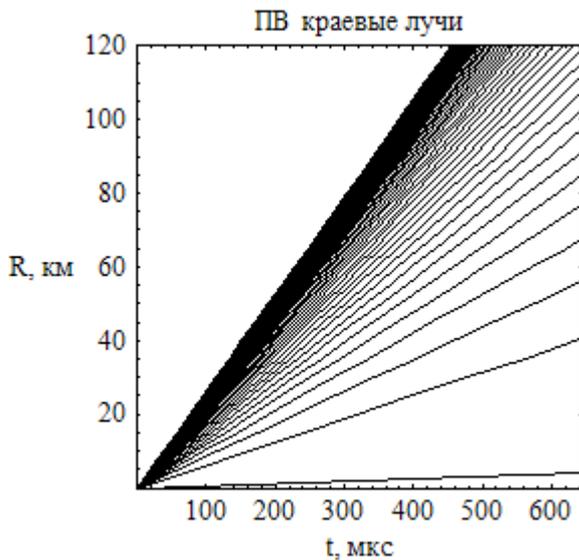


Рис. 5.2

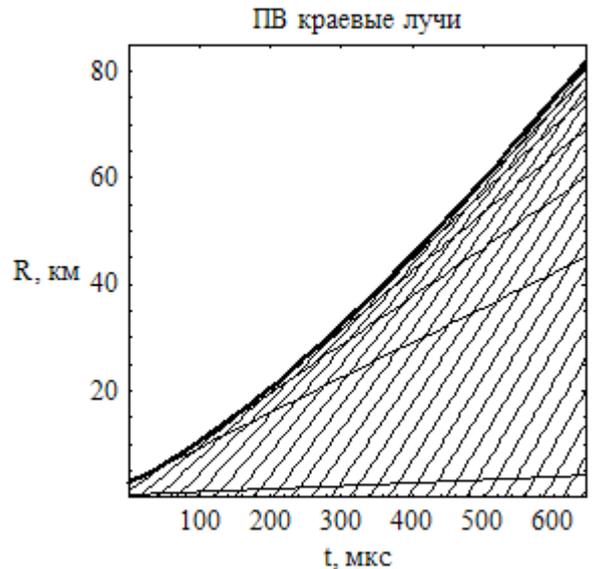


Рис. 5.3

$\omega_0=2\pi f_0, f_0=13,5$ МГц, $\omega_p=2\pi f_p, f_p \approx 12,7$ МГц,
на рис. 4.2 $a=0$, а на рис. 4.3 $a=-1,4 \cdot 10^{-11} c^2$,

В работах [5, 85, 112] была построена равномерная асимптотика для этого случая:

$$U(\vec{r}, t) = e^{i\theta} \left\{ (l_1)_g I^{C_{N+1}}(\lambda_1 \dots \lambda_N) + (l_1)_E I^{A_N}(\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}) + \sum_{k=1}^{N-1} (l_k)_E \frac{\partial I^{A_N}}{\partial \lambda_k} \right\},$$

где:

$$I^{C_{N+1}}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \int_0^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i(zx + x^{N+1} + \lambda_N z + \lambda_{N-1} x^{N-1} + \dots + \lambda_1 x)\} dx$$

СВК краевой волновой катастрофы C_{N+1} , а

$$I^{A_{N+1}}(\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i(x^{N+1} + \lambda_{N-1} x^{N-1} + \dots + \lambda_1 x)\} dx$$

специальная функция сужения, то есть СВК основной волновой катастрофы A_{N+1} .

Пусть теперь одновременно и $f(\eta) \neq 0$, и $\psi(\omega) \neq 0$. Тогда могут возникнуть каустики и их особенности как ПВ ГО лучей, так и краевых лучей. Положение каустики ПВ ГО лучей в пространстве $R^3 \times T$ определяется системой из трех уравнений с двумя параметрами η и ω : (5.6) (5.7) и (5.12)

$$\omega_o f_2(\eta) \left(\psi_2(\omega) + \frac{R}{c} \frac{\omega_p^2}{\omega^3} (\varepsilon(\omega))^{-3/2} \right) = 1, \quad (5.12)$$

а каустика ПВ краевых лучей системой из двух уравнений с одним параметром ω :

$$\psi_2(\omega) + \frac{R}{c} \frac{\omega_p^2}{\omega^3} (\varepsilon(\omega))^{-3/2} = 0; \quad t = \eta + \frac{R}{c} (\varepsilon(\omega))^{-1/2} - \psi_1(\omega). \quad (5.13)$$

Из формул (5.6–5.7), (5.12–5.13) можно установить, что каустики краевых лучей никогда не пересекаются с каустикой ГО лучей. Поэтому особые центральные сечения краевых катастроф (помимо B_{N+1} и C_{N+1}) в данной задаче не образуются. Однако образуются сечения каустических структур катастроф типа $\Sigma = (A_{N_g}, A_{N_E})$ с такими N_g и N_E , которые допустимы в соответствии с классификацией краевых катастроф (см. таблицы 1.1 и 1.2, а также [85, 109]).

В частности, если

$$\psi(\omega) = \frac{1}{2} \alpha (\omega - \omega_o)^2, \quad f(\eta) = \frac{1}{2} b \eta^2 \quad (5.14)$$

возникает сечение краевой катастрофы $F_4 = (A_2, A_2)$. На рис. 5.4 и 5.5 показаны ПВ ГО лучи (сплошные тонкие линии), каустика ПВ ГО лучей (толстая линия с

точки обрыва), ПВ краевые лучи (пунктир) и каустика краевых лучей (толстая непрерывная линия). Предельный ГО луч касается как каустики краевых лучей, так и каустики ГО лучей, но в разных точках:

$$R_{cg} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{b\omega_0} - \alpha \right); \quad R_{cE} = -\frac{\alpha}{\beta}; \quad \alpha < 0, \quad R_{cg} > R_{cE}; \quad \beta = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^3} (\varepsilon(\omega_0))^{-3/2}.$$

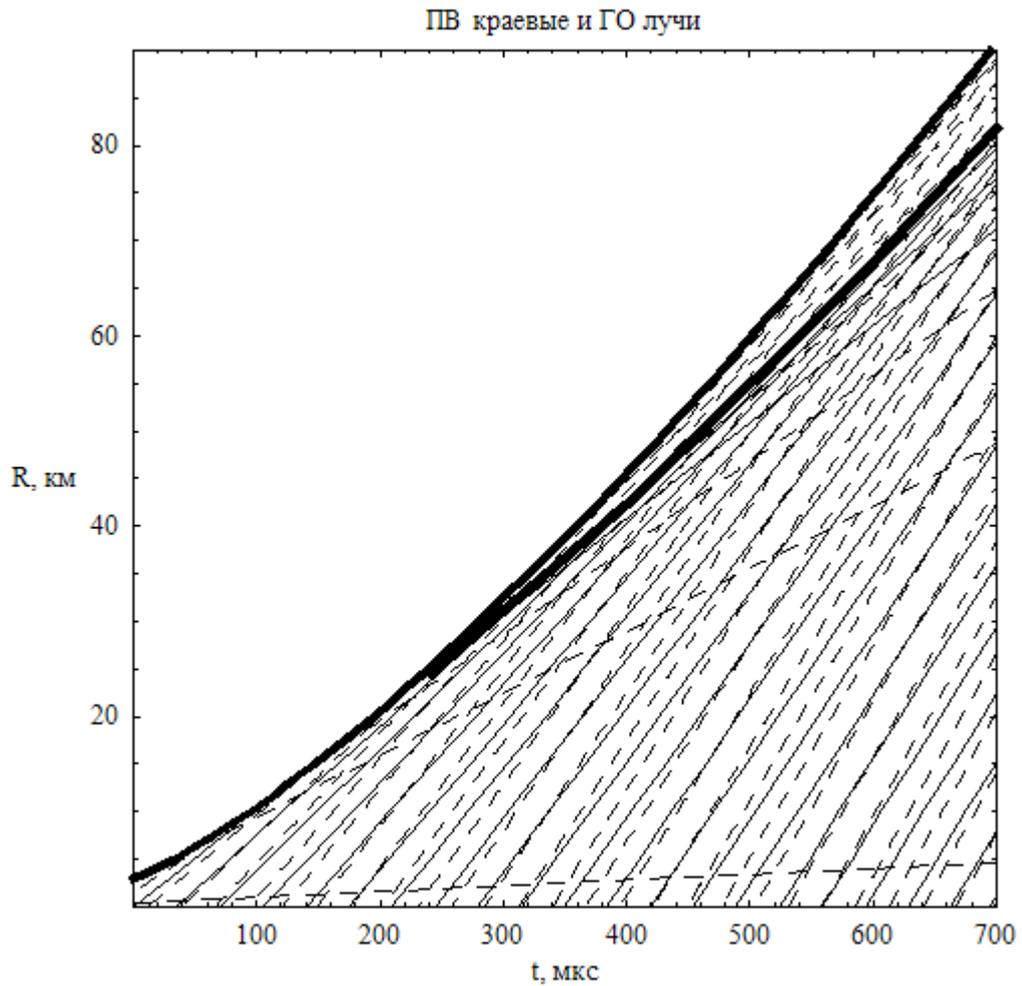


Рис. 5.4

$$b=1500 \text{ c}^{-1}, \quad \alpha=-1,4 \cdot 10^{-11} \text{ c}^2, \quad \omega_0=2\pi f_0, \quad f_0 = 13,5 \text{ МГц}, \quad \omega_p=2\pi f_p, \quad f_p \approx 12,7 \text{ МГц}$$

Рис. 5.5 является фрагментом рис. 5.4. Видно, что в этом сечении каустики не пересекаются.

ПВ краевые и ГО лучи

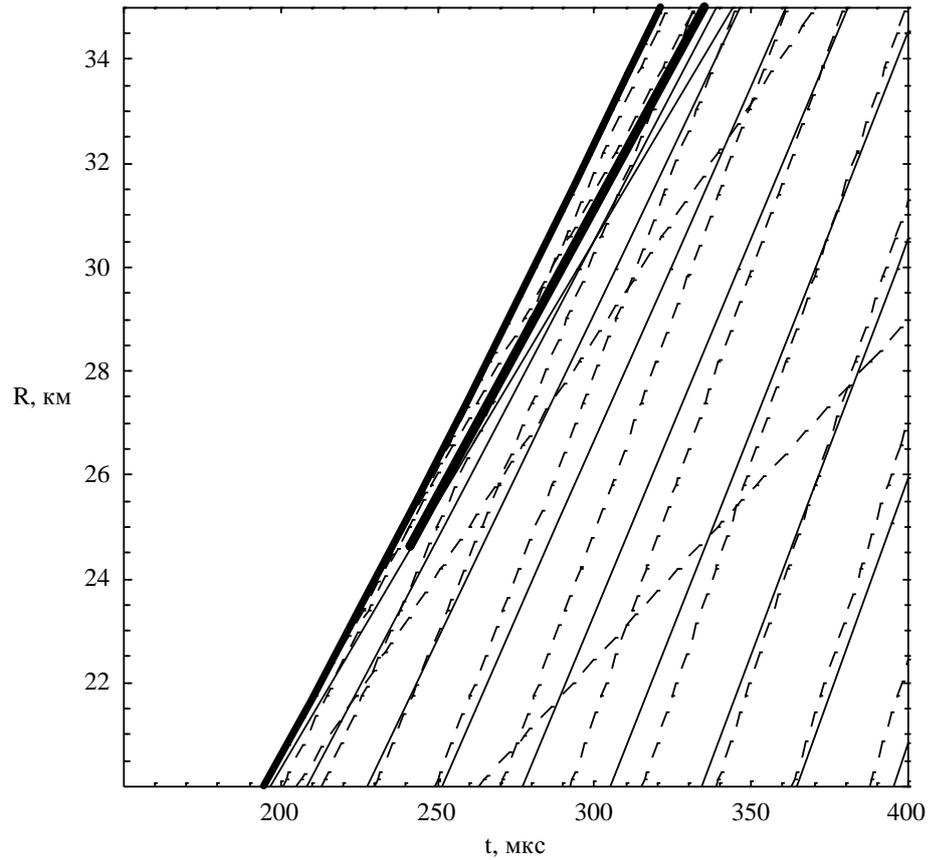


Рис. 5.5

$$b=1500 c^{-1}, \alpha=-1,4 \cdot 10^{-11} c^2, \omega_0=2\pi f_0, f_0=13,5 \text{ МГц}, \omega_p=2\pi f_p, f_p \approx 12,7 \text{ МГц}$$

Равномерная асимптотика радиосигнала имеет вид (см. (1.62–1.64))

$$U(\vec{r}, t) = e^{i\theta} \left\{ (l_1)_g I^{F_4}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + (l_2)_g \frac{\partial I^{F_4}}{\partial \lambda_2} + (l_1)_E A_i^+(\lambda_1) + (l_2)_E (A_i^+(\lambda_1))^{\nabla} \right\}, \quad (5.15)$$

где

$$I^{F_4}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \int_0^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i(\pm z^2 + x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2 z + \lambda_3 zx)\} dx \quad (5.16)$$

СВК краевой волновой катастрофы F_4 ,

$$A_i^{\pm}(\lambda_2) = I^{A_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i(\pm x^3 + \lambda_2 x)\} dx \quad (5.17)$$

функция Эйри (СВК основной волновой катастрофы A_2), а

$$\left(A_i^\pm(\lambda_2)\right)^\nabla = i \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp \left\{ i \left(\pm x^3 + \lambda_2 x \right) \right\} dx \quad (5.18)$$

её производная.

Аналогично могут быть исследованы и более сложные краевые особенности. Следует отметить, что речь идет о высокочастотной асимптотике, и поэтому все построения не имеют смысла за пределами окрестности, хотя возможно и достаточно широкой, предельного ПВ ГО луча.

Таким образом, в настоящем разделе рассмотрены основные идеи, лежащие в основе применения теории краевых волновых катастроф [58, 105] к описанию распространения частотно-модулированных радиосигналов в плазме. Приведены лучевые и каустические структуры и равномерные асимптотики для простых пространственно-временных краевых особенностей, соответствующих катастрофам B_{N+1} , C_{N+1} , F_4 , а также в общем случае.

§ 5.2. Численные методы и алгоритмы моделирования лучевой, каустической и амплитудно-фазовой структуры на основе теории катастроф

В настоящее время лучевая, каустическая и амплитудно-фазовая структуры краевых волновых катастроф изучены недостаточно, что препятствует их более эффективному использованию при изучении распространения частотно-модулированного сигнала в плазме. Ниже рассмотрены численные методы и алгоритмы построения этих характеристик.

Поскольку главный вклад в асимптотическое решение вносит член, пропорциональный СВК краевой катастрофы [85, 109], то основное внимание нами уделено лучевой и каустической структуре универсальной деформации и амплитудно-фазовой структуре СВК.

Численные методы построения лучевых траекторий первичных (ГО) лучей

Как известно, универсальная деформация $F_{\Sigma}(z, x; \vec{a}, \vec{\lambda})$ зависит от внутренних переменных (z, x) , функционального модуля \vec{a} и параметров $\vec{\lambda}$. Обычно (практически всегда) её можно представить в виде

$$F_{\Sigma}(z, x; \vec{a}, \vec{\lambda}) = \hat{F}_{\Sigma}(z, x; \vec{a}; \lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_L) + \lambda_1 z + \lambda_2 x. \quad (5.19)$$

Внутренние переменные, как правило, интерпретируются как параметры лучевого семейства, параметры λ_1 и λ_2 имеют смысл декартовых координат. ГО лучи определяются как стационарные точки фазовой функции – в данном случае универсальной деформации, то есть как решение системы уравнений [85]:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{\partial \hat{F}_{\Sigma}}{\partial z} \\ \lambda_2 = -\frac{\partial \hat{F}_{\Sigma}}{\partial x} \end{cases}. \quad (5.20)$$

Поэтому, фиксируя внутренние переменные и функциональный модуль, можно построить лучевые траектории в пространстве $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L)$. Выполнив соответствующие преобразования с помощью аппарата символьных вычислений, можно построить лучевые траектории в различных координатных плоскостях.

Численные методы построения каустик первичных (ГО) лучей

Каустическая поверхность, являющаяся огибающей семейства лучей, возникает на лучевых траекториях, когда обращается в нуль гессиан (определитель матрицы Гесса) фазовой функции. В нашем случае необходимо, чтобы помимо уравнений (5.20) удовлетворялось уравнение

$$\frac{\partial^2 \hat{F}_{\Sigma}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \hat{F}_{\Sigma}}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2 \hat{F}_{\Sigma}}{\partial x \partial z} \right)^2 \quad (5.21)$$

Формулы (5.20) и (5.21) в совокупности приводят к необходимости решения нелинейной системы алгебраических уравнений, которую приходится решать методами символьных вычислений применительно к каждой особенности (краевой катастрофе). При решении целесообразно исключить внутренние переменные и получить одно уравнение, связывающее функциональный модуль и параметры универсальной деформации. Пример такого решения приведён ниже.

Численные методы построения лучевых траекторий вторичных (краевых) лучей.

Лучевая структура краевых лучей находится из сужения фазовой функции на границу. Сужение определяется равенством $z=0$:

$$\Omega_{\Sigma}(x; \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_L) = F_{\Sigma}(0, x; \vec{a}; \vec{\lambda}) \quad . \quad (5.22)$$

Как и в предыдущем случае, функцию Ω_{Σ} можно представить в виде:

$$\Omega_{\Sigma}(x; \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_L) = \hat{\Omega}_{\Sigma}(x; \lambda_3, \dots, \lambda_L) + \lambda_2 x. \quad (5.23)$$

Краевые лучи определяются как стационарные точки функции Ω_{Σ} . Поэтому из равенства (5.23) находим:

$$\lambda_2 = -\frac{\partial \hat{\Omega}_{\Sigma}}{\partial x}. \quad (5.24)$$

– уравнение лучей. Фиксирую значение внутренней переменной, получаем траекторию луча в пространстве $(\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_L)$.

Численные методы построения каустик вторичных (краевых) лучей

Как и в случае каустики ГО лучей, для построения каустики краевых лучей (огибающей семейства краевых лучей) необходимо дополнить уравнение (5.24) уравнением:

$$\frac{\partial^2 \hat{\Omega}_{\Sigma}}{\partial x^2} = 0, \quad (5.25)$$

аналогичным уравнению (5.21).

Как и в случае ГО лучей формулы (5.24)–(5.25) приводят к необходимости решения нелинейной системы алгебраических уравнений методами символьных вычислений применительно к каждой особенности сужения (основной катастрофе). В ряде случаев такие решения известны (см, например, [85, 109, 154]). При решении целесообразно исключить внутреннюю переменную x и получить одно уравнение, связывающее параметры универсальной деформации.

Численный метод определения границы свет-тень.

Граница свет-тень определяется равенством $z=0$. В результате получаем два параметрических уравнения

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{\partial \hat{F}_\Sigma}{\partial z} \\ \lambda_2 = -\frac{\partial \hat{F}_\Sigma}{\partial x} \end{cases} \Big|_{z=0}. \quad (5.26)$$

в которых в качестве параметра выступает переменная x . Исключив переменную x , получаем уравнение, связывающее функциональный модуль и параметры универсальной деформации. Граница свет-тень в зависимости от значения параметров отсекает часть каустики ГО лучей и часть ГО лучевого семейства, исходя из требования: $z \geq 0$.

Моделирование амплитудно-фазовой структуры

Как уже отмечалось, главный вклад в асимптотическое решение вносит член, пропорциональный СВК краевой катастрофы. Поэтому рассмотрим метод вычисления амплитудно-фазовой структуры краевой СВК (1.63). Как показано в [81, 85, 101, 109, 199], в настоящее время наиболее эффективным методом вычислений краевых СВК является метод обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). На основе интегрального представления (1.63) и классификации краевых и основных катастроф показано, что можно записать систему ОДУ:

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = \sum_j \frac{d\vec{W}}{d\lambda_j} \frac{d\lambda_j}{dt} + \frac{d\vec{W}}{da} \frac{da}{dt} \equiv \vec{G}(W_0, \dots, W_{\gamma-1}) \quad (5.27)$$

для фундаментального вектора $\vec{W} = (W_0, W_1, \dots, W_{\gamma-1})$. Компонента фундаментального вектора W_0 совпадает с краевой СВК (1.63). Остальные компоненты это первые производные краевой СВК, участвующие в построении равномерной асимптотики (1.62) и также подлежащие определению. Введённые в (5.27) функции G_i являются линейными функциями своих аргументов (компонент фундаментального вектора), а также зависят от СВК сужения (1.64), которое считается известным. В противном случае она также может быть определена методом ОДУ. Для реализации численного метода построения амплитудно-фазовой структуры краевой СВК и её первых производных система (5.27) должна

быть начальными условиями. Для вычисления СВК (фундаментального вектора) при значении параметров универсальной деформации $\hat{\lambda}_j$ и функционального модуля \hat{a} будем считать, что

$$\lambda_j = (\hat{\lambda}_j - \lambda_j^0)t + \lambda_j^0, \quad a = (\hat{a} - a^0)t + a^0, \quad (5.28)$$

где λ_j^0 и a^0 значения параметров универсальной деформации и функционального модуля в начальной точке. Тогда систему (5.27) можно интегрировать по t от 0 до 1. Далее перечисленные выше методы и алгоритмы реализованы для катастрофы $\mathbf{K}_{4,2}$.

§ 5.3. Моделирование каустической структуры краевой катастрофы $\mathbf{K}_{4,2}$

Рассмотрим каустическую структуру краевой катастрофы $\mathbf{K}_{4,2}$, описывающую унимодальную каспоидную фокусировку первичных и вторичных лучевых семейств [134]. Как показано в работах [85, 98, 112, 139], волновая катастрофа $\mathbf{K}_{4,2}$, возникает как в задачах стационарной дифракции, когда и первичное и вторичное излучение имеет особенность каспоидного типа \mathbf{A}_3 , так и в нестационарных задачах распространения электромагнитных сигналов при совместной фокусировке пространственных и временных лучевых семейств.

Универсальная деформация катастрофы $\mathbf{K}_{4,2}$ имеет вид:

$$F_{K_{4,2}} = k_1 z^2 + ax^2 z + k_2 x^4 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 z + \lambda_4 x z, \quad (5.29)$$

где x и z – внутренние переменные, a – функциональный модуль, а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ – коэффициенты универсальной деформации, причем $z \in [0, +\infty)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. По сравнению с формулой (5.19) здесь изменена нумерация параметров. В соответствии с необходимыми и достаточными условиями образования катастрофы $\mathbf{K}_{4,2}$, [83, 84, 85, 109, 126, 139], на функциональный модуль a накладываются ограничения [9]:

$$a^2 \neq \pm 4. \quad (5.30)$$

Параметры k_1 и k_2 принимают значения +1 или -1.

Равномерная асимптотика, соответствующая рассматриваемой особенности, имеет вид (см. также (1. 62) и таблицы (1.1), (1.2)):

$$U(\vec{r}, t) = e^{i\theta} \left\{ (l_1)_g I^{K_{4,2}}(a; \vec{\lambda}) + \sum_{k=3}^4 (l_k)_g \frac{\partial I^{K_{4,2}}}{\partial \lambda_k} + (l_1)_E I^{A_3}(\lambda_1, \lambda_2) + \sum_{k=1}^2 (l_k)_E \frac{\partial I^{A_3}}{\partial \lambda_k} \right\} \quad (5.31)$$

где

$$I^{K_{4,2}}(a, \vec{\lambda}) = \int_0^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i(k_1 z^2 + ax^2 z + k_2 x^4 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 z + \lambda_4 x z)\} dx \quad (5.32)$$

спецфункция (СВК) краевой катастрофы $\mathbf{K}_{4,2}$ (в показателе экспоненты стоит универсальная деформация (5.29)), а

$$I^{A_3}(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i(k_2 x^4 + \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x)\} dx \quad (5.33)$$

функция Пирси, то есть СВК основной катастрофы \mathbf{A}_3 . Её универсальная деформация получается как сужение исходной универсальной деформации с помощью подстановки $z=0$. В формуле (5.31) θ – фаза бегущей волны, а $(l_j)_g$ и $(l_j)_E$ ГО и краевые коэффициенты асимптотического разложения.

Рассмотрим каустические структуры катастрофы $\mathbf{K}_{4,2}$. Отметим, что разложение катастрофы $\mathbf{K}_{4,2}$ на основную особенность и катастрофу сужения имеет вид [85, 109]: $K_{4,2} = (A_3, A_3)$, то есть обе особенности представляют собой каустическое остриё. Однако ГО каустическое остриё имеет обрыв. Поэтому каустики (огибающие семейств ГО и краевых лучей) будут иметь формы клювов, причем связывает их прямая – граница «свет-тьнь».

Рассмотрим сначала краевые лучи. Уравнения краевых лучей получаются из дифференцирования сужения ($z=0$) исходной универсальной деформации (5.29), имеющей вид:

$$F_{A_3} = k_2 x^4 + \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x \quad (5.34)$$

по параметру x и приравниванием результата нулю:

$$\lambda_1 = -4k_2x^3 - 2\lambda_2x. \quad (5.35)$$

Для того чтобы получить каустику (оггибающую семейства краевых лучей) необходимо дополнить уравнение (5.35) нулем второй производной функции (5.29) по x :

$$12k_2x^2 + 2\lambda_2 = 0. \quad (5.36)$$

В результате найдем уравнение каустики в параметрической форме:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 8k_2x^3 \\ \lambda_2 = -6k_2x^2 \end{cases}. \quad (5.37)$$

Рассмотрим теперь каустику ГО лучей. Лучевые уравнение получаются дифференцированием универсальной деформации (5.29) по внутренним переменным x и z :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -4k_2x^3 - 2axz - 2\lambda_2x - \lambda_4z \\ \lambda_3 = -ax^2 - 2k_1z - \lambda_4x \end{cases}. \quad (5.38)$$

Для того чтобы получить каустику ГО лучей необходимо дополнить уравнения (5.38) нулем Гессиана универсальной деформации (5.29) по внутренним переменным:

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F_{K_{4,2}}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F_{K_{4,2}}}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 F_{K_{4,2}}}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 F_{K_{4,2}}}{\partial z^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (5.39)$$

Подставляя (5.29) в (5.39), получаем:

$$2k_1(12k_2x^2 + 2az + 2\lambda_2) - (2ax + \lambda_4)^2 = 0, \quad (5.40)$$

откуда находим внутренний параметр z :

$$z = \frac{(2ax + \lambda_4)^2 - 24k_1k_2x^2 - 4k_1\lambda_2}{4k_1a}. \quad (5.41)$$

Подставив (5.41) в (5.38) и выполнив соответствующие преобразования с помощью аппарата символьных вычислений, найдем, как и в случае каустики краевых лучей, выражения для λ_1 и λ_2 :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\lambda_3 \lambda_4 - 4a^2 x^3 + 16k_1 k_2 x^3 - 3ax^2 \lambda_4}{2k_1} \\ \lambda_2 = \frac{\lambda_4^2 + 6a^2 x^2 - 24k_1 k_2 x^2 + 2a\lambda_3 + 6ax\lambda_4}{4k_1} \end{cases} \quad (5.42)$$

Для того чтобы получить уравнение границы свет-тень, подставим $z=0$ в систему (5.38), и выполнив преобразования, найдем, что:

$$\lambda_1 = -2x_b \lambda_2 - 4k_2 x_b^3, \quad (5.43)$$

где

$$x_b = x_{b2} = \frac{-\lambda_4 + \sqrt{\lambda_4^2 - 4a\lambda_3}}{2a} \quad (5.44)$$

или

$$x_b = x_{b1} = \frac{-\lambda_4 - \sqrt{\lambda_4^2 - 4a\lambda_3}}{2a}. \quad (5.45)$$

На рис 5.6–5.14 показаны каустические структуры катастрофы $\mathbf{K}_{4,2}$ в плоскости (λ_1, λ_2) при различных значениях параметров λ_3, λ_4 и функционального модуля a . Толстой линией на рисунках показана каустика ГО лучей. Её аналитическое продолжение, отсекаемое границей свет-тень, показано штриховой линией (пунктиром). Штрихпунктирной линией показана граница свет-тень. Наконец, тонкой линией показана каустика краевых лучей.

Сначала рассмотрим случай, когда параметры λ_3, λ_4 равны нулю. Рис. 5.6 соответствует случаю $a=0$.

Каустика краевых лучей (каустическое остриё) совпадает с каустикой ГО и её продолжением, граница свет-тень является биссектрисой.

При увеличении функционального модуля a каустика ГО лучей (и её продолжение) отрывается от каустики краевых лучей (рис. 5.7) и стремится при $a \rightarrow 2$ к вертикали, что является вырожденным случаем.

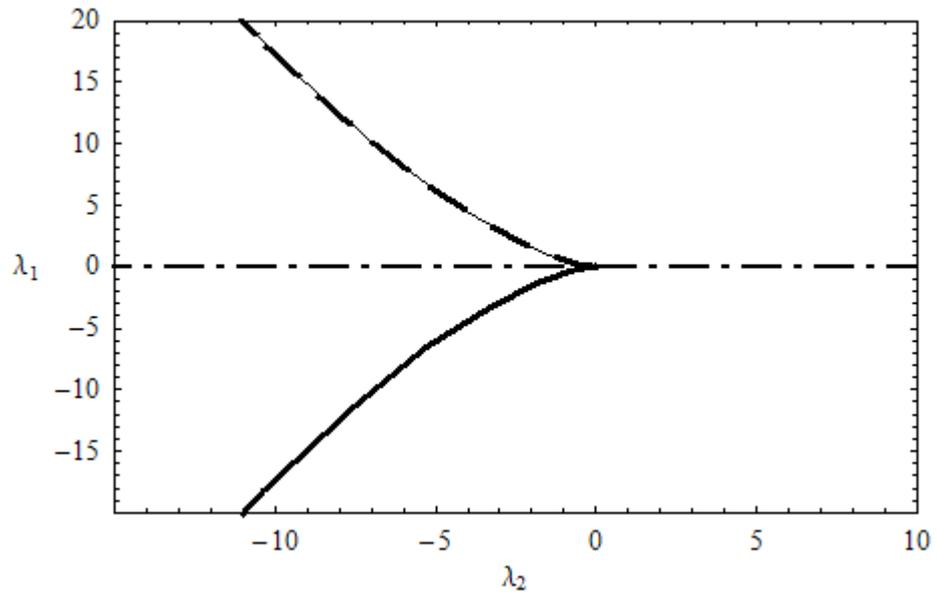


Рис. 5.6
 $a=0; k_1 = k_2 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$

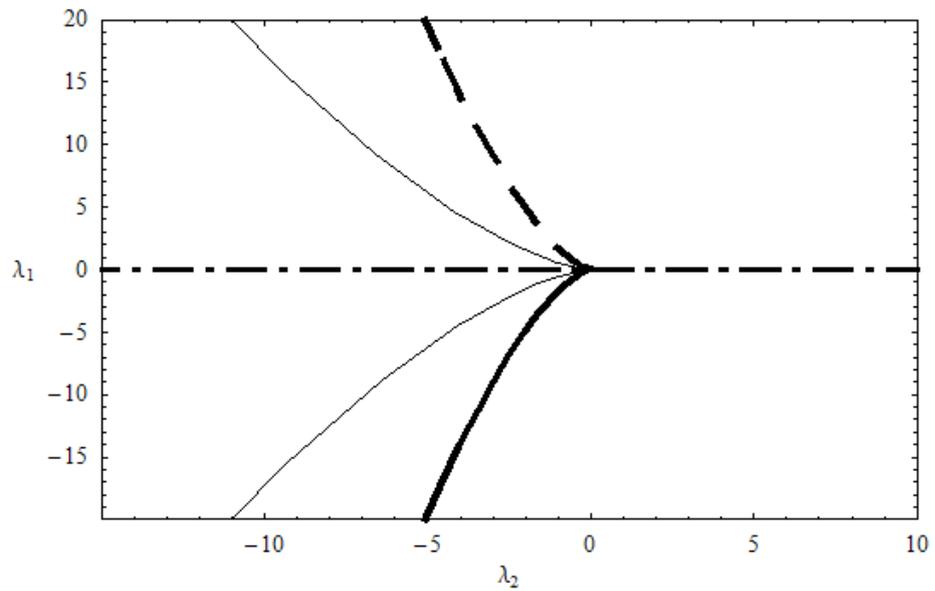


Рис. 5.7
 $a=1,9; k_1 = k_2 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$

В случае, когда функциональный модуль превосходит 2 (рис. 5.8), остриё ГО лучей отображается относительно острия краевых лучей в правую часть рисунка.

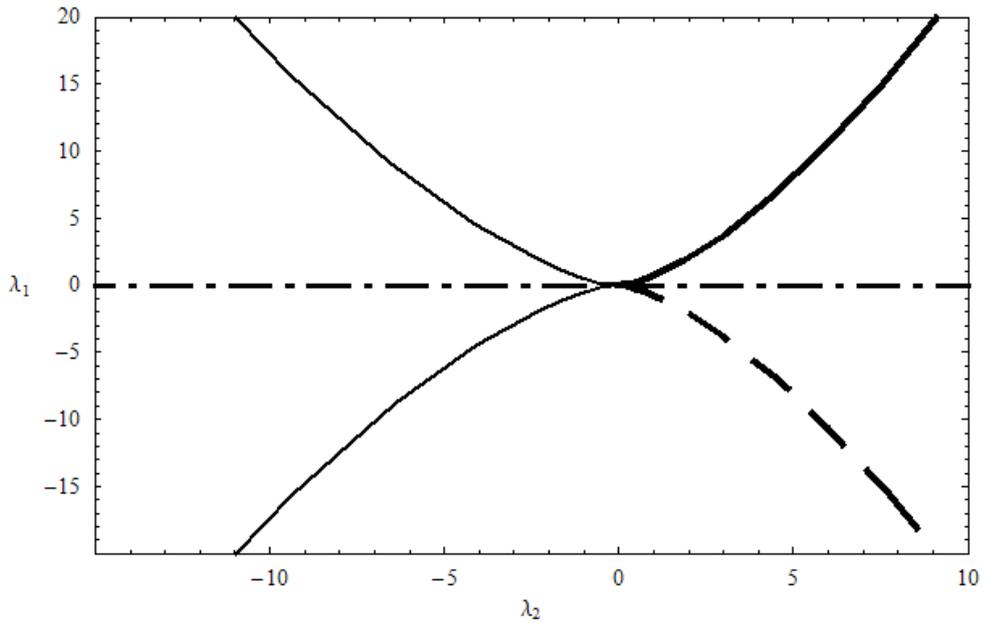


Рис. 5.8
 $a=2,5; k_1 = k_2 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$

Необходимо отметить, что на рис. 5.6–5.8 при всех значениях функционального модуля точка с координатами $(0,0)$ является особой точкой катастрофы $\mathbf{K}_{4,2}$, так как изменение функционального модуля не устраняет особенности.

Рассмотрим теперь случаи, когда параметры λ_3 и λ_4 не равны нулю. На рис. 5.9 показан случай, когда λ_3 , и λ_4 не равны нулю, но разных знаков.

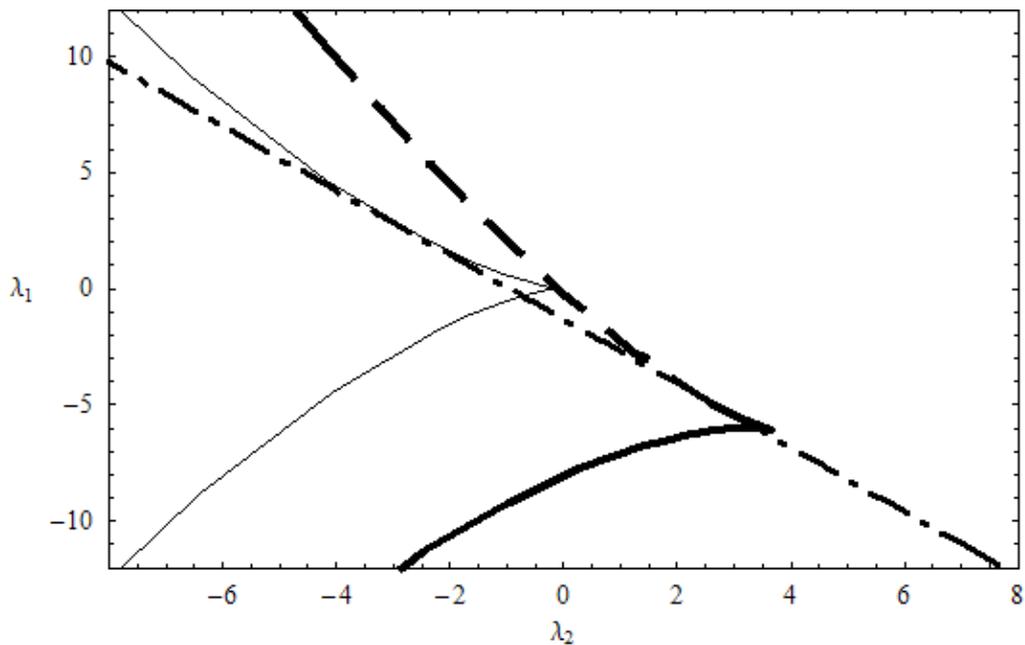


Рис. 5.9
 $a=0,5; k_1 = k_2 = 1, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = 4.$

Поскольку a меньше 2, оба каустических острия смотрят вправо, в разных точках касаются границы свет-тень и смещены друг относительно друга. Для вычисления x_b использовалась формула (5.44).

Аналогичная картина возникает, если знак поменять знак у функционального модуля (рис. 5.10).

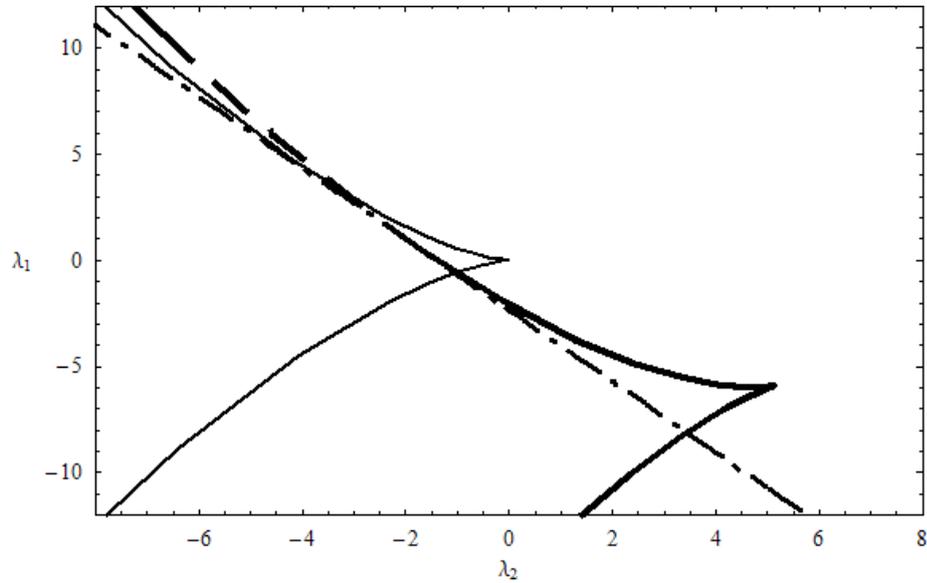


Рис. 5.10

$$a=-0,5; k_1 = k_2 = 1, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = 4.$$

Пусть теперь функциональный модуль превышает 2, причем k_2 принимает значение не +1, а -1 (рис. 5.11).

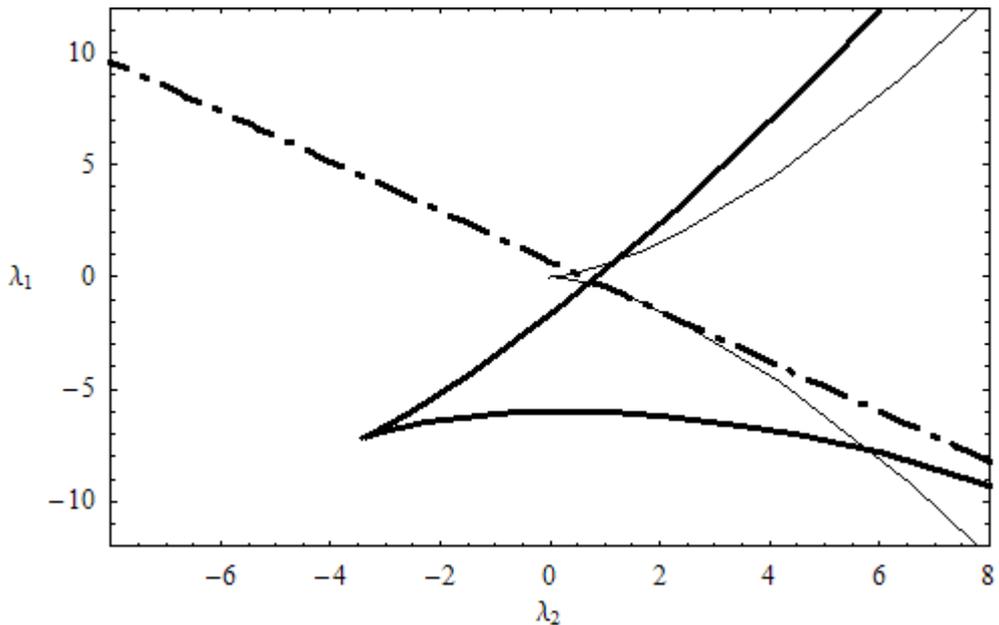


Рис. 5.11

$$a=2,5; k_1 = 1, k_2 = -1, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = 4.$$

Видно, что оба каустических острия смотрят влево, причём каустическое остриё краевых лучей отстаёт от каустического острия ГО лучей. Для вычисления x_b по-прежнему использовалась формула (5.44).

Поменяем знак функционального модуля и знаки у λ_3 и λ_4 (рис. 5.12).

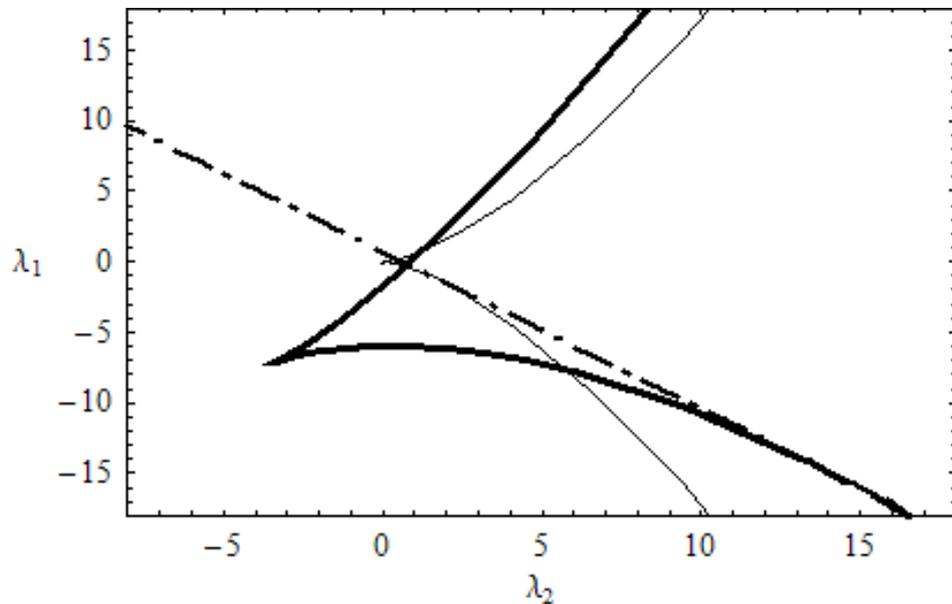


Рис. 5.12

$a=-2,5; k_1=1, k_2=-1, \lambda_3=3, \lambda_4=-4.$

Видно, что картина качественно не изменилась, но для вычисления x_b теперь уже используется формула (5.45).

Поменяем знак у k_1 с плюса на минус и сохраним неизменными остальные параметры (рис. 5.13).

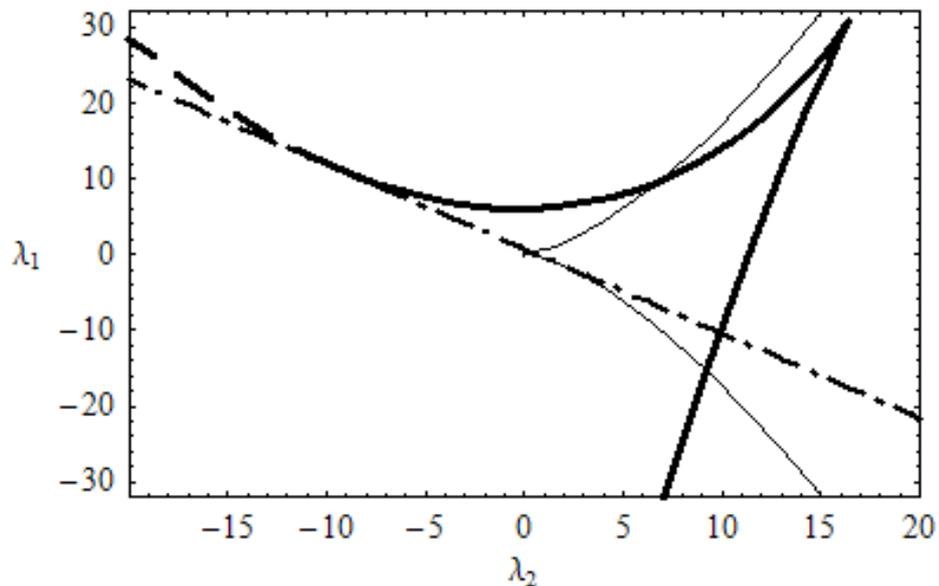


Рис. 5.13

$a=-2,5; k_1=-1, k_2=-1, \lambda_3=3, \lambda_4=-4.$

Теперь каустическое остриё краевых лучей (которое осталось на месте) и каустическое остриё ГО лучей смотрят в разные стороны. Для вычисления x_b используется формула (5.45).

Наконец, рассмотрим случай, когда граница свет тень отрезает полностью каустическое остриё ГО лучей, оставляя только каустику с краем (рис. 5.14).

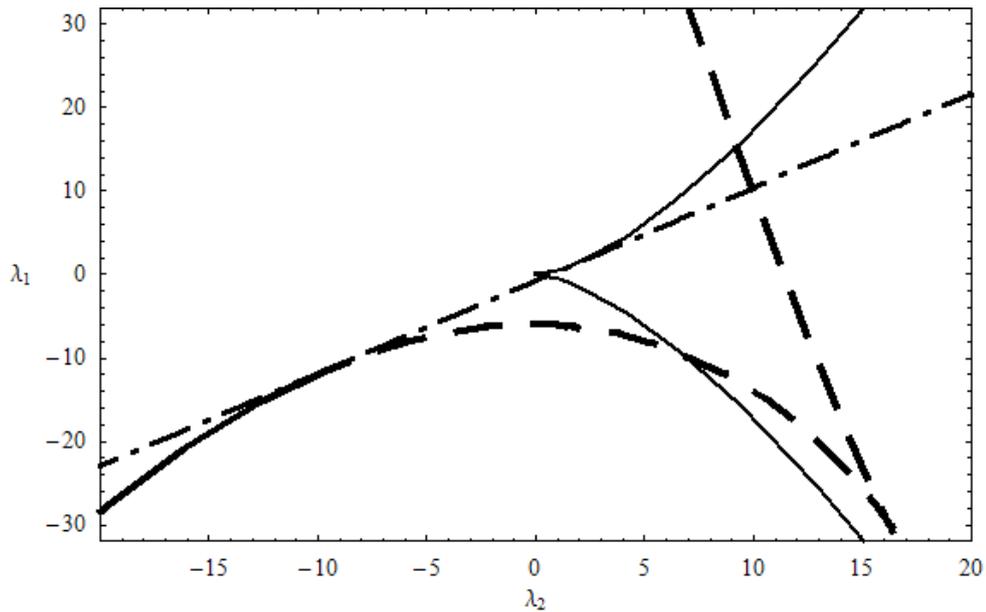


Рис. 5.14

$a=2,5; k_1=-1, k_2=-1, \lambda_3=-3, \lambda_4=-4$ или $a=-2,5; k_1=-1, k_2=-1, \lambda_3=3, \lambda_4=4$.

Это возможно в двух случаях: когда функциональный модуль положительный, а параметры λ_3, λ_4 отрицательные, либо наоборот – функциональный модуль отрицательный, а параметры λ_3, λ_4 положительные. В первом случае для вычисления x_b используется формула (5.45), а во втором – формула (5.44).

Аналогично, как показано в работах [42-44], посвященных информационной системе «Волновые катастрофы в радиофизике, акустике и квантовой механике» (wavec.at.rosnou.ru), могут быть исследованы каустические структуры и других краевых особенностей.

Примеры численного моделирования амплитудно-фазовых структур СВК, соответствующих рассмотренным каустикам, приведены на рис. 5.15–5.18 (см. также [43]).

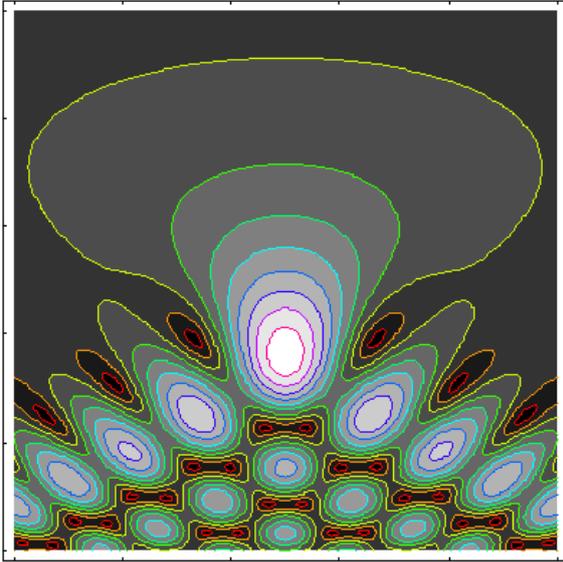


Рис. 5.15.
Амплитудная структура СВК $\mathbf{K}_{4,2}$,
 $\lambda_3 = -4, \lambda_4 = 0, a = 0$

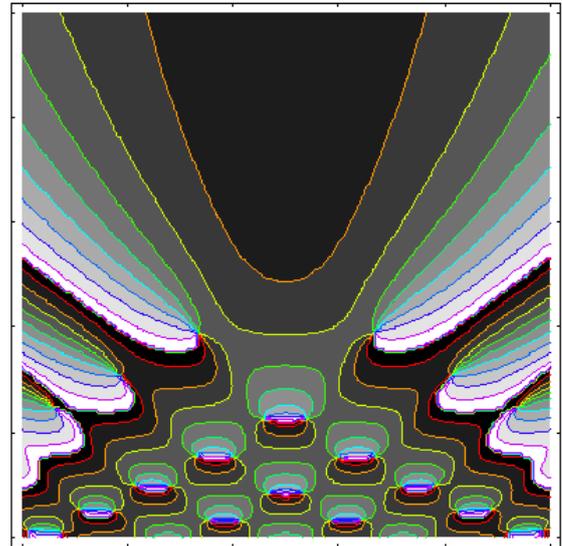


Рис. 5.16.
Фазовая структура СВК $\mathbf{K}_{4,2}$,
 $\lambda_3 = -4, \lambda_4 = 0, a = 0$

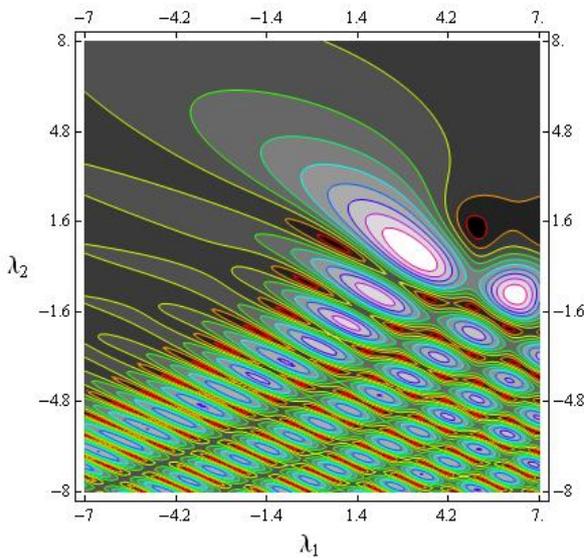


Рис. 5.17.
Амплитудная структура СВК $\mathbf{K}_{4,2}$,
 $\lambda_3 = -2, \lambda_4 = -2, a = -1$

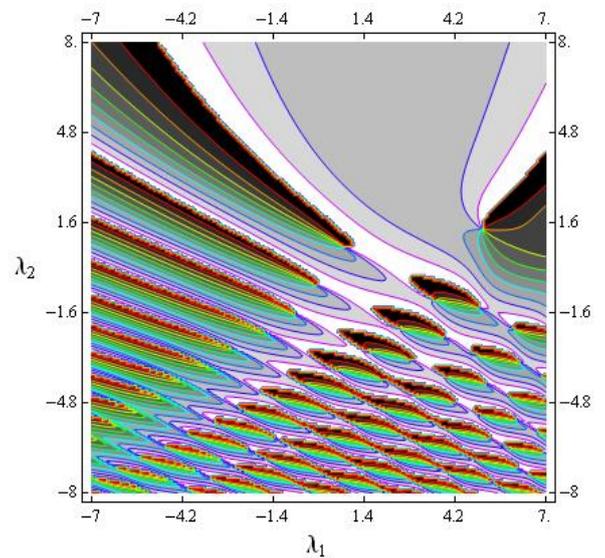


Рис. 5.18.
Фазовая структура СВК $\mathbf{K}_{4,2}$,
 $\lambda_3 = -2, \lambda_4 = -2, a = -1$

Таким образом, в настоящем параграфе исследована каустическая структура краевой катастрофы $\mathbf{K}_{4,2}=(\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_3)$, распадающейся две каспоидные катастрофы \mathbf{A}_3 ,

соответствующие каустикам семейств краевых и ГО лучей. Катастрофы каспидного такого типа возникают в задачах распространения и дифракции волн и соответствуют областям фокусировок (см., например, [112, 125]). Краевые катастрофы возникают при совместной пространственной и временной фокусировке электромагнитного излучения волны в плазменном слое с сильной частотной дисперсией [112, 139]. Для описания электромагнитных полей в таких областях разработана волновая теория катастроф [85, 98, 109, 194], опирающаяся как на классические результаты теории катастроф [8], так и на лучевые методы [104, 129, 138].

§ 5.4. Моделирование параметров универсальной деформации краевой катастрофы $K_{4,2}$ методом локальной асимптотики

Применение теории катастроф к различным областям физики позволяет адекватно описывать волновую структуру в фокальных и дифракционных областях, в задачах рассеяния и распространения излучения в виде эталонных структур, содержащих специальные функции волновых катастроф [43, 85, 198]. Для этого необходимо устанавливать связь физических параметров задачи с параметрами эталонных структур, соответствующих катастрофам того или иного типа, то есть находить «параметры подобия», главными из которых являются коэффициенты универсальной деформации и функциональные модули. Рассмотрим топологическую особенность – унимодальную катастрофу $K_{4,2}$, структурно-устойчивую в четырехмерном пространстве, позволяющую описывать совместную каспидную фокусировку типа «каустическое острие – A_3 » как семейства первичных геометрооптических (ГО) лучей, так и семейства вторичных краевых лучей.

Методами математического моделирования построим алгоритм нахождения первого приближения для коэффициентов универсальной деформации унимодальной краевой катастрофы $\Sigma = K_{4,2}$ [30, 86, 88, 176, 181, 192, 193]. Пусть выражение для универсальной деформации краевой катастрофы $\Sigma = K_{4,2}$ имеет вид, аналогичный (5.29):

$$F_{\Sigma} = \nu_2 \xi_2^2 + a \xi_1^2 \xi_2 + \nu_1 \xi_1^4 + \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_1^2 + \lambda_3 \xi_2 + \lambda_4 \xi_1 \xi_2, \quad (5.46)$$

где $\nu_1 = \pm 1$, $\nu_2 = \pm 1$, a – функциональный модуль, а λ_j – коэффициенты универсальной деформации.

Рассмотрим фазовую функцию $\Phi(\eta_1, \eta_2, \vec{\alpha})$ в окрестности особой точки с координатами $(\vec{\alpha}_o)$, в которой универсальная деформация переходит в нормальную форму и имеет вид

$$F_{\Sigma} = \nu_2 \xi_2^2 + a \xi_1^2 \xi_2 + \nu_1 \xi_1^4. \quad (5.47)$$

Справедливо тождество (см., например, [85, 88]):

$$\Lambda \Phi = F_{\Sigma} + \theta, \quad (5.48)$$

в котором Λ – большой параметр задачи ($\Lambda \gg 1$, как аргумент не рассматривается), а $\theta(\vec{\alpha})$ – фаза бегущей волны. Для упрощения вычислений введем функцию $\mu = \Lambda \Phi$. Тогда основное тождество приобретает вид:

$$C \equiv \mu(\eta_1(\vec{\alpha}), \eta_2(\vec{\alpha}), \vec{\alpha}) - F_{\Sigma}(\xi_1, \xi_2, a(\vec{\alpha}), \vec{\lambda}(\vec{\alpha})) - \theta(\vec{\alpha}) = 0. \quad (5.49)$$

Между внутренними переменными фазовой функции и внутренними переменными универсальной деформации существует взаимнооднозначное отображение [85]:

$$\begin{cases} \eta_1 = g_1(\xi_1, \xi_2, \vec{\alpha}) \\ \eta_2 = \eta_{o2} + \xi_2 g_2(\xi_1, \xi_2, \vec{\alpha}) \end{cases}. \quad (5.50)$$

Для определения коэффициентов $\lambda_j(\vec{\alpha})$, функционального модуля $a(\vec{\alpha})$, и фазы бегущей волны $\theta(\vec{\alpha})$ используем метод локальной асимптотики [82, 85, 88].

Найдем методом локальной асимптотики выражения для коэффициентов $\lambda_j(\vec{\alpha})$, функционального модуля $a(\vec{\alpha})$, и фазы $\theta(\vec{\alpha})$.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \mu_i &= \left. \frac{\partial \mu}{\partial \eta_i} \right|_{(\vec{\alpha}_o)}, & \mu_{ik} &= \left. \frac{\partial^2 \mu}{\partial \eta_i \partial \eta_k} \right|_{(\vec{\alpha}_o)}, & \mu_{ijk} &= \left. \frac{\partial^3 \mu}{\partial \eta_i \partial \eta_j \partial \eta_k} \right|_{(\vec{\alpha}_o)}, \dots \\ p_j^i &= \left. \frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_j} \right|_{(\vec{\alpha}_o)}, & p_{jk}^i &= \left. \frac{\partial^2 \eta_i}{\partial \xi_{jk}} \right|_{(\vec{\alpha}_o)}, & p_{jkl}^i &= \left. \frac{\partial^3 \eta_i}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \right|_{(\vec{\alpha}_o)}, \dots (i, j, k, l = 1, 2). \end{aligned} \quad (5.51)$$

В более сложных случаях мы будем использовать обозначения:

$$\mu_{(n,m)} = \frac{\partial^{n+m} \mu}{\partial \eta_1^n \partial \eta_2^m} \Big|_{(\vec{\alpha}_o)}, \quad C_{(n,m)} = \frac{\partial^{n+m} C}{\partial \eta_1^n \partial \eta_2^m} \Big|_{(\vec{\alpha}_o)}, \quad P_{(n,m)}^i = \frac{\partial^{n+m} \eta_i}{\partial \xi_1^n \partial \xi_2^m} \Big|_{(\vec{\alpha}_o)}. \quad (5.52)$$

В особой точке $(\vec{\alpha}_o)$

$$\xi_1 = \xi_2 = 0, \quad \vec{\eta} = \vec{\eta}_o. \quad (5.53)$$

Кроме того, при $\eta_2 = \eta_{o2}$ внутренняя переменная $\xi_2 = 0$ (см. (5.50)) (см. [88]), и тождество (5.4) переходит в тождество сужения:

$$\Omega \equiv \mu(\eta_1(\vec{\alpha}), \eta_{o2}, \vec{\alpha}) - \nu_1 \xi_1^4 - \lambda_1(\vec{\alpha}) \xi_1 - \lambda_2(\vec{\alpha}) \xi_1^2 - \theta(\vec{\alpha}) = 0. \quad (5.54)$$

Это тождество соответствует особенности \mathbf{A}_3 – каустическое остриё для краевых лучей. В работах [85, 126] показано, что в особой точке типа \mathbf{A}_3

$$\mu_1 = \mu_{11} = \mu_{111} = 0, \quad \mu_{1111} \neq 0. \quad (5.55)$$

Учитывая (5.55), нетрудно установить, что для того, чтобы получить p_1^1 , необходимо продифференцировать тождество (5.54) в особой точке четыре раза по ξ_1 , для определения p_{11}^1 – пять раз и так далее.

Выполняя вычисления, находим:

$$\begin{aligned} d \equiv p_1^1 &= 4 \sqrt{\frac{24}{|\mu_{1111}|}}, \quad p_{11}^1 = -\frac{1}{10} \frac{\mu_{(5,0)}}{\mu_{(4,0)}} d^2, \quad p_{111}^1 = \left(\frac{21}{400} \frac{\mu_{(5,0)}^2}{\mu_{(4,0)}^2} - \frac{1}{20} \frac{\mu_{(6,0)}}{\mu_{(4,0)}} \right) d^3, \\ \nu_1 &= \text{sign } \mu_{1111}, \quad p_{1111}^1 = \left(\frac{2}{25} \frac{\mu_{(5,0)} \mu_{(6,0)}}{\mu_{(4,0)}^2} - \frac{6}{125} \frac{\mu_{(5,0)}^3}{\mu_{(4,0)}^3} - \frac{1}{35} \frac{\mu_{(7,0)}}{\mu_{(4,0)}} \right) d^4, \\ p_{(5,0)}^1 &= \left(\frac{9}{140} \frac{\mu_{(5,0)} \mu_{(7,0)}}{\mu_{(4,0)}^2} + \frac{3}{80} \frac{\mu_{(6,0)}^2}{\mu_{(4,0)}^2} - \frac{117}{800} \frac{\mu_{(5,0)}^2 \mu_{(6,0)}}{\mu_{(4,0)}^3} + \frac{1989}{32000} \frac{\mu_{(5,0)}^4}{\mu_{(4,0)}^4} - \frac{1}{56} \frac{\mu_{(8,0)}}{\mu_{(4,0)}} \right) d^5. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Таким образом, формулы (5.56) получаются последовательно из анализа производных $C_{(n,0)}$ или $\Omega_{(n,0)}$ при $n=4,5,6,7,8$, вычисленных в особой точке.

В дальнейшем для получения первого приближения нам потребуются

$$p_\alpha^1 = \frac{\partial \eta_1}{\partial \alpha_j} \quad \text{и} \quad p_{1\alpha}^1 = \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial \xi_1 \partial \alpha_j}. \quad \text{Величина } p_\alpha^1 \text{ находится из анализа } \Omega_{(3,\alpha)} \text{ в особой}$$

точке и имеет вид:

$$p_\alpha^1 = -\frac{\mu'_{\alpha(3,0)}}{\mu_{(4,0)}} + \frac{3}{10} \frac{\mu_{(5,0)} \mu'_{\alpha(2,0)}}{\mu_{(4,0)}^2} - \frac{21}{400} \frac{\mu_{(5,0)}^2 \mu'_{\alpha(1,0)}}{\mu_{(4,0)}^3} + \frac{1}{20} \frac{\mu_{(6,0)} \mu'_{\alpha(1,0)}}{\mu_{(4,0)}^2}. \quad (5.57)$$

Величина $p_{1\alpha}^1$ находится из анализа $\Omega_{(4,\alpha)}$ в особой точке:

$$p_{1\alpha}^1 = -\frac{p_1^1}{4\mu_{(4,0)}} \left(\mu'_{\alpha(4,0)} - \frac{\mu_{(5,0)} \mu'_{\alpha(3,0)}}{\mu_{(4,0)}} + \frac{9}{25} \frac{\mu_{(5,0)}^2 \mu'_{\alpha(2,0)}}{\mu_{(4,0)}^2} - \frac{1}{5} \frac{\mu_{(6,0)} \mu'_{\alpha(2,0)}}{\mu_{(4,0)}} - \right. \\ \left. - \frac{69}{1000} \frac{\mu_{(5,0)}^3 \mu'_{\alpha(1,0)}}{\mu_{(4,0)}^3} + \frac{1}{10} \frac{\mu_{(5,0)} \mu_{(6,0)} \mu'_{\alpha(1,0)}}{\mu_{(4,0)}^2} - \frac{1}{35} \frac{\mu_{(7,0)} \mu'_{\alpha(1,0)}}{\mu_{(4,0)}} \right). \quad (5.58)$$

Будем искать приближённые выражения для $\lambda_j(\vec{\alpha})$, $a(\vec{\alpha})$ и $\theta(\vec{\alpha})$ в виде:

$$\lambda_j(\vec{\alpha}) \cong \sum_{k=1}^M \lambda_{j\alpha_k} \Delta \alpha_k, \quad a(\vec{\alpha}) \cong a_F + \sum_{k=1}^M a_{\alpha_k} \Delta \alpha_k, \\ \theta(\vec{\alpha}) \cong \theta_o + \sum_{k=1}^M \theta_{\alpha_k} \Delta \alpha_k + \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^M \theta_{\alpha_k \alpha_j} \Delta \alpha_k \Delta \alpha_j, \quad (5.59)$$

где $\Delta \alpha_k = \alpha_k - \alpha_{ok}$, а M – это размерность конфигурационного пространства. В дальнейшем для сокращения записи индекс k у α_k будем опускать, как это сделано в выражениях (5.57) и (5.58).

Определим коэффициенты, входящие в (5.59). Для того чтобы найти $\lambda_{1\alpha}$ продифференцируем сужение (5.54) один раз по ξ_1 , один раз по α (то есть вычислим $\Omega_{(1,0)\alpha}$) и положим:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_o, \quad \xi_1 = 0. \quad (5.60)$$

Тогда находим, что:

$$\lambda_{1\alpha} = \mu_{1\alpha} p_1^1. \quad (5.61)$$

Перейдем теперь к вычислению $\lambda_{2\alpha}$. Для того чтобы найти $\lambda_{2\alpha}$ необходимо продифференцировать тождество (5.54) два раза по ξ_1 , один раз по α ($\Omega_{(2,0)\alpha}$) и учесть (5.60). Получим:

$$\lambda_{2\alpha} = \frac{1}{2} (\mu_{1\alpha} p_{11}^1 + \mu_{11\alpha} (p_1^1)^2). \quad (5.62)$$

Входящие в (5.62) необходимые величины уже определены в формулах (5.56).

Рассмотрим теперь определение с точностью до членов второго порядка включительно фазы бегущей волны $\theta(\vec{\alpha})$.

Величина $\theta(\vec{\alpha}_o)$ легко находится из тождества (5.54):

$$\theta_o \equiv \theta(\vec{\alpha}_o) = \mu(\eta_1(0, \vec{\alpha}_o), \eta_{o2}, \vec{\alpha}_o), \quad (5.63)$$

где $\eta_1(0, \vec{\alpha}_o) = \eta_{o1}$ – значение первого внутреннего параметра задачи в особой точке.

Для определения θ_α продифференцируем тождество (5.54), один раз по α ($\Omega_{(0,0)\alpha}$) и учтём (5.60). Тогда:

$$\theta_\alpha = \mu_\alpha. \quad (5.64)$$

Для вычисления коэффициентов $\theta_{\alpha\beta}$, $\alpha = \alpha_k$, $\beta = \beta_j$ продифференцируем тождество (5.54) ещё и по β . Анализируя $\Omega_{(0,0)\alpha\beta}$ в особой точке, находим:

$$\theta_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta} + \mu_{1\alpha} p_\beta^1 + \mu_{1\beta} p_\alpha^1. \quad (5.65)$$

Все величины, входящие в (5.65), известны (см. (5.57)).

Таким образом, сужение позволило нам определить линейное приближение для λ_1 , λ_2 и θ . Для нахождения λ_3 , λ_4 и функционального модуля a необходимо рассмотреть полное выражение для универсальной деформации (5.46) особенности $\Sigma = \mathbf{K}_{4,2}$.

Здесь следует отметить, что, во-первых, все производные η_2 по ξ_1 и α равны нулю:

$$p_{(n,0)}^2 = 0, \quad p_{(n,0)\alpha}^2 = 0, \quad (5.66)$$

что явно следует из (5.50), а во-вторых, в особой точке

$$\mu_{12} = 0, \quad (5.67)$$

что вытекает из равенства нулю в особой точке $C_{(1,1)}$.

Найдем линейное приближение для коэффициента λ_3 . Для этого продифференцируем тождество (5.49) один раз по ξ_2 , один раз по α (то есть, вычислим $C_{(0,1)\alpha}$) и учтём (5.60), (5.66), (5.67). Тогда:

$$\lambda_{3\alpha} = \mu_{1\alpha} p_2^1 + \mu_{2\alpha} p_2^2. \quad (5.68)$$

Для вычисления p_2^2 продифференцируем дважды по ξ_2 тождество (5.49) в особой точке, то есть, вычислим $C_{(0,2)}$ и получим, что

$$p_2^2 = \sqrt{\frac{2}{|\mu_{22}|}}, \quad v_2 = \text{sign } \mu_{22}. \quad (5.69)$$

Сложнее определяется производная p_2^1 . Для этого вычислим в особой точке производные тождества (5.49) $C_{(1,2)}$ и $C_{(3,1)}$ и решим систему уравнений относительно p_2^1 и p_{12}^2 . Находим:

$$p_2^1 = -\frac{p_2^2}{2(3\mu_{112}^2 - \mu_{1111}\mu_{22})} \left(3\mu_{112}\mu_{122} - 2\mu_{1112}\mu_{22} + \frac{3\mu_{112}\mu_{22}\mu_{(5,0)}}{5\mu_{1111}} \right),$$

$$p_{12}^2 = -\frac{p_2^2 p_1^1}{2(3\mu_{112}^2 - \mu_{1111}\mu_{22})} \left(2\mu_{1112}\mu_{112} - \frac{3\mu_{(5,0)}\mu_{112}^2}{5\mu_{1111}} - \mu_{1111}\mu_{122} \right). \quad (5.70)$$

Из формул (5.70) следует, что особенность $\mathbf{K}_{4,2}$ формируется при условии:

$$3\mu_{112}^2 \neq \mu_{1111}\mu_{22}. \quad (5.71)$$

Перейдем теперь к определению линейного приближения для коэффициента λ_4 .

Продифференцируем тождество (5.49) по ξ_1 , по ξ_2 и по α . Тогда найдём:

$$\lambda_{4\alpha} = (\mu_{112} p_\alpha^1 p_2^2 + \mu_{11\alpha} p_2^1 + \mu_{12\alpha} p_2^2) p_1^1 + \mu_{1\alpha} p_{12}^1 + \mu_{2\alpha} p_{12}^2. \quad (5.72)$$

В формуле (5.72) нам известны уже все выражения кроме p_{12}^1 . Для определения производной p_{12}^1 вычислим в особой точке производные тождества (5.49) $C_{(2,2)}$ и

$C_{(4,1)}$ решим систему уравнений и найдём p_{12}^1 и p_{112}^2 :

$$\begin{aligned}
p_{12}^1 &= \frac{1}{4(p_1^1)^3 p_2^2 (3\mu_{112}^2 - \mu_{1111}\mu_{22})} \times \\
&\times \left(-3\mu_{112} (p_1^1)^2 \left((p_1^1)^2 (\mu_{1111} (p_2^1)^2 + 2\mu_{1112} p_2^1 p_2^2 + \mu_{112} p_{22}^2 + \right. \right. \\
&+ \left. \mu_{1122} (p_2^2)^2 \right) + 4p_1^1 p_{12}^2 \left((\mu_{112} p_2^1 + \mu_{122} p_2^2) + p_{11}^1 p_2^2 (2\mu_{112} p_2^1 + \mu_{122} p_2^2) \right) + \left((p_1^1)^2 p_2^2 \times \right. \\
&\times \left(p_1^1 (\mu_{(5,0)} p_1^1 p_2^1 + \mu_{(4,1)} p_1^1 p_2^2 + 4\mu_{1112} p_{12}^2) + 6p_{11}^1 (\mu_{1111} p_2^1 + \mu_{1112} p_2^2) \right) + \\
&+ \left. \left(-6(p_1^1)^2 (p_{12}^2)^2 + 3(p_{11}^1)^2 (p_2^2)^2 + 4p_1^1 p_2^2 (3p_{11}^1 p_{12}^2 + p_{111}^1 p_2^2) \right) \mu_{112} \right) \mu_{22} \Big)
\end{aligned} \tag{5.73}$$

$$\begin{aligned}
p_{112}^2 &= \frac{1}{8(p_1^1)^3 p_2^2 (3\mu_{112}^2 - \mu_{1111}\mu_{22})} \times \\
&\times \left(-4\mu_{112} p_1^1 p_2^2 \left((p_1^1)^4 (\mu_{(5,0)} p_2^1 + \mu_{(4,1)} p_2^2) + 4\mu_{1112} (p_1^1)^3 p_{12}^2 + 6(p_1^1)^2 p_{11}^1 \times \right. \right. \\
&\times \left. \left(\mu_{1111} p_2^1 + \mu_{1112} p_2^2 \right) + 3\mu_{112} (p_{11}^1)^2 p_2^2 + 4p_1^1 \mu_{112} (3p_{11}^1 p_{12}^2 + p_{111}^1 p_2^2) \right) + \\
&+ 4\mu_{1111} (p_1^1)^3 \left((p_1^1)^2 \left(\mu_{1111} (p_2^1)^2 + 2\mu_{1112} p_2^1 p_2^2 + \mu_{112} p_{22}^2 + \mu_{1122} (p_2^2)^2 \right) + \right. \\
&+ \left. 4p_1^1 p_{12}^2 (\mu_{112} p_2^1 + \mu_{122} p_2^2) + p_{11}^1 p_2^2 (2\mu_{112} p_2^1 + \mu_{122} p_2^2) + 2\mu_{22} (p_{12}^2)^2 \right) \Big)
\end{aligned} \tag{5.74}$$

В формулах (5.73), (5.74) все величины известны, кроме p_{22}^2 . Для определения этой производной продифференцируем в особой точке тождество (5.49) три раза по ξ_2 . Из анализа $C_{(0,3)}$ находим:

$$p_{22}^2 = -\frac{1}{3\mu_{22}} \left(3\mu_{112} (p_2^1)^2 + 3\mu_{122} p_2^1 p_2^2 + \mu_{222} (p_2^2)^2 \right). \tag{5.75}$$

Перейдём теперь к определению функционального модуля a . Величина a_F находится просто. Продифференцируем тождество (5.49) в особой точке два раза по ξ_1 и один раз по ξ_2 ($C_{(2,1)}$). Тогда получим, что

$$a_F = \frac{1}{2} \mu_{112} (p_1^1)^2 p_2^2. \tag{5.76}$$

Коэффициент a_α найдём из анализа $C_{(2,1)\alpha}$:

$$\begin{aligned}
a_\alpha = & \frac{1}{2} \left((p_1^1)^2 (\mu_{1112} p_\alpha^1 p_2^2 + p_2^1 (\mu_{1111} p_\alpha^1 + \mu_{111\alpha})) + \mu_{112} p_{2\alpha}^2 + \mu_{112\alpha} p_2^2 \right) + \\
& + 2 p_1^1 (\mu_{112} p_\alpha^1 p_{12}^2 + \mu_{112} p_{1\alpha}^1 p_2^2 + \mu_{11\alpha} p_{12}^1 + \mu_{12\alpha} p_{12}^2) + \\
& + p_{11}^1 (\mu_{112} p_\alpha^1 p_2^2 + \mu_{11\alpha} p_2^1 + \mu_{12\alpha} p_2^2) + \mu_{1\alpha} p_{112}^1 + \mu_{2\alpha} p_{112}^2
\end{aligned} \quad (5.77)$$

В формулу (5.77) входит производная $p_{2\alpha}^2$, которую найдём из анализа производной $C_{(0,2)\alpha}$ тождества (5.49):

$$\begin{aligned}
p_{2\alpha}^2 = & -\frac{1}{2\mu_{22} p_2^2} \left(\mu_{11\alpha} (p_2^1)^2 + \mu_{122} p_\alpha^1 (p_2^2)^2 + 2 p_2^1 p_2^2 (\mu_{112} p_\alpha^1 + \mu_{12\alpha}) + \right. \\
& \left. + \mu_{1\alpha} p_{22}^1 + \mu_{22\alpha} (p_2^2)^2 + \mu_{2\alpha} p_{22}^2 \right)
\end{aligned} \quad (5.78)$$

В выражения (5.77) и (5.78), помимо вычисленных выше, входят также производные p_{22}^1 , p_{1112}^1 , p_{112}^2 . Эти величины, а также p_{1112}^2 могут быть найдены как решения четырёх уравнений $C_{(1,3)}$, $C_{(3,2)}$, $C_{(5,1)}$, $C_{(4,2)}$, найденных их тождества (5.49). Явные выражения слишком громоздкие, и не приведены в данной работе [88].

Таким образом, получены формулы, позволяющие рассчитывать в первом приближении параметры универсальной деформации волновой катастрофы типа $\mathbf{K}_{4,2}$, являющей единой структурно-устойчивой дифракционной фокусировкой как краевых лучей, образующих каустическое остриё \mathbf{A}_3 , так и геометрооптических лучей, образующих каустическое остриё \mathbf{A}_3 с краем. Коэффициенты, образующие вектор $\vec{\lambda}(\vec{\alpha})$, вычислены в линейном приближении, фаза бегущей волны $\theta(\vec{\alpha})$ найдена во втором квадратичном приближении. Для функционального модуля a мы ограничились нулевым приближением и указали путь для явного вычисления линейного приближения.

§ 5.5. Выводы

1. В пятой главе разработаны новые математические методы и алгоритмы моделирования пространственно-временной структуры частотно-модулированных сигналов в плазменном слое с сильной частотной дисперсией на

основе теории краевых катастроф и пространственно-временной геометрической теории дифракции.

2. Применяя развитые в работе качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей, рассмотрены условия образования пространственно-временных краевых катастроф в случае распространения электромагнитных и акустических волн в плазме с частотной дисперсией, опираясь на классификацию краевых катастроф для этого случая, и необходимые и достаточные условия их образования.

3. Исследованы краевая катастрофа F_4 , а также особенности V_{N+1} и C_{N+1} , исследована каустическая структура краевой катастрофы $K_{4,2}=(A_3, A_3)$, распадающейся две каспоидные катастрофы A_3 , соответствующие каустикам семейств краевых и ГО лучей.

4. Разработан комплекс программ для описания каустической структуры краевой катастрофы $K_{4,2}$, возникающей при совместной каспоидной пространственной и временной фокусировке электромагнитного излучения волны в плазменном слое с сильной частотной дисперсией. Приведены каустические структуры краевой катастрофы $K_{4,2}$ при различных коэффициентах универсальной деформации и функционального модуля.

5. Развита метод локальной асимптотики, описывающий дифракционные фокусировки электромагнитных полей в случае, когда семейство первичных (геометрооптических) и вторичных (краевых) лучей образуют фокусировки каспоидного типа (волновая катастрофа $K_{4,2}$). Выполнено математическое моделирование коэффициентов универсальной деформации, функционального модуля и фазы бегущей волны. Получены явные выражения для параметров универсальной деформации.

Заключение

Таким образом, в рамках диссертационной работы получены следующие результаты:

1). На основе применения символьных вычислений разработаны новые численные методы и алгоритмы решения расширенной бихарактеристической системы дифференциальных уравнений для определения характеристик лучевых траекторий, расходимости лучевых потоков, положений каустик и полей на каустиках в декартовых и сферических координатах при распространении монохроматического и частотно-модулированного излучения в анизотропной плазме – ионосфере Земли.

2). На основе новых математических методов численного решения пространственно-временной бихарактеристической системы, опирающихся на символьные вычисления, проведены комплексные исследования с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента распространения монохроматических и частотно-модулированных сигналов в анизотропной ионосферной плазме:

– рассмотрены проекции лучей на разные координатные плоскости для о- и х-волн. Показано, что лучевая структура обыкновенной волны в боковой проекции и в проекции «вид сверху» является зеркально симметричной по отношению к лучевой структуре необыкновенной волны, причем лучевая структура необыкновенной волны является более компактной по сравнению с лучевой структурой обыкновенной волны;

– проанализировано доплеровское изменение частоты для модели нестационарной ионосферы с волнообразным возмущением, и показано, что изменение частоты вдоль луча носит осциллирующий характер и может достигать 2 Гц, а в вертикальных направлениях при некоторых значениях параметров 7 Гц;

– выполнено моделирование распространения радиоволн в ионосфере в зависимости от высоты источника излучения и угла выхода сигнала, исследовано распространение излучения в межслоевом канале обнаружен эффект запирания излучения в канале для определенных частот источника излучения;

– выполнено математическое моделирование влияния отклоняющего поглощения и расходимости на распространение радиоволн в ионосфере с учетом магнитного поля Земли. Исследованы поглощение радиоволны и расходимость вдоль лучей и влияние этих факторов на ослабление амплитуды радиосигнала. Разработана методика оценки абсолютных величин напряженности электромагнитного поля на каустике с учетом расходимости и поглощения.

3). Созданы методы и алгоритмы, позволяющие прогнозировать поправки к данным фазовых и поляризационных измерений с целью компенсации вариации параметров, обусловленные рефракцией сигналов дециметрового диапазона в неоднородной ионосфере Земли. Выполнено комплексное исследование влияния анизотропной ионосферной плазмы на вариации фазы радиосигнала, фарадеевское вращение плоскости поляризации отклонение угла прицеливания от угла прямого видения, отклонение лучевой траектории от прямой линии на различных участках трассы при распространении дециметрового излучения в ионосфере Земли в зависимости от времени наблюдения, широты, наличия локальных ионосферных неоднородностей и др. Показано, что в дециметровом диапазоне частот существенным вариациям в зависимости от точности восстановления ионосферного профиля подвержены такие параметры как угол вращения вектора поляризации и фазовые вариации.

4). На основе метода канонического оператора В.П. Маслова и волновой теории краевых катастроф разработаны качественные и приближенные новые аналитические методы моделирования пространственно-временной структуры частотно-модулированных сигналов в плазменном слое с сильной частотной дисперсией:

– впервые численно исследованы проекции 6-мерного фазового пространства на смешанные координатно-импульсные подпространства в случае распространения излучения в ионосферной плазме с учетом спорадического слоя и локальной неоднородности;

– разработана методика расчета амплитудных множителей вдоль лучей для разных карт, проанализированы сингулярности, связанные с касанием лучей каустик.

5). Разработаны новые математические методы и алгоритмы моделирования пространственно-временной структуры частотно-модулированных сигналов в плазменном слое с сильной частотной дисперсией на основе теории краевых катастроф и пространственно-временной геометрической теории дифракции. В частности:

– применяя развитые в работе качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей и классификацию краевых катастроф, исследованы необходимые и достаточные условия образования пространственно-временных краевых катастроф в случае распространения электромагнитных и акустических волн в плазме;

– разработан комплекс программ для описания каустической структуры краевой катастрофы $K_{4,2}$, возникающей при совместной каспоидной пространственной и временной фокусировке электромагнитного излучения волны в плазме. Построены каустические структуры краевой катастрофы $K_{4,2}$ при различных коэффициентах универсальной деформации и функционального модуля;

– развит метод локальной асимптотики, описывающий дифракционные фокусировки электромагнитных полей в случае, когда семейства геометрооптических и краевых лучей образуют фокусировки каспоидного типа (волновая катастрофа $K_{4,2}$). Выполнено математическое моделирование коэффициентов универсальной деформации, функционального модуля и фазы бегущей волны.

Список литературы

1. Аллин И.В., Крюковский А.С. Особенности распространения видеоимпульсов в плазме в окрестности светового конуса. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. Т.12. № 8. С.26-40.
2. Андреева Е.С., Куницын В.Е., Терещенко Е.Д. Фазоразностная радиотомография ионосферы // Геомагнетизм и аэрономия. 1992. Т.32, №1. С. 104–110.
3. Андреева Е.С., Крюковский А.С., Куницын В.Е., Лукин Д.С., Растягаев Д.В., Кирьянова К.С. Моделирование лучевой и каустической структуры электромагнитных полей по данным радиотомографии ионосферы в окрестности экваториальной аномалии. // «Распространение радиоволн», сб. докл. XXIII Всероссийской научной конференции. (23–26.05.2011; Йошкар-Ола) /Йошкар-Ола: Марийский государственный технический университет, 2011. Т.3 С. 288–291.
4. Анютин А. П. Асимптотическая теория распространения радиосигналов в неоднородной плазме. //Распространение радиоволн в ионосфере. М.: ИЗМИР АН СССР. 1978. С.29–36.
5. Анютин А.П. Равномерная модификация метода ВГТД в случае произвольной диспергирующей среды и каустик ВГО и ВГТД лучей. // Дифракция и распространение волн. Междув. сборник / М.: МФТИ, 1985. С. 32–36.
6. Анютин А. П. Об отражении АМ и ЧМ сигналов от неоднородной плазмы. //Распространение радиоволн в ионосфере. М.: ИЗМИР АН СССР. 1978. С.29–36
7. Анютин А.П., Боровиков В.А. Равномерные асимптотики интегралов от быстроосциллирующих функций с особенностями внеэкспоненциального множителя: Препринт / ИРЭ АН СССР. М., 1984, № 42 (414). 54 с.

8. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, часть I. 1982. 304 с.; часть II, 1984. 335 с.
9. Арнольд В.И. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы ЛИ B_{N+1} , C_{N+1} , F_4 и особенности эволют // УМН, 1978. Т. 33. Вып. 5. С. 91–105.
10. Бабич В.М., Булдырев В.С., Молотков И.А. Пространственно-временной лучевой метод: Линейные и нелинейные волны. – Л.: Ленинградский университет, 1985. 272 с.
11. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003.– 632 с.
12. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1971. 328 с.
13. Бова Ю.И. Математическое моделирование распространения радиоволн в ионосфере земли в зависимости от высоты источника излучения // Вестник Российского нового университета. Серия: Сложные системы: модели, анализ и управление. 2016. № 3. С. 10–14.
14. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Кутуза Б.Г., Лукин Д.С. Математическое моделирование вращения вектора поляризации в ионосферной плазме // В сборнике: Всероссийские открытые Армандовские чтения “Современные проблемы дистанционного зондирования, радиолокации, распространения и дифракции волн”. Муром, 2019. С. 158–167.
15. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Кутуза Б.Г., Лукин Д.С. Исследование влияния ионосферы земли на распространение радиоволн в высокочастотном диапазоне // Радиотехника и электроника. 2019. Т. 64. № 8. С. 752-758. (Bova Y.I., Kryukovskii A.S., Lukin D.S., Kutuza B.G. Investigation of the influence of the earth ionosphere on the radio wave propagation in the high-frequency range // Journal of Communications Technology and Electronics. 2019. V. 64. No 8. P. 740-746.)

16. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Кутуза Б.Г., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Математическое моделирование поляризационных характеристик радиоволн в ионосфере на основе данных радиотомографии // В книге: Материалы 18-й Всероссийской открытой конференции «Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса». Электронный сборник материалов конференции. Институт космических исследований Российской академии наук. Москва, 2020. С. 386.
17. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Кутуза Б.Г., Лукин Д.С. Математическое моделирование вращения вектора поляризации в ионосферной плазме // В сборнике: Всероссийские открытые Армандовские чтения. Современные проблемы дистанционного зондирования, радиолокации, распространения и дифракции волн. 2019. С. 158–167.
18. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Кутуза Б.Г., Палкин Е.А. Влияние ионосферы Земли на фарадеевское вращение вектора поляризации радиоволн в высокочастотном диапазоне // XII Всероссийская научно-техническая конференция "Радиолокация и радиосвязь" Москва, 26–28 ноября 2018 года. Радиолокация и радиосвязь: сборник трудов. М.: ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. 2018. С. 35–39.
19. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Исследование зависимости лучевого распространения в ионосфере земли от высоты источника излучения // В сборнике: VII Всероссийские Армандовские чтения. Современные проблемы дистанционного зондирования, радиолокации, распространения и дифракции волн материалы Всероссийской научной конференции. 2017. С. 149–159.
20. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Численное моделирование радиосигнала в анизотропной среде с учетом отклоняющего поглощения методом бихарактеристик. // Труды Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. 2018. № 662. С. 26–32.

21. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Исследование распространения частотно-модулированного излучения в ионосфере с учетом отклоняющего поглощения и влияния внешнего магнитного поля // Вестник Российского нового университета. Серия: Сложные системы: модели, анализ и управление. 2017. № 3. С. 5–16.
22. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Моделирование распространения частотно-модулированного излучения в анизотропной ионосферной плазме // Электромагнитные волны и электронные системы. 2017. Т. 22. № 5. С. 4–11.
23. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Численное моделирование распространения частотно-модулированного сигнала в анизотропной среде с учетом отклоняющегося поглощения // В сборнике: V Всероссийская Микроволновая конференция Материалы конференции. 2017. С. 258–262.
24. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Моделирование распространения частотно-модулированного сигнала в ионосферной плазме с учетом отклоняющего поглощения и влияния внешнего магнитного поля // Физические основы приборостроения. 2017. Т. 6. № 4 (26). С. 34–45.
25. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Математическое моделирование распространения частотно-модулированных электромагнитных волн в ионосфере для задач радиосвязи // В сборнике: Технологии информационного общества. Сборник трудов XII Международной отраслевой научно-технической конференции. 2018. С. 44–46.
26. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Распространение частотно-модулированного излучения электромагнитных волн в ионосфере земли с учетом поглощения и внешнего магнитного поля // Радиотехника и электроника. 2019. Т. 64. № 1. С. 3-14. (Bova Y.I., Kryukovsky A.S., Lukin D.S. Propagation of frequency-modulated electromagnetic radiation in the earth's ionosphere with allowance for absorption and the external magnetic field //

Journal of Communications Technology and Electronics. 2019. V. 64. No 1. P. 1-12.)

27. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Математическое моделирование распространения частотно-модулированных электромагнитных волн в ионосфере для задач радиосвязи // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2018. Т. 12. № 12. С. 22–32.
28. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Применение пространственно-временной бихарактеристической системы для численного моделирования распространения радиоволн в ионосфере с учетом отклоняющего поглощения // В сборнике: Современные проблемы дистанционного зондирования, радиолокации, распространения и дифракции волн. материалы II Всероссийской научной конференции по проблемам радиофизики и дистанционного зондирования сред, проводимой в рамках VIII Всероссийских Армандовских чтений. Муромский институт (филиал) ФГБОУ ВО "Владимирский государственный университет имени им. А.Г. и Н.Г. Столетовых". 2018. С. 79–93.
29. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Математическое моделирование влияния ионосферы земли на структуру радиоволн в окрестности каустики //Труды Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. 2020. № S674. С. 18–22.
30. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Применение метода локальной асимптотики для численного моделирования структуры электромагнитного поля в каустических областях // В сборнике: Всероссийские открытые Армандовские чтения Современные проблемы дистанционного зондирования, радиолокации, распространения и дифракции волн. 2019. С. 30–37.
31. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Кутуза Б.Г., Лукин Д.С., Стасевич В.И. Исследование влияния ионосферы на распространение электромагнитных волн р-диапазона // Физические основы приборостроения. 2018. Т. 7. № 1 (27). С. 54–61.

32. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Кутуза Б.Г., Палкин Е.А. Исследование влияния ионосферы Земли на фарадеевское вращение вектора поляризации радиоволн в высокочастотном диапазоне // Вестник Российского нового университета. Серия: Сложные системы: модели, анализ и управление. 2018. № 4. С. 19–27.
33. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Кутуза Б.Г., Палкин Е.А. Влияние ионосферы земли на фарадеевское вращение вектора поляризации радиоволн в высокочастотном диапазоне // В сборнике: Радиолокация и радиосвязь Сборник трудов. 2018. С. 35–39.
34. Боровиков В.А., Кинбер Б.Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. 248 с.
35. Вергизаев И.А. Применение теории катастроф для исследования пространственно-временных фокусировок // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. / М.: МФТИ, 1999.
36. Вертоградов Г.Г., Урядов В.П., Выборнов Ф.И. Моделирование распространения декаметровых радиоволн в условиях волновых возмущений концентрации электронов // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. 2018. Т. 61. № 6. С. 462–473.
37. Гершман Б.Н., Ерухимов Л.М., Яшин Ю.Я. Волновые явления в ионосферной и космической плазме. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1984. 392 с.
38. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. 2-е изд. М.: Наука, 1967. 684 с.
39. ГОСТ 256451. 46–898. Ионосфера Земли. Модель глобального распределения концентрации, температуры и эффективной частоты соударения электронов. Часть 1. Таблицы параметров. М.: Издательство стандартов, 1990 г. 30с.
40. Гузминов П.П., Заец П.Г., Лукин Д.С. Палкин Е.А., Чешев Ю.В. Исследование ионосферы амплитудно-доплеровским методом. Постановка

- эксперимента, методика обработки данных на ЭВМ // Распространение и дифракция в неоднородных средах. М.: МФТИ, 1989. С. 15–23.
41. Данилкин Н.П., Жбанков Г.А., Журавлев С.В., Котонаева Н.Г. Трансионосферное радиозондирование с учетом отражения радиоволн от Земли // Геомагнетизм и аэрономия. 2014. Т. 54. № 4. С. 508.
42. Дорохина Т.В., Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Математическое компьютерное моделирование волновых полей типа катастроф. //Распространение радиоволн: сборник докладов XXI Всероссийской научной конференции. Йошкар-Ола, 25–27 мая 2005 г. /Йошкар-Ола: МарГТУ, 2005. Т.2. С. 336–339.
43. Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Информационная система «Волновые катастрофы в радиофизике, акустике и квантовой механике». // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. Т.12. № 8. С.71-75.
44. Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Волкова Е.В., Костьо А.О., Павлова М.В. Создание информационной системы волновой теории катастроф и её применение при математическом моделировании. //Вестник Российского нового университета. 2007. Выпуск 2. / М.: РосНОУ, 2007. С. 91–107.
45. Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Малышенко А.Б. Разработка численных алгоритмов расчета и визуализации волновых катастроф. //Вестник Российского нового университета. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика» / М.: РосНОУ, 2008. Выпуск 3. С. 25–48.
46. Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Принципы разработки мультимедийной информационной системы «Волновые катастрофы в радиофизике, акустике и квантовой механике». // Россия: перспективы прорыва в цивилизацию знаний. Информационные системы и компьютерные технологии. Тезисы докл. V Межвузовской научной конференции Российского нового университета, 16-17.04.2004 г. / М.: РосНОУ, 2004. С. 291–293.

47. Дронов И.Ф., Ипатов Е.Б., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Табулирование дифракционных интегралов // Распространение радиоволн в ионосфере / М.: ИЗМИР АН СССР, 1978. С. 57–63.
48. Дубровский К.М., Ипатов Е.Б., Палкин Е.А. Исследование влияния пространственной фокусировки коротких радиоволн на структуру амплитудных профилей сигналов ВНЗ // Распространение и дифракция волн. М.: МФТИ, 1988. С. 123–128.
49. Дэвис К. Радиоволны в ионосфере М.: Мир.1973. 502
50. Захаров В.Е., Котова Д.С. Моделирование дисперсионных искажений ЛЧМ-импульсов радиоволн в ионосфере. // Труды XXIV Всероссийской научной конференции «Распространение радиоволн», (29 июня — 5 июля 2014; Иркутск) / Иркутск: ИСЗФ СО РАН, 2014. Т.4. С. 97–100.
51. Захаров В.И., Куницын В.Е. Возможности регионального мониторинга ионосферы на базе радиозатменного зондирования с использованием высокоорбитальных навигационных спутниковых систем // Электромагнитные волны и электронные системы. 2008. Т. 13. № 2-3. С. 82–89.
52. Зернов Н.Н. Рассеяние волн КВ диапазона при наклонном распространении в ионосфере. Известия вузов. Радиофизика. 23, 2, 151–158, 1980.
53. Иванов В. А., Иванов Д. В., Лащевский А. Р., Рябова М. И. Исследование дисперсионных искажений широкополосных элементов непрерывного ЛЧМ-сигнала при изменении их длительности сверх критической. // Вестник Поволжского государственного технологического университета. Серия: Радиотехнические и инфокоммуникационные системы, 2014. № 1(20). С. 43–53.
54. Иванов В.А., Иванов Д.В., Михеева Н.Н., Рябова М.И. Дисперсионные искажения системных характеристик широкополосных ионосферных радиоканалов // Йошкар-Ола, 2015.

55. Иванов Д.В. Методы и математические модели исследования распространения в ионосфере сложных декаметровых сигналов и коррекции их дисперсионных искажений. Монография. Йошкар-Ола: Марийский гос. технический ун-т. 2006. 266 с.
56. Ильин Н.В., Куркин В.И., Носов В.Е., Орлов И.И., Пономарчук С.Н., Хахинов В.В. // Моделирование характеристик ЛЧМ-сигналов при наклонном зондировании ионосферы Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца. 1995. № 103. С. 149.
57. Ипатов Е.Б., Глушнев С.А., Чивилев В.И., Палкин Е.А. Моделирование дисперсионных эффектов радиосигналов в неоднородной ионосфере Земли // РЭ, 2003, Т.48, № 12, С. 1436–1442.
58. Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Краевые катастрофы и асимптотики // ДАН СССР. 1986. Т. 291. № 4. С. 823–827.
59. Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Алгоритм расчета спецфункций краевых катастроф S_{N+1} . Амплитудно-фазовая структура интеграла Эйри – Френеля // Распространение и дифракция волн. /М.: МФТИ, 1988. С. 144–162.
60. Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Методы моделирования распространения электромагнитных волн в ионосфере с учетом распределений электронной концентрации и магнитного поля Земли // Радиотехника и электроника. 2014. Т. 59. № 12. С. 1180–1187.
61. Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В., Чистяков Д.Н. Компрессия, фокусировка и инверсия частотно-модулированных радиоимпульсов в пространственно-временных областях типа катастроф. // РЭ, 2001. Т.46. №7 С.816-825.
62. Ипатов Е.Б., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численная реализация метода канонического оператора Маслова в задачах распространения коротких радиоволн в ионосфере Земли. // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т.33. № 5. С. 562–573.

63. Ипатов Е.Б., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численные методы расчета специальных функций волновых катастроф // ЖВМ и МФ. 1985. Т. 25. № 2. С. 224–236.
64. Ипатов Е.Б., Палкин Е.А., Чивилев В.И., Ипатов Д.Е. Численное моделирование характеристик радиосигналов в локально возмущенной неоднородной анизотропной ионосфере Земли. //Труды МФТИ, 2012, Т.4, № 2, С.47-53.
65. Казанцев А.Н., Лукин Д.С. Исследование ионосферного распространения радиоволн // РЭ. 1967. Т.12. № 11. С. 1891–1910.
66. Казанцев А.Н., Лукин Д.С. Механизм распространения радиоволн излучаемых ИСЗ. //Космические исследования, 1966. Т.4. № 2. С.221-237.
67. Казанцев А.Н., Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Метод исследования распространения радиоволн в неоднородной магнитоактивной ионосфере. // Космические исследования, 1967. Т. 5. Вып. 4. С. 593–600.
68. Карепов С.Л., Крюковский А.С. Исследование топологии характерных сечений волновых катастроф. // Труды XX Всероссийской конференции по распространению радиоволн. Нижний Новгород, 2–4 июля 2002 г. / Н. Новгород, Талам, 2002. С. 453–454.
69. Карепов С.Л., Крюковский А.С. Расчет волнового поля методом интерполяционной локальной асимптотики. //Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46. № 1. С. 40–46.
70. Кирьянова К.С., Крюковский А.С. Влияние локальных ионосферных неоднородностей на распространение декаметровых радиоволн. // Физические основы приборостроения, М.: НТЦ УП РАН. 2012. Т.1. №3. С. 19–25.
71. Кирьянова К.С., Крюковский А.С. Особенности лучевого распространения радиоволн в окрестности пространственно-модулированного ионосферного слоя. //Труды XIII международной научной конференции «Цивилизация знаний: проблемы и перспективы социальных

- коммуникаций», Москва, 20-21 апреля 2012 г.– Часть 2.– М.: РосНОУ, 2012.– С. 30–34.
72. Кирьянова К.С., Крюковский А.С. Особенности лучевого распространения радиоволн в ионосфере Земли// Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2012. № 11. – С. 25–28.
73. Кирьянова К.С., Крюковский А.С. Особенности лучевых траекторий в окрестности ионосферной локальной неоднородности с пониженной электронной концентрацией. // Электромагнитные волны и электронные системы, М.: Радиотехника. 2012. Т.17. №9. С. 42–47.
74. Котова Д.С. Алгоритм трехмерной "пристрелки" на основе численной модели распространения коротких радиоволн в ионосфере // Physics of Auroral Phenomena. 2018. Т. 41. № 1 (42). С. 129–130.
75. Кравцов Ю.А. О двух новых асимптотических методах в теории распространении волн в неоднородных средах // Акуст. ж., 1968. Т. 14. Вып. 1. С. 1–24.
76. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука. 1980. 304 с.
77. Кравцов Ю.А., Островский Л.А., Степанов Н.С. Геометрическая оптика неоднородных и нестационарных движущихся сред. //ТИИЭР. 1974. Т.62. № 11. С.91 – 112.
78. Краснушкин П. Е. Проблема распространения длинных и сверхдлинных радиоволн вокруг Земли и нижние слои ионосферы (С, D, E) в свете теории информации // ДАН. 1961. Т. 139, № 1. С.67-70.
79. Крашенинников И.В., Попов А.В., Стаханова И.Г. Анализ модовой структуры волнового поля на сверхдлинной радиотрассе Москва–антарктическая станция “Академик Вернадский” // Геомагнетизм и аэрномия. 2016. Т. 56. № 5. С. 662–669.
80. Крашенинников И.В., Черкашин Ю.Н. Захват зондирующих радиоволн в искусственный крупномасштабный ионосферный резонатор // Геомагнетизм и аэрномия. 2016. Т. 56. № 2. С. 228.

81. Крюковский А. С. Метод обыкновенных дифференциальных уравнений для расчета специальных функций волновых катастроф (СВК) // Дифракция и распространение электромагнитных и акустических волн. /М.: МФТИ, 1992. С.29-48.
82. Крюковский А.С. Локальные равномерные асимптотики волновых полей в окрестности основных и краевых каспидных каустик. // РЭ. 1996. Т.41. №1. С. 59–65.
83. Крюковский А.С. Необходимые и достаточные условия образования краевых катастроф. //Проблемы дифракции и распространения волн. Межвед. сб./ М.: МФТИ, 1994, с. 47–54.
84. Крюковский А.С. Необходимые и достаточные условия образования основных волновых катастроф с корангом, равным двум. // Распространение и дифракция электромагнитных волн. Междувед.сб./М.: МФТИ. 1993. С. 4–19.
85. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф М.: РосНОУ, 2013. 368 с.
86. Крюковский А.С., Бова Ю.И. Исследование параметров катастрофы, описывающей структурно-устойчивую фокусировку первичных и вторичных краевых волн методом локальной асимптотики // XIII Международная отраслевая научно-техническая конференция «Технологии и информационного общества». 20–21 марта 2019 г., Москва. / Сборник трудов. М.: ИД Медиа Паблшер. 2019. Т.1. С. 444–446.
87. Крюковский А.С., Бова Ю.И. Классификация пространственно-временных краевых катастроф и равномерные асимптотические решения волновых уравнений, описывающих распространение волн в ионосферной плазме // Вестник Российского нового университета. Серия: Сложные системы: модели, анализ и управление. 2016. № 4. С. 5–12.
88. Крюковский А.С., Бова Ю.И. Математическое моделирование параметров универсальной деформации краевой катастрофы $K_{4,2}$ методом локальной

- асимптотики // Вестник Российского нового университета. Серия: Сложные системы: модели, анализ и управление. 2019. № 1. С. 11–18.
89. Крюковский А.С., Бова Ю.И. Пространственно-временные краевые катастрофы и равномерные асимптотические решения волновых уравнений, описывающие распространение волн в холодной плазме// В сборнике: Технологии информационного общества XI Международная отраслевая научно-техническая конференция: сборник трудов. 2017. С. 304–305.
90. Крюковский А.С., Бова Ю.И., Кутуза Б.Г. Влияние ионосферы на работу радиолокатора с синтезированной апертуры Р-диапазона В сборнике: Радиолокация и радиосвязь Материалы XI Всероссийской научно-технической конференции. 2017. С. 364–368.
91. Крюковский А.С., Зайчиков И.В. Особенности распространения радиоимпульсов в средах с дисперсией. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2008. Т.13. № 8. С. 36–41.
92. Крюковский А.С., Кирьянова К.С. Динамическое моделирование распространения радиоволн в окрестности экваториальной аномалии на основе метода бихарактеристик // Электромагнитные волны и электронные системы. 2011. Т.16. № 8. С. 21–25.
93. Крюковский А.С., Куркин В.И., Ларюнин О.А., Лукин Д.С., Подлесный А.В., Растягаев Д.В., Черняк Я.М. Численное моделирование амплитудных карт для скорректированной модели IRI-2012 с плавными возмущениями ионосферы // Радиотехника и электроника. 2016. Т. 61. № 8. С. 794–799.
94. Крюковский А.С., Кутуза Б.Г., Бова Ю.И. Исследование влияния ионосферы земли на распространение радиоволн Р-диапазона// Вестник Российского нового университета. Серия: Сложные системы: модели, анализ и управление. 2017. № 2. С. 7–12.
95. Крюковский А.С., Лукин Д.С. К вопросу о поле в окрестности каустического острия в ионосферном плазменном слое. // РЭ, 1981. Т. 26. № 6. С. 1121–1126.

96. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Локальная асимптотика быстроосциллирующих интегралов, описывающих волновое поле в областях фокусировки // Дифракция и распространение электромагнитных волн: Междувед. сб. / МФТИ. М., 1984. С. 39–53.
97. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Построение равномерной геометрической теории дифракции методами краевых и угловых катастроф. // РЭ. 1998. Т. 43. № 9. С. 1044–1060.
98. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Краевые и угловые катастрофы в равномерной геометрической теории дифракции. Учебное пособие. М.: МФТИ, 1999. 134 с.
99. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Локальная асимптотика быстроосциллирующих интегралов, описывающих волновое поле в областях фокусировки // Дифракция и распространение электромагнитных волн: Междувед. сб. / МФТИ. М., 1984. С. 39–53.
100. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Локальное асимптотическое описание электромагнитного поля в окрестности каустического острия в плоскостной среде. // Вопросы дифракции электромагнитных волн. / МФТИ. М., 1982. С. 40–45.
101. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Теория расчета эталонных фокальных и дифракционных электромагнитных полей на основе специальных функций волновых катастроф. // Радиотехника и электроника, 2003. Т.48. №8. С. 912–921.
102. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Бутримов М.А. Исследование различий между результатами численного моделирования лучевой структуры радиоволн при использовании данных, полученных с помощью экспериментов и из эмпирической модели ионосферы IRI // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2014. Т. 8. № 12. С. 41–46.
103. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Бова Ю.И. Моделирование поля в окрестности каустик обыкновенной и необыкновенной волн при ионосферном распространении // Радиотехника и электроника. 2020. Т.

65. № 12. С. 1160-1169. (Kryukovskii A.S., Lukin D.S., Bova Y.I. Simulation of the field in the vicinity of caustics of ordinary and extraordinary waves during ionospheric propagation // Journal of Communications Technology and Electronics. 2020. V. 65. No 12. P. 1364-1373.)
104. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Кирьянова К.С. Метод расширенной бихарактеристической системы при моделировании распространения радиоволн в ионосферной плазме. // Радиотехника и электроника, М.: Наука. 2012. Т.57. №9. С. 1028–1034.
105. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Равномерные асимптотики и угловые катастрофы. // Доклады РАН. 1995. Т.341. № 4. С. 456–459.
106. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Равномерные асимптотики интегралов от быстроосциллирующих функций с вырожденными седловыми точками: Препринт /ИРЭ АН СССР. М., 1984. № 41 (413). 75 с.
107. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Сопоставление интегральных асимптотических методов // Труды X школы-семинара по дифракции и распространению волн. 7-15.02.1993. /М.: МФТИ. 1993. С.3–35.
108. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Волновые катастрофы – фокусировки в дифракции и распространении электромагнитных волн. // РЭ, 2006. Т.51. №10. С. 1155–1192.
109. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Краевые и угловые катастрофы в задачах дифракции и распространения волн. Казань: Каз. авиационный ин-т, 1988. 199 с.
110. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Применение теории краевых катастроф для построения равномерных асимптотик быстроосциллирующих интегралов // Дифракция и распространение волн. Междувед. сборник / МФТИ. М., 1985. С. 4–21.
111. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численное сравнение двух асимптотических методов решения задач дифракции волн в плавнонеоднородных средах // Изв. МВ и ССО СССР (Радиофизика). 1986. Т. 29. № 1. С. 79–88.

112. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Теория катастроф в проблемах стационарной и нестационарной дифракции // Труды X школы – семинара по дифракции и распространению волн. 7 -15.02.1993. /М.: МФТИ. 1993. С. 36–111.
113. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В., Скворцова Ю.И. Математическое моделирование распространения частотно-модулированных радиоволн в ионосферной плазме // Радиотехника и электроника, 2015, Т. 60, № 10. (Kryukovskii A.S., Lukin D.S., Rastyagaev D.V., Skvortsova Y.I. Mathematical simulation of propagation of frequency-modulated radio waves in ionospheric plasma // Journal of Communications Technology and Electronics. 2015. V. 60. No 10. P. 1049–1057).
114. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В., Скворцова Ю.И. Численное моделирование распространения пространственно-временных частотно-модулированных радиоволн в анизотропной среде // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2015. Т. 9. № 9. С. 40–47.
115. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Скворцова Ю.И. Проекция лучевых и каустических структур в координатно-импульсных подпространствах предканонического оператора Маслова в ионосферной плазме // В сборнике: Радиофизические методы в дистанционном зондировании сред. материалы VI Всероссийской научной конференции. Муромский институт (филиал) Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Владимирский государственный университет имени А. Г. и Н. Г. Столетовых». 2016. С. 37–44.
116. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Исследование влияния локальных неоднородностей ионосферной плазмы на распространение коротких радиоволн. //Вестник Российского нового университета. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика» / М.: РосНОУ, 2010. Выпуск 3. С. 17–25.

117. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Исследование особенностей распространения коротких радиоволн в неоднородной анизотропной ионосфере. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2009. Т.14. № 8. С. 17–26.
118. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Классификация и равномерное асимптотическое описание пространственно-временных трехмерных краевых фокусировок волновых полей. // РЭ, 2005. Т.50. №10. С. 1221–1230.
119. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Математическое моделирование распространения радиоволн в анизотропной неоднородной ионосфере. // Вестник Российского нового университета. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика» / М.: РосНОУ, 2009. Выпуск 2. С. 7–14.
120. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Моделирование лучевой и каустической структуры электромагнитных полей по данным радиотомографии ионосферы в окрестности экваториальной аномалии. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2010. Т.15. № 8. С. 5–11.
121. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Теория пространственной фокусировки видеоимпульсов в диспергирующих средах. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. Т.12. № 8. С.15-25.
122. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В., Скворцова Ю.И. Моделирование распространения частотно-модулированного радиоизлучения в ионосферной плазме. // V Всероссийские Армандовские чтения [Электронный ресурс]: Сверхширокополосные сигналы в радиолокации, связи и акустике / Материалы V Всероссийской научной конференции (Муром, 26.06.-1.07. 2015 г.) – Муром: Изд.-полиграфический центр МИ ВлГУ, 2015. –237 с. ISSN 2304–0297 (CD-ROM). С. 131–137.
123. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В., Скворцова Ю.И. Численное моделирование распространения пространственно-временных

- частотно-модулированных радиоволн в анизотропной среде. // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2015. Т. 9. № 9. С. 40–47.
124. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Скворцова Ю.И. Проекция лучевых и каустических структур в координатно-импульсных подпространствах предканонического оператора Маслова в ионосферной плазме // VI Всероссийские Армандовские чтения [Электронный ресурс]: Радиофизические методы в дистанционном зондировании сред / Материалы VII Всероссийская научная конференция «Радиофизические методы в дистанционном зондировании сред» (Муром, 31.05-2.06.2016 г.) – Муром: Изд.-полиграфический центр МИ ВлГУ, 2015. –464 с. ISSN 2304–0297 (CD-ROM). С. 37–44.
125. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Исследование устойчивых фокусировок, возникающих при нарушении симметрии волнового фронта. // Дифракция и распространение электромагнитных волн. Сб./ М.: МФТИ, 1993. С.20-37.
126. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. О необходимых и достаточных условиях образования каспидных катастроф. // Распространение и дифракция волн в неоднородных средах. Сб./ М.: МФТИ 1989. С.56-60.
127. Крюковский А.С., Растягаев Д.В., Вергизаев И.А. Трехмерные пространственно-временные фокусировки волновых полей типа катастроф. // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44. № 4. С. 455–462.
128. Крюковский А.С., Растягаев Д.В., Скворцова Ю.И. Исследование распространения частотно-модулированных пространственно-временных сигналов в неоднородной анизотропной ионосфере //Вестник Российского нового университета. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика» / М.: РосНОУ, 2013. Выпуск 4. – С. 47–52.
129. Крюковский А.С., Растягаев Д.В., Скворцова Ю.И. Распространение частотно-модулированных пространственно-временных радиоволн в анизотропной ионосфере. // Труды XXIV Всероссийской научной конференции «Распространение радиоволн», (29 июня — 5 июля 2014; Иркутск) / Иркутск: ИСЗФ СО РАН, 2014. Т.4. С. 126–129.

130. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Влияние пространственно-временных возмущений ионосферной плазмы на распространение радиоволн // Известия высших учебных заведений. Физика. 2016. Т. 59. № 12-3. С. 131–135.
131. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Математическое моделирование распространения радиоволн в нестационарной плазме с учетом кривизны поверхности Земли и ионосферных слоёв // Вестник Российского нового университета. Серия: Сложные системы: модели, анализ и управление. 2016. № 1-2. С. 34–40.
132. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Исследование влияния пространственно-временных возмущений ионосферной плазмы на распространение радиоволн. //Труды XV международной научной конференции «Цивилизация знаний: российские реалии», Москва, 24–25 апреля 2015 г.– М.: РосНОУ, 2015.– С. 347–352.
133. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Исследование проекций лучевых и каустических структур в координатно-импульсных подпространствах предканонического оператора Маслова // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление» / М.: РосНОУ, 2015. Выпуск 9. – С. 17–26.
134. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Каустическая структура краевой катастрофы $K_{4,2}$. // Вестник Российского нового университета. Серия «Сложные системы: модели, анализ и управление» / М.: РосНОУ, 2015. Выпуск 10. – С. 5–9.
135. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Лучи и каустики в координатно-импульсных подпространствах предканонического оператора Маслова при распространении радиоволн в ионосферной плазме // Технологии информационного общества. X Международная отраслевая научно-техническая конференция: сборник трудов. М.: ООО "Издательский дом Медиа паблишер", 2016. С. 276–277.

136. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Математическое моделирование распространения радиоволн в нестационарной плазме с учетом кривизны поверхности Земли и ионосферных слоев // Вестник Российского нового университета. Серия: Сложные системы: модели, анализ и управление. 2016. № 1-2. С. 34–40.
137. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. О распространении частотно-модулированного излучения в ионосферной плазме. //Труды XV международной научной конференции «Цивилизация знаний: российские реалии», Москва, 25–26 апреля 2014 г.– Часть 2.– М.: РосНОУ, 2014.– С. 436–438.
138. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Описание пространственно-временной структуры частотно-модулированного импульса методами волновой теории катастроф. // IV Всероссийские Армандовские чтения [Электронный ресурс]: Радиофизические методы в дистанционном зондировании сред / Материалы VI Всероссийской научной конференции (Муром, 27–29 мая 2014 г.) – Муром: Изд.-полиграфический центр МИ ВлГУ, 2014. –296 с. ISSN 2304–0297 (CD-ROM) ISSN 2304–0254 (CD-ROM). С. 85–92.
139. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Применение теории катастроф для описания пространственно-временной структуры частотно-модулированного сигнала в плазме // Электромагнитные волны и электронные системы. 2013. Т. 18. № 8. С. 18–23.
140. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Пространственно-временные возмущения ионосферной плазмы и их влияние на распространение радиоволн //В сборнике: «Распространение радиоволн». XXV Всероссийская открытая научная конференция, посвященная 80-летию отечественных ионосферных исследований. РРВ-25. 2016. С. 106–109.
141. Куницын В.Е., Захаров В.И., Зиенко А.С., Падохин А.М., Леонтьева Е.А. Сравнение погрешностей контактного и радиозатменного методов

- определения метеопараметров. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. Т. 12. № 8. С. 41–46.
142. Куницын В.Е., Терещенко Е.Д., Андреева Е.С. Радиотомография ионосферы. М.: Физматлит, 2007. 336 с.
143. Куницын В.Е., Терещенко Е.Д., Андреева Е.С., Нестеров И.А. Спутниковое радиозондирование и радиотомография ионосферы // Успехи физических наук. 2010. Т. 180. № 5. С. 548.
144. Куркин В.И., Ларюнин О.А., Подлесный А.В., Пежемская М.Д., Чистякова Л.В. Морфологические особенности признаков перемещающихся ионосферных неоднородностей по данным слабонаклонного зондирования ионосферы // Оптика атмосферы и океана. 2014. Т. 27. № 2. С. 158–163.
145. Куркин В.И., Орлов И.И., Попов В.Н. Метод нормальных волн в проблеме коротковолновой радиосвязи. М.: Наука, 1981, 124 с.
146. Кутуза Б.Г., Мошков А.В. Влияние фарадеевского вращения плоскости поляризации в ионосфере при измерении их космоса радиоизлучения поверхности океана. // Исследование Земли из космоса. 1988. № 5. С. 94–98.
147. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1982. 624 с.
148. Лукин Д.С., Заец П.Г., Макальский С.А., Чешев Ю.А., Школьников В.А., Палкин Е.А. Доплеровский метод экспериментального исследования квазиволновых процессов в ионосфере. // Сб. Радиофизические методы обработки сигналов / М., МФТИ. 1981. С. 49–52.
149. Лукин Д.С., Ипатов Е.Б., Палкин Е.А. Алгоритм численного расчета специальных функций типа быстро осциллирующих интегралов. // Вопросы дифракции электромагнитных волн. / МФТИ, М., 1982. С. 21–35.
150. Лукин Д.С., Крюковский А.С., Черняк Я.М. Анализ влияния моделей магнитного поля при численном моделировании распространения коротких волн в ионосфере Земли // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2014. Т. 8. № 12. С. 55–58.

151. Лукин Д.С., Мальцев А.В., Спиридонов Ю.Г. Пакет прикладных программ для решения прямых и обратных задач распространения радиоволн в околопланетной плазме // Дифракция и распространение электромагнитных волн. М.: МФТИ, 1984. С. 77–83.
152. Лукин Д.С., Мартьянов А.С., Спиридонов Ю.Г., Школьников В.А. Образование каустик при радиопросвечивании ионосферы Венеры // Труды МФТИ, сер. «Общая и молекулярная физика», М. МФТИ, 1979. Вып. II С. 114–116.
153. Лукин Д.С., Палкин Е.А. Применение канонического оператора Маслова для численного решения задач дифракции и распространения волн в неоднородных средах // Теоретическое и экспериментальное исследование распространения декаметровых радиоволн / М.: ИЗМИР АН СССР, 1976. С. 149–167.
154. Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. М.: МФТИ, 1982. 159 с.
155. Лукин Д.С., Палкин Е.А. Экспериментальные и численные исследования дифракционных структур волнового поля в областях фокусировки // Распространение декаметровых радиоволн / М.: ИЗМИР АН СССР. 1980. С. 37–46.
156. Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Применение метода характеристик для численного решения задач распространения радиоволн в неоднородной и нелинейной среде. // Радиотехника и электроника, 1969. Т. 14. № 9. С. 1673–1677.
157. Маслов В.П. Операторные методы. М.: Наука, 1973. 543 с.
158. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: МГУ, 1965. 553 с.
159. Маслов В.П. Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука. 1987. 408 с.

160. Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука. 1976. 296 с.
161. Мищенко А.С., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е. Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора. М.: Наука, 1976. 352 с.
162. Носиков И.А., Клименко М.В. Исследование функционала верхних и нижних лучей в задаче расчета радиотрасс в модельной ионосфере // Химическая физика. 2017. Т. 36. № 12. С. 61–65.
163. Орлов Ю.И. Особенности лучевых и каустических картин в неоднородном параболическом слое. // Изв. вузов: Радиофизика, 1977. Т. 20. № 11. С. 1669–1675.
164. Орлов Ю.И., Анютин А.П. О модификации лучевого метода в теории распространения радиосигналов в неоднородных диспергирующих средах // Изв. ВУЗов (Радиофизика). 1974. Т.17. № 9. С.1369–1377.
165. Пресняков В.Б., Савченко П.П. Численный расчет уровня сигнала на поверхности земли ОНЧ-излучателя, расположенного в ионосфере // Дифракция и распространение электромагнитных волн. М.: МФТИ, 1984. С. 98–100.
166. Савченко П.П., Слижевский О.В. Исследование влияния областей повышенной ионизации в ионосфере на распространение свистящих атмосфериков // Распространение и дифракция и электромагнитных волн. М.: МФТИ, 1993. С. 98–103.
167. Скворцова Ю.И., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Численное моделирование радиосигнала в анизотропной среде с учетом отклоняющего поглощения методом бихарактеристик // В сборнике: Проблемы военно-прикладной геофизики и контроля состояния природной среды Материалы V Всероссийской научной конференции. 2018. С. 381–387.
168. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: МФТИ, 1994. – 528 с.
169. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1985. С. 324–330.

170. Фролов В.Л. Искусственная турбулентность среднеширотной ионосферы. Нижний Новгород: ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2017. 468 с.
171. Черкашин Ю.Н. Применение метода параболического уравнения для расчета волновых полей в неоднородных средах //Радиотехника и электроника. 1971. Т. 16. № 1. С. 173–174.
172. Чернов Ю.А. Распространение радиоволн и прикладные вопросы. М.: Техносфера, 2017. 688 с.
173. Чистяков Д.Н., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Трехмерные пространственно-временные фокусировки радиоимпульсов в нестационарных диспергирующих средах. //Труды XII Всероссийской школы-конференции по дифракции и распространению волн. М., 19-23.12.2001, РосНОУ. Тез. докл. /М.: МФТИ (ГУ). 2001. Т. 2. С.456-459.
174. Berry M.V. Waves and Thom's theorem. // *Advances in Physics*, 1976. V. 25. № 1. P. 1–25.
175. Berry M.V., Upstill C. Catastrophe optics: morphologies of caustics and their diffraction patterns. // *Prog. Opt.: Amsterdam e.a.*, 1980, V. 18. № 18. P. 257–346.
176. Bova J.I., Kryukovskii A.S., Lukin D.S. Local asymptotics of unfoldings of edge and corner catastrophes // *Russian Journal of Mathematical Physics*, Vol. 27, No. 4, 2020, pp. 446–455. DOI 10.1134/S1061920820040044
177. Bova, Yu.I., Kryukovsky, A.S., Lukin, D.S., Rastyagaev, D.V. Features of the effect of the Earth's ionosphere on the field of an ordinary wave in the vicinity of the caustic // *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, 1632(1), 012005
178. Bova, Y.I., Kryukovsky, A.S., Kutuza, B.G., Lukin, D.S. The influence of the Earth's ionosphere on the polarization characteristics of a radio wave in the high-frequency range // 2019 Russian Open Conference on Radio Wave Propagation, RWP 2019 - Proceedings, 2019, p. 492–495, 8810248
179. Bova, Yu.I., Kryukovsky, A.S., Kutuza, B.G., Rastyagaev, D.V., Lukin, D.S. Mathematical modeling of the polarization characteristics of radio waves in the

- Earth's equatorial ionosphere // *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, 1632(1), 012009.
180. Bova, Y., Kryukovsky, A., Kutuza, B., Stasevich, V. The influence of ionospheric inhomogeneities on remote sensing of the Earth from space // *Proceedings of the European Conference on Synthetic Aperture Radar, EUSAR*, 2021, 2021-March, p. 902–907
181. Bova Yu.I., Kryukovsky A.S., Mikhaleva E.V. The Method of Local Asymptotic for Determining The Parameters of an Edge Catastrophe Describing The Joint Focusing of Geometric-Optical and Diffraction Waves //2019 Russian Open Conference on Radio Wave Propagation (RWP), 1-6 July 2019; / Russia, Kazan: IEEE. PP. 496 – 499.
182. Chester C., Friedman B., Ursell F. An extension of the method of the steepest descents. // *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1957. V. 53. № 3. P. 599 – 611.
183. Connor J.N.L. Catastrophes and molecular collisions//*Molec. Phys.*, 1976.V. 31. №1. P.33-55.
184. Connor J.N.L., Curtis P.R. A method for the numerical evaluation of the oscillatory integrals associated with the cuspid catastrophes: application to Pearcey's integral and its derivatives // *J. Phys. A.: Math. Gen.*, 1982. V. 15. № 4. P. 1179–1190.
185. Felsen L.B. Transients in dispersive media, part 1: theory // *IEEE Trans. on Ant. and Prop.* 1969. AP-17. № 2. P.191 – 200.
186. Hazelgrove J., Ray Theory and a New Method for Ray Tracing, // *Report Conference on Physics of the Ionosphere, London Phys., Soc.*, 1954. P. 355. (Русский перевод в сб. «Лучевое приближение и вопросы распространения радиоволн», М.: Наука, 1971. С. 36)
187. Ipatov E.B., Lukin D.S., Palkin E.A. Maslov canonical operator in problems of diffraction and propagation of waves in inhomogeneous media. //*Sov. J. Numer. Anal. & Math. Modelling.*, 1990. V.5. № 6. P. 465–488.
188. Ipatov E.B., Lukin D.S., Palkin E.A., Shkolnikov V.A. Maslov canonical operator in problems of diffraction and EM waves propagation in inhomogeneous

- media. //Papers of technical meeting on electromagnetic theory. /OFSET-90. The Institute of Electrical Engineers of Japan. 1990. P. 39–48.
189. Keller J.B. Geometrical theory of diffraction. // J. of the Optical Society of America. 1962. V.52. № 2. P.116–130.
190. Kiryanova K.S., Kryukovsky A.S., Lukin D.S. Simulation of decametric wave propagation un the ionospheric plasma. // Revista de Matematica. Teoria y Aplicaciones, 2013. V. 20. № 1. P.21-34.
191. Kiryanova K.S., Kryukovsky A.S., Lukin D.S., Rastyagaev D.V. Application of the extended bi-characteristic system method at radio-wave propagation modeling in the ionosphere of the Earth // Progress in Electromagnetics Research Symposium. (PIERS 2012 Moscow, 19–23.08.2012) 2012. C. 774.
192. Kryukovsky A.S., Bova Yu.Ig. Investigation of Catastrophe Parameters, Describing Structurally-Stable Focusings of Primary and Secondary Edge Waves by Local Asymptotic Method // 2019 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications. Moscow, Russia, 20-21 March 2019. / M.: IEEE, 2019, PP. 1 – 4.
193. Kryukovsky, A.S., Bova, Yu.I. Features of the Use of Symbolic Calculations for Constructing Wave Field Local Asymptotics Using Catastrophe Theory // Journal of Physics: Conference Series, 2020, 1632(1), 012002
194. Kryukovsky A.S., Lukin D.S., Rastyagaev D.V. Ray methods and special functions of wave catastrophes // 2020 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on-Board Communications. 2020. C. 9078599.
195. Kryukovsky, A.S., Lukin, D.S., Kutuza, B.G., Bova, Yu.I., Rastyagaev, D.V. Study of the Effect of the Equatorial Ionosphere Anomaly on the Polarizing Characteristics of HF Radio Waves // 2021 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications, Conference Proceedings, 2021, 9415981
196. Kryukovsky A.S., Lukin D.S., Palkin E.A. Uniform asymptotics for evaluating oscillatory edge integrals by methods of catastrophe theory // Soviet Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 1987. V. 2. № 4. P. 219 – 312.

197. Kryukovsky, A.S., Rastyagaev, D.V., Bova, Y.I., Popchenko, O.V. Mathematical Simulation of the Ray Propagation of Frequency-Modulated Radio Signals in the Ionospheric Plasma in the Presence of Local Inhomogeneities // Proceedings - 2020 7th All-Russian Microwave Conference, RMC 2020, 2020, p. 220–224, 9312340.
198. Kryukovskii A.S., Rastyagaev D.V., Lukin D.S. Construction of uniform asymptotic solutions of wave-type differential equations by methods of catastrophe theory // Russian Journal of Mathematical Physics. 2009. V. 16. № 2. P. 251-264.
199. Kryukovsky A.S., Rogachev S.V., Lukin D.S. Special Software for Computing the Special Functions of Wave Catastrophes. // Revista de Matematica: Teoria y Aplicaciones / San Pedro Montes de Oca, San Jose, Costa Rica: Universidad de Costa Rica, 2015. P. 21-30.
200. Kryukovsky A.S., Skvortsova Yu.I Rays and caustics in the coordinate-pulse subspaces precanonical Maslov operator for propagation in ionospheric plasma // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2016. Т. 10. № 9. С. 57–65.
201. Kutuza B.G., Bova Yu. Ig., Kryukovsky A.S., Stasevich V. Ig. Features of the Influence of the Earth's Ionosphere on the P-Band Propagation // The 12th European Conference on Synthetic Aperture Radar - EUSAR 2018, Aachen, Germany on June 4-7, 2018.
202. Kutuza B.G., Kalinkevitch A.A., Ephimov A.I., Vostrov E.A., Dzenkevitch A.B. Application of SAR Operating at P-band for Space Experiments // EUSAR'96: Proceedings. Germany, Konigswinter, 1996. P. 309-313.
203. Lewis R.M. Asymptotic theory of transients //In: Electromagnetic Wave Theory. Part 2. Ed. by J. Brown / N.Y.: Pergamon Press. 1967. P.845–869.
204. Ludwig D. Uniform asymptotic expansion at a caustic // Communications on Pure and Appl. Math., 1966. V. 19. № 2. P.215–250.
205. Ludwig D. Uniform asymptotic expansion of the field scattered by a convex object at high frequencies // Communications on Pure and Appl. Math., 1967. V. 20. № 1. P. 103–138.

206. Thom R. *Structural Stability and Morphogenesis* / tr. from French by D. H. Fowler. Benjamin-Addison-Welsey: New York. 1975. 345 p.
207. Wright F.J., Dangelmayr G. On the exact reduction of univariate catastrophe to normal form // *J. Phys. A.: Math. Gen.* 1985. V. 18. № 5. P. 749–764.